



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EXTENSIONES DE DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
BLANCA IVETT CORTES FLORES



DRA. HORTENSIA GALEANA-SANCHEZ
DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
2002
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Extensiones de digráficas núcleo perfectas
a digráficas núcleo imperfectas críticas"

realizado por Blanca Ivett Cortés Flores

con número de cuenta 9650521-4, quien cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez

H. Galeana

Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Hugo A. Rincón M.

Propietario Mat. Laura Pastrana Ramírez

Laura Pastrana R.

Suplente M. en C. María del Pilar Valencia Saravia

María del Pilar Valencia S.

Suplente Mat. Juana Martínez Martínez

Juana Martínez

Consejo Departamental de Matemáticas

Alba



M. en C. Alejandro Blandón Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE

MATEMÁTICAS

Índice general

1. CONEPTOS GENERALES	1
1.1 DEFINICIONES	1
1.2 RESULTADOS PRELIMINARES	3
2. APLICACIONES	
2.1 APLICACIÓN EN TEORÍA DE JUEGOS	11
2.2 BASE DE AXIOMAS	12
2.3 JUEGO ENTRE DOS PERSONAS	12
2.4 UN PROBLEMA DE COMBINATORIA EN LÓGICA	13
3. EXTENDIENDO DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS	15
3.1 s -SISTEMAS Y s -EXTENSIONES	15
3.2 EXTENDIENDO DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS	33
4. NUEVAS EXTENSIONES DE DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS	37
4.1 INTRODUCCIÓN	37
4.2 τ_1 -SISTEMAS	45
4.3 τ -SISTEMAS Y τ -EXTENSIONES	61
4.4 τ_1 -CONSTRUCCIONES	77
BIBLIOGRAFÍA	85

AGRADECIMENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mis padres, que en todo momento me han apoyado.

A mis hermanas y familia con cariño.

Particularmente, agradezco a la familia Quintanar Cortés. A mi hermana Pato por su constante apoyo, su cariño y comprensión. A mi cuñado Luis que siempre me ha brindado su ayuda. A esos niños tan lindos Quique, Tane y Petit, por su cariño y alegría.

De manera muy especial quiero agradecer a quien dirigió esta tesis, Dra. Hortensia Galeana Sánchez, por todo el aprendizaje que he tenido la oportunidad de obtener durante la realización de este trabajo, que es una gran crecimiento en mi formación académica. Gracias Hortensia, por tu comprensión y apoyo.

A mi sinodal Mat. Laura Pastrana Ramírez, por todo su apoyo, sus amables y valiosos comentarios, sugerencias y todo su tiempo dedicado a mejorar esta tesis y mi formación profesional.

A mis sinodales Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, M. en C. María del Pilar Valencia Saravia y Mat. Juana Martínez Martínez, por sus valiosos comentarios y sugerencias. Por su atención y tiempo dedicados a la revisión y mejoramiento de este trabajo.

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias, con los que tuve la oportunidad de tomar clases. Por hacer su labor con mucho entusiasmo y cariño. Por tener siempre un trato amable y respetuoso conmigo. Por ser siempre sensibles a las inquietudes y pensamientos de sus alumnos. Por ser siempre concientes de la situación de nuestro país y del mundo. Por todo aquello que los hace ser, además de grandes científicos y maestros, excelentes seres humanos.

A todos los amigos que han estado a mi lado en el camino de las matemáticas.

A toda la gente que ha dado alegría a mi vida y que estando cerca o lejos, siempre siento su cariño.

A todos ustedes mi agradecimiento y cariño.

Blanca Ivett Cortés Flores.

Marzo del 2002.

Introducción

Von Neumann [23] consideró por primera vez el concepto de núcleo de una digráfica en la Teoría de Juegos y lo llamó "solución de un juego de cooperación entre n personas".

Posteriormente Claude Berge [2] notó que dicho concepto era de utilidad en otros contextos y propuso llamarlo "núcleo de una digráfica" para demostrar teoremas de existencia. Diversos autores han investigado condiciones suficientes sobre la existencia de núcleos en una digráfica, por ejemplo Von Neumann y Morgenstern [23], Richardson [20] a [22], Duchet y Meyniel [7] a [10], Galeana-Sánchez [24] y Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [13, 19].

En 1976, C. Berge [3] propuso caracterizar las digráficas núcleo críticas, que son digráficas sin núcleo tales que la eliminación de cualquier vértice produce una digráfica con núcleo. Los ciclos impares son ejemplos de este tipo de digráficas. Sin embargo, en 1980, [8] Berge y algunos de sus colaboradores consideraron conveniente investigar digráficas minimales sin núcleo (digráficas sin núcleo tales que toda subdigráfica inducida propia tiene núcleo), a las que llamaron "núcleo imperfectas críticas". En el mismo año, independientemente, Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara consideraron las mismas digráficas, llamándolas " R^- -digráficas" [13].

Las digráficas núcleo imperfectas críticas y núcleo perfectas son la base de estudio de esta tesis, en la cual se estudian tres operaciones con digráficas que permiten construir familias de digráficas núcleo imperfectas críticas. Estas importantes operaciones han sido desarrolladas por H. Galeana Sánchez y V. Neumann-Lara quienes las han llamado "s-construcciones" [16], " τ_1 -construcciones" [17] y " τ -construcciones" [17] y [18].

En [15], se puede encontrar otra construcción que no se estudia en este trabajo.

A continuación se da una breve descripción de los capítulos de esta tesis y se explica el por qué de la importancia de estas operaciones.

En la sección 1 del capítulo I se definen los conceptos básicos de la Teoría de Digráficas que se utilizarán en este trabajo. En la sección 2 se demuestran

resultados importantes sobre digráficas núcleo imperfectas críticas y núcleo perfectas que nos serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

En las secciones 1, 2, 3 y 4 del capítulo II se dan las siguientes aplicaciones (respectivamente): Aplicación en la Teoría de Juegos [23], Base de Axiomas [5], Juego entre dos personas [5] y Un problema de Combinatoria en Lógica [4].

En la sección 1 del capítulo II se estudia la "s-construcción", que nos permite generar una amplia clase de digráficas núcleo imperfectas críticas [16]. Esta construcción tiene gran importancia ya que durante varios años, las únicas digráficas núcleo imperfectas críticas que se conocieron fueron los ciclos impares y las digráficas $\bar{C}_7(1, 2)$, $\bar{C}_{11}(1, 2, 4)$.

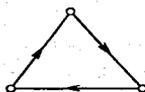


Figura 1: \bar{C}_3

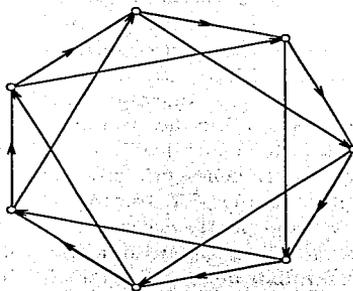


Figura 2: $\bar{C}_7(1, 2)$

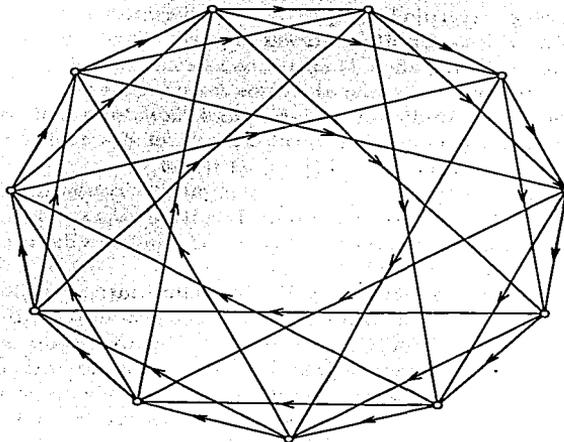


Figura 3: $\vec{C}_{11}(1, 2, 4)$

En el área de planaridad de la Teoría de Gráficas se demuestra el Teorema de Kuratowski, que es una caracterización de las gráficas planas por medio de subdigráficas prohibidas y dice: "Una gráfica G es plana si y sólo si no contiene subgráficas isomorfas a K_5 ó $K(3,3)$ ó cualquier subdivisión de K_5 ó $K(3,3)$ " [6]. En la Teoría de Digráficas se demuestra que una digráfica D es núcleo perfecta si y sólo si no contiene subdigráficas inducidas núcleo imperfectas críticas. Entonces bastaría caracterizar a la clase de las digráficas núcleo imperfectas críticas para poder caracterizar a las núcleo perfectas por subdigráficas prohibidas (de manera anloga al teorema de kuratowski en gráficas planas). Sin embargo, esto no es posible, ya que toda digráfica núcleo perfecta se puede extender a una digráfica núcleo imperfecta crítica que la contiene como subdigráfica inducida [16] (teorema (3.2.1) de esta Tesis).

El teorema (3.2.1) se demuestra en la sección 2 del capítulo III utilizando la s -construcción, y permite extender cualquier digráfica núcleo perfecta a una digráfica núcleo imperfecta crítica.

En las secciones 1 y 2 del capítulo IV se estudia la " τ_1 -construcción" y la " τ -construcción" (respectivamente), presentadas por H. Galeana Sánchez y V- Neumann-Lara [17], que son una generalización parcial del método

desarrollado en el capítulo III y que también permiten extender una digráfica núcleo perfecta a una digráfica núcleo imperfecta crítica.

Se dice que una digráfica D satisface la condición de k -Meyniel, si todo ciclo dirigido impar de D tiene al menos k diagonales.

El estudio de la condición de k -Meyniel ha sido la base de varios problemas interesantes, preguntas y resultados en el desarrollo de la Teoría de Núcleos (ver por ejemplo [10], [11], [9], [13], [14]).

En 1976 H. Meyniel [8] planteó la siguiente conjetura: "Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido de longitud impar contiene al menos 2 diagonales, entonces D es núcleo perfecta". H. Galeana dió un contraejemplo a esta conjetura en el año de 1982 [12].

En [18], H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara presentaron un método que permite obtener (utilizando la τ_1 -construcción) digráficas núcleo imperfectas críticas tales que todo ciclo dirigido impar contiene al menos k -diagonales, para cada número natural k . Es decir, a partir de dicho corolario se puede obtener una extensa variedad de contraejemplos a la conjetura planteada por H. Meyniel. Este método se desarrolla en la sección 4 del capítulo IV.

Capítulo 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo se introducen los conceptos básicos de la Teoría de Digráficas que se utilizan a lo largo de esta tesis. Y se demuestran algunos resultados importantes sobre digráficas núcleo imperfectas críticas y núcleo perfectas.

1.1. DEFINICIONES

Definimos una digráfica D como un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices, denotado por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos elementos de $V(D)$ llamados flechas y denotada por $F(D)$.

Denotaremos por $f = (u_1, u_2)$ a la flecha que une u_1 con u_2 . Diremos que f incide hacia u_2 y que f incide desde u_1 .

Definimos el ingrado de un vértice v como el número de flechas que inciden hacia v . Lo denotaremos por $\delta_D^-(v)$. Definimos el exgrado de un vértice v como el número de flechas que inciden desde v . Lo denotaremos por $\delta_D^+(v)$.

Denotaremos el complemento de un conjunto A por A^c .

Dos digráficas D y D' son isomorfas si existe una correspondencia uno a uno $\phi: V(D) \rightarrow V(D')$ tal que $u, v \in V(D)$ son adyacentes en D si y sólo si los vértices $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son adyacentes en D' . Escribimos $D \cong D'$.

Un conjunto $I \subset V(D)$ es independiente si para cualesquiera par de vértices $u, v \in I$, $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$. Un conjunto formado por un vértice siempre es un conjunto independiente. Un conjunto $S \subset V(D)$ es

absorbente si para cualquier $u \in V(D) - \bar{S}$, existe una flecha de u a S .

Un conjunto no vacío $N \subset V(D)$ es núcleo de D , si N es independiente y absorbente.

Observemos que no toda digráfica tiene núcleo y que si una digráfica tiene núcleo, éste no es necesariamente único.

Es fácil ver que los ciclos impares \bar{C}_{2n+1} no tienen núcleo y que los ciclos pares \bar{C}_{2n} tienen dos núcleos.

Dada una digráfica D y $u \in V(D)$, definimos a $\Gamma^+(u) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$ como el conjunto de los sucesores de u . Definimos a $\Gamma^-(u) = \{v \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$ como el conjunto de los predecesores de u .

D_0 es una subdigráfica de D si D_0 es una digráfica con $V(D_0) \subseteq V(D)$ y $F(D_0) \subseteq F(D)$. escribiremos $D_0 \subseteq D$. D_0 es una subdigráfica inducida de D si D_0 es una subdigráfica de D , donde $(u, v) \in F(D)$ si y solamente si $(u, v) \in F(D_0)$. Escribiremos $D_0 \subseteq^* D$. D_0 es una subdigráfica generadora de D si D_0 es una subdigráfica de D con $V(D_0) = V(D)$.

Si $S_1, S_2 \subseteq V(D)$, la flecha $u_1 u_2$ de D será llamada una $S_1 S_2$ - flecha siempre que $u_1 \in S_1$ y $u_2 \in S_2$. $D[S_1]$ denotará la subdigráfica de D inducida por S_1 y $D[S_1, S_2]$ la subdigráfica de D con conjunto de vértices $S_1 \cup S_2$ y cuyas flechas son las $S_1 S_2$ - flechas de D .

Una flecha $u_1 u_2 \in F(D)$ es llamada asimétrica (resp. simétrica) si $u_2 u_1 \notin F(D)$ (resp. $u_2 u_1 \in F(D)$) La parte asimétrica de D (resp. simétrica de D) será denotada por $Asim(D)$ (resp. $Sim(D)$), es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas (resp. simétricas) de D . Diremos que D es una digráfica orientada si $Asim(D) = D$.

Un camino dirigido en una digráfica D , se define como una sucesión de vértices (v_0, v_1, \dots, v_n) donde cada flecha $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$. La longitud de un camino dirigido $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ es n , el número de flechas que aparecen en él y se denotará por $l(C)$. Un camino dirigido cerrado es aquél en el que coinciden el vértice final y el vértice inicial. Un camino generador contiene a todos los vértices de la digráfica.

Una trayectoria dirigida es un camino dirigido en el cual los vértices son distintos dos a dos. Si la trayectoria dirigida empieza en u y termina en v , diremos que es una uv -trayectoria dirigida.

Un ciclo dirigido es un camino dirigido cerrado no trivial con todos los puntos distintos (con excepción del primero y el último). El ciclo de longitud n será denotado por \bar{C}_n .

Sea C un ciclo dirigido de D , si $u, v \in V(C)$, denotamos por (u, C, v) la trayectoria dirigida de u a v contenida en C .

Una digráfica es fuerte o fuertemente conexa si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ existe una uv -trayectoria dirigida y una vu -trayectoria

dirigida. Notemos que la digráfica trivial es fuertemente conexa.

Una componente fuerte de una digráfica D es una subdigráfica de D , D_0 , tal que D_0 es fuertemente conexa y máxima por contención con esa propiedad.

Para conceptos que no estén definidos aquí se puede consultar [1], [5].

1.2. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se dan las definiciones de digráficas **núcleo perfectas (N.P.)**, **núcleo imperfectas críticas (N.I.C.)** y **cuasi núcleo perfectas**. Además se demuestra un teorema de caracterización de digráficas núcleo perfectas, se dan algunas condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta y algunas propiedades de digráficas núcleo imperfectas críticas.

Todos estos resultados son de gran utilidad en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Definición 1.2.1.

Decimos que una digráfica D es **núcleo perfecta (N.P.)**, si D tiene núcleo y cada subdigráfica inducida de D tiene núcleo. Los ciclos dirigidos de longitud par son núcleo perfectas.

Definición 1.2.2.

Decimos que una digráfica es **núcleo imperfecta crítica (N.I.C.)**, si D no tiene núcleo pero todas las subdigráficas inducidas propias de D sí tienen núcleo. Los ciclos dirigidos de longitud impar son núcleo imperfectas críticas.

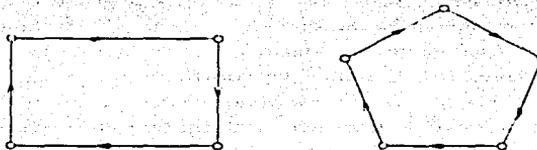


Figura 1.1:

Definición 1.2.3.

Decimos que una digráfica es *cuasi núcleo perfecta* si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo. Una digráfica cuasi núcleo perfecta es núcleo perfecta o bien núcleo imperfecta crítica, dependiendo de si tiene núcleo o no.

Teorema 1.2.1. *Toda digráfica D sin núcleo contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica.*

Demostración.

Sea D una digráfica sin núcleo. Si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, entonces D es núcleo imperfecta crítica. Si existe una subdigráfica inducida propia de D que no tiene núcleo, sea H_1 . Si toda subdigráfica inducida propia de H_1 tiene núcleo, entonces H_1 es núcleo imperfecta crítica. Si existe una digráfica inducida propia de H_1 que no tiene núcleo, sea H_2 y toda subdigráfica inducida propia de H_2 tiene núcleo, entonces H_2 es núcleo imperfecta crítica. Así llegamos a una digráfica H_i sin núcleo tal que las subdigráficas inducidas propias de H_i tienen núcleo entonces H_i es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto D contiene una subdigráfica núcleo imperfecta crítica. □

Teorema 1.2.2. *Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición de $V(D)$ en dos conjuntos $\{V_1, V_2\}$ existe V_1V_2 -flecha y V_2V_1 -flecha.*

Demostración.

Sean $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(D)$, $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$. Como D es fuertemente conexa, existen T_1 una x_1x_2 -trayectoria dirigida y T_2 una x_2x_1 -trayectoria dirigida en D . Sean $T_1 = (x_1, y_1, \dots, y_n, x_2)$ y $y_1 \in V(T_1)$ el primer vértice de T_1 que está en V_2 , entonces $y_{i-1} \in V_1$. Por lo tanto (y_{i-1}, y_i) es una V_1V_2 -flecha. Análogamente, tomando T_2 , existe una V_2V_1 -flecha.

Recíprocamente, procederemos por contraposición.

Supongamos que D no es fuertemente conexa. Entonces existen $x, y \in V(D)$ tales que no existe xy -trayectoria dirigida en D . Sean $V_1 = \{z \in V(D) \mid \exists xz\text{-trayectoria dirigida en } D\}$ y $V_2 = V(D) - V_1$. Notemos que $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$ ya que $x \in V_1$ y $y \in V_2$. Por definición de V_1 y V_2 , tenemos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(D)$.

Probaremos que no existe V_1V_2 -flecha.

Supongamos que si existe V_1V_2 -flecha, sea (w_1, w_2) tal que $w_1 \in V_1$, $w_2 \in V_2$, entonces existe xw_1 -trayectoria dirigida en D , sea T_1 . Ahora, $T_1 \cup$

(w_1, w_2) es una xw_2 -trayectoria dirigida en D . Por lo tanto $w_2 \in V_1$. Entonces $w_2 \in V_1 \cap V_2$, lo cual contradice que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Concluimos que no existe $V_1 V_2$ -flecha. □

Teorema 1.2.3. *Una digráfica D es núcleo perfecta si y sólo si D no contiene subdigráficas inducidas núcleo imperfectas críticas.*

Demostración.

Sea H una subdigráfica inducida de D . Como D es núcleo perfecta entonces H tiene núcleo. Por lo tanto H no es núcleo imperfecta crítica.

Entonces para toda $H \subseteq^* D$, H no es núcleo imperfecta crítica.

Recíprocamente, sea $H \subseteq^* D$.

Por hipótesis, H no es núcleo imperfecta crítica. Entonces H tiene núcleo o existe una subdigráfica inducida propia de H que no tiene núcleo.

Si existe una subdigráfica inducida propia de H que no tenga núcleo, sea H' , entonces H' contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H'' ; $H'' \subseteq^* H' \subseteq^* H \subseteq^* D$. Lo cual contradice la hipótesis de que D no contiene subdigráficas núcleo imperfectas críticas.

Por lo tanto H tiene núcleo, para cada subdigráfica inducida de D , por lo tanto D es núcleo perfecta. □

Teorema 1.2.4. *Si D es una digráfica y $V(D)$ tiene una partición $\{V_1, V_2\}$ tal que toda $V_1 V_2$ -flecha en D es simétrica y $D[V_1]$ y $D[V_2]$ son núcleo perfectas. Entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración.

Suponemos que D no es núcleo perfecta. Entonces existe una subdigráfica inducida de D , sea H , tal que H no tiene núcleo. Si $H \subset D[V_1]$ ó $H \subset D[V_2]$ entonces D tiene núcleo, ya que $D[V_1]$ y $D[V_2]$ son núcleo perfectas.

Entonces $D[V_1]$ contiene una parte de H y $D[V_2]$ otra parte. Sean $H_1 = H \cap D[V_1]$ y $H_2 = H \cap D[V_2]$; H_1 tiene núcleo ya que $H_1 \subseteq^* D[V_1]$, sea N_1 . Análogamente H_2 tiene núcleo, sea N_2 . Sea $H_3 = H_2 - B$, donde $B = \{v_2 \in V(H_2) \mid (v_2, v_1) \in F(D), v_1 \in N_1 \text{ con } v_2 \in H_2 \text{ y } v_1 \in H_1\}$. Claramente $H_3 \subset H_2 \subset D[V_2]$, por lo tanto H_3 tiene núcleo, sea N_3 .

Tomemos $N_1 \cup N_3 = N$.

Probaremos que N es independiente.

N_1 es independiente en D , ya que es núcleo de H_1 y H_1 es, por construcción, una subdigráfica inducida de D . Análogamente N_3 es independiente en

D . Además, no existen N_3N_1 -flechas en D , ya que $N_3 \subset H_3$ (por construcción de H_3 y B). No existen N_1N_3 -flechas en D . Supongamos que sí existe una N_1N_3 -flecha sea $f = (v_1, v_2)$; por hipótesis toda V_1V_2 -flecha es simétrica en D entonces $(v_2, v_1) = f_1 \in F(D)$ pero f_1 es una N_3N_1 -flecha, y ya se dijo que no existen N_3N_1 -flechas.

Entonces N es independiente.

Ahora, N_3 absorbe a todo vértice de H_3 , N_1 absorbe a todo vértice de B por definición de B y ya que N_1 es núcleo de H_1 . Es decir, N es absorbente.

Concluimos que N es núcleo de H , lo cual contradice la elección H .

Entonces toda subdígrafa inducida de D tiene núcleo (incluyendo a D). Por lo tanto D es núcleo perfecta. Lo cual contradice que D no es núcleo perfecta. Por lo tanto, D es núcleo perfecta. □

Teorema 1.2.5. *Si D es una dígrafa núcleo imperfecta crítica entonces no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subset Sim(D)$. Además, $Asim(D)$ es fuertemente conexa.*

Demostración.

Supongamos que D es núcleo imperfecta crítica. Por el teorema (1.2.4) no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subset Sim(D)$.

Demostremos que $Asim(D)$ es fuertemente conexa.

Por contrapuesta.

Supongamos que $Asim(D)$ no es fuertemente conexa. Por el teorema (1.2.2) existe una partición de $V(AsimD)$ en dos conjuntos $\{V_1, V_2\}$ tal que no existe V_1V_2 -flecha asimétrica de D ó no existe V_2V_1 -flecha asimétrica de D entonces $D[V_1, V_2] \subset Sim(D)$ ó $D[V_2, V_1] \subset Sim(D)$. Además, por ser D núcleo imperfecta crítica, $D[V_1]$ y $D[V_2]$ son núcleo perfectas. Entonces, por el teorema (1.2.4), D es núcleo perfecta. Lo cual contradice la hipótesis de que D es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto $AsimD$ es fuertemente conexa.

Ahora, tomemos una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(AsimD)$. Como $AsimD$ es fuertemente conexa, entonces por el teorema (1.2.2), existe V_1V_2 -flecha en $AsimD$ y V_2V_1 -flecha en $AsimD$. Además, $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(D)$, ya que $V(AsimD) = V(D)$.

Por lo tanto, para toda partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$, $D[V_1, V_2] \not\subset SimD$. □

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema (1.2.5)

Corolario 1.2.1. *Toda digráfica núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa.*

Corolario 1.2.2. *Si D es una digráfica tal que $Asim(D)$ es acíclica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración.

Por contradicción.

Supongamos que D no es núcleo perfecta, entonces existe H una subdigráfica inducida de D tal que H es núcleo imperfecta crítica. Sea T_1 una trayectoria dirigida en $Asim(H)$, supongamos que T_1 va de u a v . Por el teorema (1.2.5), $Asim(H)$ es fuertemente conexa, entonces existe una *vu*-trayectoria dirigida en $Asim(H)$, sea T_2 . Como $T_1, T_2 \subset Asim(H)$ entonces $l(T_1) \geq 2$ ó $l(T_2) \geq 2$, de lo contrario existiría una flecha simétrica. Sean $T_1 = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$ y $T_2 = (u = y_m, y_{m-1}, \dots, y_1, y_0 = v)$ con $n \geq 2$ ó $m \geq 2$. Si $x_i \neq y_j$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ y para todo $j = 1, \dots, m-1$ entonces $T_1 \cup T_2$ es un ciclo en $Asim(H)$.

Si $x_i = y_j$ para algún o algunos $i = 1, \dots, n-1$ ó $j = 1, \dots, m-1$. Sea y_j el primer vértice de T_2 tal que $y_j \in V(T_1)$ entonces $y_j = x_i$ para algún $i = 1, \dots, n-1$, $x_i \in V(T_1)$. Entonces $(x_i = y_j, T_1, v) \cup (v, T_2, y_j = x_i)$ es un ciclo en $Asim(H)$.

Es decir, $Asim(H)$ contiene un ciclo. Y como $Asim(H) \subset Asim(D)$, entonces $Asim(D)$ contiene un ciclo. Lo cual contradice la hipótesis de que $Asim(D)$ es acíclica. Por lo tanto D es núcleo perfecta. □

El siguiente corolario es consecuencia directa del corolario (1.2.2).

Corolario 1.2.3. *Toda digráfica sin ciclos es núcleo perfecta.*

Como una aplicación del corolario (1.2.2) obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.6. *Si $Asim(D) = \vec{C}_n$ entonces D es cuasi núcleo perfecta y $D - f$ es núcleo perfecta, para toda $f \in F(Asim(D))$.*

Demostración.

Sea H una subdigráfica inducida propia de D . Por ser H propia, existe al menos un vértice $v \in V(D)$ tal que $v \notin V(H)$, entonces $Asim(H)$ es acíclica, ya que $Asim(H) \subsetneq Asim(D) = \vec{C}_n$. Entonces por el corolario (1.2.2), H es núcleo perfecta.

Ahora, $Asim(D - f)$ no tiene ciclos para toda $f \in F(Asim(D))$, ya que $Asim(D) = \bar{C}_n$. Entonces, por el corolario (1.2.2) $D - f$ es núcleo perfecta. \square

El siguiente teorema también es una consecuencia del teorema (1.2.5)

Teorema 1.2.7. *Una digráfica D es núcleo perfecta si y sólo si para toda componente fuertemente conexa α de $Asim(D)$, $D[V(\alpha)]$ es núcleo perfecta.*

Demostración.

Por hipótesis D es núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida de D es núcleo perfecta, en particular $D[V(\alpha)]$ es núcleo perfecta, para toda α componente fuertemente conexa de la parte simétrica de D .

Recíprocamente, supongamos que D no es núcleo perfecta, entonces por el teorema (1.2.3) existe H una subdigráfica inducida de D tal que H es núcleo imperfecta crítica; $H \subseteq^* D$.

Por el teorema (1.2.5), $Asim(H)$ es fuertemente conexa y por lo tanto H es una subdigráfica inducida de $D[V(\alpha)]$, para α una componente fuertemente conexa de $Asim(D)$. Lo cual contradice que $D[V(\alpha)]$ es núcleo perfecta. Por lo tanto D es núcleo perfecta. \square

Definición 1.2.4.

Definimos $C = \bar{C}_n(j_1, j_2, \dots, j_k)$ como sigue:

$$V(C) = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

y

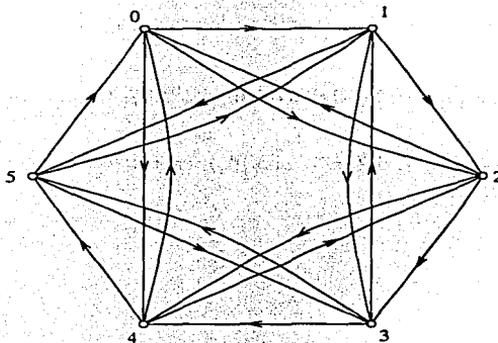
$$F(C) = \{uv \mid v - u \equiv j_s \pmod{n} \text{ con } s = 1, \dots, k\}$$

La digráfica de la figura 1.2 es un ejemplo de este tipo de digráficas.

Definición 1.2.5.

Definimos \bar{P}_n como la trayectoria dirigida de longitud $n - 1$, donde:

$$V(\bar{P}_n) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{y} \quad F(\bar{P}_n) = \{(i, i + 1) \mid i = 0, \dots, n - 2\}$$

Figura 1.2: $\vec{C}_6(1, \pm 2)$

Teorema 1.2.8. Si $2 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ entonces $C = \vec{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r)$ es núcleo perfecta o núcleo imperfecta crítica, dependiendo de si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$ ó $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$, respectivamente.

Demostración.

Claramente $Asim(C) = \vec{C}_n$, ya que $\pm 2, \pm 3, \dots, \pm r$ forman flechas simétricas. Entonces, por el teorema (1.2.6) C es quasi núcleo perfecta.

Demostremos que D tiene núcleo si y sólo si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$.

Justificación

Si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$, tenemos que $\{i \mid i \equiv 0 \pmod{r+1}\}$ es núcleo de C .

Recíprocamente, sea N un núcleo de C . Si $u \in N$, entonces $u+1, u \pm 2, \dots, u \pm r \notin N$, ya que $(u \pm k)u \in F(C)$, para todo $k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r\}$. Entonces $u+(r+1) \in N$. Análogamente $u+r+1 \pm k \notin N$ y $u+(r+1)+(r+1) \in N$. Es decir,

$u + m(r+1) \in N$ con $m \in \mathbb{Z}$, ya que N es absorbente. Además N es independiente, por lo que tendremos $n \equiv 0 \pmod{r+1}$.

Entonces si $n \equiv 0 \pmod{r+1}$ entonces D tiene núcleo, además D es quasi núcleo perfecta.

Por lo tanto D es núcleo perfecta.

Análogamente, si $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$ entonces D es núcleo imperfecta crítica. □

Como un caso particular del teorema (1.2.8), tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.4. $\bar{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ es núcleo imperfecta crítica para $n \geq 4$

Capítulo 2

APLICACIONES

En este capítulo se dan algunas aplicaciones de la Teoría de Núcleos en varios campos.

2.1. APLICACIÓN EN TEORÍA DE JUEGOS

Von Neumann[23]

Von Neumann presentó por primera vez el concepto de núcleo con el nombre de *solución* en la Teoría de Juegos, con el siguiente ejemplo:

Se tiene un conjunto X de situaciones entre las cuales n personas deben discutir y elegir un elemento $x \in X$ (una situación). Para lo cual deben establecer la preferencia de una situación sobre las demás; estableciendo primero una relación de preferencia entre algunos pares de situaciones. Veamos ahora cómo (con qué criterio) establecer una relación de equivalencia entre un par de situaciones. Lo que interesa es una elección de grupo por lo que la preferencia individual no será considerada. Lo mejor sería que las n personas prefirieran una situación a sobre una b , pero esto difícilmente se da.

Para definir la preferencia efectiva, diremos que a es efectivamente preferida a la situación b , si de entre las n personas existe un grupo de personas capaces de juntas obligar o imponer la preferencia de a sobre b .

El conjunto de situaciones y la relación de preferencia efectiva que se da en algunos pares de situaciones, define de manera natural una digráfica D . Donde $X = V(D)$ y $(a, b) \in F(D)$ si b es efectivamente preferida sobre a . De tal manera, la solución del problema se reduce a elegir un elemento dentro del núcleo. Si N es un núcleo de D , el punto buscado debe estar en N , ya que por ser N independiente, no existen flechas entre puntos de N , así ningún punto (situación) de N es efectivamente preferible a otro punto

en N . Y si $x \notin N$ entonces existe otra situación en N que es efectivamente preferida a X , ya que N es absorbente.

2.2. BASE DE AXIOMAS

C. Berge [5]

Consideremos una teoría, esto es, un conjunto de proposiciones $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ y se quiere determinar una base de axiomas para esta teoría, esto es, un conjunto N de proposiciones (de entre las proposiciones a_1, a_2, \dots) tales que:

1. Cada proposición que no está en N se sigue de alguno de los axiomas.
2. Ningún axioma se deduce de otro.

Este problema se representa con una digráfica D , donde $V(D) = S$. Tenemos que $a_i \Rightarrow a_j$ con $i \neq j$ si y sólo si $(a_j, a_i) \in F(D)$. Así, por construcción, la digráfica D es transitiva, esto es, si $(a_i, a_j) \in F(D)$ y $(a_j, a_k) \in F(D)$ con $i \neq k \neq j$ entonces $(a_i, a_k) \in F(D)$. Ya que si $a_j \Rightarrow a_i$ y $a_k \Rightarrow a_j$ entonces $a_k \Rightarrow a_i$.

Supongamos que N es un núcleo de D , entonces si $a_1 \notin N$ entonces existe $a_i \in N$ tal que $(a_1, a_i) \in F(D)$, por ser N absorbente. Así, N cumple la condición (1).

Además, si $a_i, a_j \in N$ entonces $(a_i, a_j) \notin F(D)$ y $(a_j, a_i) \notin F(D)$, por lo que N cumple la condición (2).

Por lo tanto el problema de encontrar una base de axiomas para una teoría se reduce a encontrar un núcleo de la digráfica D ; éste existe ya que se ha demostrado que toda digráfica transitiva tiene núcleo.

2.3. JUEGO ENTRE DOS PERSONAS

C. Berge [5]

Dados dos jugadores A, B y una digráfica D , se define el juego siguiente:

Se fija el punto inicial x_0 . El jugador A escoge uno de los vértices sucesores de x_0 , sea x_1 dicho vértice. Luego, el jugador B elige uno de los vértices sucesores de x_1 , digamos x_2 . Después A elige un sucesor de x_2 y así sucesivamente. Pierde el jugador que ya no puede elegir un vértice.

Claramente, si D tiene ciclos, el juego puede no terminar. Ahora, si D tiene un núcleo N , el jugador que escoge un punto en N empata o gana, ya

que los puntos de N absorben al resto de los vértices de D , por lo que un punto fuera del núcleo siempre tendrá sucesor en N , en cambio un punto dentro del núcleo no tendrá sucesor en N ya que N es independiente.

2.4. UN PROBLEMA DE COMBINATORIA EN LÓGICA

C. Berge [4]

Consideremos un conjunto de propiedades $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ y un conjunto de teoremas T , del tipo: propiedad P_i implica propiedad P_j ; donde $P_i, P_j \in T$ y $T \subset P$. Los teoremas se pueden representar por una digráfica D con $V(D) = T$ y $(P_i, P_j) \in F(D)$ si y sólo si se sigue de uno o más de los teoremas dados que P_i implica P_j . Ahora, si D^c es la digráfica complemento de D , tendremos que $V(D^c) = V(D)$ y $(P_i, P_j) \in F(D)$ si y sólo si $(P_i, P_j) \notin F(D^c)$ o bien que $V(D^c) = V(D)$ y $(P_i, P_j) \in F(D^c)$ si y sólo si $(P_i, P_j) \notin F(D)$.

Se quiere demostrar que la teoría representada en D está completa, esto equivale a decir que todas las implicaciones representadas por las flechas de D^c son falsas. Es decir, que $p \not\Rightarrow q$ para cada $(p, q) \in F(D^c)$ con $p \neq q$. Para lo cual se tiene que dar un contraejemplo de la afirmación $p \Rightarrow q$. Cada estudiante dará un contraejemplo a una de las afirmaciones $p \Rightarrow q$ (con $(p, q) \in F(D^c)$ y $p \neq q$).

Determinaremos el mínimo número de estudiantes necesarios para encontrar todos los contraejemplos.

Consideremos la digráfica D de la figura 2.1.

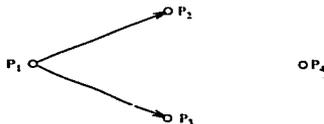


Figura 2.1:

D^c es la digráfica de la figura 2.2.

Es suficiente probar que las implicaciones representadas por las flechas 3,4,5,7 y 10 de D^c son falsas, es decir, que $P_1 \not\Rightarrow P_4$, $P_2 \not\Rightarrow P_4$, $P_2 \not\Rightarrow P_3$, $P_3 \not\Rightarrow P_2$, y $P_4 \not\Rightarrow P_3$. De aquí se sigue la falsedad de las otras posibles

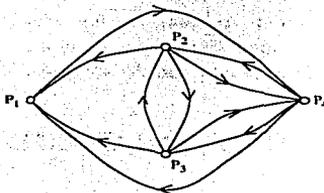


Figura 2.2:

implicaciones. Por ejemplo, si $P_2 \Rightarrow P_1$, de D se tiene que $P_1 \Rightarrow P_3$, entonces $P_2 \Rightarrow P_3$, lo cual contradice la afirmación de que la flecha (P_2, P_3) es falsa ($P_2 \not\Rightarrow P_3$); por lo que debe suceder que $P_2 \not\Rightarrow P_1$. Análogamente debe suceder que $P_3 \not\Rightarrow P_1$, $P_2 \not\Rightarrow P_4$, $P_3 \not\Rightarrow P_4$, $P_4 \not\Rightarrow P_1$. Ahora, tomemos una digráfica H tal que $V(H) = F(D^c)$ y $(n, m) \in F(H)$ si y sólo si "la implicación n es verdadera" implica la "la implicación m es verdadera".



Figura 2.3:

En H , el conjunto $N = \{3, 4, 5, 7, 10\}$ es un núcleo, es decir, es absorbente e independiente. Como N es el único núcleo de H , se sigue que cinco contraejemplos son necesarios para mostrar que todas las implicaciones de D son falsas. Si se demuestra que todo elemento de N es una proposición falsa, entonces todo elemento de $D - N$ es una proposición falsa, ya que N es absorbente. Ahora, N es el mínimo número de proposiciones de las cuales se necesita demostrar su falsedad. Si no se demuestra la falsedad de una proposición de N , ésta no se puede demostrar a partir de los otros elementos de N , pues no existen flechas entre vértices de N , por ser N independiente.

Capítulo 3

EXTENDIENDO DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS

En este capítulo se definen los conceptos de s_0 -sistema y s -sistema que se utilizan para desarrollar la s -construcción.

3.1. s -SISTEMAS y s -EXTENSIONES

En esta sección se desarrolla la s -construcción y se demuestran varios teoremas para poder llegar al teorema principal (3.1.3) que nos permite generar una amplia clase de digráficas núcleo imperfectas críticas.

Definición 3.1.1.

Sea D_0 una digráfica. Llamaremos a la cuaterna $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ un s_0 -sistema (sobre D_0) si satisface:

- (i) U , U_+ y U_- son conjuntos de vértices con la misma cardinalidad y $U \subseteq V(D_0)$
- (ii) $V(D_0)$, U_+ , U_- son conjuntos mutuamente ajenos (ajenos dos a dos).

En lo subsecuente, si $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0 -sistema, denotaremos por u_+ (resp. u_-) el vértice en U_+ (resp. U_-) que corresponde a $u \in U$ para alguna biyección de U a U_+ (resp. de U a U_-).

Si $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0 -sistema, denotaremos por $s_0(S_0)$ a la digráfica definida como sigue:

$$V(s_0(S_0)) = (V(D_0) - U) \cup U_+ \cup U_-$$

$$F(s_0(S_0)) = FD_0[V(D_0) - U] \cup \{zu_- \mid zu_- \in FD_0, z \notin U, u \in U\} \cup$$

$$\{u_+z \mid uz \in FD_0, u \in U, z \notin U\} \cup \{u'_+u''_- \mid u'_+u''_- \in FD_0, u', u'' \in U\}$$

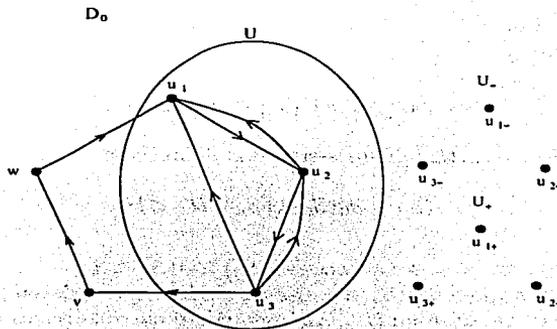
Notemos que $s_0(S_0)$ está definida salvo isomorfismo.

Observemos que el primer conjunto de flechas indica que todo lo que está fuera de U en D_0 queda igual en la digráfica $\tau_0(t_0)$.

El segundo y cuarto conjuntos de flechas indican que a un vértice de U_- , en $s_0(S_0)$, sólo entran flechas y entran desde algún vértice fuera de U o bien desde algún vértice de U_+ .

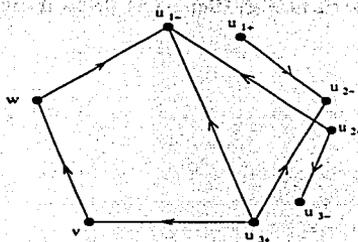
Análogamente, el tercer y cuarto conjuntos de flechas indican que de un vértice de U_+ , en $s_0(S_0)$, sólo salen flechas y salen hacia algún vértice fuera de U o bien hacia algún vértice de U_- .

Las figuras (3.1) y (3.2) ilustran, respectivamente, un s_0 -sistema y una digráfica $s_0(S_0)$.



$S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0 -sistema

Figura 3.1:



$s_0(S_0)$

Donde S_0 es el s_0 -sistema de la figura (3.1)

Figura 3.2:

Definición 3.1.2.

Un s -sistema es una cuaterna $(S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$, donde:

- (i) $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0 -sistema, \mathcal{U}_+ y \mathcal{U}_- son digráficas tales que $V(\mathcal{U}_+) = U_+$ y $V(\mathcal{U}_-) = U_-$.
- (ii) $\beta = \{\beta_u \mid u \in U\}$ es un conjunto de trayectorias dirigidas mutuamente

ajenas, donde cada β_u es una u_-u_+ -trayectoria dirigida de longitud par positiva y

$$V(\beta_u) \cap V(s_0(S_0)) = \{u_-, u_+\}$$

Si $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ es un s -sistema, definimos:

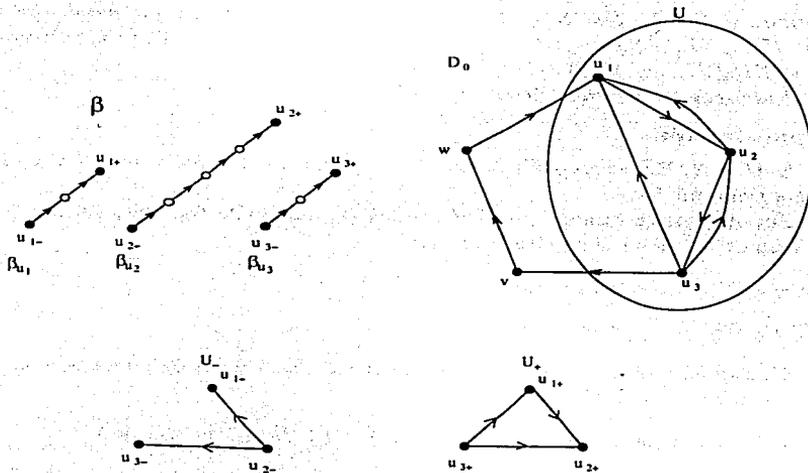
$$s(S) = s_0(S_0) \cup \beta_u \cup \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$$

Notemos que si $U = \emptyset$ entonces $s_0(S_0) \cong s(S) \cong D_0$.

Observemos que en $s(S)$, las únicas flechas que existen entre vértices de U_- , son las que están en \mathcal{U}_- . Análogamente entre vértices de U_+ .

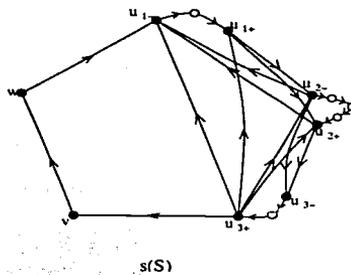
La figura (3.3) ilustra un s -sistema con la condición que pide el teorema (3.1.1). Es decir, cada vez que hay una flecha en \mathcal{U}_+ ó en \mathcal{U}_- , existe una flecha entre los correspondientes vértices de U en D_0 . Por ejemplo, $u_{3+}u_{1+} \in \mathcal{FU}_+$, entonces $u_1u_3 \in FD_0[U]$.

La figura (3.4) ilustra la digráfica $s(S)$ de la figura (3.3)



$S = (S_0, \beta, U_+, U_-)$ es un *s*-sistema que cumple la condición del teorema (3.1.1): $u_+v_+ \in FU_+$ ó $u_-v_- \in FU_-$ implica que $uv \in FD_0[U]$

Figura 3.3:



Donde *S* es el *s*-sistema de la figura (3.3)

Figura 3.4:

Teorema 3.1.1. Sea $S = (S_0, \beta, U_+, U_-)$ un s -sistema en donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que $u_+v_+ \in FU_+$ ó $u_-v_- \in FU_-$ implica que $uv \in FD_0[U]$ (ver fig.(3.3)).

Entonces $s(S)$ tiene núcleo si y sólo si D_0 tiene núcleo.

Demostración.

Si $U = \emptyset$. Entonces $s(S) \cong D_0$ y por lo tanto $s(S)$ tiene núcleo si y sólo si D_0 tiene núcleo.

Supongamos entonces que $U \neq \emptyset$. Sea N_0 núcleo de D_0 . Para cada $u \in U$ definimos N_u de la siguiente manera:

Si $u \in N_0$, N_u es núcleo de β_u .

Si $u \notin N_0$, N_u es núcleo de $\beta_u - \{u_+\}$.

Claramente el núcleo de β_u contiene a $\{u_-, u_+\}$ y el núcleo de $\beta_u - \{u_+\}$ no contiene a $\{u_-\}$ ni a $\{u_+\}$.

- Demostraremos que $N = (N_0 - U) \cup \bigcup_{u \in U} N_u$ es núcleo de $s(S)$.

Primero probaremos que N es independiente.

Sean $\{x, y\} \in N$. Probaremos que $xy \notin Fs(S)$.

Tenemos los siguientes casos posibles:

caso(1)

$$x \in N_0 - U \text{ y } y \in \bigcup_{u \in U} N_u$$

Si $x \in N_0 - U$, en particular $x \in N_0$ y por definición de N_x , N_x es núcleo de β_x , y $x \in N$, ya que β_x es de longitud par.

Supongamos que $xy \in Fs(S)$. Por construcción de $s(S)$ y ya que $x \notin U$, $y = v_-$ para algún $V \in U$ y por definición de $s(S)$ $xv \in FD_0$.

Si $v \in N_0$ entonces N_0 no es independiente, lo cual contradice que N_0 es núcleo de D_0 .

Si $v \notin N_0$ entonces N_v es núcleo de $\beta_v - \{v_+\}$ y por lo tanto $v_- \notin N_v$. Lo cual contradice la elección de v_- .

Entonces $xy \notin Fs(S)$.

caso (2)

$$y \in N_0 - U \text{ y } x \in \bigcup_{u \in U} N_u$$

Este caso es análogo al caso (1).

caso (3)

$$x, y \in N_0 - U.$$

En este caso $\{x, y\} \subseteq D_0 - N_0$ y no existe flecha entre x y y , ya que N_0 es independiente y por construcción de $s(S)$ $xy \notin Fs(S)$.

caso (4)

$$x, y \in \bigcup_{u \in U} N_u.$$

Supongamos que $xy \in Fs(S)$.

Ya que las trayectorias β_u son internamente ajenas y por construcción de $s(S)$, $x = u_+$ para algún $u \in U$, $y = v_-$ para algún $v \in U$ y $uv \in FD_0$.

Notemos que $\{u, v\} \in N_0$, por definición de N_v . Por lo tanto $uv \in FD_0$, contradiciendo que N_0 es independiente.

Entonces $xy \notin Fs(S)$.

Concluimos que N es independiente.

Probaremos que N es absorbente.

Sea $z \in (Vs(S)) - N$. Tenemos tres casos posibles:

caso(1) Si $z \in \beta_u - \{u_+\}$ para algún $u \in U$.

Ya que N_u es núcleo de $\beta_u - \{u_+\}$ se sigue que existe una zN_u -flecha. Por lo tanto existe una zN -flecha (por construcción de N).

caso(2) Si $z = u_+$ para algún $u \in U$.

Como $u_+ \notin U$ se sigue que $u \notin N_0$ entonces existe $w \in N_0$ tal que $zw \in FD_0$.

Si $w \notin U$ entonces $w \in N$ por definición de N por construcción de $s(S)$, $zw \in Fs(S)$.

Si $w \in U$ entonces $w_- \in N_0$ (por construcción de N_u) y por lo tanto $w_- \in N$. Además como $zw \in FD_0$, tenemos que $zw_- \in F(s(S))$.

(3) Si $z \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$.

En este caso $z \in D_0 - U - N_0$. Por lo tanto existe $w \in N_0$ tal que $zw \in FD_0$. Análogamente al caso anterior, existe una zN -flecha en $s(S)$.

Concluimos que N es absorbente.

Además N es independiente, por lo tanto N es núcleo de $s(S)$.

Recíprocamente, sea N núcleo de $s(S)$, definimos $N_u = N \cap \beta_u$ con $u \in U$.

- Afirmamos que $u_- \in N$ si y sólo si $u_+ \in N$.

Justificación.

Si $u_- \in N$, entonces $u_+ \in N$, ya que las trayectorias β_u son de longitud par.

Más aún, siempre que $u_- \in N$, N_u es núcleo de β_u .

Recíprocamente, supongamos que $u_- \notin N$. Entonces existe $v \in N$ tal que $u_-v \in Fs(S)$ (ya que N es núcleo de $s(S)$).

Si $v \in \beta_u$ entonces $u_+ \notin N$, ya que β_u es de longitud par.

Si $v \notin \beta_u$, entonces, por construcción de $s(S)$ y ya que $u_-v \in Fs(S)$ se tiene que $v = w_-$ para algún $w \in U$.

Es decir, $u_-w_- \in Fs(S)$ y por hipótesis $uw \in FD_0[U]$.

Ahora, si $uw \in FD_0[U]$ entonces, por construcción de $s(S)$, $u_+w_- \in Fs(S)$. Además, $w_- = v \in N$. Por lo tanto $u_+ \notin N$, ya que N es un conjunto independiente.

Esto es, si $u_- \notin N$ entonces $u_+ \notin N$.

- Demostraremos que $N_0 = S_1 \cup S_2$ es núcleo de D_0 , donde $S_1 = N - \bigcup_{u \in U} N_u$ y $S_2 = \{u \in U \mid u_+ \in N\}$.

Primero probaremos que N_0 es un conjunto independiente.

Sean $x, y \in N_0$. Tenemos los siguientes casos posibles:

caso (1)

Si $x, y \in S_1$

Recordemos que $S_1 = N - \bigcup_{u \in U} N_u$, y ya que N es independiente, tenemos que S_1 es independiente.

caso (2)

Si $x, y \in S_2$

Por contradicción.

Supongamos que existe $uv \in FD_0$ con $u \in S_2$ y $v \in S_2$, entonces por definición de S_2 , $\{u, v\} \subseteq U$ $u_+ \in N$ y $v_+ \in N$. De aquí que $u_- \in N$ y $v_- \in N$ pues ya se demostró que $u_+ \in N$ si y sólo si $u_- \in N$. Ahora, $uv \in FD_0$ y por construcción de $s(S)$,

$u_+v_- \in Fs(S)$ con $u_+, v_- \in N$. Lo cual contradice que N es un conjunto independiente.

Por lo tanto S_2 es un conjunto independiente.

caso (3)

Si $x \in S_1$ y $y \in S_2$

Probaremos que no existen S_2S_1 -flechas.

Por contradicción.

Supongamos que existe $uv \in FD_0$ con $u \in S_2$ y $v \in S_1$; $u \in U$ y $v \in V(D_0) - U$ entonces $u_+v_- \in Fs(S)$ con $v_- \in N$ (ya que $v \in S_1$).

Nótese que $u_+ \in N$ ya que $u \in S_2$. Por lo tanto $u_+v_- \in Fs(S)$ y $\{u_+, v_-\} \subseteq N$, lo cual contradice que N es independiente.

Es decir, no existen flechas de S_2 a S_1

Probaremos que no existen S_1S_2 -flechas.

Por definición de S_1 y por construcción de $s(S)$ tenemos que $x \in N$ y $x \notin U$.

Notemos que $y \in U$ y $y_+ \in N$, por definición de S_2 .

Si existe $xy \in FD_0$. Entonces $xy_- \in Fs(S)$

Además, $y_- \notin N$, ya que $x \in N$ y entonces $y_+ \notin N$. Contradiciendo que $y \in S_2$.

Por lo tanto $xy \notin FD_0$.

Concluimos que N_0 es un conjunto independiente en D_0 .

Demostraremos que N_0 es un conjunto absorbente en D_0 .

Tomemos $y \in V(D_0) - N_0$.

Recordemos que $N_0 = S_2 \cup S_2$ y $S_1 = N - \bigcup_{u \in U} N_u$ tenemos los siguientes casos posibles.

caso (1)

Si $y \notin U$

Entonces $y \in s(S) - \bigcup_{u \in U} \beta_u$. Notemos que $y \notin N$, ya que $y \notin N_0$

y $y \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$. Por lo tanto, existe $x \in N$ tal que $yx \in Fs(S)$.

Si $x \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$ entonces $x \in V(D_0) - U$ y $yx \in FD_0$ (por construcción de $s(S)$).

Si $x \in \beta_u$ para algún $u \in U$ entonces $x = u_-$ para algún $u \in U$ ya que $y \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$ y $yx \in F(D_0)$ (por construcción de $s(S)$).

caso (2)

Si $y \in U$

Entonces existe $y_+ \in Vs(S)$ y $y_- \in Vs(S)$.

Si $y_+ \in N$ entonces $y \in S_2$ y por lo tanto $y \in N_0$.

Si $y_- \in N$ entonces $y_+ \in N$ (ya se demostró) y por lo tanto $y \in N_0$. Lo cual contradice que $y \in V(D_0) - N_0$.

Concluimos que $y_+ \notin N$, $y_- \notin N$.

Si $x \in \bigcup_{u \in U} \beta_u$, entonces $y_+x \in Fs(S)$ y por construcción de $s(S)$ $yx \in FD_0$.

Si $x \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$ y $x = u_-$ para algún $u \in U$, entonces $y_+u_- \in FD_0$, por construcción de $s(S)$ $\{y, x\} \subseteq N_0$ ya que $u_- \in N$ implica que $u_+ \in N$.

Si $x \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$ y $x \neq u_-$ para algún $u \in U$, entonces $y_+u_+ \in FU_+$ y $yx \in FD_0$ (por hipótesis). Y como $u_+ \in N$ entonces $x \in N_0$.

Notemos que si x es un vértice interno de alguna trayectoria β_u entonces $xy_+ \notin Fs(S)$, ya que las trayectorias son internamente ajenas. Por lo tanto $x = u_+$ ó $x = u_-$.

No es necesario analizar si algún vértice absorbe a y_- , es suficiente que alguno absorba a y_+ en $s(S)$ por que entonces alguno absorbe a y en D_0 .

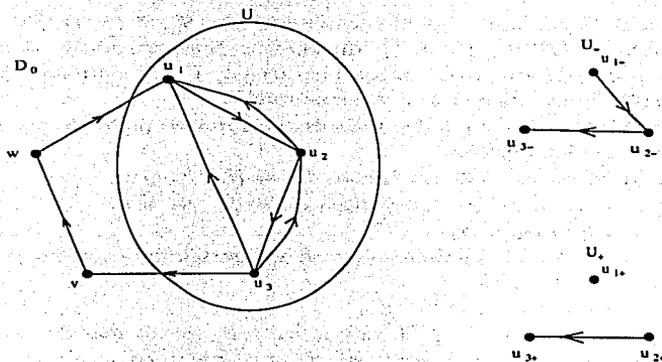
Concluimos que existe $x \in N_0$ tal que $yx \in FD_0$.

Por lo tanto N_0 es absorbente.

Entonces N_0 es núcleo de D_0 .

□

La figura (3.5) ilustra un s -sistema que satisficela condiciones (i) y (ii) del teorema (3.1.2). La condición (i) es análoga a la condición del teorema (3.1.1). La condición (ii) indica que de los vértices de la digráfica U_- de los que salgan flechas, no entren flechas a los correspondientes vértices de U_+ . Por ejemplo, de u_{2-} sale flecha, entonces no entra flecha a u_{2+} .



$S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ es un s -sistema que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema (3.1.2)

Figura 3.5:

Teorema 3.1.2. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s -sistema en donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que \mathcal{U}_+ y \mathcal{U}_- son digráficas núcleo perfectas tales que:

- (i) Si $u_+v_+ \in FU_+$ ó $u_-v_- \in FU_-$ entonces $wv \in F(\text{Sim}(D_0[U]))$.
(ii) Si $u_-v_- \in FU_-$ y $z_+w_+ \in FU_+$ entonces $w \neq u$.

Entonces:

Si D_0 es cuasi núcleo perfecta, entonces $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta.

Demostración.

Demostremos que $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta.

Por reducción al absurdo. Suponemos que $s(S)$ no es cuasi núcleo perfecta. Entonces existe H una subdigráfica inducida propia de S , tal que H es núcleo imperfecta crítica, ya que toda digráfica sin núcleo contiene una subdigráfica propia inducida núcleo imperfecta crítica.

La manera en que se procede con la demostración es larga, por lo que es conveniente dar primero una idea general de ésta.

A partir de H , se obtiene una digráfica H' en D_0 ; se demuestra que H' es núcleo perfecta y en particular tiene núcleo. Después se construye

la digráfica $s(S')$, donde S' es el s -sistema $S' = (S'_0, \beta', U_+, U_-)$ y S'_0 es el s_0 -sistema $S'_0 = (H', H'_0, U'_+, U'_-)$ (durante la demostración se definen los conjuntos y las digráficas de ambas cuaternas). Finalmente se demuestra que $H \cong s(S')$, para afirmar que H tiene núcleo.

Si $U = \emptyset$ entonces $s(S) \cong D_0$ y D_0 es cuasi núcleo perfecta, por lo tanto $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta.

Supongamos que $U \neq \emptyset$. Definimos $H_u = H \cap \beta_u$ para $u \in U$.

Afirmamos que si $H_u \neq \emptyset$, entonces H_u es β_u , u_+ ó u_- .

Suponemos que $H_u \subseteq \beta_u$.

Por el corolario (1.2.1) sabemos que H es fuertemente conexa, ya que H es núcleo imperfecta crítica.

Supongamos que $\{u_+, u_-\} \not\subseteq H_u$.

Si $u_+ \notin H_u$ entonces $u_+ \notin H$ ya que $u_+ \in \beta_u$. Si además de u_- existen flechas y vértices de β_u que están en H_u , sea $x \in V(\beta_u)$ tal que $x \neq u_-$ ($x \neq u_+$) y $x \in V(H_u)$. Como $u_+ \notin H$, y β_u es una u_-u_+ -trayectoria dirigida en H , entonces no existe xu_- -trayectoria dirigida en H , lo cual contradice que H es fuertemente conexa.

Por lo tanto $H_u \subseteq \{u_-\}$.

Entonces $H_u = \{u_-\}$.

Análogamente, si $u_- \notin H_u$ entonces $H_u = \{u_+\}$.

Ahora, supongamos que $\{u_+, u_-\} \subseteq H_u$. Como H es fuertemente conexa y $H_u \subseteq \beta_u$, existen puntos y flechas de β_u que no están en H_u y por lo tanto no están en H . De manera analoga al caso $\{u_+, u_-\} \subseteq H_u$, llegaríamos a que H no es fuertemente conexa. Por lo que si $\{u_+, u_-\} \subseteq H_u$ entonces $H_u \subseteq \{u_+, u_-\}$. Y por lo tanto $H_u = \{u_+, u_-\}$. Además, por la condición (ii), si $\delta_{H^-}(u_+) \neq 0$ entonces $\delta_{H^+}(u_-) = 0$. Por lo tanto no existe u_-v -trayectoria con $v \in V(H)$, lo cual contradice que H es fuertemente conexa. Por lo que si $\{u_+, u_-\} \subseteq H_u$ entonces $\beta_u = H_u$.

Es decir, si $H_u \neq \emptyset$ entonces $H_u = \{u_+\}$, $H_u = \{u_-\}$ ó $H_u = \beta_u$

Ahora, definamos H_+ , H_- , H_0 y W de la siguiente manera:

$$H_+ = \{u_+ \in U_+ \cap H \mid H_u = u_+\}$$

$$H_- = \{u_- \in U_- \cap H \mid H_u = u_-\}$$

$$H_0 = \{u \in U \mid H_u = \beta_u\}$$

$$W = V(H) - U$$

Notemos que H_+ , H_- , H_0 y W son ajenos dos a dos.

Ahora, sea H' la subdígrafa (no necesariamente inducida) de D_0 , obtenida de H y tal que:

$$V(H') = H_+ \cup H_- \cup H_0 \cup W.$$

$uv \in F(H')$ si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumplen:

1. $u, v \in (H_0 \cup W)$ y $uv \in FD_0$
2. $u \in (H_+ \cup H_-)$, $v \in W$ y $uv \in FH$
3. $u \in (H_+ \cup H_-)$, $v \in H_0$ y existe alguna $u\{v_+, v_-\}$ -flecha en H
4. $u \in W$, $v \in (H_+ \cup H_-)$ y $uv \in FH$.
5. $u \in H_0$, $v \in (H_+ \cup H_-)$ y existe alguna $\{u_+, u_-\}v$ -flecha en H
6. $u, v \in (H_+ \cup H_-)$ y $uv \in FH$

De esta manera, en H' , las trayectorias β_u regresan a ser un solo vértice en H_0 , el correspondiente $u \in U \subseteq D_0$.

Los vértices de H_+ regresan a sus correspondientes vértices en $U \subseteq D_0$. Análogamente, los vértices de H_- y H_0 .

Los vértices de W regresan a sus correspondientes vértices den $D_0 - U$, $W \subseteq V(D_0) - U$.

Así, al obtener H' , estamos regresando a D_0 , por lo que aunque H' se obtiene de H y H es una subdígrafa inducida propia de $s(S)$, H' es una subdígrafa (no necesariamente inducida) de D_0 .

Demostremos que H' es una dígrafa núcleo perfecta, para lo cual probaremos primero los siguientes resultados:

- (a) Si $H_+ \neq \emptyset$ entonces $H'[H_+]$ es núcleo perfecta.

Por construcción de H' (condición (6)), $H'[H_+] \cong H[H_+]$. Por construcción de $s(S)$ y ya que $H \subset s(S)$ tenemos que $H[H_+] \cong U_+[H_+]$; además, por hipótesis, U_+ es núcleo perfecta, por lo que $H'[H_+]$ es núcleo perfecta.

- (b) Si $H_- \neq \emptyset$ entonces $H'[H_-]$ es núcleo perfecta.

La demostración es análoga al inciso anterior.

(c) Toda $H_-(V(H') - H_-)$ -flecha de H' es una flecha simétrica de H'

Justificación.

Sea xz una $H_-(V(H') - H_-)$ -flecha de H' , entonces $x = u_- \in U_- \cap H$, $H_u = \{u_-\}$ (por definición de H_- y ya que $x \in H_-$). Además, ya que $z \in V(H') - H_-$ se sigue que $z \in H_+ \cup H_0 \cup W$.

caso(1)

Si $z \in H_0$

Por la condición (3), existe $u_-\{z_+, z_-\}$ -flecha en H ; H es una subdigráfica inducida propia de $s(S)$. Por definición de $s(S)$ no salen flechas de u_- a z_+ , esto es $u_-z_+ \notin F(s(S))$. Por lo tanto dicha flecha es u_-z_- , entonces $u_-z_- \in F(U_+ \cup H) \subset F_s(S)$. Ahora, por la condición (i) si $u_-z_- \in F_s(S)$ entonces $uz \in \text{Sim}D_0[U]$. Entonces $zu \in FD_0[U]$, ya que $z \in H_0$ y por lo tanto $z \in U$. Es decir, $z_+u_- \in FH$.

Entonces por la condición (5) $zu_- \in FH'$.

caso (2)

Si $z \in W$

Tenemos $u_-z \in FH'$ entonces por la condición (2), $u_-z \in FH$ y por lo tanto $u_-z \in F_s(S)$, lo cual es imposible por como está definida $s(S)$.

caso(3)

Si $z \in H_+$

Por definición de H_+ tenemos que $z = v_+$, con $v_+ \in U_+ \cap H$. Por lo tanto $u_-v_+ \in FH'$. Por la condición (6) $u_-v_+ \in FH$ entonces $u_-v_+ \in F_s(S)$, lo cual no es posible por como está definida $s(S)$.

(d) Toda $(V(H') - H_+)H_+$ -flecha de H' es una flecha simétrica de H' .

Sea xz una $(V(H') - H_+)H_+$ -flecha de H' , $x \in H_- \cup H_0 \cup W$ ya que $x \in V(H') - H_+$ y $z = v_+ \in (U_+ \cap H)$ con $v_+ = H_v$ ya que $z \in H_+$.

caso (1)

Si $x \in H_0$

Por la condición (5), existe $\{x_+, x_-\}v_+$ -flecha en H y como H es una subdigráfica inducida propia de $s(S)$, $x_-v_+ \notin FH$ ya que por como se define $s(S)$, $x_-v_+ \notin F_s(S)$. Entonces $x_-v_+ \in FH$, por

lo tanto $x_+v_+ \in FU_+$ y $xv \in FSimD_0[U]$. Entonces, por definición de $s(S)$ $x_+v_- \in FH$ y $v_+x_- \in FH$; además $x \in H_0$ entonces por la condición (3), $v_+x \in FH'$ además $v_+ = z$, por lo tanto $zx \in FH'$.

caso(2)

Si $x \in W$.

Por la condición (4) $xv_+ \in FH$ con $x \in V(H) - U$, lo cual es imposible por definición de $s(S)$.

caso (3)

Si $x \in H_-$.

Por definición de H_- tenemos que $x = u_- \in U_- \cap H$ con $H_u = u_-$. De aquí que $u_-v_+ \in FH'$ y por la condición (6) $u_-v_+ \in FH$ entonces $u_-v_+ \in FS(S)$ lo cual es imposible por como está definida $s(S)$.

(e) Si $H_0 \cup W \neq \emptyset$ entonces $H'[H_0 \cup W]$ es núcleo perfecta.

Sean $u, v \in V(H'[H_0 \cup W])$ tales que $uv \in FH'[H_0 \cup W]$ entonces por la condición (1), $u, v \in H_0 \cup W$ y $uv \in FD_0$. Por lo tanto $H'[H_0 \cup W] \cong D_0[H_0 \cup W]$. Notemos que si $D_0[H_0 \cup W] = D_0$ entonces $H = s(S)$ lo cual contradice la elección de H . Por lo tanto $D_0[H_0 \cup W] \subsetneq D_0$. Además, por hipótesis, D_0 es quasi núcleo perfecta; por lo tanto $D_0[H_0 \cup W]$ es núcleo perfecta. Entonces $H'[H_0 \cup W]$ es núcleo perfecta.

(f) $H' - H_+$ es núcleo perfecta.

Claramente $V(H' - H_+) = H_- \cup H_0 \cup W$.

Si $H_- = \emptyset$ entonces $H' - H_+ = H'[H_0 \cup W]$ y por el inciso (e) tendríamos que $H' - H_+$ es núcleo perfecta.

Supongamos que $H_- \neq \emptyset$.

Si $H_0 \cup W = \emptyset$ entonces $H' - H_+ = H'[H_-]$ y por el inciso (b) $H' - H_+$ es núcleo perfecta.

Podemos suponer entonces que $H_- \neq \emptyset$ y $H_0 \cup W \neq \emptyset$.

Si tomamos que V_1 y V_2 una partición de $V(H' - H_+)$, con $V_1 = H_-$ y $V_2 = H_0 \cup W$. Por los incisos (b) y (e), $(H' - H_+)[H_-] = D_1$ y $(H' - H_+)[H_0 \cup W] = D_2$ son núcleo perfectas. Además por el inciso (c), toda D_1D_2 -flecha en $H' - H_+$ es simétrica. Entonces se cumplen las hipótesis del teorema (1.2.5) y por lo tanto $H' - H_+$ es núcleo perfecta.

(g) H' es núcleo perfecta.

Claramente $V(H') = (H' - H_+) \cup H_+$.

Si $H_+ = \emptyset$, entonces $H' = H' - \emptyset = H' - H_+$ y por el inciso (f) H' es núcleo perfecta.

Si $H_+ \neq \emptyset$ y $H' - H_+ = \emptyset$ entonces $H' = H'[H_+]$ y por el inciso (a) H' es núcleo perfecta.

Por lo tanto podemos tomar $(H' - H_+, H_+)$ como una partición de $V(H')$ donde $H'[H' - H_+]$ y $H'[H_+]$ son núcleo perfectas y por el inciso (f), toda $(V(H') - H_+)H_+$ -flecha es simétrica y por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema (1.2.5), por lo que podemos concluir que H' es núcleo perfecta.

(h) $H \cong s(S')$

Donde $S' = (S'_0, \beta', U'_+, U'_-)$, $S'_0 = (H', H_0, U'_+, U'_-)$

$U'_+ = \{u_+ \mid u \in H_+\}$, $U'_- = \{u_- \mid u \in H_-\}$, $\beta' = \{\beta_u \mid u \in H_0\}$

$U'_+ = U_+[U_+]$ y $U'_- = U_-[U_-]$

$s(S') = s_0(S'_0) \cup \bigcup_{u \in U} \beta'_u \cup U'_+ \cup U'_-$

$V(U'_+) = U'_+$, $V(U'_-) = U'_-$

β_u es una $u'_-u'_+$ -tray dirigida de long par mayor que cero y

$V(\beta'_u) \cap V(s_0(S'_0)) = \{u'_-, u'_+\}$

$V(s'_0(S'_0)) = (V(H') - H_0) \cup U'_+ \cup U'_-$

$F(s'_0(S'_0)) = FH'[V(H') - H_0] \cup \{zu'_- \mid zu \in FH', z \notin H_0, u' \in H_0\}$

$\cup \{u'_+z \mid uz \in FH', u' \in H_0, z \notin H_0\} \cup \{u'_+u''_- \mid u'u'' \in FH', u', u'' \in H_0\}$.

Así, $s(S')$ cumple las hipótesis del teorema (3.1.1) (ya que $s(S)$ las cumple). Por el inciso (g) H' tiene núcleo entonces por el teorema (3.1.1) $s(S')$ tiene núcleo. Además, por el inciso (h), H tiene núcleo, lo cual contradice que H es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto toda subdigráfica inducida propia de $s(S)$ tiene núcleo.

Concluimos que $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta. □

Teorema 3.1.3. Sea $S = (S_0, \beta, U_+, U_-)$ un s -sistema en donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que U_+ y U_- son digráficas núcleo perfectas tales que:

(i) Si $u_+v_+ \in FU_+$ ó $u_-v_- \in FU_-$ entonces $uv \in F(\text{Sim}(D_0[U]))$.

(ii) Si $u_-v_- \in FU_-$ y $z_+w_+ \in FU_+$ entonces $w \neq u$.

Entonces $s(S)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica (resp. núcleo perfecta) si y sólo si D_0 es núcleo imperfecta crítica (resp. núcleo perfecta).

Demostración.

Por el teorema (3.1.2), sabemos que si D_0 es cuasi núcleo perfecta entonces $s(S)$ lo es. Y por el teorema (3.1.1), sabemos que si D_0 tiene núcleo entonces $s(S)$ tiene núcleo.

Por lo tanto, si D_0 es núcleo perfecta entonces $s(S)$ lo es.

Ahora, el teorema (3.1.1) es una doble implicación, por lo que si D_0 no tiene núcleo entonces $s(S)$ no tiene núcleo.

Por lo tanto si D_0 es núcleo imperfecta crítica entonces $s(S)$ es núcleo imperfecta crítica.

Demostraremos que si $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta entonces D_0 es cuasi núcleo perfecta.

Por reducción al absurdo.

Supongamos que D_0 no es cuasi núcleo perfecta. Entonces existe H una subdigráfica inducida propia de D_0 tal que H es núcleo imperfecta crítica. Definamos el s -sistema $S' = (S'_0, \beta', U'_+, U'_-)$ de la siguiente manera:

$$S'_0 = (H, U', U'_+, U'_-) \text{ donde } U' = V(H) \cap U$$

$$U'_+ = \{u_+ \mid u \in U'\} \quad \text{y} \quad U'_- = \{u_- \mid u \in U'\}$$

$$\beta' = \{\beta_u \mid u \in U'\}, \quad U'_+ = U_+[U'_+] \quad \text{y} \quad U'_- = U_-[U'_-].$$

Así, el s -sistema S' se forma a partir de la digráfica H y de los conjuntos U', U'_+ y U'_- . Donde H es la subdigráfica inducida propia de D_0 que es núcleo imperfecta crítica.

U' es el conjunto de vértices de U que están en H , por lo que cada vértice $u \in U'$ tiene su correspondiente vértice $u_+ \in U_+$ y su correspondiente vértice $u_- \in U_-$. De manera que $|U'_+| = |U'_-| = |U'|$ $U'_+ \subseteq U_+$ y $U'_- \subseteq U_-$. También $\beta' \subseteq \beta$ ya que β' se forma a partir de vértices de $U' \subseteq U$ y β se forma a partir de vértices de U .

De tal forma que al construir $s(S')$, ésta es una subdigráfica inducida propia de $s(S)$. Esto es, $s(S') \subsetneq^* s(S)$, ya que:

$$s(S') = s_0(S'_0) \cup \bigcup_{u \in U'} \beta'_u \cup U'_+ \cup U'_-$$

$$V(U'_+) = U'_+, \quad V(U'_-) = U'_-$$

β'_u es una $u'_-u'_+$ -trayectoria dirigida y $V(\beta'_u) \cap V(s_0(S'_0)) = \{u'_-, u'_+\}$

$$V(s_0(S'_0)) = (V(H) - U') \cup U'_+ \cup U'_- \subset V(s_0(S_0))$$

$$F(s_0(S'_0)) = FH[V(H) - U'] \cup \{zu'_- \mid zu' \in FH, z \notin U', u \in U'\} \cup$$

$$\{u'_+z \mid u'z \in FH, u \in U', z \notin U'\} \cup \{u'_+u''_- \mid u'u'' \in FH, u', u'' \in U'\}$$

Notemos que $F(s_0(S'_0)) \subset F(s_0(S_0))$.

Ahora, $s(S)$ por hipótesis es quasi núcleo perfecta y por lo tanto $s(S')$ tiene núcleo. Entonces $s(S')$ cumple las hipótesis del teorema (3.1.1) ya que $s(S') \subset^* s(S)$ y $s(S)$ cumple las condiciones (i) y (ii), en particular cumple las hipótesis del teorema (3.1.1). Entonces, por el teorema (3.1.1) H tiene núcleo, ya que $S'_0 = (H, U', U'_+, U'_-)$. Lo cual contradice que H es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto D_0 es quasi núcleo perfecta.

Concluimos que si $s(S)$ es quasi núcleo perfecta entonces D_0 es quasi núcleo perfecta.

Además, por el teorema (3.1.1) tenemos que si $s(S)$ es núcleo perfecta entonces D_0 lo es. Y si D_0 es núcleo perfecta entonces $s(S)$ lo es. □

Corolario 3.1.1. Sea $S = (S_0, \beta, U_+, U_-)$ un s -sistema en donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que $u_+v_+ \in FU_+$ ó $u_-v_- \in FU_-$ implica $uv \in FD_0[U]$.

Entonces $s(S)$ es quasi núcleo perfecta si y sólo si D_0 es quasi núcleo perfecta.

Demostración.

Demostremos que D_0 es quasi núcleo perfecta.

Por reducción al absurdo.

Suponemos que D_0 no es quasi núcleo perfecta. Entonces existe una subdigráfica inducida propia de D_0 , sea H , tal que H es núcleo imperfecta crítica.

Definimos un s -sistema $S' = (S'_0, \beta', U'_+, U'_-)$ como se definió en la demostración del teorema anterior. Y análogamente tenemos que $s(S')$ es una subdigráfica inducida de $s(S)$.

Por hipótesis, $s(S)$ es quasi núcleo perfecta, por lo tanto $s(S')$ tiene núcleo. Y por el teorema (3.1.1) H tiene núcleo. Lo cual contradice la elección de H .

Entonces D_0 es cuasi núcleo perfecta.

Recíprocamente, demostraremos que $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta.

Por reducción al absurdo.

Supongamos que $s(S)$ no es cuasi núcleo perfecta. Entonces existe una subdigráfica inducida propia de $s(S)$, sea D , tal que D es núcleo imperfecta crítica. Observemos que $D \cong s(S')$ con $s(S')$ definida como en la demostración del teorema anterior. Donde $H \subsetneq D_0$. Por hipótesis D_0 es cuasi núcleo perfecta. Por lo tanto H tiene núcleo. Y por el teorema (3.1.1) $s(S')$ tiene núcleo; lo cual contradice la elección de $s(S')$.

Entonces $s(S)$ es cuasi núcleo perfecta. □

3.2. EXTENDIENDO DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS

En esta sección se demuestra que cualquier digráfica núcleo perfecta es una subdigráfica inducida de un conjunto infinito de digráficas núcleo imperfectas críticas. Es decir, que cualquier digráfica núcleo perfecta se puede extender a una digráfica núcleo imperfecta crítica. Como una consecuencia de esto, se demuestra que existen digráficas asimétricas núcleo imperfectas críticas con número dicromático arbitrariamente grande.

El siguiente teorema es una aplicación importante del teorema (3.1.3)

Teorema 3.2.1. *Toda digráfica núcleo perfecta α (resp. digráfica α núcleo perfecta asimétrica) es una subdigráfica inducida de una digráfica núcleo imperfecta crítica (resp. digráfica α núcleo imperfecta crítica asimétrica)*

Demostración.

Sea α una digráfica núcleo perfecta y sea D_0 una digráfica núcleo imperfecta crítica tal que existe un conjunto $U' \subseteq V(D_0)$ que satisface las siguientes condiciones: $|U'| = |V(\alpha)|$ y $\text{Sim} D_0[U']$ es completa.

Sea $U \subseteq V(D_0)$ tal que cada flecha simétrica de D_0 tiene al menos un extremo en U y $U' \subseteq U$.

Tomemos $D_0 = \bar{C}_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m)$ con $m \geq |V(\alpha)|$, $U = V(D_0)$, $U' = \{0, 2, \dots, 2m - 2\}$ y $2m \geq 4$.

D_0 sigue siendo núcleo imperfecta crítica ya que por el corolario (1.2.4) $\bar{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor n/2 \rfloor)$ es núcleo imperfecta crítica con $n \geq 4$

Definiendo así D_0 y U' tenemos que $D_0[U'] \cong \text{Sim}D_0[U']$, por construcción de $\tilde{C}_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m)$. Además U' satisface las condiciones de que $\text{Sim}D_0[U']$ es completa y $|U'| = |V(\alpha)|$ y cada flecha simétrica tiene un extremo en U . Por lo tanto $\alpha \subseteq D_0[U']$.

Si $\alpha = D_0[U']$, ya terminamos, ya que $D_0[U']$ es una subdigráfica inducida de D_0 y D_0 se tomó núcleo imperfecta crítica.

Supongamos que $\alpha \subsetneq D_0[U']$.

Tomemos U_+ y U_- tales que:

$$U_+[U'_+] \cong \alpha$$

$$FU_+ = FU_+[U'_+] \text{ y } FU_- = \emptyset.$$

$$\text{Donde } U'_+ = \{u_+ \mid u \in U'\}, \quad U'_- = \{u_- \mid u \in U'\},$$

$$V(U_+) = U_+, \quad V(U_-) = U_-, \quad \text{con } |U| = |U_+| = |U_-|,$$

$$U'_+ \subseteq U_+ \text{ y } U'_- \subseteq U_-.$$

Y sea β_u cualquier trayectoria dirigida de longitud par, por ejemplo, \tilde{F}_3 .

Notemos que es análogo tomar $U_-[U'_-] \cong \alpha$, $FU_- = FU_-[U'_-]$

$$\text{y } FU_+ = \emptyset.$$

De esta manera se obtiene el s -sistema $S = (S_0, \beta, U_+, U_-)$ donde

$$S_0 = (D_0, U, U_+, U_-).$$

Notemos que si $z_+w_+ \in FU_+$ entonces $w_-v_- \notin FU_-$ para cualquier $v_- \in V(U_-)$ ya que $FU_- = \emptyset$. Por lo tanto el s -sistema cumple la condición (ii) del teorema (3.1.3). Además, si $u_+v_+ \in FU_+$ entonces $u_+v_+ \in FU_+[U'_+]$, ya que por construcción $FU_+ = FU_+[U'_+]$. Entonces $u_+v_+ \in U'_+$ y por definición de U'_+ , $u, v \in U'$. Por lo tanto $uv \in FD_0[U']$, ya que como se mencionó, $D_0[U'] \cong \text{Sim}D_0[U']$, de esto también tenemos que si $uv \in FD_0[U']$ entonces $uv \in F\text{Sim}D_0[U']$.

Ahora, $U' \subset U$, por lo tanto $\text{Sim}D_0[U'] \subseteq \text{Sim}D_0[U]$. Entonces $uv \in F\text{Sim}D_0[U]$.

Es decir, el s -sistema cumple la condición (i) del teorema (3.1.3)

Además, U_+ es núcleo perfecta, ya que $FU_+ = U_+[U'_+]$ y $U_+[U'_+] \cong \alpha$ y por hipótesis α es núcleo perfecta.

Y U_- es núcleo perfecta, ya que es una digráfica solamente con vértices aislados pues $FU_- = \emptyset$

Entonces el s -sistema cumple también las hipótesis del teorema (3.1.3). Por lo tanto $s(S)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica, ya que D_0 lo es.

Así, $s(S)$ es una digráfica que se construye como un s -sistema y bajo las condiciones (i) y (ii) del teorema (3.1.3). Entonces, las únicas flechas que hay entre vértices de U'_+ en $s(S)$ son las que tengan dichos vértices en U_+ . Además, si $u_+v_+ \in FU_+ = FU_+[U'_+]$, entonces $uv \in F\text{Sim}D_0[U]$ y por lo tanto $u_+v_+ \in Fs(S)$. Entonces $\alpha \cong s(S)[U'_+] \subseteq s(S)$.

Es decir, α es una sudigráfica inducida de una digráfica núcleo imperfecta crítica.

Tomemos ahora una digráfica α núcleo perfecta *asimétrica*. Procedemos de manera análoga al caso en que la digráfica no es asimétrica. Obtenemos entonces el s -sistema $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Ahora, notamos que toda flecha simétrica de D_0 tiene un extremo en U (por como se definió U). Así, al construir $s(S)$, cada flecha simétrica en D_0 se abre, siendo ahora una flecha asimétrica, ya que tomamos $U = V(D_0)$. Además \mathcal{U}_+ es una digráfica asimétrica, ya que $F\mathcal{U}_+ = F\mathcal{U}_+[U'_+]$ y $\mathcal{U}_+[U'_+] \cong \alpha$ (por construcción).

Entonces $s(S)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica asimétrica.

Es decir, la digráfica núcleo perfecta asimétrica α es una subdigráfica inducida de una digráfica núcleo imperfecta crítica asimétrica. □

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema (3.2.1)

Corolario 3.2.1. *Existe un número infinito de digráficas núcleo imperfectas críticas que contienen a una digráfica núcleo perfecta dada.*

Demostración.

La demostración se sigue del teorema anterior, ya que a partir de una digráfica núcleo imperfecta crítica $D_0 = \vec{C}_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m)$ se puede obtener una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas $s(S)$ variando la longitud de las trayectorias dirigidas β_u .

Además, $m \geq |V(\alpha)|$ y $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto existe una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas de la forma $\vec{C}_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m)$ a partir de las cuales se obtiene una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas que contienen a la digráfica núcleo perfecta dada α . □

Definición 3.2.1.

El *número cromático* de D , $\chi(D)$, se define como el mínimo número de colores requeridos para colorear los vértices de D , de tal forma no existan flechas entre vértices del mismo color. Es decir, que las clases cromáticas sean conjuntos independientes.

Definición 3.2.2.

El *número dicromático* de D , $d_k(D)$, se define como el mínimo número de colores requeridos para colorear los vértices de D , de tal forma que no existan ciclos dirigidos monocromáticos. Es decir que las clases dicromáticas sean acíclicas.

Teorema 3.2.2. *Existen digráficas núcleo perfectas asimétricas con un número dicromático arbitrariamente grande.*

Teorema 3.2.3. *Existen digráficas núcleo imperfectas críticas asimétricas con un número dicromático arbitrariamente grande.*

Demostración.

Por el teorema (3.2.2), existen digráficas núcleo perfectas asimétricas con un número dicromático arbitrariamente grande. Sea D con número dicromático n , con $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema (3.2.1) $D \subseteq^* D_0$ con D_0 una digráfica núcleo imperfecta crítica asimétrica. Ya que $n \in \mathbb{N}$, n se puede elegir tan grande como se quiera. Además $d_k(D_0) \geq n$. □

Capítulo 4

NUEVAS EXTENSIONES DE DIGRÁFICAS NÚCLEO PERFECTAS A DIGRÁFICAS NÚCLEO IMPERFECTAS CRÍTICAS

En este capítulo se desarrolla la τ_1 -construcción y la τ -construcción, que son una generalización de la s -construcción y que también nos permiten extender digráficas núcleo perfectas a digráficas núcleo imperfectas críticas.

4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección se introducen los conceptos de *seminúcleo*, *gráfica subyacente*, *co-raíz*, *árbol con co-raíz*, *flecha paralela*, *multi-digráfica*, *conjunto A-homogéneo* y *núcleo independiente módulo Q*.

Además se demuestran dos resultados que serán de gran utilidad para el desarrollo de las secciones 2,3 y 4 de este capítulo.

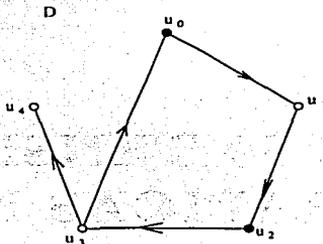
Definición 4.1.1.

Un conjunto $S \subset V(D)$ es *seminúcleo* de D si S es independiente y tal que para cada $x \in (V(D) - S)$, si existe una flecha de S a x , entonces existe una flecha de x a S en D .

Ver fig. (4.1)

Claramente, todo núcleo de una digráfica D es un seminúcleo. Sin embargo, un seminúcleo no forzosamente es un núcleo de D .

El \emptyset es un seminúcleo.



$A = \{u_0, u_2\}$ es un seminúcleo de D

Figura 4.1:

Teorema 4.1.1. Sea S un seminúcleo de D y definamos $B = \{v \in V - S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y N' es núcleo de la subdigráfica \bar{B} de D inducida por B . Entonces $S \cup N'$ es un núcleo de D .

Demostración.

Primero demostraremos que $S \cup N'$ es independiente. Procederemos por contradicción. Supongamos que existe una flecha f con extremos u, v y $\{u, v\} \subset S \cup N'$. Consideremos todos los posibles casos:

- (i) $u \in S, v \in S$
- (ii) $u \in N', v \in N'$
- (iii) $u \in N', v \in S$
- (iv) $u \in S, v \in N'$

(i) y (ii) no pueden ocurrir ya que estamos suponiendo que existe flecha de u a v y tanto S como N' son independientes. (iii) tampoco es posible por definición de B y ya que $N' \subseteq B$.

Si (iv) se cumple, entonces existe una flecha de S a N' . Ahora S es seminúcleo de D , por lo tanto existe flecha de N' a S , lo cual implica que (iii) se cumple y ya vimos que no es posible.

Entonces $S \cup N'$ es independiente.

Probaremos que $S \cup N'$ es absorbente.

Sea $x \in V(D_0)$ tal que $x \notin S \cup N'$.

Si $x \in V(\bar{B}) \cap (N')^c$ entonces existe $v \in N' \subseteq V(\bar{B})$ tal que $xv \in F(\bar{B})$, ya que N' es núcleo de \bar{B} .

Si $x \notin V(\bar{B})$ entonces, por definición de B y ya que $x \notin S$, existe xS -flecha en D .

Por lo tanto $S \cup N'$ es absorbente.

Entonces $S \cup N'$ es núcleo de D .

□

Definición 4.1.2.

La *gráfica subyacente* de una digráfica A es la gráfica obtenida al borrar las orientaciones de las flechas de A .

Ver fig. (4.2)

Definición 4.1.3.

Un vértice v de la digráfica A es una *co-raíz* de A si no hay flecha en A con punto inicial en v y v es el único punto con esta propiedad. Es decir, no hay flechas en A con punto inicial en v y para cada vértice $z \neq v$, z es punto inicial de alguna flecha de A .

Ver fig. (4.2)

Definición 4.1.4.

Decimos que una digráfica A es un *árbol con co-raíz*, si A es asimétrica, la gráfica subyacente de A es un árbol y existe una co-raíz en A .

Ver fig. (4.2)

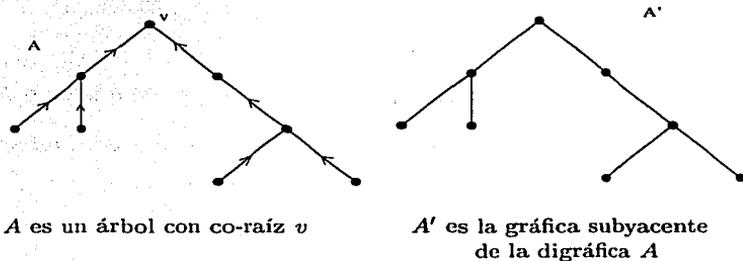


Figura 4.2:

Definición 4.1.5.

Se dice que f_1 y f'_1 son flechas paralelas en D , si ambas inciden desde u y hacia v con $u, v \in V(D)$ y $u \neq v$. Si en una digráfica D existen flechas paralelas, diremos que D es una *multidigráfica*.

Ver fig. (4.3)

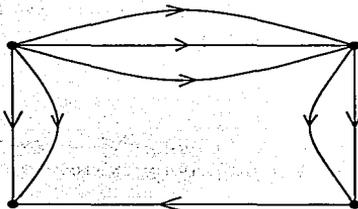


Figura 4.3:

Definición 4.1.6.

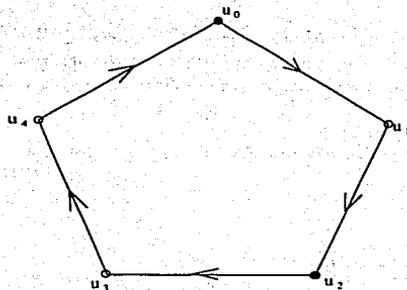
Sean D una multidigráfica y $A, T \subset V(D)$. Diremos que T es A -homogéneo si $T \subseteq A$ ó $T \subseteq (V(D) - A)$.

Definición 4.1.7.

Si D es una digráfica y $N, Q \subset V(D)$. Decimos que N es un *núcleo independiente módulo Q* (*n.i. mod Q*), de D si y sólo si :

- (i) N es independiente
- (ii) Para cada $w \in N^c \cap Q^c$ existe una wN -flecha.

Ver fig. (4.4)



$$Q = \{u_3\}$$

$N = \{u_0, u_2\}$ es un *n.i. mod Q* de D

Figura 4.4:

La figura (4.5) ilustra una digráfica del tipo $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$, que se define en el lema (4.1.1)

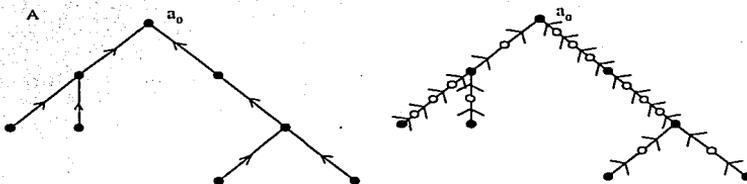


Figura 4.5:

Lema 4.1.1. Sea A un árbol con co-raíz, $|V(A)| \geq 2$ y $(\gamma^f)_{f=(u_f, v_f) \in FA}$ una familia de trayectorias dirigidas internamente ajenas de longitud positiva par tal que γ^f es una $u_f v_f$ -trayectoria dirigida y $V(\gamma^f) \cap V(A) = \{u_f, v_f\}$. Tomemos la digráfica $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$. Ver fig. (4.5).

Si N es un núcleo independiente mod $\{a_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$ entonces $V(A)$ es N -homogéneo.

Demostración.

Por inducción sobre $|V(A)|$

(1) Si $|V(A)| = 2$

Sean $\{a_0, a_1\} = V(A)$ y $a_1 a_0 = f$, $\{f\} = F(A)$ y definamos $\gamma^f = (a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_0)$.

Si $a_0 \in N$ entonces $a_{2n} \notin N$ ya que N es independiente, luego $a_{2n-1} \in N$. Así llegamos a que $a_{2i} \notin N$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En particular $a_2 \notin N$. Por lo tanto $a_1 \in N$.

Si $a_0 \notin N$ entonces $a_{2n} \in N$ y $a_{2n-1} \notin N$, ya que N es independiente. Así llegamos a que $a_{2i} \in N$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En particular $a_2 \in N$. Por lo tanto $a_1 \notin N$.

Entonces $a_0 \in N$ si y sólo si $a_1 \in N$.

Por lo tanto $V(A) \subseteq N$ ó $V(A) \subseteq V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f - N)$. Es decir, $V(A)$ es N -homogéneo.

- (2) Supongamos que si A' es un árbol con co-raíz a'_0 ; $(\gamma^f)_f$ una familia de trayectorias como en las hipótesis del lema. $|V(A)| = n$ y N' es $n.i.mod\{a'_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA'} \gamma^f$ entonces $V(S')$ es N' -homogéneo.
- (3) Demostraremos que si A es un árbol con co-raíz a_0 ; $(\gamma^f)_f$ una familia de trayectorias como en las hipótesis del lema. $|V(A)| = n + 1$ y N es $n.i.mod\{a_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$ entonces $V(A)$ es N -homogéneo.

Primero demostraremos que en A existe al menos un vértice u tal que $\delta_A^-(u) = 0$.

A es un árbol con co-raíz, por lo tanto la gráfica subyacente de A es un árbol. Sabemos que en el árbol existen al menos dos vértices de grado uno. Además, alguno de estos dos vértices es distinto de la co-raíz, sea u dicho vértice. Como $u \neq a_0$ entonces $\delta_A^+(u) > 0$. Por lo tanto $\delta_A^+(u) = 1$ y $\delta_A^-(u) = 0$.

Ahora, sea $g = uw \in F(A)$ una flecha tal que $\delta_A^-(u) = 0$ y $u \neq a_0$. Sea N un $n.i.mod\{a_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$ y $A_0 = A - \{u\}$.

Demostraremos que A_0 es un árbol con co-raíz a_0 .

Por construcción $A_0 = A - \{u\}$, por lo tanto A_0 es asimétrica. Ahora, por elección de u , $\delta_A^-(u) = 0$ y ya vimos que u es un vértice terminal del árbol T que es la gráfica subyacente de A . Entonces la gráfica subyacente de A_0 es $T_0 = T - \{u\}$, de aquí que T_0 es un árbol. Además $u \neq a_0$ (por elección de u). Se sigue que $a_0 \in A_0$ es co-raíz de A_0 .

Entonces tenemos:

$$(a) N' = N \cap \bigcup_{f \in FA_0} V(\gamma^f) \text{ es un } n.i.mod\{a_0\} \text{ de } \bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f.$$

Justificación.

N' es independiente ya que N lo es y en particular $N' \subseteq N$

Demostraremos que para cada $z \in (N')^c \cap (\{a_0\}^c)$ existe una zN' -flecha en $\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f$.

Notemos que $(N')^c \cap \{a_0\}^c = (N')^c \cap \left(\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f - \{a_0\} \right)$ y que

$$\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f = \bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{u\}. \text{ Entonces } (N')^c \cap \{a_0\}^c = (N')^c \cap \left(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{a_0, u\} \right).$$

Si $z \in (N')^c \cap \left(\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f - \{a_0\} \right)$ entonces $z \in (N')^c$ y $z \in \left(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{a_0\} \right)$.

Afirmamos que si $z \in (N')^c$ entonces $z \in N^c$.

Sea $z \in (N')^c$. Notemos que $N' = N - \{u\}$, ya que $N' = N \cap \bigcup_{f \in FA_0} V(\gamma^f)$ y $\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f = \bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{u\}$. Entonces $z \in (N - \{u\})^c$. Y como $z \in \bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{a_0, u\}$, entonces $z \neq u$.

Por lo tanto $z \in N^c$.

Por otro lado, como $z \in \bigcup_{f \in FA} \gamma^f - \{a_0, u\}$, en particular $z \neq a_0$.

Además, N es $n.i.mod\{a_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$, entonces existe zN -flecha en $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$.

Ahora, sea $n \in N$ tal que zn es una flecha en $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$.

Notemos que $n \neq u$ ya que $\delta_A^-(u) = 0$ y por lo tanto $n \in N'$. De aquí que zn es una zN' -flecha en $\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f$ (con $z \neq a_0$).

Entonces para cada $z \in (N')^c$ existe una zN' -flecha en $\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f$.

Concluimos N' es $n.i.mod\{a_0\}$ de $\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f$.

Ahora, $|V(A_0)| = |V(A)| - 1 = n$, entonces, por hipótesis de inducción $V(A_0)$ es N' -homogéneo. Esto es, $V(A_0) \subseteq N'$ ó $V(A_0) \subseteq V(\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f) - N'$. Y recordemos que $V(\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f) = V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - \{u\}$ y $N' = N - \{u\}$.

Entonces:

$$V(A_0) \subseteq N - \{u\}$$

$$\text{ó } V(A_0) \subseteq V(\bigcup_{f \in FA_0} \gamma^f) - (N - \{u\}) \subseteq V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - \{u\} - N \cup$$

$$\{u\} \subseteq V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - N.$$

(b) $N'' = N \cap V(\gamma^g)$ es un $n.i.mod\{w\}$ de la trayectoria γ^g .

Justificación.

N'' es independiente, ya que N lo es.

Demostremos que para cada $z \in ((N'')^c \cap \{w\}^c) \cap V(\gamma^g)$ existe una zN'' -flecha en γ^g .

Sea $z \in ((N'')^c \cap \{w\}^c) \cap V(\gamma^g)$. Como $z \in (N'')^c \cap V(\gamma^g)$ y $(N'')^c \cap V(\gamma^g) \equiv ((N)^c \cup V(\gamma^g)^c) \cap V(\gamma^g)$ entonces $z \notin N$.

Como $z \in \{w\}^c$ tenemos que $z \neq w$, entonces $\delta_A^+(z) \neq 0$. Por lo tanto $z \neq a_0$.

Además, N es *n.i.mod*{ a_0 } de $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$, entonces existe zN -flecha

en $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$.

Sea $n \in N$ tal que zn es una zN -flecha en $\bigcup_{f \in FA} \gamma^f$. Probaremos que $n \in N''$.

Si $n \notin N''$ y $n \in V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - V(\gamma^g)$ entonces zn forma un ciclo en la gráfica subyacente de A , lo cual contradice que dicha gráfica es un árbol.

Si $n \notin N''$ y $n \in V(\gamma^g)$ entonces ya vimos que $n \notin N$, lo cual contradice la elección de n ($n \in N$).

Entonces $n \in N''$.

Por lo tanto existe zN'' -flecha en γ^g .

Es decir, N'' es *n.i.mod*{ w } de γ^g .

Entonces, por (1), $\{u, w\}$ es N'' -homogéneo.

Esto es, $\{u, w\} \subseteq N'' \subseteq N$ ó $\{u, w\} \subseteq V(\gamma^g) - N'' \subseteq V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - N$.

Ahora, $V(A) = V(A_0) \cup \{u\}$, entonces de (a) y (b) tenemos $V(A) \subseteq (N - \{u\}) \cup \{u\} = N$ ó

$$V(A) \subseteq V(\bigcup_{f \in FA} \gamma^f) - N$$

Concluimos que $V(A)$ es N -homogéneo. □

4.2. τ_1 -SISTEMAS

En esta sección se desarrolla la τ_1 -construcción, que es una generalización de la s -construcción y que nos permite extender una digráfica núcleo perfecta a una digráfica núcleo imperfecta crítica.

Definición 4.2.1.

Sea D una multidigráfica y $u \in V(D)$. Una partición de $F_u = F_u^+(D) \cup F_u^-(D)$, digamos $\pi_u = \{u_-^0, \dots, u_-^{m(u)}, u_+\}$ será llamada una τ -partición en u si satisface las siguientes propiedades:

- (1) $u_-^i \subseteq F_u^-(D)$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, m(u) - 1\}$
- (2) $u_+ = F_u^+(D)$

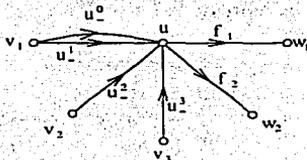
$F_u^+(D)$ (resp. $F_u^-(D)$) denota el conjunto de flechas de D que tienen como punto inicial (resp. final) a u .

Cuando π_u es una τ -partición en u , denotamos por:

$$\bar{\pi}_u = \{(u, u_+), (u, u_-^i) \mid i \in \{0, 1, \dots, m(u) - 1\}\}$$

En adelante $\bar{u}_+ = (u, u_+)$.

Ver fig. (4.6)



$$\pi_u = \{u_-^0, u_-^1, u_-^2, u_-^3, u_+\} \quad u_+ = \{f_1, f_2\}$$

$$\bar{\pi}_u = \{(u, u_+), (u, u_-^0), (u, u_-^1), (u, u_-^2), (u, u_-^3)\}$$

Figura 4.6:

Definición 4.2.2.

La terna $t_0 = (D_0, U, A)$ será llamada un τ_0 -sistema si satisface:

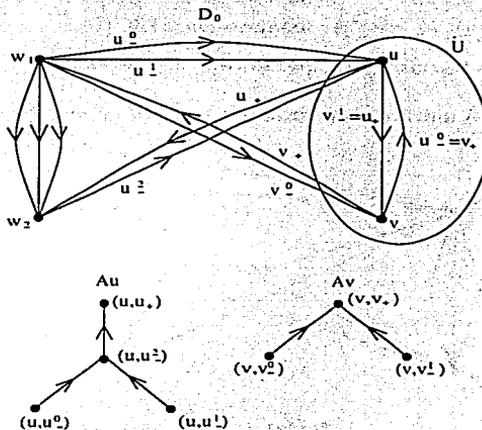
(1) D_0 es una multidigráfica, $U \subseteq V(D_0)$

(2) $A = (A_u)_{u \in U}$ es una familia de árboles con co-raíz,

donde $V(A_u) = \bar{\pi}_u$ y π_u es una τ -partición en u ; (u, u_+) es la co-raíz de A_u y $|\pi_u| \geq 2$

Para cada $u \in U$ y $f \in F_u(D)$, denotemos por $\Pi_u(f)$ al elemento de π_u que contiene a f .

La figura (4.7) ilustra un τ_0 -sistema.



$t_0 = (D_0, U, A)$ es un τ_0 -sistema

Figura 4.7:

Definición 4.2.3.

Si $t_0 = (D_0, U, A)$ es un τ_0 -sistema, entonces denotaremos por $\tau_0(t_0)$ a la digráfica definida como sigue:

$$V(\tau_0(t_0)) = V(D_0 - U) \cup \bigcup_{u \in U} V(A_u)$$

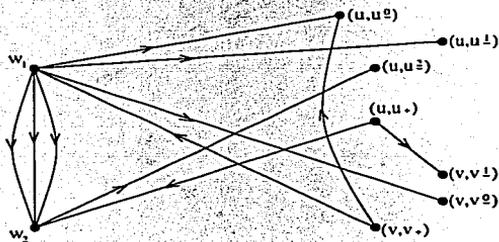
$$F(\tau_0(t_0)) = \{f^* \mid f \in FD_0\}$$

Para cada $f = wz \in FD_0$, f^* está definida como sigue:

$$f^* = \begin{cases} f & \text{cuando } \{w, x\} \subseteq (V(D_0) - U) \\ w(z, \pi_z(f)) & \text{cuando } w \in (V(D_0) - U) \\ \bar{w}_+ z & \text{cuando } w \in U \text{ y } z \in (V(D_0) - U) \\ \bar{w}_+(z, \pi_z(f)) & \text{cuando } \{w, z\} \subseteq U \end{cases}$$

Notemos que la manera en que se colocan las flechas en $\tau_0(t_0)$ es análoga a $s_0(S_0)$.

La figura (4.8) muestra la digráfica $\tau_0(t_0)$ del τ_0 -sistema de la figura (4.7).



$\tau_0(t_0)$

Donde t_0 es el τ_0 -sistema de la figura

Figura 4.8:

Definición 4.2.4.

La pareja $t_1 = (t_0, \gamma)$ será llamada un τ_1 -sistema si $t_0 = (D_0, U, A)$ es un τ_0 -sistema y $\gamma = (\gamma_u)_{u \in U}$ satisface:

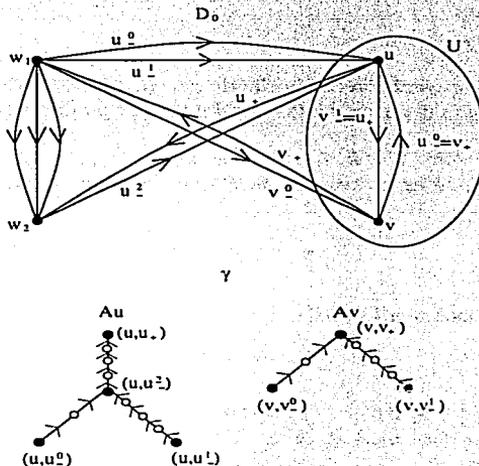
- (1) $\gamma_u = (\gamma_u^f)_{f \in FA_u}$ es una familia de trayectorias dirigidas internamente ajenas.
- (2) Si $f = w_1 w_2$, entonces γ_u^f es una $w_1 w_2$ -trayectoria de longitud par positiva, con $V(\gamma_u^f) \cap V(A_u) = \{w_1, w_2\}$.

Notemos que $\gamma_{u_1}^{f_1} \cap \gamma_{u_2}^{f_2} = \emptyset$ para cualquier $f_1 \in FA_{u_1}$, $f_2 \in FA_{u_2}$ y $u_1 \neq u_2$.

Denotaremos por $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ y $\tau_1(t_1) = \tau_0(t_0) \cup \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f$.

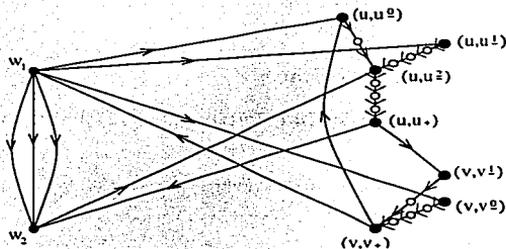
La figura (4.9) ilustra el τ_1 -sistema del τ_0 -sistema de la figura (4.7).

La figura (4.10) ilustra la digráfica $\tau_1(t_1)$ donde $\tau_0(t_0)$ es la digráfica de la figura (4.7) y γ es la familia de trayectorias de la figura (4.9)



$t_1 = (t_0, \gamma)$ es un τ_1 -sistema. Donde t_0 es el τ_0 -sistema de la figura (4.7)

Figura 4.9:



$$\tau_1(t_1) = \tau_0(t_0) \cup \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA} \gamma_u^f$$

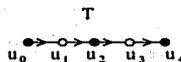
Donde $\tau_0(t_0)$ es la digráfica de la figura (4.7) y γ es la familia de trayectorias de la figura (4.10)

Figura 4.10:

Observación 4.2.1.

Si T es una trayectoria dirigida de longitud positiva par. Con $T = (u_0, u_1, \dots, u_{2n})$ y $n \geq 1$ entonces las siguientes propiedades se cumplen:

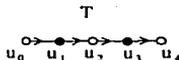
- (i) $N = \{u_i \mid i = 2k \quad 0 \leq k \leq n\} = \{u_0, u_2, \dots, u_{2n}\}$ es un $n.i.mod\{u_{2n}\}$ de T , más aún, N es un núcleo de T que contiene a $\{u_0, u_{2n}\}$.



$N = \{u_0, u_2, u_4\}$ es un $n.i.mod\{u_4\}$ de T , más aún N es un núcleo de T

Figura 4.11:

- (ii) $N' = \{u_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\} = \{u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}\}$ es un $n.i.mod\{u_{2n}\}$ de T tal que $\{u_0, u_{2n}\} \subseteq N'^c$.



$N = \{u_1, u_3\}$ es un $n.i.mod\{u_4\}$ de T

Figura 4.12:

Teorema 4.2.1. Sea $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ un τ_1 -sistema. Si D_0 tiene núcleo entonces $\tau_1(t_1)$ tiene núcleo.

Demostración.

Sea N_0 un núcleo de D_0 . De la observación (4.2.1) tenemos que para cada $u \in U$ y $f = w_1 w_2 \in F(A_u)$, existen $N_{u,f}^1, N_{u,f}^0$ dos núcleos independientes módulo $\{w_2\}$ de γ_u^f . Tales que $\{w_1, w_2\} \subseteq N_{u,f}^0$ y $\{w_1, w_2\} \subseteq (N_{u,f}^1)^c$.

Donde $\gamma_u^f = (u_0 = w_1, u_1, \dots, u_{2n} = w_2)$, $N_{u,f}^1 = \{u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}\}$ y $N_{u,f}^0 = \{u_0 = w_1, u_2, \dots, u_{2n} = w_2\}$, con $u \in U$.

Sea N_0 un núcleo de D_0 y $N = A' \cup B \cup C$, donde

$$A' = N_0 \cap (V(D_0) - U), \quad B = \bigcup_{u \in N_0 \cap U} \bigcup_{f \in F A_u} N_{u,f}^0$$

y

$$C = \bigcup_{u \in N_0^c \cap U} \bigcup_{f \in F A_u} N_{u,f}^1$$

Demostraremos que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$.

- Primero probaremos que N es independiente.

A' es independiente ya que N_0 lo es. B es independiente por construcción de $\tau_1(t_1)$ y ya que cada $N_{u,f}^0$ es independiente. C es independiente por construcción de $\tau_1(t_1)$ y ya que cada $N_{u,f}^1$ lo es.

Ahora, sea $w \in C$. Por definición de C , $w \in \gamma_u^f$ para algún $u \in U$ tal que $u \notin N_0$ y $w \in N_{u,f}^1$. Notamos que $w \neq (u, u_+)$ y $w \neq (u, u_-^i)$ (para $i \in \{0, 1, \dots, m(u) - 1\}$), ya que por construcción de $N_{u,f}^1$, $(u, u_+) \notin N_{u,f}^1$ y $(u, u_-^i) \notin N_{u,f}^1$ y por construcción de $\tau_1(t_1)$, $V(\gamma_u^f) \cap V(A_u) = \{w_1, w_2\}$ con $f = w_1 w_2$.

Entonces no existe wA' -flecha, wB -flecha, $A'w$ -flecha ni Bw -flecha en $\tau_1(t_1)$.

Es decir, N es independiente en $\tau_1(t_1)$.

- Demostraremos que si $z \in V(\tau_1(t_1)) - N$ entonces existe $x \in N$ tal que $zx \in F\tau_1(t_1)$.

Sea $z \in V(\tau_1(t_1)) - N$. Por definición de N , $z \in A^c \cap B^c \cap C^c$.

Tenemos los siguientes casos:

caso(1)

$$\text{Si } z \in V(\tau_1(t_1)) - V\left(\bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f\right)$$

Por definición de $\tau_1(t_1)$, $z \in V(D_0) - U$, y ya que $z \notin N$ tenemos que $z \notin N_0$ (por definición de A'). Entonces existe $x \in N_0$ tal que $zx \in FD_0$.

Si $x \in V(D_0) - U$ entonces por construcción de $\tau_1(t_1)$, $zx \in F\tau_1(t_1)$; además $x \in A'$ y por lo tanto $x \in N$.

Si $x \in U$ entonces existe $(x, x_i^-) \in V(\tau_1(t_1))$ tal que $z(x, x_i^-) \in F(\tau_1(t_1))$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, m(x) - 1\}$ (por construcción de $\tau_1(t_1)$). Además $x \in U$ y $x \in N_0$, de aquí que $(x, x_i^-) \in B = \bigcup_{u \in N_0 \cap U} \bigcup_{f \in FA_u} N_{u,f}^0$ y por lo tanto $x \in N$.

caso (2)

$$\text{Si } z \in \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$$

- (a) Si z no es un vértice interno de alguna trayectoria γ_u^f . Entonces existe $u \in U$ tal que $z = (u, u_i^-)$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, m(x) - 1\}$ ó $z = (u, u_+)$.

Notamos que si $u \in N_0$ entonces $(u, u_i^-) \in \bigcup_{f \in FA_u} N_{u,f}^0$ y

$$(u, u_+) \in \bigcup_{f \in FA_u} N_{u,f}^0.$$

Entonces $z \in B$. Lo cual contradice la elección de z .

Por lo tanto $u \notin N_0$.

Si $z = (u, u_i^-)$ entonces existe una $(u, u_i^-)(u, u_i^-)$ -trayectoria ó una $(u, u_i^-)(u, u_+)$ -trayectoria en $\tau_1(t_1)$, de lo contrario el vértice (u, u_i^-) sería un vértice aislado en A_u lo cual contradice que A_u es un árbol. Entonces $z = z_0$, esto es, z es el punto inicial de alguna trayectoria de longitud par positiva, digamos γ_u^f . $\gamma_u^f = (z_0, z_1, \dots, z_{2n})$. Por lo tanto $z z_1 \in F(\gamma_u^f) \subseteq F(\tau_1(t_1))$. Además, por construcción de $N_{u,f}^1$, y ya que $u \notin N_0$, $z \in C$ y por lo tanto $z \in N$.

Si $z = (u, u_+)$, como $u \notin N_0$, entonces existe $x \in N_0$ tal que $ux \in FD_0$.

Si $x \in V(D_0) - U$ entonces $x \in A' \subset N$ y $zx \in F\tau_1(t_1)$.

Si $x \in U$ entonces para algún $k \in \{0, 1, \dots, m(x) - 1\}$ tenemos que $z(x, x^k) \in F\tau_1(t_1)$

Como $x \in N_0$ y $x \in U$ entonces $(x, x^k) \in B \subset N$

(b) Si z es un vértice interno de alguna trayectoria γ_u^f .

Sea $\gamma_u^f = (u_0, u_1, \dots, u_{2n})$.

Si $u \in N_0$ entonces $u_0, u_{2n} \in B$ (ya que por definición de $N_{u,f}^0$, $u_0, u_{2n} \in N_{u,f}^0$). Por lo tanto $\{u_0, u_2, u_4, \dots, u_{2n}\} \subseteq B \subseteq N$

Además, $z \notin N$, en particular $z \notin B$, entonces $z = u_{2k-1}$ para algún $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Y por construcción de $\tau_1(t_1)$, $u_{2k-1}u_{2k} \in F\tau_1(t_1)$ con $u_{2k} \in N$.

Si $u \notin N_0$ entonces $\{u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}\} \subseteq C \subseteq N$ y como $z \notin N$, en particular $z \notin C$. Por lo tanto $z = u_{2k}$ para algún $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Y por construcción de $\tau_1(t_1)$, $u_{2k}u_{2k+1} \in F\tau_1(t_1)$ con $u_{2k+1} \in N$.

Por lo tanto N es absorbente en $\tau_1(t_1)$.

Concluimos que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$.

□

Teorema 4.2.2. Sea $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ un τ_1 -sistema. Si $\tau_1(t_1)$ tiene núcleo entonces D_0 tiene núcleo.

Demostración.

Sea N un núcleo de $\tau_1(t_1)$.

- Primero demostraremos que para cada $u \in U$

$$N' = N \cap \left(\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f) \right)$$

es un n.i. mod $\{u, u_+\}$ de $\bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f$.

Nés independiente ya que N lo es.

Probaremos que si $z \in \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f) - (N' \cup \{u, u_+\})$ entonces existe

$x \in N \cap \left(\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f) \right)$ tal que $zx \in F \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$.

Sea $z \in \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f) - (N' \cup \{u, u_+\})$.

- (a) Si $z = (u, u_i^-)$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, m(z) - 1\}$.

Sin pérdida de generalidad, sea $z = u_0 \in V(\gamma_u^f)$ con $\gamma_u^f = (z = u_0, u_1, \dots, u_m)$. Entonces, por ser γ_u^f una trayectoria de longitud par positiva, tenemos que $u_0 u_1 \in F\tau_1(t_1)$ y $u_1 \neq (z, z_i^-)$ para $j \in \{0, 1, \dots, m(z) - 1\}$ con $j \neq i$. Ahora, por construcción de $\tau_1(t_1)$, $\delta_{\tau_1(t_1)}^+(z_0) = 1$. Por lo tanto $u_1 \in N$, ya que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$. De aquí y por definición de N' tenemos que $u_1 \in N'$.

- (b) Si $z \neq (u, u_i^-)$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, m(u) - 1\}$.

Entonces z es un vértice interno de la trayectoria γ_z^f ; como las trayectorias son internamente ajenas, $\delta_{\tau_1(t_1)}^+(z) = 1$. Sea $x \in V(\tau_1(t_1))$ tal que $zx \in F(\tau_1(t_1))$. Por construcción de $\tau_1(t_1)$, $x \in \gamma_z^f$, además $x \in N$ (ya que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$). Entonces $x \in N'$.

De (a) y (b) concluimos que N' es *n.i.mod*{ (u, u_+) } de $\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^f$.

Entonces, por el lema tenemos que $V(A_u)$ es N' -homogéneo y por lo tanto $V(A_u)$ es N -homogéneo.

Ahora, definamos $N_0 = B \cup C$ donde $B = N \cap [V(D) - \bigcup_{u \in U} \bigcup_{j \in FA_u} V(\gamma_u^f)]$

y $C = \{u \in U \mid V(A_u) \subseteq N\}$.

Mostraremos que N_0 es núcleo de D_0 .

- Primero probaremos que N_0 es independiente.

B es independiente ya que N lo es.

Afirmamos que C es independiente.

Justificación

Sean $w, z \in C$. Por definición de C tenemos que $w, z \in U$, $V(A_z) \subseteq N$ y $V(A_w) \subseteq N$. Por lo tanto, no existen $V(A_z)V(A_w)$ -flechas, ni $V(A_w)V(A_z)$ -flechas en $\tau_1(t_1)$ (ya que N es independiente); en particular no existen $(w, w_+)(z, z_i^-)$ -flechas ni $(z, z_+)(w, w_i^-)$ -flechas en $\tau_1(t_1)$ con $i \in \{0, 1, \dots, m(z) - 1\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, m(w) - 1\}$.

Entonces, por construcción de $\tau_1(t_1)$, $wz \notin FD_0$ y $zw \notin FD_0$.

Por lo tanto C es independiente.

Afirmamos que no existe BC -flechas, ni CB -flechas en $\tau_1(t_1)$.

Justificación.

Sean $b \in B$ y $c \in C$. Por definición de B , $b \in N$ y $b \notin \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$, por lo tanto $b \in V(D_0) - U$. Además, por definición de C , $c \in U$ y $V(A_c) \subseteq N$, en particular $(c, c_-^i) \in N$ y $(c, c_+^i) \in N$ con $i \in \{0, 1, \dots, m(c) - 1\}$.

Entonces $b(c, c_-^i) \notin F\tau_1(t_1)$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, m(c) - 1\}$ (ya que $b \in N$ y $(c, c_-^i) \in N$). De aquí y por construcción de $\tau_1(t_1)$ tenemos que $bc \notin FD_0$.

Además, $(c, c_+^i)b \notin F\tau_1(t_1)$ ya que $b \in N$ y $(c, c_+^i) \in N$. Por lo tanto $cb \notin FD_0$ (por construcción de $\tau_1(t_1)$).

Es decir, N_0 es independiente.

- Demostraremos que si $z \in D_0 - N_0$ entonces existe $x \in N_0$ tal que $zx \in FD_0$.

Sea $z \in D_0 - N_0$.

Caso (1)

Si $z \in V(D_0) - U$

Por definición de $\tau_1(t_1)$, $z \notin \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$, además $z \notin N_0$.

Por lo tanto $z \in N^c$.

De aquí y ya que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$, existe $x \in N$ tal que $zx \in F\tau_1(t_1)$.

- (a) Si $x \in N$ y $x \notin \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$.

Por definición de B , $x \in B \subseteq N_0$ y por construcción de $\tau_1(t_1)$, $x \in V(D_0) - U$. Por lo tanto $zx \in FD_0$.

- (b) Si $x \in N$ y $x \in \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$.

Notemos que por construcción de $\tau_1(t_1)$, $x = (u, u_-^i)$ para algún $u \in U$ con $i \in \{0, 1, \dots, m(u) - 1\}$.

Ahora, ya que $x \in N$, tenemos que $x = (u, u_-^i) \in N$. Además, ya se demostró que $V(A_u) \subseteq N$.

De aquí que $u \in C \subseteq N_0$. Además, por construcción de $\tau_1(t_1)$, $zu \in FD_0$.

Caso(2)

Si $z \in U$

Por construcción de $\tau_1(t_1)$, tenemos que $w = (z, z_+)$ para algún

$w \in \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$.

Si $w \in N$ entonces $V(A_2) \subseteq N$. De aquí y por definición de C se sigue que $z \in C \subseteq N_0$ lo cual contradice la elección de z .

Por lo tanto $w \notin N$.

Entonces existe $x \in N$ tal que $wx \in F\tau_1(t_1)$ (ya que N es núcleo de $\tau_1(t_1)$).

Si $x \in V(\tau_1(t_1)) = \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$ entonces, por construcción de $\tau_1(t_1)$, $x \in V(D_0) - U$ y $zx \in FD_0$. Además, ya que $x \in N$, se sigue que $x \in N_0$.

Si $x \in \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$, por construcción de $\tau_1(t_1)$ tenemos que $x = (v, v^j)$ para algún $v \in U$ y algún $j \in \{0, 1, \dots, m(v) - 1\}$. De aquí y por construcción de $\tau_1(t_1)$, $zv \in FD_0$.

Ahora, $x \in N$, entonces $v \in N_0$.

Por lo tanto N_0 es absorbente en D_0 .

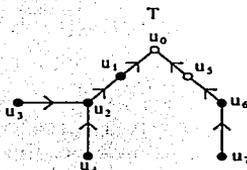
Concluimos que N_0 es núcleo de D_0 .

□

Definición 4.2.5.

Sea T un árbol con co-raíz. Un subconjunto S de $V(T)$ será llamado una *sección inicial* de T , si para cada $w \in T$ tal que existe una wS -trayectoria dirigida en T , se tiene que $w \in S$.

Ver fig. (4.13)



$S_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $S_2 = \{u_6, u_7\}$ son secciones iniciales de T

Figura 4.13:

Notamos que el conjunto vacío es una sección inicial de cualquier árbol con co-raíz.

Teorema 4.2.3. Sea $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ un τ_1 -sistema. Supongamos que para cada familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$, donde S_u es una sección inicial de A_u , la digráfica $D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta (para cada $f \in FD_0$, f^* denota la flecha de $\tau_0(t_0)$ definida en la definición (4.2.3)).

Si toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene núcleo entonces toda subdigráfica inducida propia de $D = \tau_1(t_1)$ tiene núcleo.

Demostración.

Por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una subdigráfica inducida propia de D sin núcleo, ésta (por el teorema (1.2.1)) contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H ; $H \subset^* D$.

Primero probaremos la siguiente observación:

Observación 4.2.2.

Para cada $u \in U$,

$$H \cap D\left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)\right] = D\left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u)\right]$$

donde $S = (S_u = V(A_u) - V(H))_{u \in U}$ es una familia tal que S_u es una sección inicial de A_u .

Justificación.

Sea $u \in U$.

Caso(1)

$$\text{Si } H \cap D\left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)\right] = D\left[\bigcup_{f \in F(A_u)} V(\gamma'_u)\right].$$

En este caso $S_u = \emptyset$ satisface las propiedades requeridas y $H \cap$

$$D\left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)\right] = D\left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u)\right]$$

Caso(2)

$$\text{Si } H \cap D\left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)\right] \subsetneq D\left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u)\right].$$

Sabemos que $H \cap D\left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)\right] = \bigcup_{f \in FA_u} (H \cap D[V(\gamma'_u)]) \subseteq$

$$D\left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u)\right].$$

Entonces existe $f \in FA_u$ con $f = w_1 w_2$ tal que $H \cap D[V(\gamma'_u)] \subseteq D[V(\gamma'_u)] = \gamma'_u$.

Ahora, por el corolario (1.2.1), H es fuertemente conexa (ya que H es núcleo imperfecta crítica). Y de la definición de τ_1 -sistema, $V(\gamma'_u) \cap V(A_u) = \{w_1, w_2\}$. De aquí que $H \cap D[V(\gamma'_u)] \subseteq D[\{w_1, w_2\}]$.

Luego, definimos:

$$A_u^{w_1} = A_u[\{z \in V(A_u) \mid \text{existe una } zw_1\text{-trayectoria dirigida contenida en } A_u\}]$$

y

$$H_{w_1} = H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u^{w_1}} V(\gamma'_f)]$$

- Afirmamos que $H_{w_1} = \emptyset$

Justificación.

Supongamos que $H_{w_1} \neq \emptyset$.

Sea $H_2 = H[V(H) - V(H_{w_1})]$. Notemos que $H_2 \neq \emptyset$, ya que si $H_2 = \emptyset$, entonces $V(H) = V(H_{w_1})$ y por lo tanto $H \subseteq \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_f)$, con H núcleo imperfecta crítica, lo

cual contradice que $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_f)$ es núcleo perfecta (por el corolario (1.2.3) y ya que $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_f)$ no contiene ciclos,

$\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_f)$ es núcleo perfecta).

Notemos que $w_1 \notin H_2$, ya que $w_1 \in V(H_{w_1})$. Además, de las definiciones de $A_u^{w_1}$ de H_{w_1} y de H_2 , tenemos que $H_2 \cap D[V(\gamma'_u)] \subseteq H \cap D[V(\gamma'_u)] - \{w_1\}$. De aquí que $H_2 \cap D[V(\gamma'_u)] \subseteq D[\{w_2\}]$. De aquí y por construcción de $\tau_1(t_1)$, no existen $H_{w_1} H_2$ -flechas en H .

Esto es, $\{H_{w_1}, H_2\}$ es una partición de $V(H)$ tal que no existe $H_{w_1} H_2$ -flecha en H , entonces por el teorema (1.2.2) H es fuertemente conexa y por el corolario (1.2.1) H no es núcleo imperfecta crítica, lo cual contradice la elección de H .

Por lo tanto $H_{w_1} = \emptyset$.

De aquí y ya que $H_{w_1} = H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u^{w_1}} V(\gamma'_f)]$ tenemos que $H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_f)] \subseteq^* D[\bigcup_{f \in F(A_u - A_u^{w_1})} V(\gamma'_f)]$.

Esto sucede para cada $f \in FA_u$ tal que $H \cap D[V(\gamma_u^f)] \subseteq D[V(\gamma_u^f)]$.
Ahora, definamos $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$ donde:

$$S_u^1 = \{w \in V(A_u) \mid \text{existe } f = wz \in FA_u \text{ tal que}$$

$$H \cap D[V(\gamma_u^f)] \subseteq \gamma_u^f\}$$

y

$$S_u^2 = \bigcup_{w \in S_u^1} V(A_u^w)$$

$$A_u^{w_1} = A_u[\{z \in V(A_u) \mid \text{existe una } zw_1 - \text{trayectoria} \\ \text{dirigida contenida en } A_u\}]$$

De esta manera, S_u es una sección inicial de A_u .

Con S_u así definida y ya que:

$$H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)] \subseteq D[\bigcup_{f \in F(A_u - A_u^{w_1})} V(\gamma_u^f)] \text{ para cada } f \in$$

FA_u tal que $H \cap D[V(\gamma_u^f)] \subseteq \gamma_u^f$, tenemos que:

$$H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)] \subseteq D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f)].$$

De aquí que si una trayectoria γ_u^f no está totalmente en H , tampoco está en H la sección inicial que llega al primer vértice de γ_u^f que está en H .

Entonces, las trayectorias que no están en dicha sección inicial, están en H .

$$\text{Es decir, } D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f)] \subseteq H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)].$$

$$\text{Concluimos que } H \cap D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)] = D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f)].$$

Queda así demostrada esta observación.

Ahora, sea H_0 una digráfica (no necesariamente inducida) de D_0 obtenida de H , identificando $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$ con u , para cada $u \in U$ tal que $H \cap$

$D[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)] \neq \emptyset$. Definimos $U_0 = U \cap V(H_0)$ y γ_0 la restricción de γ a $\bigcup_{u \in U} F(A_u - S_u)$, donde S_u es una sección inicial de A_u y $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$.

De esta manera tenemos $H \cong \tau_1(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0)$.

Probaremos que H_0 tiene núcleo.

Caso(1)

Si $S_u = \emptyset$ para cada $u \in U_0$.

Ya que H una digráfica inducida propia de $\tau_1(t_1)$ y $S_u = \emptyset$ para cada $u \in U_0$ existe

$$z \in [(V(\tau_1(t_1)) - \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma'_u)) \cap (V(\tau_1(t_1)) - V(H))]$$

De aquí y por construcción de H_0 tenemos que $z \in [(V(D_0) - U) \cap (V(D_0) - V(H_0))]$. Por lo tanto H_0 es una subdigráfica inducida propia de D_0 .

Entonces H_0 tiene núcleo, ya que por hipótesis toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene núcleo.

Caso(2)

Si $S_u \neq \emptyset$ para algún $u \in U_0$.

Por construcción de H_0 y ya que se demostró que:

$H \cap D[\bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma'_u)] = D[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u)]$, tenemos que $H_0 \subseteq^* D_0 - \{\bigcup_{u \in U'} \{f \in F D_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}\}$ con $U' = \{u \in U \mid S_u \neq \emptyset\}$ y f^* está definida como en la definición (4.2.3).

Ahora $U' \subseteq U$, de aquí que:

$$D_0 - \{\bigcup_{u \in U'} \{f \in F D_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}\} \subseteq^* D_0 - \{\bigcup_{u \in U} \{f \in F D_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}\}.$$

Por lo tanto $H_0 \subseteq^* D_0 - \{\bigcup_{u \in U} \{f \in F D_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}\}$. Y por hipótesis, $D_0 - \{\bigcup_{u \in U'} \{f \in F D_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}\}$ es núcleo perfecta.

Es decir, H_0 tiene núcleo.

Entonces, por el teorema (4.2.1) tenemos que H tiene núcleo (ya que $H = \tau_1(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0)$). Lo cual contradice la elección de H .

Por lo tanto toda subdigráfica inducida propia de $\tau_1(t_1)$ tiene núcleo. \square

Teorema 4.2.4. Sea $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ un τ_1 -sistema. Si toda subdigráfica inducida propia de $\tau_1(t_1)$ tiene núcleo entonces toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene núcleo.

Demostración.

Sean $D'_0 \subseteq^* D_0$ y $D' = \tau_1(D'_0, U', (A_u)_{u \in U'}, \gamma')$. Donde $U' = U \cap V(D'_0)$ y γ' es la restricción de γ a $\bigcup_{u \in U'} FA_u$.

Por definición de τ_1 -sistema, de D' y ya que $D'_0 \subseteq^* D_0$, se sigue que $D' \subseteq^* \tau_1(t_1)$.

Entonces, por hipótesis, D' tiene núcleo.

De aquí, por construcción de D' y por el teorema (4.2.3), tenemos que D'_0 tiene núcleo. □

Teorema 4.2.5. *Sea $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ un τ_1 -sistema tal que para cada familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$, donde S_u es una sección inicial de A_u , la digráfica $D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0 \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta.*

Entonces $\tau_1(t_1)$ es núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica) si y sólo si D_0 es núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica).

Demostración.

La demostración de este teorema se sigue de los teoremas (4.2.1), (4.2.2) (4.2.3), (4.2.4). □

4.3. τ -SISTEMAS y τ -EXTENSIONES

En esta sección se desarrolla la τ -construcción que también es una generalización de la s -construcción y con la cual también se pueden extender digráficas núcleo perfectas a digráficas núcleo imperfectas críticas.

Definición 4.3.1.

Sea $t_0 = (D_0, U, A)$ un τ_0 -sistema, denotaremos por $\tau(t_0)$ la digráfica definida de la siguiente manera:

$$V(\tau(t_0)) = V(\tau_0(t_0))$$

$$F(\tau(t_0)) = F\tau_0(t_0) \cup \{\bar{w}_+y \mid y\bar{z}_+ \in FA_z, \quad wz \in FSimD_0[U]\}$$

$$\cup \{\bar{z}_+y \mid y\bar{w}_+ \in FA_w, \quad wz \in FSimD_0[U]\}$$

Ver fig. (4.14)

Sea D_0^τ la digráfica obtenida de $\tau(t_0)$ identificando para cada $u \in U$, $V(A_u)$ con u . Ver fig. (4.15)

Claramente $\tau_0^\tau = (D_0^\tau, U, A^\tau)$ es un τ_0 -sistema y $\tau_0(t_0^\tau) = \tau(t_0)$ donde $A_u^\tau \cong A_u$ y para cada $u \in U$ la τ -partición está dada por

$$\pi_u^\tau = \{\{f \in D_0^\tau \mid \text{en } \tau(t_0) \text{ } f \text{ incide en } x\} \mid x \in V(A_u)\}$$

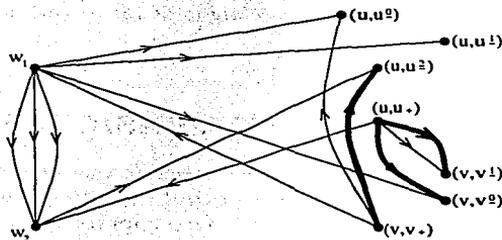
Si $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$ es un τ_1 -sistema entonces denotamos

$$\tau(t_1) = \tau(t_0) \cup \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in F A_u} \gamma_u^f \text{ y claramente } t_1^\tau = (D_0^\tau, U, A^\tau, \gamma) \text{ es un } \tau_1\text{-}$$

sistema y $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^\tau)$.

Notemos que la manera en que se colocan las flechas entre vértices de $\tau_0(t_0)$ es análoga a $s_0(S_0)$

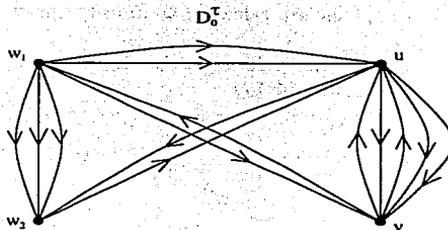
La figura (4.14) ilustra la digráfica $\tau(t_0)$, del τ_0 -sistema de la figura (4.7). La figura (4.15) ilustra la digráfica τ_0^τ obtenida de la digráfica $\tau(t_0)$, identificando para cada $u \in U$ $V(A_u)$ con u . La figura (4.16) ilustra la digráfica $\tau(t_1)$, del τ -sistema de la figura (4.9).



$\tau(t_0)$

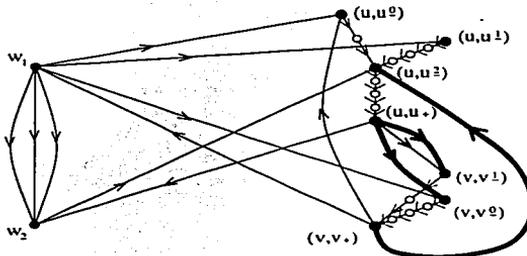
Donde t_0 es el τ_0 -sistema de la figura (4.7)

Figura 4.14:



D_0^τ

Figura 4.15:



$$\tau(t_1) = \tau_1(t_1^\tau)$$

Donde t_1 es el τ -sistema de la figura (4.9)

Figura 4.16:

Definición 4.3.2.

Una pareja $t = (t_1, \mathcal{U}_+)$ será llamada un τ -sistema, si $t = (D_0, U, A, \gamma)$ es un τ_1 -sistema y \mathcal{U}_+ es una digráfica tal que:

$$V(\mathcal{U}_+) \subseteq \{\bar{u}_+ \in V(A_u) \mid u \in U\}$$

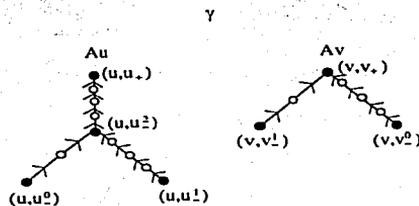
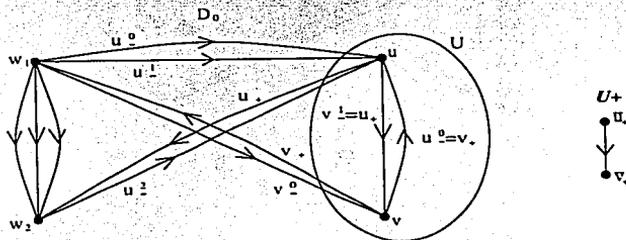
y

siempre que $\bar{u}_+ \bar{v}_+ \in FU_+$ tenemos que $uv \in FSimD_0[U]$.

También denotaremos $t = (D_0, U, A, \gamma, \mathcal{U}_+)$.

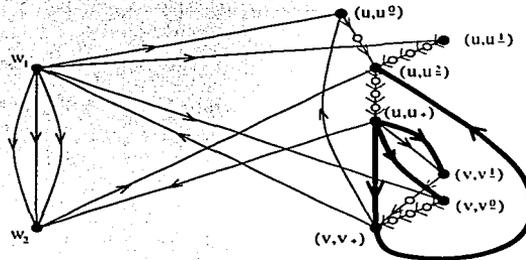
Si $t = (D_0, U, A, \gamma, \mathcal{U}_+)$ es un τ -sistema, denotaremos $\tau(t) = \tau(t_1) \cup \mathcal{U}_+$ donde $t_1 = (D_0, U, A, \gamma)$.

La figura (4.17) ilustra un τ -sistema. La figura (4.18) ilustra digráfica $\tau(t)$, del τ -sistema de la figura (4.17).



$t = (t_1, \mathcal{U}_+)$ es un τ -sistema

Figura 4.17:



$\tau(t) = \tau(t_1) \cup \mathcal{U}_+$ donde t es el τ -sistema de la figura (4.17)

Figura 4.18:

Teorema 4.3.1. Sea $t = (D_0, U, A, \gamma, \mathcal{U}_+)$ un τ -sistema. D_0 tiene núcleo si y sólo si $\tau(t)$ tiene núcleo.

Demostración.

Probaremos que $\tau(t)$ tiene núcleo.

Sabemos que $\tau(t) = \tau_1(t_1^r) \cup \mathcal{U}_+$, donde $t_1^r = (D_0^r, U, A^r, \gamma)$ está definida como en la definición (4.3.1).

Por construcción de D_0^r , en D_0^r sólo se agregan flechas entre vértices que ya tienen flechas simétricas en D_0 de aquí y ya que por hipótesis D_0 tiene núcleo, tenemos que D_0^r tiene núcleo.

Entonces, por el teorema (4.2.1) $\tau_1(t_1^r)$ tiene núcleo.

Sea N un núcleo de $\tau_1(t_1^r)$.

Notemos que N es núcleo de $\tau(t_1)$, ya que por la definición (4.3.1), $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^r)$.

Observación 4.3.1.

Afirmamos que para cada $u \in U$, $N_u = N \cap (\bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f)$ es un $n.i.mod\{\bar{u}_+\}$ de $\bigcup_{f \in FA_u}$ donde \bar{u}_+ es la co-raíz de A_u .

Justificación.

Recordemos que $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^r) = \tau(t_0) \cup (\bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f)$. Y ya que N es núcleo de $\tau(t)$ tenemos que N_u es independiente en $\bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f - \{\bar{u}_+\}$.

Probaremos que N_u es absorbente en $\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j - \{\bar{u}_+\}$.

Sea $z \in V(\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j) - \{\bar{u}_+\}$ tal que $z \notin N_u$. Notemos que por construcción de N_u , $z \notin N$. Entonces existe $x \in N$ tal que $zx \in F\tau(t_1)$.

Por construcción de $\tau(t_1)$ tenemos que $x \in V(\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j)$, ya que $z \neq \bar{u}_+$.

Entonces $x \in N_u$.

Se sigue que N_u es absorbente en $\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j - \{\bar{u}_+\}$.

Por lo tanto N_u es un $n.i.mod\{\bar{u}_+\}$ de $\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j$.

Por la observación (4.3.1) y el lema (4.1.1), $V(A_u)$ es N_u -homogéneo y por lo tanto es N -homogéneo.

Opt

Probaremos que si $\bar{u}_+\bar{w}_+ \in F(\mathcal{U}_+)$ entonces $V(A_u) \subseteq N^c$ ó $V(A_u) \subseteq N^c$.

Por la definición de $\tau(t)$ sabemos que si $\bar{u}_+\bar{w}_+ \in F\mathcal{U}_+$ entonces $uw \in FSimD_0[U]$, además por la definición (4.3.1) existen $u' \in V(A_u)$, $w' \in V(A_w)$ tales que $u'\bar{u}_+ \in FA_u$, $w'\bar{w}_+ \in FA_w$, $\bar{u}_+w' \in F\tau_1(t_1^+)$ y $\bar{w}_+u' \in F(\tau_1(t_1^+))$ (ya que $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^+)$).

Notemos que $V(A_u) \subseteq N^c$ ó $V(A_w) \subseteq N^c$, ya que si $V(A_u) \subseteq N$ y $V(A_w) \subseteq N$ entonces por la definición (4.3.1), existe $\bar{u}_+, w' \in N$ y $\bar{u}_+w' \in F\tau_1(t_1)$, lo cual contradice que N es independiente en $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^+)$.

Es decir, $V(A_u) \subseteq N^c$ ó $V(A_w) \subseteq N^c$.

De aquí y por la definición de $\tau(t)$ tenemos que N es independiente. Además N es absorbente en $\tau(t_1)$, por lo tanto N es absorbente en $\tau(t)$.

Entonces N es núcleo de $\tau(t)$.

Recíprocamente, demostraremos que si $\tau(t)$ tiene núcleo entonces D_0 tiene núcleo.

Sea N un núcleo de $\tau(t)$.

Priemero demostraremos que N es núcleo de $\tau(t_1)$.

N es independiente en $\tau(t_1)$, ya que N es independiente den $\tau(t) = \tau(t_1) \cup \mathcal{U}_+$, (con $T_1 = (D_0, y, A, \gamma)$).

Probaremos que N es absorbente en $\tau(t_1)$.

Definamos $N_u = N \cap (\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j)$. Análogamente a la observación (4.3.1)

tenemos que N_u es $n.i.mod\{\bar{u}_+\}$ de $\bigcup_{j \in FA_u} \gamma_u^j$ donde \bar{u}_+ es la co-raíz de A_u .

De aquí y del lema (4.1.1) se sigue que $V(A_u)$ es N_u -homogéneo y por lo tanto es N -homogéneo.

Ahora, sean $\bar{u}_+, \bar{w}_+ \in V(\mathcal{U}_+)$.

Si $\bar{u}_+ \bar{w}_+ \in F(\mathcal{U}_+)$ tal que $\bar{u}_+ \notin N$ y $\bar{w}_+ \in N$. De las definiciones de $\tau(t)$, de $\tau(t_1)$ y ya que $\tau(t) = \tau(t_1) \cup \mathcal{U}_+$, tenemos que existen $u' \in V(A_u)$ y $w' \in V(A_w)$ tales que $u' \bar{u}_+ \in FA_u$, $w' \bar{w}_+ \in FA_w$ y $\{\bar{w}_+ u', \bar{u}_+ w'\} \subseteq F\tau(t_1) \subseteq F\tau(t)$. Además ya que $V(A_w)$ es N -homogéneo y $\bar{w}_+ \in N$, se sigue que $V(A_w) \subseteq N$.

Entonces $w' \in N$ y $\bar{u}_+ w' \in F\tau(t_1) = F\tau_1(t_1)$.

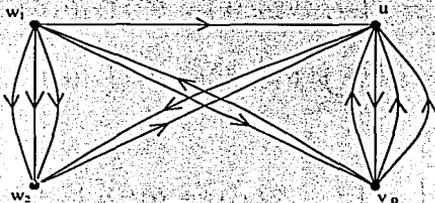
Por lo tanto N es absorbente en $\tau(t_1)$.

Concluimos que N es núcleo de $\tau(t_1) = \tau_1(t_1^r)$.

Tenemos que $t_1^r = (D_0^r, U, A^r, \gamma)$ es un τ_1 -sistema y $\tau_1(t_1^r)$ tiene núcleo, entonces por el teorema (4.2.2) tenemos que D_0^r tiene núcleo.

De aquí y por construcción de D_0^r concluimos que D_0 tiene núcleo. □

La figura (4.19) ilustra una digráfica, (como se toma en el teorema (4.3.2)), $D_0^r = \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0^r) \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$, donde D_0^r es la digráfica obtenida a partir de la digráfica $\tau(t_0)$ de la figura (4.16) y tomando $S = S_u = (u, u_0^-)$ en dicha figura.



$$D_0^r = \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0^r) \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$$

Tomando $S = S_u = (u, u_0^-)$ en la figura (4.16)

Figura 4.19:

Teorema 4.3.2. Sea $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$ un τ -sistema y supongamos que para cada familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$, donde S_u es una sección inicial de A_u , la digráfica $D_0^S = \bigcup_{u \in U} \{f \in F(D_0^S) \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta (para cada $f \in F D_0^S$, f^* denota la flecha de $\tau_0(t_0^f)$ definida en la definición (4.2.3)).

Si toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene núcleo y U_+ es una digráfica núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida propia de $\tau(t)$ tiene núcleo.

Demostración.

Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una subdigráfica inducida propia de $\tau(t)$ sin núcleo, ésta (por el teorema (1.2.1)) contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H , $H \subset^* \tau(t)$.

Observación 4.3.2. Para cada $u \in U$

$$H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma_u^f) \right] \right) = \tau(t) \left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f) \right]$$

donde $S_u = V(A_u) - V(H)$ es una sección inicial de A_u .

Justificación

Notemos primero que por construcción de $\tau(t)$ tenemos:

$$H \cap \left(\tau(t) \left[V(\gamma_u^f) \right] \right) = H \cap \left(\tau_1(t_1) \left[V(\gamma_u^f) \right] \right)$$

$$H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma_u^f) \right] \right) = H \cap \left(\tau_1(t_1) \left[\bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma_u^f) \right] \right)$$

y

$$\tau(t) \left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f) \right] = \tau_1(t_1) \left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f) \right]$$

con $u \in U$ y S_u una sección inicial de A_u .

Ahora, por la observación (4.2.2) tenemos que:

$$H \cap \left(\tau_1(t_1) \left[\bigcup_{f \in F A_u} V(\gamma_u^f) \right] \right) = \tau_1(t_1) \left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma_u^f) \right]$$

para cada $u \in U$ tal que existe $f \in FA_u$ con $H \cap (\tau_1(t_1)[V(\gamma'_u)]) \subseteq \gamma'_u$ y donde $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$

$$S_u^1 = \{w \in V(A_u) \mid \text{existe } f = wz \in FA_u \text{ tal que}$$

$$H \cap (\tau_1(t_1)[V(\gamma'_u)]) \subseteq \gamma'_u\}$$

$$S_u^2 = \bigcup_{w \in S_u^1} V(A_u^w)$$

y

$$A_u^{w_1} = A_u \{ \{z \in V(A_u) \mid \text{existe una } zw_1 - \text{trayectoria} \\ \text{dirigida contenida en } A_u\} \}$$

De esta manera, S_u es una sección inicial de A_u .

Entonces, con S_u , S_u^1 , S_u^2 y A_u^w así definidas, tenemos que para cada $u \in U$ tal que existe $f \in FA_u$ con $H \cap (\tau(t)[V(\gamma'_u)]) \subseteq \gamma'_u$ se cumple:

$$H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u) \right] \right) = \tau(t) \left[\bigcup_{f \in F(A_u - S_u)} V(\gamma'_u) \right]$$

Queda así demostrada la observación (4.3.2)

Ahora, sea H_0 una subdígrafa (no necesariamente inducida) de D_0 , obtenida de H identificando $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u)$ con u , para cada $u \in U$ tal que

$$H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u) \right] \right) \neq \emptyset.$$

Definimos $U_0 = U \cup V(H_0)$, $U_+^0 = U_+ \{ \{u_+ \in V(U_+) \mid u \in U_0\} \}$ y γ_0 la restricción de γ a $\bigcup_{u \in U_0} F(A_u - S_u)$, donde S_u es una sección inicial de A_u y

$$S_u = S_u^1 \cup S_u^2.$$

De esta manera tenemos que $H = \tau(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0, U_+^0)$.

Demostremos que H_0 tiene núcleo.

Primero probaremos las afirmaciones (i) y (ii) siguientes:

Definamos $H_0^+ = H_0 \{ \{z \in U_0 \mid S_z = A_z - \{\bar{z}_+\}, \bar{z}_+ \text{ es la co-raíz de } A_z\} \}$.

(i) Afirmamos que H_0^+ es núcleo perfecta.

Justificación.

Por construcción de $\tau(t)$, de H_0 , de H_0^+ y ya que $V(\mathcal{U}_+) = U_+$ donde $U_+ = \{\bar{u}_+ \mid u \in U\}$ tenemos que $H_0^+ \cong \mathcal{U}_+[\{\bar{z}_+ \mid z \in V(H_0^+)\}]$. Esto es, $H_0^+ \subseteq \mathcal{U}_+$.

Por hipótesis \mathcal{U}_+ es núcleo perfecta, por lo tanto H_0^+ es núcleo perfecta.

(ii) Afirmamos que $FH_0[(H_0 - H_0^+), H_0^+] \subseteq FSimH_0$

Justificación.

Sea $wz \in FH_0$ talque $w \notin V(H_0^+)$ y $z \in V(H_0^+)$.

Probaremos que $w \in U$.

Si $w \notin U$ y $wz \in FH_0$. Por definición de H_0^+ se sigue que $H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u) \right] \right) = \{\bar{z}_+\}$ entonces, por definición de H_0 , $w\bar{z}_+ \in FH \subseteq F\tau(t)$, lo cual es imposible por la manera en que se construye $\tau(t)$.

Por lo tanto $w \in U$.

Además $w \in H_0$ (ya que $wz \in FH_0$). Entonces $w \in U_0 = U \cap V(H_0)$.

Notemos que $z \in U_0$ (ya que $z \in V(H_0^+)$).

Ahora, por construcción de H_0^+ y ya que $z \in H_0^+$ tenemos que $H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u) \right] \right) = \{\bar{z}_+\}$ con \bar{z}_+ la co-raíz de A_z .

Por la observación (4.3.2), por definición de H_0^+ y ya que $w \in U_0$ y $w \notin V(H_0^+)$ tenemos que existe $w' \in V(A_w) \cap V(H)$ tal que $w'\bar{w}_+ \in FA_w$ (de lo contrario $w \in V(H_0^+)$).

Ahora, $wz \in FH_0$ y $z \in V(H_0^+)$. Entonces, por construcción de H_0 y ya que $H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma'_u) \right] \right) = \{\bar{z}_+\}$, se sigue que existe $x \in V(A_w)$ tal que $x \in V(H)$ y $x\bar{z}_+ \in FH$.

Recordemos que por construcción de $\tau(t)$ a \bar{z}_+ sólo entran flechas que provienen de puntos de U_+ . Por lo tanto $x = \bar{w}_+$.

Esto es $\bar{w}_+\bar{z}_+ \in FH \subseteq F\tau(t)$. Entonces $\bar{w}_+\bar{z}_+ \in FU_+$ (por construcción de $\tau(t)$). De aquí y por la definición (4.3.2) tenemos que $wz \in FSimD_0$. Entonces, por la definición (4.3.1), $\bar{z}_+w' \in F\tau(t)$ para cada $w'\bar{w}_+ \in FA_w$.

Podemos tomar $w \in V(H)$, pues ya se dijo que existe $w' \in V(A_w) \cap V(H)$ tal que $w'\bar{w}_+ \in FA_w$.

Además $H \subset^* \tau(t)$ ($\bar{z}_+ \in V(H)$ y $w' \in V(H)$)

Entonces $\bar{z}_+ w' \in FH$. De aquí y por construcción de H_0 se sigue que $zw \in FH_0$.

Por lo tanto $F[(H_0 - H_0^+), H_0^+] \subseteq FSimH_0$.

Ahora, analizaremos los dos casos posibles:

Caso (1)

Si $H_0^+ \neq \emptyset$

Sea $H'_0 = H - \{\bar{z}_+ \mid z \in V(H_0^+)\}$. Con H'_0 así definida, tenemos que H'_0 es núcleo perfecta (ya que H es núcleo imperfecta crítica y $H_0^+ \neq \emptyset$).

Notemos que $H'_0 = \tau(H_0 - H_0^+, (A_u - S_u)_{u \in (U_0 - H_0^+)}, \gamma'_0, \bar{U}_+^0)$, donde γ'_0 es la restricción de γ a $\bigcup_{u \in U_0 - H_0^+} F(A_u - S_u)$ y $\bar{U}_+^0 = U_+^0 - \{\bar{z}_+ \in U_+^0 \mid z \in V(H_0^+)\}$.

Entonces, por el teorema (4.3.1) y ya que H'_0 tiene núcleo, se sigue que $H_0 - H_0^+$ tiene núcleo.

Sea N_1 un núcleo de $H_0 - H_0^+$.

Probaremos que N_1 es seminúcleo de H_0 .

N_1 es independiente en H_0 ya que lo es en $H_0 - H_0^+$.

Ahora, sea $y \in V(H_0)$ tal que existe $vy \in FH_0$ con $v \in N_1$.

Si $y \in V(H_0 - H_0^+)$ entonces existe $x \in N_1$ tal que $yx \in FH_0$ (ya que N_1 es núcleo de $H_0 - H_0^+$).

Si $y \in H_0^+$. Notemos que $v \in V(H_0) - V(H_0^+)$ (ya que $N_1 \subseteq H_0 - H_0^+$). Entonces por (ii) se tiene $yv \in FH_0$.

Por lo tanto N_1 es seminúcleo de H_0 .

Ahora, por (i) H_0^+ es núcleo perfecta. Por lo tanto $H_0^+[\{z \in V(H_0^+) \mid \text{no existe } zN_1 - \text{flecha en } H_0\}]$ tiene un núcleo, sea N_2 .

Entonces, por el teorema (4.1.1), $N_1 \cup N_2$ es un núcleo de H_0 .

Es decir, H_0 tiene núcleo.

caso (2)

$$\text{Si } H_0^+ = \emptyset$$

En este caso tenemos que para cada $u \in U_0$ existe $u' \in V(A_u) \cap V(H)$ tal que $u'u_+ \in FA_u$.

Sea H_1 la digráfica obtenida de $H - F(U_+)$ identificando para cada $u \in U_0$, $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$ con u .

Tenemos las siguientes afirmaciones:

- (a) Para cualquier par de vértices $u, v \in V(H_0)$ existe al menos una uv -flecha en H_1 si y sólo si existe al menos una uv -flecha en H_0

Justificación.

Supongamos que existe f una uv -flecha en H_1 .

Notemos que por definición de H_1 , $V(H_1) = V(H_0)$ (ya que $U_0 = U \cap V(H_0)$) y $FH_1 \subseteq FH_0$.

Por lo tanto $f \in FH_0$.

Recíprocamente, sea $f_1 = uv \in FH_0$.

Si $f_1 \in FH_1$ entonces existe una uv -flecha en H_1 .

Si $f_1 \notin FH_1$. Recordemos que $H_0 \subseteq D_0$ y H_0 es obtenida a partir de H , identificando $\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f)$ con u (para cada $u \in U$ tal que

$$H \cap \left(\tau(t) \left[\bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^f) \right] \right) \neq \emptyset.$$

De aquí y ya que $H_1 = H_0 - FU_+$ se sigue que existe $f_2 \in FH$ tal que $f_2 = \bar{u}_+ \bar{v}_+ \in FU_+$. Entonces, por construcción de $\tau(t)$ (definición (4.3.2)), $f_3 = uv \in FSimD_0[U]$ con $f_3 \neq f_1$.

Por lo tanto $f_3 \in FH_1$.

- (b) H_0 tiene núcleo si y sólo si H_1 tiene núcleo.

La demostración se sigue de (a).

Probaremos que H_1 tiene núcleo.

Notemos que $H_1 \subseteq H_0 \subseteq D_0^+$ (por definición de H_0 y de H_1).

Por la observación (4.3.2) y por la manera en que se definió H_0 , tenemos que $H_0 \subseteq D_0^+ - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^+ \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$. Además por

(a) se sigue que H_1 es isomorfa a la subdígrafa inducida por $V(H_0)$ en $D_0^* = \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^* \mid f^* \text{incide en } S_u\}$.

subcaso (1)

Si $S = (S_u)_{u \in U}$ es una familia no trivial.

Por hipótesis $D_0^* = \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^* \mid f^* \text{incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta y por lo tanto H_1 tiene núcleo.

subcaso (2)

Si $S_u = \emptyset$ para cada $u \in U$.

En este caso $H_1 \cong D_0^*[V(H_0)]$.

Ahora, $H \subset^* \tau(t)$ y ya que $S_u = \emptyset$ para cada $u \in U$, se sigue que existe

$$z \in [(V(\tau(t)) - \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} V(\gamma_u^*)) \cap (V(\tau(t)) - V(H))]$$

De aquí y por construcción de H_1 tenemos que

$$z \in [(V(D_0) - V(H_1))]$$

Por lo tanto $H_1 \subset^* D_0^*$.

Por hipótesis toda subdígrafa inducida propia de D_0 tiene núcleo. De aquí y ya que para obtener D_0^* se agregan flechas paralelas a D_0 , tenemos que toda subdígrafa inducida propia de D_0^* tiene núcleo.

En particular H_1 tiene núcleo.

Entonces por (b), H_0 tiene núcleo.

Además $H = \tau(H_0, U_0, (A_u - S_u)_{u \in U_0}, \gamma_0, U_+^0)$ entonces por el teorema (4.3.1), H tiene núcleo. Lo cual contradice la elección de H .

Por lo tanto toda dígrafa inducida propia de $\tau(t)$ tiene núcleo. \square

Teorema 4.3.3. *Sea $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$ un τ -sistema. Si toda subdígrafa inducida propia de $\tau(t)$ tiene núcleo entonces toda subdígrafa inducida propia de D_0 tiene núcleo.*

Demostración.

Supongamos que toda subdigráfica inducida propia de $\tau(t)$ tiene un núcleo y sean D'_0 una subdigráfica inducida propia de D_0 , $U' = U \cap V(D'_0)$, γ' la restricción de γ a $\bigcup_{u \in U'} F(A_u)$ y $U'_+ = U_+ \{ \bar{z}_+ \in V(U_+) \mid z \in U' \}$.

De esta manera el τ -sistema $\tau(D'_0, U', (A_u)_{u \in U'}, \gamma', U'_+)$ es una subdigráfica inducida propia de $\tau(t)$ (ya que $D'_0 \subset^* D_0$). Y por hipótesis toda subdigráfica inducida propia de $\tau(t)$ tiene núcleo.

Por lo tanto $\tau(D'_0, U', (A_u)_{u \in U'}, \gamma', U'_+)$ tiene núcleo.

Entonces por el teorema (4.3.1) D'_0 tiene núcleo.

Es decir, toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene núcleo. □

Teorema 4.3.4. Sea $t = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$ un τ -sistema. Supongamos que para cada familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$ donde S_u es una sección inicial de A_u , la digráfica $D_0^S = \bigcup_{u \in U} \{ f \in FD_0^S \mid f^* \text{incide en } S_u \}$ es núcleo perfecta (para cada $f \in D_0^S$, f^* denota la flecha de $\tau_0(t_0)$ definida en la definición (4.2.3)) y U_+ es una digráfica núcleo perfecta.

Entonces $\tau(t)$ es núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica) si y sólo si D_0 es núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica).

Demostración.

La demostración de este teorema se sigue de los teoremas (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3). □

Observación 4.3.3.

Sea $T = (D_0, U, A, \gamma, U_+)$ un τ -sistema. Denotaremos por $\tau'_0(t)$ la digráfica definida como sigue:

$$V(\tau'_0(t)) = V(\tau_0(t_0))$$

$$F(\tau'_0(t)) = F(\tau_0(t_0)) \cup \{ w_+ y \mid y z_+ \in F A_{z_+}, w_+ z_+ \in F U_+ \}$$

$$\cup \{ z_+ y \mid y w_+ \in F A_w, w_+ z_+ \in F U_+ \}$$

Denotaremos por D_0^u a la digráfica que se obtiene de $\tau'_0(t)$ identificando $\bigcup_{u \in U} V(A_u)$ con u .

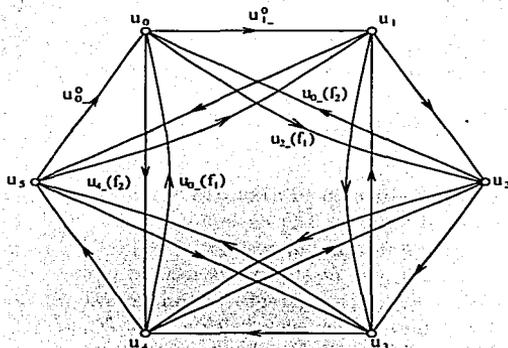
Claramente $t_0^{u'} = (D_0^{u'}, U; A^{u'})$ es un τ_0 -sistema y $\tau_0(t_0^{u'}) = \tau'_0(t)$ donde $A^{u'}_u \cong A_u$ para cada $u \in U$ y la τ -partición correspondiente está dada por:

$$\Pi_u^{\tau'} = \{\{f \in FD_0^{\tau'} \mid f^* \text{ incide en } x\} \mid x \in V(A_u)\}$$

Denotamos por $\tau_1'(t) = \tau_0'(t) \cup \bigcup_{u \in U} \bigcup_{f \in FA_u} \gamma_u^f$ y $\tau'(t) = \tau_1'(t) \cup U_+$.

De esta manera los teoremas (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) y (4.3.4) se siguen cumpliendo, si cambiamos $\tau(t)$ por $\tau'(t)$, $D_0^{\tau'}$ por $D_0^{\tau'}$ y $\tau_0(D_0^{\tau'}, U, A^{\tau'})$ por $\tau_0(D_0^{\tau'}, U, A^{\tau'})$ y las demostraciones son análogas.

La figura (4.20) ilustra una digráfica como la definida en el lema (4.3.1) y con una partición Π_u como la definida en dicho lema.



$$\pi_{u_0} = \{u_{0-}^0, u_{0+}^0, u_{0-}(f_1), u_{0-}(f_2)\}$$

$$u_{0+} = \{u_{4-}(f_2), u_{2-}(f_1)\}$$

$$\bar{\pi}_{u_0} = \{(u, u_{0-}^0), (u, u_{0+}), (u, u_{0-}(f_1)), (u, u_{0-}(f_2))\}$$

Figura 4.20:

Lema 4.3.1. Sean $D_0 = \bar{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r)$, $U = V(D_0)$, para cada $u \in U$, $\Pi_u = \{u^0, u_+, u_-(f) \mid u_-(f) = \{f\}, f \in F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)\}$ es la τ -partición en u

$$\bar{\Pi}_u = \{(u, u^0), (u, u_+), (u, u_-(f)) \mid u_-(f) \in \Pi_u\}$$

donde $u^0 = F(\text{Asim}D_0) \cap F_u^-(D_0)$ y $u_+ = F_u^+(D_0)$, A_u denotará la u^0 - u_+ -trayectoria dirigida $((u, u^0), (u, u_-(f_1)), (u, u_-(f_2)), \dots, (u, u_-(f_r)), (u, u_+))$ (tomando cualquier orden fijo $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ de $F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)$). Ver figura (4.20).

Para cualquier familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$ donde S_u es una sección inicial de A_u , la digráfica $D_0(S) = D_0^{\tau} - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^{\tau} \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta.

Demostración.

Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que el lema (4.3.1) es falso.

Entonces existe una familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$ donde S_u es una sección inicial de A_u , tal que $D_0(S)$ no es núcleo perfecta.

Como $D_0(S)$ no es núcleo perfecta entonces $D_0(S)$ contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H , $H \subseteq^* D_0(S) = D_0^{\tau} - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^{\tau} \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$.

Primero probaremos que $\text{Asim}H \neq \emptyset$.

Supongamos, por contradicción, que $\text{Asim}H = \emptyset$ entonces H es simétrica y por el corolario (1.2.3) H es núcleo perfecta. Contradiciendo que H es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto $\text{Asim}H \neq \emptyset$.

Tenemos los siguientes casos posibles:

Caso (1)

Si $\text{Asim}H \subseteq \bar{C}_n \cap D_0(S)$.

Ya que $S \neq \emptyset$ existe al menos una flecha f tal que $f \in \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^{\tau} \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$.

Sea $f = u_i u_j \in F(D_0^{\tau})$ con $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $S_{u_i} \neq \emptyset$ y f^* incide en S_{u_i} .

Entonces al menos $(u_j, u_{j-}^0 \in S_{u_j}$ y por lo tanto al menos se quita la flecha u_{j-}^0 de D_0^+ , para obtener $D_0(S) = D_0^+ - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^+ \mid f^* \text{incide en } S_u\}$. Esto es, $u_{j-}^0 \notin D_0(S)$.

Recordemos que $u_{j-}^0 = F(AsimD_0) \cap F_{u_j}^-(D_0)$. Sea $u_{j-}^0 = u_k u_j \in FD_0^+$ con $k \neq j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ya que $AsimH \subseteq \bar{C}_n \cap D_0(S)$, concluimos que $AsimH$ no es fuertemente conexa.

Entonces, por el corolario (1.2.1), H no es núcleo imperfecta crítica.

Caso (2)

Si $\bar{C}_n \cap D_0(S) \subseteq AsimH$.

Notemos que en este caso, existe al menos una flecha f , con $f \in FH$ tal que $f \in SimD_0$ y $f \in AsimH$. Esto es, existe $u_i \in V(D_0)$ tal que $u_{i-}(f) = \{f\}$, $f \in FSimD_0 \cap F_{u_i}^-(D_0)$ y $f \in AsimH$; sea $f = u_j u_i$ con $i \neq j+1$.

Entonces $u_i u_j \notin FH$ para cada $g_m = u_i u_j$ con $m = 1, \dots, r$ (ya que $f = u_j u_i \in FAsimH$). En particular $u_{j-} f_r \notin FH$, entonces $u_{j-} f_r \in S_{u_j}$. De aquí que $(u, u_{j-}^0), (u, u_{j-}(f_1)), (u, u_{j-}(f_2)), \dots, (u, u_{j-}(f_r)) \in S_{u_j}$. Y por construcción de $\tau(t)$ a \bar{u}_{j+} no entran flechas. Por lo tanto $\delta_{AsimH}^-(u_j) = 0$.

Entonces $AsimH$ no es fuertemente conexa. Y por el corolario (1.2.1) H no es núcleo imperfecta crítica. \square

4.4. τ_1 -CONSTRUCCIONES

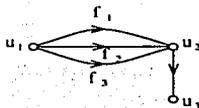
En esta sección se dan las definiciones de **orden total, diagonal, pseudodiagonal, condición de k-Meyniel** y de la **digráfica $D_0^{(k)}$** .

También se presenta un método sencillo para realizar τ_1 -construcciones a partir de las cuales se puede obtener una extensa variedad de digráficas núcleo perfectas y núcleo imperfectas críticas que satisfacen la condición de k-Meyniel.

Definición 4.4.1.

Sea D_0 una multidigráfica, $U \subseteq V(D_0)$ y $<^p$ un orden total en $\{v(f) = \{u_1, u_2\} \mid f \text{ es una } u_1 u_2 - \text{flecha}\}$ y $<^{u_1 u_2}$ un orden total en $\{f \in FD_0 \mid f \text{ es una } u_1 u_2 - \text{flecha}\}$.

Ver fig. (4.21)



$$\{u_1, u_2\} <^p \{u_2, u_3\}, \quad f_1 <^{u_1 u_2} f_2 <^{u_1 u_2} f_3$$

Figura 4.21:

Definición 4.4.2.

Denotaremos por $<$ el orden total definido en

$$\bigcup_{u \in U} \{(v(f), f) \mid f \in F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)\}$$

como sigue:

$$(v(f), f) < (v(g), g)$$

si y sólo si

$$v(f) <^p v(g) \quad \text{ó} \quad v(f) = v(g) = \{u_1, u_2\} \text{ y } f <^{u_1 u_2} g.$$

Definición 4.4.3.

Para cada $u \in U$ denotaremos por:

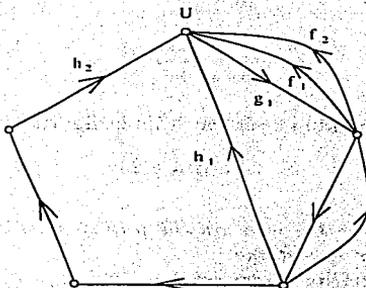
$$u_-(f) = \{f\}, \text{ cuando } f \in F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)$$

$$u_0 = F(\text{Asim}D_0) \cap F_u^-(D_0), \quad u_+ = F_u^+(D_0)$$

$$\Pi_u = \{u_0, u_+, u_-(f) \mid f \in F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)\}$$

(Claramente Π_u es una τ -partición en u).

Ver fig. (4.22)



$$\begin{aligned} \pi_u &= \{u_0^-, u_+, u_-(f_1), u_-(f_2)\} \\ u_0^- &= \{h_1, h_2\} \\ u_+ &= g_1 \end{aligned}$$

Figura 4.22:

Definición 4.4.4.

$A_u^<$ denotará la $u_0^- u_+$ -trayectoria dirigida, definida como sigue:

$$A_u^< = ((u, u_0^-), (u, u_-(f_1)), (u, u_-(f_2)), \dots, (u, u_-(f_r)), (u, u_+))$$

donde

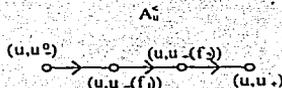
$$(v(f_1), f_1) < (v(f_2), f_2) < \dots < (v(f_r), f_r)$$

y

$$\{f_1, f_2, \dots, f_r\} = F(\text{Sim}D_0) \cap F_u^-(D_0)$$

Denotaremos por $A^< = (A_u^<)_{u \in U}$.

Ver figura (4.23)



Tomando el vértice u de la figura (4.22)

Figura 4.23:

Teorema 4.4.1. Sean D_0 una multidigráfica quasi núcleo perfecta y $t_0 = (D_0, U, A^<)$ cualquier τ_0 -sistema.

Para cualquier familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$, donde S_u es una sección inicial de $A_u^<$, $D_0(S) = D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^+ \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$ es núcleo perfecta.

Demostración.

Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una familia no trivial $S = (S_u)_{u \in U}$ donde S_u es una sección inicial de $A_u^<$, tal que $D_0(S)$ no es núcleo perfecta.

Como $D_0(S)$ no es núcleo perfecta entonces $D_0(S)$ contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H , $H \subseteq^* D_0(S) = D_0 - \bigcup_{u \in U} \{f \in FD_0^+ \mid f^* \text{ incide en } S_u\}$.

Notemos que H no es una subdigráfica inducida de D_0 , ya que si lo es entonces H es subdigráfica inducida propia de D_0 . Y por hipótesis D_0 es quasi núcleo perfecta, por lo tanto H tiene núcleo. Contradiciendo que H es núcleo imperfecta crítica.

Ya que H no es una subdigráfica inducida propia de D_0 , tenemos que existe una w -flecha, sea $f = w$ tal que $f \in FD_0[V(H)] - FH$. De aquí que $S_w \neq \emptyset$. Entonces al menos $(v, v_0^+) \in S_v$ y por lo tanto $v_0^+ \cap FH = \emptyset$.

Ahora, por el teorema (1.2.5) y ya que $AsimH$ es fuertemente conexa, existe $wv \in FAsimH$. Además $wv \in FSimD_0$. Entonces $\delta_{H'}^+(w) \neq 0$, donde $H' = AsimH \cap SimD_0$.

Más aún, si $\delta_{H'}^+(z) \neq 0$ entonces existe $zv \in F^+(H')$. Por lo tanto $zv \in FD_0$ y $zv \notin FH$. De aquí que $S_z \neq \emptyset$ y $z_0^+ \cap F(H) = \emptyset$. (Recordemos que $z_0^+ = F(AsimD_0) \cap F_z^-(D_0)$).

Además H es núcleo imperfecta crítica entonces por el teorema (1.2.5) $AsimH$ es fuertemente conexa y ya que $z_0^+ \cap FH = \emptyset$,

$F(AsimH) \cap F_z^-(H') \neq \emptyset$. De aquí que existe $wz \in F(H')$. Es decir $\delta_{H'}^-(z) \neq 0$.

Concluimos que H' contiene un ciclo dirigido, sea

$$C = (w_0, f_0, w_1, f_1, \dots, w_n, f_n, w_0)$$

donde $\{w_0, \dots, w_n\} \subseteq V(H')$, $\{f_0, \dots, f_n\} \subseteq F(H')$.

Probaremos que para algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\{w_{i-1}, w_i\} <^p \{w_i, w_{i+1}\}$ (los índices se toman módulo $n+1$).

Supongamos, por contradicción, que $\{w_{i-1}, w_i\}^p > \{w_i, w_{i+1}\}$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Entonces, ya que C es un ciclo, $\{w_0, w_1\}^p > \{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_2\}^p > \{w_2, w_3\}$, $\{w_2, w_3\}^p > \{w_3, w_4\}$, ..., $\{w_{n-1}, w_n\}^p > \{w_n, w_0\}$, $\{w_n, w_0\}^p > \{w_0, w_1\}$.

Por transitividad $\{w_1, w_2\}^p > \{w_0, w_1\}$, además $\{w_0, w_1\}^p > \{w_1, w_2\}$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\{w_{i-1}, w_i\} <^p \{w_i, w_{i+1}\}$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

De la definición de $t_0 = (D_0, U, A^<)$, y ya que $\{w_{i-1}, w_i\} <^p \{w_i, w_{i+1}\}$ (para algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$), se sigue que:

$$A_{w_i}^< \{ \{w_{i-}(g) \mid g \text{ es una } w_{i+1}w_i - \text{flecha} \} \}$$

es una subtrayectoria de la subtrayectoria de $A_{w_i}^<$ entre los vértices $w_{i-}(f_{i-1})$ y w_{i+} .

Además $F_{i-1} \in F(C) \subseteq FH'$, entonces $w_{i-}(f_{i-1}) \notin S_{w_i}$ y $\{w_{i-}(g) \mid g \text{ es una } w_{i+1}w_i - \text{flecha} \} \cap S_{w_i} = \emptyset$.

Ya que $F_i \in C \subseteq H'$ y $\{w_{i-}(g) \mid g \text{ es una } w_{i+1}w_i - \text{flecha} \} \cap S_{w_i} = \emptyset$, se sigue que existe alguna $w_{i+1}w_i$ -flecha en D_0 que también está en $D_0(S)$, entonces dicha flecha está en H . Además $f_i = w_iw_{i+1} \in FH$.

Por lo tanto $f_i \in \text{Sim}H$, contradiciendo que $f_i \in FH' = F(\text{Asim}H \cap \text{Sim}D_0)$.

Entonces H no es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto $D_0(S)$ no contiene sudigráficas inducidas núcleo imperfectas críticas. Es decir, $D_0(S)$ es núcleo perfecta. □

Definición 4.4.5.

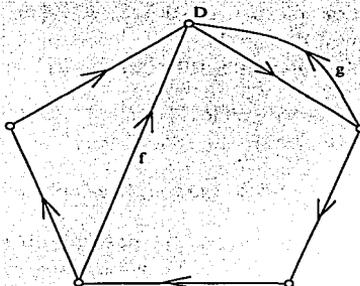
Sea D una digráfica y $C = (1, 2, \dots, m, 1)$ un ciclo dirigido de D . Para $i \neq j$, $i, j \in V(C)$ denotamos por (i, C, j) la ij -trayectoria dirigida contenida en C , cuya longitud se denota $l(i, C, j)$.

Definición 4.4.6.

Una flecha $f = ij \in (FD - FC)$ es una diagonal de C si y sólo si $i \neq j$, $i, j \in V(C)$ y $l(i, C, j) < l(C) - 1$.

Y f es una pseudodiagonal cuando $l(i, C, j) \leq l(C) - 1$.

Ver fig. (4.24)



f es una diagonal de D y g es una pseudodiagonal de D .

Figura 4.24:

Definición 4.4.7.

Se dice que una digráfica D satisface la condición de k - Meyniel si cada ciclo dirigido impar de D tiene al menos k diagonales y escribiremos D satisfice $M(k)$.

Definición 4.4.8.

Sea D_0 una digráfica, denotaremos por $D_0^{(k)}$ la multidigráfica obtenida de D_0 , sustituyendo cada flecha simétrica de D_0 por k flechas paralelas.

Ver fig. (4.25)

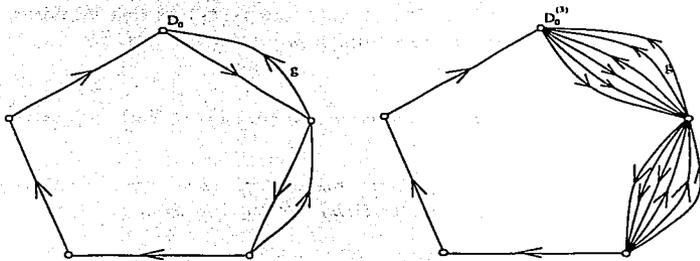


Figura 4.25:

Lema 4.4.1. Si D_0 es una digráfica tal que cada ciclo dirigido impar tiene una flecha simétrica y $t_1 = (D_0^{(k)}, V(D_0), A^<, \gamma)$ entonces $\tau_1(t_1)$ satisface $M(k)$.

Demostración.

Sean $t_1 = (D_0^{(k)}, V(D_0), A^<, \gamma)$ un τ_1 -sistema y C un ciclo dirigido impar contenido en $\tau_1(t_1)$.

Por construcción $\bigcup_{f \in FA_{\vec{v}}} \gamma_u^f$ es una trayectoria dirigida de longitud par, de aquí que si C' es la digráfica obtenida de C identificando $\bigcup_{f \in FA_{\vec{v}}} \gamma_u^f$ con u , para cada $u \in V(D_0)$ entonces C' es un ciclo dirigido impar en $D_0^{(k)}$ y $C \cong t_1(C', V(C'), A^</V(C'), \gamma')$, donde γ' es la restricción de γ a $\bigcup_{u \in V(C')} \bigcup_{f \in FA_{\vec{v}}} \gamma_u^f$ y $A^</V(C')$ es la restricción de $A^<$ a $V(C')$.

Notemos que cada flecha simétrica de C' es una pseudodiagonal de C' y recordemos que para obtener $D_0^{(k)}$ se sustituye cada flecha simétrica de D_0 por k flechas paralelas. De aquí que C' tiene al menos k pseudodiagonales.

Ahora, al construir el τ_1 -sistema, las pseudodiagonales de C' pasan a ser diagonales de C . Por lo tanto C tiene al menos k diagonales.

Es decir, cada ciclo impar en $\tau_1(t_1)$ tiene al menos k diagonales.

Entonces $\tau_1(t_1)$ satisface $M(k)$. □

Teorema 4.4.2. Si D_0 es una digráfica núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica) tal que cada ciclo dirigido impar tiene al menos una flecha

simétrica y $t_1 = (D_0^{(k)}, V(D_0), A^<, \gamma)$ entonces $\tau_1(t_1)$ es una digráfica núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica) que satisface $M(k)$.

Demostración.

La demostración se sigue de los teoremas (4.4.1), (4.2.5) y el lema (4.4.1). \square

Corolario 4.4.1. Para cada número natural k , existe una digráfica núcleo perfecta (resp. núcleo imperfecta crítica) $D^{(k)}$ que satisface $M(k)$.

Demostración.

Definamos la digráfica $C = \bar{C}_n(j_1, \dots, j_k)$ con $V(C) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $F(C) = \{uv \mid v - u \equiv j_s \pmod{n} \text{ para } s = 1, \dots, k\}$ y denotemos $D_0 = \bar{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r)$ para un número natural par n tal que $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$. Así cada ciclo dirigido impar de D_0 tiene una flecha simétrica. Además, si $2 \leq r \leq [n/2]$ entonces, por el teorema (3.1.1), D_0 es núcleo imperfecta crítica (ya que $n \not\equiv 0 \pmod{r+1}$).

Entonces, por el teorema (4.4.2), $\tau_1(t_1)$ es núcleo imperfecta crítica y satisface $M(k)$, (con $t_1 = (D_0^{(k)}, V(D_0), A^<, \gamma)$).

Para obtener una digráfica núcleo perfecta que satisfaga $M(k)$, tomamos $D_0 = \bar{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm r)$ para un número natural par n tal que $n \equiv 0 \pmod{r+1}$. Así cada ciclo dirigido impar de D_0 tiene una flecha simétrica. Además, si $2 \leq r \leq [n/2]$ entonces, por el teorema (3.1.1), D_0 es núcleo perfecta (ya que $n \equiv 0 \pmod{r+1}$).

Entonces, por el teorema (4.4.2), $\tau_1(t_1)$ es núcleo perfecta y satisface $M(k)$, (con $t_1 = (D_0^{(k)}, V(D_0), A^<, \gamma)$). \square

Bibliografía

- [1] M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster,
Graphs and Digraphs,
Prindle, Weber and Schmidt, 1979.
- [2] C. Berge,
The theory of graphs,
Methven-Wiley, 1962.
- [3] C. Berge,
Graphs and hypergraphs,
North Holland Amsterdam, 1976.
- [4] C. Berge,
A combinatorial Problem in Logic,
Discrete Mathematics, 17, 1977, 23-26.
- [5] C. Berge,
Graphes,
North Holland Amsterdam, 1985.
- [6] G. Chartrand,
Introductory Graph Theory,
Dover Publications, Inc. New York, 1985.
- [7] P. Duchet,
Représentation de noyaux en théorie des graphes et hypergraphes,
Thèse, Paris, 1979.]

- [8] P. Duchet,
Graphes Noyau-parfaits,
Annals of Discrete Mathematics, 9, 1980, 93-101.
- [9] P. Duchet,
A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect,
J. Graph Theory II, 1987, 81
- [10] P. Duchet y H. Meyniel,
A note on kernel-critical graphs,
Discrete Math. 33, 1981, 103-105.
- [11] P. Duchet y H. Meyniel,
Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientées,
Discrete Math. 43, 1983, 21-27.
- [12] H. Galeana-Sánchez
A counterexample to a conjecture of Meyniel on Kernel-perfect digraphs
Discrete Mathematics 42, 1982, 105-107.
- [13] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
On kernels and semikernels of digraphs,
Discrete Math. 48, 1984, 67-76.
- [14] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
On kernel-perfect critical digraphs,
Discrete Mathematics 59, 1986, 257-265.
- [15] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
A new method to extend kernel-perfect graphs to kernel-perfect critical digraphs,
Discrete Mathematics 69, 1988, 207-209.
- [16] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
Extending Kernel perfect digraphs to kernel perfect critical digraphs,
Discrete Mathematics 94, 1991, 181-187.

- [17] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
New extensions of kernel perfect digraphs to kernel imperfect critical digraphs,
Graphs and Combinatorics 10, 1994, 329-336.
- [18] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara,
KP-digraphs and CKI-digraphs satisfying the k -Meyniel's condition,
Discusiones Mathematicae Graph Theory 16, 1996, 5-16.
- [19] V. Neumann-Lara,
Seminúcleos de una digráfica,
An. Inst. Mat. Universidad Nacional Autónoma de México II, 1971.
- [20] M. Richardson,
On weakly ordered systems,
Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1946, 113.
- [21] M. Richardson,
Solutions of reflexive relations,
Ann. Math. (2) 58, 1953, 573.
- [22] M. Richardson,
Extension theorems for solutions of irreflexive relations,
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, 649
- [23] J Von Neumann, O. Morgenstern,
Theory of games and economic behavior,
Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [24] H. Galeana-Sánchez,
A theorem about a conjecture of H. Meyniel on kernel-perfect graphs,
Discrete Mathematics 59 (1986) 35-41