



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"K-NUCLEOS EN LA DIGRAFICA DE LINEAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MARICELA LUGO ZACARIAS



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DRA. HORTENSIA CALEANA SANCHEZ



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias

Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"K-núcleos en la digráfica de líneas"

realizado por Maricela Lugo Zacarías

con número de cuenta 9150863-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Hortensia Galeana Sánchez

H. Galeana

Propietario

Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Hugo A. Rincón M.

Propietario

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Laura Pastrana R.

Suplente

M. en C. Patricia Cortés Flores

Patricia

Suplente

Mat. Juana Martínez Martínez

J. Martínez

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro ...

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Gracias a *Dios* por haberme permitido terminar con esta etapa tan importante en mi vida...

Agradezco a todas las personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

Quiero agradecer especialmente a Hortensia Galeana por toda su ayuda, paciencia y dedicación que me brindó en todo momento.

A Laura Pastrana y a Juanita por su ayuda y por todas sus sugerencias para que este trabajo quedara lo mejor posible.

A Hugo Rincón y Patricia Cortés por el tiempo que dedicaron a leer este trabajo y por las observaciones que me hicieron.

Quiero agradecer también a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, por permitirme cursar ahí la carrera.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis con mucho cariño a todas las personas con las que he estado en contacto y me han ofrecido su apoyo o simplemente su amistad.

Muy especialmente a mis padres Zenaida y Manuel, por todo su amor y apoyo que siempre me han brindado a lo largo de todo este tiempo. Son las personas más importantes para mí, a las cuales quiero mucho, y les quiero agradecer por toda su lucha, entrega y dedicación como padres.

A mis hermanos Lupita, Hugo, Javier, Jesús, Rocío y Angélica, porque siempre tratamos de apoyarnos y estar unidos en la buenas y en las malas. A Rosario y a mi querida sobrinita Valeria, porque ya forman parte de mi familia.

A Alicia, pues con tu presencia hiciste que la facultad fuera más agradable; gracias por ser mi amiga, por tu confianza y cariño.

A América, por ser una gran amiga con la que siempre he contado, gracias por todos tus ánimos y consejos. Espero que sigamos siendo amigas, te quiero mucho y puedes contar conmigo para todo.

A Sebastián, por toda tu motivación, consejos, comprensión cariño y compañía que me has brindado en este tiempo. Recuerda que eres una persona muy especial para mí a la cual quiero mucho.

A Héctor, Edith, Martita, Berta, Gerardo, Cesar y Vicente por su amistad.

A todos mis compañeros de trabajo de la ENP no. 8, a quienes les tengo un gran afecto.

A mis alumnos, pues son una fuente de inspiración para seguir adelante.

ÍNDICE

<i>INTRODUCCIÓN</i>	iv
<i>CAPÍTULO I</i> <i>CONCEPTOS BÁSICOS</i>	1
<i>CAPÍTULO II</i> <i>EXISTENCIA DE κ-NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS</i>	46
<i>CAPÍTULO III</i> <i>κ-NÚCLEOS EN LA DIGRÁFICA DE LÍNEAS</i>	57
<i>BIBLIOGRAFIA</i>	107

INTRODUCCIÓN

La teoría de las gráficas es una rama muy importante de las matemáticas, pues el campo de aplicación a otras ciencias es extenso; por ejemplo en la física, ingeniería, química, genética, etc.

Muchos conceptos se han investigado y desarrollado acerca de las gráficas y digráficas; los temas que se desarrollan en esta tesis son los de núcleo, (κ, ℓ) -núcleo y κ -núcleos en una digráfica D y en su digráfica de líneas $L(D)$.

En el Capítulo I se dan a conocer los conceptos básicos para el desarrollo de esta tesis (definiciones, teoremas y otros resultados), destacando entre ellos el de núcleo, pues es el tema central del presente trabajo. Este concepto fue introducido por Von Neumann [12], el cual tiene muchas aplicaciones [1],[2]. Varios autores han estado investigando condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas, por citar algunos, Von Neumann y Morgenstern [12], Richardson [15], Duchet y H. Meyniel [18],[19] y Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [5]. En [13], M. Harminec consideró la existencia de núcleos en la digráfica de líneas de una digráfica D y demostró el Teorema 1.1, el cual es un resultado muy importante de este capítulo. En él se indica que el número de núcleos de una digráfica D es igual al número de núcleos de su digráfica de líneas $L(D)$ [10].

En el Capítulo II se prueba un Teorema que indica las condiciones bajo las cuales una digráfica D tiene un κ -núcleo y es el siguiente: sea D una digráfica tal que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene un κ -núcleo ($\kappa \geq 2$). Este Teorema es de gran importancia para el Capítulo III.

En 1976 H. Meyniel [17] conjeturó: sea D una digráfica. Si todo ciclo dirigido impar de D posee dos cuerdas, entonces D es una digráfica núcleo-perfecta. Para digráficas en general, la condición de que cada ciclo dirigido impar tiene dos cuerdas no es suficiente para ser núcleo-perfecta, en [4] Galeana-Sánchez construyó para cada κ una digráfica D_κ sin triángulos tal que todo ciclo dirigido impar tiene al menos κ cuerdas y sin embargo D_κ no tiene núcleo. Aún bajo algunas restricciones sobre la estructura de la gráfica subyacente (no orientada) de una digráfica D , la condición: cada ciclo dirigido tiene al menos dos cuerdas no es suficiente para ser núcleo-perfecta.

Sin embargo en [16] O. V. Borodin, A. V. Kostochka y D. R. Woodall probaron: sea H la gráfica de líneas de una gráfica G ; una orientación D de H es núcleo-perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido impar tiene una cuerda y cada clan tiene un núcleo.

Una posible generalización de la Conjetura de Meyniel para κ -núcleos, $\kappa \geq 2$ podría decir: sea D una digráfica, si todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos cuerdas, entonces D tiene un κ -núcleo.

En el capítulo III se prueba que esta afirmación no es cierta para digráficas en general, además se demuestra la siguiente generalización para κ -núcleos ($\kappa \geq 3$) del resultado de Borodin, Kostochka y Woodall: sea G una digráfica, L(G) su gráfica de líneas y D una orientación de L(G) tal que Asim(D) es fuertemente conexa y cada triángulo dirigido tiene dos flechas simétricas. Si todo ciclo dirigido de D, $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene una cuerda (i, j) tal que al menos una de las dos siguientes propiedades se cumple:

1) $j \in \{i-2, i+2\}$

2) Si $j \in \{i-2, i+2\}$, entonces existe otra cuerda de \vec{C} ; (r, s) con (r, s) \neq (j, i).

Entonces D tiene un κ -núcleo ($\kappa \geq 3$).

Como una consecuencia se prueba la siguiente afirmación, que es un caso particular de la posible extensión de la Conjetura de Meyniel para $\kappa \geq 3$; que dice: sea G una gráfica y D una orientación de L(G) tal que Asim(D) es fuertemente conexa y cada triángulo dirigido es simétrico. Si todo ciclo dirigido de D cuya longitud es $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos cuerdas entonces D tiene un κ -núcleo, $\kappa \geq 3$.

Estos dos resultados son una generalización del resultado de Kwasnik para orientaciones especiales de gráficas de líneas.

CAPÍTULO I

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN 1.1

Una *gráfica* $G = (V(G), A(G))$ consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados *vértices* (nodos) que se denotan por $V(G)$ y un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos llamados *aristas* (ramas) las cuales se denotan por $A(G)$.

Sea G una gráfica y $\{u, v\} \subseteq V(G)$, diremos que u es *adyacente* a v ($u \text{ ady}_G v$) si existe $a \in A(G)$ que une a u con v , la cual denotamos por $a = [u, v]$. Dos aristas son *adyacentes* si tienen un extremo (vértice) en común.

Así, para la gráfica $G = (V(G), A(G))$ de la Figura 1.1 se tiene que:

$$V(G) = \{u, v, w, y, x\}$$

$$A(G) = \{a, b, c, d, e, f\}, \text{ con}$$

$$a = [u, v], b = [v, w], c = [w, x], d = [x, y], e = [x, v], f = [u, w].$$

Además se cumple que $v \text{ ady}_G w$, $x \text{ ady}_G y$, así como $a \text{ ady}_G b$

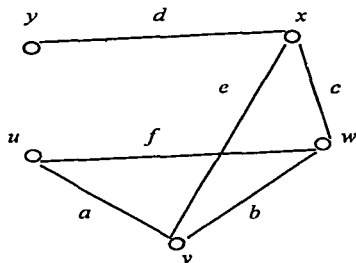


Figura 1.1

DEFINICIÓN 1.2

Una *digráfica* $D = (V(D), F(D))$ consiste en un conjunto finito, no vacío de objetos llamados vértices, que se denotan por $V(D)$ y un conjunto de pares ordenados de vértices distintos llamadas flechas (aristas dirigidas) las cuales se denotan por $F(D)$. Así el par ordenado (u, v) es la flecha que va de u a v , y diremos que u es adyacente a v , o bien v es adyacente desde u (u ady_D v).

DEFINICIÓN 1.3

El *exgrado* de un vértice v en la digráfica D es el número de vértices adyacentes desde v , es decir, el número de flechas que salen desde v . Y se denota por $\delta_D^+(v)$.

DEFINICIÓN 1.4

El *ingrado* de un vértice v en la digráfica D es el número de vértices adyacentes hacia v , es decir, el número de flechas que inciden en v . Y se denota por $\delta_D^-(v)$.

DEFINICIÓN 1.5

Los *vecinos exteriores* de un vértice u en la digráfica D es el conjunto $\Gamma^+(u) = \{v \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$.

DEFINICIÓN 1.6

Los *vecinos interiores* de un vértice u en la digráfica D es el conjunto $\Gamma^-(u) = \{v \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$.

En la digráfica $D = (V(D), F(D))$ de la Figura 1.2 se tiene que:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$F(D) = \{(x_0, x_1), (x_1, x_5), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_4), (x_5, x_0)\}$$

$\delta_D^+(x_0) = 1$	$\delta_D^+(x_1) = 2$	$\delta_D^-(x_0) = 1$	$\delta_D^-(x_1) = 2$
$\delta_D^+(x_2) = 2$	$\delta_D^+(x_3) = 2$	$\delta_D^-(x_2) = 2$	$\delta_D^-(x_3) = 1$
$\delta_D^+(x_4) = 2$	$\delta_D^+(x_5) = 2$	$\delta_D^-(x_4) = 3$	$\delta_D^-(x_5) = 2$

$\Gamma_D^+(x_0) = \{x_1\}$	$\Gamma_D^+(x_1) = \{x_2, x_5\}$	$\Gamma_D^+(x_2) = \{x_1, x_4\}$
$\Gamma_D^+(x_3) = \{x_2, x_4\}$	$\Gamma_D^+(x_4) = \{x_3, x_5\}$	$\Gamma_D^+(x_5) = \{x_0, x_4\}$
$\Gamma_D^-(x_0) = \{x_5\}$	$\Gamma_D^-(x_1) = \{x_0, x_2\}$	$\Gamma_D^-(x_2) = \{x_1, x_3\}$
$\Gamma_D^-(x_3) = \{x_4\}$	$\Gamma_D^-(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}$	$\Gamma_D^-(x_5) = \{x_1, x_4\}$

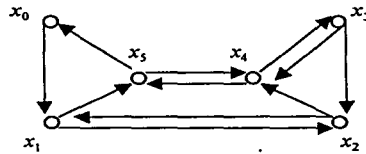


Figura 1.2

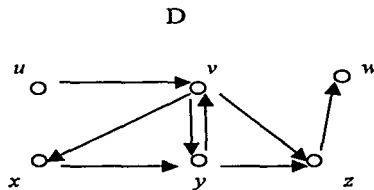
DEFINICIÓN 1.7

Sea D una digráfica, una *subdigráfica* H de D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

DEFINICIÓN 1.8

Sea D una digráfica, una digráfica H es una *subdigráfica inducida por vértices* de D (o simplemente *subdigráfica inducida* de D) si $V(H) \subseteq V(D)$ y $(u, v) \in F(H)$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ con $\{u, v\} \subseteq V(H)$.

En la Figura 1.3 se muestran las digráficas $D = (V(D), F(D))$, $D_1 = (V(D_1), F(D_1))$ y $D_2 = (V(D_2), F(D_2))$. Las digráficas D_1 y D_2 son subdigráficas de D , y D_2 es una subdigráfica inducida de D .



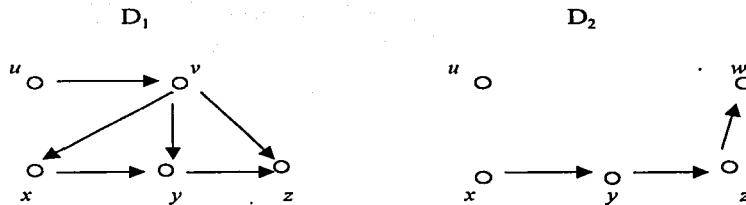


Figura 1.3

DEFINICIÓN 1.9

Sean D y H digráficas, D es *isomorfa* a H si y sólo si existe una función biyectiva $f: V(D) \rightarrow V(H)$ tal que $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in F(H)$. Y lo denotamos $D \cong H$

Las digráficas D_5 y D_6 de la Figura 1.4 son isomorfas, pues existe una función biyectiva $f: V(D_5) \rightarrow V(D_6)$, en donde:

$$V(D_5) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}, V(D_6) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$f(y_1) = x_5$$

$$f(y_2) = x_3$$

$$f(y_3) = x_4$$

$$f(y_4) = x_2$$

$$f(y_5) = x_6$$

$$f(y_6) = x_1$$

la función f es tal que

$$(y_1, y_4) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_1), f(y_4)) = (x_5, x_2) \in F(D_6)$$

$$(y_2, y_1) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_2), f(y_1)) = (x_3, x_5) \in F(D_6)$$

$$(y_2, y_3) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_2), f(y_3)) = (x_3, x_4) \in F(D_6)$$

$$(y_3, y_6) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_3), f(y_6)) = (x_4, x_1) \in F(D_6)$$

$$(y_4, y_3) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_4), f(y_3)) = (x_2, x_4) \in F(D_6)$$

$$(y_4, y_5) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_4), f(y_5)) = (x_2, x_6) \in F(D_6)$$

$$(y_5, y_2) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_5), f(y_2)) = (x_6, x_3) \in F(D_6)$$

$$(y_6, y_1) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_6), f(y_1)) = (x_1, x_5) \in F(D_6)$$

$$(y_6, y_5) \in F(D_5) \text{ si y sólo si } (f(y_6), f(y_5)) = (x_1, x_6) \in F(D_6)$$

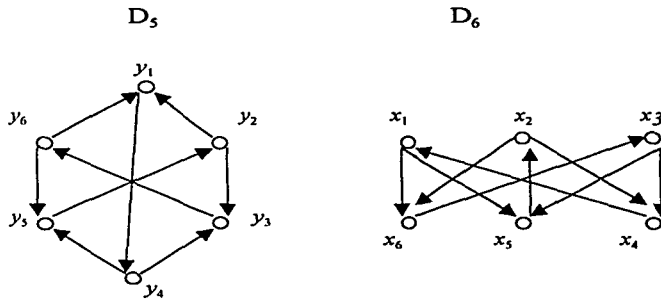


Figura 1.4

DEFINICIÓN 1.10

Un *camino* \mathcal{C} en una gráfica G es una sucesión de vértices $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $[x_i, x_{i+1}] \in A(G)$.

Un *uv-camino* \mathcal{C} en una gráfica G es un camino que comienza en u y termina en v .

La longitud del camino \mathcal{C} es el número de aristas de \mathcal{C} y se denota por $l(\mathcal{C})$.

DEFINICIÓN 1.11

Un *uv-camino* \mathcal{C} en una digráfica D , es una sucesión de vértices $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ o $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$.

DEFINICIÓN 1.12

Un *camino dirigido* $\vec{\mathcal{C}}$ en una digráfica D es una sucesión de vértices $\vec{\mathcal{C}} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$.

La longitud del camino dirigido $\vec{\mathcal{C}}$ es el número de flechas de $\vec{\mathcal{C}}$ y se denota por $l(\vec{\mathcal{C}})$.

DEFINICIÓN 1.13

Un *paseo* en una gráfica G (respectivamente en una digráfica D) es un camino en el que no se repiten aristas (respectivamente flechas).

DEFINICIÓN 1.14

Un *paseo dirigido* en una digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten flechas.

DEFINICIÓN 1.15

Una *trayectoria* \mathcal{T} en una gráfica G (respectivamente en una digráfica D) es un camino en el que no se repiten vértices.

DEFINICIÓN 1.16

Una *trayectoria dirigida* $\vec{\mathcal{T}}$ en una digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

DEFINICIÓN 1.17

Un *camino cerrado* \mathcal{C} en una gráfica G (respectivamente en una digráfica D) es un camino cuyo vértice inicial y final son el mismo.

DEFINICIÓN 1.18

Un *camino dirigido cerrado* $\vec{\mathcal{C}}$ en una digráfica D , es un camino dirigido en el que en el que el primero y el último vértice son iguales.

DEFINICIÓN 1.19

Un *ciclo* \mathcal{C} en una gráfica G (respectivamente en una digráfica D) es un camino cerrado en el que no se repiten vértices (excepto el primero y el último).

DEFINICIÓN 1.20

Un *ciclo dirigido* $\vec{\mathcal{C}}$ en una digráfica D es un camino dirigido cerrado en el que no se repiten vértices (excepto el primero y el último).

DEFINICIÓN 1.21

La *distancia dirigida* $d_D(u, v)$ de un vértice u al vértice v en una digráfica D es $\min\{l(\vec{\mathcal{T}}) \mid \vec{\mathcal{T}} \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida}\}$.

Sea D una digráfica y $\{u, v\} \subseteq V(D)$, diremos que $d_D(u, v)$ es infinita si no hay una uv -trayectoria dirigida.

Para la gráfica G y la digráfica D de Figura 1.5, donde $V(G) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = V(D)$ se tiene que

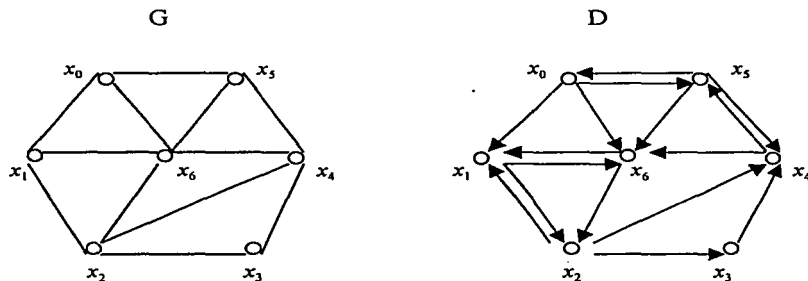


Figura 1.5

$\mathcal{C}_1 = (x_0, x_6, x_4, x_3, x_2, x_4, x_5)$ es un x_0x_5 -camino contenido en G (respectivamente contenido en D)

$\vec{\mathcal{C}}_2 = (x_0, x_6, x_2, x_1, x_6, x_2, x_3, x_4, x_5)$ es un x_0x_5 -camino dirigido contenido en D .

$\mathcal{P} = (x_0, x_6, x_2, x_1, x_6, x_4, x_5)$ es un x_0x_5 -paseo contenido en G (respectivamente contenido en D).

$\vec{\mathcal{P}} = (x_0, x_6, x_1, x_6, x_2, x_4, x_5)$ es un x_0x_5 -paseo dirigido contenido en D .

$\mathcal{J} = (x_0, x_6, x_5)$ es una x_0x_5 -trayectoria contenida en G (respectivamente contenida en D).

$\vec{\mathcal{J}} = (x_0, x_6, x_2, x_4, x_5)$ es una x_0x_5 -trayectoria dirigida contenida en D .

$\mathcal{C}_3 = (x_0, x_6, x_1, x_2, x_6, x_1, x_0)$ es un *camino cerrado* contenido en G (respectivamente contenido en D).

$\vec{\mathcal{C}}_4 = (x_0, x_5, x_4, x_6, x_2, x_4, x_5, x_0)$ es un *camino dirigido cerrado* contenido en D .

$\mathcal{C}_5 = (x_0, x_1, x_6, x_0)$ es un *ciclo* contenido en G (respectivamente contenido en D).

$\vec{\mathcal{C}}_6 = (x_0, x_6, x_2, x_4, x_5, x_0)$ es un *ciclo dirigido* contenido en D .

$$d_D(x_0, x_5) = 1$$

DEFINICIÓN 1.22

Una digráfica D es *conexa* si para cualquier $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un *uv-camino*.

DEFINICIÓN 1.23

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para cualquier $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un *uv-camino dirigido*.

La digráfica D_1 de la Figura 1.3 es conexa pero no es fuertemente conexa pues para $\{x, v\} \subseteq V(D_1)$ no se tiene un *xv-camino* dirigido. La digráfica D de la Figura 1.5 es *fuertemente conexa*.

DEFINICIÓN 1.24

Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica. La *gráfica de líneas* $L(G)$ es la gráfica $L(G) = (V(L(G)), A(L(G)))$, donde $V(L(G)) = A(G)$ y para cualquier $\{l, m\} \subseteq V(L(G))$, l $\text{ady}_{L(G)}$ m si y sólo si l y m son aristas adyacentes en G .

Así, en la Figura 1.6 tenemos una gráfica G y su respectiva gráfica de líneas $L(G)$.

Donde $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$,

$$A(G) = V(L(G)) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Con $a = [v, u]$, $b = [u, y]$, $c = [u, x]$, $d = [w, x]$, $e = [x, y]$ y $f = [v, y]$,

$$A(L(G)) = \{ [a, b], [a, c], [a, f], [b, c], [b, e], [b, f], [c, d], [c, e], [d, e], [e, f] \}$$

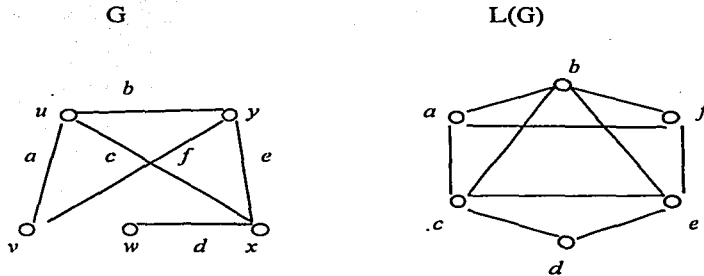


Figura 1.6

DEFINICIÓN 1.25

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica. La **digráfica de líneas** $L(D)$ es la digráfica $L(D) = (V(L(D)), F(L(D)))$ donde el conjunto de vértices de $L(D)$ es el conjunto de flechas de D y para cualquier $\{h, k\} \subseteq V(L(D))$; $(h, k) \in F(L(D))$ si y sólo si el vértice final de h es el vértice inicial de k .

Sea D una digráfica, a $L^n(D)$ la llamamos digráfica de líneas n -iterada y la definimos como sigue:

$$L^0 \cong D, \quad L^1(D) \cong L(D) \quad \text{y} \quad L^n(D) \cong L(L^{n-1}(D)) \quad \text{para } n > 1$$

En la Figura 1.7 podemos ver una digráfica D y su respectiva digráfica de líneas $L(D)$.

$$\text{Donde } V(D) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$F(D) = \{a, b, c, d, e, f, g\} = V(L(D))$$

$$\text{Con } a = (v, u), b = (u, y), c = (y, v), d = (w, x), e = (x, w), f = (y, x) \quad \text{y}$$

$$g = (u, x)$$

$$F(L(D)) = \{ (a, b), (a, g), (b, c), (b, f), (c, a), (d, e), (e, d), (f, e), (g, e) \}$$

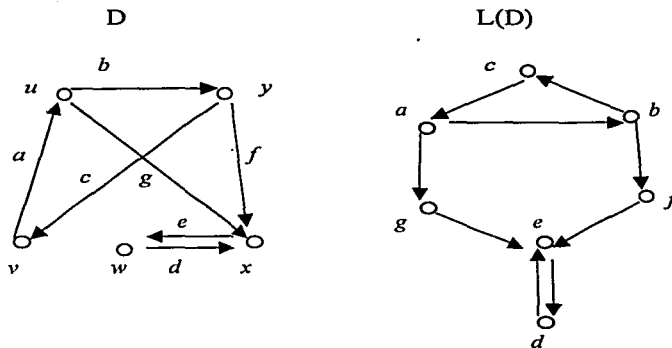


Figura 1.7

DEFINICIÓN 1.26

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica y $K \subseteq V(D)$. Diremos que K es un **núcleo** de D si:

- (a) K es independiente, es decir, para cualquier $\{u, v\} \subseteq K$, $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$
- (b) K es absorbente, es decir, para cualquier $v \in (V(D) - K)$ existe $u \in K$ tal que $(v, u) \in F(D)$.

Así, la digráfica D de la Figura 1.8 tiene un núcleo K , donde $K = \{x_1, x_3, x_5\}$

D

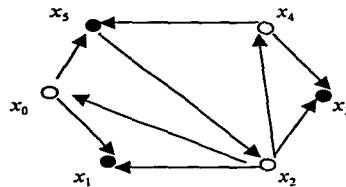


Figura 1.8

OBSERVACIÓN 1.1

Muchas digráficas no tienen núcleos, el ejemplo más simple es una digráfica que es un ciclo dirigido de longitud impar.

Por ejemplo para las digráficas D_1 y D_2 de la Figura 1.9 no es posible considerar $K \subseteq V(D_1)$ (respectivamente $K \subseteq V(D_2)$) en el que sus elementos cumplan con las condiciones de la Definición 1.26.

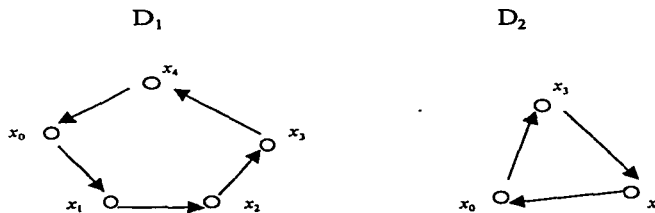


Figura 1.9

DEFINICIÓN 1.27

Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. Diremos que S es un *seminúcleo* de D si

- (a) S es independiente.
- (b) Para toda $f \in F(D)$ tal que $f = (u, v)$, donde $u \in S$ y $v \in (V(D) - S)$, entonces existe $f' \in F(D)$ tal que $f' = (v, w)$ donde $w \in S$.

Para la digráfica D_2 de la Figura 1.10 se tiene que $S = \{w_0, w_3, w_5\}$ es un seminúcleo.

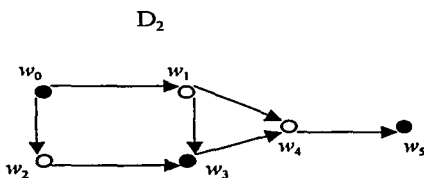


Figura 1.10

OBSERVACIÓN 1.2

Todo núcleo es un seminúcleo, pero no todo seminúcleo es un núcleo. Consideremos la digráfica D de la Figura 1.11, se tiene que $S = \{w\}$ es un seminúcleo pero no es núcleo pues $u \notin S$ y no hay una uS flecha.

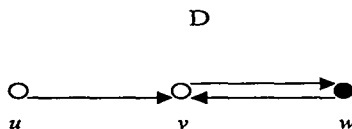


Figura 1.11

DEFINICIÓN 1.28

Sea D una digráfica y $Q \subseteq V(D)$. Diremos que Q es *cuasinúcleo* de D si Q es un conjunto independiente tal que $V(D) = Q \cup \Gamma(Q) \cup \Gamma(\Gamma(Q))$. (Donde para cada $A \subseteq X$, $\Gamma(A) = \{x \in X \mid x \text{ tiene un sucesor en } A\}$).

Para la digráfica D_3 de la Figura 1.12, se tiene que $Q = \{y_2, y_6\}$ es un cuasinúcleo.

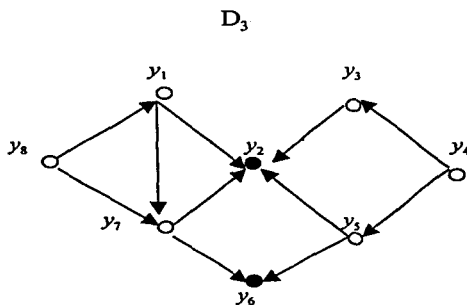


Figura 1.12

OBSERVACIÓN 1.3

Todo núcleo es un cuasinúcleo, pero no todo cuasinúcleo es un núcleo. Por ejemplo consideremos la digráfica D_1 de la Figura 1.9, tenemos que $Q = \{x_0, x_2\}$ es un cuasinúcleo, pero no es un núcleo pues $x_3 \notin Q$ y no hay una $x_3 \rightarrow Q$ flecha.

OBSERVACIÓN 1.4

No todo seminúcleo es un cuasinúcleo y no todo cuasinúcleo es un seminúcleo. Esto lo podemos observar en las digráficas D_1 y D_2 de la Figura 1.13

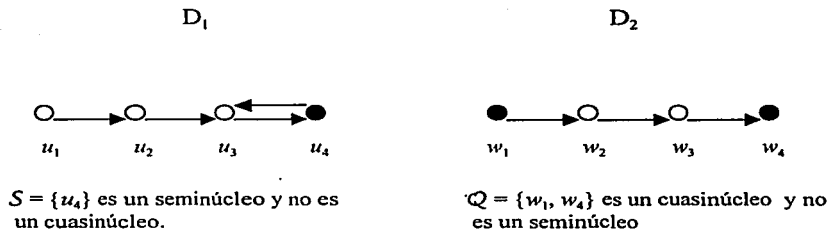


Figura 1.13

En lo que sigue denotaremos a $h = (u, v) \in F(D)$ y el vértice $h \in V(L(D))$ por el mismo símbolo. Si H es un conjunto de flechas de D , es además un conjunto de vértices de $L(D)$, se utilizará el símbolo H_L para denotar a H como conjunto de $V(L(D))$.

DEFINICIÓN 1.29

Sea \mathcal{M} un conjunto, entonces $P(\mathcal{M})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de \mathcal{M} . La cardinalidad de \mathcal{M} se denota por $\text{card}(\mathcal{M})$.

Martus Harmic [13], consideró la existencia de núcleos en la digráfica de líneas de una digráfica D y prueba lo siguiente:

TEOREMA 1.1

El número de núcleos de una digráfica D es igual al número de núcleos de su digráfica de líneas. Es decir, sea \mathcal{K} el conjunto de todos los núcleos de D y sea \mathcal{P} el conjunto de todos los núcleos de $L(D)$, entonces $\text{card}(\mathcal{K}) = \text{card}(\mathcal{P})$.

Antes de demostrar el Teorema anterior definiremos lo siguiente:

DEFINICIÓN 1.30

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica, entonces $f: P(V(D)) \rightarrow P(F(D))$ se define como sigue: Si $Z \subseteq V(D)$, entonces $f(Z) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in Z\}$.

LEMA 1.1

Sea D una digráfica y $Z \subseteq V(D)$. Si Z es un conjunto independiente de D , entonces $f(Z)_L$ es un conjunto independiente de $L(D)$.

Demostración: (Por contradicción)

Sea $Z \subseteq V(D)$ un conjunto independiente de D , por demostrar que $f(Z)_L$ es un conjunto independiente de $L(D)$, es decir, sea $\{h, k\} \subseteq f(Z)_L$, por demostrar que $(h, k) \notin F(L(D))$ y $(k, h) \notin F(L(D))$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(h, k) \in F(L(D))$. Como $\{h, k\} \subseteq f(Z)_L$ entonces $\{h, k\} \subseteq f(Z)$, es decir, $h = (u, v) \in F(D)$ con $v \in Z$ y $k = (w, x) \in F(D)$ con $x \in Z$; pero $(h, k) \in F(L(D))$, así, el vértice final de h es el vértice inicial de k entonces $v = w$. Por lo tanto $(v, x) \in F(D)$, pero esto es una contradicción pues $\{v, x\} \subseteq Z$ y Z es un conjunto independiente.

Por lo tanto $f(Z)_L$ es un conjunto independiente.

LEMA 1.2

Sea D una digráfica y $Z \subseteq V(D)$. Si Z es un conjunto absorbente de D , entonces $f(Z)_L$ es un conjunto absorbente de $L(D)$.

Demostración:

Sea $Z \subseteq V(D)$ absorbente, por demostrar que $f(Z)_L$ es absorbente, es decir, sea $h \in (V(L(D)) - f(Z)_L)$ por demostrar que existe $k \in f(Z)_L$ tal que $(h, k) \in F(L(D))$.

Como $h \in V(L(D))$, entonces $h = (u, v) \in F(D)$ con $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y como $h \notin f(Z)_L$, entonces $v \notin Z$. Así, $v \in (V(D) - Z)$, entonces existe $w \in Z$ tal que $(v, w) \in F(D)$ (pues Z es absorbente). Sea $k = (v, w)$, $k \in f(Z)$, por lo tanto $k \in f(Z)_L$, tal que el vértice final de h es el vértice inicial de k . Así, $(h, k) \in F(L(D))$ con $k \in f(Z)_L$.

Por lo tanto $f(Z)_L$ es absorbente.

Del Lema 1.1 y del Lema 1.2 se concluye el siguiente corolario.

COROLARIO 1.1

Sea D una digráfica. Si $Z \subseteq V(D)$ es un núcleo de D , entonces $f(Z)_L$ es un núcleo de $L(D)$.

LEMA 1.3

Sean D una digráfica, \mathcal{K} el conjunto de todos los núcleos de D y \mathcal{P} el conjunto de todos los núcleos de $L(D)$, entonces $f^* = f|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}$ es inyectiva, donde f^* es la restricción de f a \mathcal{K}

Demostración:

Por demostrar que f^* es inyectiva, es decir, si $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $K_1 \neq K_2$, entonces $f^*(K_1)_L \neq f^*(K_2)_L$.

Como $K_1 \neq K_2$ tenemos que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$ (o $(K_2 - K_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$, entonces existe $u \in V(D)$ tal que $u \in K_1$ y $u \notin K_2$; como K_2 es núcleo de D y $u \in (V(D) - K_2)$, existe $v \in K_2$ tal que $h = (u, v) \in F(D)$.

Afirmación: $v \notin K_1$. Si suponemos que $v \in K_1$ se tendría que $(u, v) \notin F(D)$, ya que $u \in K_1$ y K_1 es núcleo, lo que contradice que $h \in F(D)$; así, $h \notin f^*(K_1)_L$. Por otro lado $h \in f^*(K_2)_L$ pues $v \in K_2$. Por lo tanto existe $h \in (f^*(K_1)_L - f^*(K_2)_L)$.

Por lo tanto $f^*(K_1)_L \neq f^*(K_2)_L$.

De donde se concluye que f^* es inyectiva.

OBSERVACIÓN 1.5

Sea $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Si f es inyectiva, entonces $\text{car}(\mathcal{A}) \leq \text{card}(\mathcal{B})$

Por lo tanto del Lema 1.3 y de la Observación 1.2 concluimos que $\text{car}(\mathcal{K}) \leq \text{card}(\mathcal{P})$.

DEFINICIÓN 1.31

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica, entonces $g: P(F(D)) \longrightarrow P(V(D))$ se define como sigue: Si $\mathcal{H} \subseteq F(D)$, entonces $g(\mathcal{H}) = X(\mathcal{H}) \cup Y(\mathcal{H})$ donde

$$X(\mathcal{H}) = \{ v \in V(D) \mid (u, v) \in \mathcal{H} \}$$

$$Y(\mathcal{H}) = \{ u \in V(D) \mid \delta_D^-(u) = 0 \text{ y si } (u, v) \in F(D), \text{ entonces } v \notin X(\mathcal{H}) \}.$$

LEMA 1.4

Sea D una digráfica y $\mathcal{H} \subseteq F(D)$. Si \mathcal{H}_L es núcleo de $L(D)$, entonces $g(\mathcal{H})$ es núcleo de D .

Demostración:

Sea \mathcal{H}_L núcleo de $L(D)$

(1) Por demostrar que $g(\mathcal{H}_L)$ es independiente, es decir, sea $\{u, v\} \subseteq g(\mathcal{H}_L)$ por demostrar que $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$. Por la manera en que se define g se tienen los siguientes casos:

- (a) $\{u, v\} \subseteq X(\mathcal{H})$
- (b) $u \in X(\mathcal{H})$ y $v \in Y(\mathcal{H})$
- (c) $u \in Y(\mathcal{H})$ y $v \in X(\mathcal{H})$
- (d) $\{u, v\} \subseteq Y(\mathcal{H})$

(a) Demostración: (Por contradicción)

Supongamos que $\{u, v\} \subseteq X(\mathcal{H})$ y $(u, v) \in F(D)$, entonces existe $\{f, h\} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $f = (a, u)$ y $h = (b, v)$

- Si $u = b$, entonces $f = (a, u)$ y $h = (u, v)$ por lo que $(f, h) \in F(L(D))$, pero esto es una contradicción pues como \mathcal{H}_L es independiente se tiene que $(f, h) \notin F(L(D))$.

Por lo tanto $(u, v) \notin F(D)$.

- Si $u \neq b$. Sea $l = (u, v)$, entonces $(f, l) \in F(L(D))$.

Afirmación: $l \notin \mathcal{H}_L$: pues si suponemos que $l \in \mathcal{H}_L$ se sigue que $(f, l) \in F(L(D))$. Pero $f \in \mathcal{H}_L$, lo que contradice el hecho de que \mathcal{H}_L es independiente.

Por lo tanto $l \notin \mathcal{H}_L$.

Entonces $l \in (V(L(D)) - \mathcal{H}_L)$ y como \mathcal{H}_L es absorbente, entonces existe $r \in \mathcal{H}$ tal que $(l, r) \in F(L(D))$, donde $r = (v, w)$; además $h = (b, v)$, entonces $(h, r) \in F(L(D))$, pero esto es una contradicción pues $\{h, r\} \subseteq \mathcal{H}_L$ y \mathcal{H}_L es independiente.

Por lo tanto suponer que $(u, v) \in F(D)$ nos lleva a una contradicción. Por lo que $(u, v) \notin F(D)$.

Análogamente $(v, u) \notin F(D)$.

(b) Supongamos $u \in X(\mathcal{H})$ y $v \in Y(\mathcal{H})$, entonces $(u, v) \notin F(D)$ pues $\delta_D(v) = 0$. Además, $(v, u) \notin F(D)$ pues $u \in X(\mathcal{H})$, $v \in Y(\mathcal{H})$ y por definición de $Y(\mathcal{H})$.

(c) Supongamos que $u \in Y(\mathcal{H})$ y $v \in X(\mathcal{H})$. Completamente análogo al Caso (b).

(d) Supongamos que $\{u, v\} \subseteq Y(\mathcal{H})$. Por definición de $Y(\mathcal{H})$ se tiene que $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$. Por lo tanto $g(\mathcal{H}_L)$ es independiente.

(2) Por demostrar que $g(\mathcal{H}_L)$ es absorbente, es decir, sea $u \in (V(D) - g(\mathcal{H}_L))$; por demostrar que existe $v \in g(\mathcal{H}_L)$ tal que $(u, v) \in F(D)$.

Como $u \in (V(D) - g(\mathcal{H}_L))$ entonces $u \in (V(D) - (X(\mathcal{H}) \cup Y(\mathcal{H})))$, es decir, $u \in V(D)$ y $u \notin (X(\mathcal{H}) \cup Y(\mathcal{H}))$. De esto tenemos que $\delta_D(u) \neq 0$ o existe $(u, v) \in F(D)$ tal que $v \in X(\mathcal{H})$.

- Si $\delta_D(u) \neq 0$ entonces existe $f = (w, u) \in F(D)$ y como $u \notin X(\mathcal{H})$ entonces $f \notin \mathcal{H}_L$. Así $f \in (V(L(D)) - \mathcal{H}_L)$ y por ser \mathcal{H}_L absorbente existe $h \in \mathcal{H}_L$ tal que $(f, h) \in F(L(D))$, donde $h = (u, v)$, por lo que $v \in X(\mathcal{H})$.

Por lo tanto existe $v \in g(\mathcal{H}_L)$ tal que $(u, v) \in F(D)$.

- Si existe $(u, v) \in F(D)$ tal que $v \in X(\mathcal{H})$ entonces $v \in g(\mathcal{H}_L)$ y $(u, v) \in F(D)$.

Por lo tanto concluimos que $g(\mathcal{H}_L)$ es absorbente.

Así de (1) y (2) se sigue inmediatamente que $g(\mathcal{H}_L)$ es núcleo.

LEMA 1.5

Sean D una digráfica, \mathcal{P} el conjunto de todos los núcleos de $L(D)$ y \mathcal{K} el conjunto de todos los núcleos de D . La función $g^* = g|_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ es inyectiva, donde g^* es la restricción de g a \mathcal{P} .

Demostración:

Por demostrar que g^* es inyectiva, es decir, sea $\{\mathcal{H}_L, \mathcal{G}_L\} \subseteq \mathcal{P}$ tal que $\mathcal{H}_L \neq \mathcal{G}_L$, por demostrar que $g^*(\mathcal{H}_L) \neq g^*(\mathcal{G}_L)$.

Como $\mathcal{H}_L \neq \mathcal{G}_L$ entonces $(\mathcal{H}_L - \mathcal{G}_L) \neq \emptyset$ (o $(\mathcal{G}_L - \mathcal{H}_L) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(\mathcal{H}_L - \mathcal{G}_L) \neq \emptyset$, entonces existe $h \in \mathcal{H}_L$ tal que $h \notin \mathcal{G}_L$. Como $h \in \mathcal{H}_L$ entonces $h = (u, v) \in \mathcal{H}$ con $v \in g(\mathcal{H})$. Además $h \notin \mathcal{G}_L$ por lo que $h \in (V(L(D)) - \mathcal{G}_L)$ y como \mathcal{G}_L es núcleo, existe $l \in \mathcal{G}_L$ tal que $(h, l) \in F(L(D))$, donde $l = (v, w)$ y como $l \in \mathcal{G}_L$ entonces $w \in g^*(\mathcal{G})$; además, se tiene que $v \notin g^*(\mathcal{G})$ pues $g^*(\mathcal{G})$ es independiente.

Así existe $v \in V(D)$ tal que $v \in (g^*(\mathcal{H}) - g^*(\mathcal{G}))$. Por lo tanto $g^*(\mathcal{H}_L) \neq g^*(\mathcal{G}_L)$.

De donde concluimos que g^* es inyectiva.

Y por la Observación 1.5 también concluimos que $\text{car}(\mathcal{P}) \leq \text{card}(\mathcal{K})$.

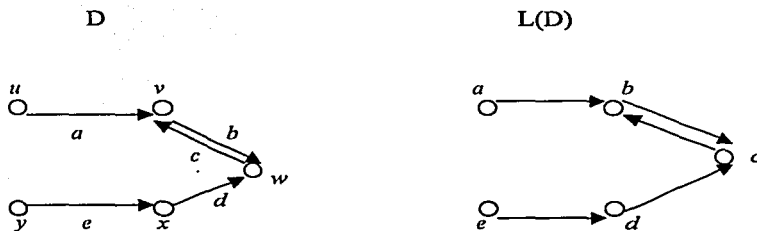
Así, por un lado tenemos $\text{car}(\mathcal{K}) \leq \text{card}(\mathcal{P})$ (Lema 1.2 y Observación 1.2) y por otro lado $\text{car}(\mathcal{P}) \leq \text{card}(\mathcal{K})$ (Lema 1.5 y Observación 1.2). Por lo que se concluye que $\text{car}(\mathcal{K}) = \text{card}(\mathcal{P})$. Por lo tanto el Teorema 1.1 queda demostrado.

En la Figura 1.14 tenemos una digráfica D y su respectiva digráfica de líneas $L(D)$, en las cuales se ejemplifica el Teorema 1.1, donde

$$V(D) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$F(D) = V(L(D)) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$F(L(D)) = \{(a, b), (b, c), (c, b), (e, d), (d, c)\}$$



Los núcleos de D son \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2

$$\mathcal{K}_1 = \{x, v\}$$

$$f(\mathcal{K}_1) = \{a, c, e\}$$

$$\mathcal{K}_2 = \{u, w, y\}$$

$$f(\mathcal{K}_2) = \{b, d\}$$

Los núcleos de $L(D)$ son \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2

$$\mathcal{H}_1 = \{a, c, e\}$$

$$g(\mathcal{H}_1) = X(\mathcal{H}_1) \cup Y(\mathcal{H}_1)$$

$$X(\mathcal{H}_1) = \{x, v\}$$

$$Y(\mathcal{H}_1) = \emptyset$$

$$\mathcal{H}_2 = \{b, d\}$$

$$g(\mathcal{H}_2) = X(\mathcal{H}_2) \cup Y(\mathcal{H}_2)$$

$$X(\mathcal{H}_2) = \{w\}$$

$$Y(\mathcal{H}_2) = \{u, y\}$$

Figura 1.14

Del Teorema 1.1 se sigue de manera inmediata:

COROLARIO 1.2

Sea D una digráfica, D tiene núcleo si y sólo si su digráfica de líneas $L(D)$ tiene núcleo.

TEOREMA 1.2

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces el número de seminúcleos de D es menor o igual al número de seminúcleos de su digráfica de líneas $L(D)$

Demostración:

Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los seminúcleos de D y sea \mathcal{U} el conjunto de todos los seminúcleos de $L(D)$, por demostrar que $\text{card}(\mathcal{S}) \leq \text{card}(\mathcal{U})$.

Primero veamos que si S es un seminúcleo de D , entonces $f(S)_L$ es un seminúcleo de $L(D)$.

Así, supongamos que S es un seminúcleo de D .

(1) Por el Lema 1.1 y por ser S independiente se sigue que $f(S)_L$ es independiente.

(2) Sea $g = (l, m) \in F(L(D))$ tal que $l \in f(S)_L$ por demostrar que existe $h = (m, n) \in F(L(D))$ con $n \in f(S)_L$. Como $(l, m) \in F(L(D))$ entonces $l = (u, v)$ y $m = (v, w)$. Además, como $l \in f(S)_L$ entonces $v \in S$ y como $m = (v, w) \in F(D)$ y S es un seminúcleo, se sigue que existe $y \in S$ tal que $n = (w, y) \in F(D)$. Así, $h = (m, n) \in F(L(D))$ con $n \in f(S)_L$.

Por lo tanto de (1) y (2) se sigue que $f(S)_L$ es seminúcleo de $L(D)$.

Ahora, sea $f^* = f|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{U}$, donde f^* es la restricción de f a \mathcal{S} . Demostraremos que f^* es inyectiva.

Es decir, sea $\{S_1, S_2\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $S_1 \neq S_2$. Por demostrar que $f^*(S_1) \neq f^*(S_2)$.

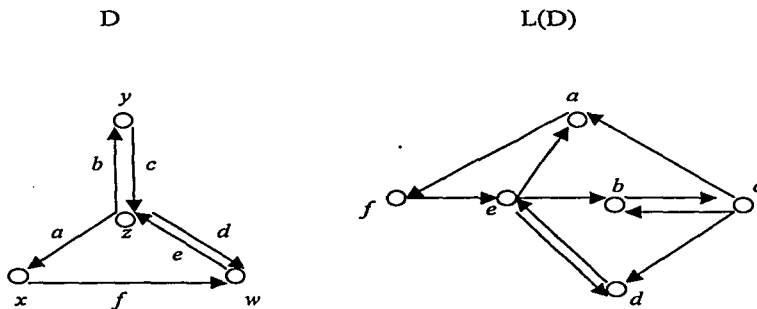
Como $S_1 \neq S_2$ entonces $S_1 - S_2 \neq \emptyset$ (o $(S_2 - S_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(S_1 - S_2) \neq \emptyset$, entonces existe $u \in S_1$ tal que $u \notin S_2$, además, como $\delta_D^-(u) \geq 1$ existe $g = (z, u) \in F(D)$. Así, $g \in f^*(S_1)_L$ (pues $u \in S_1$) y $g \notin f^*(S_2)_L$.

Por lo tanto existe $g \in (f^*(S_1)_L - f^*(S_2)_L)$, de donde concluimos que $f^*(S_1)_L \neq f^*(S_2)_L$, lo que demuestra que f^* es inyectiva.

Por la Observación 1.5 se tiene que $\text{car}(\mathcal{S}) \leq \text{card}(\mathcal{V})$ de donde el Teorema 1.2 queda demostrado.

La digráfica D de la Figura 1.15 ejemplifica el Teorema 1.2, en donde se muestra que D tiene tres seminúcleos y su digráfica de líneas $L(D)$ tiene seis.



Los seminúcleos de D son

$$\begin{aligned} S_1 &= \{y, w\} \\ S_2 &= \{w\} \\ S_3 &= \{y\} \end{aligned}$$

Los seminúcleos de $L(D)$ son

$$\begin{aligned} f(S_1) &= S_1^* = \{b, d, f\} \\ f(S_2) &= S_2^* = \{d, f\} \\ f(S_3) &= S_3^* = \{b\} \\ S_4^* &= \{b, d\} \\ S_5^* &= \{b, f\} \\ S_6^* &= \{d\} \end{aligned}$$

Figura 1.15

TEOREMA 1.3

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces el número de cuasinúcleos de D es menor o igual al número de cuasinúcleos de $L(D)$.

Demostración:

Sea \mathcal{D} el conjunto de todos los cuasinúcleos de D y sea \mathcal{L} el conjunto de todos los cuasinúcleos de $L(D)$, por demostrar que $\text{car}(\mathcal{D}) \leq \text{card}(\mathcal{L})$.

Primero demostraremos que si Q es un cuasinúcleo de D , entonces $f(Q)_L$ es cuasinúcleo de $L(D)$.

Sea Q un cuasinúcleo de D .

(1) Por el Lema 1.1 y por ser Q independiente, entonces $f(Q)_L$ es independiente.

(2) Sea $h = (u, v) \in (V(L(D)) - f(Q)_L)$ por demostrar que $h \in \Gamma(f(Q)_L) \cup \Gamma(\Gamma(f(Q)_L))$.

Como $h \notin f(Q)_L$ entonces $v \notin Q$ y como Q es cuasinúcleo existe una trayectoria dirigida $\vec{\mathcal{T}}$ de v a Q con $l(\vec{\mathcal{T}}) = 1$ o $l(\vec{\mathcal{T}}) = 2$.

- Si $l(\vec{\mathcal{T}}) = 1$, entonces existe $g = (v, w) \in F(D)$ con $w \in Q$, por lo que $g \in f(Q)_L$. Así (h, g) es una trayectoria dirigida de longitud uno de h a $f(Q)_L$.

- Si $l(\vec{\mathcal{T}}) = 2$, entonces $\vec{\mathcal{T}} = (v, y, z)$ con $z \in Q$. Sea $m = (v, y)$, $n = (y, z)$, tenemos que $n \in f(Q)_L$. Así existe una trayectoria dirigida $\vec{\mathcal{T}} = (h, m, n)$ de longitud dos de h a $f(Q)_L$ en $L(D)$.

Por lo tanto $f(Q)_L$ es un cuasinúcleo de $L(D)$.

Por último sea $f^* = f|_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{L}$, donde f^* es la restricción de f a \mathcal{D} . Demostraremos que f^* es inyectiva.

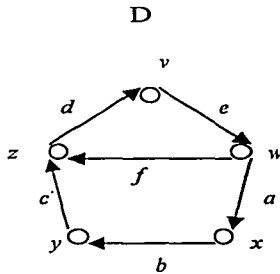
Es decir, sea $\{Q_1, Q_2\} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $Q_1 \neq Q_2$ por demostrar que $f^*(Q_1)_L \neq f^*(Q_2)_L$.

Como $Q_1 \neq Q_2$ entonces $(Q_1 - Q_2) \neq \emptyset$ (o $(Q_2 - Q_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(Q_1 - Q_2) \neq \emptyset$, se sigue que existe $u \in Q_1$ tal que $u \notin Q_2$ y como $\delta_D(u) \geq 1$, existe $g = (z, u) \in F(D)$. Ya que $u \in (Q_1 - Q_2)$, sucede que $g \in (f^*(Q_1)_L - f^*(Q_2)_L)$ por lo que $f^*(Q_1)_L \neq f^*(Q_2)_L$. Así f^* es inyectiva.

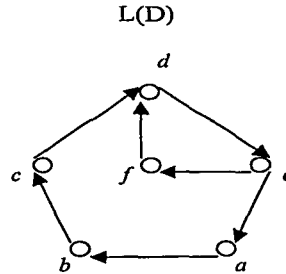
Por la Observación 1.5 concluimos que $\text{car}(\mathcal{D}) \leq \text{card}(\mathcal{L})$.

En la figura 1.16 se puede observar una digráfica D y su respectiva dígrfica de líneas, en donde se ejemplifica el Teorema 1.3



Los cuasinúcleos de D son

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{v, x\} \\ Q_2 &= \{v, y\} \\ Q_3 &= \{x, z\} \\ Q_4 &= \{w, y\} \end{aligned}$$



Los cuasinúcleos de $L(D)$ son

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= Q_1^* = \{a, d\} \\ f(Q_2) &= Q_2^* = \{b, d\} \\ f(Q_3) &= Q_3^* = \{a, c, f\} \\ f(Q_4) &= Q_4^* = \{b, e\} \\ &= Q_5^* = \{c, e\} \\ &= Q_6^* = \{c, f\} \end{aligned}$$

Figura 1.16

OBSERVACIÓN 1.6

La hipótesis de que cada vértice tiene ingrado al menos uno no puede ser omitida en los Teoremas 1.2 y 1.3. Consideremos la digráfica D y su digráfica de líneas $L(D)$ (Figura 1.17), donde:

$$V(D) = \{w, x, y\} \text{ con } \delta_D^-(w) = 0$$

$$V(L(D)) = F(D) = \{a, b\}$$



D tiene dos seminúcleos y dos cuasinúcleos

$$S_1 = Q_1 = \{w, y\}$$

$$S_2 = Q_2 = \{y\}$$

$L(D)$ tiene sólo un seminúcleo y un sólo cuasinúcleo

$$S = Q = \{a\}$$

Figura 1.17

DEFINICIÓN 1.32

Una función entera no negativa $g(x)$ es llamada **función de Grundy** de D si para todo vértice x , $g(x)$ es el mínimo entero no negativo que no pertenece al conjunto $\{g(y) \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$

DEFINICIÓN 1.33

La función de Grundy se puede definir como una función $g(x)$, tal que

- (a) $g(x) = k > 0$ implica que para todo $0 \leq j < k$ existe un $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $g(y) = j$.
- (b) $g(x) = k$ implica que todo $y \in \Gamma_D^+(x)$ satisface que $g(y) \neq k$.

LEMA 1.6

La Definición 1.32 y la Definición 1.33 son equivalentes.

Demostración:

\Rightarrow] Sea $x \in V(D)$ y $g(x) = k > 0$ función de Grundy de D .

(a) Sea $0 \leq j < k$ por demostrar que existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ tal que $g(y) = j$.

Supongamos que para todo $y \in \Gamma_D^+(x)$ se cumple que $g(y) \neq j$, entonces $j \notin \{g(y) = j \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$ y por la Definición 1.32 $g(x) \leq j$, pero $g(x) = k > j < k$ lo cual es absurdo.

(b) Sea $y \in \Gamma_D^+(x)$, por demostrar que $g(y) \neq k$.

Por la Definición 1.32 $g(x) \notin \{g(y) = j \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$ por lo tanto $g(y) \neq k$. Así, la Definición 1.32 implica la Definición 1.33.

\Leftarrow] Supongamos que se cumple la Definición 1.33 por demostrar que

$k = g(x) = \min \{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g(y) = j \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}\}$

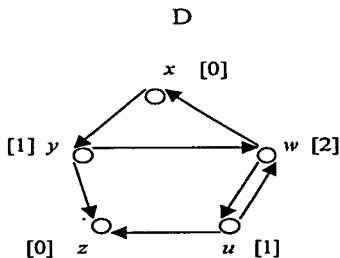
Por (b) de la Definición 1.33 se cumple $g(x) \notin \{g(y) \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$. Sea $k' \geq 0$, tal que $k' \notin \{g(y) \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$, por demostrar que $k \leq k'$. Supongamos que $k' < k$, como $0 \leq k' < k$, por (a) de la Definición 1.33 existe $y \in \Gamma_D^+(x)$ con $k' \in \{g(y) \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}$, de donde se tiene que $k' \leq k$, lo cual contradice que $k' < k$. Por lo tanto $k \leq k'$.

Se sigue que $g(x) = \min \{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g(y) = j \mid y \in \Gamma_D^+(x)\}\}$.

Por lo tanto la Definición 1.33 implica la Definición 1.32.

De donde la Definición 1.32 y la Definición 1.33 son equivalentes.

En la digráfica D de la Figura 1.18 se muestra una función de Grundy.



Una función de Grundy de D es

$$\begin{aligned}
 g(u) &= 1 \\
 g(w) &= 2 \\
 g(x) &= 0 \\
 g(v) &= 1 \\
 g(z) &= 0
 \end{aligned}$$

Figura 1.18

LEMA 1.7

Sea D una digráfica y $u \in V(D)$. Si g_1 y g_2 son funciones de Grundy de D , tales que para todo $y \in \Gamma_D^+(u)$, $g_1(y) = g_2(y)$, entonces $g_1(u) = g_2(u)$.

Demostración:

Sean $u \in V(D)$ y g_1, g_2 funciones como en las hipótesis del Lema 1.7

Como $g_1(y) = g_2(y)$ para todo $y \in \Gamma_D^+(u)$, entonces

$\{g_1(y) \mid y \in \Gamma_D^+(u)\} = \{g_2(y) \mid y \in \Gamma_D^+(u)\}$ por lo tanto

$\min \{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g_1(y) \mid y \in \Gamma_D^+(u)\}\} =$

$\min \{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g_2(y) \mid y \in \Gamma_D^+(u)\}\}$, es decir, $g_1(u) = g_2(u)$.

TEOREMA 1.4

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$

Antes demostraremos lo siguiente.

Sea $g: V(D) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función de Grundy de D , entonces

$g_L: V(L(D)) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define como sigue

$g_L(h) = g(z)$ para toda $h = (y, z) \in V(L(D))$.

LEMA 1.8

Sea g una función de Grundy de D , entonces g_L es una función de Grundy de $L(D)$.

Demostración:

(a) Sea $g_L(h) = k > 0$ y $0 \leq j < k$. Por demostrar que existe $l \in \Gamma_{L(D)}^+(h)$ con $g_L(l) = j$.

Sea $h = (u, v) \in V(L(D))$, como $g_L(h) = k$, entonces $g(v) = k$.

Ya que g es función de Grundy de D y $0 \leq j < k$, $k > 0$, por (a) de la Definición 1.33 existe $w \in \Gamma_D^+(v)$ con $g(w) = j$, así, $l = (v, w)$ y $g_L(l) = g(w) = j$.

(b) Supongamos que $g_L(h) = k$, con $h = (u, v) \in V(L(D))$, y sea $l \in \Gamma_{L(D)}^+(h)$ por demostrar que $g_L(l) \neq k$.

Como $l \in \Gamma_{L(D)}^+(h)$, entonces $l = (v, w)$ y $g_L(l) = g(w)$. Ya que g es función de Grundy de D y $w \in \Gamma_D^+(v)$ por (b) de la Definición 1.33 se tiene que $g(w) \neq k$, así, $g_L(l) \neq k$.

Por lo tanto g_L es una función de Grundy de $L(D)$.

LEMA 1.9

Sea D una digráfica tal que todo vértice de D tiene ingrado al menos uno, y sean f y g funciones de Grundy de D tal que $f \neq g$, entonces $f_L \neq g_L$.

Demostración: (Por contrapositiva)

Supongamos que $f_L = g_L$ por demostrar que $f = g$.

Sea $u \in V(D)$, como $\delta_D^-(u) \geq 1$, entonces existe $h = (y, u) \in V(L(D))$ y como $f_L = g_L$, se tiene que $f_L(h) = g_L(h)$, pero $f_L(h) = f(u)$ y $g_L(h) = g(u)$, de donde $f(u) = g(u)$.

Por lo tanto $f = g$.

DEFINICIÓN 1.34

Sea D una digráfica tal que todo vértice de D tiene ingrado al menos uno y sea $g: V(L(D)) \rightarrow N \cup \{0\}$ una función de Grundy de $L(D)$, entonces

$g_D: V(D) \rightarrow N \cup \{0\}$ se define como sigue:

Para cada $y \in V(D)$, $g_D(y) = g(f)$ donde $f = (x, y)$.

LEMA 1.10

\mathcal{G}_D esta bien definida. Es decir, sea $x_2 \in V(D)$ y sea $\{f_0 = (x_0, x_2), f_1 = (x_1, x_2)\} \subseteq F(D)$ por demostrar que $\mathcal{G}(f_0) = \mathcal{G}(f_1)$.

Demostración:

- Si $\Gamma_D^+(x_2) = \emptyset$, entonces $\Gamma_{L(D)}^+(f_0) = \Gamma_{L(D)}^+(f_1) = \emptyset$, así $\mathcal{G}(f_0) = 0 = \mathcal{G}(f_1)$ (por la Definición 1.32). Por lo tanto $\mathcal{G}(f_0) = \mathcal{G}(f_1)$.

- Si $\Gamma_D^+(x_2) \neq \emptyset$, entonces $\Gamma_{L(D)}^+(f_0) = \Gamma_{L(D)}^+(f_1) \neq \emptyset$, por lo que $\min\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g(h) \mid h \in \Gamma_{L(D)}^+(f_0)\}\} = \min\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid j \notin \{g(h) \mid h \in \Gamma_{L(D)}^+(f_1)\}\}$, así, $\mathcal{G}(f_0) = \mathcal{G}(f_1)$.

Por lo tanto \mathcal{G}_D esta bien definida.

LEMA 1.11

Sea D una digráfica tal que todo vértice de D tiene ingrado al menos uno. Si \mathcal{G} es una función de Grundy de $L(D)$, entonces \mathcal{G}_D es una función de Grundy de D .

Demostración:

(a) Sean $u \in V(D)$, $\mathcal{G}_D(u) = k > 0$ y $0 \leq j < k$. Por demostrar que existe $v \in \Gamma_D^+(u)$ tal que $\mathcal{G}_D(v) = j$.

Como $u \in V(D)$ y $\delta_D^+(u) \geq 1$ existe $f(z, u) \in F(D)$, así, $\mathcal{G}_D(u) = \mathcal{G}(f)$ y ya que \mathcal{G} es función de Grundy de $L(D)$ y $0 \leq j < k$ (por (a) de la Definición 1.33) existe $h = (u, v) \in \Gamma_{L(D)}^+(f)$ tal que $\mathcal{G}(h) = j$, de donde $\mathcal{G}(h) = \mathcal{G}_D(v) = j$.

Por lo que existe $v \in \Gamma_D^+(u)$ tal que $\mathcal{G}_D(v) = j$.

(b) Supongamos que $\mathcal{G}_D(u) = k$, donde $u \in V(D)$ y sea $v \in \Gamma_D^+(u)$, por demostrar que $\mathcal{G}_D(v) \neq k$.

Como $u \in V(D)$ existe $f = (z, u) \in F(D)$, así $\mathcal{G}_D(u) = \mathcal{G}(f) = k$. Por otro lado $h = (u, v) \in \Gamma_{L(D)}^+(f)$ y como \mathcal{G} es función de Grundy de $L(D)$ (por (b) de la Definición 1.33) se tiene que $\mathcal{G}(h) \neq k$ pero $\mathcal{G}_D(v) = \mathcal{G}(h) \neq k$.

De donde se concluye que g_D es función de Grundy de D .

LEMA 1.12

Sea D una digráfica tal que todo vértice de D tiene ingrado al menos uno y sean f, g funciones de Grundy de $L(D)$ tal que $f \neq g$, entonces $f_D \neq g_D$.

Demostración: (por contrapositiva).

Supongamos que $f_D = g_D$, por demostrar que $f = g$.

Sea $h = (x, y) \in F(D)$, entonces $f(h) = f_D(y) = g_D(y) = g(h)$, de donde $f(h) = g(h)$. Por lo tanto $f = g$.

Así por el Lema 1.9 y del Lema 1.12 queda demostrado el Teorema 1.4

En la Figura 1.19 se muestra una digráfica D y su respectiva digráfica de líneas, en donde se ejemplifica el Teorema 1.4

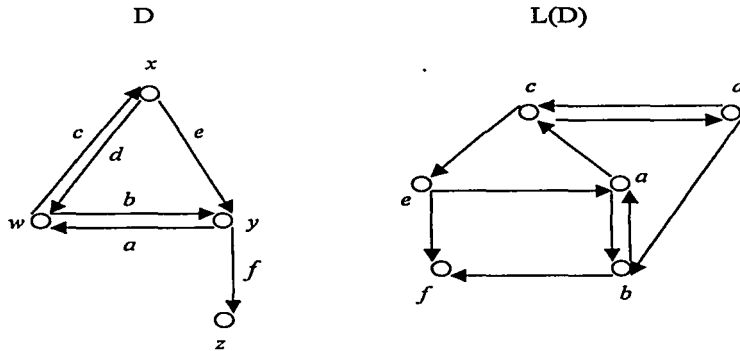


Figura 1.19

Las funciones de Grundy de D son f , g y h , y definen funciones de Grundy f_L , g_L y h_L en $L(D)$. Las funciones de Grundy de $L(D)$ son f^* , g^* y h^* , y definen funciones de Grundy f_D^* , g_D^* y h_D^* en D

$$\begin{aligned} f(w) &= 2 = f_D^*(w) \\ f(x) &= 0 = f_D^*(w) \\ f(y) &= 1 = f_D^*(w) \\ f(z) &= 0 = f_D^*(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(w) &= 0 = g_D^*(w) \\ g(x) &= 2 = g_D^*(w) \\ g(y) &= 1 = g_D^*(w) \\ g(z) &= 0 = g_D^*(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(w) &= 1 = h_D^*(w) \\ h(x) &= 0 = h_D^*(w) \\ h(y) &= 2 = h_D^*(w) \\ h(z) &= 0 = h_D^*(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_L(a) &= 2 = f^*(w) \\ f_L(b) &= 1 = f^*(w) \\ f_L(c) &= 0 = f^*(w) \\ f_L(d) &= 2 = f^*(w) \\ f_L(e) &= 1 = f^*(w) \\ f_L(f) &= 0 = f^*(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_L(a) &= 0 = g^*(w) \\ g_L(b) &= 1 = g^*(w) \\ g_L(c) &= 2 = g^*(w) \\ g_L(d) &= 0 = g^*(w) \\ g_L(e) &= 1 = g^*(w) \\ g_L(f) &= 0 = g^*(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_L(a) &= 1 = h^*(w) \\ h_L(b) &= 2 = h^*(w) \\ h_L(c) &= 0 = h^*(w) \\ h_L(d) &= 1 = h^*(w) \\ h_L(e) &= 2 = h^*(w) \\ h_L(f) &= 0 = h^*(w) \end{aligned}$$

Del Teorema 1.4 se sigue de manera inmediata el siguiente corolario.

COROLARIO 1.3

Sea D una digráfica tal que todo vértice de D tiene ingrado al menos uno. Entonces D tiene función de Grundy si y sólo si $L(D)$ tiene función de Grundy.

LEMA 1.13

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces para cada $n \geq 1$, cada vértice de $L^n(D)$ tiene ingrado al menos uno.

Demostración: (Por inducción sobre n).

(i) Base de inducción

Para $n = 1$

Sea D una digráfica como en las hipótesis del Lema y $g = (x, y) \in V(L(D))$ por demostrar que $\delta_{L(D)}^-(g) \geq 1$.

Como $x \in V(D)$ y $\delta_D^-(x) \geq 1$, entonces existe $u \in V(D)$ tal que $h = (u, x) \in F(D)$. Así, $(h, g) \in F(L(D))$, de donde $\delta_{L(D)}^-(g) \geq 1$.

(ii) Por hipótesis de inducción supongamos que en $L^{n-1}(D)$ cada vértice tiene ingrado al menos uno.

(iii) Por demostrar que en $L^n(D)$ cada vértice tiene ingrado al menos uno.

Sea $H = L^{n-1}(D)$. H cumple las hipótesis del Lema y aplicando el paso (i) a H , se tiene que todo vértice de $L(H)$ tiene ingrado al menos uno.

Pero $L(H) = L(L^{n-1}(D)) = L^n(D)$.

Por lo tanto cada vértice de $L(D)$, $n \geq 1$; tiene ingrado al menos uno.

COROLARIO 1.4

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado mayor o igual a uno, entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L^n(D)$

Demostración: (Por inducción sobre n)

(i) Base de inducción.

Para $n = 1$

Se sigue inmediatamente del Teorema 1.4

Para $n = 2$

Sea D una digráfica tal que tiene m funciones de Grundy, entonces por el Teorema 1.4 $L(D)$ tiene m funciones de Grundy y por el Lema 1.13 todo vértice de $L(D)$ tiene ingrado al menos uno. Así, aplicando el Teorema 1.4 en $L(D)$ tenemos que $L^2(D) = L(L(D))$ tiene m funciones de Grundy.

(ii) Hipótesis de inducción.

Supongamos que el número de funciones de Grundy de $L^{n-1}(D)$ es m .

(iii) Por demostrar que el número de funciones de Grundy de $L^n(D)$ es m .

Demostración:

Por las hipótesis de inducción se tiene que el número de funciones de Grundy de $L^{n-1}(D)$ es m . Por el Lema 1.13 y las hipótesis sobre D , se sigue que cada vértice de $L^{n-1}(D)$ tiene ingrado al menos uno, y aplicando el Teorema 1.4 se sigue que el número de funciones de Grundy de $L^n(D) = L(L^{n-1}(D))$ es m .

DEFINICIÓN 1.35

Sea D una digráfica, la función $J : P(F(D)) \longrightarrow P(V(D))$ se define como sigue: Para cada $A \subseteq F(D)$, $J(A) = \{x \in V(D) \mid (u, x) \in A\}$

TEOREMA 1.5

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces D tiene al menos un seminúcleo no vacío si y sólo si $L(D)$ tiene un seminúcleo no vacío.

Demostración:

\Rightarrow] Supongamos que D tiene un seminúcleo no vacío, entonces el número de seminúcleos de D es mayor o igual que uno y se sigue del Teorema 1.2 que el número de seminúcleos no vacíos de $L(D)$ es mayor o igual que uno. Por lo tanto $L(D)$ tiene al menos un seminúcleo no vacío.

\Leftarrow] Sea A un seminúcleo no vacío de $L(D)$. Por demostrar que $J(A)$ es un seminúcleo no vacío de D .

(a) $J(\mathcal{A})$ es no vacío.

Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe $(u, x) \in \mathcal{A}$ y así $x \in J(\mathcal{A})$, de donde $J(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

(b) $J(\mathcal{A})$ es independiente.

Sea $\{x, y\} \subseteq J(\mathcal{A})$ y supongamos (por contradicción) que $(x, y) \in F(\mathcal{D})$.

Como $x \in J(\mathcal{A})$ existe $u \in V(\mathcal{D})$ tal que $(u, x) \in \mathcal{A}$, entonces $((u, x), (x, y)) \in F(L(\mathcal{D}))$, de donde $(x, y) \notin \mathcal{A}$ (pues \mathcal{A} es independiente). Por ser \mathcal{A} un seminúcleo y $(x, y) \in (V(L(\mathcal{D})) - \mathcal{A})$ existe $(y, z) \in \mathcal{A}$ tal que $((x, y), (y, z)) \in F(L(\mathcal{D}))$,

Por otro lado como $y \in J(\mathcal{A})$, existe $t \in V(\mathcal{D})$ tal que $(t, y) \in \mathcal{A}$, de donde $((t, y), (y, z)) \in F(L(\mathcal{D}))$ con $\{(t, y), (y, z)\} \subseteq \mathcal{A}$ contradiciendo el hecho de que \mathcal{A} sea independiente.

Si se supone que $(y, x) \in F(\mathcal{D})$, se obtiene una contradicción de manera análoga.

(c) Sea $(x, y) \in F(\mathcal{D})$ con $x \in J(\mathcal{A})$, por demostrar que existe $w \in J(\mathcal{A})$ tal que $(y, w) \in \mathcal{A}$. Como $x \in J(\mathcal{A})$ se sigue que existe $z \in V(\mathcal{D})$ tal que $(z, x) \in \mathcal{A}$ y como \mathcal{A} es un seminúcleo de $L(\mathcal{D})$ y $((z, x), (x, y)) \in F(L(\mathcal{D}))$, existe $w \in V(\mathcal{D})$ tal que $(y, w) \in \mathcal{A}$; de donde $w \in J(\mathcal{A})$.

Por lo tanto $J(\mathcal{A})$ es un seminúcleo de \mathcal{D} no vacío.

DEFINICIÓN 1.36

Sean \mathcal{D} una digráfica, k y l dos números naturales tales que $k \geq 2$ y $l \geq 1$.

Un conjunto $J \subseteq V(\mathcal{D})$ es llamado un (k, l) -núcleo de \mathcal{D} si:

- (a) Para cada $x \neq y$, $\{x, y\} \subseteq J$ se tiene que $d_{\mathcal{D}}(x, y) \geq k$.
- (b) Para cada $y \in (V(\mathcal{D}) - J)$, existe $x \in J$ tal que $d_{\mathcal{D}}(y, x) \leq l$.

Nota: si $l = k - 1$, $k \geq 2$, diremos que J es un k -núcleo

OBSERVACIÓN 1.6

- Para $k = 2$ y $l = 1$, un $(2, 1)$ -núcleo es un núcleo.
- Para $k = 2$ y $l = 2$, un $(2, 2)$ -núcleo es un cuasinúcleo.

TEOREMA 1.6

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Entonces el número de $(\ell, 1)$ -núcleos en $L(D)$ es menor o igual que el número de $(\ell, 1)$ -núcleos en D , $\ell \geq 2$.

Antes demostraremos lo siguiente:

LEMA 1.14

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si \mathcal{K} es un $(\ell, 1)$ -núcleo de $L(D)$, entonces $f(\mathcal{K})$, es un $(\ell, 1)$ -núcleo de D ($\ell \geq 2$).

Demostración:

Sea \mathcal{K} un $(\ell, 1)$ -núcleo de $L(D)$.

(a) Supongamos que $x \neq x'$, donde $\{x, x'\} \subseteq f(\mathcal{K})$. Por demostrar que $d_D(x, x') \geq \ell$

Por contradicción supongamos que $d_D(x, x') = n < \ell$.

Sea $\vec{\mathcal{J}} = (x \rightarrow x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x')$ una trayectoria dirigida contenida en D , tal tal que $l(\vec{\mathcal{J}}) = d_D(x, x')$. Como $x \in f(\mathcal{K})$ existe $u \in V(D)$ tal que $a_0 = (u, x) \in \mathcal{K}$ y denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$, $1 \leq i \leq n$.

Consideremos las dos siguientes posibilidades.

- Si $a_n = (x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{K}$, observemos $\vec{\mathcal{J}}' = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una $a_0 a_n$ -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud $n < \ell$ por lo que $d_{L(D)}(a_0, a_n) \leq n < \ell$ con $\{a_0, a_n\} \subseteq \mathcal{K}$ y $a_0 \neq a_n$ (pues sus vértices finales son distintos) lo cual es una contradicción ya que \mathcal{K} es un $(\ell, 1)$ -núcleo de $L(D)$.
- Si $a_n = (x_{n-1}, x_n) \notin \mathcal{K}$, entonces por ser \mathcal{K} un $(\ell, 1)$ -núcleo en $L(D)$ existe $b = (v, z) \in \mathcal{K}$ tal que $d_{L(D)}(a_n, b) \leq 1$; así, $(a_n, b) \in F(D)$ por lo que $b = (x_n, z)$ ($x_n = v$). Por otro lado como $x_n = x' \in f(\mathcal{K})$ existe $v \in V(D)$ tal que $(v, x_n) \in \mathcal{K}$, de donde tenemos que $\{(v, x_n), (x_n, z)\} \subseteq \mathcal{K}$, $(v, x_n) \neq (x_n, z)$ y $d_{L(D)}((v, x_n), (x_n, z)) = 1 < \ell$ lo cual contradice que \mathcal{K} sea un $(\ell, 1)$ -núcleo de $L(D)$ con $\ell \geq 2$.

(b) Sea $y \in (V(D) - f(K))$, por demostrar que existe $x \in f(K)$ tal que $d_D(x, y) \leq 1$.
 Como $y \in V(D)$ y $\delta_D(y)$, existe $u \in V(D)$ tal que $(u, y) \in F(D)$, así, $(u, y) \in (V(L(D)) - K)$ (pues $y \notin f(K)$); y como K es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$ existe $(y, x) \in K$ tal que $d_{L(D)}((u, y), (y, x)) = 1$ con $x \in f(K)$ (ya que $(y, x) \in K$) y $d_D(y, x) = 1$. Por lo que (b) queda demostrado.

Por lo tanto por (a) y (b) tenemos que $f(K)$ es un $(k, 1)$ -núcleo de D .

LEMA 1.15

Sea \mathcal{U} el conjunto de todos los $(k, 1)$ -núcleos de $L(D)$ y \mathcal{V} el conjunto de todos los $(k, 1)$ -núcleos de D . Por demostrar que $f^* = f|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ es inyectiva, donde f^* es la restricción de f a \mathcal{U} .

Demostración:

Sea $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{U}$, con $K_1 \neq K_2$, por demostrar que $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$.

Como $K_1 \neq K_2$ se tiene que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$ (o $(K_2 - K_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$, entonces se tiene que existe $(u, v) \in K_1$ tal que $(u, v) \notin K_2$ y como $(u, v) \in K_1$ tenemos que $v \in f^*(K_1)$.

Afirmación: $v \notin f^*(K_2)$.

Supongamos por contradicción que $v \in f^*(K_2)$, entonces existe $z \in V(D)$ tal que $(z, v) \in K_2$. Como $(u, v) \notin K_2$ y K_2 es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$ se tiene que existe $(w, y) \in K_2$ tal que $d_{L(D)}((u, v), (w, y)) \leq 1$, de donde $v = w$ y así, $((u, v), (v, y)) \in F(L(D))$. Por lo tanto tenemos que $\{(z, v), (v, y)\} \subseteq K_2$ con $(z, v) \neq (v, y)$ y $d_{L(D)}((u, v), (v, y)) \leq 1$, pero esto es una contradicción, pues K_2 es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$. Así, $v \notin f^*(K_2)$.

Por lo tanto tenemos que $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$, de donde f^* es inyectiva.

Por lo tanto del Lema 1.14, del Lema 1.15 y la Observación 1.5 queda demostrado el Teorema 1.6

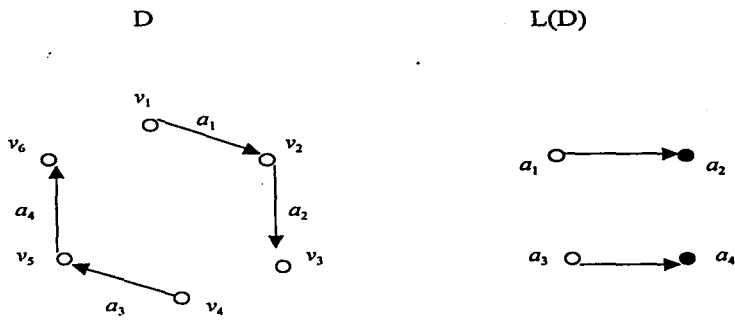
OBSERVACIÓN 1.7

La hipótesis de que cada vértice tiene ingrado al menos uno no puede ser omitida en el Teorema 1.6 para $\kappa \geq 3$. Es suficiente considerar la digráfica D (Figura 1.20), donde

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$F(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}.$$

La digráfica D definida así, no tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo y sin embargo $L(D)$ tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo para cualquier $\kappa \geq 3$.



Como podemos observar D no tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo

$L(D)$ tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo y es $\mathcal{K} = \{a_2, a_4\}$

Figura 1.20

OBSERVACIÓN 1.8

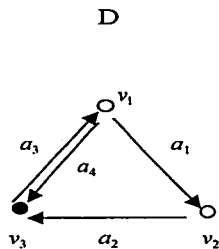
La desigualdad enunciada en el Teorema 1.6 puede ser estricta para $\kappa \geq 3$.

Consideremos la digráfica D de la figura Figura 1.21, donde:

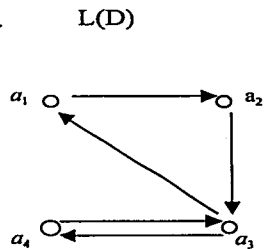
$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ y}$$

$$F(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_1, v_3)\}$$

La digráfica D así definida tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo y $L(D)$ no tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo para $\kappa \geq 3$.



D tiene un $(\kappa, 1)$ -núcleo y es
 $\mathcal{K} = \{v_3\}$ ($\kappa \geq 3$)



$L(D)$ no tiene un $(3, 1)$ -núcleo
 ($\kappa \geq 3$)

Figura 1.21

TEOREMA 1.7

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Entonces el número de (κ, ℓ) -núcleos en D es menor o igual que el número de $(2, \ell)$ -núcleos en $L(D)$.

Antes demostraremos lo siguiente:

LEMA 1.16

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si \mathcal{K} es un (κ, ℓ) -núcleo de D con $\kappa \geq 2$, entonces $f(\mathcal{K})$, es un $(2, \ell)$ -núcleo de $L(D)$.

Demostración:

Sea \mathcal{K} un $(\kappa, 1)$ -núcleo de D .

(a) Sea $\{a, a'\} \subseteq f(\mathcal{K})$ con $a \neq a'$. Por demostrar que $d_{L(D)}(a, a') \geq 2$. Por contradicción supongamos que $d_{L(D)}(a, a') \leq 1$. Como $a \neq a'$, se tiene que $d_{L(D)}(a, a') = 1$; de donde $(a, a') \in F(L(D))$, por lo que el vértice final de a es el vértice inicial de a' ; así, $a = (x, y)$ y $a' = (y, z)$. Y como $\{a, a'\} \subseteq f(\mathcal{K})$ entonces $\{y, z\} \subseteq \mathcal{K}$ (por definición de f), pero $(y, z) \in F(D)$, es decir, $d_D(y, z) = 1$, lo cual es una contradicción pues \mathcal{K} es un (κ, ℓ) -núcleo de D con $\kappa \geq 2$. Por lo tanto $d_{L(D)}(a, a') \geq 2$.

(b) Sea $b \in (V(L(D)) - f(\mathcal{K}))$, por demostrar que existe $a \in f(\mathcal{K})$ tal que $d_{L(D)}(b, a) \leq \ell$.

Sea $b = (u, v)$, como $b \notin f(\mathcal{K})$ se tiene que $v \notin \mathcal{K}$, es decir, $v \in (V(D) - \mathcal{K})$ y como \mathcal{K} es un (κ, ℓ) -núcleo de D con $\kappa \geq 2$, se tiene que existe $w \in \mathcal{K}$ tal que $d_D(v, w) = n \leq \ell$. Sea $(v = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = w)$ una vw -trayectoria dirigida de longitud mínima n contenida en D y denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i)$ con $1 \leq i \leq n$. Así, tenemos que $(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una ba_n -trayectoria dirigida de longitud n contenida en $L(D)$ y ya que $a_n = (x_{n-1}, w)$ se sigue que $a_n \in f(\mathcal{K})$ (pues $w \in \mathcal{K}$). Sea $a = a_n$, entonces se tiene que $d_{L(D)}(b, a) \leq n \leq \ell$.

Por lo tanto de (a) y (b) se tiene que $f(\mathcal{K})$, es un $(2, \ell)$ -núcleo de $L(D)$.

Por último demostraremos lo siguiente:

LEMA 1.17

Sea \mathcal{M} , el conjunto de todos los (κ, ℓ) -núcleos de D con $\kappa \geq 2$, y \mathcal{N} , el conjunto de todos los $(2, \ell)$ -núcleos de $L(D)$. Entonces $f^* = f|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una función inyectiva, donde f^* es la restricción de f a \mathcal{M} .

Demostración:

Sea $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{M}$ con $K_1 \neq K_2$ por demostrar que $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$.

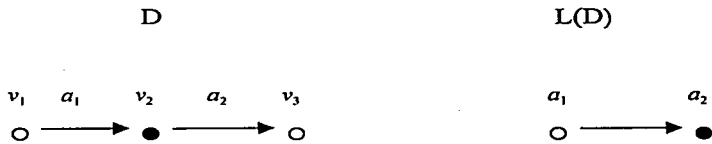
Como $K_1 \neq K_2$ se tiene que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$ (o $(K_2 - K_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$, entonces existe $v \in (K_1 - K_2)$, es decir, $v \in K_1$ y $v \notin K_2$. Como $\delta_D^-(v) \geq 1$, existe $u \in V(D)$ tal que $a = (u, v) \in F(D)$; además, por la manera en que está definida f se tiene que $a \in f^*(K_1)$ y $a \notin f^*(K_2)$ de donde tenemos que $a \in (f^*(K_1) - f^*(K_2))$, por lo tanto $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$.

Así, del Lema 1.16, del Lema 1.17 y de la Observación 1.5 queda demostrado el Teorema 1.7.

OBSERVACIÓN 1.9

Las hipótesis de que cada vértice tiene ingrado al menos uno no puede ser omitida en el Teorema 1.7 para $l \geq 2$. Consideremos la digráfica $D \cong T_2$, una trayectoria de longitud 2; entonces, $L(D) \cong T_1$ es una trayectoria de longitud uno (Figura 1.22), D tiene dos $(2, l)$ -núcleos para $l \geq 2$, y $L(D)$ sólo tiene un $(2, l)$ -núcleo para $l \geq 2$.



De tiene dos $(2, l)$ -núcleos y son:
 $K_1 = \{v_1, v_3\}$ y $K_2 = \{v_2\}$

$L(D)$ tiene un solo $(2, l)$ -núcleo
 y es $K = \{a_2\}$

Figura 1.22

OBSERVACIÓN 1.10

La desigualdad enunciada en el Teorema puede ser estricta. para $l \geq 2$ consideremos alguna k tal que $k > l + 1$ y una digráfica $D \cong T_{k-1}$ una trayectoria de longitud $k - 1$, de donde $L(D) \cong T_{k-2}$ es una trayectoria de longitud $k - 2$. Se tiene entonces que D no tiene un (k, l) -núcleo, mientras que $L(D)$ tiene un núcleo, y así, un (k, l) -núcleo para alguna $l \geq 2$.

OBSERVACIÓN 1.11

Como una consecuencia directa de los Teoremas 1.6 y 1.7 se obtiene el Teorema 1.1 en el caso de que cada vértice tiene ingrado al menos uno, un núcleo es un $(2, 1)$ -núcleo. Y el Teorema 1.3 es una consecuencia directa del Teorema 1.7, un cuasinúcleo es un $(2, 2)$ -núcleo.

COROLARIO 1.5

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno, entonces el número de $(2, l)$ -núcleos de D es menor o igual al número de $(2, l)$ -núcleos de $L(D)$.

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 1.7 tomando $k = 2$.

TEOREMA 1.8

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si $L(D)$ tiene un (k, l) -núcleo, entonces D tiene un (k', l') -núcleo, para $k' + l \leq k$ y $l \leq l'$.

Demostración:

Sean D una digráfica como en las hipótesis del Teorema, K^* un (k, l) -núcleo de $L(D)$. Por demostrar que $f(K^*)$ es un (k', l') -núcleo de D , con $k' + l \leq k$ y $l \leq l'$.

- (a) Sea $\{x, y\} \subseteq f(K^*)$, con $x \neq y$. Por demostrar que $d_D(x, y) \geq k'$.

Supongamos por contradicción que $d_D(x, y) = n < \kappa'$ y sea $\vec{\mathcal{J}} = (x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y)$ una xy -trayectoria dirigida de longitud mínima n contenida en D , denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ $1 \leq i \leq n$. Ya que $x \in J(K^*)$ y $\delta_D(x) \geq 1$, se tiene que existe $u \in V(D)$ tal que $a_0 = (u, x) \in K^*$. Como $a_0 = (u, x)$ y $a_1 = (x_0 = x, x_1)$ se sigue que $(a_0, a_1) \in F(L(D))$ por lo que $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una $a_0 a_n$ -trayectoria dirigida de longitud n contenida en $L(D)$. Consideremos los dos posibles casos:

- ❖ Si $a_n \in K^*$ entonces $d_{L(D)}(a_0, a_n) \leq n < \kappa' < \kappa$ (pues $\kappa' + l \leq \kappa$) con $\{a_0, a_n\} \subseteq K^*$. Lo cual contradice el hecho de que K^* es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.
- ❖ Si $a_n \notin K^*$ entonces por ser K^* un (κ, l) -núcleo de $L(D)$, se sigue que existe $b \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a_n, b) = m \leq l$; sea $\vec{\mathcal{J}}' = (a_n = b_0, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ una $a_n b$ -trayectoria dirigida de longitud mínima m contenida en $L(D)$. Por otro lado, como $y \in J(K^*)$, entonces existe $c = (v, y) \in K^*$. Consideremos dos posibilidades.

(1) Si $c \neq b$ entonces como a_n y c tienen el mismo vértice terminal tenemos que $\vec{\mathcal{J}}^* = (c, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ es una cb -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud $m \leq l < \kappa$ (pues $\kappa' + l \leq \kappa$) con $\{c, b\} \subseteq K^*$, lo cual es una contradicción pues K^* es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.

(2) Si $c = b$ entonces $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = b_0, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ es un $a_0 b$ -camino dirigido contenido en $L(D)$ de longitud a lo más $m + n < \kappa' + l \leq \kappa$. Así, $d_{L(D)}(a_0, b) < \kappa$, donde $\{a_0, b\} \subseteq K^*$ y $a_0 \neq b$ (pues $a_0 = (u, x)$, $c = b = (v, y)$ y $x \neq y$) lo cual es una contradicción pues K^* es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.

(b) Sea $x \in (V(D) - J(K^*))$, por demostrar que existe $y \in J(K^*)$ tal que $d_D(x, y) \leq l'$.

Como $x \in V(D)$ y $\delta_D(x) \geq 1$, existe $u \in V(D)$ tal que $a = (u, x) \in F(D)$ y como $x \notin J(K^*)$, entonces $a \notin K^*$. Y ya que K^* es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$, existe $b \in K^*$ tal que $d_{L(D)}(a, b) = n \leq l$; sea $\vec{\mathcal{J}} = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = b)$ una ab -trayectoria dirigida de longitud mínima n contenida en $L(D)$.

Sea $b = (v, y)$, como $b \in K^*$, entonces $y \in J(K^*)$; así, $\vec{\mathcal{J}}$ induce un xy -camino dirigido contenido en D de longitud n , de donde $d_D(x, y) \leq n \leq l \leq l'$.

Por lo tanto de (a) y de (b) se tiene $J(K^*)$ es un (κ', l') -núcleo de D , con $\kappa' + l \leq \kappa$ y $l \leq l'$.

TEOREMA 1.9

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno. Si $L(D)$ tiene un (κ, l) -núcleo \mathcal{A} con la propiedad de que $l < \kappa$ y para cada flecha $a \in \mathcal{A}$, existe una flecha $b \in \mathcal{A}$ con $a \neq b$ tal que el vértice final de a y b son el mismo, entonces $J(\mathcal{A})$ es un (κ, l) -núcleo de D .

Demostración:

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y \mathcal{A} un (κ, l) -núcleo de $L(D)$ con $l < \kappa$ como en las hipótesis del Teorema.

(a) Sea $\{x, y\} \subseteq J(\mathcal{A})$ con $x \neq y$, por demostrar que $d_D(x, y) \geq \kappa$.

Por contradicción supongamos que $d_D(x, y) = n < \kappa$, sea $\vec{\mathcal{J}} = (x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y)$ una xy -trayectoria dirigida contenida en D de longitud mínima n . Denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i)$ con $1 \leq i \leq n$, como $\delta_D^-(x) \geq 1$ y $x \in J(\mathcal{A})$, se sigue que existe $u \in V(D)$ tal que $a_0 = (u, x) \in \mathcal{A}$. Consideremos los dos posibles casos.

- ❖ Si $a_n \in \mathcal{A}$, entonces $\vec{\mathcal{J}}^* = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ una $a_0 a_n$ -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud $n < \kappa$, por lo que $d_{L(D)}(a_0, a_n) \leq n < \kappa$ con $\{a_0, a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ y $a_0 \neq a_n$ (pues sus vértices finales son distintos), lo cual es una contradicción pues \mathcal{A} es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.
- ❖ Si $a_n \notin \mathcal{A}$, como \mathcal{A} es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$, se tiene que existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $d_{L(D)}(a_n, b) = m \leq l < \kappa$, sea $\vec{\mathcal{J}}_1^* = (a_n = b_0, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ una $a_n b$ -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud mínima m . Por otro lado, como $y \in J(\mathcal{A})$ existe $c = (z, y) \in \mathcal{A}$. Consideremos las siguientes dos posibilidades.

1. Si $b \neq c$, tenemos que $\mathcal{J}_1 = (a_n = b_0, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ es una $a_n b$ -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud mínima m . Y ya que a_n y c tiene el mismo vértice final, se sigue que $\mathcal{J}_2 = (c, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ es también una cb -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud $m \leq l < \kappa$, por lo que $d_{L(D)}(c, b) \leq m \leq l < \kappa$ con $\{c, b\} \subseteq A$ y $b \neq c$, lo cual es una contradicción pues A es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.
2. Si $b = c$. Consideremos una flecha $d \in A$, con $d \neq b$ tal que b y d tienen el mismo vértice final (existe por hipótesis); así, $\mathcal{J}_3 = (d, b_1, b_2, \dots, b_m = b)$ es también una db -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud m , por lo que $d_{L(D)}(d, b) \leq m \leq l < \kappa$, con $\{b, d\} \subseteq A$ y $b \neq d$, lo cual es una contradicción pues A es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$.

(b) Sea $x \notin J(A)$, por demostrar que existe $y \in J(A)$ tal que $d_D(x, y) \leq l$. Como $x \in V(D)$ y $\delta_D(x) \geq 1$ (por hipótesis), existe $u \in V(D)$ tal que $a = (u, x) \in F(D)$, y como $x \notin J(A)$, se sigue que $a \notin A$. Ya que $a \notin A$ y A es un (κ, l) -núcleo de $L(D)$, entonces existe $b \in A$ tal que $d_{L(D)}(a, b) = n \leq l < \kappa$, sea $\mathcal{J} = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = b)$ una ab -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud mínima n , con $a_i = (x_i, x_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n$ (donde $a = (u, x) = (x_0, x_1)$ y $b = (x_n, x_{n+1})$). Así, $\mathcal{C} = (x_1 = x, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$ es un xx_{n+1} -camino dirigido de longitud n . Por lo tanto $d_D(x, x_{n+1}) \leq n \leq l < \kappa$. Y como $x_{n+1} \in J(A)$ (pues $b \in A$), tomando $x_{n+1} = y$ se demuestra (b).

Por lo tanto de (a) y (b) se concluye que $J(A)$ es un (κ, l) -núcleo de D .

COROLARIO 1.6

Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene ingrado al menos uno y sea $1 \leq l < \kappa$. Si todo (κ, l) -núcleo A de $L(D)$ satisface que para cada flecha $a \in A$, existe una flecha $b \in A$ con $a \neq b$ tal que el vértice final de a y b es el mismo, entonces el número de (κ, l) -núcleos de $L(D)$ es menor o igual que el número (κ, l) -núcleos de D .

Demostración:

Sean \mathcal{N}_1 el conjunto de todos los (κ, ℓ) -núcleos de $L(D)$, \mathcal{N}_2 el conjunto de todos los (κ, ℓ) -núcleos de D con $1 \leq \ell < \kappa$, y sea $f^* = f|_*$: $\mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ la función f restringida a \mathcal{N}_1 . Por el Teorema 1.9 es suficiente demostrar que f^* es inyectiva.

Es decir, sea $\{K_1, K_2\} \subseteq \mathcal{N}_1$ con $K_1 \neq K_2$; por demostrar que $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$.

Como $K_1 \neq K_2$, se sigue que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$ (o $(K_2 - K_1) \neq \emptyset$).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(K_1 - K_2) \neq \emptyset$, es decir, existe $a = (u, x) \in K_1$ tal que $a \notin K_2$. Como $a \in K_1$ se sigue que $x \in f^*(K_1)$.

Afirmación: $x \notin f^*(K_2)$. Supongamos por contradicción que $x \in f^*(K_2)$, entonces existe $b = (v, x) \in K_2$. Y como $a \notin K_2$ y K_2 es un (κ, ℓ) -núcleo de $L(D)$, se sigue que existe $c \in K_2$ tal que $d_{L(D)}(a, c) = n \leq \ell < \kappa$; sea $\vec{\mathcal{J}} = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = c)$ una ac -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud mínima n .

Consideremos las dos siguientes posibilidades.

1. Si $b \neq c$, podemos cambiar a a por b en $\vec{\mathcal{J}}$ (esto es posible ya que a y b tiene el mismo vértice final) obteniendo así, $\vec{\mathcal{J}}' = (b, a_1, a_2, \dots, a_n = c)$ una bc -trayectoria contenida en $L(D)$ de longitud n , por lo que $d_{L(D)}(b, c) \leq n \leq \ell < \kappa$, con $\{b, c\} \subseteq K_2$ y $b \neq c$, lo cual es una contradicción pues K_2 es un (κ, ℓ) -núcleo de $L(D)$.
2. Si $b = c$, tenemos por hipótesis que existe una flecha $d \in K_2$ con $b \neq d$ tal que b y d tienen el mismo vértice final x . Así, tenemos que $\vec{\mathcal{J}}^* = (d, a_1, a_2, \dots, a_n = c = b)$ es una db -trayectoria dirigida contenida en $L(D)$ de longitud $n \leq \ell < \kappa$, con $\{b, d\} \subseteq K_2$ y $b \neq d$ lo cual es una contradicción pues K_2 es un (κ, ℓ) -núcleo de $L(D)$.

Por lo tanto $x \notin f^*(K_2)$.

Por lo tanto $f^*(K_1) \neq f^*(K_2)$ y así f es inyectiva.

CAPÍTULO II

EXISTENCIA DE κ -NÚCLEOS EN
DIGRÁFICAS**DEFINICIÓN 2.1**

Sea D una digráfica, una subdigráfica H es generadora de D , si contiene a todos los vértices de D .

DEFINICIÓN 2.2

Sea D una digráfica, una flecha $(u_1, u_2) \in F(D)$ es llamada *simétrica* si $(u_2, u_1) \in F(D)$ y es llamada *asimétrica* si $(u_2, u_1) \notin F(D)$.

La *parte simétrica* de D es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son todas las flechas simétricas de D y se denota por $\text{Sim}(D)$.

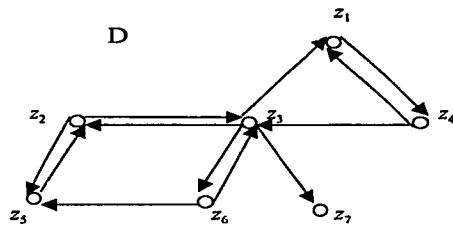
La *parte asimétrica* de D es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son todas las flechas asimétricas de D y se denota por $\text{Asim}(D)$.

Estos conceptos se ilustran en las digráficas D , D_1 y D_2 de la Figura 2.1, en donde:

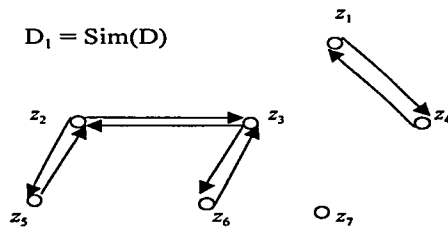
$$\begin{aligned} V(D) = V(D_1) = V(D_2) &= \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\} \\ F(D) &= \{(z_1, z_4), (z_4, z_1), (z_4, z_3), (z_3, z_1), (z_3, z_7), (z_3, z_6), (z_6, z_3), (z_3, z_2), \\ &\quad (z_2, z_3), (z_6, z_5), (z_5, z_2), (z_2, z_5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 \text{ es la parte Simétrica de } D \text{ y} \\ F(D_1) &= \{(z_1, z_4), (z_6, z_3), (z_3, z_2), (z_5, z_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 \text{ es la parte Asimétrica de } D \text{ y} \\ F(D_2) &= \{(z_4, z_3), (z_6, z_5), (z_3, z_7), (z_3, z_1)\} \end{aligned}$$



$$D_1 = \text{Sim}(D)$$



$$D_2 = \text{Asim}(D)$$

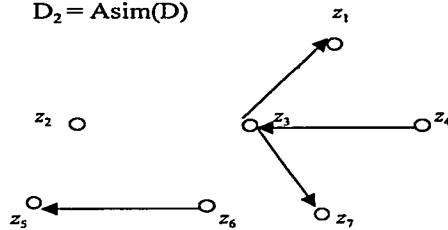


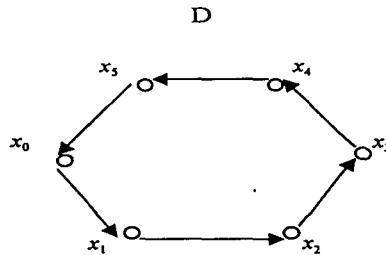
Figura 2.1

DEFINICIÓN 2.3

Una digráfica D es llamada *cíclicamente ℓ -partita* ($\ell \geq 2$) si existe una partición de $V(D)$, $V(D) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{\ell-1}$, tal que si $(u, v) \in F(D)$, entonces $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$ (notación mod ℓ).

Para $\ell=2$, diremos que D es una digráfica bipartita.

La digráfica D de la Figura 2.2 cumple con ser cíclicamente 3-partita, donde: $V_0 = \{x_0, x_3\}$, $V_1 = \{x_1, x_4\}$ y $V_2 = \{x_2, x_5\}$ es una partición de $V(D)$

**DEFINICIÓN 2.4**

Sea D una digráfica, D es *núcleo-perfecta* si toda subdigráfica inducida tiene núcleo.

DEFINICIÓN 2.5

Sea D una digráfica, D es *núcleo imperfecta crítica* si D no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia tiene núcleo.

LEMA 2.1 [8]

Sea D una digráfica, todo camino dirigido cerrado de longitud $\neq 0 \pmod{\ell}$, $\ell \geq 2$, contiene un ciclo dirigido de longitud $\neq 0 \pmod{\ell}$.

Demostración:

Por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado.

(i) Base de inducción.

Sea \mathcal{C} un camino dirigido cerrado tal que $l(\mathcal{C}) = 2$ y $l(\mathcal{C}) \neq 0 \pmod{\ell}$, para $\ell \geq 3$, entonces $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_0)$ y así \mathcal{C} ya es un ciclo dirigido.

Sea \mathcal{C} un camino dirigido cerrado tal que $l(\mathcal{C}) = 3$. Para $\ell = 2$, $l(\mathcal{C}) \neq 0 \pmod{\ell}$, entonces $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, v_0)$ ya es un ciclo dirigido.

(ii) Supongamos que todo camino dirigido cerrado \mathcal{C} con $l(\mathcal{C}) < n$ y $l(\mathcal{C}) \neq 0 \pmod{\ell}$ contiene un ciclo dirigido \mathcal{C}' con $l(\mathcal{C}') \neq 0 \pmod{\ell}$.

(iii) Sea \mathcal{C} un camino dirigido cerrado con $l(\mathcal{C}) = n$ y $l(\mathcal{C}) \neq 0 \pmod{\ell}$, por demostrar que \mathcal{C} contiene un ciclo dirigido con longitud $\neq 0 \pmod{\ell}$.

Sea $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_0)$.

Observemos lo siguiente:

- Si $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$, entonces \mathcal{C} ya es un ciclo (Figura 2.3)

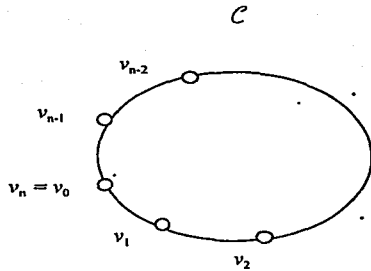


Figura 2.3

- Si $v_i = v_j$ para algún $i < j$, se tiene que

$C = (v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j = v_i, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}, v_0)$ (Figura 2.4), entonces

$C = C_1 \cup C_2$ donde:

$C_1 = (v_0, v_1, \dots, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}, v_0)$ y $C_2 = (v_i = v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$

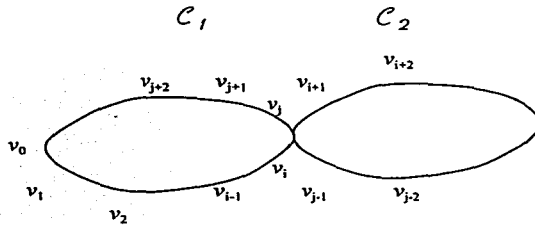


Figura 2.4

Observemos que por la definición de C_1 y C_2 se tiene que $l(C) = l(C_1) + l(C_2)$, así, $l(C_i) < n$ para $i \in \{1,2\}$ y $l(C_i) \not\equiv 0 \pmod{k}$ para algún $i \in \{1,2\}$

(pues si $l(\mathcal{C}_i) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ con $i \in \{1,2\}$, se tendría que $l(\mathcal{C}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ lo cual no es cierto).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $l(\mathcal{C}_1) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$, como $l(\mathcal{C}_1) < n$ se sigue de la hipótesis de inducción que \mathcal{C}_1 contiene un ciclo dirigido \mathcal{C}' con $l(\mathcal{C}') \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$, pero \mathcal{C}_1 está contenido en \mathcal{C} , por lo tanto \mathcal{C} contiene a \mathcal{C}' .

TEOREMA 2.1

Sea D una digráfica fuertemente conexa, D es cíclicamente κ -partita si y sólo si existe una subdigráfica generadora fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$.

Demostración:

Sea D una digráfica fuertemente conexa.

\Rightarrow] Supongamos que D es cíclicamente κ -partita, entonces todo ciclo dirigido de D tiene una longitud $\equiv 0 \pmod{\kappa}$. Como D es fuertemente conexa entonces la subdigráfica $H = D$ satisface las propiedades requeridas.

\Leftarrow] Supongamos que existe una subdigráfica fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo con longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$. Por demostrar que D es cíclicamente κ -partita.

Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i < \kappa$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definido como sigue:

$$N_i = \{ z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0 z\text{-camino dirigido contenido en } H \text{ de longitud } \equiv i \pmod{\kappa} \}.$$

Así se cumple:

(i) Afirmación: $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$, con $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, \kappa - 1\}$.

Supongamos por contradicción que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$ para algunos i, j con $i \neq j$; entonces existe $z \in V(D)$ tal que $z \in N_i$ y $z \in N_j$, así, existe un $m_0 z$ -camino dirigido \mathcal{J}_1 contenido en H tal que $l(\mathcal{J}_1) \equiv i \pmod{\kappa}$ y existe un $m_0 z$ -camino dirigido \mathcal{J}_2 contenido en H tal que $l(\mathcal{J}_2) \equiv j \pmod{\kappa}$.

Como H es fuertemente conexa, existe un zm_0 -camino dirigido \mathcal{J}_3 contenido en H, de donde $(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3)$ y $(\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$ son caminos dirigidos cerrados contenidos en H con $l(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3) \equiv l(\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3) \equiv 0 \pmod{\kappa}$. Pues si suponemos que $l(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$; como $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3$ es un camino dirigido cerrado, entonces por el Lema 2.1 se tendría que contiene un ciclo dirigido \mathcal{C} de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por las hipótesis del Teorema 2.1 se tendría que \mathcal{C} tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$ lo cual es imposible pues \mathcal{C} esta contenido en H. Análogamente $l(\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3) \equiv 0 \pmod{\kappa}$.

Y como $l(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3) \equiv l(\mathcal{J}_1) + l(\mathcal{J}_3) \pmod{\kappa}$ y $l(\mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3) \equiv l(\mathcal{J}_2) + l(\mathcal{J}_3) \pmod{\kappa}$, tenemos que $l(\mathcal{J}_1) + l(\mathcal{J}_3) \equiv l(\mathcal{J}_2) + l(\mathcal{J}_3) \pmod{\kappa}$; de donde $l(\mathcal{J}_1) \equiv l(\mathcal{J}_2) \pmod{\kappa}$, pero esto es una contradicción pues $l(\mathcal{J}_1) \equiv i \pmod{\kappa}$ y $l(\mathcal{J}_2) \equiv j \pmod{\kappa}$ con $i \neq j$ y $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, \kappa-1\}$. Por lo tanto $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

(ii) Afirmación: Cada N_i es un conjunto independiente de D.

Sea $\{x, y\} \subseteq N_i$ y supongamos por contradicción que $(x, y) \in F(D)$. Sean \mathcal{J}_x un m_0x -camino dirigido contenido en H y \mathcal{J}_y un m_0y -camino dirigido contenido en H tal que $l(\mathcal{J}_x) \equiv l(\mathcal{J}_y) \equiv i \pmod{\kappa}$. Como H es fuertemente conexa existe un ym_0 -camino dirigido \mathcal{J} contenido en H. Así, tenemos que $\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado con $l(\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$. Pues si suponemos que $l(\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}) \not\equiv 0$; como $\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado entonces por el Lema 2.1 contiene un ciclo dirigido \mathcal{C} de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por las hipótesis del Teorema 2.1 se tendría que \mathcal{C} tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$ lo cual es imposible pues \mathcal{C} está contenido en H. Además, $l(\mathcal{J}_x \cup \mathcal{J}) \equiv l(\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}) \pmod{\kappa}$ (pues $l(\mathcal{J}_x) \equiv l(\mathcal{J}_y) \equiv i \pmod{\kappa}$), de donde $l(\mathcal{J}_x \cup \mathcal{J}) \equiv l(\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$. Por otro lado $\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado con $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ (pues si suponemos que $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$; como $\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado, entonces por el Lema 2.1 contiene un ciclo dirigido \mathcal{C} de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por las hipótesis del Teorema 2.1 se tendría que \mathcal{C} tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$ lo cual es imposible pues \mathcal{C} a lo más tiene una flecha en $F(D) - F(H)$; pero $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \equiv l(\mathcal{J}_x \cup \mathcal{J}) + 1 \equiv 1 \pmod{\kappa}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada N_i es un conjunto independiente.

(iii) Afirmación: Toda flecha con vértice inicial en N_i tiene vértice final en N_{i+1} (notación módulo κ) y $V(D) = \cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i$.

Sea $(x, y) \in F(D)$ con vértice inicial en N_i , de (ii) se sigue que $y \in N_j$ para algún $j \in (\{0, 1, 2, \dots, \kappa-1\} - \{i\})$.

Sea \mathcal{J}_x un $m_0 x$ -camino dirigido contenido en H con $l(\mathcal{J}_x) \equiv i \pmod{\kappa}$ y \mathcal{J}_y un $m_0 y$ -camino dirigido contenido en H con $l(\mathcal{J}_y) \equiv j \pmod{\kappa}$. Como H es fuertemente conexa existe un ym_0 -camino dirigido \mathcal{J} contenido en H ; así, se tiene que $\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado con a lo más una flecha en $(F(D) - F(H))$. Además, $l(\mathcal{J}_x \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ (pues si suponemos que $l(\mathcal{J}_x \cup \mathcal{J}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$); como $\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado entonces por el Lema 2.1 se tiene que $\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}$ contiene un ciclo dirigido \mathcal{C} de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por las hipótesis del Teorema 2.1 entonces \mathcal{C} tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$ lo cual es imposible pues \mathcal{C} está contenido en H . Se tiene también que $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ (pues si suponemos que $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$); como $\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}$ es un camino dirigido cerrado entonces por el Lema 2.1 se tendría que contiene un ciclo dirigido \mathcal{C} de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por las hipótesis del Teorema 2.1 se tiene que \mathcal{C} tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$, lo cual es una contradicción).

Ya que $l(\mathcal{J}_y \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ y $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y) \cup \mathcal{J}) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ entonces se tiene que $l(\mathcal{J}_x \cup (x, y)) \equiv l(\mathcal{J}_y) \equiv j \pmod{\kappa}$, de donde $l(\mathcal{J}_x) + 1 \equiv l(\mathcal{J}_y) \pmod{\kappa}$, es decir, $i + 1 \equiv j \pmod{\kappa}$; pero como $j \in (\{0, 1, 2, \dots, \kappa-1\} - \{i\})$ se sigue que $j = i + 1$. Por lo tanto $N_j = N_{i+1}$ y así $y \in N_{i+1}$.

Por último: $V(D) = \cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i$.

⊆] Sea $x \in V(D)$, por demostrar que $x \in \cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i$.

Como H es fuertemente conexa existe un $m_0 x$ -camino dirigido contenido en H con longitud $\equiv i \pmod{\kappa}$ para alguna $i \in \{0, 1, \dots, \kappa-1\}$. Por lo tanto $x \in \cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i$.

⊇] $\cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i \subseteq V(D)$ se sigue inmediatamente por definición de N_i .

Así, $V(D) = \cup_{i=0}^{\kappa-1} N_i$.

Por lo tanto de (i) (ii) y (iii) se sigue que D es cíclicamente κ -partita.

Como una consecuencia directa del Teorema 2.1 se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2

Sea D una digráfica, $\kappa \geq 2$. Si H es una subdigráfica de D tal que todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$, entonces para cada componente fuertemente conexa α de H , la digráfica $D[V(\alpha)]$ es cíclicamente κ -partita.

COROLARIO 2.1

Sea D una digráfica. Si H es una digráfica de D tal que todo ciclo dirigido impar tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$, entonces para cada componente fuertemente conexa C de H la digráfica $D[V(C)]$ es una digráfica bipartita.

Demostración:

Se sigue del Teorema 2.2 tomando $\kappa = 2$.

COROLARIO 2.2

Sea D una digráfica fuertemente conexa. D es una digráfica bipartita si y sólo si existe una subdigráfica generadora fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo dirigido impar tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$.

Demostración:

Se sigue del Teorema 2.1 tomando $\kappa = 2$.

Sobre la existencia de κ -núcleos en digráficas.

TEOREMA 2.3

Sea D una digráfica. Si existe una subdigráfica generadora fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$, entonces D tiene un κ -núcleo.

Demostración:

Sea D una digráfica y H una subdigráfica de D como en las hipótesis. Del Teorema 2.1 se sigue que D es cíclicamente ℓ -partita fuertemente conexa; sea $N_0, N_1, \dots, N_{\ell-1}$ una partición de los vértices de D , de la Definición 1.36 se sigue que cada N_i es un ℓ -núcleo de D .

TEOREMA 2.4

Sea D una digráfica tal que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\ell}$ tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene un ℓ -núcleo.

Demostración:

Tomando $H = \text{Asim}(D)$, se cumplen las hipótesis del Teorema 2.1 y por el Teorema 2.3 se tiene que D tiene un ℓ -núcleo.

Y como una consecuencia directa tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.5 [8]

Sea D una digráfica tal que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. Supongamos además que para todo ciclo dirigido γ tal que $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ satisface (a) o (b), donde:

- (a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D .
- (b) γ tiene al menos ℓ flechas simétricas.

Entonces D tiene un ℓ -núcleo.

COROLARIO 2.3 [14]

Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{\ell}$, $\ell \geq 2$. Entonces D tiene un ℓ -núcleo.

COROLARIO 2.4

Sea D una digráfica. Si existe una subdigráfica generadora fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo dirigido impar tiene al menos dos flechas en $(F(D) - F(H))$, entonces D es núcleo-perfecta.

Demostración:

Del Corolario 2.2 se sigue que D es bipartita fuertemente conexa y una digráfica bipartita es núcleo-perfecta.

Otra consecuencia del Teorema 2.1 es el siguiente resultado de Duchet.

TEOREMA 2.6

Sea D una digráfica. Si todo ciclo dirigido impar en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es núcleo-perfecta.

Demostración: (Por contradicción)

Supongamos que D no es núcleo-perfecta, entonces D contiene una subdigráfica inducida $H \subseteq D$, que es núcleo imperfecta crítica. $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa, entonces por Corolario 2.4 se tiene que H es núcleo perfecta pero esto es una contradicción, pues H es núcleo imperfecta crítica.

OBSERVACIÓN 2.1 [6]

Si para cada componente fuertemente conexa α de $\text{Asim}(D)$, $D[V(\alpha)]$ es bipartita, entonces D es una digráfica núcleo-perfecta.

La demostración de esta Observación queda fuera de los objetivos del presente trabajo, si el lector desea ver la demostración se indica la referencia para ello.

CAPÍTULO III

*K-NÚCLEOS EN LA DIGRÁFICA DE LÍNEAS***DEFINICIÓN 3.1**

Sea G una gráfica, una digráfica D es una *orientación* de G si D se obtiene cambiando cada arista de G por una flecha con al menos una de las dos direcciones.

DEFINICIÓN 3.2

Sea D una digráfica, la *gráfica subyacente* de D es la gráfica que se obtiene de D cambiando cada flecha asimétrica o cada par de flechas simétricas por una arista. Y se denota por G_D .

Así, para la gráfica G y la digráfica D de la Figura 3.1, se tiene que D es una orientación de G o bien G es la gráfica subyacente de D

DEFINICIÓN 3.3

Sean $\mathcal{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ un ciclo en una gráfica G , $\{i, j\} \subseteq V(\mathcal{C})$. La trayectoria de i a j , $[i, i+1, i+2, \dots, j]$, es la *ij-trayectoria contenida en \mathcal{C}* y se denota por $[i, \mathcal{C}, j]$.

DEFINICIÓN 3.4

Sean $\vec{\mathcal{C}} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ un ciclo dirigido en una digráfica D , $\{i, j\} \subseteq V(\vec{\mathcal{C}})$. La trayectoria dirigida de i a j , $(i, i+1, i+2, \dots, j)$, es la *ij-trayectoria dirigida contenida en $\vec{\mathcal{C}}$* y se denota por $(i, \vec{\mathcal{C}}, j)$.

DEFINICIÓN 3.5

Sea \mathcal{C} un ciclo en una gráfica G , una *cuerda* de \mathcal{C} es una arista $[i, j] \in (A(G) - A(\mathcal{C}))$ tal que $1 < l([i, \mathcal{C}, j]) < l(\mathcal{C}) - 1$ con $\{i, j\} \subseteq V(\mathcal{C})$.

DEFINICIÓN 3.6

Sea $\vec{\mathcal{C}}$ un ciclo dirigido en una digráfica D , una *cuerda* de $\vec{\mathcal{C}}$ es una *flecha* $(i, j) \in (F(D) - F(\vec{\mathcal{C}}))$ tal que $1 < l((i, \vec{\mathcal{C}}, j)) < l(\vec{\mathcal{C}}) - 1$ y $\{i, j\} \subseteq V(\vec{\mathcal{C}})$.

Así, $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, x_4, x_5, x_0)$ es un ciclo contenido en la gráfica G de la Figura 3.1, en donde $[x_1, \mathcal{C}, x_4]$ es una x_1x_4 -trayectoria contenida en \mathcal{C} , mientras que $[x_2, x_5]$ es una cuerda de \mathcal{C} .

$\vec{\mathcal{C}} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0)$ es un ciclo dirigido contenido en la digráfica D de la Figura 3.1, en donde $(x_1, \vec{\mathcal{C}}, x_4)$ es una x_1x_4 -trayectoria dirigida contenida en $\vec{\mathcal{C}}$ mientras que (x_2, x_5) es una cuerda de $\vec{\mathcal{C}}$.

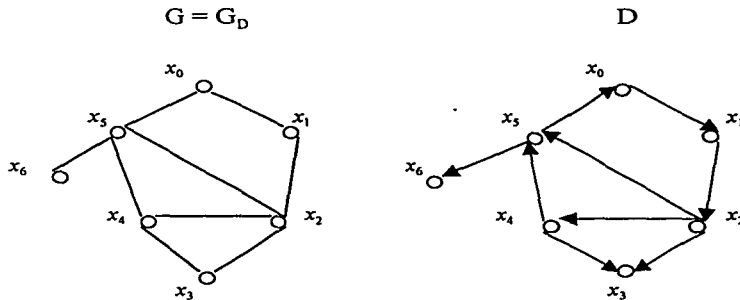


Figura 3.1

LEMA 3.1

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas y $\mathcal{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ un ciclo en $L(G)$. Si $[i, j] \in (A(L(G)) - A(\mathcal{C}))$ con $j \notin \{i-2, i+2\}$, entonces se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- (a) $\{[s-1, s+1], [s, t]\} \subseteq A(L(G))$ con $(s=i \text{ y } t \in \{j-1, j+1\})$ o $(s=j \text{ y } t \in \{i-1, i+1\})$.
- (b) $\{[i-1, i+1], [j-1, j+1]\} \subseteq A(L(G))$.
- (c) $L(G) [\{s-1, s, t, t+1\}] \cong K_4$ con $s \in \{i, i+1\}$ y $t \in \{j-1, j\}$.

Demostración:

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas, \mathcal{C} un ciclo en $L(G)$ y $[i, j] \in (A(L(G)) - A(\mathcal{C}))$ como en las hipótesis del Lema y supongamos que $i = [u, v] \in A(G)$. Consideremos cuatro posibles casos.

Caso 1 Si $i - 1$ e $i + 1$ inciden en u . Fig. 3.2

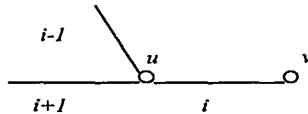
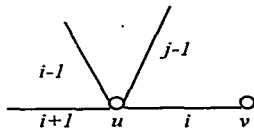


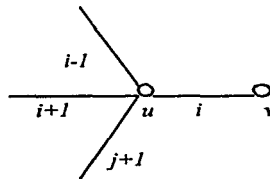
Figura 3.2

Se sigue inmediatamente que $[i - 1, i + 1] \in A(L(G))$.

- Si $j - 1$ (respectivamente $j + 1$) incide en algún vértice extremo de i (u o v) entonces $[i, j - 1] \in A(L(G))$ (respectivamente $[i, j + 1] \in A(L(G))$). Por lo tanto se cumple (a) tomando $s = i$ y $t = j - 1$ (respectivamente $s = i$ y $t = j + 1$). Así $\{[s - 1, s + 1], [s, t]\}$ con $s = i$ y $t \in \{j - 1, j + 1\}$. La Figura 3.3 muestra estos posibles casos.



$j-1$ incide en u



(respectivamente $j+1$ incide en u)

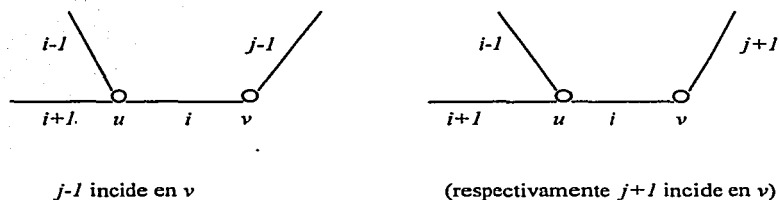


Figura 3.3

- Si $j-1$ y $j+1$ no son adyacentes a i ; sea w un punto extremo de j tal que $w \notin \{u, v\}$. Ya que $j-1$ y $j+1$ no son adyacentes a i pero $j-1$ y $j+1$ son adyacentes a j se sigue que $j-1$ y $j+1$ inciden en w ; así, $[j-1, j+1] \in A(L(G))$. Por lo tanto cumple (b); es decir, $\{[i-1, i+1], [j-1, j+1]\} \subseteq A(L(G))$, Figura 3.4

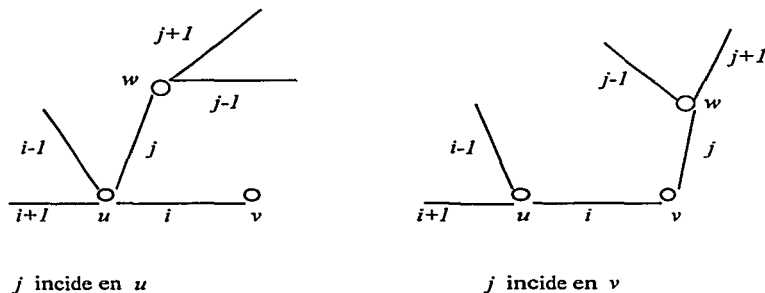


Figura 3.4

Caso 2 Si $i-1$ e $i+1$ inciden en v .

Se prueba exactamente como en el Caso 1 intercambiando u con v .

Caso 3 Si $i - 1$ incide en u e $i + 1$ incide en v . (Figura 3.5)

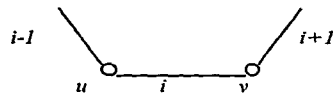


Figura 3.5 .

Como $[i, j] \in A(L(G))$, se sigue que j incide en u o j incide en v .

- Supongamos que j incide en u . Figura 3.6

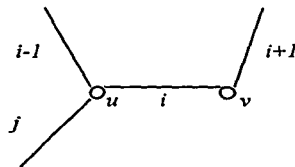


Figura 3.6

- Si $j - 1$ (respectivamente $j + 1$) incide en u , entonces se cumple (c) con $s = i$ y $t = j - 1$ (respectivamente $s = i$ y $t = j$). Estos casos se observan en la Figura 3.7

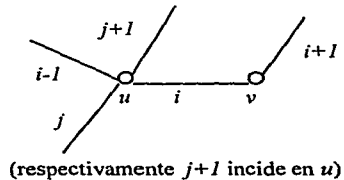
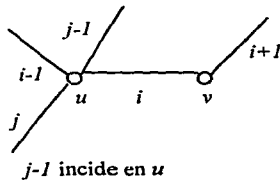


Figura 3.7

- Si $j - 1$ y $j + 1$ inciden en el otro punto extremo de j entonces $[j - 1, j + 1] \in A(L(G))$ y así se cumple (a) con $s = j$ y $t = i - 1$, Figura 3.8

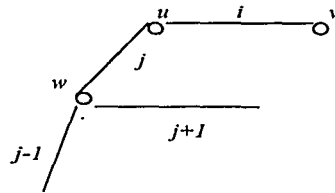


Figura 3.8

- Supongamos ahora que j incide en v , Figura 3.9

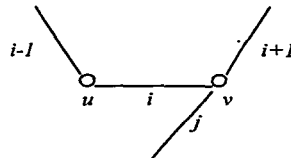


Figura 3.9

- Si $j - 1$ (respectivamente $j + 1$) incide en v , entonces se cumple (c) con $s = i + 1$ y $t = j - 1$ (respectivamente $s = i + 1$ y $t = j$). Ver Figura 3.10

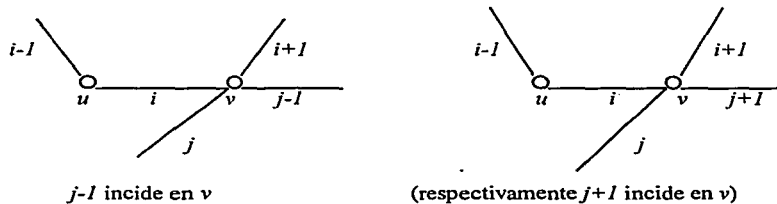


Figura 3.10

- Si $j - 1$ y $j + 1$ inciden en el otro punto extremo de j tenemos que $[j - 1, j + 1] \in A(L(G))$, por lo que se cumple (a) con $s = j$ y $t = i + 1$.
Figura 3.11

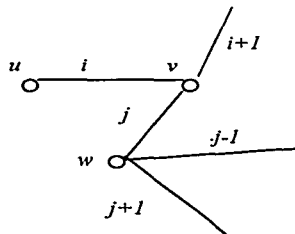


Figura 3.11

Caso 4 Si $i - 1$ incide en v e $i + 1$ incide en u .
Se procede como en el Caso 3 intercambiando u con v .

LEMA 3.2

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas y $\mathcal{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ un ciclo en $L(G)$. Si existe $i, 0 \leq i \leq n-1$ tal que $\{[i-1, i+1], [i, i+2]\} \subseteq A(L(G))$, entonces $\{[i-1, i+2], [i, i+3], [i+1, i+3], [i-2, i], [i-2, i+1]\} \cap A(L(G)) \neq \emptyset$.

Demostración:

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas e $i \in A(G)$ como en las hipótesis. Supongamos que $i = [u, v]$ (Figura 3.12) y consideremos los cuatro posibles casos.

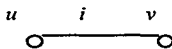


Figura 3.12

Caso 1 Si $i-1$ e $i+1$ inciden en u , Figura 3.13

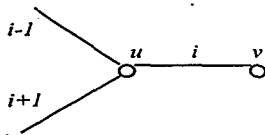


Figura 3.13

Sea w el otro extremo de $i+1$ diferente de u . Ya que $[i, i+2] \in A(L(G))$ se tiene que $i+2$ incide en u o $i+2$ incide en v , Figura 3.14

- Si $i+2$ incide en u se sigue que $[i-1, i+2] \in A(L(G))$. (Figura 3.14(a))
- Si $i+2$ incide en v se sigue que el otro extremo de $i+2$ es w . (Figura 3.14(b))

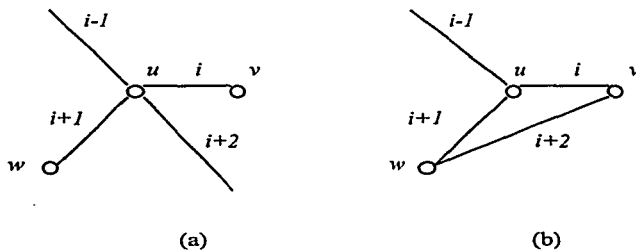
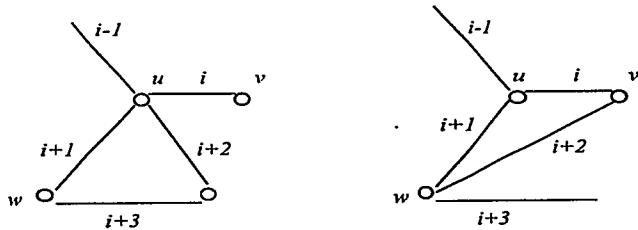


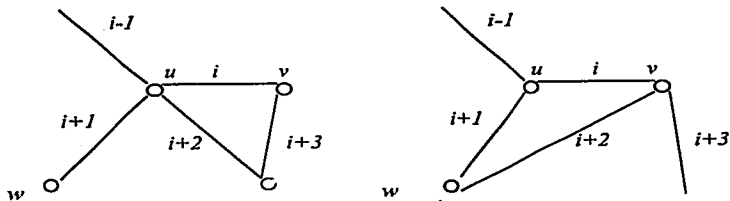
Figura 3.14

Y como $[i+2, i+3] \in A(L(G))$ se tiene que $i+3$ incide en w o $i+3$ incide en v .

- Si $i + 3$ incide en w , se sigue que $[i + 1, i + 3] \in A(L(G))$
(Figura 3.15 (a))
- Si $i + 3$ incide en v , se sigue que $[i, i + 3] \in A(L(G))$
(Figura 3.15 (b))



(a) $i+3$ incide en w



(b) $i+3$ incide en v

Figura 3.15

Caso 2 Si $i - 1$ e $i + 1$ inciden en v .
Se sigue como en el Caso 1 intercambiando u con v .

Caso 3 Si $i - 1$ incide en u e $i + 1$ incide en v .

Sea w el otro punto extremo de $i - 1$ diferente de u ; como $[i - 1, i + 1] \in A(L(G))$ (por hipótesis) se tiene que w es el otro punto extremo de $i + 1$ diferente de v . Figura 3.16

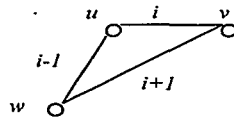
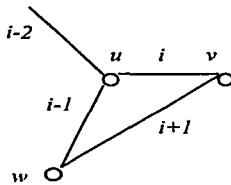


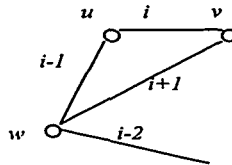
Figura 3.16

Ahora, como $[i - 2, i - 1] \in A(L(G))$, se tiene que $i - 2$ incide en u o $i - 2$ incide en w .

- Si $i - 2$ incide en u , se tiene que $[i - 2, i] \in A(L(G))$, Figura 3.17(a)
- Si $i - 2$ incide en w , se tiene que $[i - 2, i + 1] \in A(L(G))$, Figura 3.17(b)



(a)



(b)

Figura 3.17

Caso 4 Si $i-1$ incide en v e $i+1$ incide en u .
Se sigue como en el Caso 3 intercambiando u con v .

LEMA 3.3

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas y D una orientación de $L(G)$ tal que todo triángulo dirigido tiene dos flechas simétricas. Si todo ciclo dirigido de D , $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene una cuerda (i, j) tal que cumple al menos una de las siguientes propiedades:

- (1) $j \notin \{i-2, i+2\}$
- (2) Si $j \in \{i-2, i+2\}$ entonces existe otra cuerda de \vec{C} (r, s) con $(r, s) \neq (j, i)$.

Entonces todo ciclo dirigido \vec{C} de D , con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos flechas simétricas, ($\kappa \geq 3$).

Demostración: (Por inducción sobre $l(\vec{C})$)

Sean G , $L(G)$ y D como en las hipótesis y tomemos un ciclo dirigido \vec{C} de D con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$.

(i) Base de inducción.

Si $l(\vec{C}) = 2$, se sigue inmediatamente que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.
Si $l(\vec{C}) = 3$, se sigue de las hipótesis que \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

(ii) Hipótesis de inducción.

Supongamos que todo ciclo dirigido \vec{C} de D con $l(\vec{C}) < n$ y $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos flechas simétricas.

(iii) Sea $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, n-1, 0)$ un ciclo dirigido de D con $l(\vec{C}) = n$, $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y (i, j) una cuerda de \vec{C} como en las hipótesis.

Consideremos los dos posibles casos:

Caso 1 Si $j \notin \{i-2, i+2\}$

Consideremos a \mathcal{C} (ciclo subyacente de \vec{C}) y $[i, j] \in A(L(G))$, una cuerda de \mathcal{C} , del Lema 3.1 se sigue que se cumple al menos una de las tres condiciones (a), (b) o (c).

Caso 1.a Supongamos que se cumple (a) del Lema 3.1, se tienen cuatro posibilidades que serán analizadas.

Caso 1.a.1 Si $\{[i-1, i+1], [i, j-1]\} \subseteq A(L(G))$
 (Considerando $s=i$ y $t=j-1$), Figura 3.18

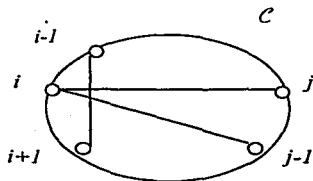


Figura 3.18

Consideremos los siguientes ciclos en $L(G)$, Figura 3.19

- $C_1 = [i, j] \cup [j, C, i]$ (Figura 3.19(a))
- $C_2 = [j, i] \cup [i, C, j]$ (Figura 3.19(a))
- $C_3 = [i, j-1] \cup [j-1, C, i]$ (Figura 3.19(b))
- $C_4 = [j-1, i] \cup [i, C, j-1]$ (Figura 3.19(b))

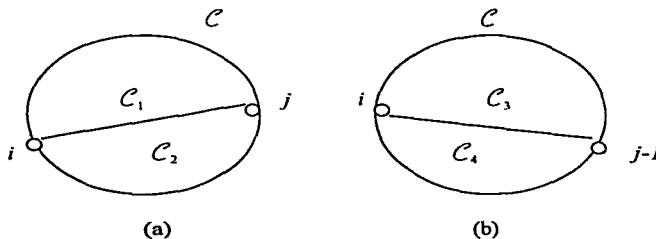


Figura 3.19

(Observemos que $l(\mathcal{C}_i) < n$ para toda $i \in \{1,2,3,4\}$)

Caso 1.a.1.1

Supongamos que $l(\mathcal{C}_1) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y $l(\mathcal{C}_2) \not\equiv 0 \pmod{k}$, Figura 3.19(a)

- Si $(i, j) \in \text{Sim}(D)$ se tiene que $\vec{\mathcal{C}}_1 = (i, j) \cup (j, \vec{\mathcal{C}}_1 i)$ y $\vec{\mathcal{C}}_2 = (j, i) \cup (i, \vec{\mathcal{C}}_2 j)$ son ciclos dirigidos de D ; y ya que $l(\mathcal{C}_i) < n$ para $i \in \{1,2\}$, se sigue de las hipótesis de inducción que ambos ciclos tienen dos flechas simétricas, así, $F(i, \mathcal{C}_1) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$ y $F(j, \vec{\mathcal{C}}_1 i) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$, por lo que $\vec{\mathcal{C}}_1$ tiene dos flechas simétricas (Figura 3.20)

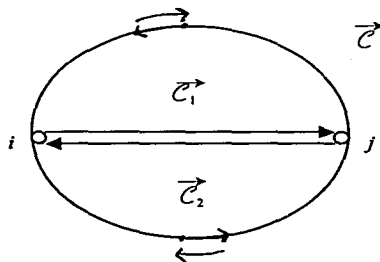


Figura 3.20

- Si $(i, j) \in \text{Asim}(D)$ (respectivamente $(j, i) \in \text{Asim}(D)$) tenemos que $\vec{\mathcal{C}}_1$ (respectivamente $\vec{\mathcal{C}}_2$) es un ciclo dirigido de D ; y ya que $l(\mathcal{C}_i) < n$, $i \in \{1,2\}$ se sigue de las hipótesis de inducción que $\vec{\mathcal{C}}_1$ (respectivamente $\vec{\mathcal{C}}_2$) tiene dos flechas simétricas, las cuales son claramente flechas simétricas de $\vec{\mathcal{C}}$ (Figura 3.21)

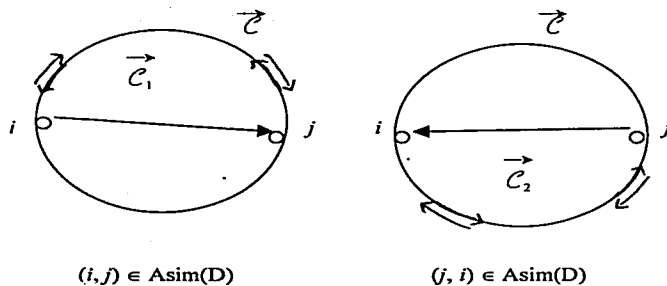


Figura 3.21

Caso 1.a.1.2

Si $l(C_3) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y $l(C_4) \not\equiv 0 \pmod{k}$.

Se procede como en el Caso 1.a.1.1 cambiando $[i, j]$ por $[i, j - 1]$, C_1 por C_3 y C_2 por C_4 (Figura 3.22)

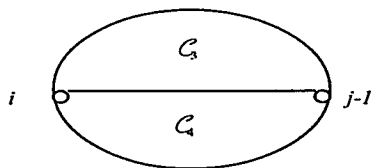


Figura 3.22

Caso 1.a.1.3

Si $l(C_1) \equiv 0 \pmod{\kappa}$

En este caso $l(C_3) \equiv 1 \pmod{\kappa}$ y como $\kappa \geq 3$, $l(C_3) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$; del Caso 1.a.1.2 podemos suponer que $l(C_4) \equiv 0 \pmod{\kappa}$. Ya que $l(C_1) \equiv l(C_4) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ tenemos que $l(C) \equiv -1 \pmod{\kappa}$ y como $\kappa \geq 3$, entonces $l(C) \not\equiv 1 \pmod{\kappa}$, Figura 3.23

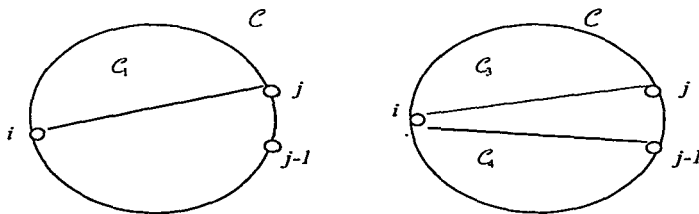


Figura 3.23

Ahora consideremos la arista $[i-1, i+1]$, Figura 3.24

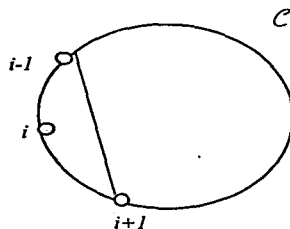
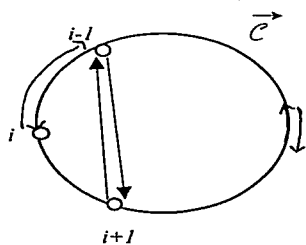
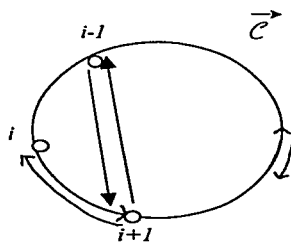


Figura 3.24

- Si $(i-1, i+1) \in \text{Sim}(\mathcal{D})$ el ciclo dirigido $(i-1, i+1) \cup (i+1, \vec{\mathcal{C}} i-1)$ tiene dos flechas simétricas (por hipótesis de inducción y del hecho que $l(\vec{\mathcal{C}}) \equiv 1 \pmod{k}$), entonces $F((i+1, \vec{\mathcal{C}} i-1)) \cap \text{Sim}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$; además tenemos que el triángulo dirigido $(i-1, i, i+1, i-1)$ tiene dos flechas simétricas, lo cual implica que $F((i-1, i, i+1)) \cap \text{Sim}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Así $\vec{\mathcal{C}}$ tiene dos flechas simétricas, Figura 3.25



$(i-1, i) \in \text{Asim}(i-1, i, i+1, i-1)$



$(i+1, i) \in \text{Asim}(i-1, i, i+1, i-1)$

Figura 3.25

- Si $(i-1, i+1) \in \text{Asim}(\mathcal{D})$ el ciclo dirigido $(i-1, i+1) \cup (i+1, \vec{\mathcal{C}} i-1)$ tiene dos flechas simétricas las cuales son flechas simétricas de $\vec{\mathcal{C}}$ Figura 3.26

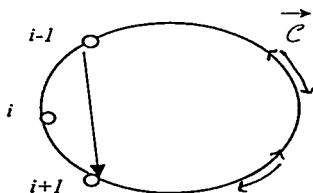


Figura 3.26

- Si $(i + 1, i - 1) \in \text{Asim}(D)$; las dos flechas simétricas del triángulo dirigido $(i - 1, i, i + 1, i - 1)$ son flechas simétricas de \vec{c} , Figura 3.27

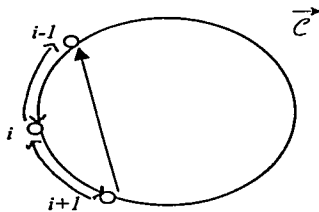


Figura 3.27

Caso 1.a.1.4

Si $l(C_2) \equiv 0 \pmod{\kappa}$.

En este caso tenemos que $l(C_4) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y por lo visto en el Caso 1.a.1.2 podemos suponer que $l(C_3) \equiv 0 \pmod{\kappa}$, así, $l(C_1) \equiv -1 \pmod{\kappa}$ y como $\kappa \geq 3$, se tiene que $l(C_1) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$, Figura 3.28

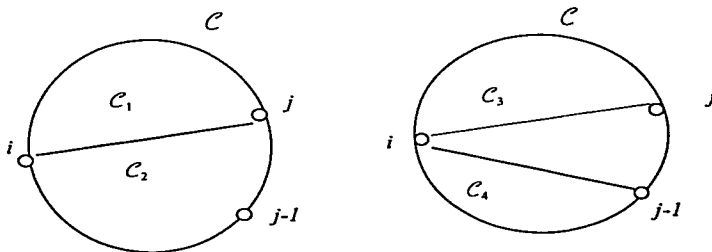


Figura 3.28

- Si $(i, j) \in \text{Asim}(D)$ (respectivamente $(j - 1, i) \in \text{Asim}(D)$) tenemos que el ciclo dirigido $\vec{C}_1 = (i, j) \cup (j, \vec{C}_1 i)$ (respectivamente $\vec{C}_4 = (j - 1, i) \cup (i, \vec{C}_4 j - 1)$) tiene dos flechas simétricas las cuales son flechas simétricas de \vec{C} Figura 3.29

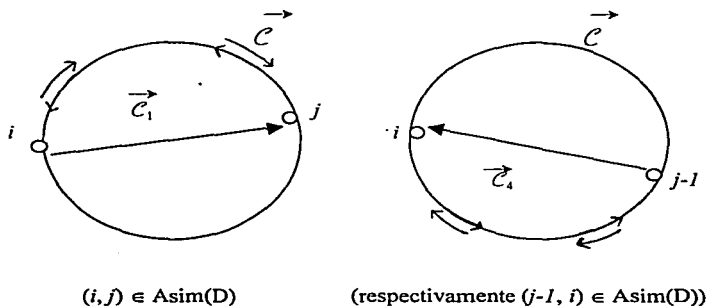


Figura 3.29

Podemos suponer que $\{(j, i), (i, j - 1)\} \subseteq F(D)$, por lo que obtenemos el triángulo dirigido $(j, i, j - 1, j)$, el cual tiene dos flechas simétricas. Figura 3.30

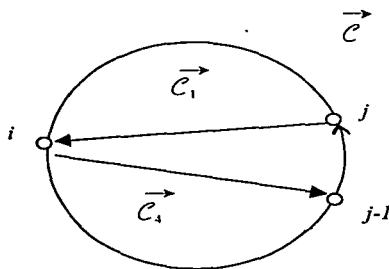


Figura 3.30

- Si $\{(j, i), (i, j-1)\} \subseteq F(\text{Sim}(D))$ entonces \vec{c}_1 y \vec{c}_4 tienen cada uno dos flechas simétricas. De este modo $F(j, \vec{c}_1, i) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$ y $F(i, \vec{c}_4, j-1) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$, por lo que \vec{c} tiene dos flechas simétricas, Figura 3.31

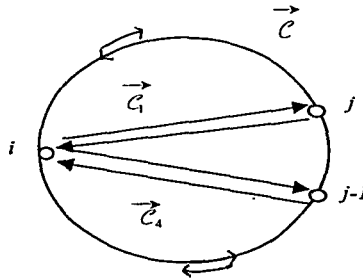


Figura 3.31

- Si $\{(j, i), (j-1, j)\} \subseteq F(\text{Sim}(D))$ tenemos que $F(j, \vec{c}_1, i) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$, (pues \vec{c}_1 tiene dos flechas simétricas) lo cual implica que \vec{c} tiene dos flechas simétricas (la de la intersección y $(j-1, j)$), Figura 3.32

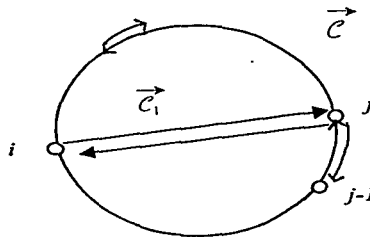


Figura 3.32

- Si $\{(i, j-1), (j-1, j)\} \subseteq F(\text{Sim}(D))$ tenemos que $F(i, \vec{C}_i j-1) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$, (pues \vec{C}_i tiene dos flechas simétricas por hipótesis de inducción), lo cual implica que \vec{C}_i tiene dos flechas simétricas (la de la intersección y $(j-1, j)$), Figura 3.33

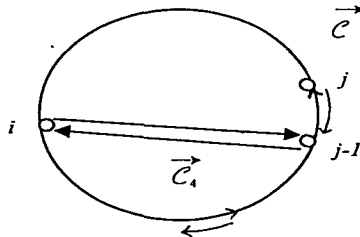


Figura 3.33

Caso 1.a.2 Si $\{(i-1, i+1), [i, j+1]\} \subseteq A(L(G))$
(donde $s=i$ y $t=j+1$).

Se procede como en el Caso 1.a.1 cambiando $j-1$ por $j+1$.

Caso 1.a.3 Si $\{(j-1, j+1), [j, i-1]\} \subseteq A(L(G))$
(donde $s=j$ y $t=i-1$).

Se procede como en el Caso 1.a.1 intercambiando i con j .

Caso 1.a.4 Si $\{(j-1, j+1), [j, i+1]\} \subseteq A(L(G))$
(donde $s=j$ y $t=i+1$).

Se procede como en el caso 1.a.2 intercambiando i con j .

Caso 1.b

Supongamos que se cumple la propiedad (b) del Lema 3.1. Es decir, $\{(i-1, i+1), [j-1, j+1]\} \subseteq A(L(G))$, Figura 3.34

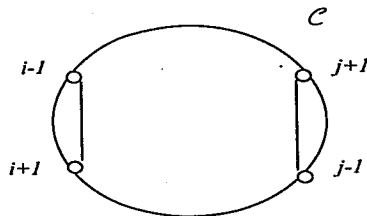
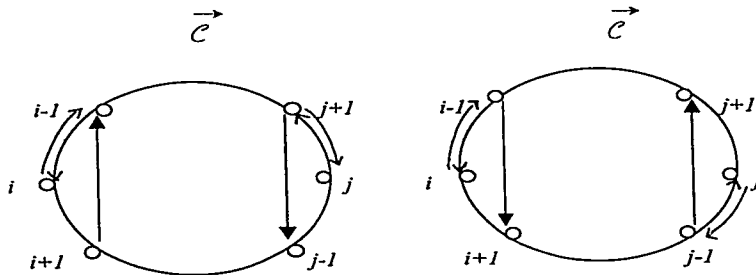
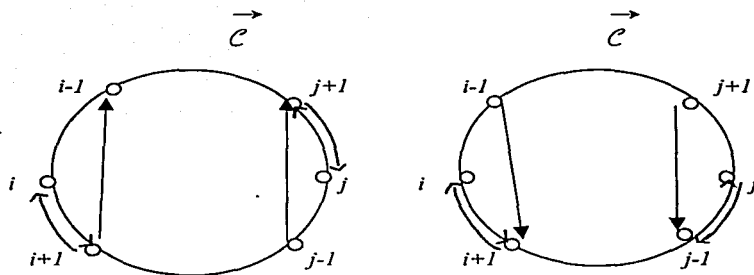


Figura 3.34

A) Si $\{(i+1, i-1), (j+1, j-1)\} \subseteq F(D)$, tenemos los triángulos dirigidos $(i-1, i, i+1, i-1)$ y $(j-1, j, j+1, j-1)$; cada uno de los cuales tiene dos flechas simétricas. Así, $F(i-1, i, i+1) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$ y $F(j-1, j, j+1) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$. Por lo tanto \vec{c} tiene dos flechas simétricas. Estos posibles casos se muestran en la Figura 3.35





En este caso se tiene que $((i-1, i) \in \text{Sim}(D) \text{ o } (i, i+1) \in \text{Sim}(D))$ y $((j-1, j) \in \text{Sim}(D) \text{ o } (j, j+1) \in \text{Sim}(D))$

Figura 3.35

B) Supongamos que $(j-1, j+1) \in \text{Asim}(D)$.

Sea $\vec{C}_s = (j-1, j+1) \cup (j+1, \vec{C}_s, j-1)$.

1. Si $l(\vec{C}_s) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se tiene que \vec{C}_s tiene dos flechas simétricas las cuales son flechas simétricas de \vec{C} , Figura 3.36

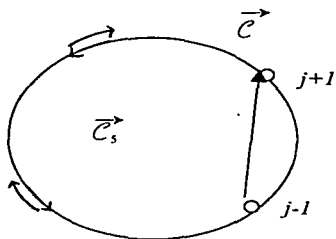


Figura 3.36

2. Si $l(\vec{C}_3) \equiv 0 \pmod{k}$ consideremos la arista $[i-1, i+1]$

➤ Si $(i+1, i-1) \in \text{Asim}(D)$ el triángulo dirigido $(i-1, i, i+1, i-1)$ tiene dos flechas simétricas, las cuales son flechas simétricas de \vec{C} Figura 3.37

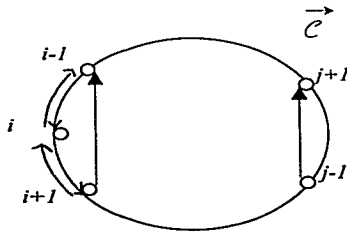
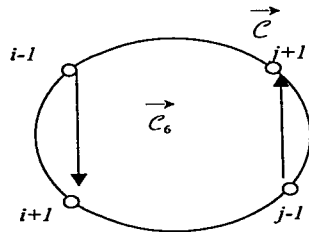


Figura 3.37

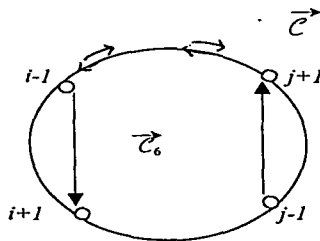
➤ Así podemos suponer que $(i-1, i+1) \in \underline{F}(D)$ y consideremos el ciclo dirigido $\vec{C}_6 = (j-1, j+1) \cup (j+1, \vec{C}, i-1) \cup (i-1, i+1) \cup (i+1, \vec{C}, j-1)$ (Figura 3.38); tenemos que $l(\vec{C}_6) \equiv 0 \pmod{k}$ así, \vec{C}_6 tiene dos flechas simétricas, como se verá a continuación:



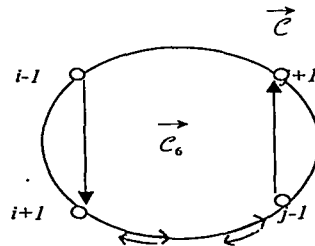
\vec{C}_6 tiene dos flechas simétricas

Figura 3.38

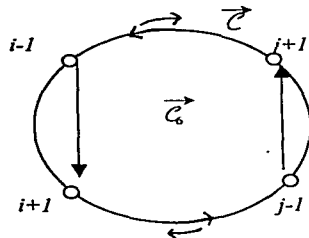
- Si $(i-1, i+1) \in \text{Asim}(\mathbb{D})$ las flechas simétricas de \vec{c}_6 son flechas simétricas de \vec{c} , Figura 3.39



Las dos flechas simétricas están en $F((j+1, \mathcal{C}, i-1))$



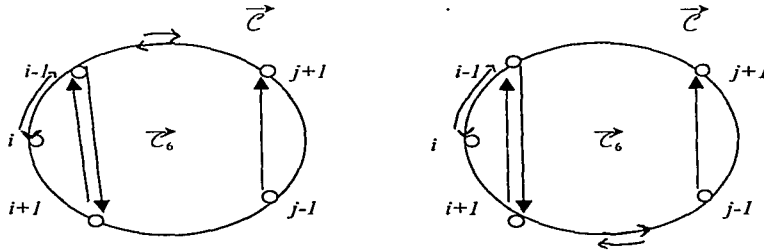
Las dos flechas simétricas están en $F((i+1, \mathcal{C}, j-1))$



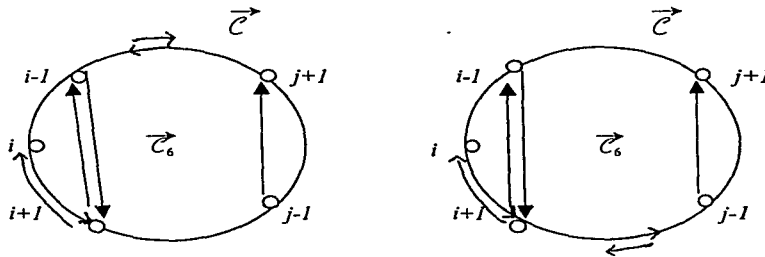
Una flecha simétrica está en $F((j+1, \mathcal{C}, i-1))$
y la otra en $F((i+1, \mathcal{C}, j-1))$

Figura 3.39

- Si $(i-1, i+1) \in \text{Sim}(D)$ tenemos que $F((i-1, i, i+1)) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$ y $F((j+1, \vec{C} i-1) \cup (i+1, \vec{C} j-1)) \cap F(\text{Sim}(D)) \neq \emptyset$ lo cual implica que \vec{C} tiene dos flechas simétricas. La Figura 3.40 muestra estas cuatro posibilidades.



Una flecha simétrica es $(i-1, i)$ y (la otra flecha simétrica está en $F((j+1, \vec{C} i-1)$ o está en $F((i+1, \vec{C} j-1)))$)



Una flecha simétrica es $(i, i+1)$ y (la otra flecha simétrica está en $F((j+1, \vec{C} i-1)$ o está en $F((i+1, \vec{C} j-1)))$)

Figura 3.40

C) Si $(i-1, i+1) \in \text{Asim}(D)$ se procede como en (B) intercambiando j con i .

Caso 1.c Supongamos que se cumple la propiedad (c) del Lema 3.1. Tenemos cuatro posibilidades que serán analizadas.

Caso 1.c.1 Si $L(G)[\{i-1, i, j-1, j\}] \cong K_4$, Figura 3.41
(Considerando $s = i$ y $t = j-1$)

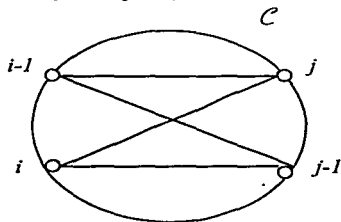


Figura 3.41

Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 los ciclos definidos como en el Caso 1.a.1 y consideremos los siguientes casos.

Caso 1.c.1.1 Si $l(C_1) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y $l(C_2) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$.
Se procede como en el Caso 1.a.1.1.

Caso 1.c.1.2 Si $l(C_3) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y $l(C_4) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$.
Se procede como en el Caso 1.a.1.2

Caso 1.c.1.3 Si $l(C_1) \equiv 0 \pmod{\kappa}$.

En este caso se tiene que $l(C_3) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ y del Caso 1.c.1.2 podemos suponer que $l(C_4) \equiv 0 \pmod{\kappa}$.

Consideremos los ciclos de $L(G)$, $C_7 = [i-1, j] \cup [j, C, i-1]$ y $C_8 = [j, i-1] \cup [i-1, C, j]$. Ya que $l(C_1) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ tenemos que $l(C_7) \equiv -1 \pmod{\kappa}$ y como $\kappa \geq 3$ se tiene que $l(C_7) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$.

Como $l(C_4) \equiv 0 \pmod{\kappa}$ se sigue que $l(C_8) \equiv 2 \pmod{\kappa}$ y como $\kappa \geq 3$ tenemos que $l(C_8) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$, Figura 3.42

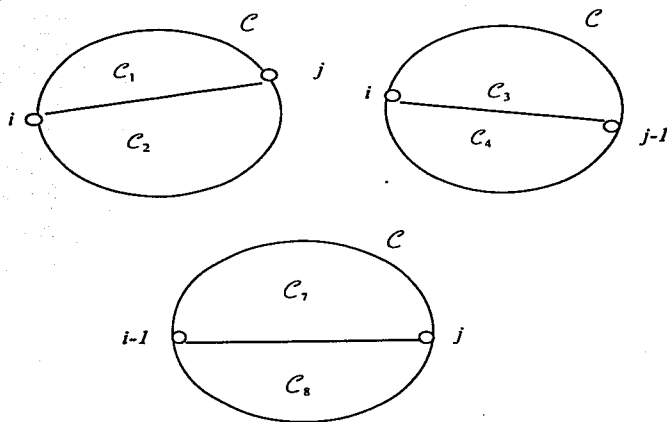


Figura 3.42

- Si $(i-1, j) \in \text{Sim}(D)$ se tiene que $\vec{c}_7 = (i-1, j) \cup (j, \vec{c}_7 i-1)$ y $\vec{c}_8 = (j, i-1) \cup (i-1, \vec{c}_8 j)$, cada uno tiene dos flechas simétricas, por lo tanto \vec{c} tiene dos flechas simétricas, Figura 3.43

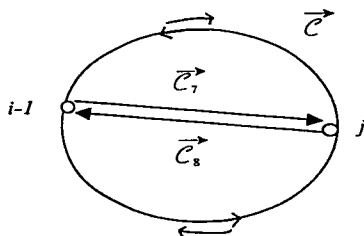


Figura 3.43

- Si $(i - 1, j) \in \text{Asim}(D)$ (respectivamente $(j, i - 1) \in \text{Asim}(D)$), \vec{c}_7 (respectivamente \vec{c}_8) tiene dos flechas simétricas, las cuales son flechas simétricas de \vec{c}_7 , Figura 3.44

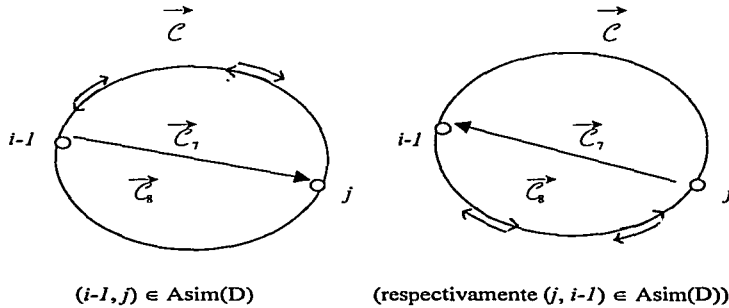


Figura 3.44

Caso 1.c.1.4 Si $l(C_2) \equiv 0 \pmod{\ell}$.
Se procede como en el Caso 1.a.1.4.

Caso 1.c.2 Si $L(G)[\{i - 1, i, j, j + 1\}] \cong K_4$.
(Considerando $s = i$ y $t = j$)

Definimos los ciclos \mathcal{C}_1' , \mathcal{C}_2' , \mathcal{C}_3' y \mathcal{C}_4' como en el Caso 1.c.1 cambiando $j - i$ por $j + 1$, definimos \mathcal{C}_7' y \mathcal{C}_8' como en el Caso 1.c.1 cambiando j por $j + 1$ y procedemos como en el Caso 1.c.1 (intercambiando $j - 1$ con $j + 1$).

Caso 1.c.3 Si $L(G)[\{i, i + 1, j - 1, j\}] \cong K_4$.
(Considerando $s = i + 1$ y $t = j - 1$).

Consideremos los ciclos \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_4 como en el Caso 1.c.1; definimos los ciclos \mathcal{C}_7' y \mathcal{C}_8' como en el Caso 1.c.1 cambiando $i - 1$ por $i + 1$, j por $j - 1$ y procedemos como en el Caso 1.c.1.

Caso 1.c.4 Si $L(G)[\{i, i+1, j, j+1\}] \cong K_4$.
 (Considerando $s = i+1$ y $t = j$).

Consideremos los ciclos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 definidos en el Caso 1.a.1 y los ciclos \mathcal{C}_3' , \mathcal{C}_4' obtenidos de \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_4 respectivamente intercambiando $j-1$ con $j+1$; y definimos los ciclos \mathcal{C}_7' y \mathcal{C}_8' como en \mathcal{C}_7 y \mathcal{C}_8 respectivamente cambiando $i-1$ por $i+1$ y procedemos como en el Caso 1.c.1.

Caso 2 Si $j \in \{i-2, i+2\}$

En este caso, por las hipótesis del Lema 3.3 se tiene que existe otra cuerda de $\overline{\mathcal{C}}$; (r, s) tal que $(r, s) \neq (j, i)$.

Por lo visto en el Caso 1 podemos suponer que existe $\{a, b\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ con $a \neq b$; tales que $\{[a-1, a+1], [b-1, b+1]\} \subseteq (A(L(G)) - A(\mathcal{C}))$.

- Si $b-1 \neq a$ procedemos como en el Caso 1.b (Figura 4.45)

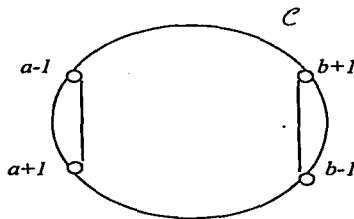


Figura 3.45

- Si $b-1 = a$ tenemos que $\{[a-1, a+1], [a, a+2]\} \subseteq A(L(G)) - A(\mathcal{C})$
 Figura 4.46

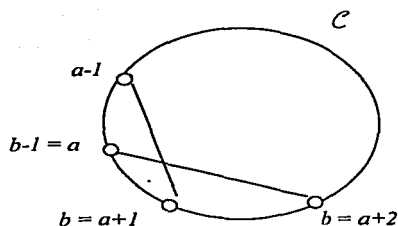


Figura 3.46

Y del Lema 3.2 se tiene que:

$$\{[a-1, a+2], [a, a+3], [a+1, a+3], [a-2, a], [a-2, a+1]\} \cap A(L(G)) \neq \emptyset.$$

De donde se tienen cinco posibles casos.

Caso 2.1 Si $[a-1, a+2] \in A(L(G))$.

Sea $C_1 = [a-1, a+1] \cup [a+1, C, a-1]$ y $C_2 = [a-1, a+2] \cup [a+2, C, a-1]$.

Figura 3.47

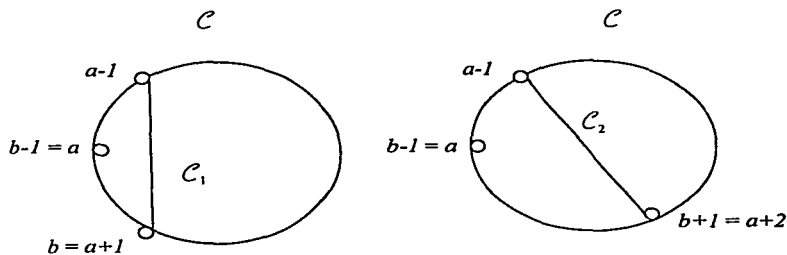


Figura 3.47

Consideremos los siguientes casos:

Caso 2.1.1 Si $l(C_1) \not\equiv 0 \pmod{k}$.

- Si $(a-1, a+1) \in \text{Sim}(D)$ el triángulo dirigido $(a+1, a-1, a, a+1)$ tiene una flecha simétrica en $(a-1, a, a+1)$ y el ciclo dirigido $\vec{C}_1 = (a-1, a+1) \cup (a+1, \vec{C}_1, a-1)$ tiene una flecha simétrica en $(a+1, \vec{C}_1, a-1)$, así, \vec{C} tiene dos flechas simétricas, Figura 3.48

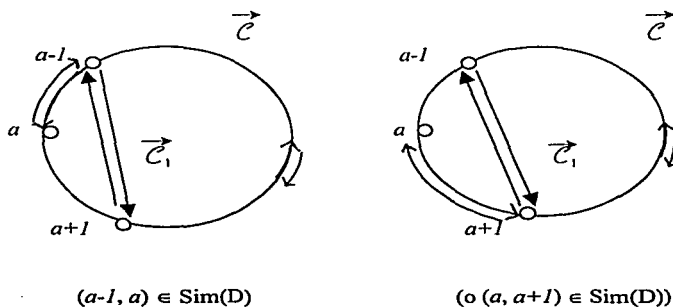


Figura 3.48

- Si $(a-1, a+1) \in \text{Asim}(D)$ las dos flechas simétricas de \vec{C}_1 están en $(a+1, \vec{C}_1, a-1)$, por lo que \vec{C} tiene dos flechas simétricas, Figura 3.49

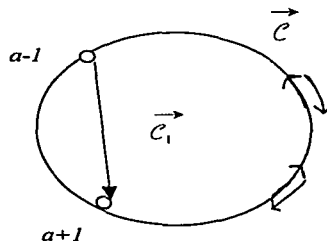


Figura 3.49

- Si $(a + 1, a - 1) \in \text{Asim}(\mathbb{D})$ las dos flechas simétricas del triángulo dirigido $(a + 1, a - 1, a, a + 1)$ pertenecen a $\vec{\mathcal{C}}$ Figura 3.50

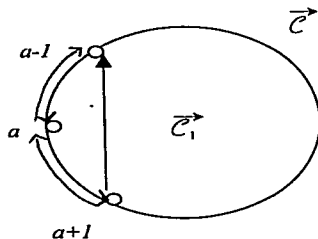


Figura 3.50

Caso 2.1.2 Si $l(\mathcal{C}_1) \equiv 0 \pmod{\kappa}$.

En este caso $l(\mathcal{C}_2) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$. Podemos suponer que $(a - 1, a + 1) \in F(\mathbb{D})$.

- Si $(a + 1, a - 1) \in \text{Asim}(\mathbb{D})$, las dos flechas simétricas del triángulo dirigido $(a + 1, a - 1, a, a + 1)$ pertenecen a $\vec{\mathcal{C}}$ Figura 3.51

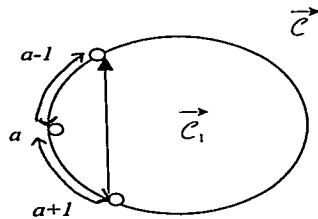


Figura 3.51

- Si $(a-1, a+2) \in \text{Sim}(D)$ tenemos que $F(a+2, \vec{C} a-1) \cap \text{Sim}(D) \neq \emptyset$, Figura 3.52

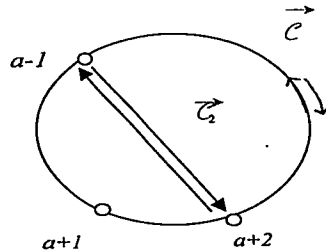


Figura 3.52

Y ahora consideremos el triángulo dirigido $(a+2, a-1, a+1, a+2)$;

- Si $(a+1, a+2) \in \text{Sim}(D)$ se tiene que \vec{C} tiene dos flechas simétricas. Figura 3.53

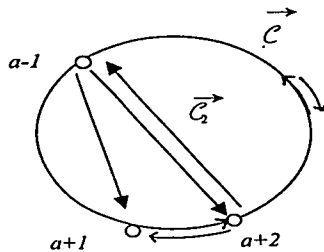


Figura 3.53

- Y si $(a-1, a+1) \in \text{Sim}(D)$ tenemos que $F(a-1, a, a+1) \cap \text{Sim}(D) \neq \emptyset$, lo cual implica que \vec{C} tiene dos flechas simétricas, Figura 3.54

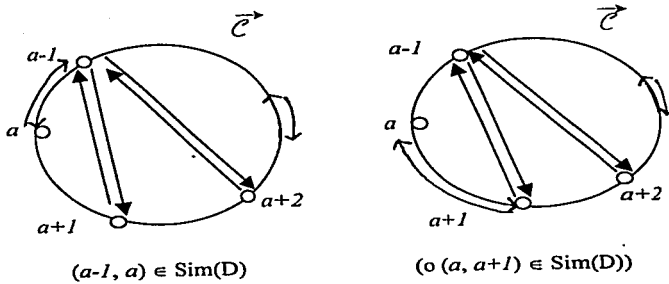


Figura 3.54

- Si $(a-1, a+2) \in \text{Asim}(D)$, el ciclo dirigido $\vec{C}_2 = (a-1, a+2) \cup (a+2, \vec{C}, a-1)$ tiene dos flechas simétricas, las cuales pertenecen a \vec{C}
 Figura 3.55

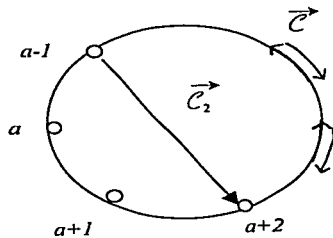


Figura 3.55

- Si $(a+2, a-1) \in \text{Asim}(D)$, las dos flechas simétricas del triángulo dirigido $(a+2, a-1, a+1, a+2)$ son $(a+1, a-1)$ y $(a+1, a+2)$.
 Figura 3.56

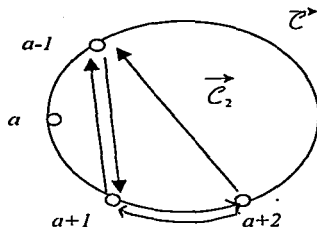


Figura 3.56

Por otro lado el triángulo dirigido $(a + 1, a - 1, a, a + 1)$ tiene una flecha simétrica en $(a - 1, a, a + 1)$; esta flecha y $(a + 1, a + 2)$ son las dos flechas simétricas que pertenecen a \overleftarrow{C} Figura 3.57

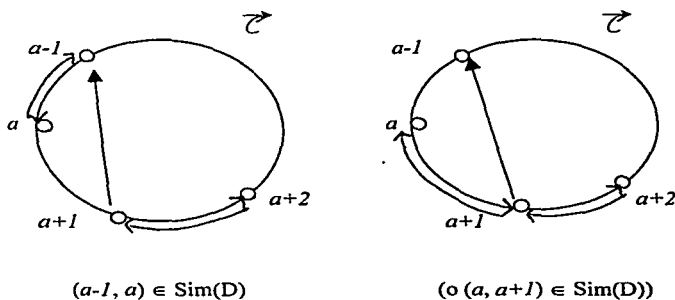


Figura 3.57

Caso 2.2 Si $[a, a + 3] \in A(L(G))$.

Se procede como en el Caso 2.1 cambiando $a - 1$ por a , a por $a + 1$, $a + 1$, por $a + 2$ y $a + 2$, por $a + 3$.

Caso 2.3 Si $[a + 1, a + 3] \in A(L(G))$.

Se procede como en el Caso 1.b considerando $a = i$ y $a + 1 = j - 1$.

Caso 2.4 Si $[a - 2, a] \in A(L(G))$.

Se procede como en el Caso 1.b considerando $i - 1 = a - 2$ y $j - 1 = a$.

Caso 2.5 Si $[a - 2, a + 1] \in A(L(G))$.

Se procede como en el Caso 2.1 cambiando $a - 1$ por $a - 2$, a por $a - 1$, $a + 1$ por a y $a + 2$ por $a + 1$.

LEMA 3.4

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas y D una orientación de $L(G)$ tal que todo triángulo dirigido es simétrico. Si todo ciclo dirigido de D con longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos cuerdas, entonces todo ciclo dirigido de D con longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene dos flechas simétricas ($\kappa \geq 3$).

Demostración:

Se procede como en la prueba del Lema 3.3; solo notemos que cuando las dos cuerdas del ciclo dirigido $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, n - 1, 0)$ (con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$) son de la forma (i, j) y (j, i) con $j \in \{i - 2, i + 2\}$ entonces el triángulo dirigido $(i - 2, i - 1, i, i - 2)$, (o $(i, i + 1, i + 2, i)$) es simétrico y así, \vec{C} tiene dos flechas simétricas.

En el siguiente Teorema utilizaremos el resultado obtenido del Teorema 2.4, el cual dice lo siguiente: Sea D una digráfica tal que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa. Si todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene al menos dos flecha simétricas, entonces D tiene un κ -núcleo.

TEOREMA 3.1

Sean G una gráfica, $L(G)$ su gráfica de líneas y D una orientación de $L(G)$ tal que $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa y cada triángulo dirigido tiene dos flechas simétricas. Si todo ciclo dirigido de D , $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, n - 1, 0)$ con $l(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{\kappa}$ tiene una cuerda (i, j) tal que al menos una de las siguientes propiedades se cumple:

- (1) $j \notin \{i - 2, i + 2\}$
 (2) Si $j \in \{i - 2, i + 2\}$, entonces existe otra cuerda de $\vec{C}_\ell(r, s)$ con $(r, s) \neq (j, i)$.
 Entonces D tiene un ℓ -núcleo, ($\ell \geq 3$).

Demostración:

Se sigue del Lema 3.3 y el Teorema 2.4

TEOREMA 3.2

Sean G una gráfica, L(G) su gráfica de líneas y D una orientación de L(G) tal que Asim(D) es fuertemente conexa y cada triángulo es simétrico. Si todo ciclo dirigido de D con longitud $\neq 0 \pmod{\ell}$ tiene dos cuerdas, entonces D tiene un ℓ -núcleo ($\ell \geq 3$).

Demostración:

Se sigue del Lema 3.4 y el Teorema 2.4

OBSERVACIÓN 3.1:

Las hipótesis de que la cuerda (i, j) de \vec{C}_ℓ satisface al menos una de las dos propiedades (1) o (2) del Teorema 3.1 no puede ser omitida, es suficiente considerar la siguiente gráfica G_ℓ , ($\ell \geq 4$);

$$V(G_\ell) = \{0, 1, 2, \dots, 2\ell - 1\},$$

$$A(G_\ell) = \{a_i = [i, i + 1] \mid i \in \{0, 2, 4, \dots, 2\ell - 2\}\} \cup \{a_i = [i, i + 2] \mid i \in \{1, 3, 5, \dots, 2\ell - 3\}\} \cup \{a_{2\ell-1} = [2\ell - 1, 1]\}$$

y D_ℓ la siguiente orientación de $L(G_\ell)$; $V(D_\ell) = A(G_\ell)$,

$$F(G_\ell) = \{(a_i, a_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, 2\ell - 2\}\} \cup \{(a_i, a_{i+2}) \mid i \in \{1, 3, 5, \dots, 2\ell - 3\}\} \cup \{(a_{2\ell-1}, a_0), (a_{2\ell-1}, a_1)\};$$

D_ℓ no tiene un ℓ -núcleo para $\ell \geq 4$.

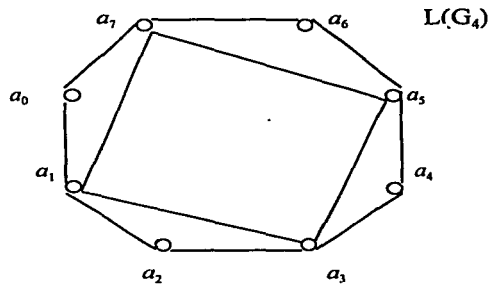
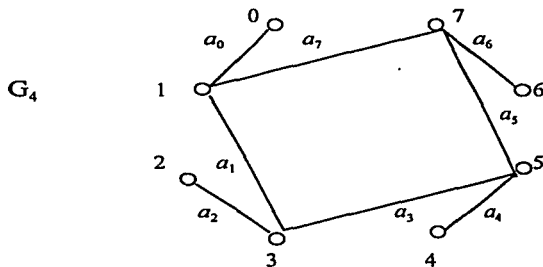
EJEMPLO 1.

Para $\ell = 4$, Figura 3.58

Sean $G_4 = (V(G_4), A(G_4))$, $L(G_4)$ y D_4 definidas como en la Observación 3.1

Así:

$$V(G_4) = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$$



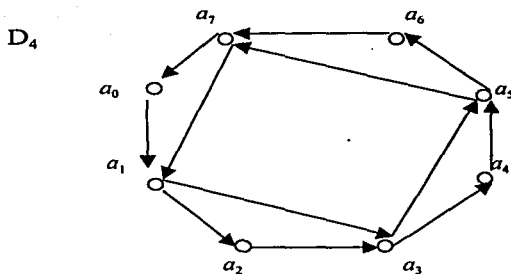


Figura 3.58

Existe al menos un ciclo $\equiv 0 \pmod{4}$ en D_4 el cual tiene una cuerda que no satisface la propiedad (1) ni (2) del Teorema 3.6 y D_4 no tiene un 4-núcleo. Por ejemplo consideremos el ciclo $\mathcal{C} = (a_0, a_1, a_3, a_5, a_7, a_0)$ contenido en D_4 , tenemos que $l(\mathcal{C}) = 5$, así que $l(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \pmod{4}$; (a_7, a_1) es una cuerda de \mathcal{C} y no cumple ninguna de las dos propiedades (1) o (2) del Teorema 3.6 y D_4 no tiene un 4-núcleo.

Supongamos que D_4 tiene \mathcal{K} un 4-núcleo.

- Consideremos $\{a_0, a_2, a_4, a_6\} \subseteq V(D_4)$.

Por simetría supongamos que $a_0 \in \mathcal{K}$, entonces se tendría que $\mathcal{K} = \{a_0\}$, así que $a_2 \notin \mathcal{K}$ y sin embargo no hay una trayectoria de a_2 al núcleo con longitud ≤ 3 ($d_{D_4}(a_2, a_0) = 4$). Por lo tanto $\mathcal{K} = \{a_0\}$ no es un 4-núcleo de D_4 . Análogamente, por simetría, si suponemos que $a_i \in \mathcal{K}$ para algún $i \in \{2, 4, 6\}$ se puede ver que D_4 no tiene un 4-núcleo.

- Consideremos $\{a_1, a_3, a_5, a_7\} \subseteq V(D_4)$.

Por simetría supongamos que $a_1 \in \mathcal{K}$, entonces se tendría que $\mathcal{K} = \{a_1\}$, así que $a_2 \notin \mathcal{K}$ y sin embargo no hay una trayectoria de a_2 al núcleo con longitud ≤ 3 ($d_{D_4}(a_2, a_1) = 4$). Por lo tanto $\mathcal{K} = \{a_1\}$ no es un 4-núcleo de D_4 . Análogamente, por simetría, si suponemos que $a_i \in \mathcal{K}$ para algún $i \in \{3, 5, 7\}$ se puede ver que D_4 no tiene un 4-núcleo.

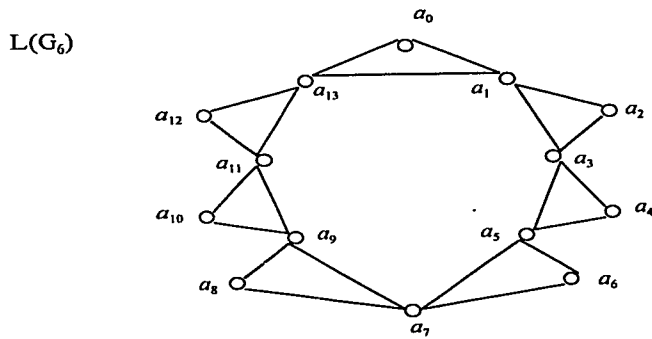
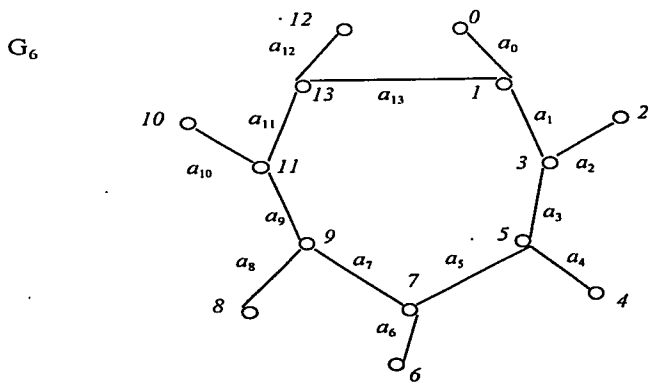
EJEMPLO 2

Para $\ell = 6$, Figura 3.59

Sea $G_6 = (V(G_6), F(G_6))$, $L(G_6)$ y D_6 definidas como en la Observación 3.1.

$V(G_6) = \{0, 1, 2, \dots, 13\}$ Figura 3.60

Se puede observar que D_6 no posee un 6-núcleo



D_6

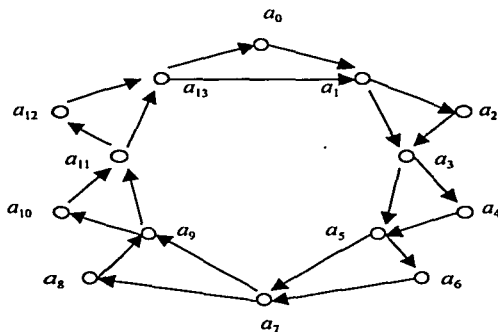


Figura 3.59

EJEMPLO 3

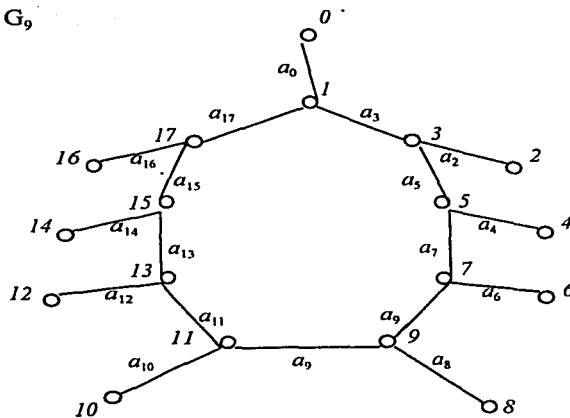
Para $k=9$

Sea $G_9 = (V(G_9), F(G_9))$, $L(G_9)$ y D_9 , definidas como en la Observación 3.1.

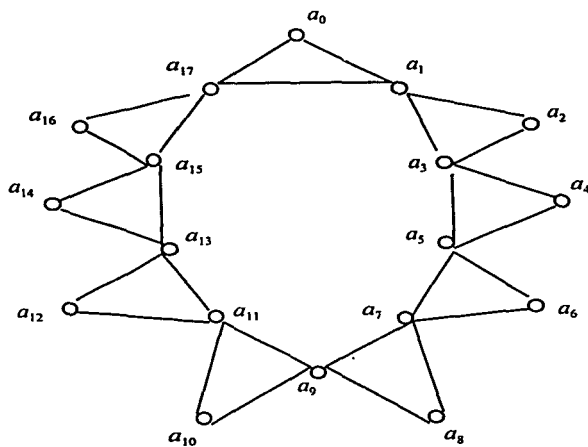
$V(G_9) = \{0, 1, 2, \dots, 17\}$ Figura 3.60

D_9 no tiene un 9-núcleo, en particular D_9 no tiene un 3-núcleo

G_9



$L(G_9)$



D_9

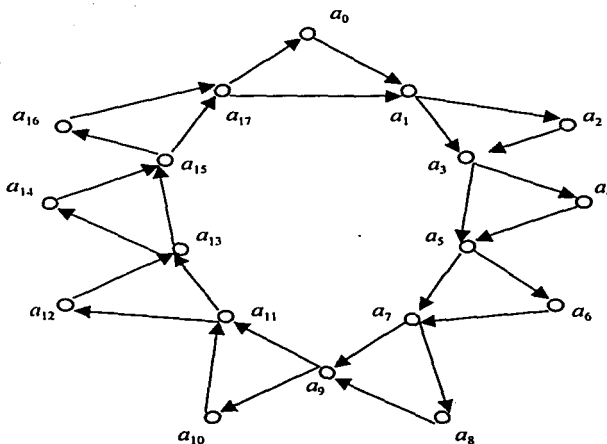


Figura 3.60

OBSERVACIÓN 2

Las hipótesis de que D es una orientación de la gráfica de líneas no puede ser omitida en el Teorema 3.1. En la digráfica D_ℓ definida como sigue, todo ciclo dirigido $\neq 0 \pmod{\ell}$ tiene dos cuerdas, sin embargo, D_ℓ no tiene un ℓ -núcleo, ($\ell \geq 3$).

EJEMPLO 4

$$V(D_3) = \{0, 1, 2, \dots, 22\}$$

$$F(D_3) = \{(i, i+1) \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, 21\}\} \cup \\ \{(i, i+2) \mid i \in \{4, 6, 8, 10, 15, 17, 19\}\} \cup \\ \{(4, 12), (15, 0), (21, 0), (22, 0)\} \text{ Figura 3.61}$$

D_3

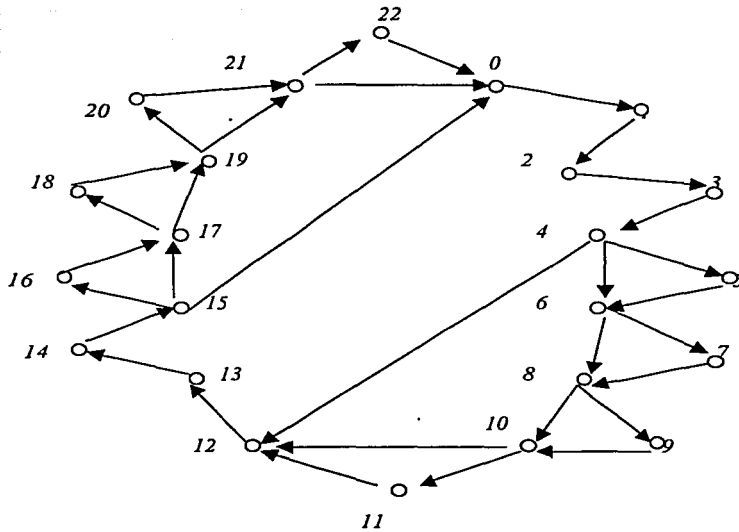


Figura 3.61

Observemos que todo ciclo dirigido $\not\equiv 0 \pmod{3}$ tiene dos cuerdas y sin embargo D_3 no tiene un 3-núcleo. Supongamos que D_3 tiene un 3-núcleo, digamos \mathcal{K} y que $0 \in \mathcal{K}$; entonces $\mathcal{K} = \{0, 3, 7, 13, 18\}$, $9 \notin \mathcal{K}$ y sin embargo $d(9, 13) = 3 > 2$. Por la tanto \mathcal{K} no puede ser un 3-núcleo. Análogamente se puede observar que \mathcal{K} no es un 3-núcleo suponiendo que $i \in \mathcal{K}$ para algún $i \in \{1, 2, 3, \dots, 22\}$

EJEMPLO 5

$$V(D_4) = \{0, 1, 2, \dots, 37\}$$

$$F(D_4) = \{(i, i+1) \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, 36\}\} \cup \\ \{(i, i+2) \mid i \in \{0, 2, 4, 6, \dots, 16, 19, 21, 23, \dots, 35\}\} \cup \\ \{(0, 18), (19, 37), (37, 0)\}$$

D_4

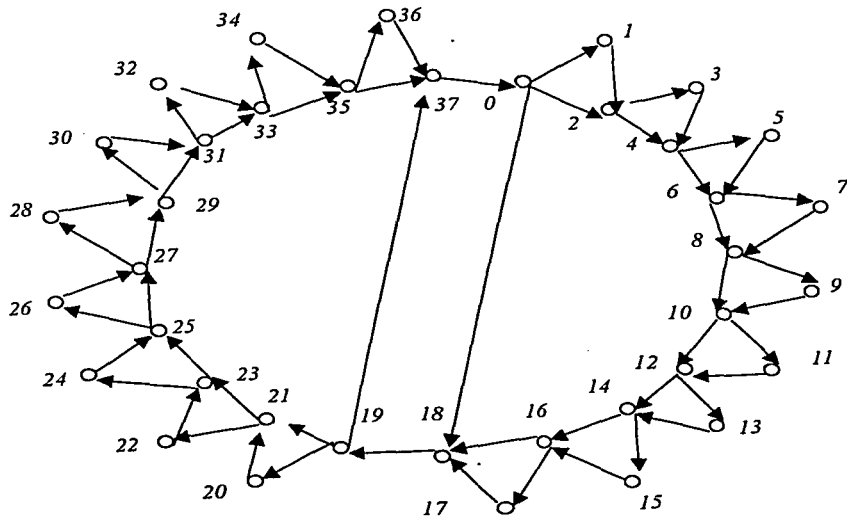


Figura 3.62

Para $k \geq 5$,

$$\begin{aligned}
 V(D_k) &= \{0, 1, 2, 3, \dots, 7k+3\} \\
 F(D_k) &= \{(i, i+1) \mid i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 7k+2\}\} \cup \\
 &\quad \{(i, i+3) \mid i \in \{0, 3, 6, \dots, 3k, 3k+3 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1, \\
 &\quad (3k+3 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1) + 3, \dots, 7k+3 - \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1\}\} \cup \\
 &\quad \{(i, i+2) \mid i \in \{1, 4, 7, \dots, 3k+1, 3k+3 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\
 &\quad (3k+3 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) + 3, \dots, 7k+3 - \lceil \frac{k}{2} \rceil\}\} \cup \{(0, 3k+3), \\
 &\quad (3k+3 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1, 7k+3 - \lceil \frac{k}{2} \rceil + 2), (7k+3, 0)\}
 \end{aligned}$$

En donde $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ significa el menor entero mayor o igual que $\frac{k}{2}$ y $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ significa el mayor entero menor o igual que $\frac{k}{2}$.

EJEMPLO 6

Para $\kappa = 5$, Figura 3.63

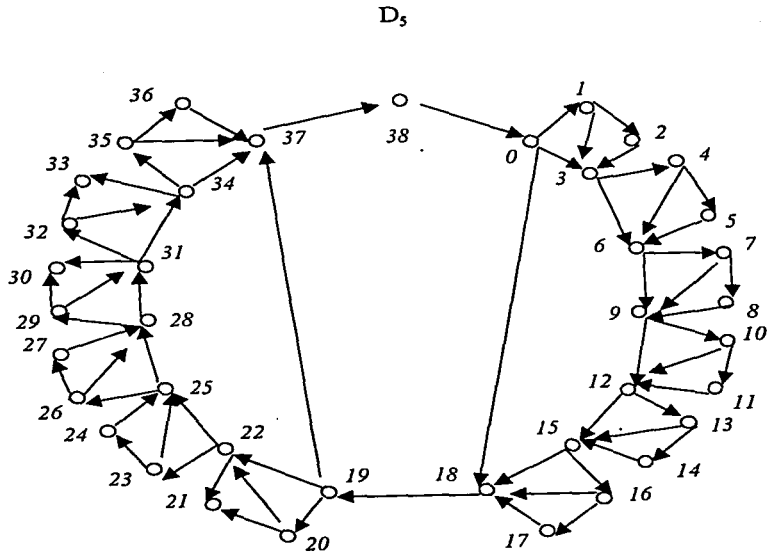


Figura 3.63

EJEMPLO 7

Para $k=6$, Figura 3.64

D_6

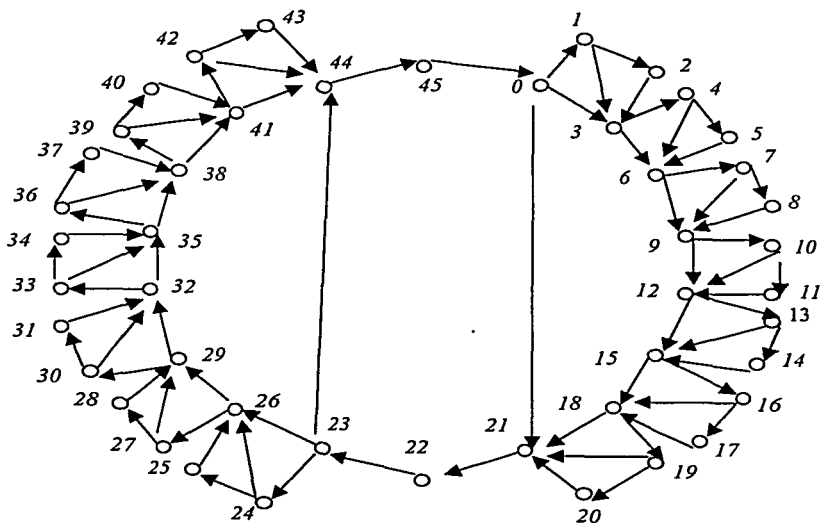


Figura 3.64

EJEMPLO 8

Para $\zeta = 7$, Figura 3.65

D_7

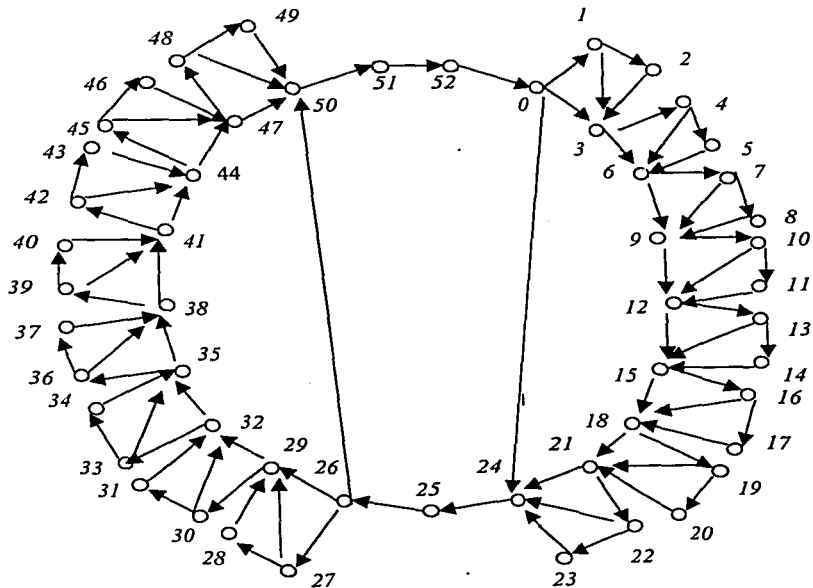


Figura 3.65

EJEMPLO 9

Para $\ell = 8$, Figura 3.66

D_8

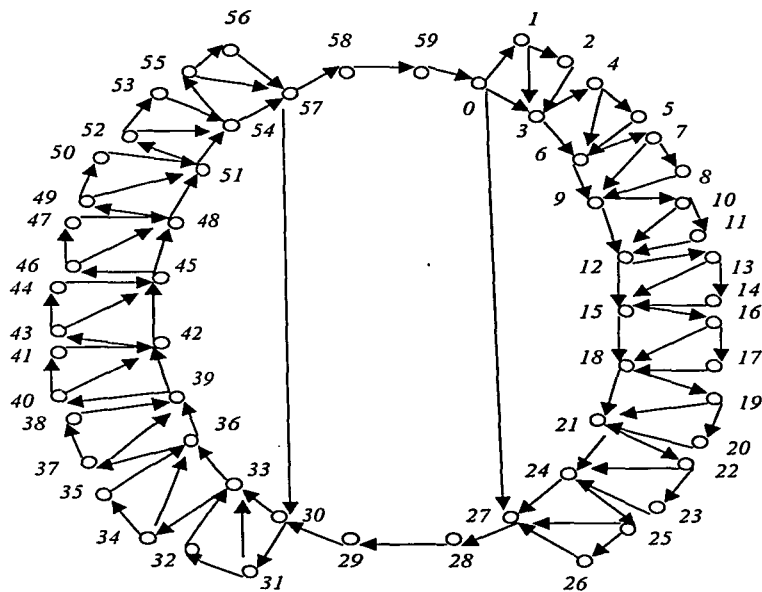


Figura 3.66

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Berge and A. Ramachandra Rao, A combinatorial problem in logic, *Discrete Math.*, 17 (1977), pp. 23-26.
- [2] C. Berge, *Graphs*, North-Holland, Amsterdam, New York (1985).
- [3] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and digraphs*, The Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics series, Second edition, California (1986).
- [4] H. Galeana-Sánchez, A counterexample to a conjecture of Meyniel on Kernel-perfect graphs, *Discrete Mathematics* 41 (1982), pp. 105-107.
- [5] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, On Kernels and semikernels of digraphs, *Discrete Math.*, 48 (1984), pp. 67-76.
- [6] H. Galeana-Sánchez and V. Neumanin-Lara, On the kernel perfect critical digraphs, *Discrete Math*, 59 (1986), pp. 257-265.
- [7] H. Galeana-Sánchez and Xueliang Li, Semikernels and $(k, 1)$ -kernels in digraphs *SIAM J. Discrete Math.* (1988), Vol. II, No. 2, pp. 340-346.
- [8] H. Galeana-Sánchez, On the existence of $(k, 1)$ -kernels in digraphs, *Discrete Math.* 85 (1990), pp. 99-102.
- [9] H. Galeana-Sánchez and L. Pastrana Ramírez, K -kernels in orientations of the line graphs, *Mathematics subject, clasificación: 05C20* (1991), pp. 1-14.

- [10] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana-Ramírez and H. A. Rincón-Mejía, Semikernels, Quasikernels and Grundy functions in the line digraph, *SIAM J. Discrete Math*, 4 (1991), pp. 80-83.
- [11] H. Galeana-Sánchez, On the existence of kernels and h-kernels in directed graphs, *Discrete Mathematics* 110 (1992), pp. 251-255.
- [12] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, N J, 1944.
- [13] M. Harminc, Solutions and kernels of a directed graph, *Math. Slovaca*, 32 (1982), pp. 263-267.
- [14] M. Kwasnik, The generalization of Richardson theorem, *Discussiones Math. IV* (1981) pp. 11-14.
- [15] M. Richardson, Solution of irreflexive relations, *Ann. Math.*, 58 (1953), pp. 573-580.
- [16] O. V. Borodin, A. V. Kostochka and D. R. Wooldall, On kernel perfect orientations of line graphs, *Discrete Mathematics*, 191 (1998), pp. 45-49.
- [17] P. Duchet, Graphes noyau-parfaits, in M. Deza and I. G. Rosenberg, eds, *Combinatorics 79, par II*, *Ann Discrete Mathematics*, 9 (Noth-Holland, Amsterdam, 1980), pp. 93-101.
- [18] P. Duchet and H. Meyniel, Une généralization du théorème de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientés, *Discrete Math.*, 43 (1983), pp. 21-27.

- [19] P. Duchet, A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect, *J. Graph Theory*, 11 (1987), pp. 81-85.
- [20] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Second edition. Academic Press, New York (1979).