38

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUADERNO DE TRABAJO PARA EL CURSO DE MATEMATICAS V DE LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA BASADO EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PATRICIO RAMIREZ FLORES

DIRECTOR DE TESIS: MAT. MARIA DE JESUS FIGUEROA TORRES

ASESOR DE TESIS: M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2002

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Cuaderno de trabajo para el curso de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria basado en la Resolución de Problemas"

realizado por Patricio Ramírez Flores

con número de cuenta 8012433-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matematicas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. María de Jesús Fîgueroa Torres
Propietario	M. en C Alejandro Bravo Mojica
Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz
Suplente	Fís. Roberto Guadalupe Garrido Carmona
Suplente	Mat. Esteban Rubén Hurtado Cruz

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

DEDICATORIA.

Dedico este trabajo principalmente a mis padres: **Patricia Flores Estrada y Bonifacio Ramírez Estupiñán**, por el apoyo incondicional que siempre me han brindado.

A mi esposa: **Sandra Ambriz Torres** y a mi hija: **Rocío Ramírez Ambriz.** Por ser las personas que me dieron la fuerza necesaria para la realización del trabajo.

A mis hermanos: **Federico Ramírez Flores, Martha Ramírez Flores, Guadalupe Ramírez Flores, Eleno Ramírez Flores, Ramón Ramírez Flores y María Rosa Ramírez Flores.**

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco a **la Mat. María de Jesús Figueroa y el Fís. Roberto Garrido Carmona** por la paciencia y el apoyo brindado en la elaboración de esta tesis.

Un agradecimiento especial a mis sinodales:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica
Mat. Julieta Verdugo Díaz
Mat. Esteban R. Hurtado Cruz

Por los comentarios tan acertados y valiosos que hicieron de este trabajo.

Agradezco a **la M. en C. Rosa María Meneses y al Mat. Mateo Vásquez** por el apoyo que me han brindado siempre.

A mis alumnos y ex alumnos de la ENP plantel # 9 "Pedro de Alba" porque de alguna manera influyeron en la elaboración de este trabajo.

Finalmente agradezco a todos los profesores que influyeron en mi formación académica, así como a los amigos con los que compartí algunas experiencias durante mis estudios, gracias.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

En 1996 la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) cambió sus Planes y Programas de Estudios después de hacer un análisis del Plan anterior que estaba vigente desde el año 1964 y encontrar que ya no satisfacía los requerimientos de la educación que se demandaba en esos momentos. Se pretende que la enseñanza esté centrada en el alumno y en su actividad más que en el maestro o en los programas, así como privilegiar el desarrollo de habilidades sobre la simple información.

El cambio de los Planes y Programas de Estudios mencionados plantearon varios problemas dentro de los cuales está el de tener textos que cubran el programa y tengan el enfoque que demanda dicho programa para ser trabajados por los alumnos. Este es el motivo por el cual se realiza este trabajo.

Para estructurar el presente trabajo se tomó en cuenta los materiales empleados durante 9 años en los cursos de Matemáticas V, complementándolos y adecuándolos para que tuvieran el enfoque que demandaban los nuevos Planes y Programas de Estudio. Dichos materiales fueron útiles porque en los nuevos programas no se agregan contenidos nuevos ya que lo que cambia es el enfoque del aprendizaje en el que se pone énfasis en el trabajo del alumno en el salón de clases.

El presente Cuaderno de Trabajo para el Curso de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria Basado en la Resolución de Problemas (Cuaderno de Trabajo) propicia la participación del alumno en la construcción de su conocimiento mediante la resolución de problemas en el salón de clases con lo cual permite al alumno llevar a cabo las actividades que pide el programa y con ello cumplir los objetivos del curso.

Este trabajo se basa principalmente en los requerimientos del Plan de Estudios 1996 de la ENP para Matemáticas V, sin embargo es importante señalar que el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) tiene desde su fundación la característica de que la enseñanza está centrada en el quehacer del alumno y se considera al profesor como guía del aprendizaje; Es por esta razón que el Plan de Estudios Actualizado del CCH (1996) sirvió también como base para la elaboración del Cuaderno de Trabajo.

Un documento que resume lo esencial de las dos instituciones anteriores (la ENP y el CCH) y que también se tomó en consideración es el "Núcleo de Conocimientos y Formación Básicos que debe Proporcionar el Bachillerato de la UNAM" por la importancia que le da a la Resolución de Problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Otro documento básico para la elaboración del Cuaderno de Trabajo es "Los estándares curriculares de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)" En los que la resolución de problemas es una de las sugerencias que se hace a las escuelas para la enseñanza de las Matemáticas desde la década de los 1980's. Específicamente los Estándares Curriculares de la (NCTM) del 2000 recomiendan que en la enseñanza de la geometría el alumno debe ser capaz de resolver problemas usando razonamiento espacial y modelos geométricos.

El fundamento teórico del trabajo se basa en lo que han escrito algunos autores de prestigio respecto al Constructivismo, Resolución de Problemas y Trabajo en equipo. Para el Constructivismo podemos mencionar a Luis Moreno Armella y Guillermina Waldegg que consideran que en él se toma a la matemática como objeto de aprendizaje en oposición al Realismo Matemático que considera la matemática como objeto de enseñanza.

Para Resolución de Problemas se menciona la importancia que algunos matemáticos le dan, por ejemplo: "La resolución de Problemas es el corazón de las matemáticas" (Halmos, 1980), "El desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se origina a partir de un esfuerzo por resolver determinado problema" (Kleiner, 1986). Luz Manuel Santos Trigo considera que la Resolución de Problemas es un movimiento que surgió como una respuesta al fracaso de dos movimientos anteriores: Matemáticas Modernas (énfasis en la estructura y el lenguaje formal) y Regreso a lo Clásico (importancia al manejo de las operaciones).

Finalmente para el Trabajo en Equipo se considera la propuesta mencionada en ¿ Qué es la Didáctica Grupal ? (Didáctica Grupal. México, Progreso, 2000) De Carlos Zarzar quien se ha dedicado a investigar acerca del trabajo grupal y aprendizaje significativo adaptándola para usar el Cuaderno de Trabajo en uno de los pasos.

El contenido de este Trabajo es el siguiente:

- Antecedentes y justificación. Aquí se mencionan algunos problemas que había en el aspecto de la enseñanza, cuando estaba vigente el Plan de Estudios de 1964 de la ENP y cómo el Nuevo Plan de Estudios de la ENP de 1996, pretende resolver éstos. El Nuevo Plan de Estudios plantea el problema de la falta de materiales de apoyo para abordar sus programas, en particular del programa de Matemáticas V, lo cual justifica la elaboración del presente Cuaderno de Trabajo.

- Marco teórico. En esta parte se da el fundamento teórico del Cuaderno de Trabajo.

- Propuesta didáctica. La propuesta didáctica es el Cuaderno de Trabajo y cómo se recomienda usarlo. Básicamente consiste en lo siguiente: Para cada unidad los alumnos usan la bibliografía correspondiente para estudiar los temas de ésta, en equipos resuelven los problemas , junto con el profesor que es el que organiza y coordina todas las actividades, realizan un resumen de los conceptos que aparecen en dicha unidad, en equipos en el aula hacen el mapa conceptual de la unidad, de tarea resuelven los problemas propuestos y el examen de práctica. El Cuaderno de Trabajo cuenta con las soluciones de los problemas y exámenes de práctica, así como con mapas conceptuales de cada unidad.

- Bibliografía.

Creo que con el Cuaderno de Trabajo los alumnos del 5° año de la ENP van a contar con un material de apoyo en la asignatura de Matemáticas que fomente el trabajo en equipo porque la mayor parte de las actividades recomendadas son precisamente en equipo; centré la actividad de enseñanza-aprendizaje en el alumno ya que la labor del profesor es guiar a los alumnos en el trabajo, y se base en la resolución de problemas como lo demanda el Nuevo Plan de Estudios de la ENP. Cabe señalar que aunque la actividad de enseñanza-aprendizaje se centra en el alumno, la labor del profesor es fundamental ya que es él quien planea y coordina todas las actividades realizadas, en algunos casos participa en la resolución de problemas que pueden surgir en el salón de clases, que no estaban contemplados originalmente y que pueden ser nuevos incluso para él.

ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

Aquí se abordan diferentes aspectos para justificar la pertinencia del presente trabajo, situándonos en la problemática del nuevo plan de estudios de la ENP que demanda una educación basada en el trabajo en equipo en el salón de clases, la resolución de problemas y que progresivamente transite hacia el constructivismo, mencionando también la falta de materiales de apoyo para la tarea educativa que deben llevar a cabo los docentes.

El problema que se aborda es el de la falta de materiales de apoyo para cubrir el nuevo plan de estudios de la ENP, específicamente para la asignatura Matemáticas V, elaborando el Cuaderno de Trabajo, con lo cual se considera que se contribuye a resolver el problema mencionado.

Se da la propuesta didáctica que es la manera en que se va a usar este material, básicamente consiste en que los alumnos estudien en la bibliografía, presente al principio de cada unidad, los temas correspondientes y en el salón de clases en equipos, resolver los problemas del Cuaderno de Trabajo. Se propone que de acuerdo al tiempo disponible y las características de cada grupo la resolución de algunos de estos problemas sea llevada a cabo usando de manera explícita el método de resolución de problemas de Polya.

En septiembre de 1966 se dio a conocer una propuesta de modificación del Plan de Estudios del Bachillerato de la ENP, propuesta que surgió al comprobar mediante una evaluación del Plan de Estudios de 1964, vigente en esa fecha, que ya no cumplía con los requerimientos educativos que se demandaban en esos momentos.

En cuanto a la enseñanza de las Matemáticas en el Plan de Estudios de 1964 de la ENP se puede señalar:

Con respecto a la estructura:

- La carga horaria era de 3 horas a la semana.
- El aprendizaje era algorítmico y abstracto.
- El mapa curricular de sexto año se organizaba en 6 áreas: Ciencias físico-Matemáticas, Ciencias químico-Biológicas, Ciencias Económico-Administrativas, Ciencias Sociales, Humanidades y Bellas Artes.

En cuanto al primer punto, se encontró que 3 horas a la semana era insuficiente para los requerimientos actuales de matemáticas. En relación al segundo, las nuevas tendencias de la enseñanza de las matemáticas demandan más de la reflexión y el análisis, que de la algoritmia y formalidad, el tercer punto no corresponde con la agrupación de carreras que se imparten en la UNAM que se agrupan en cuatro Consejos Académicos de Área: Ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías, Ciencias biológicas y de la salud, Ciencias sociales, Humanidades y artes.

En las dos últimas áreas no se impartía matemáticas, lo que provocaba que un importante número de alumnos egresaba del bachillerato sin completar el núcleo básico en ese renglón.

Además el diagnóstico a nivel nacional exigía el fortalecimiento de las Matemáticas y el Español como lenguajes básicos para el aprendizaje.

Con respecto a la metodología:

- Estrategia metodológica de carácter tradicional. Producía una enseñanza transmisiva, repetitiva, que privilegiaba la memoria.
- La evaluación se centraba en actividades de reproducción memorística y suma numérica de calificaciones de exámenes.
- La preocupación de los profesores por cubrir contenidos en el tiempo disponible de clase había creado una sobrecarga de trabajo extraclase para los alumnos e impedido dedicar tiempo a la aprehensión de las herramientas más indispensables para el aprendizaje eficaz.

Dada la situación antes mencionada, la propuesta de modificación se basó en la necesidad de:

a) Fortalecer y potenciar el perfil del egresado de acuerdo con los requerimientos de conocimientos y competencias que demandan los estudios superiores, en general, y los de cada facultad, escuela y carrera, en lo particular.

b) Orientar el enfoque metodológico de los programas hacia una enseñanza:

- Progresivamente centrada en el alumno y en su actividad más que en el maestro o en los programas.

- En la que los contenidos se constituyan no en los fines sino en los medios para desarrollar habilidades y competencias que doten al alumno con herramientas que promuevan el autoaprendizaje.

- En la que tales contenidos se estructuran con arreglo a:

    1. La identificación de nociones básicas.

    2. La identificación de problemas-eje que dan sentido y significación a tales contenidos. Tales problemas podrían ser de carácter epistemológico de la disciplina o bien de carácter concreto, que la disciplina contribuye a resolver.

    3. La actualización de las relaciones entre las asignaturas del plan a nivel de contenidos y de orientación metodológica.

- En la que las estrategias didácticas se expresen en actividades de aprendizaje que promuevan las siguientes competencias y habilidades en el alumno:

    1. Para la indagación.

    2. Para organizar información.

    3. Para aplicar esta información en la solución de problemas, ya sean disciplinarios o de la realidad circundante.

- En la que la acreditación tenga como base la construcción progresiva de productos de aprendizaje que permitan la más alta integración posible de los fenómenos de estudio, de las nociones básicas y de su relación con una problemática, teórica o práctica.

Es en este ambiente en el que surge la propuesta de modificación a los planes y programas de estudio en septiembre de 1996. Es importante señalar en primer término las características del egresado que se pretende formar con los nuevos programas:

- Desarrollará su capacidad de interacción y diálogo.

- Será capaz de construir saberes.
- Desarrollará una cultura científica.
- Desarrollará una autovaloración cultural y personal.
- Fomentará su iniciativa, su creatividad y su participación en el proceso social.

Para lograr esto los nuevos programas tienen como propósitos:

- El fortalecimiento de los lenguajes básicos sobre los que se construye el aprendizaje: Español y Matemáticas. Ambas materias se impartirán a todos los alumnos y en secuencia ininterrumpida en todos los grados del bachillerato de la ENP.
- La construcción progresiva del conocimiento a través de las siguientes estrategias:

  a) Identificación de las nociones básicas indispensables, de cada área del conocimiento, a fin de privilegiar lo formativo sobre lo informativo.

  b) Énfasis en el trabajo en el aula para promover la reflexión y la síntesis colectiva e individual.

  c) Diseño de actividades de clase que desarrollen el dominio progresivo de los lenguajes básicos para el autoaprendizaje y el progreso intelectual del alumno.

- La búsqueda de experiencias de aprendizaje basadas en la identificación, el planteamiento, la resolución de problemas y la interpretación de resultados.
- El énfasis en estrategias didácticas que se expresen en actividades de aprendizaje que promuevan la competencia para la indagación, para organizar información y para interpretarla y aplicarla en la resolución de problemas; esto es, aprendizaje sistemático, explícito y práctico de formas de trabajo intelectual generales y específicas de cada área de conocimiento.
- Específicamente en Matemáticas el nuevo plan de estudios contempla el aumento a 5 clases a la semana en todos los grados. Este aumento de clases no se justifica por la ampliación de contenidos en los programas sino por la necesidad de contar con espacios de tiempo adecuados para la ejercitación práctica en el salón de clases y el aprendizaje sistemático de formas de trabajo que incrementen la competencia del alumno para la construcción del conocimiento y la de los docentes para transitar progresivamente hacia una enseñanza no-verbalista ni solamente expositiva sino aquella que privilegia el desarrollo de habilidades, sobre la simple información.

De esta manera la propuesta de modificación de los nuevos programas de la ENP pretende remediar las deficiencias del plan anterior y se plantea a los docentes la tarea de encontrar estrategias de cómo abordar dichos programas, qué materiales didácticos de apoyo usar, revisar la bibliografía existente y actualizarla.

La implementación del nuevo Plan de Estudios de la ENP plantea a los docentes el problema de contar con los materiales de apoyo adecuados para impartir las asignaturas, ya que los textos existentes en ese momento no tienen el enfoque y estructura que demanda dicho programa.

Un ejemplo de lo expresado anteriormente es el del libro: Geometría Analítica de Guerra Tejada y Figueroa Campos cuyo contenido es el siguiente:

Capítulo 1. Relaciones y Funciones.

Capítulo 2. Sistemas de Coordenadas.

Capítulo 3. Distancia entre dos puntos.

Capítulo 4.Coordenadas de un punto que divide a un segmento recto de acuerdo a con una razón dada.

Capítulo 5. Discusión o análisis de ecuaciones.

Capítulo 6. Ecuaciones de lugares geométricos.

Capítulo 7. Pendiente de una recta.

Capítulo 8. Recta.

Capítulo 9. Circunferencia.

Capítulo 10. Transformación de coordenadas.

Capítulo 11. Parábola.

Capítulo 12. Elipse.

Capítulo 13. Hipérbola.

Capítulo 14. Ecuación general de segundo grado.

Capítulo 15. Funciones trigonométricas.

Capítulo 16. Funciones logarítmicas y exponenciales.

El contenido del libro cubre casi todos los temas del programa de Matemáticas 5° Año de la ENP, tiene la profundidad que se requiere, pero le falta una pequeña parte de geometría Euclidiana que el nuevo programa incluye en la unidad IV.

El contenido del nuevo programa de Matemáticas V de la ENP Plan 1996 es:

Unidad I. Relaciones y funciones.

Unidad II. Funciones trigonométricas.

Unidad III. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Unidad IV. Sistemas de coordenadas y algunos conceptos básicos.

Unidad V. Discusión de ecuaciones algebraicas.

Unidad VI. Ecuación de primer grado.

Unidad VII. Ecuación general de segundo grado.

Unidad VIII. Circunferencia.

Unidad IX. Parábola.

Unidad X. Elipse.

Unidad XI. Hipérbola.

Una diferencia que no es tan significativa entre el programa Matemáticas V y el contenido del libro anterior es el orden en el que aparecen los temas.

El enfoque de este libro es el tradicional: El profesor expone la teoría, realiza ejemplos y resuelve problemas para que finalmente el alumno resuelva una lista de ejercicios y problemas al final de cada capítulo. Por lo que no coincide con el nuevo programa que privilegia el trabajo del alumno en el salón de clases.

Una manera de atacar el problema planteado es la elaboración de materiales adecuados para el curso, de ahí la necesidad del presente Cuaderno de Trabajo como material de apoyo para el curso de Matemáticas V de la ENP porque una de sus características principales es fomentar el trabajo en equipo en el salón de clases mediante la resolución de problemas, centra la actividad de aprendizaje en el alumno y fomenta la capacidad del alumno para construir saberes.

Las características principales que tiene el presente Cuaderno de Trabajo es que está basado en la resolución de problemas y privilegia el trabajo en equipo en el aula.

Se desarrollan las unidades de Matemáticas V mediante problemas que los alumnos en equipos deben resolver siguiendo las indicaciones, hasta cubrir los temas incluidos en cada unidad. Al final de cada unidad se plantean algunos problemas propuestos y exámenes de práctica.

Al principio, en la introducción al Cuaderno de Trabajo, hay un examen diagnóstico de los conocimientos que se requiere que tenga el alumno antes de iniciar el uso de este material.

Los problemas propuestos y exámenes de práctica tienen las soluciones al final del Cuaderno de Trabajo para que los estudiantes, una vez que hayan resuelto éstos, comparen sus respuestas, se auto-evalúen y sepan en el momento adecuado si tienen que repasar algún tema.

Algo que es importante señalar es que cada vez se dejan más pâsos al estudiante en la resolución de los problemas, puesto que se considera que se van familiarizando con la manera de trabajar.

Se pone énfasis en los procesos algebraicos involucrados en los problemas por la siguiente razón: Algunos alumnos arrastran deficiencias en estos procesos y lo que se pretende es que con la práctica de los procesos algebraicos mencionados supriman paulatinamente las deficiencias.

La recomendación para usar el Cuaderno de Trabajo es que en cada unidad se distribuya el tiempo disponible de la siguiente manera:

1 hora para que el profesor haga una introducción y fije como tarea que los alumnos en equipos estudien los temas de la unidad usando la bibliografía que corresponde a esa unidad.

La parte restante del tiempo recomendado para dicha unidad debe emplearse para que los alumnos resuelvan los problemas por equipos, hagan un resumen con el profesor de los conceptos involucrados y elaboren el mapa conceptual correspondiente. En lo que se refiere a la resolución de los problemas se propone que en la medida que lo permita el tiempo y las características de cada grupo se implemente de manera explícita el método de resolución de problemas de Polya. En el marco teórico se dan tres ejemplos explícitos de cómo resolver problemas usando este método.

Es importante señalar que sería prácticamente imposible abordar todos los problemas del Cuaderno de Trabajo usando de manera explícita el método de Polya por el tiempo que se tendría que emplear en cada uno de ellos, ya que como se verá en los ejemplos mostrados en el marco teórico de un solo problema pueden surgir otros que es muy posible sean más difíciles de resolver que el del principio.

1 hora para el examen de cada unidad.

Para la evaluación se recomienda tomar en cuenta el trabajo de investigación de cada unidad, la resolución de los problemas en el salón de clases, la elaboración de los mapas conceptuales (trabajo en equipo) y exámenes. El porcentaje de cada rubro se determina de acuerdo al criterio del profesor, sin embargo para que haya correspondencia con lo afirmado acerca de que se privilegia el trabajo en el aula por los alumnos considero que el porcentaje debe ser: 40 % exámenes, 40 % trabajo en el salón de clases y 20 % el trabajo de investigación.

Para el trabajo en el aula, es importante tomar nota de la actividad realizada por cada alumno en cada clase, para que de esta manera se genere interés por el trabajo y no lo dejen todo para el final, además de tener claro cuáles dificultades se le están presentando a los alumnos para atenderla de manera inmediata y no dejarles en una situación de estancamiento que les puede producir frustración y desinterés.

MARCO TEÓRICO

La Resolución de Problemas.

En la actualidad se habla mucho de la **Resolución de Problemas** en la enseñanza de las Matemáticas, no es raro observar que el enfoque metodológico que se les da a los planes y programas de estudio es precisamente el de resolución de problemas para la adquisición del conocimiento.

Para Luz Manuel Santos Trigo (Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas) el movimiento de la **Resolución de Problemas** surge como una respuesta al fracaso de dos movimientos anteriores, que a su vez surgieron para tratar de resolver el problema de que los estudiantes no estaban aprendiendo Matemáticas de manera óptima, los cuales fueron:

Matemáticas Modernas (1960).

- Mayor énfasis en la estructura y el lenguaje formal de las Matemáticas desde los niveles elementales. Nuevos contenidos en el curriculum, como el estudio de los conjuntos y la lógica matemática. Además, se sugirió enfatizar lo formal o métodos de demostración, ya que se identificaba a la estructura matemática como un componente esencial de la disciplina.

Regreso a lo Clásico (1970).

- Importancia del manejo de las operaciones fundamentales y procedimientos algorítmicos. Surgió como una respuesta inmediata a las deficiencias que el movimiento de las Matemáticas Modernas había dejado en los estudiantes. (Tampoco mejoró el aprovechamiento de los estudiantes).

Acerca de lo benéfico que ha resultado la **Resolución de Problemas** para el desarrollo del conocimiento en Matemáticas, podemos mencionar lo escrito por algunos matemáticos sobresalientes:

- En las Matemáticas existen axiomas, principios y métodos importantes, pero el resolver problemas es el corazón de esta disciplina. (Halmos, 1980).
- El desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se origina a partir de un esfuerzo por resolver determinado problema. (Kleiner, 1986).
- La historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico. (Dieudonné, citado por Kleiner 1986).

Alan Schoenfeld (Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense-making in Mathematics, 1992) nos dice que la resolución de problemas fue el tema de los 1980's como lo predijo acertadamente Yearbook de la NCTM, al principio de la década de los 80's. La NCTM en su Agenda for Action afirma que " La resolución de problemas es el foco de las escuelas de matemáticas ". Se concluye la década con la publicación de Everybody Counts (National Research Council , 1989) y el Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 1989) ambas publicaciones haciendo énfasis en la resolución de problemas.

Lo anterior muestra que la NCTM ha identificado a la **Resolución de Problemas** como una de las metas más importantes en el aprendizaje de las matemáticas desde la década de los 1980's. Para mostrar lo anterior describimos lo que dicen los Estándares Curriculares de la NCTM (2000) respecto de la resolución de problemas:

"Los programas instruccionales de preescolar hasta el bachillerato deben permitir a los estudiantes:

- Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas;
- Resolver problemas que se presentan en Matemáticas y en otros contextos;
- Aplicar y adaptar una gran variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas;
- Monitorear y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos."

En Geometría dichos estándares curriculares dicen que los programas deben permitir a los alumnos usar la visualización, razonamiento espacial y modelos geométricos para resolver problemas.

En el ámbito de la educación media superior de México, podemos observar como interviene la **Resolución de Problemas** en el caso del bachillerato de la UNAM mencionando tres documentos:

El Programa de Estudios 1996 de 5° año (Matemáticas V) de la ENP dice lo siguiente:

" La enseñanza de las Matemáticas en la ENP, presenta a través de este programa, cambios significativos en la estructura y secuencia de los contenidos y principalmente en su enfoque metodológico, pues se orienta hacia un aprendizaje basado en la Solución de Problemas.

Por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de las funciones con sus características y propiedades, así como su representación gráfica en el plano cartesiano; las funciones trigonométricas directas e inversas; las funciones exponencial y logarítmica; la localización de puntos en tres dimensiones; la existencia del sistema de coordenadas polares; los conocimientos básicos de operación de la geometría analítica; la discusión de una ecuación y la obtención de la ecuación de un lugar geométrico, el planteamiento de problemas de la propia geometría analítica, que se resuelven aplicando los conocimientos ya enunciados. La aplicación de esta metodología privilegia el trabajo en el aula, ya que el profesor identificará con el grupo problemas tipo, posibles de resolver con el paradigma en cuestión."

Mas adelante el programa mencionado dice que:

" La metodología parte de problemas simples y de manera gradual avanza a problemas mas complejos en cada tema.

Se sugiere la elaboración de Cuadernos de Trabajo, entre otros, que ejerciten en el aula la parte operativa de los problemas de cada tema..."

Finalmente se menciona que se contribuirá al desarrollo del perfil del alumno, a través de los siguientes aspectos:

" La capacidad del alumno para aplicar lo que ha aprendido durante el curso en el planteamiento y resolución de problemas de ésta y otras disciplinas.

...

La habilidad del alumno para la búsqueda, organización y aplicación de la información que obtiene en el análisis de problemas de la realidad.

...

La aplicación de las Matemáticas en el análisis de problemas ambientales que ayuden al educando a la mejor comprensión de éstos, que lo conducirá a actuar de una manera sana y responsable.

La capacidad de trabajo en equipo, en actividades dentro del aula, en la resolución de problemas que impliquen el intercambio y la discusión de ideas."

Es importante destacar que en dicho programa se hace énfasis en resolver problemas que tengan que ver con el medio en el que se desenvuelve el estudiante, es decir, los llamados " problemas de la vida cotidiana", permitiendo así que los conocimientos matemáticos tengan un sentido de utilidad para el estudiante, atacando el tan difundido cuestionamiento de ¿para qué sirven las matemáticas?

El Plan de Estudios Actualizado del CCH 1996 dice lo siguiente respecto a como se considera la enseñanza de la Matemática:

" En contraposición con una concepción que supone que la formalización es el punto de partida de la Matemática y la presenta en la enseñanza como un conjunto perfectamente acabado de conocimientos y técnicas, ordenados en un riguroso esquema lógico-deductivo, se considera, en esta propuesta educativa, que la Matemática es un saber que se construye: sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana y que paulatinamente evolucionan y alcanzan niveles cada vez más amplios de rigor, abstracción, generalización y formalización."

Dentro de los Aspectos Pedagógicos del Bachillerato del Colegio se menciona que uno de los que se debe atender es:

" Acentuar su participación y actividad, puesto que la cultura básica tiene como componentes esenciales habilidades de trabajo intelectual para inquirir, y acopiar, ordenar y calificar información, la adquisición de las cuales depende de su ejercicio, a través del planteamiento y la resolución de problemas, la experimentación, la observación sistemática, la investigación en fuentes documentales, clásicas y modernas, la discusión."

El otro documento que se menciona es el Núcleo de Conocimientos y Formación Básicos que debe proporcionar el Bachillerato de la UNAM (NCFB). Partiendo de las ideas en las que coinciden la ENP y el CCH y tomando como referencia sus programas de estudio se formularon los desempeños correspondientes a la Matemática para el NCBF, es decir, lo que es esencial que aprendan los alumnos. Mencionaremos primero la orientación que se propone para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en este nivel educativo:

" Favorecer la comprensión y la capacidad de aplicación de conceptos y procedimientos matemáticos esenciales.

Promover la valoración, el interés y el gusto por la Matemática como una ciencia en constante desarrollo, base de la belleza y armonía de muchas de las grandes creaciones del hombre y con una gran versatilidad para el desarrollo y la comprensión de otros campos del conocimiento."

En cuanto a los conocimientos, habilidades, valores y actitudes generales se menciona la solución de problemas en los términos siguientes:

- Emplea el razonamiento y el lenguaje matemático para valorar conclusiones y argumentos, y para construir otros.
- Valora la aplicación y desarrollo de modelos matemáticos para resolver problemas de diversas disciplinas y de la vida cotidiana.
- Propone diversos enfoques para la solución de problemas.
- Explica y justifica el procedimiento empleado para la resolución de un problema, obtiene el resultado y lo interpreta.
- Generaliza el procedimiento de solución de un problema a situaciones similares.
- Emplea, en lo posible, la calculadora y la computadora como herramienta para auxiliarse en la solución de problemas.
- Infiere, conjetura y generaliza ideas matemáticas fundamentales y las emplea para la solución de problemas.

Como podrá observarse en los tres documentos anteriores en el bachillerato de la UNAM se considera la **Resolución de Problemas** como el hilo conductor en la enseñanza de la Matemática.

Me parece muy importante citar lo que dice Mialaret[1] (citado en Blanca M. Parra. Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas, 1990) acerca de los problemas guiados:

" Mialaret señala que estos problemas familiarizan al estudiante con la aplicación de lo aprendido al nivel de las operaciones, a la resolución de problemas."

La importancia de lo anterior radica en que una gran parte de nuestros alumnos llegan a la clase de geometría analítica con grandes deficiencias en el manejo de las operaciones algebraicas usadas ahí, es de esperarse que si usan un material basado en la resolución de problemas guiados donde se hace énfasis en dichas operaciones podrán eliminar esas deficiencias.

George Polya (How to Solve it, 1967) describe la experiencia de resolución de problemas de la siguiente manera:

" Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo."

Como parte de su trabajo sobre resolución de problemas, Polya desarrolló un proceso que consta de cuatro fases:

- Entender el problema.
- Diseñar un plan.
- Llevar a cabo dicho plan.
- Regresar a analizar el proceso de solución.

Lo que se puede observar en las apreciaciones de Polya es que encuentra motivante para los estudiantes la resolución de problemas y considera que incluso pueden disfrutarlo, cosa que resulta excelente para la enseñanza de las matemáticas pues generalmente los estudiantes las consideran aburridas y sin utilidad práctica.

Polya considera que las personas con alguna experiencia en la resolución de problemas se hacen consciente o inconscientemente algunas preguntas en cada una de las 4 fases con el fin de facilitar el camino, algunas de tales preguntas se listan a continuación:

- **Comprender el problema.** ¿ Cuál es la incógnita? ¿ Cuáles son los datos? ¿ Cuál es la condición? ¿ Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿ Es suficiente? ¿ Redundante? ¿ Contradictoria?

- **Concebir un plan.** ¿ Se ha encontrado antes con un problema semejante? ¿ O ha visto el problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿ Conoce un problema relacionado con éste? ¿ Conoce algún teorema que le puede ser útil?

[1] Gaston Mialaret . Psicólogo francés que se ha dedicado a la educación. Algunos libros escritos por él son: Introducción a las ciencias de la educación, Nueva psicología científica, Psicología de la educación, Educación nueva y mundo moderno, El derecho del niño a la educación, Las matemáticas: Cómo se aprenden, cómo se enseñan.

Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿ Podría usted utilizarlo? ¿ Podría utilizar su resultado? ¿ Podría emplear su método? ¿ Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿ Podría enunciar el problema en otra forma? ¿ Podría plantearlo en forma diferente? Refiérase a las definiciones. Si no se puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿ Podría imaginarse un problema análogo un tanto mas accesible? ¿ Un problema mas general? ¿ Un problema mas particular? ¿ Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿ En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿ En qué forma puede variar? ¿ Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿ Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿ Puede cambiar la incógnita? ¿ Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén mas cercanos entre sí? ¿ Ha empleado todos los datos? ¿ Ha empleado toda la condición? ¿ Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

- **Ejecución del plan.** Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos. ¿ Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿ Puede usted demostrarlo?

- **Visión Retrospectiva.** ¿ Puede usted verificar el resultado ? ¿ Puede verificar el razonamiento ? ¿ Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿ Puede verlo de golpe? ¿ Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Polya cree que las preguntas que aparecen en cada uno de las 4 fases son las que se hacen inconscientemente las personas que tienen serios deseos de resolver un problema y que si se implementa la resolución de problemas en el salón de clases el maestro puede guiar a los alumnos cuando están resolviendo un problema haciéndoles las preguntas mencionadas o una parte de ellas en cada fase. También considera que conforme resuelven gran cantidad de problemas estas preguntas se las hacen ellos sin que el profesor intervenga.

Polya también afirma que resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica que se adquiere mediante la imitación y la práctica, por tanto el maestro debe resolver algunos problemas para que los alumnos lo observen y después los alumnos deben practicar con otros problemas.

Alan Schoenfeld (citado en Luz Manuel Santos Trigo. Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas, 1992) reconoce la importancia de relacionar la naturaleza del desarrollo de las matemáticas con el proceso de resolver problemas. Considera que se debe adoptar un "microcosmo matemático" en el salón de clases. Esto es, propiciar en el aula condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el desarrollo de las matemáticas. Reconoce que la actividad de resolver problemas es de suma importancia en el proceso de aprendizaje de esta disciplina.

Schoenfeld considera que hay 4 dimensiones que influyen en la forma de cómo se resuelven problemas:

Dominio del conocimiento. Incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático.

Estrategias cognoscitivas. Incluye estrategias heurísticas tales como descomposición del problema en problemas más simples, establecer metas relacionadas, invertir el problema y dibujar diagramas.

Estrategias metacognoscitivas. Se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso.

Sistemas de creencias. Incluye las ideas que los estudiantes tienen acerca de la matemática y cómo resolver problemas.

Schoenfeld indicó que los estudiantes deben reconocer los principios epistemológicos de esta disciplina. Por ejemplo;

1) Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de este problema.

2) Aprender matemáticas es un proceso activo el cual requiere de conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Schoenfeld también piensa que es necesario considerar actividades de aprendizaje que sean consistentes con los principios epistemológicos.

Algunas actividades de aprendizaje utilizadas por Schoenfeld y que el considera consistentes con los principios epistemológicos mencionados antes son:

a) Resolver problemas nuevos (nuevos para Schoenfeld) en la clase con la finalidad de mostrar a los estudiantes las decisiones tomadas durante el proceso de resolver el problema.

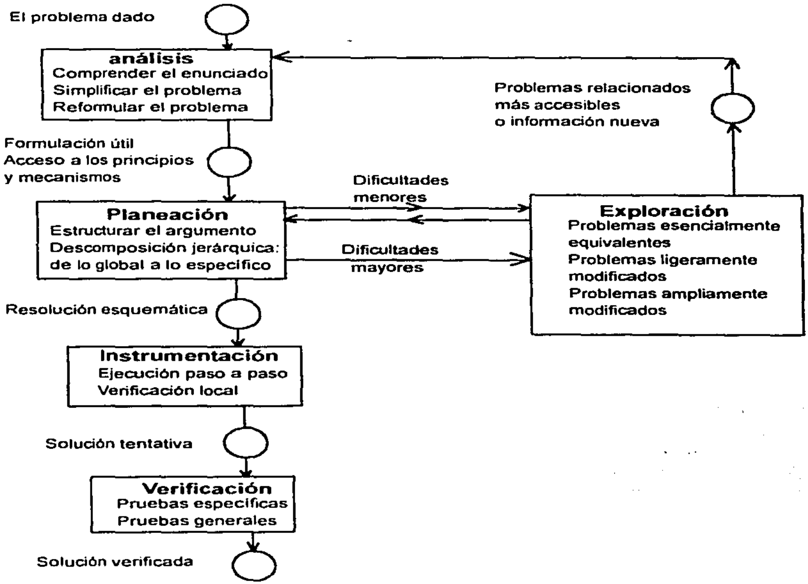
b) Mostrar videos de otros estudiantes resolviendo problemas a la clase. Esto es con la finalidad de discutir las destrezas y debilidades mostradas por los estudiantes en el proceso de resolver problemas.

c) Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas en la clase. Aun cuando los estudiantes son motivados a seleccionar y tratar; ideas que ellos consideren plausibles, el moderador puede proveer algunas direcciones que son de valor para la discusión.

d) Dividir la clase en pequeños grupos los cuales discuten problemas matemáticos. El papel del coordinador es elaborar preguntas que ayuden a los estudiantes a reflexionar en lo que están haciendo. Por ejemplo, por qué han seleccionado determinada estrategia, o por qué deben enfocar a buscar otras alternativas.

Schoenfeld también sugirió que el principal objetivo en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos.
En el Club de Matemáticas del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Wilfrido Massieu del Instituto Politécnico Nacional en "La Resolución de Problemas en el Salón de Clases: Matemáticas" consideran que la estrategia que usan la mayoría de los buenos resolvedores de problemas es la que se esquematiza en el siguiente diagrama de flujo.

SÍNTESIS ESQUEMÁTICA DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

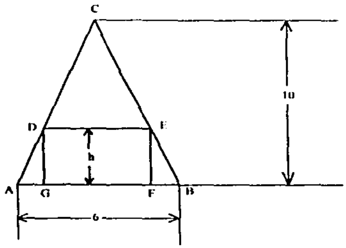


Se debe notar que este diagrama de flujo utiliza en mayor o menor medida lo sugerido por Polya en su proceso de las 4 fases, por ejemplo el análisis corresponde a entender el problema, planeación y exploración corresponde a Idear un plan, instrumentación corresponde a llevar a cabo el plan y verificación corresponde a la visión retrospectiva.

Los cuatro problemas resueltos a continuación son un ejemplo de cómo se emplea el método de Polya en la resolución de problemas y de cómo se espera que se aborden algunos de los problemas del Cuaderno de Trabajo. Las preguntas que se realizan en cada problema son hechas por el profesor y se espera que conforme los alumnos se van familiarizando, se hagan estas mismas preguntas ellos mismos:

Problema 1. (Es el problema propuesto 6. de la Unidad I del Cuaderno de Trabajo)

Dado el triángulo isósceles mostrado en la siguiente figura, expresar el área del rectángulo DEFG como función de la altura h.



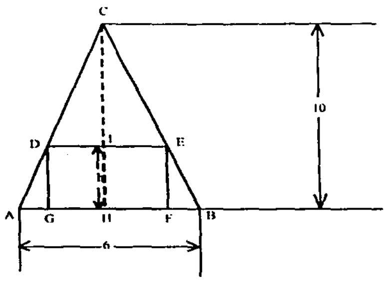
Entender el problema:

¿ Qué se pide ? Una función A(h) que nos proporcione el área del rectángulo DEFG, donde h es la altura del rectángulo mencionado.

¿ Qué datos tengo ? La base del triángulo ABC es 6 y la altura 10.

Diseñar un plan:

¿ Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente ? Si. El mismo problema pero con un triángulo rectángulo. Dicho problema se puede utilizar si consideramos en el original la altura del triángulo ABC que lo divide en dos triángulos rectángulos iguales HBC y HAC de base 3 y altura 10, hallamos el área del rectángulo para uno de estos triángulos y el resultado del problema original será el doble del área hallada. Ver la figura:



Si queremos calcular el área del rectángulo IEFH en términos de h, consideramos el triángulo rectángulo HBC y observamos que si pudiéramos expresar el segmento HF en términos de h nuestro problema quedaría resuelto porque el área del rectángulo IEFH está dado por la expresión (HF)(h). Para expresar HF en términos de h, notamos que los triángulos IEC y HBC son semejantes con lo cual tendremos la siguiente igualdad:

$$\frac{10}{10-h}=\frac{3}{HF}$$

con lo cual se puede expresar HF en términos de h.

Ejecución del plan:

Trazamos la altura CH en el triángulo ABC, entonces se obtienen los triángulos congruentes CAH y CBH, lo cual significa que HB = 3.

En el triángulo CHB tenemos que son semejantes los triángulos IEC y HBC por tener todos sus ángulos iguales, entonces:

$$\frac{10}{IC}=\frac{3}{IE}$$

Pero IC = 10 – h, IE = HF, por lo tanto:

$$\frac{10}{10-h}=\frac{3}{HF}$$

Despejando HF obtenemos:

$$HF=\frac{3(10-h)}{10}$$

Entonces el área del rectángulo IEFH en términos de h será:

$$\frac{3h(10-h)}{10}$$

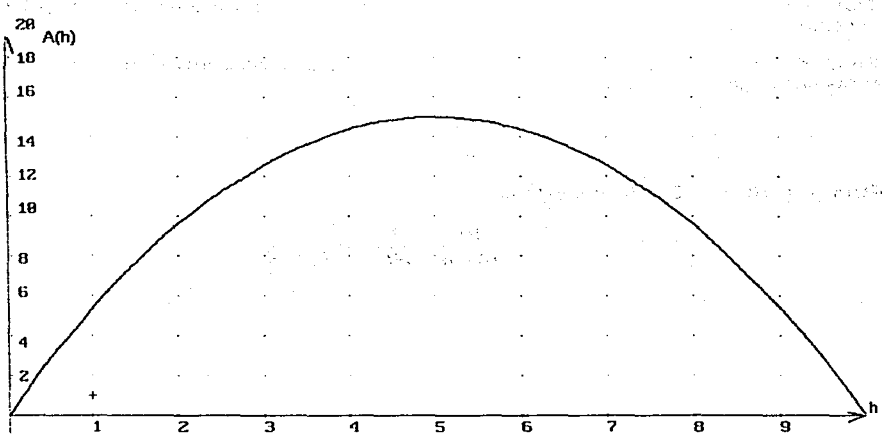
Finalmente el área A(h) del rectángulo DEFG es:

$$A(h)=2\cdot\frac{3h(10-h)}{10}=\frac{3h(10-h)}{5}$$

¿ Para diferentes alturas, las áreas de los rectángulos son iguales? No. Lo anterior se puede observar en la siguiente tabla que nos proporciona el área del rectángulo para diferentes alturas.

Altura h	Área A(h)
1	27/5 = 5.4
2	48/5 = 9.6
3	63/5 = 12.6
4	72/5 = 14.4
5	75/5 = 15
6	72/5 = 14.4
7	63/5 = 12.6
8	48/5 = 9.6
9	27/5 = 5.4

Gráfica de A(h):



¿ Habrá un rectángulo que tenga la mayor área posible? Si. La gráfica anterior nos muestra que si la altura del rectángulo es 5 se obtiene el máximo valor para el área que es 15.

Visión retrospectiva.

¿ Parece razonable la solución ? Si. Los resultados de la tabla muestran que los rectángulos obtenidos para diferentes alturas empiezan con áreas pequeñas, van creciendo hasta obtener un rectángulo de área máxima y empiezán a decrecer que es lo que uno esperaba que sucediera.

¿ Puede obtener el resultado de manera diferente? Si. Considerando el resultado que dice que en dos triángulos semejantes las alturas son proporcionales con la misma constante de proporcionalidad que los lados. El problema se resuelve observando que el triángulo ABC es semejante con DEC, la altura de DEC es IC y la de ABC es HC, entonces:

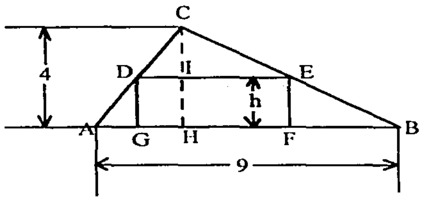
$$\frac{10}{10-h}=\frac{6}{DE}$$

Despejando DE y calculando el área A(h) del rectángulo DEFG, tendremos:

$$DE=\frac{6(10-h)}{10}=\frac{3(10-h)}{5}$$

$$A(h) = h\cdot\frac{3(10-h)}{5}=\frac{3h(10-h)}{5}$$

¿ Puede emplear el método en algún otro problema? Si. Supongamos que ABC es cualquier triángulo de altura 4, base 9 y queremos hallar el área del rectángulo DEFG mostrado en la siguiente figura:



El triángulo ABC es semejante al DEC y sus alturas son CH = 4 e IC = 4 – h respectivamente, entonces:

$$\frac{9}{DE}=\frac{4}{4-h}$$

Despejando DE y calculando el área A(h) del rectángulo DEFG en términos de h:

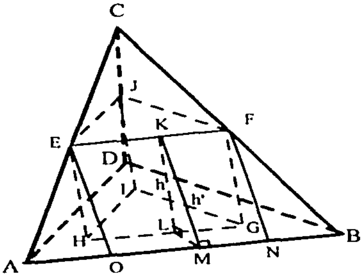
$$DE=\frac{9(4-h)}{4},\ A(h) = \frac{9h(4-h)}{4}$$

¿ Puede generalizar el resultado? Si. Supongamos que el triángulo ABC tiene altura k y base b, entonces el área A(h) del rectángulo DEFG sería:

$$A(h)=\frac{bh(k-h)}{k}$$

Una generalización en otro sentido es considerar el problema en el espacio, Por ejemplo :

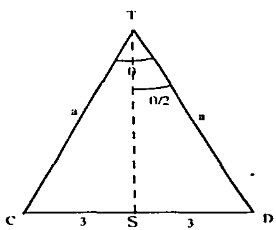
Hallar el volumen del prisma triangular EFGHIJ inscrito en el tetraedro regular ABCD de lado 6 que se muestra en la figura siguiente:



Todos los lados del tetraedro miden 6.

El problema anterior se puede resolver considerando lo siguiente: KM = h' es la altura del rectángulo EFNO que está sobre el triángulo ABC, KL = h es la altura del prisma EFGHIJ. Si pudiéramos expresar h' en términos de h, calcular la longitud del segmento EF en términos de h con el método del problema original y hallar el área del triángulo EFJ, estaría resuelto nuestro problema porque el volumen del prisma sería el área de la base por la altura y todo quedaría en términos de h.

Para expresar h' en términos de h necesitamos saber a qué es igual el seno del ángulo KML. Ese ángulo se puede calcular si consideramos el triángulo que se forma al cortar el tetraedro con un plano perpendicular al plano que contiene a ABD y que pase por el segmento CD, dicho triángulo se muestra en la siguiente figura:



En la figura anterior a es la altura de los triángulos ABD y ABC, se puede comprobar que $a = \sqrt{27}$; con los datos anteriores también se puede comprobar que TS = $\sqrt{18}$, entonces:

$$sen(\tfrac{\theta}{2}) = \frac{3}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \cos(\tfrac{\theta}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Entonces usando la fórmula del seno de la suma de dos ángulos $sen(2\phi) = 2sen(\phi)\cos(\phi)$ tendremos lo siguiente:

$$\text{Si} \quad \phi = \frac{\theta}{2} \qquad sen\theta = 2(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

En el triángulo rectángulo KML :

$$sen\theta = \frac{h}{h'} \quad , \quad \frac{h}{h'} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \qquad h' = \frac{3h}{2\sqrt{2}}$$

Restringiéndonos al triángulo ABC, la longitud del segmento EF está dada por:

$$EF = \frac{6(\sqrt{27} - h')}{\sqrt{27}}$$

Pero $h' = \dfrac{3h}{2\sqrt{2}}$, entonces:

$$EF = \frac{6(\sqrt{27} - \frac{3h}{2\sqrt{2}})}{\sqrt{27}}$$

Tenemos ya expresado el lado del triángulo equilátero EFJ en términos de h, con lo que podemos calcular su área en términos de h y el volumen del prisma EFGHIJ será esta área multiplicada por h.

$$V(h) = \frac{h\left(6 - \frac{3h}{\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{\left(6 - \frac{3h}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(3 - \frac{3h}{2\sqrt{6}}\right)^2}\right)}{2}$$

Problema 2. (Es el problema propuesto 8. de la Unidad III del Cuaderno de Trabajo)

Se ingieren 3 mg de cierto medicamento. Si el cuerpo elimina el 10% en 8 horas. Dar una función C(t) que nos proporcione la cantidad de medicamento en el cuerpo en el tiempo t.

Entender el problema.

¿ Qué se pide? Una función C(t) que nos proporciona la cantidad de medicamento restante en el cuerpo en el tiempo t.

¿ Qué datos tengo? La cantidad inicial de medicamento = 3 mg. El cuerpo elimina el 10% del medicamento en 8 horas.

Diseñar un plan.

¿ Podría imaginarse un problema análogo un tanto mas sencillo? Si. Supongamos que en vez de eliminar el 10% en 8 horas, elimina el 10% en una hora, entonces la siguiente tabla nos da la solución:

Tiempo horas	**Cantidad restante**
1	$3-3(.1)=3(.9)$
2	$3(.9)-[3(.9)](.1)=3(.9)^2$
3	$3(.9)^3$
4	$3(.9)^4$
. .	. .
n	$3(.9)^n$

La tabla anterior nos indica que si C(n) es la cantidad de medicamento restante en el cuerpo después de n horas, dicha cantidad está dada por la siguiente expresión:

$$C(n)=3(.9)^n$$

Lo anterior nos sugiere que para resolver el problema original podemos usar una tabla.

Llevar a cabo dicho plan.

La siguiente tabla nos proporciona la cantidad restante de medicamento en el cuerpo en periodos de 8 horas.

Tiempo (periodos de 8 horas)	**Cantidad Restante en mg**
1	$3(.9)$
2	$3(.9)^2$
3	$3(.9)^3$
4	$3(.9)^4$
. . .	. . .
n	$3(.9)^n$

Si C(n) representa la cantidad de medicamento restante en n periodos de 8 horas, entonces:

$$C(n) = 3(.9)^n$$

Si queremos que el tiempo esté en horas, observamos que 1 hora es la 8ª parte de un periodo de 8 horas, entonces:

$$C(t) = 3(.9)^{\frac{t}{8}}$$ donde t está en horas.

¿ En cuánto tiempo habrá 1.2 mg ? Para responder esta pregunta podemos considerar que el cuerpo elimina el medicamento de manera continua, despejar el tiempo t en la fórmula anterior y considerar que C(t) = 1.2:

Dividimos entre 3 y aplicamos logaritmos naturales:

$$\ln\left(\frac{C(t)}{3}\right) = \ln\left(.9^{\frac{t}{8}}\right)$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$\ln\left(\frac{C(t)}{3}\right) = t\ln\left(.9^{\frac{1}{8}}\right)$$

Finalmente se obtiene:

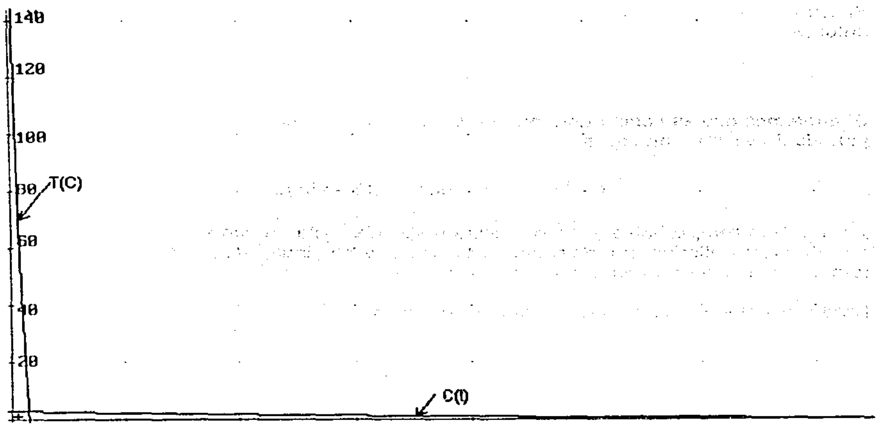
$$t = \frac{\ln\left(\frac{1.2}{3}\right)}{\ln\left(.9^{\frac{1}{8}}\right)} = 69.5$$

Lo que significa que en 69.5 horas habrá 1.2 gr de medicamento en el cuerpo. Es importante señalar que la fórmula para C(t) y la suposición de que el cuerpo elimina de manera continua el medicamento es un modelo que trata de describir la situación real que dice que el cuerpo elimina el 10% de la cantidad inicial en 8 horas. No sabemos si el cuerpo elimina dicho medicamento de manera continua o discreta.

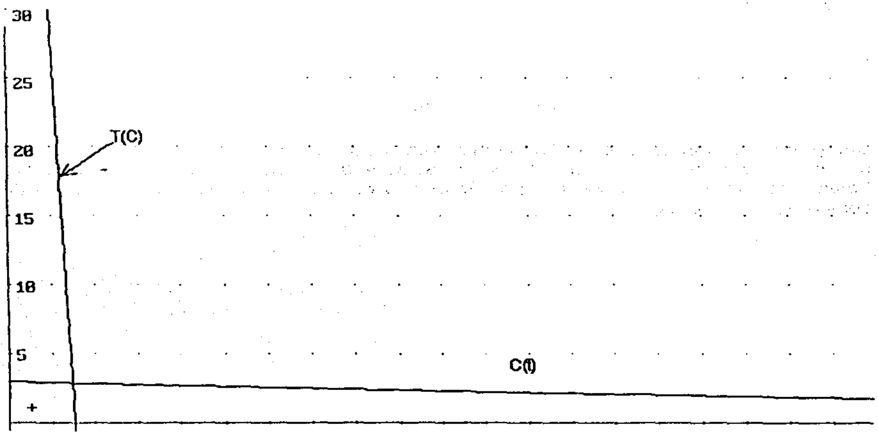
Si le llamamos T(C) al tiempo que depende de la cantidad de medicamento C observamos que es una función, la función inversa de la primera función cuya regla de correspondencia es:

$$T(C) = \frac{\ln\left(\frac{C}{3}\right)}{\ln\left(.9^{\frac{1}{8}}\right)}$$

La gráfica de las dos funciones se muestra a continuación:



Una aproximación en las gráficas anteriores nos muestra mejor las gráficas de las funciones C(t) y su inversa T(C).



Visión retrospectiva.

¿ Parece razonable la solución? Si porque aplicando la fórmula anterior para 8 horas obtenemos 3(.9) que es la cantidad restante para el primer período de 8 horas.

¿ Puede verificar el resultado? Si. Al sustituir el tiempo t por 8, 16, 24, 32, etc. Obtenemos la misma cantidad restante que en la tabla donde el tiempo está en períodos de 8 horas.

¿ Puede emplear el método en algún otro problema? Si. En problemas de Poblaciones y de desintegración radiactiva. Por ejemplo: Se tiene una población de 1500 peces que decrece a razón de 15% cada mes. Dar una expresión que nos proporcione la cantidad restante de peces en el tiempo t dado en días.

Con una tabla podemos deducir que la cantidad C(t) está dada por:

$C(t) = 1500(.85)^{\frac{t}{30}}$ donde t está dado en días.

Otro ejemplo que se refiere a desintegración radiactiva: La vida media del radio es de 1690 años. Si se tienen actualmente 10 gr. Dar una expresión para la cantidad restante de radio a través del tiempo t en años. Los datos nos indican que se desintegra el 50% en 1690 años, por lo tanto la expresión buscada es:

$C(t) = 10(.5)^{\frac{t}{1690}}$ donde t está en años.

¿ Puede generalizar el problema? Si. Por ejemplo: Se tienen x gramos de sustancia en el cuerpo que se elimina y% cada r horas. Dar una expresión para la cantidad de sustancia restante en el cuerpo a través del tiempo en horas.

Procediendo como se ha hecho anteriormente, obtenemos la solución:

$$C(t) = x\left(1-\tfrac{y}{100}\right)^{\frac{t}{r}}$$ donde t está en horas.

Una generalización en otro sentido del problema puede ser: Se inyectan 3 mg de cierto medicamento a un paciente cada 12 horas. Se sabe que el cuerpo elimina el 10% cada 8 horas. Dar una expresión que nos proporcione la cantidad de medicamento a través del tiempo dado en horas.

Problema 3. (Es el problema 1 de la Unidad X del Cuaderno de Trabajo)

Construir con regla y compás puntos por los que pasa la elipse de focos los puntos F', F y cantidad constante 2a representada por el segmento LM para dibujar dicha elipse.

Entender el problema.

¿ Qué se pide? Construir puntos por los que pasa la elipse de focos F', F y cantidad constante 2a.

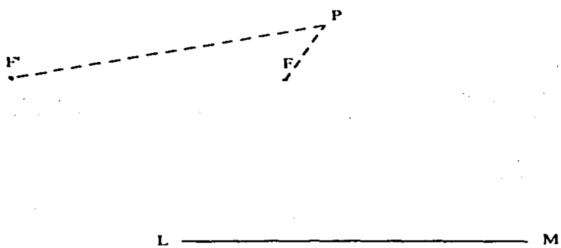
¿ Qué datos tengo? Los puntos F', F que representan los focos de la elipse y el segmento LM que representa la cantidad constante 2a. La definición de elipse: Es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante representada por 2a.

¿ Cuál es la condición ? Los puntos P deben ser tales que d(P,F') + d(P,F) = 2a.

Diseñar un plan.

Al observar la siguiente figura que contiene los datos del problema, vemos que lo que queremos es construir puntos P tales que:

$$d(P,F') + d(P,F) = 2a$$



Como la distancia de P a F' mas la distancia de P a F es la longitud del segmento LM, esto nos sugiere que consideremos un punto Q en LM, con el compás tomar la distancia de L a Q, apoyarnos en F' y trazar la circunferencia de centro F' y radio LQ, después tomar la distancia de Q a M, apoyarnos en F y trazar la circunferencia de centro F y radio QM; las dos circunferencias anteriores se intersecan en dos puntos P y P' que cumplen con la condición pedida que es:

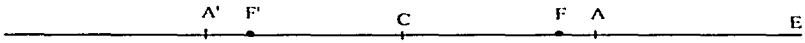
$$d(P,F') + d(P,F) = d(L,M) = 2a$$
$$d(P',F') + d(P',F) = d(L,M) = 2a$$

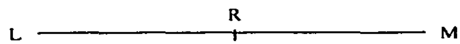
Lo hecho anteriormente se puede seguir haciendo si colocamos el segmento LM en la recta que determinan los focos F' y F; además en cada paso podemos trazar 4 circunferencias que determinarían 4 puntos por los que pasaría la elipse.

Ejecución del plan.

Realizar los siguientes pasos:

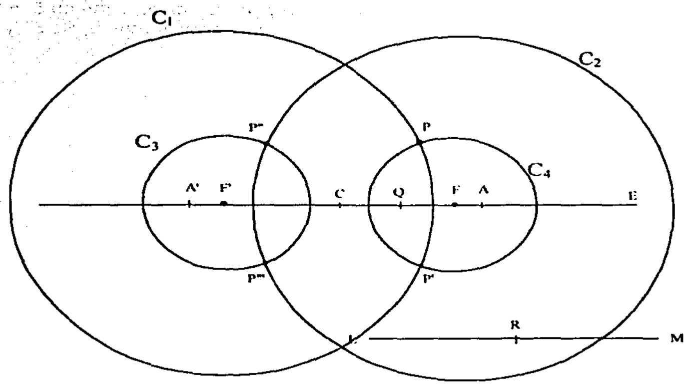
1. Trazar la recta que pasa por los focos F' y F. Le llamamos E a dicha recta.
2. Trazar el punto medio del segmento F'F. Le llamamos C a tal punto.
3. Trazamos el punto medio de LM, le llamamos R, con el compás tomamos la distancia LR y apoyándonos en C trazamos dos arcos que cortan a la recta E en dos puntos, les llamamos A' y A. Ver la figura:





Puesto que la longitud de LM es 2a, la longitud de LR es a y por tanto Las longitudes de CA y A'C son a, como consecuencia de lo anterior la longitud del segmento A'A es 2a.

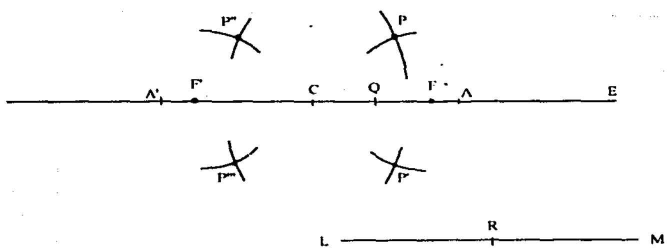
4. Trazamos un punto Q en el segmento F'F.
5. Con el compás tomamos la longitud A'Q y trazamos las circunferencias con centro en F' y F y radio la longitud A'Q. Hacemos lo mismo tomando la longitud QA. Las cuatro circunferencias anteriores determinan 4 puntos P, P', P'' y P'''. Mostraremos que estos puntos satisfacen la condición del problema basándonos en la siguiente figura.



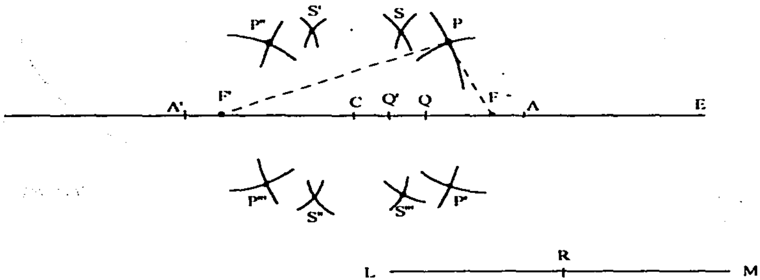
$d(P,F') = d(A',Q)$ porque son el radio de la circunferencia C_1 , $d(P,F) = d(Q,A)$ porque son el radio de la circunferencia C_4 . Entonces:

$$d(P,F') + d(P,F) = d(A',Q) + d(Q,A) = d(A',A) = 2a$$

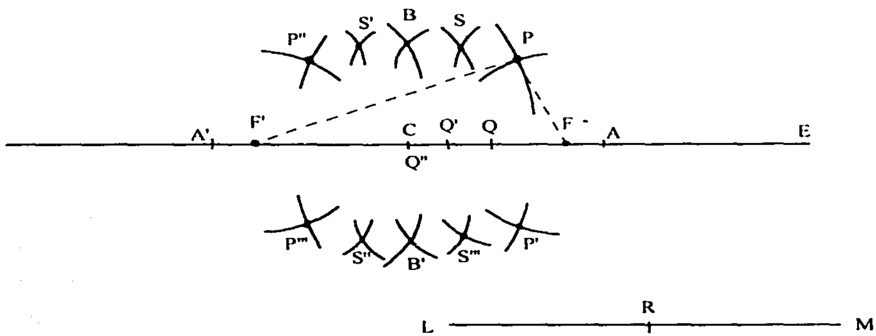
Por lo que P es un punto que está en la elipse de focos F', F y cantidad constante 2a. Del mismo modo se demuestra que P', P'' y P''' son puntos de dicha elipse. Si en lugar de las circunferencias completas dibujamos únicamente pequeños arcos de circunferencia la figura anterior queda así:



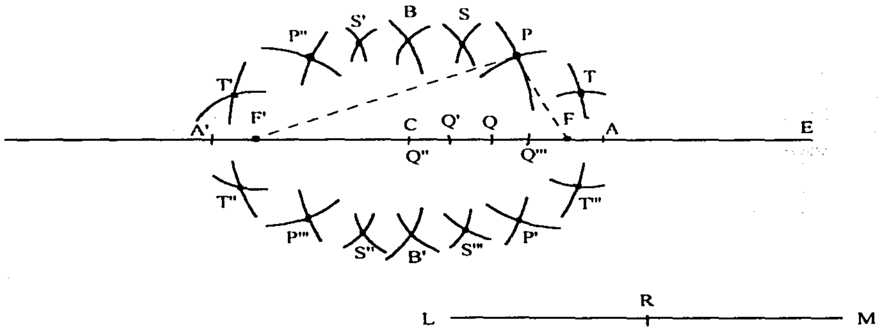
6. Trazamos el punto Q' en el segmento F'F y procediendo como en 5. dibujamos los arcos de circunferencias que se intersecarán en los puntos S, S', S" y S'" como lo muestra la siguiente figura:



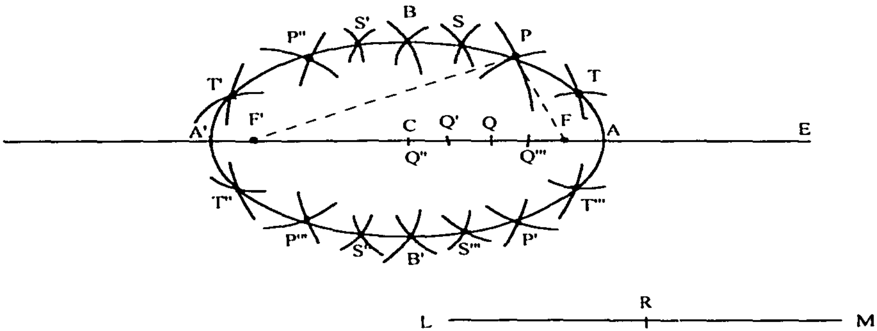
7. Trazamos el punto Q" = C en F'F y se procede como en 5. para obtener los puntos B y B' que están en la perpendicular a la recta E que pasa por C. Ver la siguiente figura:



8. Trazamos Q''' en F'F para obtener los puntos T, T', T'' y T''' como se muestra en la siguiente figura:



9. Unimos Los puntos obtenidos con un trazo continuo. Para obtener la siguiente figura:



Los puntos A y A' están en la elipse por lo siguiente:

$$d(C,F)+d(F,A)=d(C,F')+d(A',F')=a$$

Como $d(C,F)=d(C,F')$, entonces

$$d(A,F)=d(A',F')$$

Usando esto, tendremos:

$$d(A,F)+d(A,F')=d(F',F)+2d(A,F)=d(F',F)+d(A,F)+d(A',F')=2a$$

Con lo cual se demuestra que A es un punto que pertenece a la elipse de focos F, F' y cantidad constante 2a. Del mismo modo se muestra que A' pertenece a dicha elipse.

El segmento AA' es el eje mayor de la elipse y BB' el eje menor.

Visión Retrospectiva.

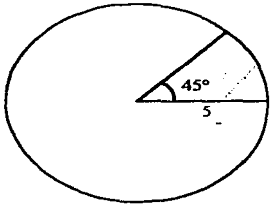
¿ Puede verificar el resultado ?. Si. Los puntos obtenidos satisfacen la condición como se mostró en el paso 5.

¿ Puede emplear el método en algún otro problema ? Si. En los problemas de construcción de puntos por los que pasa una hipérbola dados los focos y la cantidad constante y una parábola dados el foco y la directriz.

Una actividad alternativa en este tipo problema y que se sugiere que los profesores tengan presente es construir los puntos por los que pasa una elipse usando doblado de papel encerado.

Problema 4. (Es el Problema 7 y el problema propuesto 6 de la Unidad VIII del Cuaderno de Trabajo)

Hallar el área del sector circular señalado en la siguiente figura:



Entender el problema.

¿ Que se pide ? El área del sector circular señalado en la figura.

¿ Que datos tengo ? El radio de la circunferencia es 5 y el ángulo central del sector circular es 45°.

Diseñar un plan.

La figura anterior nos sugiere que como 45° es la octava parte del ángulo de una vuelta, entonces el sector señalado es la octava parte de todo el círculo.

Ejecución del plan.

$$\text{Area del circulo} = 25\pi$$

$$\text{Area del sector} = \frac{25\pi}{8}$$

Visión retrospectiva.

¿ Parece razonable la solución ? Si. Ya que el sector circular es la octava parte del círculo completo cuya área es 25π.

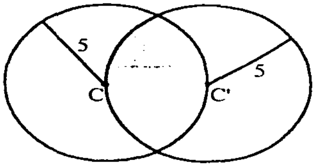
¿ Puede verificar el resultado ? Si. Al dividir el área del círculo entre 8 obtenemos el área del sector circular: $25\pi/8$.

¿ Puede generalizar el resultado ? Si. Si en el problema resuelto el radio es r y el ángulo central del sector circular señalado es θ el área de dicho sector será:

$$\text{Area del sector} = \frac{\pi r^2}{\frac{360}{\theta}} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$ Si el ángulo está en grados.

$$\text{Area del sector} = \frac{\pi r^2}{\frac{2\pi}{\theta}} = \frac{\theta r^2}{2}$$ Si 0 está en radianes.

¿ Puede emplear el método en algún otro problema ? Si. Por ejemplo: Hallar el área señalada en la siguiente figura donde C y C' son los centros de las circunferencias.



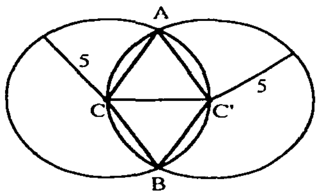
Entender el problema.

¿ Qué se pide ? El área de la intersección de las dos circunferencias señalada en la figura anterior.

¿ Qué datos tengo ? C y C' son los centros de las circunferencias, el radio de ambas circunferencias es 5.

Diseñar un plan.

¿ Conoce un problema que se relacione con éste ? Si. El problema anterior se puede aplicar aquí observando que el área de la parte señalada es el área de dos sectores circulares y dos "casquetes" circulares cuya área se puede calcular como el área de un sector circular menos el área de un triángulo equilátero.



Ejecución del plan.

Los ángulos ACC' y BCC' miden 60° = $\pi/3$ radianes por ser ángulos de un triángulo equilátero.

El área de los sectores circulares determinados por esos ángulos es: $A = \frac{5^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \approx 13.09$

Los lados de los triángulos equiláteros ACC' y BCC' miden 5 por ser radios de las circunferencias. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que la altura de dichos triángulos mide aproximadamente 4.33 por lo tanto el área de cada uno de dichos triángulos es: (5)(4.33)/2 = 10.825.

El área de cada "casquete" es 13.09 – 10.825 = 2.265.

Finalmente el área de la región señalada es: 2(13.09) + 2(2.265) = 30.71.

Constructivismo.

Respecto de lo que es el constructivismo me parece importante lo que escribe Lochhead en 1985 (citado por Donald M. Blais en Constructivismo: una Revolución Teórica para el álgebra. 1988):

" Lo que veo como crítico en la nueva ciencia cognitiva es la aceptación de que el conocimiento no es una entidad que pueda simplemente ser transferida de quien la posee hacia quien no la tiene... El conocimiento es algo que cada alumno debe construir para sí y por sí mismo. Esta visión del conocimiento como construcción individual... se denomina comúnmente como constructivismo."

El mismo Donald M. Blais considera que dentro del constructivismo, la educación se ve como un proceso diseñado para transformar a un principiante en experto, ilustrado en el siguiente esquema:

$$\text{Principiante} \quad \xrightarrow{\text{Educación}} \quad \text{Experto}$$

Además considera que cuando se acepte esta teoria, la manera en que enseñamos matemáticas y ciencia cambiará radicalmente.

El constructivismo para Luis Moreno Armella y Guillermina Waldegg (Constructivismo y educación, 1992) es la corriente que considera a la matemática como objeto de aprendizaje y enumeran sus principales características de la siguiente manera:

- El conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, construidos por él mismo en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurre en sus estructuras cognoscitivas.

- La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos, sino esencialmente una actividad.

- La tarea del educador constructivista, consistirá en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consistirá en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos.

- Una didáctica basada en teorias constructivistas exige también una mayor actividad por parte del educador. Este ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto, con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecible, y exige del educador una constante actividad.

El constructivismo se opone a la otra escuela llamada Realismo Matemático que considera la matemática como objeto de enseñanza: Los objetos matemáticos existen fuera del sujeto cognoscente, se privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto.

Mencionaremos ahora lo que para César Coll e Isabel Solé (Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica, 1989) es el aprendizaje escolar en la concepción constructivista:

" El aprendizaje significativo es el ingrediente esencial... Aprender significativamente quiere decir poder atribuir significado al material objeto de aprendizaje... Dicha atribución sólo puede efectuarse a partir de lo que ya se conoce, mediante la actualización de esquemas de conocimiento pertinentes para la situación que se trate... En síntesis: Aprender significativamente supone la posibilidad de atribuir significado a lo que se debe aprender a partir de lo que ya se conoce."

El aprendizaje significativo es contrario a memorizar algunos conceptos y procedimientos cuya única finalidad es vaciarlos en un examen para aprobar el curso y después olvidarlos. Puesto que dicho aprendizaje significativo se basa en lo que ya se conoce, se hace necesario tener algún(os) instrumentos que nos permitan conocer el estado de los conocimientos previos del alumno.

A continuación se describe cómo interviene el maestro, la didáctica y los objetivos de cualquier curso:

"La acción didáctica debe partir del bagaje de los conocimientos previos del alumno, pero no para quedarse en este punto, sino para hacerte avanzar mediante la construcción de aprendizajes significativos en el sentido que marcan las intenciones educativas. Para que ello sea posible se requiere que el maestro conozca dichas intenciones y los contenidos a que se refieren, que conozca también la competencia de los alumnos para abordarlos y que sea capaz de aproximarse a la interpretación que éstos poseen para llevarlos progresivamente hacia lo que establecen las intenciones educativas."

De lo anterior se desprende que para realizar una práctica docente adecuada se necesita un diagnóstico del estado inicial de los alumnos, conocer las intenciones educativas y los contenidos para cumplir con dichas intenciones educativas y crear instrumentos que lleven a los alumnos hacia lo que establecen las intenciones educativas.

El programa de Estudios 1996 de 5° año de la ENP plantea que se debe transitar hacia una educación constructivista de acuerdo a lo que se menciona a continuación:

" ... por lo que la tendencia metodológica de este programa es constituirse en una etapa intermedia del desarrollo curricular de la enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato y de tránsito progresivo de una enseñanza lineal y algorítmica a una enseñanza de construcción.

...

En materia de seguimiento y evaluación de los programas, los profesores de un nivel de enseñanza identificarán y evaluarán de manera colegiada y diagnóstica aquellos conocimientos técnicos e instrumentales que el alumno debió adquirir en el nivel anterior para medir su eficacia y pronosticar su eficacia en el nivel actual. Los resultados de este estudio, permitirán nuevas estructuraciones y dosificaciones (adiciones y supresiones temáticas), que sean más funcionales para los propósitos de cada curso y que acerquen, progresivamente, la enseñanza de las Matemáticas a un modelo basado en la construcción del conocimiento."

En el Plan de Estudios Actualizado del CCH 1996 se considera que la enseñanza de la matemática debe ser constructivista como se menciona en los siguientes párrafos:

"En contraposición con una concepción que supone que la formalización es el punto de partida de la Matemática y la presenta en la enseñanza como un conjunto perfectamente acabado de conocimientos y técnicas, ordenados en un riguroso esquema lógico-deductivo, se considera, en esta propuesta educativa, que la Matemática es un saber que se construye: sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento o de la actividad humana y que paulatinamente evolucionan y alcanzan niveles cada vez más amplios de rigor, abstracción, generalización y formalización."

Mas adelante se menciona que:

"...c) El enfoque propuesto para la enseñanza de la Matemática intenta mostrar al estudiante dos aspectos importantes de esta disciplina: 1) la importancia de los desarrollos teóricos en la búsqueda, obtención y organización de nuevos conocimientos; 2) el valor de éstos como instrumento para la construcción de otros conocimientos y sus aplicaciones en otros campos del saber (humanístico, científico y tecnológico)."

Trabajo en Equipo.

Uno de los aspectos que se privilegia en el Programa de Estudios 1996 de 5° año de la ENP es el trabajo en el aula ya que dentro de los aspectos que se consideran para contribuir al desarrollo del perfil del alumno esta el siguiente:

"...8. La capacidad de trabajar en equipo, en actividades dentro del aula, en la resolución de problemas que impliquen el intercambio y la discusión de ideas."

Carlos Zarzar[2] (2000) en ¿ Qué es la didáctica grupal ? (Didáctica Grupal. México, Progreso, 2000) Considera que el esquema que se utiliza en la Didáctica Grupal en el diseño de actividades de aprendizaje es por lo general así:

- Introducción o presentación del tema por parte del profesor.
- Indicación de la tarea a realizar en los equipos pequeños, y organización de los mismos.
- Trabajo de elaboración y análisis de la información en equipos pequeños.
- Presentación de las conclusiones de los equipos.
- Complementación y cierre de la sesión por parte del profesor.

Zarzar considera que el momento más importante es el tercero, el del trabajo de elaboración y análisis de la información en equipos pequeños. Es en este momento cuando se empieza a dar realmente el aprendizaje, ya que en él se cumple en su totalidad las condiciones del aprendizaje significativo, siempre y cuando este momento haya sido bien diseñado por el profesor, y sea bien coordinado y desarrollado.

Después afirma que: Con el fin de que los alumnos continúen trabajando sobre esa información, de que la sigan analizando y elaborando, el profesor les encargará otras tareas complementarias. Pero mientras que, antes de ver el tema, las tareas consistían sobre todo en la lectura del material de apoyo; después de verlo y analizarlo en clase, las tareas consistirán sobre todo en la elaboración de algún producto en el que el alumno aplique y demuestre lo aprendido. Puede tratarse, por ejemplo, de la redacción de un ensayo o de un trabajo, de la resolución de problemas no vistos en clase, de la resolución de estudios de caso, de la aplicación a situaciones profesionales, de la respuesta a

---

[2] Carlos Zarzar Charur. Trabajó en Formación de Profesores en el Centro de Investigaciones y Servicios Educativos (CISE) de la UNAM. Desarrolló varios proyectos de investigación alrededor del tema aprendizajes significativos y trabajo grupal. Impartió cursos y Talleres del programa de docencia del CISE tales como: Dinámica de grupos, Coordinación de grupos de aprendizaje y Laboratorio de dinámica de grupos. Trabajó también en la Dirección General de Investigación Científica y Superación Académica de la Secretaría de Educación Pública en la promoción y apoyo de la realización de programas nacionales, regionales e institucionales de formación y actualización de profesores así como en la elaboración y publicación de libros de texto, manuales y antologías de apoyo a estos programas. Algunos libros de Zarzar: Temas de Didáctica 1996, Habilidades Básicas para la Docencia 1996, Grupos de Aprendizaje 1988, Manual de Dinámica de Grupos 1976, Antología sobre Grupos Operativos en la Enseñanza 1988.

cuestionarios, de la preparación de un debate, del diseño e instrumentación de una investigación, de prácticas o de experimentos, etcétera.

En el Plan de Estudios Actualizado 1996 del CCH respecto a la metodología y forma de trabajo en el aula dice:

"...e) Respecto a la metodologia didáctica se recomienda al profesor utilizar en el aula recursos y estrategias que permitan alentar el trabajo y la discusión de ideas en equipo y grupal,..."

Lo anterior hace evidente la preocupación de los programas de estudios de la ENP y del CCH por integrar el trabajo en equipo dentro de sus estrategias para la adquisición del conocimiento.

PROPUESTA DIDÁCTICA:

CUADERNO DE TRABAJO PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS V DE LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

BASADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

INTRODUCCIÓN AL CUADERNO DE TRABAJO

No son pocas las personas que opinan que la resolución de problemas es importante en la enseñanza y desarrollo de las matemáticas, por ejemplo Halmos considera que resolver problemas es el corazón de las matemáticas; Kleiner dice que el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se origina a partir de un esfuerzo por resolver determinado problema y Dieudonné afirma que la historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico.

A partir de la década de los 1980's la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) considera que la resolución de problemas es algo muy importante en la enseñanza y lo recomiendan como una actividad primordial en las escuelas de matemáticas.

Lo anterior se refleja en los Programas de Estudios de las Escuelas de Bachillerato de la UNAM, en particular de la Escuela Nacional Preparatoria que recomienda que la enseñanza de las matemáticas debe basarse en la resolución de problemas.

El presente "Cuaderno de Trabajo para el Curso de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria Basado en la Resolución de Problemas" consta de 11 unidades que cubren todo el programa de Matemáticas V del Nuevo Plan de Estudios de la ENP (Plan 1996). Antes de usarlo se aconseja realizar el examen diagnóstico que aparece al final de esta introducción con el fin de establecer el ritmo de trabajo y determinar si es pertinente un repaso de álgebra.

En cada unidad aparece al principio una bibliografía que el alumno debe usar para tener un primer acercamiento a los temas de dicha unidad, después en equipos previamente formados se resolverán los problemas guiados del Cuaderno de Trabajo con la ayuda del profesor, cuando sea necesaria.

En los problemas guiados se pretendió, cuando esto fue posible, hacer que aparecieran de manera natural los conceptos y definiciones necesarios. Cuando esto no se pudo hacer, se dieron las definiciones correspondientes y se planteó el problema, pero siempre tratando de que el estudiante interviniera en su resolución.

Al final de cada unidad viene una lista de problemas propuestos que los alumnos en los equipos formados deben resolver. Se espera que con el trabajo previo puedan resolver estos problemas sin la ayuda del profesor, sin embargo, si hay algunos problemas que no puedan realizar; deben resolverlos junto con el profesor en el salón de clases, pero sólo como último recurso.

Los exámenes de práctica que aparecen después deben ser resueltos de tarea en forma individual para que cada alumno valore su aprendizaje y, en caso necesario, tome las medidas pertinentes para mejorarlo.

Las soluciones a los problemas propuestos, examen diagnóstico y exámenes de práctica aparecen al final del Cuaderno de Trabajo y deben ser consultadas por los alumnos después de que los hayan resuelto para verificar sus respuestas.

La propuesta didáctica para usar este material es la siguiente:

- Realizar el examen diagnóstico con el fin de tener una idea más precisa del estado inicial de los alumnos que permita determinar el ritmo de trabajo que se va a seguir.
- Introducción o presentación de la unidad por parte del profesor.
- Dejar como tarea investigar los temas que se tratarán en dicha unidad por parte de los alumnos en equipos pequeños previamente formados. Hay una bibliografía básica para el estudiante en esta unidad que se puede usar para este fin.
- Los alumnos, trabajando en equipos irán desarrollando el material del cuaderno de trabajo.
- El profesor realizará un resumen de las definiciones, conceptos y fórmulas que aparecen en dicha unidad con la participación de los alumnos (lluvia de ideas).
- Los equipos en el salón de clases elaborarán el mapa conceptual de la unidad correspondiente y lo presentarán ante el grupo.
- Dejar como tarea a los equipos resolver los problemas propuestos. Los que no puedan resolver, se tratarán en el salón de clases con la ayuda del profesor.
- De manera individual, resolverán de tarea el examen de práctica con el fin de tener una idea de las fallas que pudieran tener.

En cada una de las unidades se utilizará la mayor parte del tiempo para resolver los problemas, elaboración de mapas, resumen del profesor, se considerará una hora para la introducción y fijar la tarea a los equipos y una hora para el examen.

Los tiempos recomendados para cada unidad son los siguientes:

Unidad I. Relaciones y funciones 10 horas.

Unidad II. Funciones trigonométricas. 20 horas.

Unidad III. Funciones exponencial y logarítmica. 8 horas.

Unidad IV. Sistemas de coordenadas y algunos conceptos básicos. 36 horas.

Unidad V. Discusión de ecuaciones algebraicas. 10 horas.

Unidad VI. Ecuación de primer grado. 15 horas.

Unidad VII. Ecuación general de segundo grado. 9 horas.

Unidad VIII. Circunferencia. 10 horas.

Unidad IX. Parábola. 10 horas.

Unidad X. Elipse. 10 horas.

Unidad XI. Hipérbola. 12 horas.

Para la evaluación se recomienda tomar en cuenta el trabajo de investigación de cada unidad, la resolución de los problemas en el salón de clases y la elaboración de los mapas conceptuales (trabajo en equipo), exámenes. El porcentaje de cada rubro se determina de acuerdo al criterio del profesor, sin embargo para que haya correspondencia con lo afirmado acerca de que se privilegia el trabajo en el aula por los alumnos considero que el porcentaje debe ser: 40 % exámenes, 40 % trabajo en el salón de clases y 20 % el trabajo de investigación.

Se recomienda aplicar el examen diagnóstico que se presenta a continuación antes de desarrollar el Cuaderno de Trabajo, con el fin de tener una idea de los conocimientos previos con los que cuentan los alumnos y en caso necesario tomar las medidas que se crean pertinentes. Las preguntas del examen se refieren a algunos procesos algebraicos que se considera que los alumnos deben dominar para abordar los temas del curso de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria. El tiempo recomendado para la aplicación del examen es de 2 clases de 50 minutos cada una.

EXAMEN DIAGNÓSTICO

ESCOGE LA OPCIÓN CORRECTA:

1. Al simplificar la expresión $b-2\{-a+[b+2(a-1)-3(2b-3)]\}$, obtenemos:

   a) 1 b) $a-b+3$ c) $-2a+11b-14$ d) $2a-6b+5$

2. El resultado que se obtiene al evaluar la expresión $3b^2-2d^2(a^3-c^3)$ cuando $a=1$ $b=-1$ $c=4$ y $d=-2$ es:

   a) 280 b) –59 c) 253 d) 451

3. El resultado de la multiplicación $(3x^2-2x+1)(4x^3-3x+7)$ es:

   a) $12x^5-8x^4-5x^3+27x^2-17x+7$ b) $12x^6+7x^4-6x^2+7$ c) $12x^5+6x^2+7$ d) $7x^5+2x^4+4x^3-5x^2+8$

4. El residuo en la división $x^2+3-2x\overline{)25x^2-4x^4+5x^5-11x+10}$ es:

   a) 0 b) –1 c) 5 d) 7

5. Al realizar las operaciones indicadas y simplificar $(5x-3)(2x+5)-4(2x-1)(4x-3)$ se obtiene:

   a) $-22x^2+8x-37$ b) $-22x^2+59x-27$ c) $10x^2+59x-15$ d) $-32x^2+40x-12$

6. Al simplificar $\dfrac{3x}{3x-1}-\dfrac{2x}{2x+1}$ se obtiene:

   a) $\dfrac{5x}{6x^2-x+1}$ b) $\dfrac{x}{12x^2+x-1}$ c) $\dfrac{-5x}{6x^2+x-1}$ d) $\dfrac{5x}{6x^2+x-1}$

7. Al desarrollar $(2x-3y)^3$ se obtiene:

   a) $8x^3-27y^3$ b) $8x^3-6xy-27y^3$ c) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ d) $8x^3-x^2y+6xy^2-27y^3$

8. El resultado de $\log_3 81$ es:

   a) 9 b) 4 c) –4 d) 27

9. Al simplificar $\dfrac{3\sqrt{6}-6\sqrt{10}}{3\sqrt{2}}$ se obtiene:

a) $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ b) -1 c) $-2\sqrt{2}$ d) $-\sqrt{5}$

10. Al resolver la ecuación $\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}=\frac{7}{4}$ el valor que se obtiene para x es:

a) $\dfrac{47}{15}$ b) $\dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{47}{60}$ d) $-\dfrac{15}{47}$

11. Una construcción se asienta en un terreno rectangular que mide de largo 10 m menos que el doble de su ancho. La banqueta que rodea la construcción tiene 8 m de anchura y su área es de 2496 metros cuadrados. Las dimensiones del terreno de la construcción son:

a) 66 y 106 b) 100 y 150 c) 50 y 90 d) El problema no tiene solución.

12. Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{matrix} 2x-3y-7=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{matrix}$ el valor de y es:

a) $\dfrac{11}{17}$ b) $\dfrac{-11}{17}$ c) 3 d) -3

13. Un avión empleó 4 horas en recorrer 2400 km con el viento a su favor, mientras que volando en contra del viento demoró 6 horas. La velocidad del avión con el viento en calma es:

a) 100 km/h b) 500 km/h c) 600 km/h d) 900 km/h

14. El intervalo solución de la desigualdad $4-5x\geq 3$ es:

a) $\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right]$ b) $\left[\dfrac{1}{5},\infty\right)$ c) $\left[\dfrac{-1}{5},\dfrac{1}{5}\right]$ d) $\mathbb{R}$

15. Las soluciones de la ecuación $2x^2+3x-2=0$ son:

a) 4 y -1 b) -0.5 y 2 c) 1 y 2 d) 0.5 y -2

16. Las intersecciones de la gráfica de $y=6x^2+x-12$ con el eje x son:

a) $A\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{3}{2}\right)$ b) $A\left(\dfrac{4}{3},0\right)$ y $B\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$ c) $A\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$ y $B\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$

d) $A(3,2)$ y $B(4,-3)$

17. Una excursión geológica costó 1200 pesos. Si hubieran ido 3 estudiantes más, el costo por estudiante habría sido de 20 pesos menos. El número de estudiantes que fueron a la excursión es:

a) 15 b) 12 c) 20 d) 25

18. La solución de la desigualdad $2x^2+5x-3\geq 0$ es:

a) $[-3,0.5]$ b) $\varnothing$ c) $(-\infty,-3]\cup[0.5,\infty)$ d) $\mathbb{R}$

19. La factorización del trinomio $6x^2-35x-6$ es:
a) $(x-6)(6x+1)$ b) $(6x-1)(x+6)$ c) $(3x-2)(2x+3)$ d) $(2x-3)(3x+2)$

20. Al factorizar la expresión $10ax^2-15a^2x$ se obtiene:
a) $5ax(2x-3a)$ b) $2ax(5x-3a)$ c) $3ax(2x-5a)$ d) $5a^2x(2x-3)$

21. El resultado de $(3x^2-4y)(3x^2+4y)$ es:
a) $12x^2y-16y^2$ b) $9x^4-16y^2$ c) $9x^4+24x^2y-16y^2$ d) $9x^4-24x^2y+16y^2$

22. Al desarrollar $(4x^2-2y)^2$ se obtiene el siguiente resultado:
a) $16x^4+16x^2y+4y^2$ b) $16x^2-16x^2y+4y^2$ c) $16x^4-16x^2y-4y^2$
d) $16x^4-16x^2y+4y^2$

23. Al desarrollar $(2x-4y+3z)^2$ se obtiene:
a) $4x^2+16y^2+9z^2$ b) $4x^2+16y^2+9z^2+16xy+12xz+24yz$
c) $4x^2+16y^2+9z^2-16xy+12xz-24yz$ d) $4x^2-16y^2+9z^2-16xy+12xz-24yz$

UNIDAD I

RELACIONES Y FUNCIONES

INTRODUCCIÓN:

En nuestro mundo es común el uso de números que representan cantidades, las cuales a su vez, están relacionadas con otras cantidades. En matemáticas, un concepto básico es el de relación y, a partir de él se generan otros conceptos de gran utilidad como por ejemplo, el de función.

Muchos fenómenos de la vida cotidiana y de otras ramas del saber como la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía, etc. pueden ser descritas por una relación.

Un tipo especial de relaciones se llama funciones las cuales han demostrado su gran utilidad para describir ciertos fenómenos, así como para realizar predicciones acerca de estos fenómenos. En esta unidad trataremos los conceptos de Relación y Función.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno comprenda el concepto de relación y sea capaz de establecer cuándo una relación es una función.

Que distinga entre variable independiente y dependiente, así como entre el dominio y rango.

Que sea capaz de determinar las características de una función y que la grafique, así como expresar mediante una función problemas de la vida cotidiana.

CONTENIDOS BÁSICOS: Relaciones, Funciones, Dominio, Rango, Gráfica de una función.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Producto Cartesiano, Relaciones implícitas y explícitas, algebraicas y no algebraicas, Funciones inyectivas, suprayectivas, biyectivas crecientes y decrecientes, Función inversa.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Sabrán lo que es el producto Cartesiano de conjuntos y sobre la base de esto definirán el concepto de función.
- Conocerán el concepto de función así como algunas situaciones que se pueden describir usando una función.
- Podrán graficar algunas funciones y determinar el dominio y el rango de tales funciones.
- Obtendrán la función inversa de una función biyectiva y comprobarán que las gráficas de la función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

BIBLIOGRAFÍA:

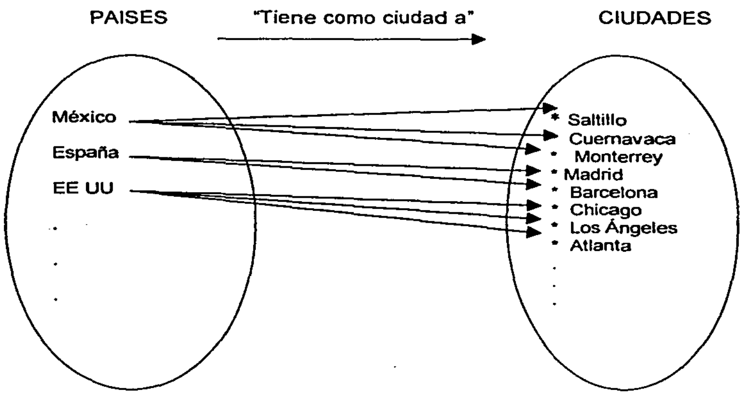
1. Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.
2. López, Antonio, et al. , Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.
3. Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, 1997.

En esta unidad abordamos el concepto de relación y observamos que algunas relaciones son funciones. Respecto a las funciones se estudia su dominio, rango y gráfica.

PROBLEMA 1.

Sí **A** es el conjunto de todos los países del mundo y **B** el conjunto de todas las ciudades del mundo. Decimos que el país *a* está relacionado con la ciudad *b*, si la ciudad *b* está en el país *a*. Por ejemplo Canadá está relacionado con Toronto. Le llamamos R a la relación anterior que también puede ser descrita así: "Tiene como ciudad a".

El siguiente diagrama que describe la relación:



La relación R puede describirse como un conjunto de parejas ordenadas de elementos de **A** y **B**. Por ejemplo (Australia, Sydney) es un elemento de la relación R. Decimos que R es una relación de **A** en **B**.

Escribir 10 parejas que estén en la relación anterior:

{

}

Si la relación está descrita por medio de una lista de todos sus elementos decimos que está descrita por extensión.

Por comprensión:

R = {(x,y) : x es un país del mundo, y es una ciudad de x }

Los conjuntos **A** y **B** en una relación pueden ser el mismo conjunto como se muestra en el siguiente problema.

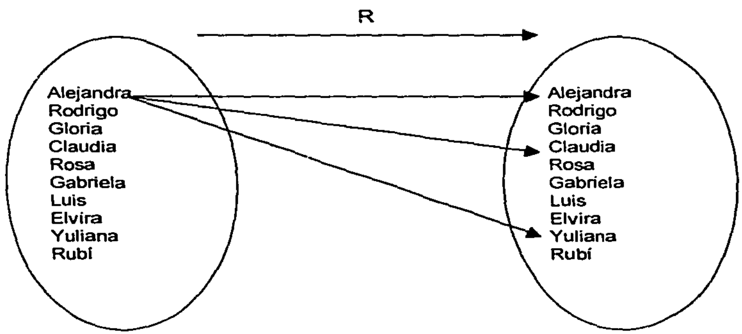
Problema 2.

En el deportivo "18 de marzo" se tiene la siguiente lista de personas inscritas a los deportes señalados:

NOMBRE	DEPORTE
1. - González Urquiza Alejandra	Natación
2. - Huet Tovar Rodrigo	Karate
3. - Jaime Cerros Gloria	Atletismo
4. - Acosta Bravo Claudia	Natación
5. - Chávez Aguilar Rosa	Karate
6. - Figueroa González Gabriela	Karate
7. - Herrera Patiño Luis	Boxeo
8. - Luévano Garay Elvira	Atletismo
9. - León Méndez Yuliana	Natación
10. - Ortiz Ballesteros Rubí	Atletismo

Si **A** es el conjunto de todas las personas inscritas en la lista. Definimos la relación R **de A** en **A** de la siguiente manera: Una persona está relacionada con otra si están inscritas en el mismo deporte.

Completar el siguiente diagrama que describe esta relación:



La descripción por extensión es:

La descripción por comprensión es:

El siguiente problema muestra una relación definida por una fórmula.

Problema 3.

Si **Z** es el conjunto de números enteros, es decir, **Z** = { ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}. Definimos la relación R de **Z** en **Z** como sigue: El número entero x está relacionado con el entero y sí $x + 3y < 20$.

Completar la siguiente tabla:

x	1	1							
y					3				10

Si observamos la tabla anterior notamos que para un valor de x puede haber dos o más valores de y.

La descripción de esta relación por comprensión es:

Problema 4.

Si **R** es el conjunto de números reales. Definimos la relación R de $[-1,1]$ en **R** como sigue: El número real x está relacionado con el número real y sí:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Cuando la relación está dada por una fórmula como la anterior, se dice que está definida **implícitamente**.

Si le damos algún valor a x obtenemos uno o más de y. Por ejemplo si x = 0.5 tendremos lo siguiente:

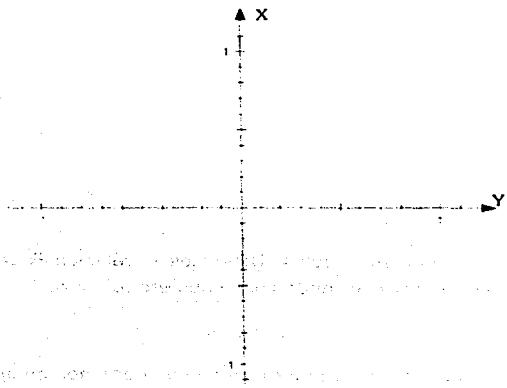
$$(0.5)^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - 0.25$$
$$y^2 = 0.75$$
$$y = \pm\sqrt{0.75}$$
$$y = \pm 0.866$$

Por lo tanto (0.5,0.866) y (0.5,-0.866) están en la relación R.

Llenar la siguiente tabla:

x	$y = \pm\sqrt{1-x^2}$	(x,y)
-1		
-0.5		
0		
0.5	$y = \pm 0.866$	(0.5,0.866), (0.5, -0.866)
0.75		
1		

Señalar los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas, después unirlos con un trazo continuo para obtener la gráfica de la relación R.



Problema 5.

Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales, es decir, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ y $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales. Definimos la relación R de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera: El número x está relacionado con el número y sí:

$$y = \sqrt{x-2}$$

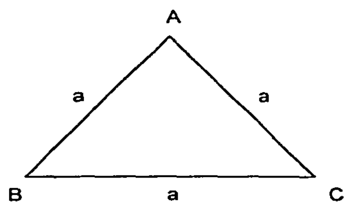
Cuando una relación está dada en la forma anterior, decimos que está definida **explícitamente**.

Completar la siguiente tabla:

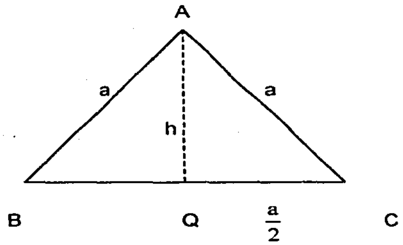
x	$y = \sqrt{x-2}$	(x,y)
2	0	(2,0)
2.5		
3		
4		
4.75		
4.8954		
5		
6		

Problema 6.

Supóngase que tenemos un triángulo equilátero de lado a. Expresar el área del triángulo en términos de a. Ver la siguiente figura:



Si h es la altura del triángulo ABC considerando que la base es BC, la figura anterior quedará así:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AQC, el valor de h en términos de a es:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos:

$$h =$$

Si **A** es el área del triángulo ABC, usar la fórmula: $\text{área} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ para hallar el valor de **A** en términos de a.

$$\mathbf{A} = \frac{(a)(\frac{\sqrt{3}a}{2})}{2}$$

Simplificando la expresión anterior tendremos que:

$$\mathbf{A} =$$

Esta fórmula nos define una relación.

El conjunto de valores que puede tomar a es:

El conjunto de valores que toma **A** es:

La descripción de esta relación como conjunto de parejas ordenadas es:

$$\left\{(a,A) : A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4},\ a \in (0,\infty)\right\}$$

Continuando con el análisis de la relación anterior, calcular lo que se pide:

Si a = 1, **A** =

Si a = 4, **A** =

Si a = 7, **A** =

En general, si a es un número real positivo ¿Cuántos valores para **A** se obtienen?

A las relaciones que tienen la propiedad anterior, es decir, que si las parejas (a, A) y (a, A') están en la relación, entonces A = A' ; se les llama funciones.

En la expresión $A = \dfrac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$, a se llama la **variable independiente** y A es la **variable dependiente**.

Cuando se trata de una función, el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama **DOMINIO de la función**.

Al conjunto de valores que toma la variable dependiente se le llama **RANGO** o **IMÁGEN de la función**.

Un conjunto que contiene al rango de una función se le llama **CONTRADOMINIO de la función**. Cuando se trata de funciones cuyo rango es un conjunto de números reales, se toma como contradominio al conjunto de números reales.

Si $(0,\infty)$ es el dominio y $\mathbb{R}$ el contradominio la notación que se usa para indicar que **A** es una función de $(0,\infty)$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia **A** = $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ es:

$$\mathbf{A}\text{: } (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Si tenemos los valores distintos para a: $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$ calcular los valores para el área:

A(4) =

A(7) =

Nótese que los valores obtenidos para las áreas son distintos. En general se puede mostrar que para dos valores distintos de a se obtienen dos valores distintos de **A**.

Las funciones que satisfacen lo anterior, es decir, que para valores distintos en el dominio se obtienen valores distintos en el contradominio se llaman **funciones inyectivas**.

Para comprender un poco mas el concepto de función inyectiva supongamos que la función anterior tiene dominio $\mathbb{R}$. Tomemos los números 1 y –1 que están en el dominio de la función y son distintos. Calcular:

A(1) =
A(-1) =

Como podrá observarse dichos valores son iguales, entonces la función así definida no es inyectiva.

Si consideramos la función como al principio **A** : $(0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto formado por todos los valores de **A** se llama **rango** de la función. Hallar el rango de la función:

Rango =

Cuando el rango de una función coincide con el contradominio se dice que la función es **suprayectiva**.

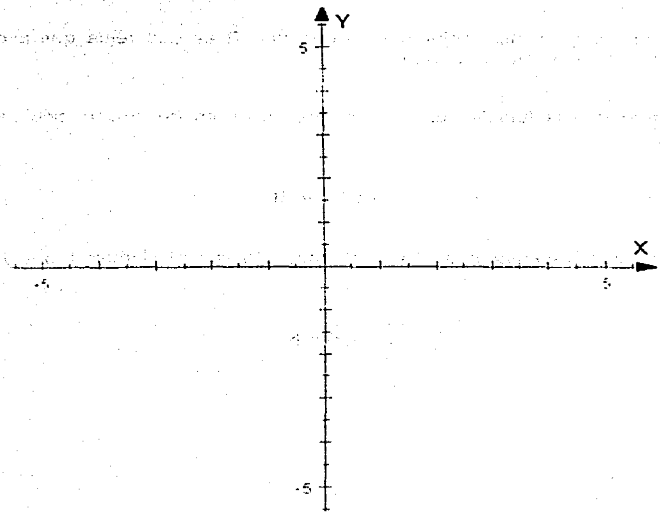
Completar lo siguiente para que la función sea suprayectiva

$$\mathbf{A} : (0,\infty) \rightarrow \underline{\qquad\qquad}$$

Una función que es inyectiva y suprayectiva se llama **biyectiva**.

Llenar la siguiente tabla para señalar los puntos que se obtengan en el sistema de coordenadas que se dibuja a continuación y graficar la función.

a	$A(a) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$\left(a, \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		



Sabemos que $3 < 4$. Colocar el símbolo adecuado entre las siguientes dos expresiones para obtener una proposición cierta.

$$\frac{\sqrt{3}\cdot 3^2}{4} \qquad \frac{\sqrt{3}\cdot 4^2}{4}$$

No es difícil convencerse de que para todos los números a y b en el dominio de la función tales que $a < b$ sucede lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4} < \frac{\sqrt{3}\cdot b^2}{4}$$

Cuando esto le sucede a una función, se dice que es **creciente** en todo su dominio.

El problema anterior muestra que en una función intervienen un conjunto **A** que se llama **dominio de la función**, un conjunto **B** llamado **contradominio de la función** y una regla que nos indica que se tiene que hacer con un elemento del dominio. A esta regla se le llama **regla de correspondencia** y, como se vio anteriormente esta regla puede ser una fórmula.

Entonces, una función del conjunto **A** al conjunto **B** es una regla que asocia a cada elemento de **A** un solo elemento de **B**.

Si le llamamos f a la función, para indicar que se trata de una función de **A** en **B** lo denotamos:

$$f : A \rightarrow B$$

Para indicar que el elemento $a \in A$ está asociado con el elemento $b \in B$ se usa la notación:

$$f(a) = b$$

Problema 7.

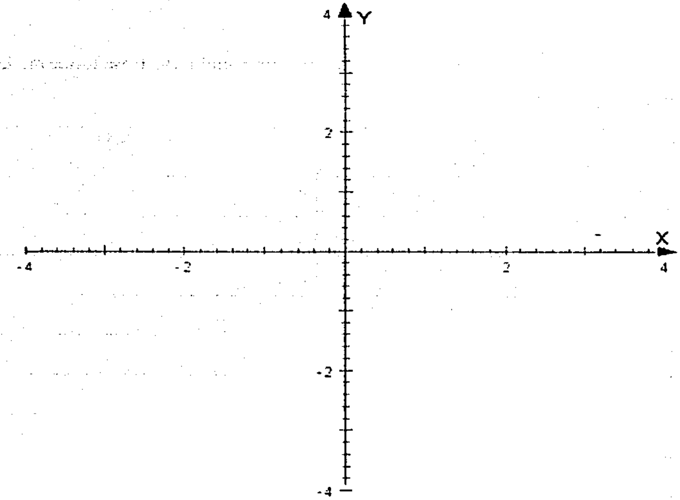
Supongamos que $y = \dfrac{1}{x+1}$ es la regla de correspondencia de una función. Llenar la siguiente tabla para graficar.

x	$y = \dfrac{1}{x+1}$	(x,y)
-4		
-3		
-2		
-1.5		
-1.25		
-1		
-0.75		
-0.5		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Al llenar la tabla anterior habrás notado que para algunos valores de x se puede calcular el valor de y pero para otros valores no. Cuando una función está descrita por medio de su regla de correspondencia el dominio es el conjunto formado por todos los números para los que si se puede calcular y.

El dominio de la función descrita por $y = \dfrac{1}{x+1}$ es :

Graficar la función en el sistema de coordenadas dibujado a continuación y mostrar que es decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,\infty)$.



Problema 8.

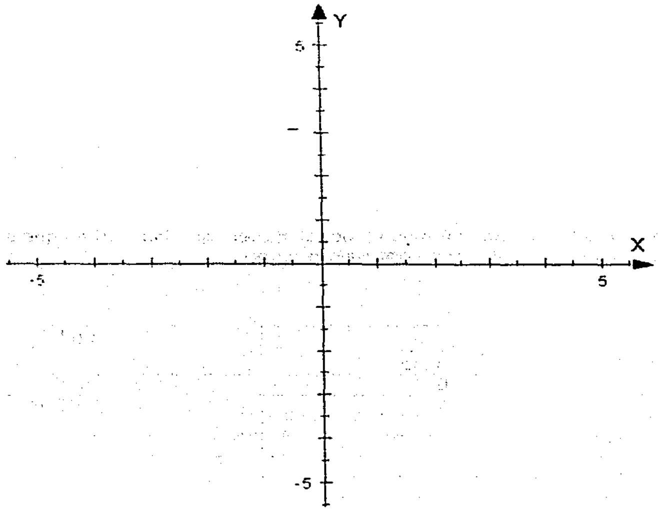
Si $y = \sqrt{x-2}$ es la regla de correspondencia de una función, completar la siguiente tabla:

x	$y = \sqrt{x-2}$	(x,y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3	$\sqrt{3-1} = 1$	(3,1)
$\sqrt{10}$		
4		
4.5		
5		

Recordar que el dominio de una función son todos los números para los que se obtienen números reales en la expresión $y = \sqrt{x-2}$.

DOMINIO:

Usar la tabla anterior para graficar la función en el siguiente sistema de coordenadas y determinar donde es creciente.



Problema 9.

Una libra pesa aproximadamente 0.45 kilogramos. Si l nos proporciona el peso en kilogramos de un objeto dado en libras, entonces la fórmula para l en términos del peso p es:

l =

Si L nos proporciona el peso en libras de un objeto dado en kilogramos, la fórmula para L en términos del peso p es:

L =

Llenar la siguiente tabla para la función l:

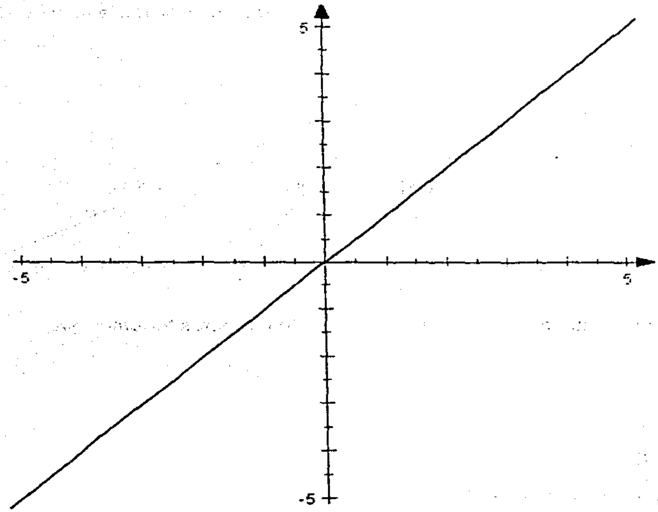
p	l = 0.45p	(p,l)
0	0	(0,0)
1	0.45	(1,0.45)
2		
3		
4		
5.5		
6		
6.5	2.925	(6.5,2.925)
7		
8		
9		

Llenar la siguiente tabla para la función L de tal manera que los valores que se den para p sean los que en la tabla anterior se obtuvieron para l.

p	$L = \frac{p}{0.45}$	(p,L)
0	0	(0,0)
0.45	1	(0.45,1)
2.925	6.5	(2.925,6.5)

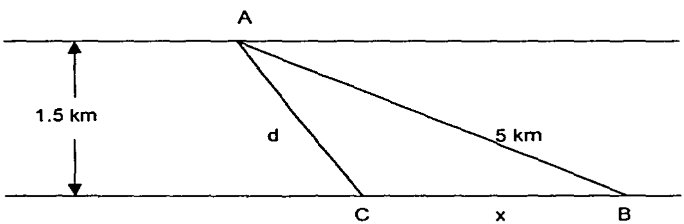
¿ Que observas en estas tablas de las funciones L e l ?

Usar las tablas anteriores para graficar las dos funciones en el mismo sistema de coordenadas. Dibujar en ese sistema una recta a 45°. ¿ Qué se observa ?

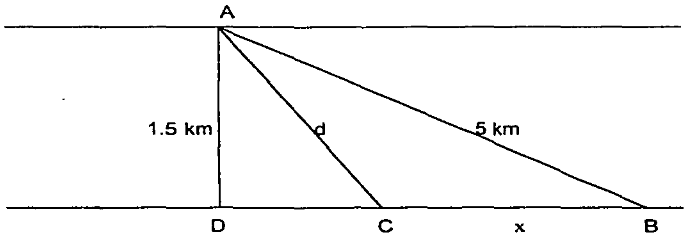


Problema 10.

Un oleoducto va a conectar dos puntos A y B que se encuentran a 5 km uno del otro en riberas opuestas de un río recto de 1.5 km de ancho. Una parte del oleoducto irá bajo el agua desde A hasta un punto C en la ribera opuesta del río y otra parte irá desde C hasta B sobre tierra. El costo por kilómetro de oleoducto bajo el agua es de $ 2 000 000 y por tierra de $ 1 000 000. Expresar el costo del oleoducto como función de la distancia x de C hasta B. Ver la siguiente figura:



Si consideramos el segmento de recta AD perpendicular al río, entonces tendremos el siguiente dibujo:



En el triángulo rectángulo ADB por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$(DB)^2 = (5)^2 + (1.5)^2$$

DB =

DC = DB – x =

En el triángulo rectángulo ADC por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$(d)^2 = (1.5)^2 + (\quad)^2$$

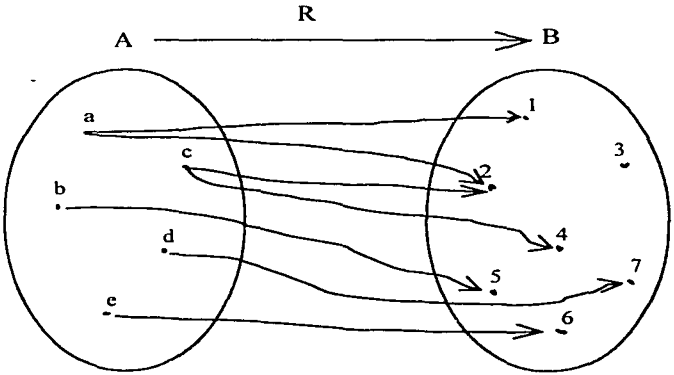
d =

Si le llamamos C(x) al costo de la construcción del oleoducto que depende de x, dar una expresión para éste:

C(x) =

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Expresa la siguiente relación de A en B descrita por el siguiente diagrama, como conjunto de parejas ordenadas de $A \times B$. Mostrar que la relación anterior es un subconjunto de $A \times B$.



2.- Consideremos el conjunto de todos los elementos de la tabla periódica. Dos elementos están relacionados si son metales. Hacer una lista con 15 elementos de esta relación.

3.- Dar el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$ b) $y = \dfrac{1}{x+3}$ c) $y = \sqrt{3x-2}$ d) $x^2 y - 4xy + 3y - 6 = 0$

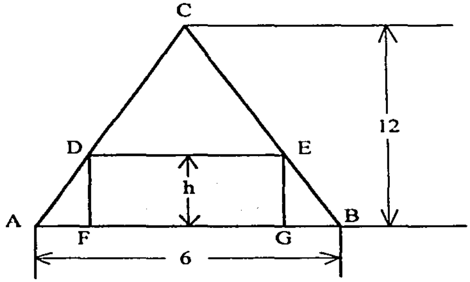
4.- Determinar cuáles funciones son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \dfrac{1}{x+3}$ c) $y = 2x^2 - 3x + 2$ d) $y = 2x^3 - 4$

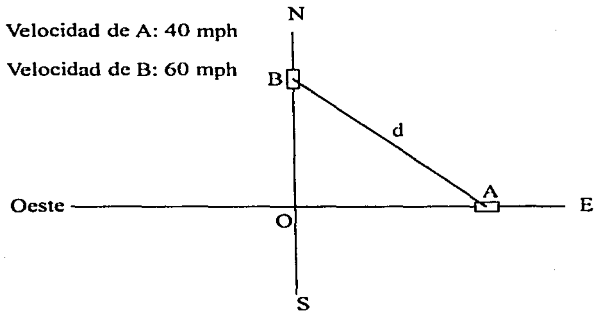
5.- Hallar la inversa de las siguientes funciones y graficar cada pareja en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = x^2 + 2x - 1$ c) $y = 2x^3 + 1$

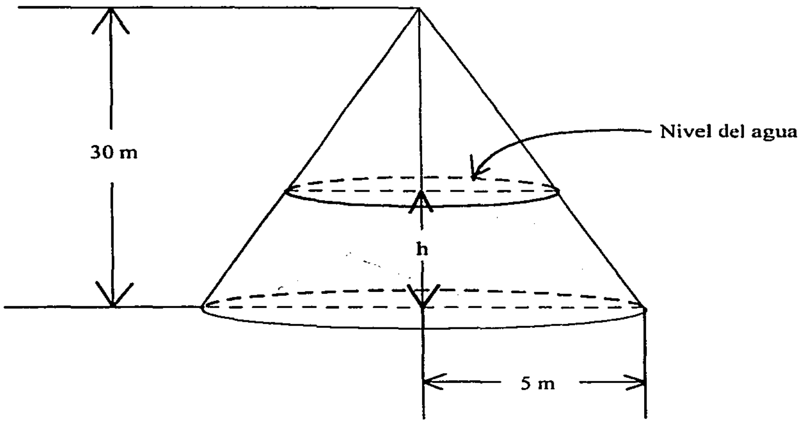
6.- Dado el triángulo isósceles mostrado en la siguiente figura, expresar el área del rectángulo DEFG en términos de h.



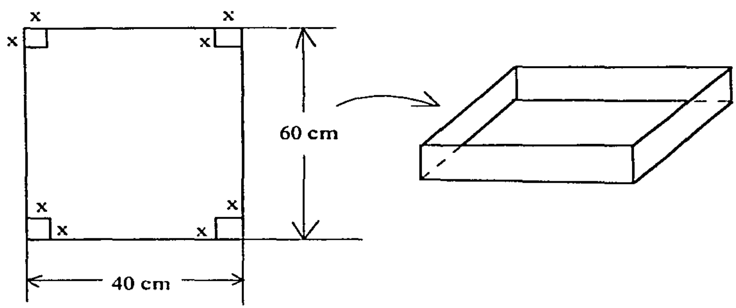
7.- El automóvil A pasa por el punto O hacia el este con una velocidad constante de 40 mph; el automóvil B pasa por el mismo punto una hora mas tarde hacia el norte a una velocidad constante de 60 mph. Exprese la distancia d entre los automóviles en función del tiempo t medido a partir del momento en que B pasa por O. Ver la figura.



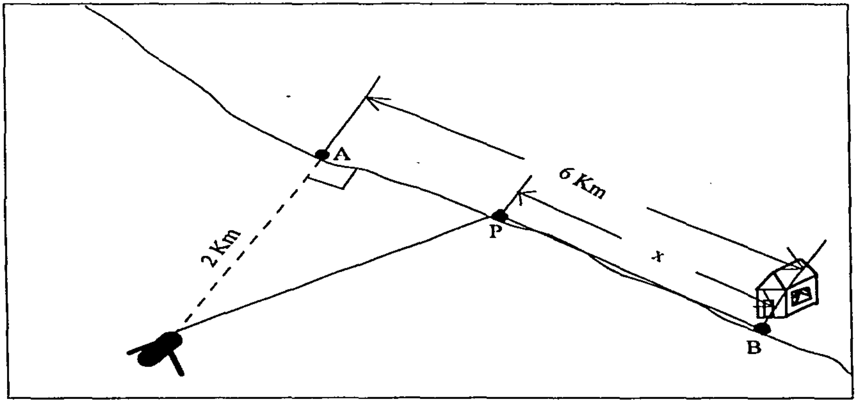
8.- Un depósito en forma de cono circular recto invertido como lo muestra la figura se está llenando de agua, expresar el volumen del agua en función de la altura h del nivel del agua.



9.- A partir de una pieza rectangular de cartón de 40×60 cm se va a construir una caja abierta, cortando cuadrados idénticos de lado x en cada esquina y volteando hacia arriba los lados (ver la figura). Indica el volumen V de la caja como función de x.



10.- Un remero se encuentra a 2 Km del punto A mas cercano de una orilla recta y desea llegar a una casa ubicada en un punto B a 6 Km corriente abajo en la orilla. Ver la Figura. Piensa remar al punto P, que está entre A y B a x Km de la casa, y luego caminar el resto de la distancia. Supón que rema a razón de 3 Km por hora y camina a 5 Km por hora. Expresar el tiempo T total requerido para llegar a la casa como función de x.



EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas determina si la relación es o no función:

a) $R_1 = \{(-1,1),(1,-1),(2,-2),(-2,2)\}$

b) $R_2 = \{(\frac{1}{5},1),(-\frac{1}{5},1),(2,2),(-2,2)\}$

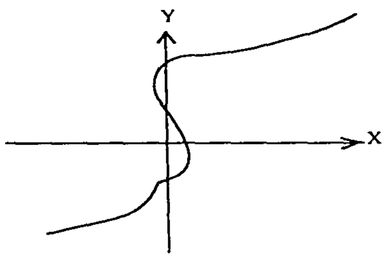
c) $R_3 = \{(-1,\frac{1}{2}),(-1,\frac{1}{3}),(2,3),(5,7)\}$

2.- Dada la función: $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, encuentra los valores que se indican:

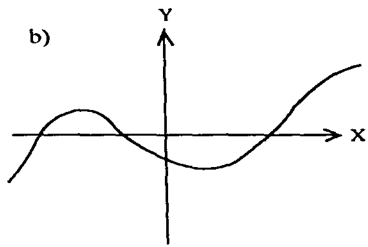
a) $f(-1)$ b) $f(\frac{1}{2})$ c) $f(x+5)$ d) $f(x+h)-f(x)$

3.- ¿Son funciones las relaciones cuyas gráficas aparecen a continuación?

a)



b)



4.- Trazar la gráfica de las siguientes relaciones y decir si son o no funciones.

a) $y = 3x+5$ b) $y = 3x^2 - 3x + 7$ c) $x^2 + y^2 = 9$

5.- Dar el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $2x^2 - y - 2 = 0$ b) $3x + 2y + 1 = 0$ c) $x^2y - 4xy + 3y - 6 = 0$

6.- Trazar la gráfica de las siguientes relaciones. Indica si son o no funciones y lee de la gráfica el rango.

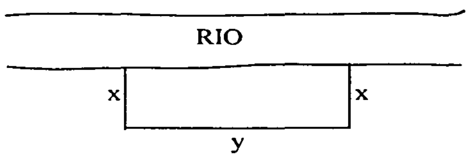
a) $y = x \quad \text{si} \quad -3 \leq x \leq 6$ b) $y = x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -3 \\ 0 & \text{si} \quad -3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si} \quad 5 \leq x < 8 \end{cases}$

7.- En las siguientes funciones, decir cuáles son biyectivas; hallar su inversa, dando regla de correspondencia, dominio y rango así como las gráficas de cada función con su inversa en el mismo sistema de coordenadas.

a) $f(x) = 3x - 6$ b) $g(x) = 2x^3 - 3$ c) $h(x) = \operatorname{sen} x \quad h:[0,2\pi] \to [-1,1]$

8.- Una colonia de bacterias (Escherichia Coli) duplica su población cada 20 minutos. Si originalmente hay 500 bacterias, dar una función que nos exprese el número de bacterias en términos del tiempo t en horas.

9.- Un terreno rectangular, con uno de sus lados en la orilla de un río, va a ser cercado en sus otros tres lados utilizando 100 metros de cerca de alambre. Expresar el área del terreno cercado en términos del ancho. Ver la figura:



10.- Si el número de turistas que hacen un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra 20 dólares por persona. Por cada persona adicional a las 30, se reduce el cobro personal en .50 dólares. Expresar la cantidad de dinero reunida por la empresa en términos del número de personas adicional.

UNIDAD II

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

INTRODUCCIÓN:

Todos hemos saltado con la cuerda y hemos observado la figura que se forma cuando movemos un extremo de la cuerda hacia arriba y hacia abajo. Esta figura es la misma observamos en las olas del mar o cuando tiramos una piedra en un estanque.

Todas las figuras llamadas ondas representan el movimiento de muchos fenómenos de la naturaleza, se conocen con el nombre de fenómenos ondulatorios, como por ejemplo: Los acústicos, ópticos, eléctricos, radiaciones, movimiento de resortes y péndulos, etc. Todos ellos tienen que ver en gran medida con las funciones trigonométricas.

En sus inicios la trigonometría se desarrolló para ayudar a resolver problemas de ángulos y longitudes de triángulos; aún cuando las situaciones de este tipo ya no son las aplicaciones mas importantes, todavía aparecen problemas con triángulos en algunas situaciones físicas.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno enriquezca los conceptos trigonométricos adquiridos anteriormente, manejándolos ahora como funciones con sus respectivas gráficas.

Que aplique estos conceptos en la resolución de problemas que le sean significativos.

CONTENIDOS BÁSICOS:, Funciones Trigonométricas directas e inversas: senx, cosx, tanx, $sen^{-1}x$, $cos^{-1}x$, $tan^{-1}x$; Dominio, rango, periodicidad, amplitud, desfasamiento y asíntotas de la gráfica

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Razones Trigonométricas, Resolución de triángulos rectángulos, Razones Trigonométricas de dos ángulos, Ley de senos y cosenos, Resolución de triángulos oblicuángulos, Razones Trigonométricas para un ángulo en cualquier cuadrante, Fórmulas de reducción, Medida de un ángulo y Círculo Trigonométrico, Funciones: cotx, secx, cscx y sus inversas: $cot^{-1}x$, $sec^{-1}x$, $csc^{-1}x$.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Recordarán las razones trigonométricas de ángulos agudos basándose en un triángulo rectángulo. Deducirán algunas identidades trigonométricas como por ejemplo las que se obtienen por cociente y las Pitagóricas.
- Resolverán problemas donde aparecen triángulos rectángulos.
- Obtendrán identidades para razones trigonométricas de sumas y diferencias de ángulos: $sen(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\tan(\alpha \pm \beta)$, $\cot(\alpha \pm \beta)$, también $sen(\frac{\alpha}{2})$, $\cos(\frac{\alpha}{2})$, $\tan(\frac{\alpha}{2})$, $\text{sen}(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\tan(2\alpha)$.
- Utilizarán las leyes de los senos y cosenos para resolver problemas donde aparecen triángulos oblicuángulos.
- Usarán las fórmulas de reducción para hallar las razones trigonométricas de cualquier ángulo, conociendo únicamente las de los ángulos agudos.
- Establecerán la relación que hay entre grados y radianes. Transformará la medida de un ángulo de grados a radianes y viceversa.
- Graficará y analizará las funciones trigonométricas senx, cosx, tanx y sus inversas.
- Resolverá problemas relacionados con las funciones trigonométricas.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

2.- López, Antonio, et al., Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

3.- Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, 1997.

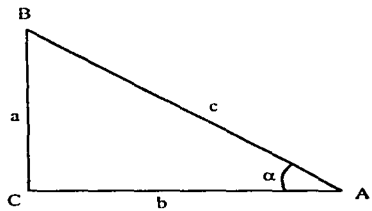
4.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

Aquí se estudian algunos elementos de trigonometría, las funciones trigonométricas directas e inversas con sus principales elementos y características: Dominio, rango, periodicidad, amplitud, desfasamiento y asíntotas de la gráfica.

Problema 1.

Calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° usando la definición y el o los triángulos rectángulos adecuados.

Primero recordaremos las definiciones de las razones trigonométricas. Dado un triángulo rectángulo ABC como el mostrado en la siguiente figura, definimos las razones trigonométricas del ángulo agudo α como se indica:



$$\text{Seno del ángulo } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno del ángulo } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente del ángulo } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente del ángulo } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

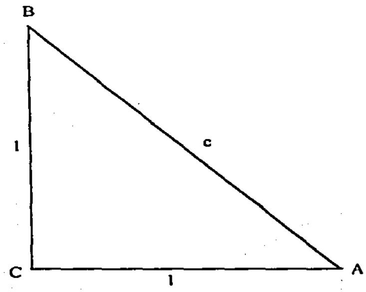
$$\text{Secante del ángulo } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante del ángulo } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Se acostumbran las siguientes abreviaturas para las razones trigonométricas:

$$sen\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a}$$

En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos miden 1, calcular lo que se pide.

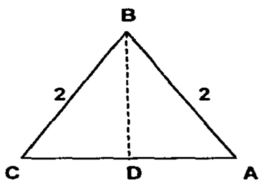


$\sphericalangle A =$ ____________________

$\sphericalangle B =$ ____________________

Hipotenusa AB = ____________

Supongamos que ahora tenemos el triángulo equilátero ABC de lado 2 y que trazamos la altura BD. Calcular lo que se pide:



$\sphericalangle ABD =$ ___________

$\sphericalangle DAB =$ ___________

$AD =$ ______________

En el triángulo rectángulo ABD el teorema de Pitágoras nos indica que:

$$(2)^2 = (1)^2 + (BD)^2$$

$BD =$ ____________

Usar los resultados anteriores para llenar la siguiente tabla:

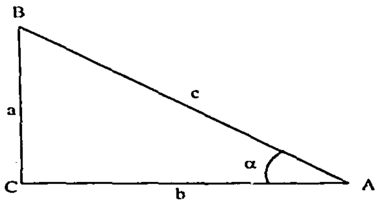
Angulo	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°						
60°						
45°						

Problema 2.

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\ ,\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\ ,\quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\ ,\quad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ ,\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo ABC:



$sen\alpha = \frac{a}{c}$ y $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Calcular $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} =$

Comparar el resultado con $\tan\alpha =$ y concluir que:

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Usando un procedimiento similar, comprobar las siguientes igualdades:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

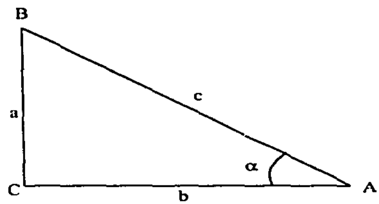
$$\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

Problema 3.

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas (llamadas Pitagóricas):

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha \quad , \quad \csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$$



En el triángulo rectángulo ABC tenemos que $sen\alpha = \frac{a}{c}$

Al elevar al cuadrado y despejar a^2 obtenemos lo siguiente:

$a^2 = c^2 sen^2\alpha$

Procediendo en forma análoga calcular lo siguiente:

$\cos\alpha = \text{——}$

$b^2 =$ ____________

El teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, sustituyendo las expresiones de a^2 y b^2 obtenemos la siguiente igualdad:

$$\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = c^2$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior entre c^2 obtenemos la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Llenar los siguientes espacios para deducir dos identidades trigonométricas parecidas a la anterior.

$\tan\alpha = \text{——}$

$a^2 =$ ______________

$\sec\alpha = \text{——}$

$c^2 =$ ____________

Usando el teorema de Pitágoras tendremos la siguiente igualdad:

$b^2\tan^2\alpha + b^2 =$ _____

Dividiendo los dos miembros de la igualdad obtenemos la siguiente identidad:

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

$\cot\alpha = \text{——}$

$b^2 =$ ______________

$\csc\alpha = \_\_\_\_\_\_$

$c^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

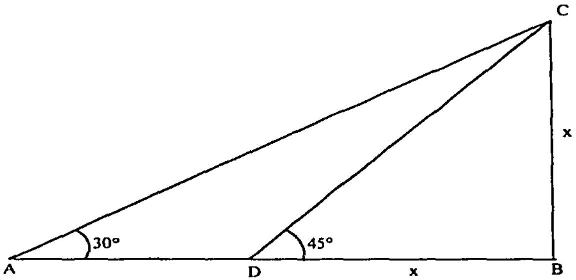
$a^2 + a^2 \cot\alpha = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Dividir los dos miembros de la igualdad entre a^2 para obtener la siguiente identidad trigonométrica:

$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 4.

Si caminamos 150 metros hacia la base de un edificio el ángulo de elevación con respecto al último piso aumenta de 30° a 45°. Calcular la altura del edificio.



En la figura anterior BC representa el edificio.

En el triángulo DBC, DB = BC. ¿Por qué?

En el triángulo ABC, $\tan 30^\circ = \frac{\quad}{150 + x}$

$0.5773 = \frac{\quad}{150 + x}$

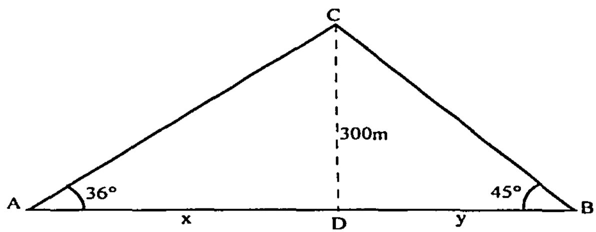
$0.5773(150 + x) =$

x = 204.86 m

Problema 5.

Se va a excavar un túnel rectilíneo y horizontal a través de una montaña de 300 m de altura, como se muestra en la figura. Desde los puntos A y B de entrada al túnel, la cima de la montaña se observa respecto a la horizontal bajo los ángulos de 36° y 45° respectivamente. Calcular la longitud del túnel AB.

Si C es la cima de la montaña y D es el pie de la altura de la montaña entonces la siguiente figura describe el problema.



En el triángulo ADC tenemos que $\tan 36^\circ = \dfrac{300}{x}$

x =

En el triángulo BDC con un procedimiento análogo, obtenemos el valor de y:

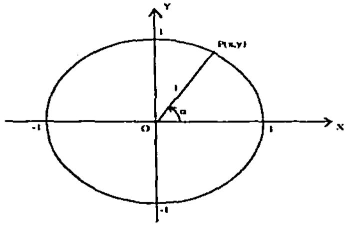
y =

Con lo obtenido anteriormente podemos calcular la distancia AB de la siguiente manera:

AB = x + y = 819.66 m

Problema 6.

Tenemos el círculo de radio 1 y el ángulo θ como se muestra en la figura:



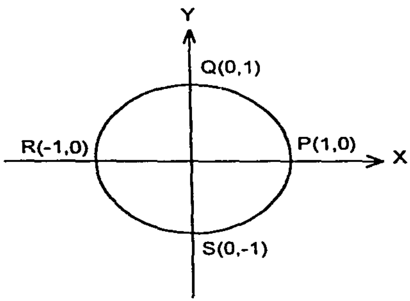
Definimos:

$$\text{sen}\ \theta = y \qquad \cos\theta = x \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \sec\theta = \frac{1}{x} \qquad \csc\theta = \frac{1}{y}$$

NOTA: En las definiciones anteriores únicamente importan las coordenadas del punto P, por esta razón el ángulo θ puede ser de cualquier magnitud positivo o negativo, tomando en cuenta el convenio de que los ángulos son positivos si se miden en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativos si se miden en el mismo sentido.

Usar la siguiente figura para llenar la tabla:



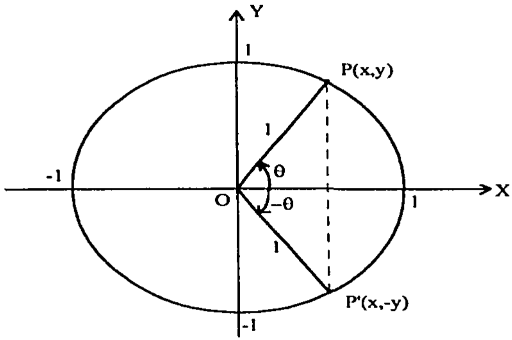
	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°						
90°						
180°						
270°	-1	0	indefinida	0	indefinida	-1
360°						

Llenamos la tabla usando las definiciones dadas, por ejemplo para 270° el punto que nos sirve para calcular lo que nos piden es S(0,-1) :

$sen\ 270^{\circ} = -1$ $\qquad$ $\cos 270^{\circ} = 0$ $\qquad$ $\tan 270^{\circ} = \frac{-1}{0}$ el cual está indefinido, porque la división entre cero no es válida.

Problema 7.

La siguiente figura muestra la relación que hay entre las coordenadas de P que corresponde al ángulo θ y P' que corresponde a -θ.



Usar la figura anterior para llenar los espacios vacíos y obtener las identidades trigonométricas correspondientes.

sen($-\theta$) = -y = -sen(θ) por lo tanto tenemos la siguiente identidad: $\boxed{sen(-\theta) = -sen(\theta)}$

cos($-\theta$) = $\qquad\qquad$ = cosθ de donde: $\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$

$\tan(-\theta) =$ $=$ entonces:

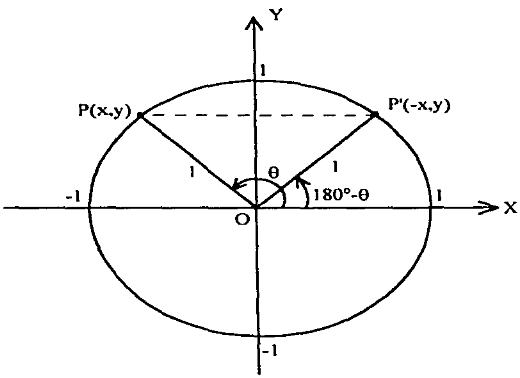
$\cot(-\theta) =$ $=$ entonces:

$\sec(-\theta) =$ $=$ entonces:

$\csc(-\theta) =$ $=$ entonces:

Problema 8.

a siguiente figura muestra la relación que hay entre las coordenadas de P del ángulo θ en el segundo cuadrante y las de P' del ángulo $180^\circ - \theta$ en el primer cuadrante.



Usar la figura anterior para llenar los espacios vacíos y obtener las fórmulas de reducción de ángulos del segundo cuadrante.

$\text{sen}(180^\circ - \theta) = \qquad = \qquad \therefore$ $\boxed{}$

$\cos(180^\circ - \theta) = \qquad = \qquad \therefore$ $\boxed{}$

$\tan(180^\circ - \theta) = \dfrac{y}{-x} = -\tan(\theta) \qquad \therefore$ $\boxed{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta}$

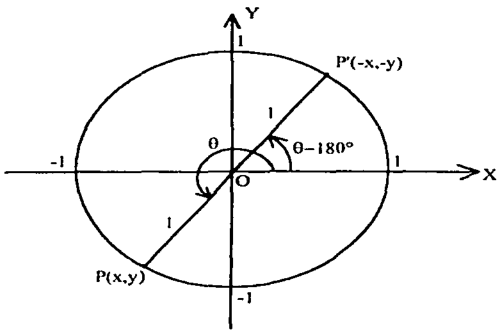
$\cot(180^\circ - \theta) = \dfrac{-x}{y} = \qquad \therefore$ $\boxed{}$

$\sec(180^\circ - \theta) = \qquad = \qquad \therefore$ $\boxed{}$

$\csc(180^\circ - \theta) = \qquad = \qquad \therefore$ $\boxed{}$

Problema 9.

La siguiente figura muestra la relación que hay entre las coordenadas de P que corresponde al ángulo θ en el tercer cuadrante con las de $\theta - 180^\circ$ que es un ángulo en el primer cuadrante.



Con base en la figura anterior llenar los espacios vacíos y obtener las fórmulas de reducción de ángulos del tercer cuadrante correspondientes.

$$\text{sen}(\theta - 180^\circ) = \qquad = \text{-sen}(\theta) \quad \therefore$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\cos(\theta - 180^\circ) = \qquad = \qquad \therefore$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\tan(\theta - 180^\circ) = \qquad = \qquad \therefore$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\cot(\theta - 180^\circ) = \qquad = \qquad \therefore$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sec(\theta - 180^\circ) = \frac{1}{-x} = -\sec\theta \quad \therefore$$

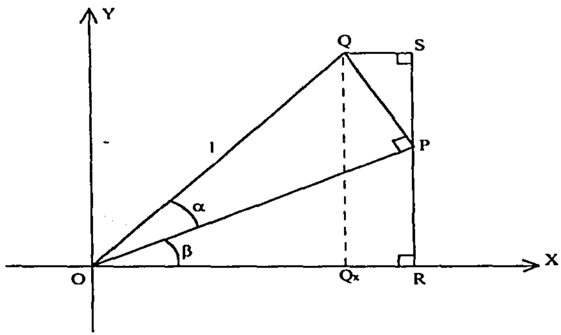
$$\boxed{\sec(\theta - 180^\circ) = -\sec\theta}$$

$$\csc(\theta - 180^\circ) = \qquad = \qquad \therefore$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Problema 10.

Demostrar las siguientes fórmulas, basándose en la figura y en el procedimiento indicado.



Las fórmulas que se van a demostrar son las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}}$$

En el triángulo rectángulo OPQ tenemos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PQ}{1} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\alpha = PQ$$

Procediendo de la misma forma en el mismo triángulo obtenemos:

$$\cos\alpha =$$

A continuación se mostrará que uno de los ángulos agudos del triángulo QPS es igual a β

$\sphericalangle QPS + \sphericalangle QPO + \sphericalangle OPR = 180^\circ$ por formar un ángulo llano

$\sphericalangle\beta + \sphericalangle ORP + \sphericalangle OPR = 180^\circ$ por ser los ángulos interiores de un triángulo

Restando estas dos desigualdades obtenemos lo siguiente:

$$\sphericalangle QPS - \beta + \sphericalangle QPO - \sphericalangle ORP + \sphericalangle OPR - \sphericalangle OPR = 180^\circ - 180^\circ$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos la siguiente expresión para β:

$$\beta =$$

En el triángulo rectángulo QPS:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{QS}{QP} \quad , \text{ entonces } \quad QS = QP\operatorname{sen}\beta \quad \text{y} \quad QP = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore \quad QS =$$

En el mismo triángulo ahora se encontrará una expresión para PS:

$$\cos\beta = \frac{PS}{QP} \quad , \text{ entonces } \quad PS = QP\cos\beta \quad \text{y} \quad QP = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore \quad PS =$$

Usando ahora el triángulo rectángulo OPR, obtenemos las siguientes expresiones para PR y OR:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{PR}{OP} \quad , \text{ entonces } \quad PR = OP\operatorname{sen}\beta \quad \text{y} \quad OP = \cos\alpha$$

$$\therefore \quad PR =$$

$$\cos\beta = \frac{OR}{OP} \quad , \text{ entonces } \quad OR = OP\cos\beta \quad \text{y} \quad OP = \cos\alpha$$

$$\therefore \quad OR =$$

Con los datos obtenidos anteriormente, calcularemos los catetos del triángulo rectángulo OQQ_x:

$$QQ_x = PS + PR = \boxed{} + \boxed{}$$

$$OQ_x = OR - Q_xR = OR - QS = \boxed{} - \boxed{}$$

Finalmente en el triángulo OPQ_x calcular lo siguiente para obtener las fórmulas pedidas.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{QQ_x}{1} = \boxed{}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OQ_x}{1} = \boxed{}$$

Usar las fórmulas anteriores y recordar que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(-\theta) = \cos\theta$ para llenar los espacios vacíos y deducir las siguientes identidades trigonométricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha$$

$$= \operatorname{sen}\alpha(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)\cos\alpha$$

$$= \boxed{}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

$$= \cos\alpha(\qquad\qquad) - \operatorname{sen}\alpha(\qquad\qquad)$$

$$= \boxed{}$$

También las identidades:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \\ \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{array}}$$

Se deducen fácilmente de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$= \boxed{}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

$$= \cos^2\alpha -$$

$$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$= \cos^2\alpha - \qquad +$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Problema 11.

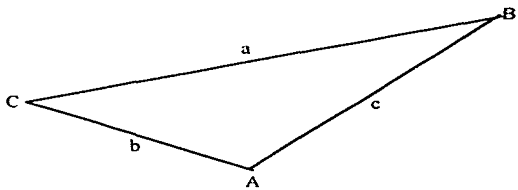
Ley de los senos. La ley de los senos afirma que en cualquier triángulo ABC con lados a, b y c como se muestra en la siguiente figura se satisfacen las igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} \quad , \quad \frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \quad y \quad \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Que casi siempre se escribe simplemente como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Donde para denotar los ángulos interiores del triángulo se han usado las letras con las que se denotan los vértices.



Colocaremos el triángulo ABC de la manera que se indica para deducir una de las igualdades de la ley de los senos.

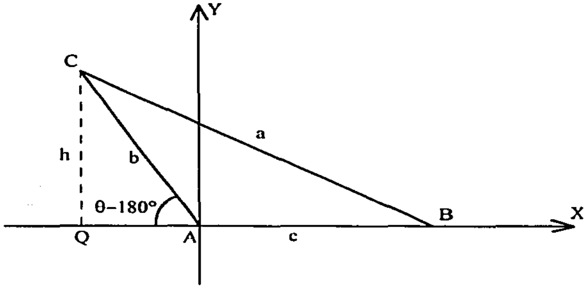


Figura 1

En la figura 1 QAC es un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos igual a $180^\circ - A$, entonces:

$$\text{sen}(180^\circ\text{-A}) = \frac{h}{b} \quad , \quad \text{pero sen}(180^\circ\text{-A}) = \text{senA}$$

$$\text{senA} = \frac{h}{b} \quad \therefore \quad h =$$

En el triángulo rectángulo CQB de la figura 1 tenemos lo siguiente:

$$\text{senB} = \frac{h}{\quad} \quad , \quad \text{entonces} \quad h =$$

Igualando las dos expresiones para h obtenidas:

$$a \cdot \text{senB} = b \cdot \text{senA} \quad \therefore$$

$$\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}}$$

Ahora se colocará como se muestra en la figura 2 el triángulo ABC para obtener otra igualdad de la ley de los senos.

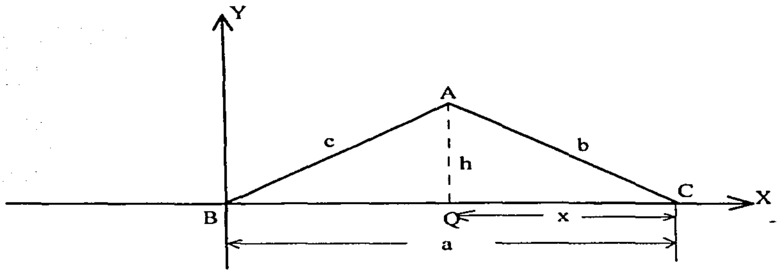


Figura 2

Procediendo de la misma forma que antes, BAQ y AQC son triángulos rectángulos, entonces:

$$\text{sen}B = \underline{\qquad} \quad \therefore \quad h =$$

$$\text{sen}C = \underline{\qquad} \quad \therefore \quad h =$$

Si igualamos las expresiones obtenidas para h:

$$=$$

$$\therefore \quad \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

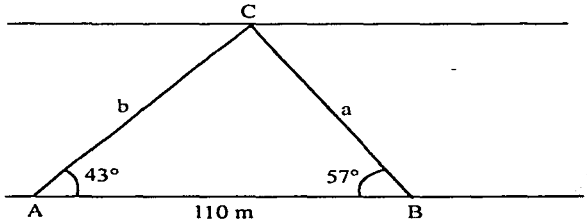
Y por la propiedad transitiva de la igualdad obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Con lo cual se demuestra la ley de los senos.

Problema 12

Dos observadores colocados a 110 m de separación en A y en B en la orilla de un río, están mirando una torre situada en la orilla opuesta en el punto C. Midieron los ángulos CAB y CBA que fueron 43° y 57° respectivamente. ¿ A que distancia está el primer observador de la torre ? Ver la figura:



En la figura anterior:

$$\sphericalangle C + 43^\circ + 57^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \sphericalangle C =$$

Por la ley de los senos

$$\frac{110}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}57^\circ}$$

$$b = \text{sen}57^\circ\left(\frac{110}{\text{sen}C}\right)$$

$$\therefore \quad b =$$

Con lo cual encontramos la distancia entre el primer observador y la torre.

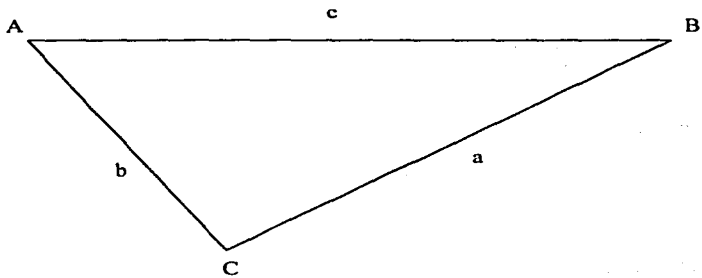
Problema 13

La ley de los cosenos. En cualquier triángulo ABC como el mostrado en la siguiente figura, se cumplen las tres igualdades enlistadas a continuación:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



Colocaremos el triángulo anterior en la posición indicada a continuación para obtener una de las igualdades de la ley de los cosenos.

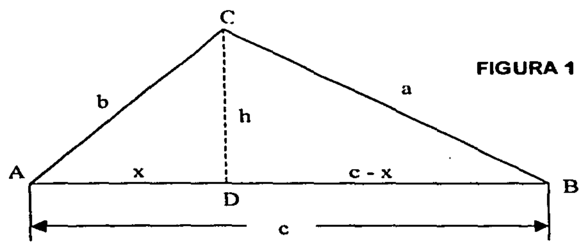


FIGURA 1

En el triángulo rectángulo ACD de la figura 1 tenemos que:

$$\cos A = \frac{x}{b} \qquad \therefore \qquad x =$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ADC y BCD, obtenemos respectivamente:

$$b^2 = \qquad\qquad +$$

$$a^2 = \qquad\qquad + (c - x)^2$$

Si despejamos h^2 de las dos igualdades anteriores tendremos:

$$h^2 =$$

$$h^2 =$$

Igualando las dos expresiones para h:

$$a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$$

Despejando a^2, elevando al cuadrado $c - x$ y simplificando obtenemos:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 +$$

$$a^2 =$$

Como $x = b\cos A$, obtenemos la primera igualdad de la ley de los cosenos.

$$a^2 =$$

Para obtener la segunda igualdad de la ley de los cosenos, usaremos el mismo triángulo como se muestra en la siguiente figura.

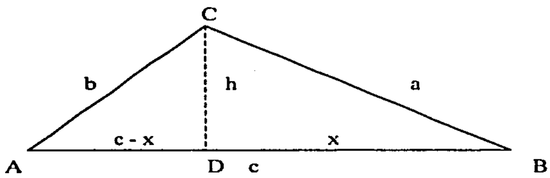


FIGURA 2

En el triángulo rectángulo BCD de la figura 2 tenemos que:

$$\cos B = \frac{x}{a} \qquad \therefore \qquad x =$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ADC y BCD, obtenemos respectivamente:

$$b^2 =$$

$$a^2 =$$

Si despejamos h^2 de las igualdades anteriores obtenemos:

$$h^2 =$$

$$h^2 =$$

Igualando las dos expresiones obtenemos:

$$b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 = a^2 - x^2 + (c - x)^2$$

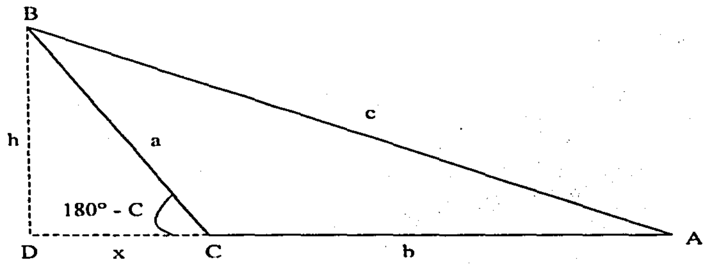
Realizando las operaciones del miembro derecho de la igualdad y simplificando:

$$b^2 =$$

Sustituyendo x = acosB, obtenemos:

$$b^2 =$$

Para deducir la otra igualdad de la ley de los cosenos usaremos el triángulo ABC en la posición indicada en la figura:



En el triángulo BCD tenemos que:

$$\cos(180° - C) = \frac{x}{a}, \quad \text{pero } \cos(180° - C) = -\cos C \text{ ; entonces}$$

$$x =$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos BCD y ABD para obtener:

$$a^2 = x^2 + h^2 \quad \therefore \quad h^2 =$$

$$c^2 = (b + x)^2 + h^2 \quad \therefore \quad h^2 =$$

Igualando estas dos expresiones para h, despejando c^2 y simplificando:

$$c^2 - (b + x)^2 =$$

$$c^2 =$$

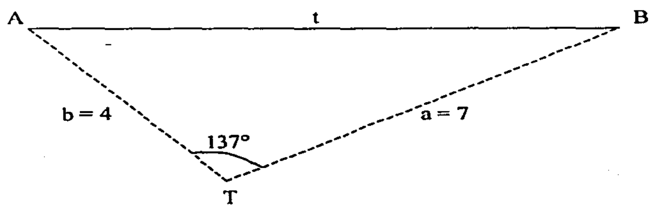
Como x = -acosC, obtenemos:

$$c^2 =$$

Problema 14.

Un guardabosques está en una torre y observa dos incendios a distancias de 4 7 km a él. Si el ángulo entre las líneas de visión hacia los dos puntos de fuego es de 137°. ¿ A que distancia están entre si los incendios?

Si A y B son los dos puntos de los incendios y T el punto donde está la torre, entonces la distancia t pedida es la que se muestra en la siguiente figura:



Aplicando la ley de los cosenos tendremos:

$$t^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos T$$

$$t^2 =$$

$$t^2 =$$

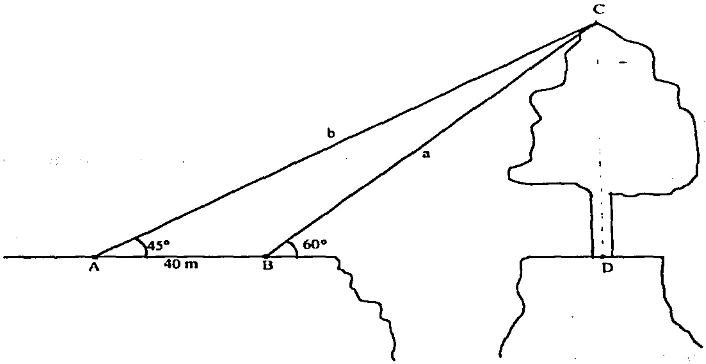
$$t^2 =$$

$$t = \sqrt{\qquad\qquad}$$

$$\therefore \quad t = 10.2934 \text{ km}$$

Problema 15.

En medio de una planicie hay una barranca que hace inaccesible la base de un abeto. Ver la figura. Para conocer su altura, descubrimos que desde un punto B la punta del árbol se observa bajo un ángulo de 60°, y que 40 metros mas lejos ésta se observa bajo un ángulo de 45°. ¿ Que altura tiene el abeto?



Utilizar la figura anterior para llenar los espacios vacíos:

$\sphericalangle ABC + 60° =$ ____________________

$\sphericalangle ABC =$ ____________________

$\sphericalangle C =$ ____________________

Aplicando la ley de los senos en el triángulo ABC:

$$\frac{a}{\text{sen } 45°} = \frac{40}{\text{sen}(\quad)}$$

$$a = \frac{40(\qquad)}{(\qquad)}$$

a = 109.289 m.

En el triángulo rectángulo BCD:

$$\text{sen}60° = \frac{CD}{109.289}$$

$$CD = (\qquad\qquad)(109.289)$$

$$CD = 94.647$$

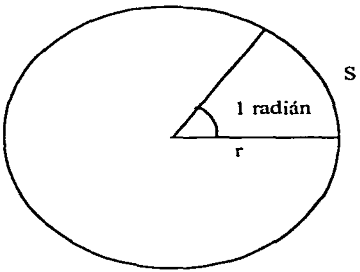
Entonces la altura del abeto es de 94.647 m.

Problema 16.

Llenar la siguiente tabla que nos proporciona la equivalencia de algunos ángulos en grados y radianes.

GRADOS	0	1		45	90	135	180	225	270	315	360
RADIANES	0		1								

Un radián es el ángulo que subtiende un arco S de longitud igual al radio en una circunferencia como lo muestra la siguiente figura.



En una circunferencia de radio 5 cm el ángulo en radianes que subtiende un arco de longitud 12 cm se calcula de la siguiente manera:

$$\text{ángulo en radianes} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{el radio}} = \frac{12}{5}$$

En una circunferencia de radio r el ángulo de una vuelta en radianes es $\boxed{\qquad\qquad}$
Lo que significa que:

$$\boxed{360° = \_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ radianes}}$$

Usar la equivalencia anterior para llenar la tabla.

Problema 17.

Una polea de 10 cm de radio gira 437° . ¿ Que distancia se mueve la banda de transmisión?

El problema es equivalente a encontrar el arco que subtiende el ángulo de 437° convertido a radianes. Llenar los espacios vacíos para resolverlo.

437° = __________________radianes.

$$\text{Angulo en radianes} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{radio de la circunferencia}} = \frac{S}{r}$$

S = (   )(   )

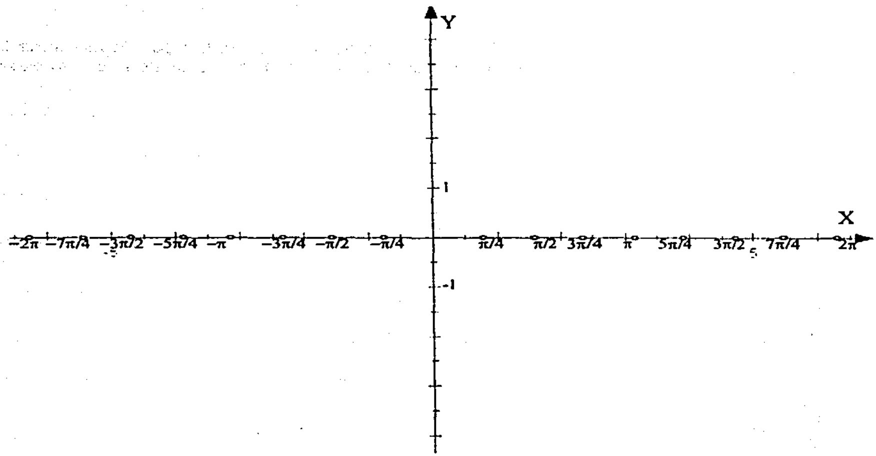
S = 76.27 cm.

Problema 18.

Consideremos la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \operatorname{sen} x$. Usar una calculadora para completar la tabla:

x	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$(x, f(x))$
-2π		
$-\frac{7\pi}{4}$		
$-\frac{3\pi}{2}$		
$-\frac{5\pi}{4}$		
$-\pi$		
$\frac{-3\pi}{4}$		
$-\frac{\pi}{2}$		
$-\frac{\pi}{4}$		
0		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{3\pi}{4}$		
π		
$\frac{5\pi}{4}$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

Señalar los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas, después unirlos con un trazo continuo:



El dominio de la función anterior es el conjunto de números reales x para los que se puede calcular $\text{sen} x$ **.**

Dominio: ______________________________

El valor máximo obtenido por $f(x) = \text{sen}(x)$ **es: ______________________**

El valor mínimo obtenido es: ____________________

El rango es el conjunto de todos los valores obtenidos por f(x) = sen(x).

Rango = ____

Problema 19.

Si f(x) = cos(x), llenar la siguiente tabla para obtener algunos puntos por donde pasa la gráfica de esta función, señalarlos en un sistema de coordenadas y unirlos con un trazo continuo.

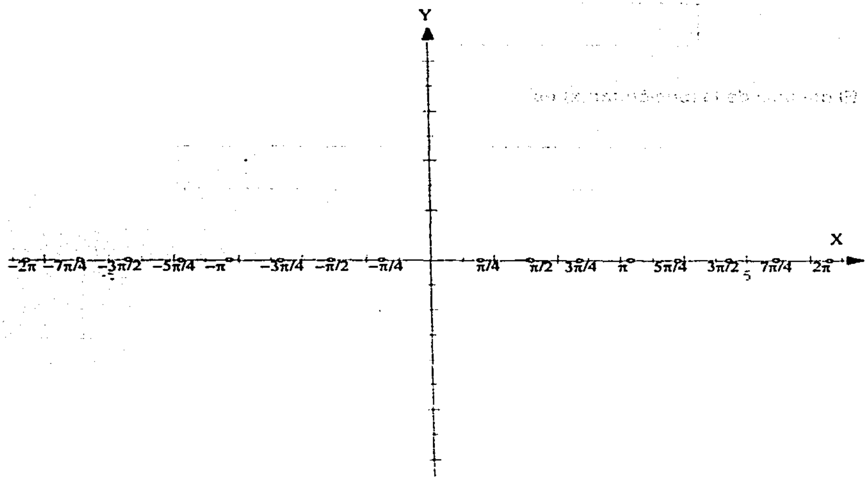
x	$f(x) = \cos x$	$(x, f(x))$
-2π		
$-\frac{7\pi}{4}$		
$-\frac{3\pi}{2}$		
$-\frac{5\pi}{4}$		
$-\pi$		
$\frac{-3\pi}{4}$		
$-\frac{\pi}{2}$		
$-\frac{\pi}{4}$		
0		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{3\pi}{4}$		
π		
$\frac{5\pi}{4}$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

El dominio de $f(x) = \cos(x)$ es: ______________________________

El valor máximo obtenido por dicha función es: ____________________

El valor mínimo obtenido es: ______________________________

El rango es: ______________________________



NOTA: Si en las dos gráficas anteriores consideramos la parte que se dibuja de cero a 2π, se observará que se repite la misma figura de -2π a cero y de 2π a 4π. Como el dominio de estas dos funciones es $\mathbb{R}$ entonces la figura se repite una infinidad de veces hacia la parte positiva del eje x, también una infinidad de veces hacia la parte negativa del mismo eje. Cuando una función tiene esta propiedad se dice que es periódica con periodo 2π.

Problema 20.

Si f(x) = tan(x), llenar los espacios vacíos para hallar el dominio.

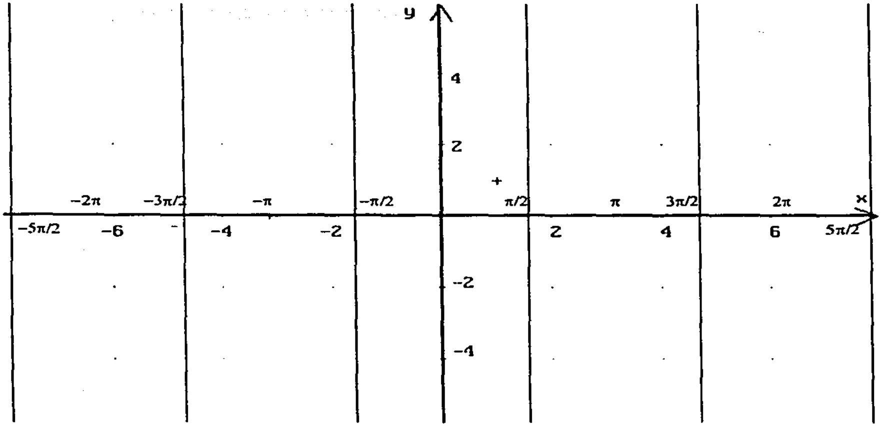
Como $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, el dominio de tan(x) es el conjunto de todos los números reales para los que está bien definido el cociente. Como la división entre cero no está definida, el dominio son los reales menos aquellos números para los que cos(x) = 0.

El conjunto de números para los que cos(x) = 0 es: (Observar la gráfica de cos(x)).

El dominio de la función tan(x) es:

Llenar la siguiente tabla usando una calculadora para graficar la función en el sistema de coordenadas que aparece dibujado después.

x	f(x) = tan(x)	(x,f(x))
$-\frac{3\pi}{8}$		
$-\frac{\pi}{4}$		
$-\frac{\pi}{8}$		
0	0	(0,0)
$\frac{\pi}{8}$		
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$
$\frac{3\pi}{8}$		
$\frac{5\pi}{8}$		
$\frac{3\pi}{4}$		
$\frac{7\pi}{8}$		
π		
$\frac{9\pi}{8}$		
$\frac{5\pi}{4}$		
$\frac{11\pi}{8}$		



El rango de la función es:

Esta función también es periódica. Observar la gráfica para indicar el periodo:

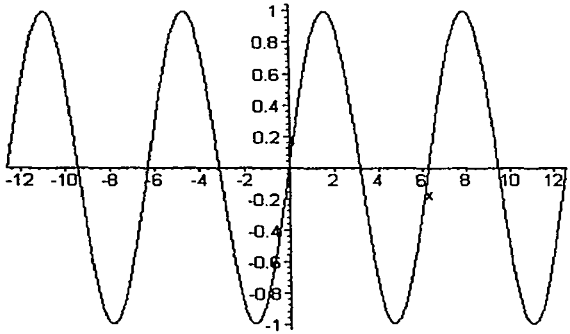
¿ Qué observa respecto a las rectas verticales mostradas en la gráfica?

Dichas rectas son las asíntotas de la gráfica de $f(x) = \tan x$.

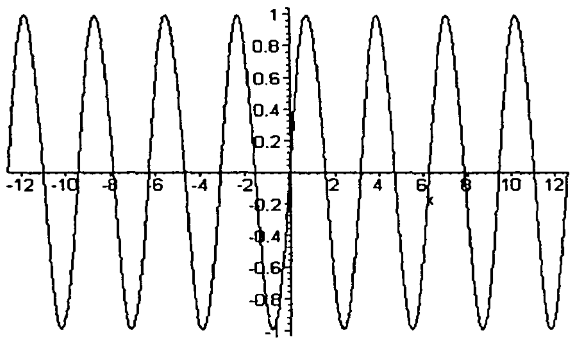
Problema 21.

En este problema graficaremos la función $f(x) = 4sen(2x+3)-2$ observando los efectos que producen los números que aparecen en esta función en $f(x) = sen(x)$.

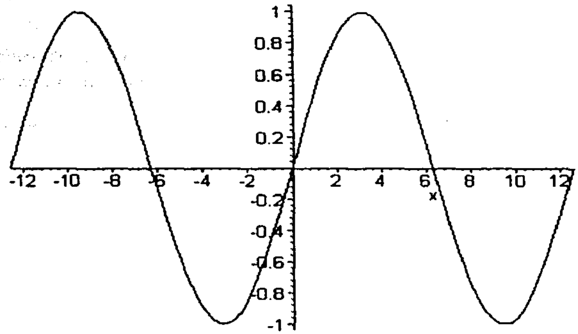
Compara las gráficas de $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(2x)$ y $h(x) = sen(\frac{1}{2}x)$ y contesta lo que se te pide:



GRAFICA DE SEN(X)



GRAFICA DE SEN(2X)



GRAFICA DE SEN(X/2)

¿ Cual es el intervalo de números reales de longitud mas pequeña para el que se dibuja un ciclo completo de $f(x) = sen(x)$?

La misma pregunta para $g(x) = sen(2x)$:

Comparar el resultado con la expresión: $\frac{2\pi}{2}$

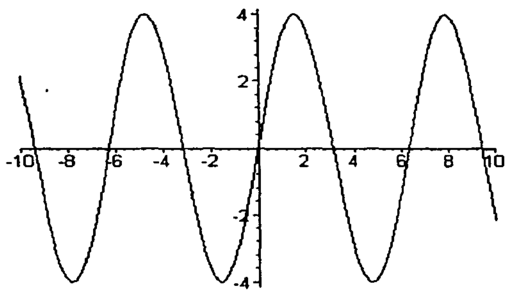
Lo mismo para $h(x) = sen(\frac{1}{2}x)$:

Comparar el resultado con la expresión: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$

A la longitud del intervalo mas pequeño para el que se dibuja un ciclo completo, se le llama **periodo de la función.**

De acuerdo a lo observado anteriormente ¿Qué podemos decir del periodo de la función: $\operatorname{sen} ax$?

Observa la gráfica de la función: $f(x) = 4\operatorname{sen} x$ y contesta lo que se te pide:



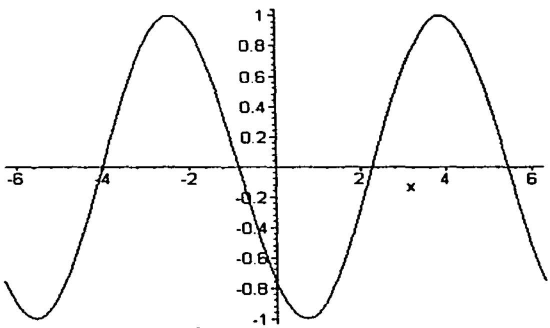
GRÁFICA DE 4SENX

¿ Qué podemos decir acerca de la longitud del rango de la función comparado con la de la función $\operatorname{sen} x$?

A la mitad de la longitud del rango se le llama **amplitud de la función**.

¿ Qué podemos decir de la amplitud de la función $f(x) = b\operatorname{sen} x$?

Observar la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x+4)$

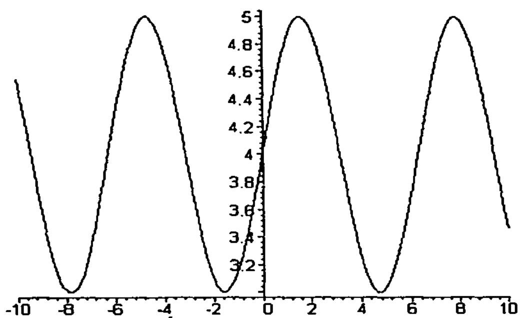


GRÁFICA DE SEN(X+4)

Obsérvese que la gráfica anterior se obtiene de la de $f(x) = \operatorname{sen} x$ trasladándola a la izquierda 4 unidades. En esta situación decimos que hay un **desfasamiento** de 4 unidades a la izquierda.

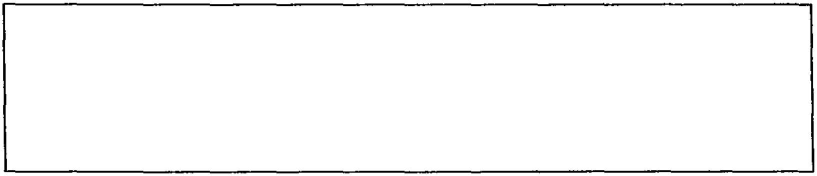
¿ Qué podemos decir de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x + c)$?

Por último observa la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 4$, donde podrás notar que lo que sucede es que la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se traslada 4 unidades hacia la parte positiva del eje Y.

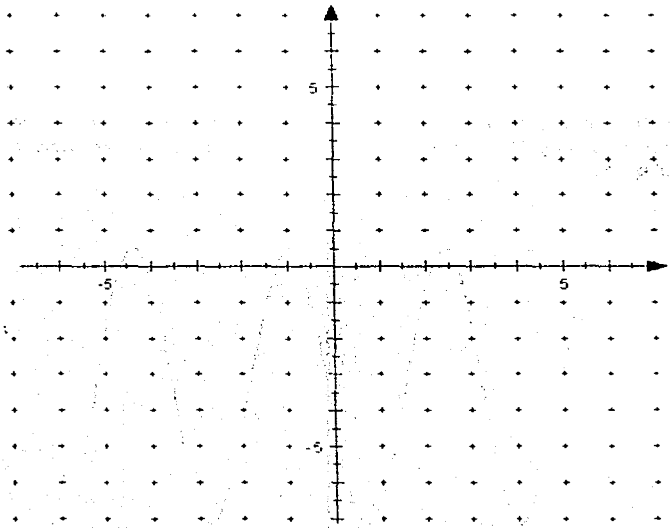


GRÁFICA DE SEN(X) + 4

¿ Qué se puede decir acerca de la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x + d$?



Con las observaciones anteriores dibuja la gráfica de la función $f(x) = 4sen(2x+3)-2$ en el sistema de coordenadas siguiente:



Problema 22.

Usar los siguientes datos y gráficas para describir las funciones inversas de:

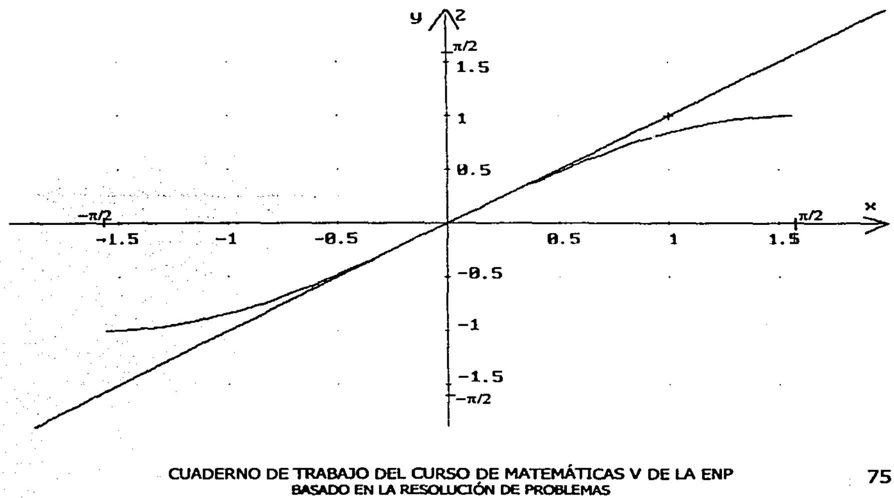
$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad g(x) = \cos x \quad , \quad h(x) = \tan x$$

Además graficar dichas inversas, reflejando en la recta a 45° que se dibuja para ese fin.

Considerar la función $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Dicha función es biyectiva por lo que tiene inversa, esta inversa se denota por: $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$.

El dominio y el rango de $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ es: $\boxed{}$

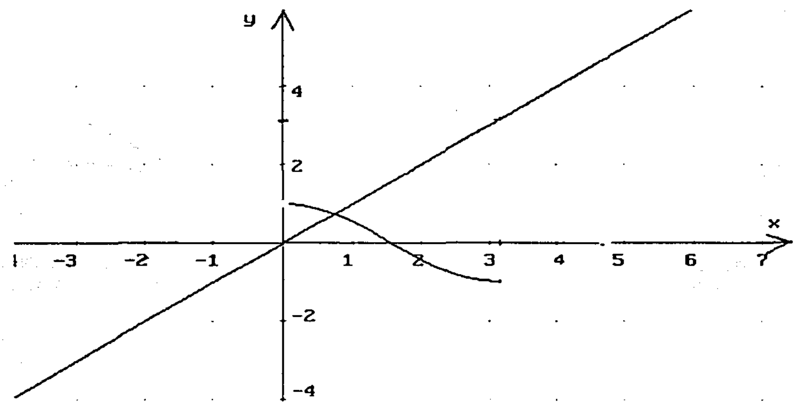
Dibujar la gráfica de la inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ en el siguiente sistema de coordenadas reflejando sobre la recta a 45° la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ que aparece en el dibujo:



Considerar la función $g:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]$ tal que $g(x)=\cos x$. Dicha función es biyectiva por lo que tiene inversa, esta inversa se denota por: $g^{-1}(x)=\arccos x$.

El dominio y el rango de $g^{-1}(x)=\arccos x$ es:

Dibujar la gráfica de la inversa $g^{-1}(x)=\arccos x$ en el siguiente sistema de coordenadas, reflejando sobre la recta a 45° la gráfica de $g(x)=\cos x$ que aparece en el dibujo.

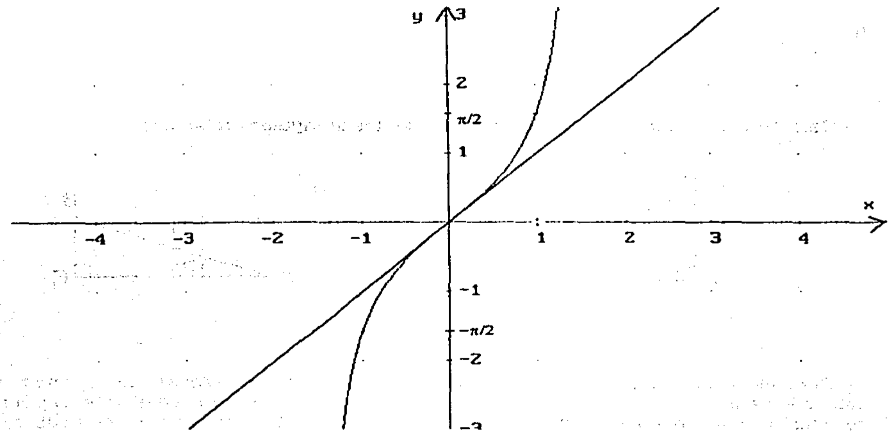


Considerar la función $h:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=\tan x$. Dicha función es biyectiva por lo que tiene inversa, esta inversa se denota por: $h^{-1}(x)=\arctan x$.

El dominio y el rango de $h^{-1}(x)=\arctan x$ es:

Dibujar la gráfica de la inversa $h^{-1}(x)=\arctan x$ en el siguiente sistema de coordenadas, reflejando sobre la recta a 45° la gráfica de $h(x)=\tan x$ que aparece en el dibujo.

Dibujar las asíntotas de la gráfica de $h^{-1}(x)=\arctan x$.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Comprobar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $(\tan\alpha + \cot\alpha)\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha = 1$

b) $\tan^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \dfrac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$

c) Usar las identidades: $\cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\theta$ y $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ para demostrar $sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ y $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

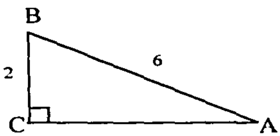
d) $\dfrac{\csc\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{1-sen\theta}{\cos^2\theta}$

e) $\dfrac{1-2sen^2\theta}{sen\ \theta \cdot \cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

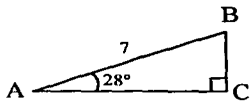
f) $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{sen^2\theta}{1-\cos\theta}$

2.- Calcular los elementos faltantes en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



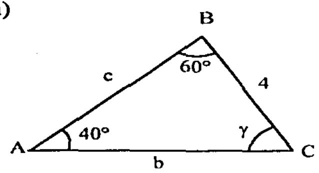
b)



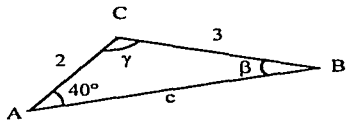
3.- Para medir la altura del volcán Popocatépetl en el valle de México, un agrimensor obtuvo los siguientes datos. Descubrió que desde un punto B ubicado en el valle, la punta del volcán se observa bajo un ángulo de 15°, y que desde 1950 metros más lejos sobre el mismo valle, la punta se observa bajo un ángulo de 13°. Si la altura del valle de México sobre el nivel del mar es de 2200 metros, ¿ Cuál es la altura del Popocatépetl respecto del nivel del mar?

4.- Calcular los elementos que faltan en los siguientes triángulos:

a)



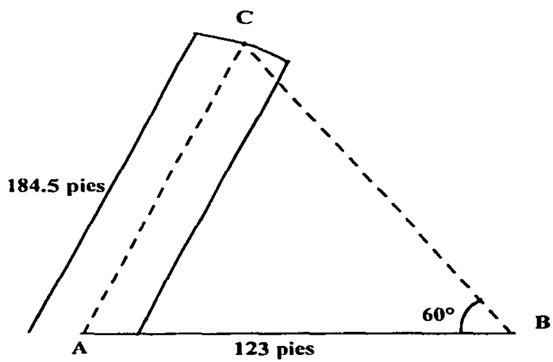
b)



c) a = 6, b = 8, $\alpha = 35°$. Dos soluciones.

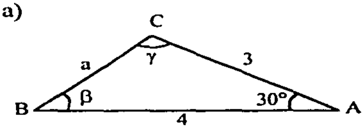
d) a = 2, c = 1, $\gamma = 50°$. Ninguna solución.

5.- La famosa torre inclinada de Pisa tenía originalmente 184.5 pies de altura. Después de alejarse uno 123 pies de la base de la torre se encuentra que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es de 60°. Encuentre el ángulo CAB indicado en la figura. Encuentre también la distancia perpendicular de C a AB. Ver figura:

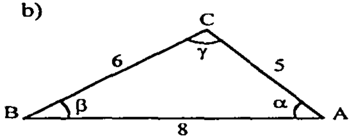


6.- Calcular los elementos que faltan en los siguientes triángulos:

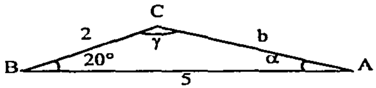
a)



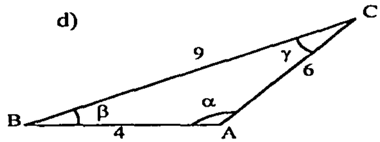
b)



c)



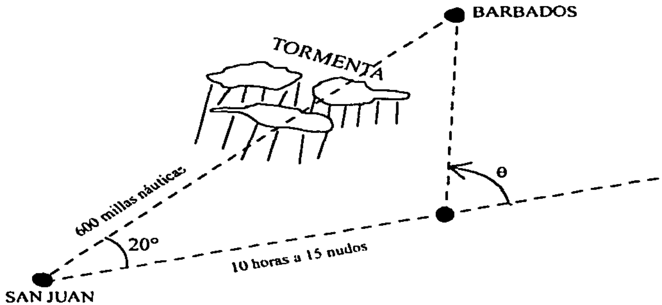
d)



7.- La distancia que hay entre San Juan, Puerto Rico y Barbados, en las indias occidentales es de 600 millas náuticas. Para evitar una tormenta tropical, el capitán parte de San Juan con un rumbo desviado 20° y una velocidad de 15 nudos. El capitán mantiene esa velocidad durante 10 horas, después de lo cual la ruta a Barbados está libre de tormentas. **NOTA: 1 NUDO = 1 MILLA NÁUTICA POR HORA.**
(Una milla náutica = 1.85 Km)

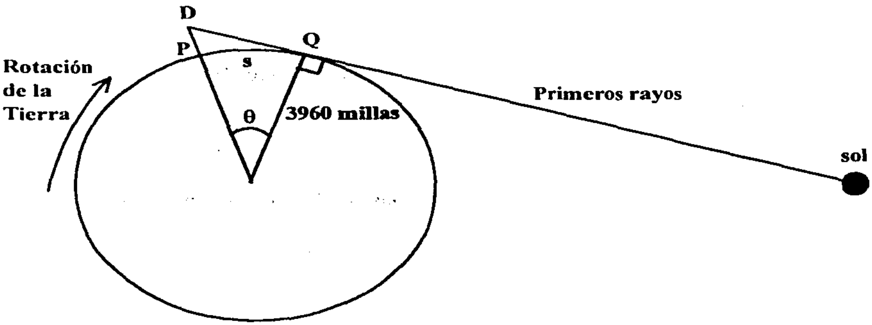
a) ¿ Qué ángulo debe girar el capitán para ir directamente a Barbados?

b) ¿ Qué tiempo le tomará al barco llegar a Barbados si se mantiene la velocidad de 15 nudos?

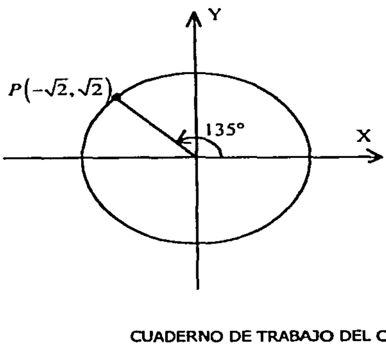


8.- La montaña Cadillac, con elevación de 1530 pies, está localizada en el parque nacional Acadia, Maine, y es el pico más alto en la costa oriental de los Estados Unidos. Se dice que una persona de pie en su cima es la primera persona en los Estados Unidos en ver los rayos del sol naciente. ¿ Cuánto tiempo antes ve esa persona los rayos del sol respecto de otra situada abajo, al nivel del mar? [*Sugerencia:* Consulte la figura. Cuando la persona en D ve los primeros rayos del sol, la persona en P aún no los ve. La persona en P ve los primeros rayos del sol sólo después de que la tierra ha girado de manera que P alcance la posición Q. Calcule la longitud del arco s subtendido por el ángulo central θ Luego tome en cuenta que en 24 horas se subtiende una longitud de $2\pi(3960)$ millas y encuentre entonces el tiempo requerido para subtender la longitud s.]

NOTA: UNA MILLA = 1609.344 METROS, UN PIE = 0.3048 METROS.



9.- Usar la siguiente figura para calcular lo que se pide:



$\operatorname{sen}(135°) =$ $\cot(135°) =$

$\cos(135°) =$ $\sec(135°) =$

$\tan(135°) =$ $\csc(135°) =$

10.- Expresar lo siguiente en términos de un ángulo agudo.

a) sen(2660°) = b) cos(2357°) = c) tan(3555°) =

11.- Trazar la gráfica de $f(x) = 2 \cdot sen(x + \frac{\pi}{2}) - 3$ y determinar la amplitud, periodo y desfasamiento.

12.- La Bahía de Fundy en la costa Atlántica del Canadá es famosa por sus mareas de extraordinaria amplitud, siendo la diferencia entre la marea alta y la marea baja de 15 metros. Supongamos que en un punto fijo P_0 de la Bahía el nivel del agua, como función del tiempo contado a partir de las 0:00:00 horas del 1 de enero de 1996, está dado por la ecuación:

$$y = y_0 + a \cdot \cos bt$$

en la que y representa la altura del agua sobre el punto señalado. Di:

a) ¿ Cuál es el significado físico de la constante y_0?

b) ¿ Qué valor tiene a ?

c) ¿ Qué valor tiene b ? Supón que la marea alta se repite cada $12\frac{1}{2}$ horas.

EXAMEN DE PRÁCTICA.

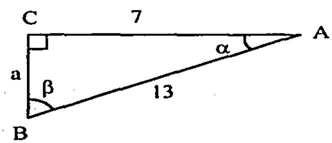
1.- Comprobar las siguientes identidades:

a) $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta$

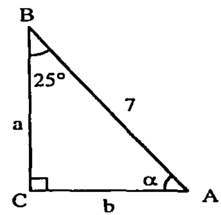
b) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=2\csc\theta$

2.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

a)

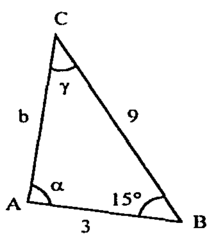


b)

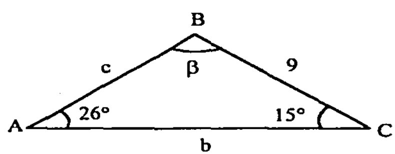


3.- Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos:

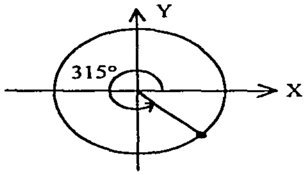
a)



b)



4.- Usar la siguiente figura para calcular las razones trigonométricas de 315°.

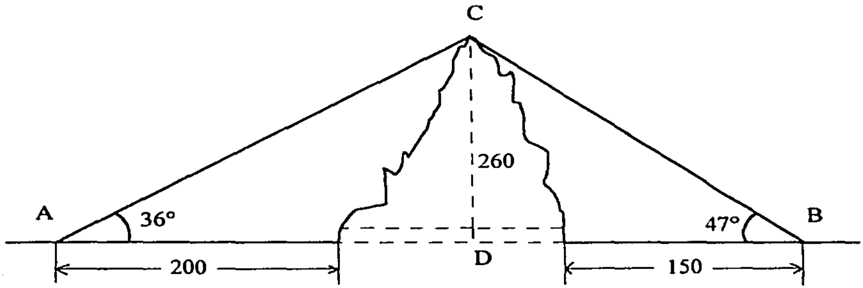


5.- Trazar la gráfica de:

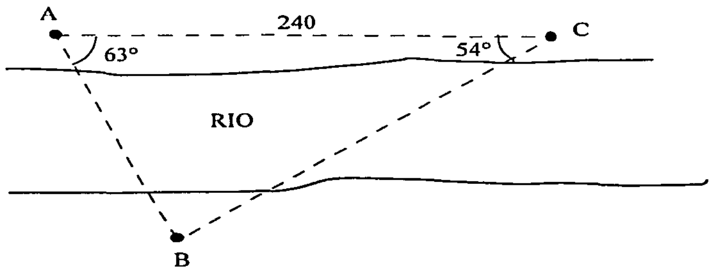
a) $f(x) = \operatorname{sen}(x+2)+1$ b) $g(x) = 4 \cdot \cos(2x) - 5$

Especificando dominio, rango, amplitud, periodo y desfasamiento.

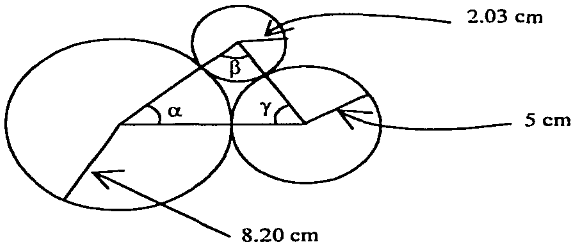
6.- Para una nueva carretera debe excavarse un túnel bajo una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (ver la figura). De una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 47°. Calcula la longitud del túnel.



7.- Para hallar la distancia entre dos puntos A y B en las márgenes opuestas de un río, un agrimensor traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud junto a una de las márgenes, y determina que las medidas de $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle ACB$ son 63° y 54°, respectivamente (ver la figura). Calcula la distancia entre A y B.



8.- Tres circunferencias de radios 2.03, 5.00 y 8.20 cm son tangentes entre si (ver la figura). Encuéntrese los tres ángulos formados por las rectas que unen sus centros.



9.- La rueda delantera de una bicicleta tiene un diámetro de 40 cm y la trasera de 60 cm. ¿ Qué ángulo en radianes gira la rueda delantera, si la trasera gira 8 radianes ?

UNIDAD III

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

INTRODUCCION:

Cuando alguna persona planea invertir sus ahorros a plazo fijo en algún Banco, le debería interesar saber que esa inversión le proporciona un interés compuesto que, esencialmente significa que los intereses generados en el plazo fijado por cierta cantidad inicial se agregan a dicha cantidad para generar nuevos intereses. Resulta que el comportamiento de la inversión anterior nos lo proporciona una función exponencial.

También habrás oído en alguna ocasión del famoso método del carbono 14 para calcular la antigüedad de restos fósiles, este método se basa en la desintegración del carbono 14 que es una sustancia radiactiva y dicho fenómeno puede ser descrito por una función exponencial también.

Hace algunos años una de las preocupaciones primordiales de los gobiernos de todos los países del mundo fue la famosa explosión demográfica, es decir, el crecimiento tan acelerado de la población mundial que hubo en ese entonces, las acciones tomadas en ese sentido, como por ejemplo las campañas de planificación familiar frenaron un poco dicho crecimiento que al igual que los anteriores fenómenos se puede estudiar con la función exponencial.

Como los fenómenos anteriormente mencionados hay muchos otros que tienen que ver con las funciones exponenciales y logarítmicas, por ejemplo la intensidad de un terremoto y el grado de acidez de una sustancia pueden ser descritos por una función logarítmica; al administrarse un medicamento a cierto paciente, éste se elimina del cuerpo por medio de la orina y resulta útil saber que cantidad de medicamento va quedando en el cuerpo conforme pasa el tiempo (para calcular cada cuanto tiempo se le va a administrar dicho medicamento). Otra vez dicho fenómeno puede ser descrito por medio de una función exponencial.

Como habrás notado con lo mencionado anteriormente, son muchas las aplicaciones que tienen las funciones exponenciales y logarítmicas que son las que vamos a estudiar en esta unidad.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno comprenda la diferencia entre una potencia y una función exponencial y entre el concepto de logaritmo y la función logarítmica.

Que sea capaz de resolver problemas significativos de su entorno planteados a partir de una función exponencial o logarítmica.

CONTENIDOS BÁSICOS: Funciones exponenciales, Funciones logarítmicas.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Dominio, rango, gráficas, asíntotas, ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Verán la diferencia que hay entre las funciones a^x y x^a, establecerán el concepto de función exponencial de base a.
- Graficarán algunas funciones exponenciales, determinarán el dominio, rango y la asíntota, se darán las características de dichas funciones.
- Resolverán ecuaciones exponenciales usando las propiedades necesarias de exponentes.
- Observarán que la función logarítmica es la inversa de una exponencial; determinarán el dominio, rango, se trazará la gráfica y se señalará la asíntota.
- Resolverá ecuaciones logarítmicas usando las propiedades de exponentes y logaritmos necesarias.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Fuller, Gordon, Geometría Analítica. México, CECSA, 1995.

2.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3.- López, Antonio, et al., Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

4.- Morales, Heriberto, et al. Matemáticas IV. Cuaderno de Trabajo. México, Trillas, 2000.

5.- Phillips, Elizabeth, et al. Álgebra con Aplicaciones. México, Harla, 1988.

6.- Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, 1997.

7.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

En la presente unidad se ve la diferencia que hay entre la función potencial y la exponencial, se revisan las propiedades de los exponentes y logaritmos y se analizan las funciones exponencial y logarítmica haciendo énfasis en que una es inversa de la otra.

Problema 1.

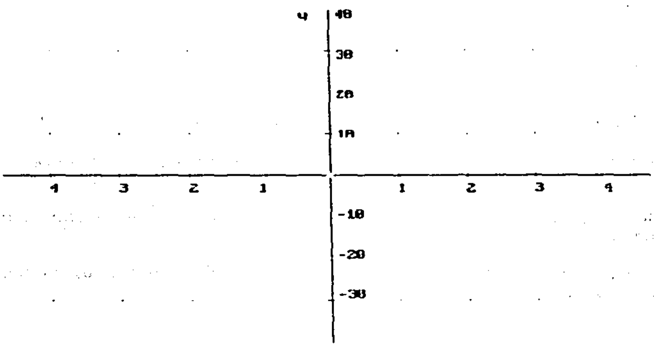
En este problema veremos la diferencia que hay entre la función potencial y la función exponencial.

Llenar los espacios vacíos en las siguientes tablas y graficar los puntos obtenidos en el mismo sistema de coordenadas:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^3				-1					64
3^x				0.333					81

Si a es un número mayor que cero, la fórmula $f(x)=a^x$ define una función que se llama función exponencial de base a.

La fórmula $f(x)=x^a$ define una función que se llama función potencial.



Problema 2.

Llenar los espacios en las siguientes afirmaciones:

El exponente al que se tiene que elevar el 3 para obtener 27 es: ____
Al exponente encontrado se le llama logaritmo de base 3 de 27 y la notación usada es la siguiente:

$$\log_3 27 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

El exponente al que se tiene que elevar el 2 para obtener 64 es: ___________
Que es equivalente a calcular lo siguiente:

$$\log_2 64 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

El exponente al que se tiene que elevar el 5 para obtener _____es 3
La afirmación equivalente con logaritmos es:

$$\log_5 \_\_\_\_\_\_ = 3$$

El exponente al que se tiene que elevar el______ para obtener 81 es 2.

$$\log_{\_\_}\ 81 = 2$$

El exponente al que se tiene que elevar el 3 para obtener 0 es ______.

$$\log_3 0 = \_\_\_\_\_\_$$

el exponente al que tengo que elevar el 2 para obtener –1 es ________.

$$\log_2(-1) = \_\_\_\_\_\_\_$$

Si B es un número real mayor que cero y distinto de 1 y A es un número real mayor que cero, definimos:

El logaritmo de base B del número A es el exponente al que se tiene que elevar la base B para obtener A.

La notación usada es : $\log_B A$ **para referirse al logaritmo de base B de A.**

De acuerdo a lo analizado en las dos últimas afirmaciones tenemos que el logaritmo de cero y un número negativo no existen.

Todos los logaritmos en una base dada **B** forman un sistema de logaritmos de base **B**, los sistemas mas usados son los siguientes:

Sistema de logaritmos decimales cuya base es 10. En estos logaritmos se acostumbra la siguiente notación:

$$\log_{10} x = \log x$$

Sistema de logaritmos naturales cuya base es el número e, la notación usada es:

$$\log_e x = \ln x$$

Problema 3.

Llenar los espacios en las siguientes afirmaciones:

$\log_2(8\cdot 4)=\log_2 32=$ ____

$\log_2 8=$ ____

$\log_2 4=$ ____

Comparar $\log_2(8\cdot 4)$ y $\log_2 8+\log_2 4$ ________________________

La propiedad de los logaritmos a que hace referencia lo anterior es la siguiente:

$$\log_B(A\cdot C)=\log_B A+\log_B C$$

$\log_5(\frac{625}{25})=\log_5 25=$ ____

$\log_5 625=$ ____

$\log_5 25=$ ____

Comparar los resultados de $\log_5(\frac{625}{25})$ y $\log_5 625-\log_5 25$ ________________

La propiedad a la que hace referencia lo anterior es la siguiente:

$$\log_B(\tfrac{A}{C})=\log_B A-\log_B C$$

$\log 7^4=$ ______

$4*\log 7=$ ______

Comparar los resultados obtenidos. ________________________________

La propiedad a la que hace referencia lo anterior es:

$$\log_B A^C=C\cdot\log_B A$$

$\log_3 3^5=$ ______

En general:

$$\log_B B^A=A$$

$7^{\log_7 49}=7^{—}=$ ______

La propiedad usada aquí es la siguiente:

$$B^{\log_B A} = A$$

Trataremos ahora de calcular:

$$\log_3 56$$

Como el logaritmo no es exacto y en la calculadora sólo podemos hallar logaritmos de base 10 y de base e, procedemos así:

Si $\log_3 56 = x$, x es el exponente al que se eleva 3 para obtener 56, es decir:

$3^x = 56$, si aplicamos logaritmos decimales tendremos:

$\log(3^x) = \log 56$, entonces

$x \log 3 = \log 56$,despejar x para obtener:

$$x = \frac{\log 56}{\log 3} = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

La propiedad que nos permite calcular logaritmos en cualquier base es la siguiente:

$$\log_C A = \frac{\log_B A}{\log_B C}$$

Problema 4.

La vida media del radio es de 1600 años, es decir, la mitad de la sustancia se desintegra en 1600 años. Si la cantidad inicial es de 80 mg. Completar la siguiente tabla que nos proporciona la cantidad de radio restante en periodos de tiempo de 1600 años.

TIEMPO EN AÑOS	1600	3200	4800	6400
CANTIDAD RESTANTE EN mg	40 = 80(2—)	20 = 80(2—)	10 = 80(2-)	5 = 80(2-)

Los datos de la tabla anterior sugieren que si N(t) es la cantidad de radio restante entonces:

$$N(t) = 80(2^{kt})$$

Podemos calcular el valor de k usando el primer dato de la tabla:

$$40 = 80(2^{-1})$$

De donde se deduce que kt = -1, es decir, k(3600) = -1 y por tanto k = $\frac{-1}{3600}$; entonces la fórmula que nos proporciona la cantidad de radio restante en el tiempo t es la siguiente:

$$N(t) = 80(2^{\frac{-1}{3600}t})$$

Llenar la siguiente tabla que nos da la cantidad restante de radio en 50 años, 100 años, 400 años y 800 años.

TIEMPO EN AÑOS	50	100	400	800
CANTIDAD RESTANTE EN mg				39.3885

Para 800 se calculó la cantidad restante de radio aplicando la fórmula de la siguiente manera:

$$N(800) = 80(2^{\frac{-800}{3600}}) = 80(2^{-.02222}) = 39.3885$$

Problema 5.

Se tiene una colonia de 750 bacterias que se duplican cada media hora. Completar lo siguiente:

NUMERO DE HORAS	NUMERO DE BACTERIAS
0	N = 750
0.5	N = 1500 =750(2)
1	N = 3000 = 750(4) = 750(2--)
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
.	
.	
.	
n	N = 750(2–)

De acuerdo a la tabla anterior el número de bacterias que hay en n horas está dado por la siguiente fórmula:

$$N(n) = 750(2^{2n})$$

Problema 6.

Si a es un número real mayor que 1 definimos una función por medio de la siguiente fórmula:

$$f(x) = a^x$$

A esta función se le llama función exponencial de base a. Si a>0 a^x está bien definido para todo número real x, lo que nos indica que el dominio de la función exponencial es el conjunto de números reales denotado por $\mathbb{R}$.

Llenar las tablas siguientes y graficar en un mismo sistema de coordenadas con el objeto de comparar el crecimiento de la función exponencial para distintos valores de la base.

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$	(x,y)
-2		
-1		
0	$f(0) = 2^0 = 1$	(0, 1)
1		
2		
3	$f(3) = 2^3 = 8$	(3, 8)

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x) = 3^x$

x	$f(x) = 3^x$	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3	$f(3) = 3^3 = 27$	(3, 27)

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

x	$f(x) = (\frac{1}{2})^x$	(x,y)
-2		
-1	$f(-1) = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$	
0		
1		
2		
3		

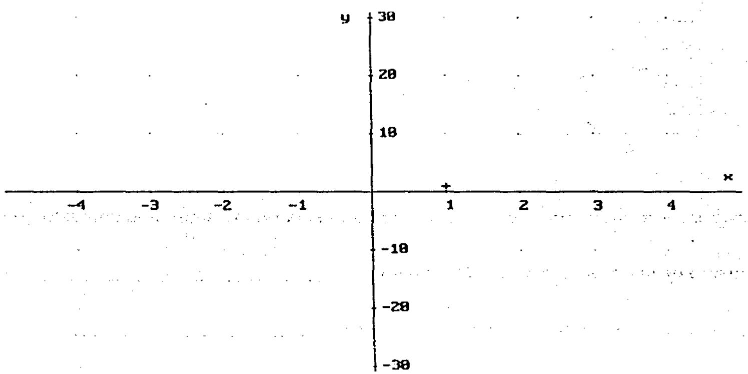
De acuerdo con las gráficas que se deben dibujar en el sistema de coordenadas siguiente, contestar:

Las funciones crecientes en todo su dominio son:

____

El rango de la función $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ es: ____________________

¿Cuál de las funciones crece mas rápidamente?:____________________



Problema 7.

La función definida por la fórmula $f(x) = \log_B x$ donde B es un número real mayor que cero y distinto de 1 se llama función logarítmica de base B.

Lo siguiente nos va a mostrar el comportamiento de la función logarítmica para diferentes bases. Completar las siguientes tablas:

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x)=\log_2 x$

x	$f(x)=\log_2 x$	(x,y)
$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2})=\log_2(\frac{1}{2})=-1$	($\frac{1}{2}$, -1)
1		
2		
4		
8		

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x)=\log_3 x$

x	$f(x)=\log_3 x$	(x,y)
$\frac{1}{9}$		
$\frac{1}{3}$		
1		
3		
9	$f(9)=\log_3 9=2$	(9, 2)
27		

De acuerdo a la información que nos proporcionan las tablas anteriores contestar lo siguiente:

El dominio de las dos funciones anteriores es: ______________________________

La(s) funciones crecientes en todo su dominio son: ________________________

¿Cuál función crece mas rápido? : ____

Problema 8.

A continuación compararemos las gráficas de una función logarítmica de base 2 y una exponencial también de base 2. Llenar las siguientes tablas para después graficar las dos funciones en un mismo sistema de coordenadas.

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x)=2^x$

x	$f(x)=2^x$	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

TABLA CORRESPONDIENTE A $f(x)=\log_2 x$

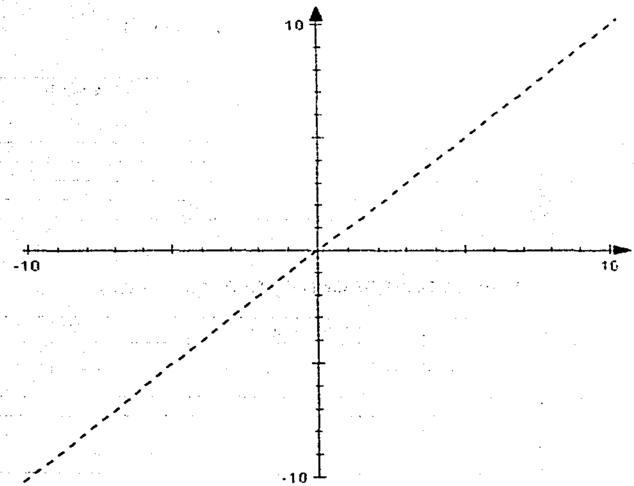
x	$f(x)=\log_2 x$	(x,y)
$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2}$		
1		
2		
4		
8		

De acuerdo con la gráfica de las dos funciones anteriores y observando la línea a 45°. ¿Qué podemos decir acerca de las dos gráficas?:

____

____

Efectivamente, las dos gráficas son simétricas respecto a la línea a 45° lo que nos dice que la función exponencial de base 2 es la inversa de la logarítmica de base 2.



Problema 9.

Ricardo desea invertir $ 15 000 en un banco que proporciona un interés compuesto anual del 12 %. ¿En cuánto tiempo duplicará su capital? Suponiendo que la tasa de interés se mantiene todo el tiempo que dura la inversión.

Si M es la cantidad acumulada en n años entonces tendremos la siguiente fórmula:

$$M = 15000(1+0.12)^n$$

De acuerdo a lo que nos piden en el problema M = 30 000 entonces:

$$30\,000 = 15000(1.12)^n$$

$$(1.12)^n = 2$$

Aplicando logaritmos podemos encontrar que el valor de n es:

$$n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ años.}$$

Al tipo de ecuaciones resuelto anteriormente donde la incógnita es el exponente se les llama **funciones exponenciales.** Como podrá observarse las ecuaciones exponenciales se resuelven aplicando logaritmos.

Problema 10.

Cálculo de la antigüedad por medio del carbono 14.

El bombardeo de la atmósfera por los rayos cósmicos produce neutrones, que a su vez reaccionan con el nitrógeno para producir el carbono 14, el cual penetra en los todos los tejidos vivos por medio del bióxido de carbono que primero es absorbido por las plantas. Mientras una planta o un animal tienen vida, el carbono 14 se mantiene en una concentración constante en los tejidos. Sin embargo, cuando mueren, dejan de absorber el carbono y con el paso del tiempo, éste disminuye por desintegración radiactiva. Si la vida media del carbono 14 es de 5600 años, entonces la fórmula que nos proporciona la cantidad restante de carbono 14 en el tiempo t en años es:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-1}{5600}t}$$

Donde N_0 es la cantidad inicial de carbono 14.

Llenar los espacios vacíos para mostrar que esta fórmula se puede escribir así:

$$N(t) = N_0 e^{-0.000124t}$$

$$x = 2^{\frac{-1}{5600}t}$$

Aplicando logaritmos naturales en ambos lados, obtenemos:

$$\ln x = \ln\left(2^{\frac{-1}{5600}t}\right)$$

Usando las propiedades de los logaritmos al lado derecho de la igualdad obtenemos:

Realizando las operaciones indicadas y aplicando exponencial de base e, tendremos que:

$$x = \boxed{}$$

De lo anterior se desprende que:

$$N_0 \cdot 2^{\frac{-1}{5600}t} = N_0 e^{-0.000124t}$$

Problema 11.

Restos de madera quemada, hallados junto con antiguas herramientas de piedra en un sitio arqueológico en Chile, contiene 1.67 % de la cantidad original de carbono 14.
¿ Aproximadamente cuándo se cortó y quemó el árbol?

Usando la fórmula anterior y tomando en cuenta que $N(t) = (0.0167)N_0$ tendremos:

$$(0.0167)N_0 = N_0 e^{-0.000124t}$$

$$0.0167 = e^{-0.000124t}$$

$$\ln(0.0167) = \ln(e^{-0.000124t})$$

$$\underline{} = \underline{}$$

$$t = \underline{}$$

t = 33 002.8 años.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1.- Graficar las siguientes funciones exponenciales. Especificando dominio, rango , asíntota y decir donde es creciente o decreciente.

a) $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - 4$ b) $g(x) = 3^{-x} + 2$

2.- Graficar las siguientes funciones logarítmicas. Dando el dominio, rango, asíntota y decir donde es creciente o decreciente.

a) $f(x) = \log_4(x-3) + 2$ b) $g(x) = 2 \cdot \log_7(x+2) - 5$

3.- Si $f : \mathbb{R} \to [3, \infty)$ es la función definida por $f(x) = 2^{x-1} + 3$ hallar su inversa y graficar las dos en el mismo sistema de coordenadas.

4.-

a) Calcular:

$\log_7 49 =$ $\log_b b^5 =$ $\log_5 5^{\frac{1}{4}} =$ $\log_b b^{x+y} =$

$\log_4 \frac{1}{4} =$ $\log_2 8^{\frac{1}{2}} =$ $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

b) Calcular x en:

$\log_{81} 3 = x$ $\log_x 2 = \frac{1}{3}$ $\log_3 x = 3$ $\log_{100} 0.1 = x$

$\log_x 5 = \frac{1}{2}$ $\log_4 x = 3$

5.- Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $8^{x+2} = 16^{2x-1}$ b) $20 = 5 + 30 \cdot 2^{x+1}$ c) $574 = 43 \cdot e^{5x-3}$

6.- Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_6(x+3)+\log_6(x+4)=1$ b) $\log(3x+1)-4=-2$ c) $\ln(5x-4)+1=3$

7.- Se invierten $ 7500 a interés compuesto cuatrimestralmente con tasa de interés del 10 % anual.

a) Llenar la siguiente tabla para obtener una fórmula que nos dé la cantidad que hay en n años.

TIEMPO	CANTIDAD
4 meses	
8 meses	
12 meses (1 año)	
16 meses	
20 meses	
24 meses (2 años)	
n años	

b) ¿ En cuánto tiempo habrá $ 78000 ?

8.- Se ingieren 3 mg de cierto medicamento. Si el cuerpo elimina el 10 % en 8 horas.

a) Hacer una tabla para obtener una fórmula que nos proporcione la cantidad de medicamento que queda en el organismo en n días.

b) ¿ Qué cantidad de medicamento habrá en 15 horas ?

c) ¿ En cuánto tiempo se habrá eliminado el 70 % de la cantidad inicial de medicamento ?

9.- Una pizza cocinada a 450 °F se saca del horno a las 5:00 PM y se lleva a una habitación con temperatura constante de 70 °F . Después de 5 minutos la pizza está a 300 °F . ¿ A qué hora estará la pizza a 135 °F ?

Aplicar la ley del enfriamiento de Newton:

$$u = T + (u_0 - T) \cdot e^{kt} \qquad k < 0$$

Donde T es la temperatura ambiente, u_0 es la temperatura inicial del objeto, u es la temperatura del objeto en el tiempo t en minutos y k es una constante negativa.

10.- El estroncio 90 es un material radiactivo que se desintegra según la ley $A = A_0 \cdot e^{-0.0244t}$ donde A_0 es la cantidad inicial, A es la cantidad presente en el tiempo t (en años).

a) ¿ Cuál es la vida media del estroncio 90 ?

b) ¿ Cuánto tiempo tardan 100 gr de estroncio 90 en desintegrarse a 10 gr.?

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Calcular x en las siguientes expresiones:

a) $\log_{27} 3 = x$ b) $\log_x 4 = \frac{1}{3}$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_3 3^4 = x$

2.- Resolver la ecuación exponencial:

$$3 = 4 + 5 \cdot 7^{3x-2}$$

3.- Resolver la ecuación logarítmica:

$$\log_3(x+1) - \log_3 x = 3$$

4.- Graficar la función exponencial $f(x) = 5^{x-3} + 4$ especificando dominio, rango y asíntota.

5.- Graficar $g(x) = \log_4(x+2) - 3$ especificando dominio, rango y asíntota.

6.- Graficar en el mismo sistema de coordenadas la función $f(x) = 3^{x-1} + 4$ y su inversa.

7.- La vida media del isótopo radiactivo del bismuto ^{210}B es de 5 días. Si hay 100 mg de ^{210}B:

a) Hacer una tabla para deducir la fórmula de la cantidad de bismuto ^{210}B en el tiempo t en meses.

b) ¿ Qué cantidad de bismuto ^{210}B quedará en 15.5 días ?

c) ¿ En cuánto tiempo habrá 5 mg de ^{210}B ?

UNIDAD IV

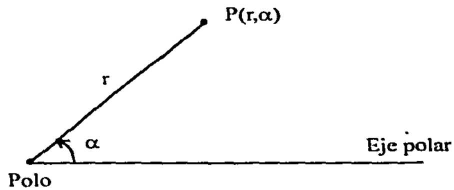
SISTEMAS DE COORDENADAS Y ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

INTRODUCCIÓN:

Alguna vez habrás buscado una calle en una guía de la ciudad. Te habrás fijado que para indicarte la zona del mapa en donde esta la calle que buscas te dan un número y una letra como referencia, es decir, a la zona se le asigna la pareja formada por el número y la letra a las que les podemos llamar "sus coordenadas". Este método para especificar la posición de calles en un mapa nos ahorra mucho tiempo.

El radar de un barco trabaja de manera análoga. La posición de un objeto que aparece en la pantalla del radar se determina con la distancia r a la que se encuentra la imagen del objeto del centro de la pantalla y el ángulo α que forma la recta que determinan el centro y el objeto con una recta fija.

Así, la posición del objeto la podemos dar como : (r,α)



A esta manera de especificar la posición de un punto en un plano se le llama sistema de coordenadas polares.

También habrás oído hablar de las coordenadas geográficas. Estas sirven para describir la posición de un punto sobre la superficie de la tierra. Por ejemplo (19N, 990) identifican un punto dentro de la república Mexicana.

Estos números llamados longitud y latitud, indican la posición de ese punto respecto al Ecuador y el Meridiano principal.

Para indicar la posición de un satélite artificial se especifica, además de la longitud y latitud del punto sobre el cual se encuentra, la altura de este sobre la superficie de la tierra.

En todos estos ejemplos el método es el mismo, describir la posición de objetos en la superficie de la tierra o en el espacio por medio de números, es decir, se usa un sistema de coordenadas.

Las coordenadas que se emplean en matemáticas permiten determinar, numéricamente, la posición de un punto en una recta, en el plano o en el espacio. Esto hace posible describir diversos tipos de figuras numéricamente; expresar relaciones geométricas como relaciones entre números y así resolver problemas geométricos con técnicas algebraicas.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno reafirme los conocimientos básicos de la geometría euclidiana y la trigonometría y que comprenda los conceptos fundamentales de la geometría analítica para acceder con facilidad a las unidades posteriores.

Que el alumno sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos en esta unidad para plantear y resolver problemas aplicados a la geometría euclidiana y a la trigonometría.

CONTENIDOS BÁSICOS: Coordenadas, distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada, pendiente de una recta, congruencia y semejanza de triángulos.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Segmento dirigido, punto medio, rectas paralelas y perpendiculares, ángulo entre dos rectas, área de polígonos y coordenadas polares.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Reafirmarán el concepto de recta numérica, estableciéndose una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta, se abordará el concepto de coordenada de un punto, así como el de segmento dirigido, distancia entre dos puntos y coordenada del punto que divide a un segmento en una razón dada haciendo hincapié en el punto medio.
- Reafirmarán el concepto de sistema coordenado rectangular, localizarán puntos en el plano, calcularán la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, determinarán las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada, en particular, el punto medio.
- Clasificarán los polígonos por sus lados y sus ángulos. En el triángulo establecerán las condiciones para que sea equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, rectángulo y obtusángulo. Conocerán algunos puntos y rectas notables en el triángulo: las medianas y el baricentro, las mediatrices, las alturas y las bisectrices con sus respectivos puntos de intersección. Establecerán las condiciones para que un cuadrilátero sea: cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y trapecio isósceles.
- Revisarán los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos considerando los distintos criterios, tales como: LAL, ALA y LLL.
- Conocerán el concepto de pendiente de una recta y determinarán cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares.
- Calcularán el ángulo entre dos rectas en términos de sus pendientes.
- A través del método de triangulación, calcularán áreas de polígonos.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Fuller, Gordon, et al., Geometría Analítica. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

2.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3.- Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

4.- López, Antonio, et al., Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

5.- Moise, Edwin et al, Geometría Moderna. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

6.- Nichols, Eugene, et al. Geometría Moderna. México, CECSA, 1996.

7.- Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, 1997.

8.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

En esta unidad se estudian los sistemas de coordenadas cartesianas de una, dos y tres dimensiones, así como algunos conceptos básicos como distancia entre dos puntos, división en una razón dada, pendiente de una recta, congruencia y semejanza de triángulos.

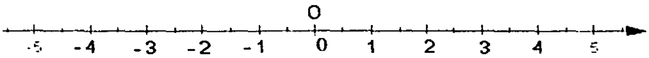
Problema 1.

Se trata de señalar puntos dadas sus coordenadas en los sistemas dibujados a continuación:

a) En la recta real (sistema unidimensional de coordenadas cartesianas)

Para indicar que a es la coordenada del punto A escribimos A(a). Señalar los puntos:

A(2), B(-4), C($\frac{3}{4}$) y D($\sqrt{3}$)



La distancia del punto P al punto Q se denota por: $d(P,Q)$.

La distancia dirigida de P a Q se denota por: $\vec{d}(P,Q)$ y es la distancia de P a Q, asignándole un signo de la siguiente manera: si el segmento PQ se recorre de izquierda a derecha es positiva, si se recorre de derecha a izquierda es negativa.

Con los puntos señalados anteriormente calcular lo que se pide:

$d(A,B) =$ $\qquad$ $\vec{d}(A,B) =$ $\qquad$ $d(B,C) =$ $\qquad$ $d(C,B) =$

Comparar los resultados con:

$|-4-2| =$ $\qquad$ $-4-2 =$ $\qquad$ $\left|\frac{3}{4}-(-4)\right| =$ $\qquad$ $\left|-4-\sqrt{3}\right| =$

Que se puede decir de los resultados anteriores:

Calcular:

$\vec{d}(O,A) =$ $\qquad$ $\vec{d}(O,B) =$ $\qquad$ $\vec{d}(O,C) =$ $\qquad$ $\vec{d}(O,D)$

De los resultados anteriores se puede concluir que para los puntos dados, la distancia dirigida del origen al punto P es simplemente la coordenada de P.

Se puede demostrar que para cualquier punto P, la distancia dirigida del origen al punto es la coordenada de P.

Es decir:

Si x es la coordenada de P entonces: $\vec{d}(O,P) = x$

También se puede demostrar que:

Si P tiene coordenada x, Q tiene coordenada y, entonces:

$$d(P,Q) = |y - x| \qquad \text{y} \qquad \vec{d}(P,Q) = y - x$$

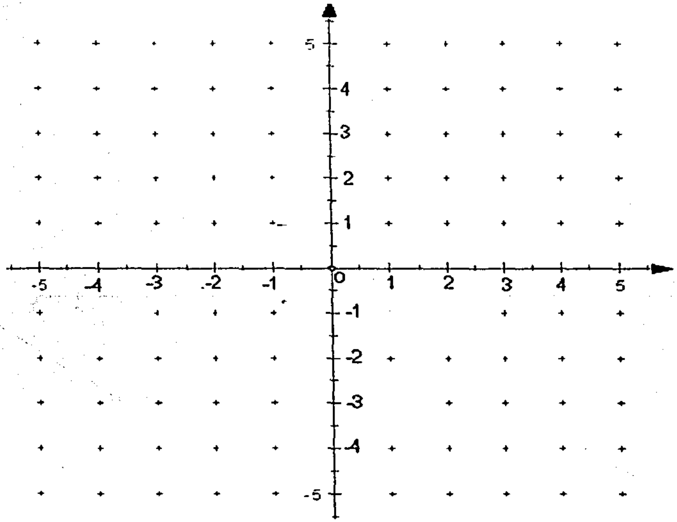
b) En el plano. (sistema de coordenadas cartesianas de dos dimensiones)

Un sistema de coordenadas cartesianas de dos dimensiones consiste de dos rectas perpendiculares, que generalmente se dibujan: una horizontal llamada eje de las abscisas o eje de las X, otra vertical llamada eje de las ordenadas o de las Y.

Cualquier punto P tiene asignados dos números, que son sus coordenadas. Para indicar que a y b son las coordenadas del punto P, se escribe: P(a,b). Donde a se llama abscisa y se mide en el eje de las X, b es la ordenada y se mide en el eje de las Y. Señalar los siguientes puntos:

$$A(3,5), \qquad B(2,-3), \qquad C(-3,4), \qquad D(-5,-2)$$

En el sistema de coordenadas cartesianas dibujado a continuación:



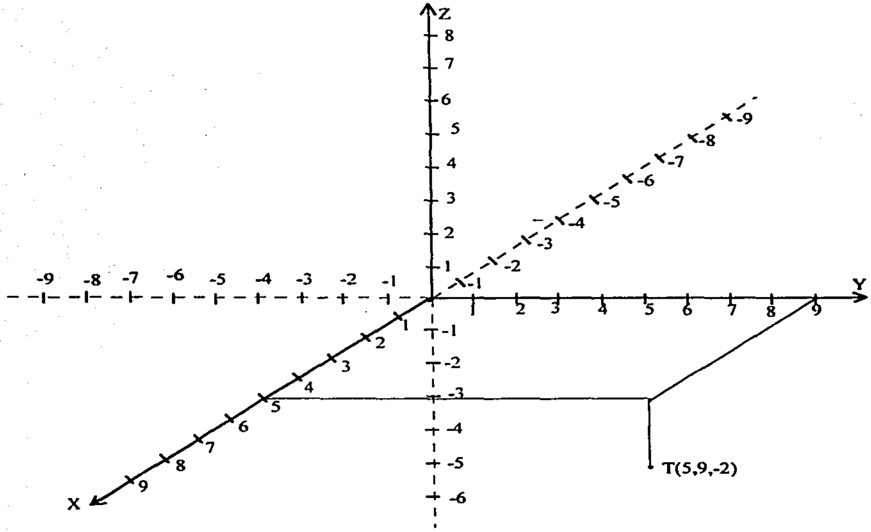
c) En el espacio. (Sistema de coordenadas cartesianas de tres dimensiones)

Un sistema de coordenadas cartesianas de tres dimensiones consta de tres rectas perpendiculares dos a dos. Una de las rectas se llama eje de las X, otra eje de las Y, la otra eje de las Z.

Cualquier punto P del espacio tiene asignados tres números que son sus coordenadas. Para indicar que las coordenadas de P son a, b y c se escribe: P(a,b,c) donde a se mide en el eje de las X, b en el eje de las Y, c en el eje de las Z.

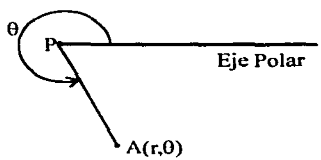
Señalar los siguientes puntos en el sistema de coordenadas de tres dimensiones dibujado a continuación donde hay un ejemplo que muestra como señalar el punto T(5,9,-2):

A(4,5,8), B(-2,-4,6), C(5,3,-5).



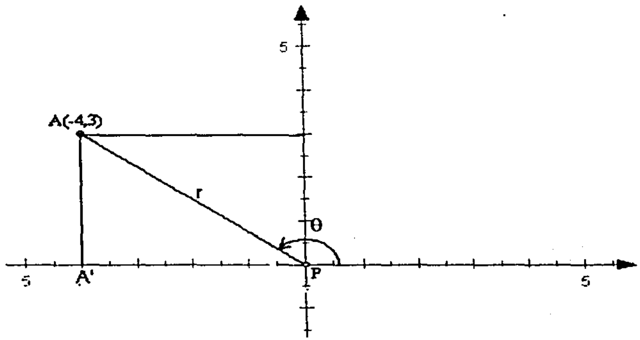
Problema 2.

Otra sistema de coordenadas que se usan en el plano es el sistema de coordenadas polares que consiste de un punto fijo P llamado **Polo** y una recta fija llamada **Eje Polar.** Cualquier punto A en el plano tiene asignados dos números (r,θ) donde r es la distancia del polo al punto A, y θ es el ángulo que forma el segmento PA con el eje polar. Para. Ver la figura:



Suponiendo que el Polo coincide con el origen de coordenadas y el Eje Polar es la parte positiva del eje X, realizar lo siguiente:

a) Pasar a coordenadas polares el punto A(-4,3) dado en coordenadas cartesianas. Ver la figura:



En el triángulo rectángulo AA'P tenemos que:

Cateto A'P =

Cateto A'A =

Aplicando el teorema de Pitágoras : r =

Para el ángulo θ :

En el triángulo AA'P : $\tan(\sphericalangle A'PA) =$

$\sphericalangle A'PA =$

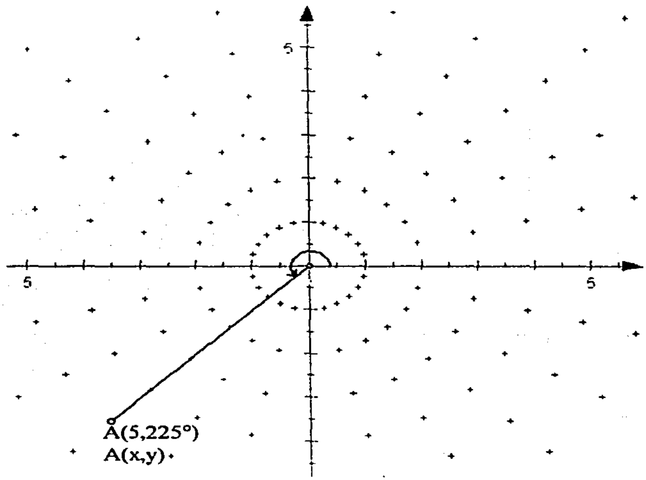
$\theta = 180° - \sphericalangle A'PA =$

Comparar el resultado con $\tan^{-1}(\theta) + 180°$.

Considerando los diferentes casos se llega a la conclusión de que para pasar A(x,y) dado en coordenadas cartesianas a coordenadas polares A(r,θ) se tienen las siguientes relaciones:

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \theta=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0\\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+180° & \text{si } x<0\end{cases}$$

b) Pasar a coordenadas cartesianas el punto A(5,225°) dado en coordenadas polares. Ver la figura:



De acuerdo con la figura anterior y las definiciones de las razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud:

$\text{sen}\,(225°)=\dfrac{y}{5}$ entonces y =

$\cos\,(225°)=$ entonces x =

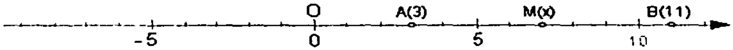
Procediendo igual se tiene que si las coordenadas polares de A son (r,θ), las coordenadas cartesianas son:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\ \text{sen}\ \theta$$

Problema 3.

Llenar los espacios vacíos para encontrar el punto medio de los segmentos indicados en los sistemas de coordenadas dados:

a) La coordenada de el punto medio del segmento A(3)B(11) en la recta.



Recordar que la coordenada de un punto es la distancia dirigida del origen al punto.

$$\vec{d}(O,M) = x = \vec{d}(O,A) + \frac{d(A,B)}{2} = \boxed{}$$

Mostrar que el resultado anterior es igual a:

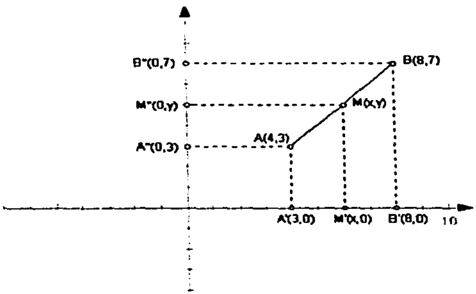
$$\vec{d}(O,M) = x = \frac{3+11}{2}$$

Con un procedimiento parecido se puede mostrar que la coordenada del punto medio M del segmento A(a)B(b) está dada por la siguiente expresión:

$$M\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

b) Las coordenadas del punto medio del segmento A(4,3)B(8,7) en el plano.

Observar la siguiente figura, para hallar las coordenadas pedidas:



Los puntos A', B' y M' se llaman proyecciones sobre el eje X de A, B y C respectivamente, A", B" y M" son las proyecciones sobre el eje Y.

De acuerdo a la figura anterior, ¿ qué se puede decir de M' respecto al segmento A'B' ?

¿ Qué se puede decir de M" respecto al segmento A"B" ?

¿ Cuáles son las coordenadas de M ?

x =
y =

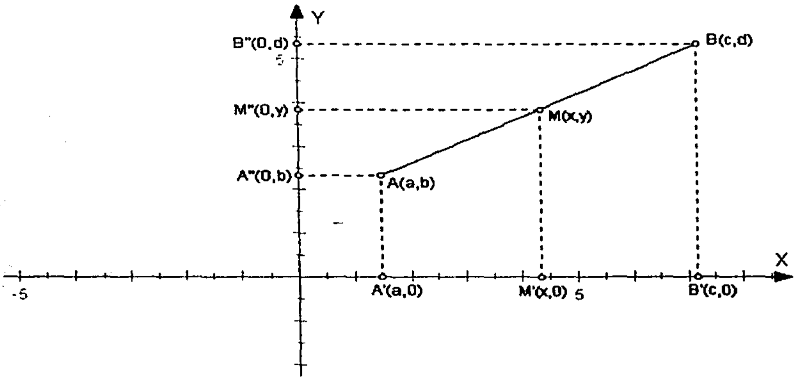
Para el caso general se usa el teorema de Tales que dice:

"Si los segmentos determinados en una transversal por tres o más paralelas son iguales, también son iguales los determinados en cualquier otra transversal por las mismas paralelas".

El recíproco del teorema de Tales dice:

"Si tres o más rectas determinan en dos transversales segmentos respectivamente iguales entonces las rectas son paralelas".

Usar el siguiente dibujo y el teorema de Tales para encontrar las coordenadas del punto medio del segmento A(a,b)B(c,d).



Si M es el punto medio de AB, las rectas que contienen a los segmentos AA', MM' y BB' son tres paralelas que cortan las transversales: recta que contiene a AB y el eje X , por el teorema de Tales como los segmentos AM y MB son iguales, los segmentos A'M' y M'B' también son iguales; es decir, M' es el punto medio del segmento A'B'. Entonces:

$$x = \boxed{}$$

Con un argumento similar tendremos que M" es el punto medio de A"B". Entonces:

$$y = \boxed{}$$

c) Las coordenadas del punto medio del segmento A(a,b,c)B(d,e,f) en el espacio.

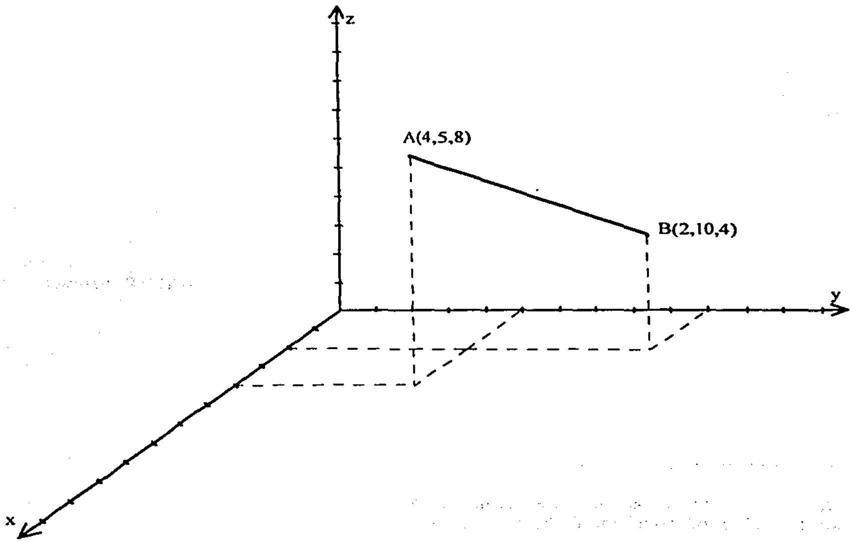
Procediendo como en el caso anterior se obtiene la siguiente expresión para las coordenadas del punto medio M(x,y,z) de AB:

$$x = \frac{a+d}{2}$$

$$y = \frac{b+e}{2}$$

$$z = \frac{c+f}{2}$$

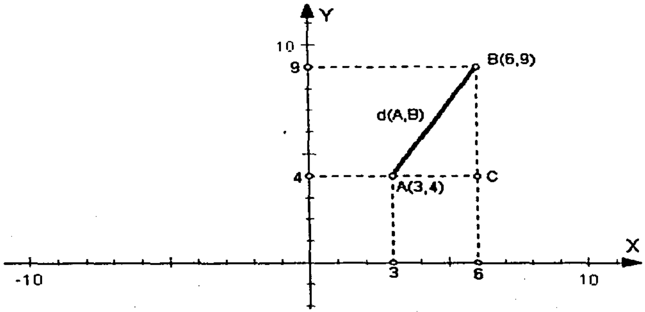
Hallar las coordenadas del punto medio de A(4,5,8)B(2,10,4) y señalar el segmento AB con su punto medio en el siguiente sistema de coordenadas:



Problema 3.

Calcular las distancias pedidas usando los triángulos rectángulos que se muestran en las figuras correspondientes:

a) Hallar la distancia de A(3,4) a B(6,9) en el plano. Ver la siguiente figura:



En el triángulo rectángulo ABC:

Cateto AC =

Cateto BC =

Por el teorema de Pitágoras:

$(d(A,B))^2 =$ $\boxed{}$

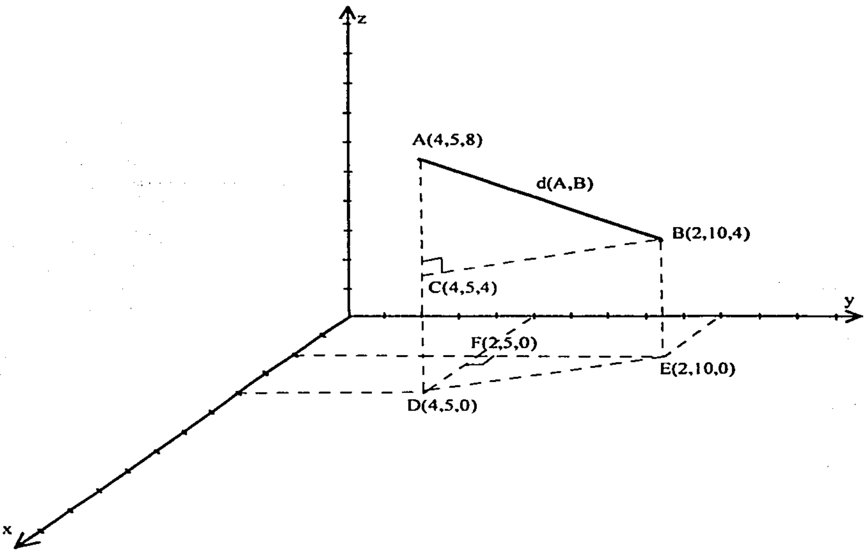
Entonces:

$d(A,B) =$ $\boxed{}$

Con un procedimiento muy similar se puede mostrar que la distancia del punto A(a,b) al punto B(c,d) está dada por la fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

b) Hallar la distancia del punto A(4,5,8) al punto B(2,10,4) en el espacio. Ver la siguiente figura:



En el triángulo rectángulo DEF calcular lo que se pide y aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia de D(4,5,0) a E(2,10,0):

Cateto DF =

Cateto EF =

$d(D,E) =$

En el triángulo rectángulo ABC aplicar también el teorema de Pitágoras para calcular la distancia de A a B:

Cateto AC =

Cateto AB =

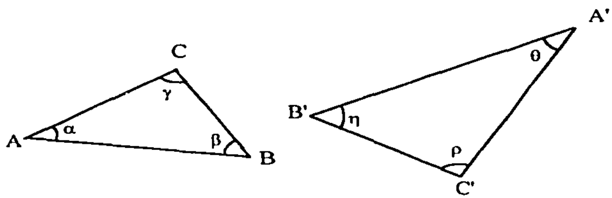
$d(A,B) =$

El procedimiento para hallar la distancia del punto A(a,b,c) a B(d,e,f) es similar al anterior y se obtiene la siguiente fórmula:

$$d(A,B) = \sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$$

Problema 4.

Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales. Observar la figura:



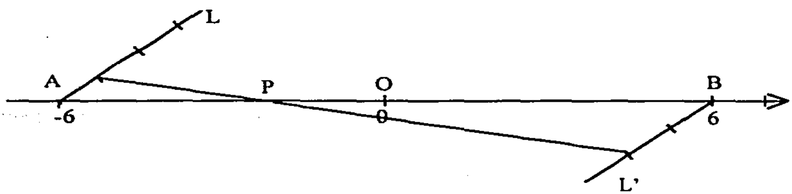
Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad \text{y} \qquad \alpha=\theta,\quad \beta=\eta,\quad \gamma=\rho$$

Se puede demostrar que si los tres ángulos de dos triángulos son respectivamente iguales, entonces son semejantes.

En las siguiente figura si las rectas L y L' son paralelas mostrar que los triángulos APQ y BPR son semejantes para calcular:

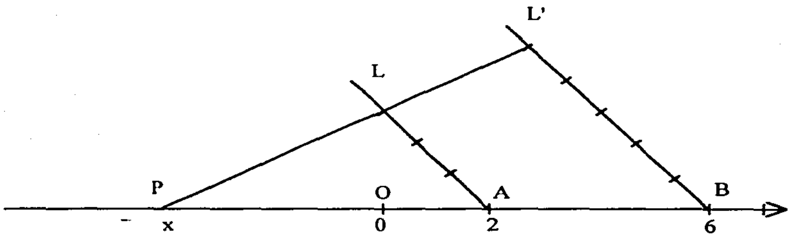
$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = \boxed{}$$



La coordenada de P es: $\boxed{}$

En la siguiente figura si las rectas L y L' son paralelas mostrar que los triángulos APQ y BPR son semejantes para calcular lo siguiente:

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = \boxed{}$$



La coordenada de P es: $\boxed{}$

Decimos que P divide al segmento AB en la razón r si

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = r$$

Si A, P y B tiene coordenadas $A(x_1)$, $P(x)$ y $B(x_2)$ entonces la relación anterior se escribe:

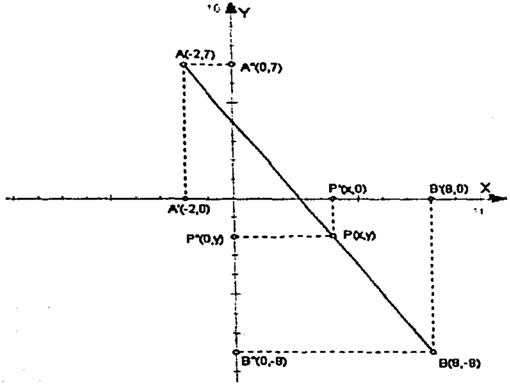
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

que nos sirve para calcular la coordenada de P si conocemos las de A , B y tenemos la razón r.

De las situaciones analizadas anteriormente observamos que lo que se calculó fue la razón en la que el punto P divide al segmento AB, además los resultados obtenidos sugieren que si r es positivo P esta entre A y B ; si r es negativo P esta fuera del segmento AB y se nos muestra una manera geométrica de obtener el punto P.

Problema 5.

En la siguiente figura calcular lo que se pide:



x =

y =

$$\frac{\vec{d}(A',P')}{\vec{d}(P',B')} =$$

$$\frac{\vec{d}(A",P")}{\vec{d}(P",B")} =$$

Simplificar el resultado obtenido en la siguiente expresión, donde las distancias dirigidas que aparecen significan que si los segmentos AP y PB se recorren en el mismo sentido, dichas distancias tienen el mismo signo y en tal caso el cociente es positivo, si los segmentos se recorren en sentidos opuestos las distancias tendrán signos opuestos y por lo tanto el cociente será negativo.

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = \frac{\sqrt{(-2-4)^2 + (7-(-2))^2}}{\sqrt{(4-8)^2 + (-2-(-8))^2}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{52}} = \boxed{}$$

Leer el siguiente resultado:

Tres rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en dos transversales.

Si en el problema anterior consideramos las paralelas AA', PP' y BB' éstas determinan segmentos proporcionales en las transversales: eje X y AB, lo que significa que:

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = \frac{\vec{d}(A',P')}{\vec{d}(P',B')}$$

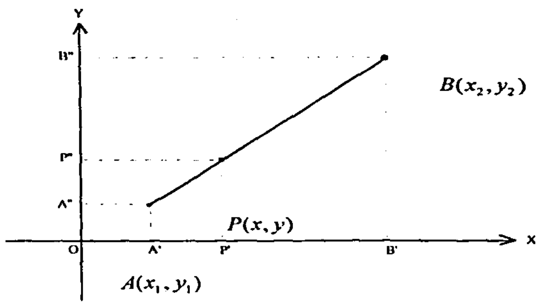
Del mismo modo se comprueba que:

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = \frac{\vec{d}(A'',P'')}{\vec{d}(P'',B'')}$$

Si $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$ es un segmento en el plano, decimos que $P(x,y)$ divide a dicho segmento en la razón r si:

$$\frac{\vec{d}(A,P)}{\vec{d}(P,B)} = r$$

Ver la figura:



Con un procedimiento muy parecido al anterior se puede comprobar que si A', P' y B' son las proyecciones sobre el eje X de A, P y B respectivamente, entonces:

$$\frac{\vec{d}(A',P')}{\vec{d}(P',B')}=r \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$

Si A", P" y B" son las proyecciones sobre el eje Y entonces:

$$\frac{\vec{d}(A'',P'')}{\vec{d}(P'',B'')}=r \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

Con lo que si conocemos las coordenadas de A, B y la razón r, podemos calcular las coordenadas de P usando las fórmulas anteriores.

En el espacio ocurre algo similar: Para calcular las coordenadas del punto P(x,y,z) que divide al segmento $A(x_1,y_1,z_1)B(x_2,y_2,z_2)$ en la razón r se obtienen las siguientes tres fórmulas:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=r \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=r \qquad \frac{z-z_1}{z_2-z}=r$$

Problema 6.

a) Colocar el número que corresponde al espacio vacío en las siguientes columnas:

Tiene sus tres lados iguales. ( )	(1) Triángulo rectángulo
Tiene cuando menos dos lados iguales. ( )	(2) Triángulo obtusángulo
Tiene sus tres ángulos agudos. ( )	(3) Triángulo equilátero
Tiene un ángulo recto. ( )	(4) Triángulo escaleno
No tiene dos lados iguales. ( )	(5) Triángulo acutángulo
Uno de sus ángulos es obtuso. ( )	(6) Triángulo isósceles
Tiene sus tres ángulos iguales. ( )	(7) Triángulo equiángulo

b) Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F):

Todo triángulo equilátero es isósceles. ( )

Algunos triángulos obtusángulos son isósceles. ( )

Ningún triángulo escaleno es isósceles. ( )

Algunos triángulos rectángulos son equiláteros. ( )

Todo triángulo equilátero es equiángulo. ( )

Todo triángulo rectángulo es escaleno. ( )

Algunos triángulos isósceles son equiángulos. ( )

Todo triángulo acutángulo es escaleno. ( )

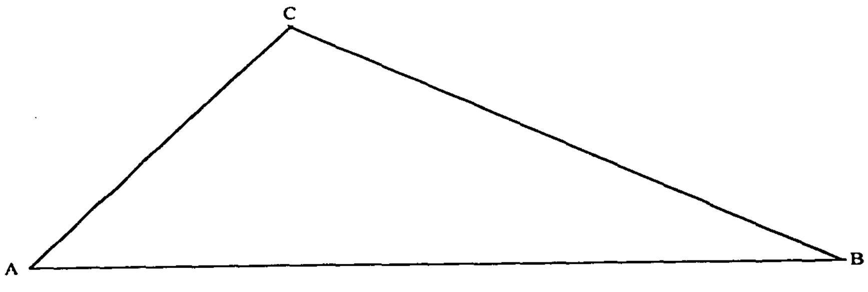
Ningún triángulo equilátero es obtusángulo. ( )

Algunos triángulos rectángulos son obtusángulos. ( )

Problema 7.

En un triángulo el segmento cuyos extremos son un vértice y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice se llama mediana. Entonces en un triángulo habrá tres medianas.

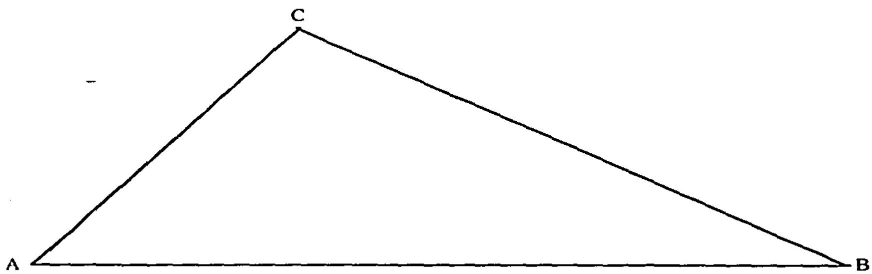
En el triángulo de la siguiente figura trazar con regla y compás las tres medianas.



Habrás notado que las tres medianas se intersectan en un punto. Dicho punto se llama **baricentro.**

b) En un triángulo la recta perpendicular a un lado y que pasa por el vértice opuesto a dicho lado se llama altura. Dicho triángulo tendrá tres alturas.

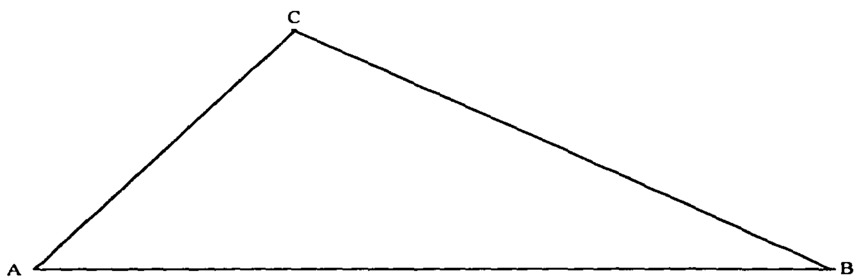
En la siguiente figura trazar con regla y compás las tres alturas del triángulo.



Las tres alturas de dicho triángulo también se intersectan en un punto llamado **ortocentro.**

c) En un triángulo la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a dicho lado se llama mediatriz. Todo triángulo tendrá tres mediatrices.

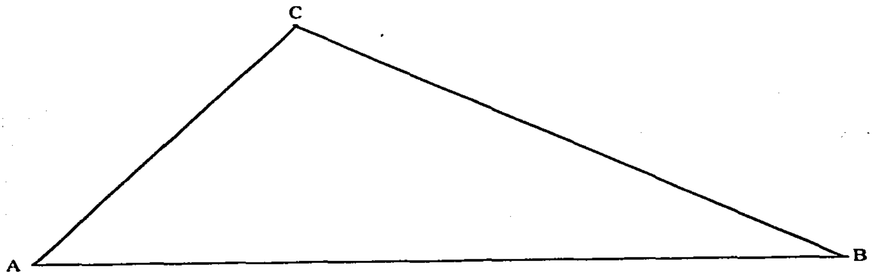
En la siguiente figura trazar las mediatrices del triángulo:



Las tres mediatrices anteriores se intersectan en un punto llamado **circuncentro.**

d) En un triángulo la recta que biseca uno de sus ángulos se llama bisectriz. Todo triángulo tiene tres bisectrices.

En el triángulo de la siguiente figura trazar las bisectrices:



Las bisectrices del triángulo anterior se intersectan en un punto que se llama **incentro.**

Problema 8.

a) Relaciona las siguientes columnas referentes a cuadriláteros:

Cuadrilátero con todos sus ángulos rectos. ( )	(1) Trapecio.
Cuadrilátero de lados iguales y ángulos iguales. ( )	(2) Cuadrado.
Cuadrilátero de lados iguales. ( )	(3) Paralelogramo.
Cuadrilátero de cuando menos dos lados opuestos paralelos. ( )	(4) Rombo.
Trapecio con un par de lados no paralelos. ( )	(5) Rectángulo.
Cuadrilátero con las dos parejas de lados opuestos paralelos. ( )	(6) Trapecio isósceles.

b) Escribir si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones.

1) Todo cuadrado es un rectángulo. ( )

2) Todo cuadrado es un paralelogramo. ( )

3) Todo cuadrado es un rombo. ( )

4) Todo paralelogramo es un rombo. ( )

5) Todo rectángulo es un trapecio. ( )

6) Algún rectángulo es un rombo. ( )

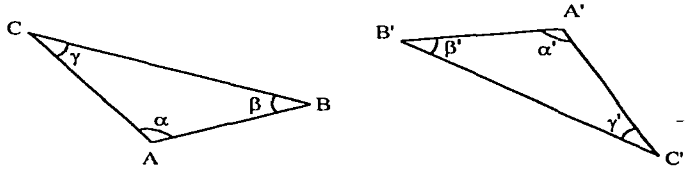
7) Algún rombo es un rectángulo. ( )

8) Algún trapecio es paralelogramo. ( )

9) Todo paralelogramo es trapecio. ( )

Problema 9.

Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales, ver la siguiente figura:



Los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes si

$$AC = A'C' \quad , \quad AB = A'B' \quad , \quad BC = B'C'$$

y

$$\alpha = \alpha' \quad , \quad \beta = \beta' \quad , \quad \gamma = \gamma'$$

Para denotar que los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes se escribe:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Para mostrar que dos triángulos son congruentes no es necesario saber que todos sus lados y sus ángulos son respectivamente iguales, los siguientes criterios de congruencia nos indican que elementos de los triángulos deben ser respectivamente iguales para que haya congruencia.

Criterio L.L.L. de congruencia de triángulos:

Si tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados del otro entonces son congruentes.

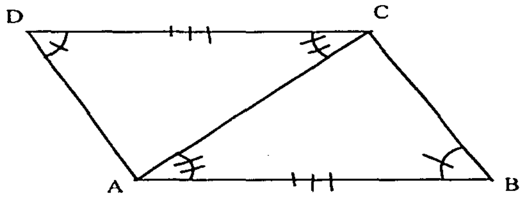
Criterio L.A.L. de congruencia de triángulos:

Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo entonces son congruentes.

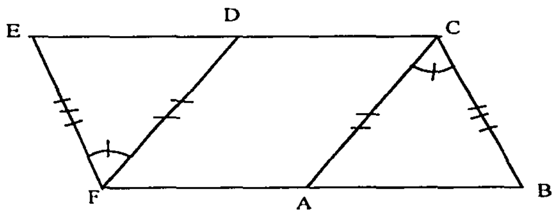
Criterio A.L.A. de congruencia de triángulos:

Si dos lados de un triángulo tiene respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado entonces son congruentes.

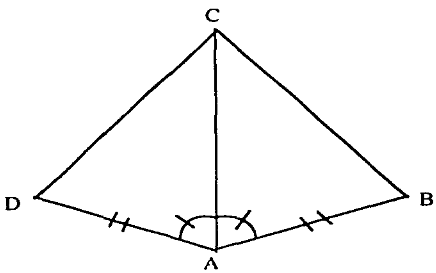
En las siguientes figuras determinar si son congruentes los triángulos indicados señalando el criterio de congruencia utilizado. Las líneas pequeñas nos indican las partes de los triángulos que son iguales :



Los triángulos ADC y CBA.



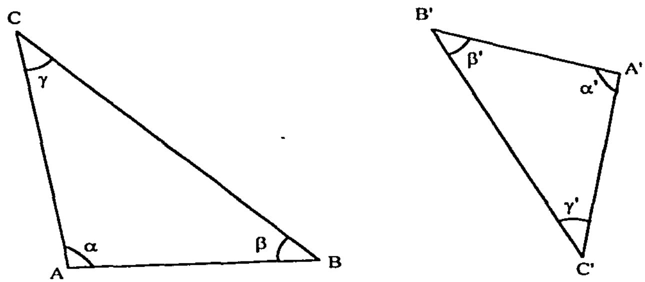
Los triángulos ABC y DEF.



Los triángulos ABC y ADC.

Problema 10.

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales y sus tres ángulos respectivamente iguales. Ver la siguiente figura:



Los triángulos anteriores son semejantes si sus lados son respectivamente proporcionales, es decir,

$$AC = kA'C'$$
$$AB = kA'B'$$
$$BC = kB'C'$$

Donde k es un número llamado constante de proporcionalidad y

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$
$$\gamma = \gamma'$$

Lo anterior es equivalente a decir que:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad , \quad \alpha = \alpha' \, , \beta = \beta' \, , \gamma = \gamma'$$

Para indicar que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes se escribe:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Nuevamente para comprobar que dos triángulos son semejantes se usan los siguientes criterios de semejanza:

Criterio L.A.L. de semejanza de triángulos:

Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, entonces son semejantes.

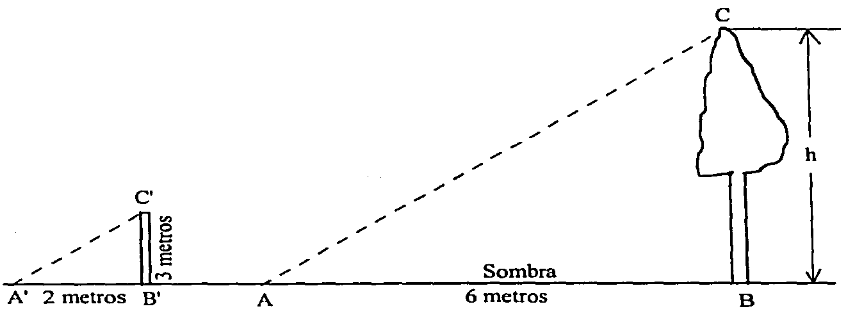
Criterio L.L.L. de semejanza de triángulos:

Si tres lados son respectivamente proporcionales a los de otro, entonces son semejantes.

Criterio A.A.A. de semejanza de triángulos:

Si dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales entonces son semejantes.

a) A las 10:30 hrs. la sombra que proyecta un árbol es de 6 m. A esa misma hora una estaca de 3 m. proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

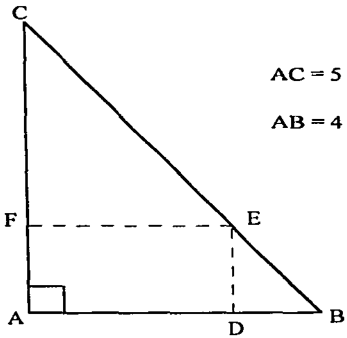


Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes ¿Por qué?

Entonces $\frac{h}{3}=\frac{6}{2}$

$\therefore$ h = _______ metros.

b) En el triángulo rectángulo ABC se construye un rectángulo ADEF con lados paralelos a los catetos, como se muestra en la figura. Expresar el área del rectángulo en función de la altura h:



Los triángulos FEC y DBE son semejantes. Decir porqué son ciertas las siguientes afirmaciones:

$\sphericalangle CFE = \sphericalangle EDB$ ______________________________

$\sphericalangle FEC = \sphericalangle DBE$ ______________________________

$\sphericalangle FCE = \sphericalangle DEB$ ______________________________

$\triangle FEC \sim \triangle DBE$ por el criterio de semejanza: ______________________

$FC = 5 - h$ y $ED = h$

Por la semejanza de los triángulos FEC y DBE : $\dfrac{5-h}{h} = \dfrac{FE}{DB}$

$\dfrac{5-h}{h} = \dfrac{AD}{4 - AD}$ porque $FE = AD$ y $DB = 4 - AD$

$(5 - h)(4 - AD) =$ ______________________________

$20 - 5(AD) - 4h + h(AD) =$ ______________________________

$\therefore \quad AD =$ ______________________________

Si f(h) representa el área del rectángulo en función de h:

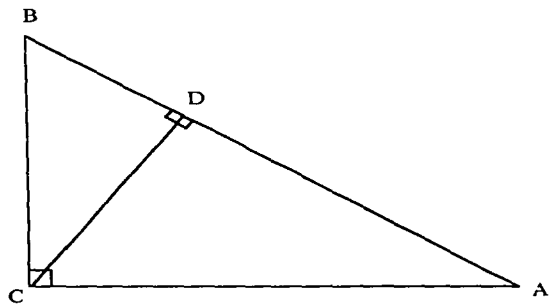
$f(h) =$.

Problema 11.

Demostrar el teorema de Pitágoras que dice:

" En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Observar la figura y seguir las indicaciones:



Los triángulos ABC y CBD son semejantes:

Los dos tienen un ángulo de 90°.

El ángulo CBA es común a los dos triángulos.

El ángulo CAB es igual al ángulo DCB por ser complementarios del ángulo CBA.

Como tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, son semejantes.

En el siguiente espacio comprobar que los triángulos ABC y ACD son semejantes.

De la semejanza de los triángulos ABC y ACD tenemos que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \qquad \therefore \qquad (AC)^2 = AB \cdot AD$$

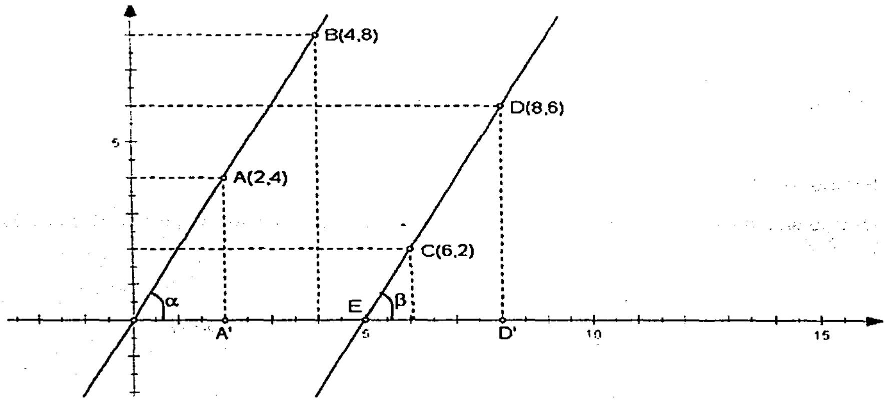
De la semejanza de los triángulos ABC y CBD tenemos que:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC} \qquad \therefore \qquad (BC)^2 = AB \cdot BD$$

Sumar las dos expresiones obtenidas anteriormente y comprobar el teorema de Pitágoras:

Problema 12.

Demostrar que las rectas que pasan por A(2,4) B(4,8) y C(6,2) D(8,6), son paralelas



Comprobaremos que $\alpha = \beta$.

En el triángulo OA'A , tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{4}{2} \quad \therefore \quad \tan\alpha = 2$

En el triángulo ED'D se tiene que $\tan\beta = \dfrac{6}{3} \quad \therefore \quad \tan\beta = 2$

Como los dos son ángulos agudos, entonces $\alpha = \beta$.

Explicar por qué la recta que pasa por AB es paralela a la recta que pasa por CD.

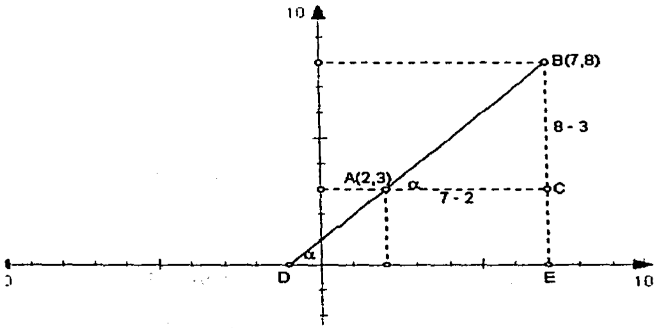
Considerando únicamente la recta que pasa por AB. Al ángulo α se le llama ángulo de inclinación de la recta y a la tangente de α se le llama pendiente de dicha recta y se le denota con la letra m.

$$m = \tan\alpha$$

Lo anterior nos indica que si dos rectas tienen pendientes iguales son paralelas. Algo similar ocurre con las rectas perpendiculares : Si el producto de las pendientes es –1 las rectas son perpendiculares.

Problema 13.

Usar la siguiente figura para hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(7,8).



La pendiente de la recta que pasa por los puntos mencionados es:

$$m = \tan\alpha$$

Usar el triángulo ABC para calcular dicha pendiente:

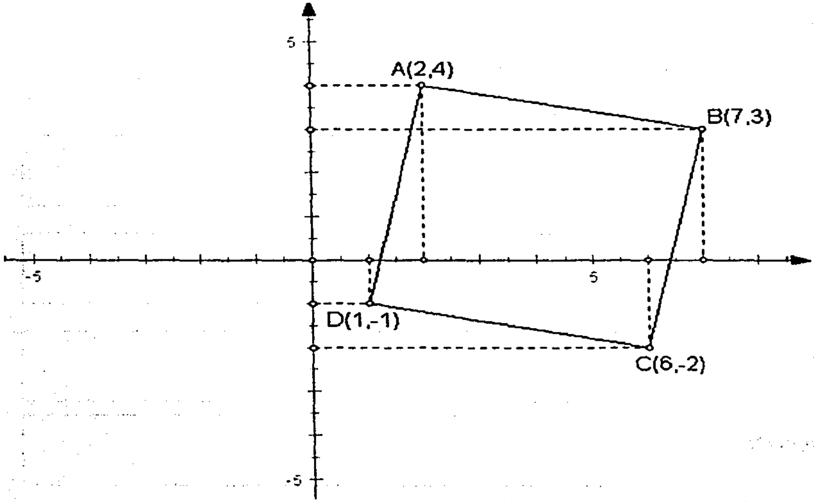
m =

Con un procedimiento parecido al anterior se puede mostrar que la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Problema 14.

Demostrar que los puntos A(2,4) B(7,3) C(6,-2) y D(1,-1) son los vértices de un cuadrado y hallar su perímetro. Ver la figura:



Pendiente de AB : m_1 = ______________

Pendiente de BC : m_2 = ______________

Pendiente de DC : m_3 = ______________

Pendiente de AD : m_4 = ______________

$m_1 \cdot m_4 =$ ______________

$m_1 \cdot m_2 =$ ______________

$m_2 \cdot m_3 =$ ______________

$m_3 \cdot m_4 =$ ________________

Todos los ángulos interiores del cuadrilátero valen: __________________

Por la fórmula de la distancia:

$d(A,B) =$ $\boxed{}$

$d(B,C) =$ $\boxed{}$

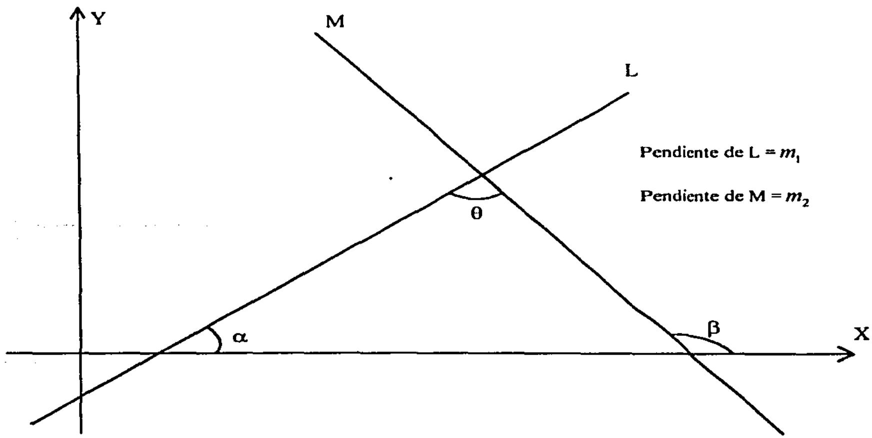
$d(C,D) =$ $\boxed{}$

$d(A,D) =$ $\boxed{}$

Considerando todo lo anterior explicar por qué es un cuadrado:

Problema 15.

Hallar el ángulo θ señalado entre las dos rectas L y M, dadas sus pendientes como se muestra en la siguiente figura:



Usando la propiedad de los triángulos que dice:

" En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes"

$$\beta = \alpha + \theta \qquad \therefore \qquad \theta = \beta - \alpha$$

Aplicando tangente a la última igualdad:

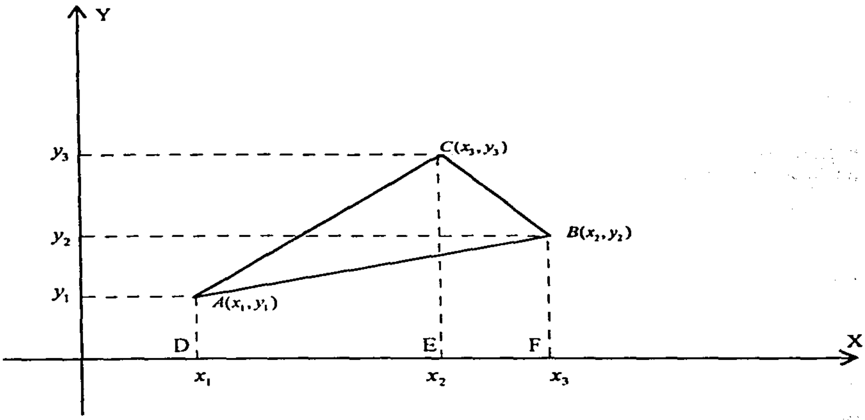
$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$$

Usar la identidad: $\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1 \cdot \tan\varphi_2}$, para desarrollar lo anterior y obtener el resultado que se muestra:

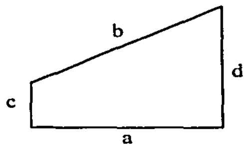
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

Problema 16.

Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ como se muestra en la figura:



El área del trapecio como el que se muestra en la siguiente figura está dada por la fórmula que aparece ahí:



$$\text{Área} = \frac{a(c+d)}{2}$$

Observando la figura del triángulo ABC, tenemos que el área que nos piden es igual a:

Área del triángulo ABC = Área del trapecio ADEC + Área del trapecio CEFB – Área del trapecio ADFB.

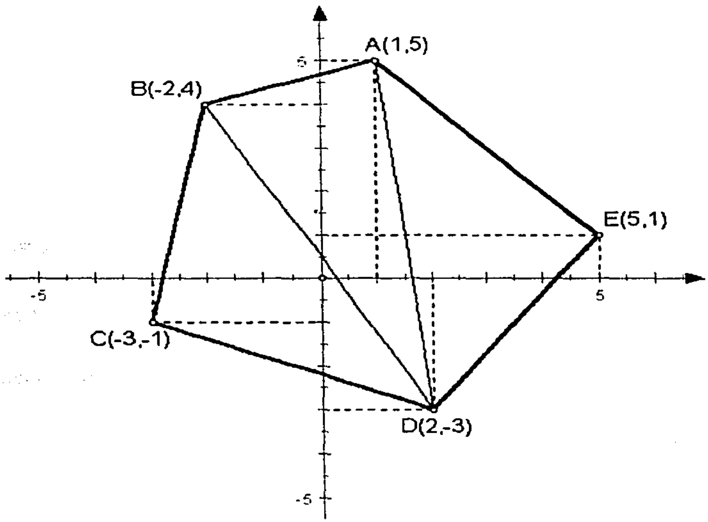
$$\text{Área del triángulo ABC} = \frac{(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)}{2} + \frac{(x_2 - x_3)(y_3 + y_2)}{2} - \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}$$

Desarrollar esta expresión y comprobar que se puede expresar como se indica con el determinante:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1)$$

Problema 17.

Hallar el área del polígono cuyas coordenadas de los vértices son: A(1,5) B(-2,4) C(-3,-1) D(2,-3) E(5,1). Ver la siguiente figura:



Dividimos la figura en tres triángulos : $\triangle BCD$, $\triangle ABD$, $\triangle ADE$. Llenar los espacios vacíos:

Área del $\triangle$ BCD $= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$ $\boxed{}$.

Área del $\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$ $\boxed{}$

$$\text{Área del } \triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Área del polígono =____.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Señalar en la recta numérica los puntos A(3), B(-4) y C(8) y calcular lo siguiente:

a) $d(A,B) =$ b) $d(B,C) =$ c) $\vec{d}(C,B) =$ d) $\vec{d}(C,A) =$

e) La coordenada del punto medio del segmento AC =

2.- Calcular la coordenada del punto P(x) que divide al segmento A(-4)B(6) en la razón:

a) $r = \frac{5}{4}$ b) $r = -\frac{3}{2}$

3.- Calcular la distancia de A(3,5) a B(-4,6) y calcular las coordenadas del punto medio.

4.- Hallar las coordenadas del punto P(x.y) que divide al segmento A(-2,3)B(4,-5) en la razón:

a) $r = \frac{7}{3}$ b) $r = -\frac{5}{4}$

5.- Comprobar lo siguiente:

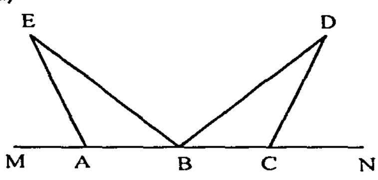
a) El triángulo cuyos vértices son A(6,7) B(-8,-1) C(-2,-7) es isósceles.

b) El triángulo de vértices A(-2,8) B(-6,1) C(0,4) es un triángulo rectángulo. Hallar su área.

c) El triángulo de vértices A(0,0) B(2,0) C(1, $\sqrt{3}$) es equilátero. Hallar su área.

6.- Demostrar lo que se pide en las siguientes figuras:

a)

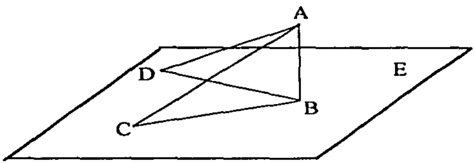


$AB = CB$

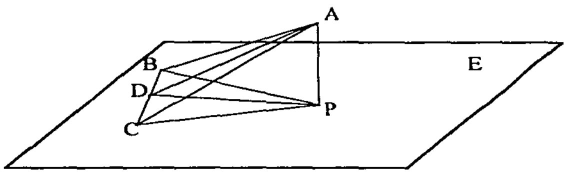
$\sphericalangle MAE = \sphericalangle NCD, \quad AE = CD$

Demostrar que $\triangle ABE \cong \triangle CBD$

b) En la siguiente figura, se sabe que ABCD son puntos no coplanarios y que B, C y D están en el plano E. Si $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ y $BC = BD$, demostrar que AC = AD.



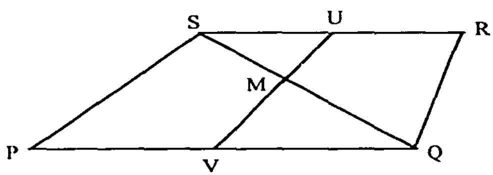
c) P, B, D y C son puntos en el plano E y A no está en el plano E. Los triángulos ABC y PBC son isósceles, con AB = AC y PB = PC, respectivamente. Si AD biseca al $\sphericalangle BAC$, demostrar que PD biseca al $\sphericalangle BPC$.



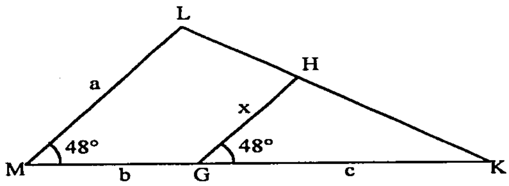
7.- Considerar los datos de cada inciso para demostrar lo que se pide.

a) En el cuadrilátero PQRS, $SR \parallel PQ$, SQ es una diagonal y U, V son los puntos medios de SR y PQ respectivamente.

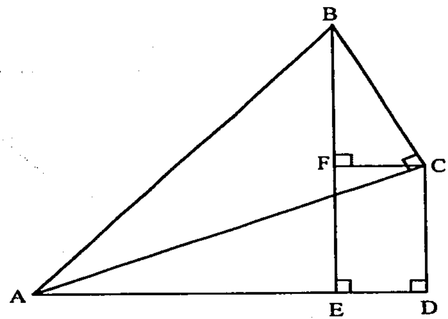
Demostrar que $US \cdot MQ = VQ \cdot MS$



b) Expresar x en términos de a, b y c.



c)

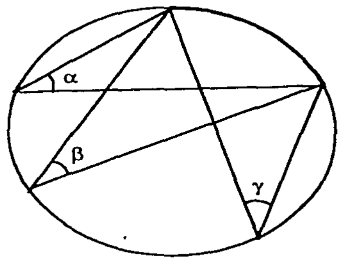


i) Demostrar que $\triangle BFC \sim \triangle ADC$

ii) Demostrar que $BF = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$

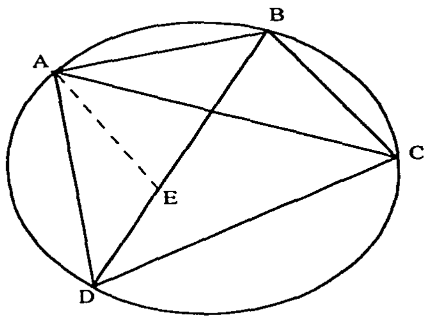
iii) $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{CD}{AC} \cdot \dfrac{AC}{AB} + \dfrac{AD}{AC} \cdot \dfrac{BC}{AB}$

8.- Para este problema se debe tener presente que en una circunferencia ángulos inscritos que abarcan arcos iguales, son iguales. Ver la figura:



Los ángulos α, β y γ son iguales porque abarcan el mismo arco.

En la siguiente figura $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$, demostrar lo que se pide:



a) Demostrar que $\triangle DAE \sim \triangle CAB$

b) Demostrar que $\triangle ADC \sim \triangle AEB$

c) Demostrar que $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$

Con lo cual queda demostrado el teorema de **Ptolomeo** que dice:

" El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos".

9.- Demostrar que los puntos A(1,3) B(-2,-3) C(3,7) están en una misma recta. Hacer un dibujo.

10.- Comprobar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero cuyos vértices son A(-2,7) , B(5,6) , C(3,-4) , D(-1,-7) son los vértices de un paralelogramo.

11.- Comprobar que A(2,4) , B(7,3) , C(6,-2) , D(1,-1) son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.

12.- Demostrar que A(2,2) , B(5,6) , C(9,9) , D(6,5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares.

13.- Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son: A(-4,5) B(1,2) C(3,4).

14.- Calcular el área del polígono cuyos vértices consecutivos son: A(-3,5) , B(1,4) , C(5,1) , D(3,-4) , E(-1,-10).

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Hallar la coordenada del punto P(x) que divide a A(-5)B(7) en la razón:

a) $r = \frac{2}{3}$ b) $r = -\frac{5}{4}$

2.- Hallar las siguientes distancias entre los puntos indicados. A(3,5), B(-5,-4), $C(\frac{3}{4}, -5)$, $D(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$. Señalar los puntos en el plano.

a) $d(A,B)$ b) $d(A,C)$ c) $d(B,D)$ d) $d(C,D)$

3.- Señalar los siguientes puntos y calcular las distancias indicadas, A(4,3,6), B(-2,5,-8), C(6,-5,7).

a) $d(A,B)$ b) $d(B,C)$ c) $d(C,A)$

4.- En el triángulo cuyos vértices son A(-2,-3) B(4,3) y C(1,7) hallar las coordenadas de los puntos medios de los lados y mostrar que son los vértices de un triángulo cuyo perímetro es la mitad del perímetro del triángulo ABC. Hacer un dibujo.

5.- Hallar las coordenadas del punto P(x,y) que divide al segmento A(-4,-3)B(5,6) en la razón:

a) $r = \frac{2}{5}$ b) $r = -\frac{4}{3}$

En cada caso hacer un dibujo.

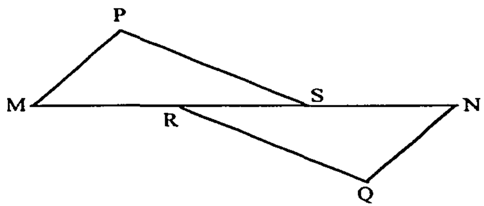
6.- Usando las condiciones de paralelismo y perpendicularidad demostrar lo siguiente:

a) Las rectas $x + 2y - 4 = 0$ y $3x + 6y + 1 = 0$ son paralelas. Graficarlas.

b) Las rectas $4x - y + 1 = 0$ y $x + 4y + 5 = 0$ son perpendiculares. Graficar.

7.- Demostrar lo que se pide en cada caso:

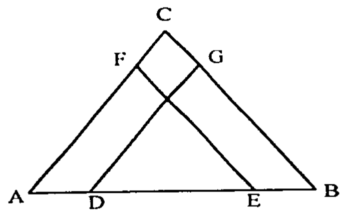
a)



Si PM = NQ , PS = QR y MR = NS. Demostrar que:

$$\sphericalangle PSN = \sphericalangle QRM$$

b)

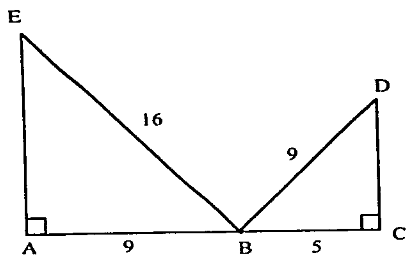


$\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $AD = BE$ y $\sphericalangle ADG = \sphericalangle BEF$. Demostrar que:

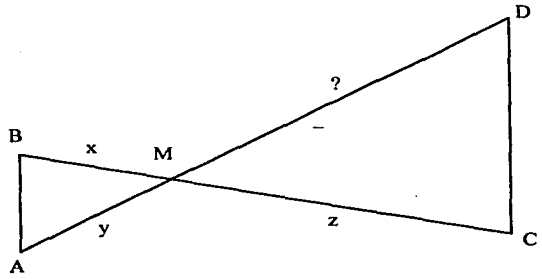
$\triangle AEF \cong \triangle BDG$ y $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CGD$

8.-

a) ¿ Son semejantes los triángulos de la siguiente figura?



b) En la siguiente figura x, y, z son las longitudes de MB, MA y MC respectivamente.



i) ¿ Cuál deberá ser la longitud de MD para que los triángulos sean semejantes?

ii) Si $z = 2x$, ¿ deberá ser $\sphericalangle D = 2\sphericalangle A$?

9.- Calcular el área del polígono de vértices: A(-5,-1)B(-1,-9)C(2,-3)D(4,6)E(0,9).

10.- Demostrar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero de vértices A(-4,5)B(-1,-3)C(3,4)D1,7) son los vértices de un paralelogramo.

11.- Hallar los ángulos interiores del triángulo A(2,3) B(-3,1) C(1,-4)

UNIDAD V

DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

INTRODUCCIÓN:

El problema fundamental de la geometría analítica consta de dos partes, la primera de ellas es la discusión o análisis de una ecuación para poder hacer la grafica de la curva. Las características de las curvas que se examinan para esto son sus simetrías, sus intersecciones con los ejes coordenadas y su extensión, que son los intervalos de variación para los cuales los valores de las variables son números reales y además satisfacen la ecuación. También se determinan sus asíntotas horizontales y verticales y finalmente con una tabulación adecuada se llega a la gráfica correspondiente.

La segunda parte del problema fundamental de la geometría analítica que se verá en la unidad siguiente consiste en: dada una curva o las condiciones que describen dicha curva, hallar la ecuación correspondiente.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno discuta una ecuación para que, simplificado el trabajo analítico, obtenga la grafica de una ecuación algebraica y estos conocimientos los aplique adecuadamente en cursos posteriores.

CONTENIDOS BÁSICOS: Discusión de una ecuación, intersección con los ejes, simetría respecto a los ejes y el origen, extensión (dominio y rango de la relación), asíntotas horizontales y verticales, gráfica de la relación.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Sabrán que uno de los problemas fundamentales de la geometría analítica es, conocida una ecuación, representarla gráficamente y que para simplificar el trabajo se efectuará un análisis previo que se conoce como discusión de la ecuación.
- Hallarán las intersecciones de una curva con los ejes.
- Conocerán los conceptos de simetría con respecto a un punto y una recta. Demostrarán las condiciones que deben cumplir los puntos de una curva para que sean simétricos respecto al eje X , al eje Y , al origen.
- Revisarán que es el dominio y rango de una relación, los obtendrán algebraicamente.
- Revisarán el concepto de asíntota de una curva y determinarán las horizontales y verticales cuando existan.
- Trazarán la gráfica de una ecuación usando la discusión y una tabla de valores.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

2.- Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

3.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

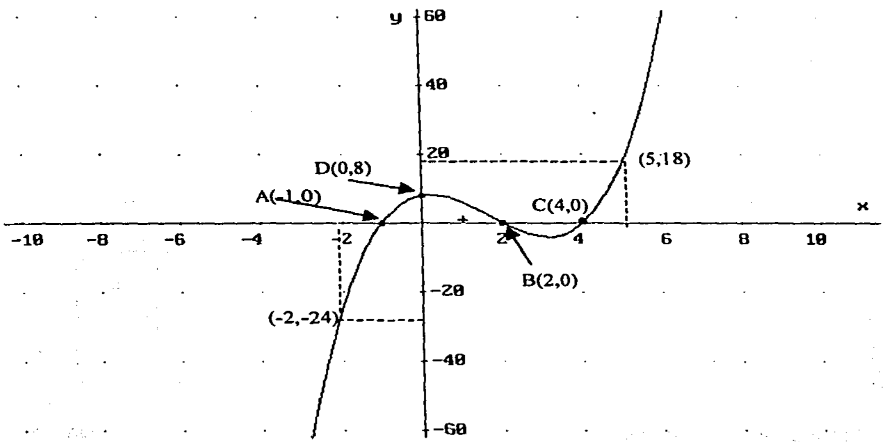
Aquí se aborda una de las partes del problema fundamental de la geometría analítica: Dada una ecuación, graficarla. Para esto, se hace un análisis de la ecuación que consiste de hallar las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados, las simetrías de la gráfica respecto a los ejes y el origen, la extensión de la gráfica que son los valores reales que pueden tomar las dos variables y las asíntotas de la gráfica.

Problema 1.

Supongamos que tenemos la ecuación $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$. En la siguiente tabla se le han dado algunos valores a x y se han obtenido los de y.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-24	0	8	6	0	-4	0	18

Si señalamos en un sistema de coordenadas algunos de los puntos obtenidos con estos valores y después los unimos con un trazo continuo tendremos la siguiente grafica.



Los puntos donde la curva corta al eje X son las intersecciones con el eje X como podrás observar dichos puntos son A, B y C.

¿Cuánto vale la segunda coordenada de todos estos puntos? ____________________.

Los puntos donde la curva corta al eje Y son las intersecciones con el eje Y. El único punto es D.

¿Cuánto vale la primera coordenada de D? ____________________.

Generalmente no es fácil encontrar dichas intersecciones con los ejes. Un dato que se usa es que para las intersecciones con el eje X, la segunda coordenada vale 0, es decir, y = 0.

Para las intersecciones con el eje Y, la primera coordenada vale 0, es decir, x = 0.

En base a lo anterior para hallar las primeras coordenadas de las intersecciones con el eje X, se hace y = 0 en la ecuación original y se resuelve la ecuación resultante en el cual aparece únicamente la variable x.

Para las segundas coordenadas de las intersecciones con el eje Y, se hace x = 0, y se resuelve la ecuación.

Problema 2.

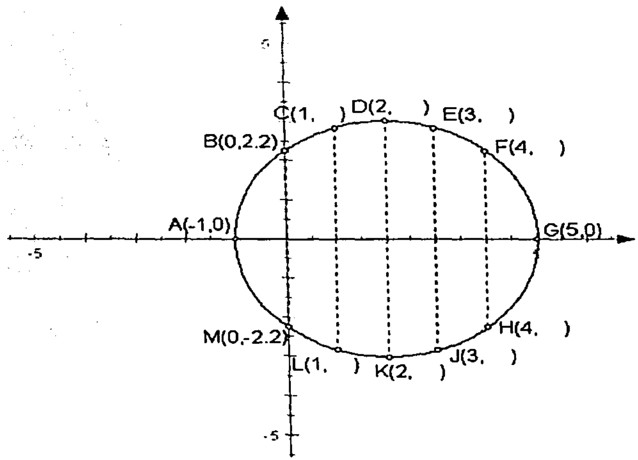
En la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, si despejamos y obtenemos :

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

Llenar la siguiente tabla :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y				±2.23						No definido

Como podrás observar para algunos valores de x no se obtiene ningún valor real para y; para algunos otros se obtienen 2 valores de y uno positivo y el otro negativo. Si señalamos los puntos obtenidos en un sistema de coordenadas y los unimos se obtiene la siguiente curva :



Al llenar los espacios en la figura anterior observamos que dado un punto en la parte superior del eje X y que esté en la curva, hay otro punto en la curva en la parte inferior del eje X a la misma distancia. Esto significa que la curva es simétrica respecto al eje X. Para comprobar que una curva es simétrica respecto al eje X se cambia y por –y en la ecuación original y ésta no se debe alterar.

Si cambiamos y por –y en la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ obtenemos:

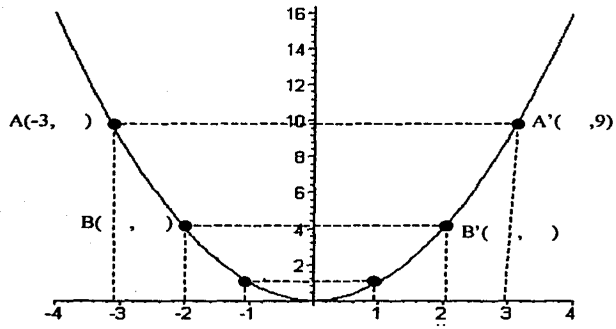
$$x^2 + (-y)^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

Lo que nos indica que no se altera y por tanto, como ya se comprobó, es simétrica respecto al eje X.

Completar la tabla siguiente que corresponde a la ecuación $y = x^2$ y señalar los puntos en un sistema de coordenadas para graficarla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y				0			9



En la gráfica se observa que para cada punto a la derecha del eje Y sobre la curva hay otro punto del lado izquierdo y a la misma distancia, además estos puntos tienen la primera coordenada con signos contrarios y la segunda igual.

Esto significa que la curva es simétrica respecto al eje Y. Para comprobar que una curva es simétrica respecto al eje Y se cambia x por $-x$ en la ecuación y ésta no se debe alterar.

Por ejemplo se cambiamos x por $-x$ en la ecuación $y = x^2$ obtenemos :

$$y = (-x)^2$$

$$y = x^2$$

Como no se altera, es simétrica respecto al eje Y.

Finalmente una curva es simétrica respecto al origen si al cambiar x por $-x$, y por $-y$ la ecuación no se altera, por ejemplo en :

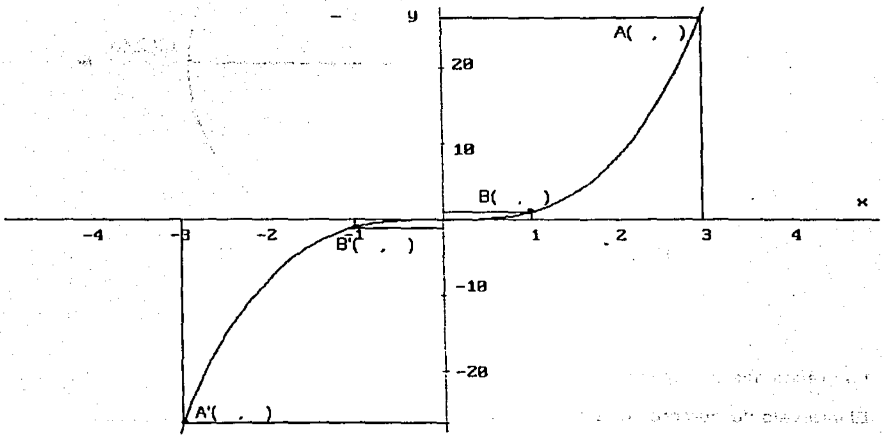
$$y = x^3 \quad , \qquad -y = (-x)^3$$

$$-y = -x^3 \quad , \qquad y = x^3$$

Entonces $y = x^3$ es simétrica respecto al origen.

Llene la siguiente tabla para graficar y explique que significa que la curva sea simétrica respecto al origen.

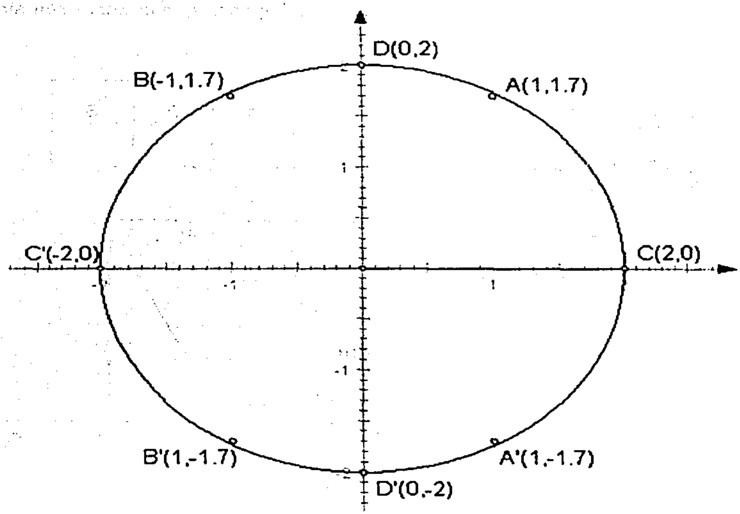
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



Problema 3.

Al graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, observamos que la x no puede tomar cualquier valor, lo mismo ocurre con y.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	±1.7	±2	±1.7	0



La gráfica nos sugiere que:

El intervalo de números que puede tomar x es: ____________________

El intervalo de números que puede tomar y es: ____________________

Los dos intervalos obtenidos anteriormente son la extensión de la curva.

La extensión de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ se denota de la siguiente manera:

$$E_x = \{(x,y) \mid x \in [-2,2] \ , y \in [-2,2]\}$$

Algunas ocasiones no es fácil encontrar la extensión, en tales casos se procede así:

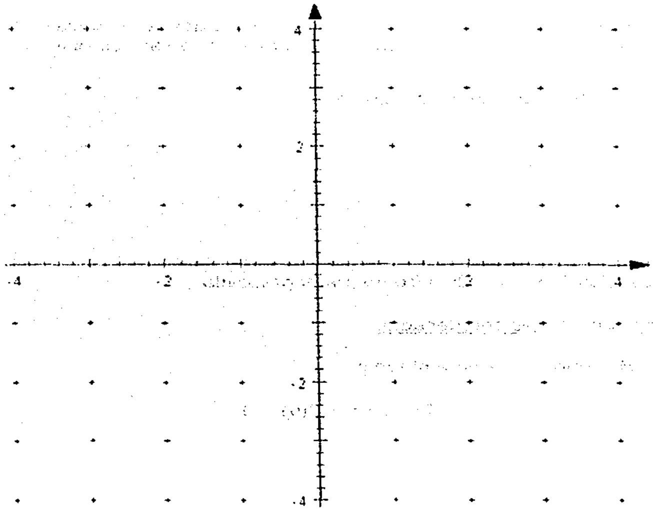
Para hallar la extensión de x se despeja y, después nos fijamos para que valores de x se obtienen valores reales de y.

Para la extensión de y se procede igual despejando x.

Problema 4.

Llenar la siguiente tabla para graficar la ecuación $xy = 1$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y									



Si despejamos y obtenemos $y = \dfrac{1}{x}$ que está definida para $x \neq 0$

Si despejamos x obtenemos $x = \dfrac{1}{y}$ que está definida para $y \neq 0$

Entonces la extensión es:

$$E_x = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\ , y \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

Al graficar observaras que la curva consta de dos ramas separadas y que conforme nos alejamos del origen sobre la curva ésta se va acercando a alguno de los ejes. Decimos que en este caso los ejes son asíntotas de la curva.

En general una recta es asíntota de una curva si al alejarse del origen sobre la curva, se va acercando a dicha recta.

Para encontrar las asíntotas verticales se despeja y, los números donde se hace cero el denominador (si lo hay) nos determinan las asíntotas verticales. Por ejemplo $xy = 1$, despejando y se obtiene:

$y = \frac{1}{x}$ $\therefore$ $x = 0$ es la asíntota vertical.

Para las asíntotas horizontales se despeja x, los números donde se anula el denominador son las asíntotas horizontales, en el ejemplo anterior al despejar x se obtiene:

$x = \frac{1}{y}$ $\therefore$ $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Problema 5.

Analizar la ecuación $2xy + x + 2y = 0$ para poder graficarla.

<u>Intersecciones con los ejes coordenadas:</u>

Con el eje X. Hacemos $y = 0$ para obtener:

$$2x(0) + x + 2(0) = 0$$

$$\therefore\ x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Entonces hay una sola intersección con el eje X: A(______, 0)

Intersecciones con el eje Y. Hacemos $x = 0$:

$$2(0)y + 0 + 2y = 0$$

$$\therefore\ x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

intersección con el eje Y: B(0, ______) Simetrías:

Respecto a x cambiamos y por –y en la ecuación:

$$2x(-y) + x + 2(-y) = 0$$, simplificamos

____________________ = 0

Comparando la ecuación original con la obtenida después de sustituir y por –y son:

Entonces la curva $2xy + x + 2y = 0$ es simétrica respecto al eje X.

Respecto al eje Y. Cambiamos x por –x y obtenemos:

$$2(-x)y + (-x) + 2y = 0$$, simplificamos

____________________________ = 0

comparada con la original son: ___________________________.

Entonces la curva es simétrica respecto al eje X.

Respecto al origen de coordenadas.

Cambiamos x por –x, y por –y para obtener :

________________ = 0 , simplificamos

________________________ = 0

Comparada con la original son : _________________________.

Entonces la curva es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Extensión:

Para el intervalo de variación de x despejamos y de la siguiente manera:

Agrupamos los términos que tengan y en el primer miembro de la igualdad, factorizamos y para finalmente despejarla :

$$2xy + x + 2y = 0$$

$$2xy + 2y = -x$$

$$y(\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) = -x$$

$$y = \frac{-x}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

El intervalo de variación de x son todos los números que puede tomar x para que la expresión anterior nos dé un número real. Tales números son todos los reales menos aquel donde el denominador es igual a cero. Determinamos ese número :

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = \frac{-2}{2} \quad , \quad \therefore \; x = -1$$

Entonces el intervalo de variación de x es : $\mathbb{R} - \{\quad\}$

Para el intervalo de variación de y despejamos x de manera análoga :

$$2xy + x + 2y = 0$$

$$2xy + x = -2y$$

$$x(\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_) = -2y$$

$$x = \frac{-2y}{\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_}$$

Igualamos a cero el denominador y despejamos y :

$y =$

Entonces el intervalo de variación de y es : $\mathbb{R} - \{ \quad \}$

La extensión de la ecuación $2xy + x + 2y = 0$ es:

$$E_x = \{(x, y) \mid \qquad \}$$

<u>Asíntotas</u>:

Asíntotas horizontales:

Anteriormente se despejó x:

$$x = \frac{-2y}{2y + 1}$$

Igualamos a cero el denominador y despejamos y:

$$2y + 1 = 0$$

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Que es la asíntota horizontal.

Asíntotas verticales:

$$y = \frac{-x}{2x + 2}$$

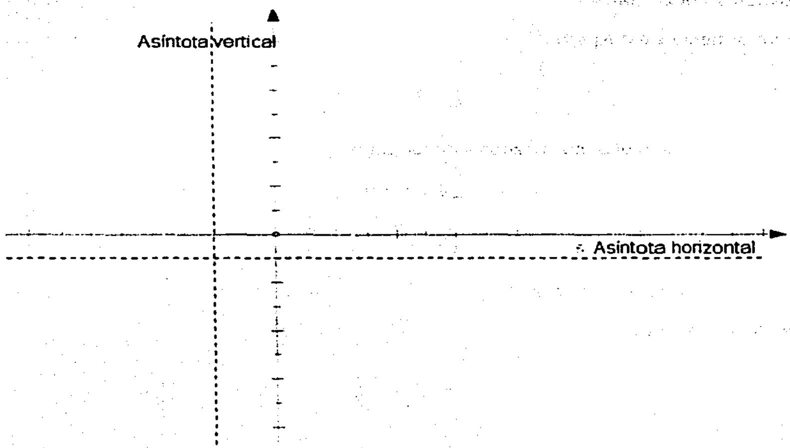
$$2x + 2 = 0$$

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Que es la asíntota vertical.

Para trazar la grafica de la ecuación $2xy + x + 2y = 0$, primero marcamos los puntos de intersección con los ejes coordenadas que en este caso es solo uno : el origen, después trazamos las asíntotas y a continuación se usa la ecuación $y = \frac{-x}{2x+2}$ para llenar la siguiente tabla y basándose en toda la información anterior trazar la gráfica.

x	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
y									



Problema 6.

Analizar y graficar la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

<u>Intersección con los ejes coordenadas</u>.

Con el eje X : sustituimos y = 0 y resolvemos la ecuación

$$4x^2 + 9(0)^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Los puntos de intersección con el eje X son: A(____,0) y B(____,0).

Con el eje Y : sustituimos x = 0 y resolvemos la ecuación :

$$4(0)^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$9y^2 = 36$$

$$y^2 = 4 \quad \therefore \quad y = \pm 2$$

Los puntos de intersección con el eje Y son: C(0,_____) y D(0,_____).

<u>Simetrías:</u>

Respecto al eje X. Sustituimos y por –y y simplificamos.

$$4(x)^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

Comparamos con la ecuación inicial.

¿Hay simetría respecto al eje X? ___________.

Respecto al eje Y, sustituimos x por -x

$$4(-x)^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

¿Hay simetría respecto al eje Y? __________________.

Respecto al origen, sustituimos x por –x, y por –y:

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

¿Hay simetría respecto al origen? __________________.

Extensión:

Intervalo de variación para x. Despejamos y:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

La expresión $\sqrt{\dfrac{36 - 4x^2}{9}}$ **es un número real si** $36 - 4x^2 \geq 0$. **Resolvemos la desigualdad:**

$$36 - 4x^2 \geq 0$$

$$36 \geq 4x^2$$

$$4x^2 \leq 36 \quad , \quad x^2 \leq 9$$

$$\_\_\_\_\_ \leq x \leq \_\_\_\_\_$$

El intervalo de variación de x es: [,]

Intervalo de variación para y. Despejamos x:

y =

Resolvemos la desigualdad correspondiente :

________ $\leq$ y $\leq$ ________

El intervalo de variación para y es : [,]

La extensión de la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ es:

$$E_x = \{ \qquad \}$$

<u>Asíntotas</u>.

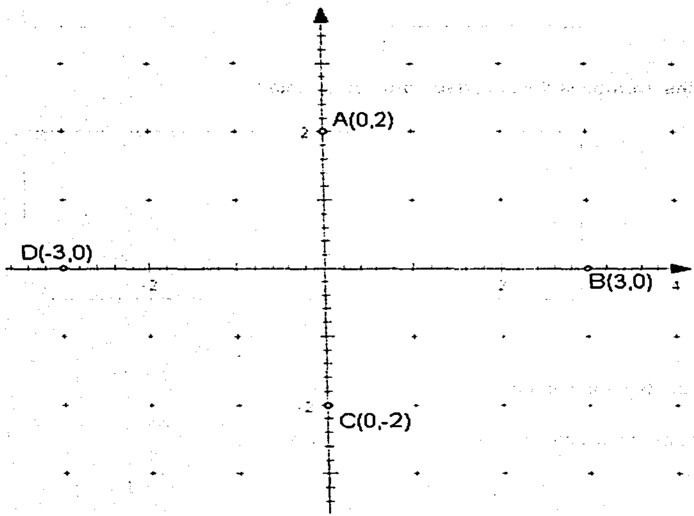
Al despejar x, y obtenemos :

$$x = \pm\sqrt{\frac{36 - 9y^2}{4}} \quad , \qquad y = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

Como en los denominadores no aparece ninguna variable, entonces nunca son cero, por lo tanto no hay asíntotas horizontales y verticales.

En el siguiente sistema de coordenadas señalamos los puntos de intersección y los obtenidos en la tabla correspondiente.

x	-2	-1	1	2
y	±1.4			



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Realizar la discusión (intersecciones con los ejes, simetrías, extensión, asíntotas y tabulación) de las siguientes ecuaciones y graficarlas:

a) $xy - 2y - 3 = 0$

b) $xy - 4y = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

d) $y^2 - x + 4y + 6 = 0$

e) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

f) $xy^2 - 4y - x = 0$

g) $x^2 - xy + 5y = 0$

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Realizar la discusión de las ecuaciones siguientes y graficar:

a) $x^2 - y^2 = 1$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

c) $y^2 - 2y + x - 1 = 0$

d) $x^2y - x^2 - y = 0$

UNIDAD VI

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

INTRODUCCIÓN:

La segunda parte del problema fundamental de la geometría analítica consiste en hallar la ecuación de una curva descrita por ciertas condiciones. Esto es lo que se abordará en esta unidad haciendo hincapié en la línea recta que corresponde a una ecuación de primer grado.

Muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser descritos por uno de los modelos matemáticos más sencillos que es una relación lineal que corresponde a una recta por ejemplo cuando un objeto se mueve con velocidad constante en una trayectoria rectilínea, la distancia recorrida por el objeto en función del tiempo es una relación lineal.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de las condiciones geométricas que cumplen los puntos de un lugar geométrico, sea capaz de interpretarlas analíticamente para obtener la ecuación que lo define, en este caso una recta.

Que aplique los conceptos, incluidos en esta unidad, en la resolución de problemas de su entorno.

CONTENIDOS BÁSICOS: La recta como lugar geométrico, formas de la ecuación de la recta.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Ecuación de un lugar geométrico, distancia entre dos rectas paralelas, ecuaciones de las bisectrices de un ángulo, ecuaciones de las medianas, mediatrices, alturas, bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo y sus puntos de intersección, distancia de un punto a una recta.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Obtendrán la ecuación de un lugar geométrico a partir de la condición o condiciones geométricas de los puntos.
- Conocerán la definición de recta como lugar geométrico.
- A partir de ciertas condiciones que pueden ser: dos puntos, la pendiente y un punto, la pendiente y la ordenada en el origen, las intersecciones con los ejes o la distancia al origen y el ángulo que forma esa distancia con el eje x, obtendrán la ecuación de la recta.
- Conocerán las formas de la ecuación de la recta: Simplificada $y = mx + b$, general: $Ax + By + C = 0$, simétrica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, normal: $x\cos\theta + y sen\theta - d = 0$, notando que se puede pasar de una forma a otra y conociendo el significado de las constantes que intervienen.
- Determinarán las ecuaciones de las medianas, mediatrices y alturas en un triángulo, así como sus puntos de intersección: baricentro, circuncentro y ortocentro.
- Calcularán la distancia de un punto a una recta (distancia dirigida y como longitud) considerando la forma normal de la ecuación de la recta.
- Hallarán las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo y su punto de intersección: el incentro.
- Comprobarán que baricentro, circuncentro, ortocentro, incentro son colineales. La recta que contiene a estos puntos se llama Recta de Euler.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Fuller, Gordon, et al. Geometría Analítica. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

2.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3.- Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

4.- López, Antonio, et al., Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

5.- Lucio, Guadalupe, Geometría Analítica 1. México, Limusa, 1984.

6.- Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, 1997.

7.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

Con los problemas de esta unidad se estudia el concepto de línea recta como un lugar geométrico, también las formas de la ecuación de la recta: General, punto-pendiente, simétrica y normal. Se estudian también las medianas, alturas, mediatrices y bisectrices de un triángulo y sus puntos de intersección.

Problema 1.

La parte dos del problema fundamental de la geometría analítica consiste en hallar la ecuación de una curva descrita por algunas condiciones dadas. Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe un punto P(x,y) que se mueve de tal manera que la distancia de P(x,y) a A(3,2) es igual a la distancia de P(x,y) a B(5,-1) .

Uno de los puntos que satisface las condiciones del problema es el punto medio de AB, pues la distancia de ese punto a A y a B es igual. Calcular las coordenadas de dicho punto y señalarlas en la figura.

Si P(x,y) es un punto que satisface las condiciones del problema, trazamos la línea que pasa por el punto medio Q y P(x,y) como lo muestra la figura. Llenar los espacios vacíos para comprobar que P(x,y) está en la mediatriz de AB.

$\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ con criterio de congruencia:

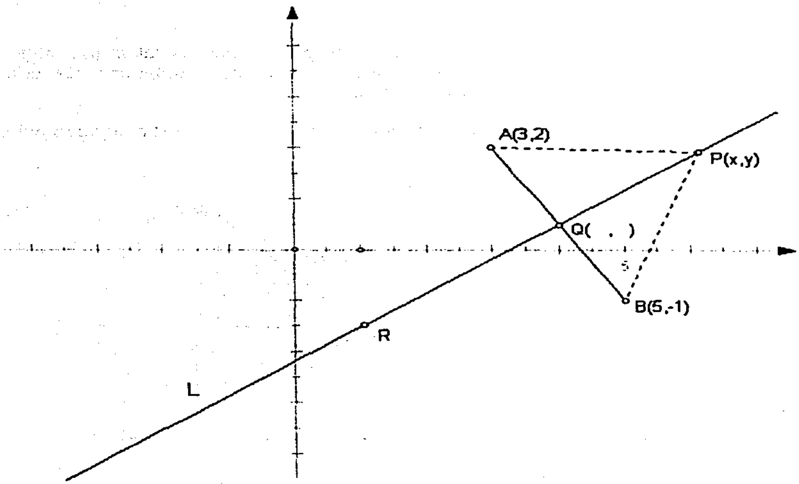
$\sphericalangle AQP =$

Por lo anterior, podemos concluir que P(x,y) está en la mediatriz de AB.

Si R es un punto en la mediatriz de AB, entonces:

$\triangle AQR \cong \triangle BQR$ con criterio de congruencia:

Con lo anterior se ha comprobado que los puntos del plano que satisfacen las condiciones del problema son puntos de la mediatriz de AB y que los puntos de la mediatriz satisfacen las condiciones del problema, entonces el lugar geométrico buscado es dicha mediatriz.



Para hallar la ecuación del lugar geométrico procedemos así:

$d(\mathrm{A,P}) =$ $\boxed{}$

$d(\mathrm{B,P}) =$ $\boxed{}$

De acuerdo a las condiciones que describen el lugar geométrico:

$d(\mathrm{A,P}) = d(\mathrm{B,P})$

Sustituir las distancias para obtener:

$$\boxed{} = \boxed{}$$

Simplificar y expresar la ecuación en la forma $Ax + By + C = 0$:

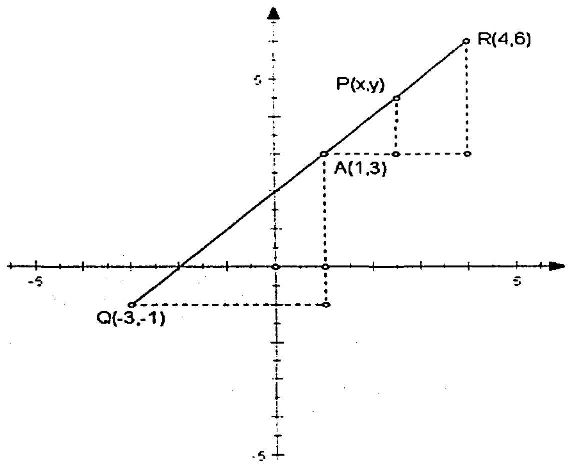
$$\boxed{} = 0$$

Cuando la ecuación de una recta está dada como en la expresión anterior, decimos que está en **forma general**.

Problema 2.

Hallar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos tales que, si se toman cualesquiera dos de ellos, se obtiene siempre la pendiente 1, sabiendo que uno de los puntos que forma tal lugar geométrico es A(1,3).

Observar la siguiente figura para mostrar que los dos puntos Q y R dibujados pertenecen al lugar geométrico.



La pendiente que se obtiene con los puntos A(1,3) y Q(-3,-1) es

La pendiente que se obtiene con los puntos A(1,3) y R(4,6) es:

La figura nos muestra que para encontrar puntos que estén en el lugar geométrico se deben construir triángulos rectángulos de catetos iguales.

Al dibujar todos los puntos que se obtienen con el procedimiento anterior ¿ Qué figura se obtiene?

Para hallar la ecuación del lugar geométrico, suponemos que P(x,y) es un punto en dicho lugar geométrico, entonces la pendiente que se obtiene con los puntos A y P es:

$$m = \frac{y - 3}{x - 1}$$

Como la pendiente es 1, entonces

$$1 = \frac{y - 3}{x - 1}$$

Simplificando obtenemos la ecuación en forma general:

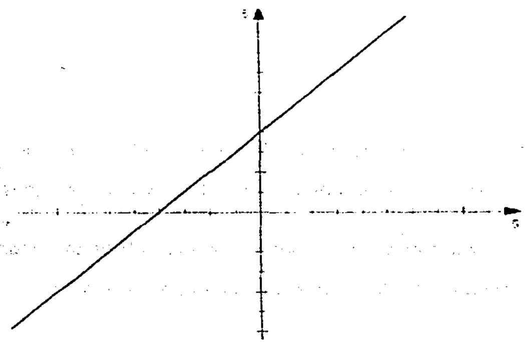
Al despejar y en la ecuación anterior obtenemos una ecuación en la forma $y = mx + b$ llamada **forma pendiente ordenada en el origen**, donde b es la **ordenada en el origen**.

Escribir la ecuación obtenida después de despejar y:

Si le damos a x el valor de cero, obtenemos el siguiente valor para y:

$y =$

Entonces la ordenada en el origen es el valor que toma y cuando x = 0. Señalar esto en la figura:



Si escribimos la ecuación $x - y + 2 = 0$ de la siguiente forma:

$$x - y = -2$$

Luego dividimos ambos miembros de la igualdad entre –2, tendremos la ecuación de la recta en la siguiente forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

La ecuación anterior es la forma simétrica de la ecuación de la recta.

La ecuación obtenida en esta forma es: $\boxed{}$

Si $x = 0$ $y = \boxed{}$ Si $y = 0$ $x = \boxed{}$

Señalar los puntos obtenidos en la figura para ver el significado geométrico de a y b.

Problema 3.

Crecimiento de una ballena azul. Las ballenas azules recién nacidas miden alrededor de 24 pies de largo y pesan tres toneladas. Los cetáceos jóvenes son amamantados durante 7 meses y, al momento del destete, muchos miden 53 pies de largo y pesan 23 toneladas. Denotemos con L y P la longitud en pies y el peso en toneladas respectivamente, de una ballena de t meses de edad.

a) Si L y t están relacionados linealmente, expresa L en términos de t.

b) ¿ Cuál es el aumento diario en la longitud de una ballena joven? (Usa 1 mes = 30 días)

c) Si P y t están relacionados linealmente, expresa P en términos de t.

d) ¿ Cuál es el aumento diario en el peso de una ballena joven?

Para resolver a) observemos que nos dan los siguientes datos:

Si el tiempo t = 0 las ballenas miden L = 24 y como están relacionados linealmente entonces la gráfica de esta relación es una recta que pasa por $A(0,24)$.

Si el tiempo es t = 7 la longitud de las ballenas es L = 53, entonces la recta mencionada pasa también por $B(7,53)$.

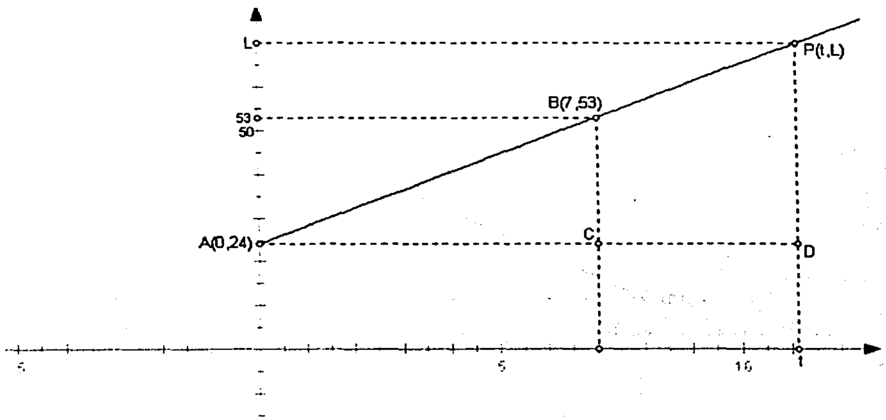
Usaremos la gráfica de esta recta que se dibujará en la siguiente página para encontrar la expresión que nos da L en términos de t y a partir de esa expresión encontraremos el aumento diario en la longitud.

Para resolver c) procedemos como antes pero ahora considerando el peso P.

Si el tiempo es t = 0 el peso es P = 3 y como están relacionados linealmente entonces la recta pasa por el punto $A(0,3)$.

En el tiempo t = 7 el peso es P = 23 entonces la recta también pasa por el punto $B(7,23)$.

En la siguiente página se graficará esta recta y se encontrará la expresión para P en términos de t y a partir de esa expresión se encontrará el aumento diario en el peso de una ballena joven.



La pendiente de la recta anterior es: $m = \dfrac{53 - 24}{7 - 0}$, $m = \dfrac{29}{7}$ y la ordenada en el origen es 24, entonces la ecuación es la siguiente:

$$\boxed{L = \qquad\qquad\qquad}$$

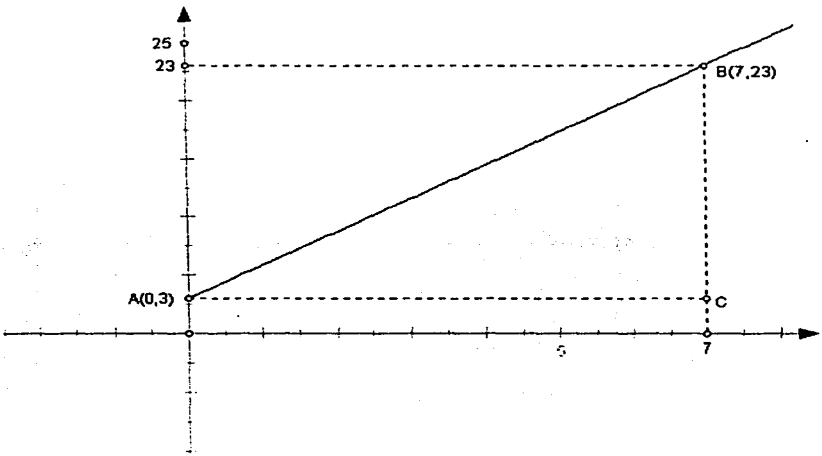
Donde t es mayor o igual que cero y está dado en meses. Para resolver b) observamos que si t está dado en días entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$\boxed{L = \frac{29}{7 \cdot 30}t + 24\ ,\ L = \frac{29}{210}t + 24}$$

Con lo que el aumento en la longitud diaria es: la longitud en t = 1 menos la longitud en t = 0.

Aumento diario en la longitud: $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

La recta que nos describe como cambia el peso respecto al tiempo es la siguiente:



La pendiente de la recta anterior es: $\boxed{}$

La ordenada en el origen es: $\boxed{}$

La ecuación de la recta anterior que nos expresa el peso P en términos del tiempo t es:

$$\boxed{P = }$$

Si ahora t está dado en días entonces la ecuación queda así:

$$\boxed{}$$

El aumento diario en el peso de una ballena joven es: $\boxed{}$

En el problema anterior pudimos observar que si nos dan dos puntos por los que pasa una recta podemos encontrar su ecuación de la siguiente manera:

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son los puntos por donde pasa la recta, se calcula la pendiente para obtener: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Después se aplica la forma punto pendiente o pendiente ordenada en el origen para encontrar la ecuación.

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Problema 4.

Un comerciante desea mezclar cacahuates que cuestan 3 dólares el kilo con nueces de la india que valen 8 dólares el kilo, para obtener 10 kilos de una mezcla con valor de 5 dólares por kilo. ¿ Cuántos kilos de cada variedad debe mezclar?

Si x es el número de kilos de cacahuates, y el número de kilos de nueces de la india que debe mezclar, entonces tendremos las siguientes ecuaciones:

$$x+y=\boxed{}$$

$$3x+8y=\boxed{}$$

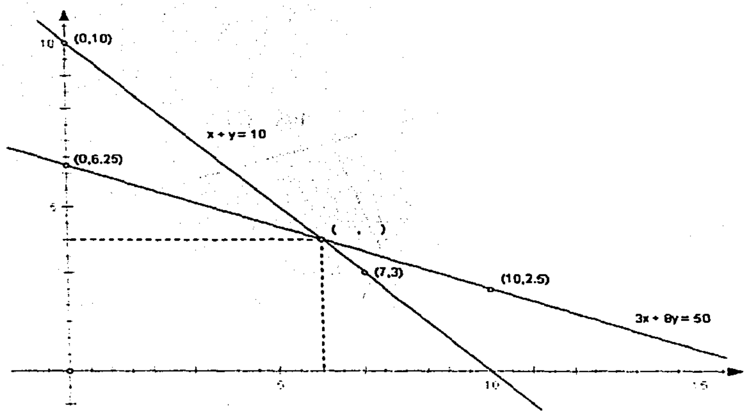
Resolver nuestro problema es encontrar los valores de x, y que satisfagan las 2 ecuaciones simultáneamente, es decir hay que resolver el sistema de ecuaciones anterior.

Despejar x de la primera ecuación, sustituir en la segunda y despejar y .

Para obtener y = 4, entonces x = $\boxed{}$

Lo cual significa que se necesitan 4 kilos de nueces de la india y 6 de cacahuates para obtener la mezcla pedida.

La recta $x+y=10$ pasa por los puntos $(0,10)$ y $(7,3)$ y la recta $3x+8y=50$ pasa por los puntos $(0,6.25)$ y $(10,2.5)$, observar las gráficas siguientes:



¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas?

¿ Qué relación hay entre la solución del sistema de ecuaciones y el punto de intersección de las rectas?

Problema 5.

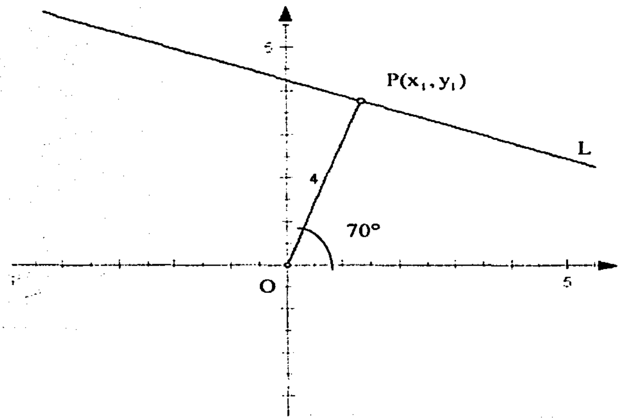
Hallar la ecuación de la recta que está a una distancia d = 4 del origen de coordenadas y dicha distancia forma un ángulo de 70° respecto a la dirección positiva del eje x. Ver la figura.

La figura muestra que:

$$x_1 = 4 \cdot \cos 70° \quad y \quad y_1 = 4 \cdot \operatorname{sen} 70°$$

Entonces las coordenadas de P son:

$$P(4 \cdot \cos 70°, 4 \cdot \operatorname{sen} 70°)$$



El ángulo de inclinación de OP es:

La pendiente de OP es:

Si m es la pendiente de L, como OP y L son perpendiculares entonces

$$m \cdot \tan 70° = -1$$

Despejar m y simplificar para obtener la siguiente expresión:

$m =$

$m =$

$$m = -\frac{\cos 70°}{\operatorname{sen} 70°}$$

Entonces la ecuación de la recta en forma punto-pendiente es:

$$y - 4 \cdot \text{sen}70° = -\frac{\cos 70°}{\text{sen}70°}(x - 4 \cdot \cos 70°)$$

Simplificar esta expresión para obtener:

$$x \cdot \cos 70° + y \cdot \text{sen}70° - 4 = 0$$

En general, si d es la distancia del origen a la recta L y θ es el ángulo que forma esa distancia con la dirección positiva del eje x, con un procedimiento similar se obtiene la ecuación de L:

$$x \cdot \cos\theta + y \cdot \text{sen}\theta - d = 0$$

y se llama **forma normal de la ecuación de la recta**.

Supongamos que se tiene la siguiente ecuación de la recta en forma general $2x - 3y + 9 = 0$ y se quiere expresar en forma normal.

Si $x \cdot \cos\theta + y \cdot \text{sen}\,\theta - d = 0$ es la ecuación en forma normal, entonces los coeficientes de las dos ecuaciones son proporcionales, es decir:

$$\cos\theta = k \cdot 2$$
$$\text{sen}\,\theta = k(-3)$$
$$-d = k \cdot 9$$

Elevando al cuadrado las dos primeras igualdades y sumándolas obtenemos:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta =$$

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{4+9}}$$

Sustituyendo el valor de k en las tres igualdades obtenemos:

$$\cos\theta = \qquad \operatorname{sen}\theta = \qquad -d = \frac{9}{\pm\sqrt{4+9}}$$

De la expresión para –d se deduce que el signo del radical que debemos tomar es menos y la ecuación en forma normal de la recta queda :

En general, si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación de una recta, procediendo de la misma forma se obtiene la ecuación en forma normal de dicha recta:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

donde el signo del radical se toma adecuadamente para que d sea positivo.

Problema 6.

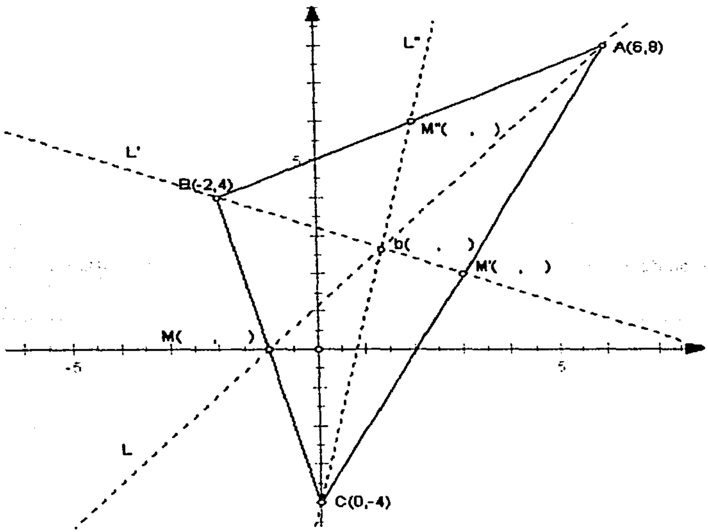
Una mediana en un triángulo es una recta que pasa por uno de los vértices del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a este vértice. En todo triángulo hay tres medianas.

Una altura en un triángulo es una recta que pasa por uno de los vértices del triángulo y es perpendicular al lado opuesto a dicho vértice. Todo triángulo tiene también tres alturas.

Una mediatriz en un triángulo es una recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por el punto medio de dicho lado. Hay tres mediatrices.

Hallar las ecuaciones de las medianas, mediatrices de los lados y alturas del triángulo cuyos vértices son A(6,8) , B(-2,4) y C(0,-4) asimismo los puntos de intersección de estas rectas llamados **baricentro, circuncentro y ortocentro** respectivamente. Finalmente mostrar que estos puntos son colineales, es decir, están en una misma recta.

Para las medianas y el baricentro.



El punto medio de lado BC es $M(\frac{-2+0}{2},\frac{4-4}{2}) \quad \therefore \quad M(-1,0)$

El punto medio de AC es:

M'(,   )

El punto medio de AB es:

M''(,   )

La ecuación de la mediana que pasa por A(6,8) y por el punto medio de BC es

$$y - 8 = m(x - 6)\ ,\ \text{donde } m = \frac{8 - 0}{6 - (-1)} = \frac{8}{7}\ ,\ \text{entonces}$$

$$y - 8 = \frac{8}{7}(x - 6)$$

$$7y - 56 = 8x - 48$$

$$\boxed{8x - 7y + 8 = 0}$$

La ecuación de la mediana que pasa por B(-2,4) y el punto medio de AC es

$2x + 5y - 16 = 0$

La ecuación de la mediana que pasa por C y por el punto medio de AB es:

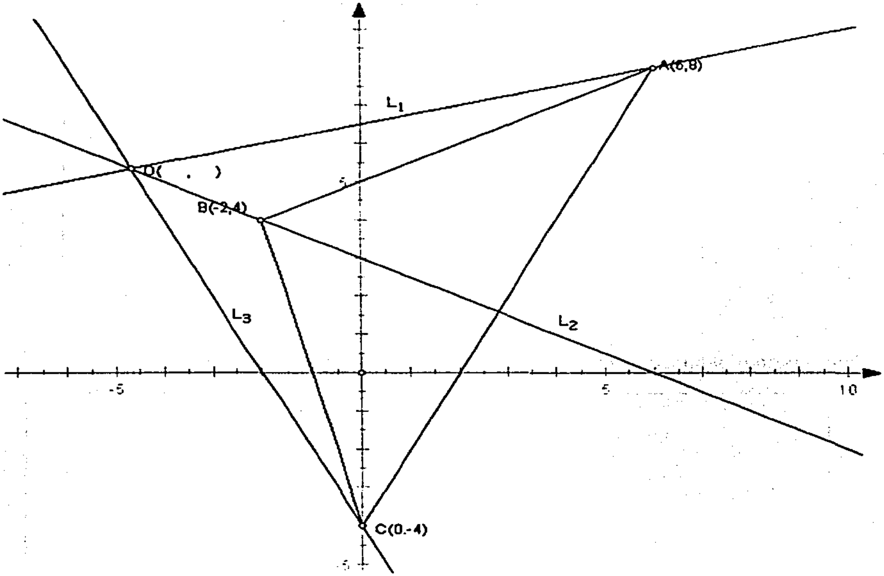
$$5x - y - 4 = 0$$

Para obtener el baricentro se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + 5y - 16 = 0 \quad \text{------} \ (1)$$
$$5x - y - 4 = 0 \quad \text{------} \ (2)$$

$$x = \frac{4}{3} \quad , \quad y = \frac{8}{3} \qquad \therefore \qquad b\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Para las alturas:



La pendiente del lado BC es: $\dfrac{-4-4}{0-(-2)}=\dfrac{-8}{2}=-4$

Entonces si m es la pendiente de la altura que pasa por A tendremos que:

$$m \cdot (-4) = -1$$

$$m = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la altura que pasa por A es:

$$y - 8 = \frac{1}{4}(x - 6)$$

$$4y - 32 = x - 6$$

$$x - 4y + 26 = 0$$

La pendiente del lado AC es:

Entonces si m' es la pendiente de la altura que pasa por B tendremos que:

$m' =$

La ecuación de la altura que pasa por B es:

$$x + 2y - 6 = 0$$

La pendiente del lado AB es:

Entonces si m'' es la pendiente de la altura que pasa por C tendremos que:

$m'' =$

La ecuación de la altura que pasa por C es:

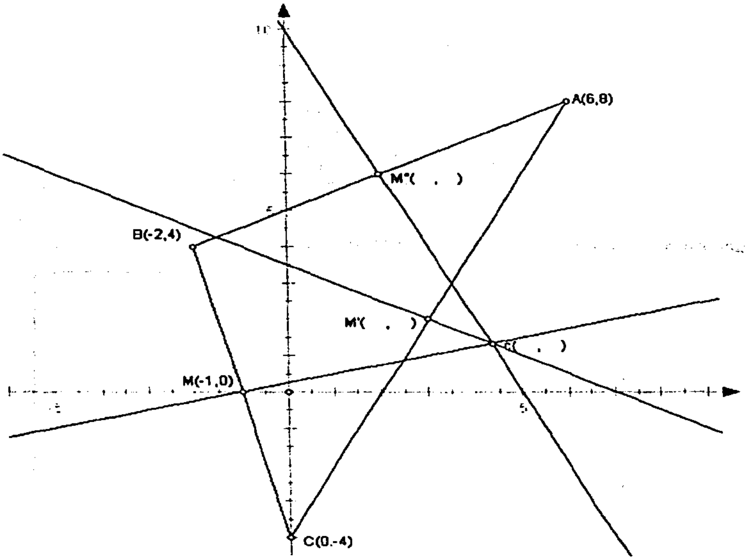
$$2x + y + 4 = 0$$

Para calcular las coordenadas del ortocentro tomamos dos de las ecuaciones anteriores y resolvemos el sistema:

$$x - 4y + 26 = 0 \text{ ------ } (1)$$
$$x + 2y - 6 = 0 \text{ ------ } (2)$$

$$x = -\frac{14}{3} \quad , \quad y = \frac{16}{3} \qquad \therefore \quad O\left(-\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

Para las mediatrices:



Los puntos medios de los lados tienen coordenadas:

M(-1,0)
M'(,)
M''(,)

La pendiente del lado BC es: -4

La pendiente del lado AC es: 2

La pendiente del lado AB es: $\frac{1}{2}$

Entonces si m es la pendiente de la altura que pasa por A, m' la de la altura que pasa por B y m'' la de la altura que pasa por C:

$m =$
$m' =$
$m'' =$

La ecuación de la mediatriz que pasa por M es:

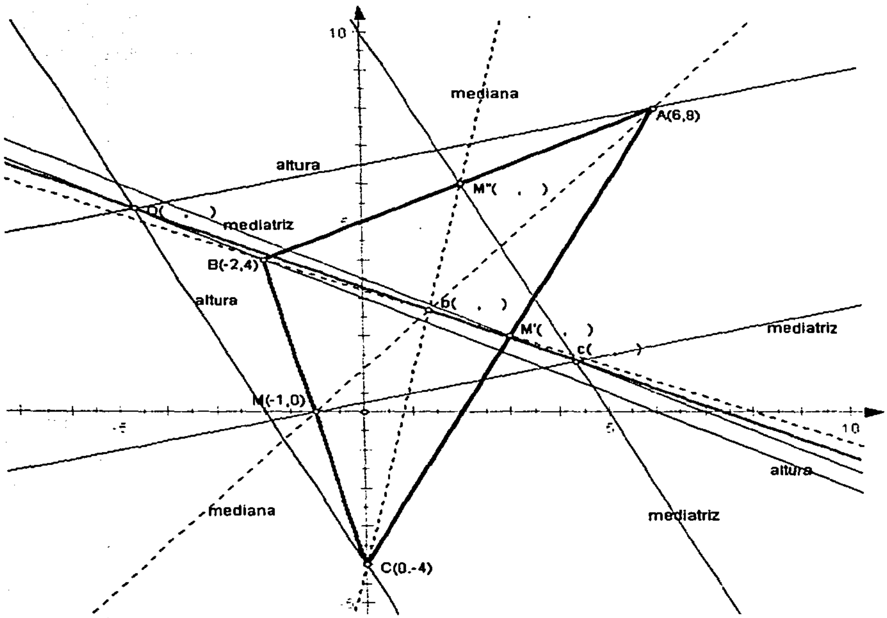
La ecuación de la mediatriz que pasa por M' es:

La ecuación de la mediatriz que pasa por M'' es:

Para hallar el circuncentro se toman dos de estas ecuaciones y se resuelve el sistema.

$$x = \frac{13}{3} \quad , \quad y = \frac{4}{3} \qquad \therefore \qquad c\left(\frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La siguiente figura nos muestra al baricentro, circuncentro y ortocentro; nos basaremos en ella para mostrar que estos puntos están en una misma línea recta.



En la figura anterior O es el ortocentro, b es el baricentro y c es el circuncentro, para mostrar que son colineales calcularemos las siguientes pendientes:

La pendiente de la recta que pasa por O y b = $\boxed{}$

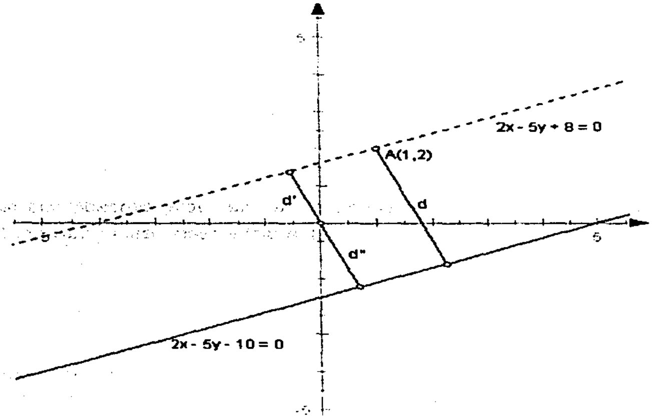
La pendiente de la recta que pasa por b y c = $\boxed{}$

Como estas pendientes son iguales y las rectas tienen un punto en común, entonces las rectas son la misma, lo cual significa que O, b y c son colineales.

Problema 7.

Calcular la distancia del punto A(1,2) a la recta cuya ecuación en forma general es $2x - 5y - 10 = 0$.

Para resolver este problema observaremos la siguiente figura:



La recta punteada es paralela a $2x - 5y - 10 = 0$ y pasa por el punto A(1,2), entonces:

La pendiente de la recta punteada es: $\boxed{\quad}$

La ecuación de dicha recta es: $2x - 5y + 8 = 0$

La distancia de A a la recta $2x - 5y - 10 = 0$, d es igual a d' + d''

La ecuación en forma normal de las dos rectas mencionadas son:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{10}{\sqrt{29}} = 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{8}{\sqrt{29}} = 0$$

Entonces d' = $\boxed{}$

d'' = $\boxed{}$ por lo tanto $d = \dfrac{18}{\sqrt{29}}$

Comparar el resultado anterior con:

$$\frac{|2(1)-5(2)-10|}{\sqrt{29}}$$

En general si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación de una recta, procediendo similarmente tendremos que la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a dicha recta está dada por la siguiente expresión:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Consideremos nuevamente la recta cuya ecuación es $2x - 5y - 10 = 0$ y apliquemos la fórmula anterior, pero sin valor absoluto para calcular la distancia del punto A(1,2) a dicha recta:

$$d = \frac{2(1)-5(2)-10)}{\sqrt{29}} = -\frac{18}{\sqrt{29}}$$

Si tomamos otro punto como por ejemplo B(3,4) y calculamos la distancia a la recta con la fórmula sin valor absoluto:

$$d = \frac{2(3)-5(4)-10}{\sqrt{29}} = -\frac{24}{\sqrt{29}}$$

Calcular lo mismo con el punto C(3,-5):

$$d = \frac{2(3)-5(-5)-10}{\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

Calcular lo mismo para D(5,-1):

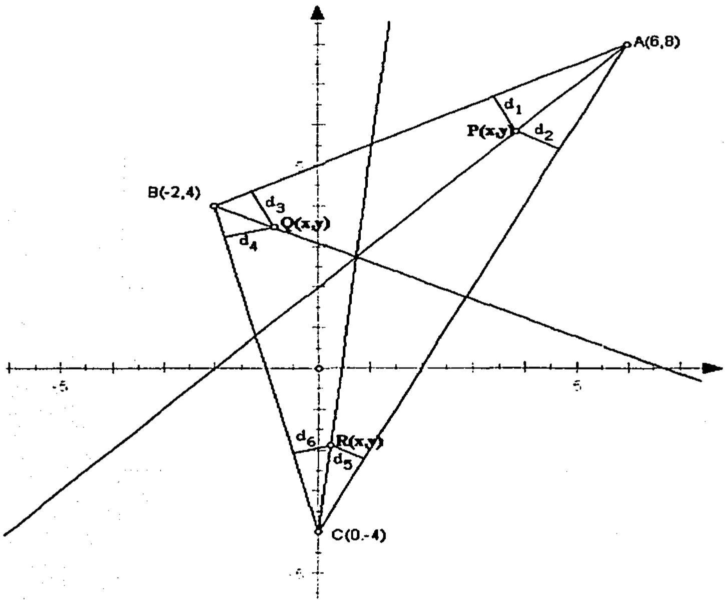
$$\boxed{}$$

Nótese que la recta mencionada divide al plano en dos regiones y los puntos A y B están en la misma región, además las distancias de estos dos puntos a la recta tienen el mismo signo (negativo) ; mientras que C y D están en la otra región y sus distancias a la recta tienen el mismo signo (positivo).

Problema 8.

Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A(6,8) B(-2,4) C(0,-4).

Usar la propiedad que tiene la bisectriz de un ángulo que dice: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo. Observar la figura:



La pendiente del lado A(6,8)B(-2,4) es $m = \frac{4-8}{-2-6} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

La ecuación del lado AB es:

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

$$2y - 16 = x - 6$$

$$x - 2y + 10 = 0$$

Pendiente del lado A(6,8)C(0,-4) m'=

Ecuación del lado AC:

$$2x - y - 4 = 0$$

Pendiente del lado B(-2,4)C(0,-4): m''=

La ecuación del lado BC es:

$$4x + y + 4 = 0$$

Ecuación de la bisectriz del ángulo BAC:

La distancia del origen al lado AB es:

La distancia del origen al lado AC es:

Si P(x,y) es un punto en la bisectriz del ángulo BAC, la distancia de este punto al lado AB es:

$$d_1 = \frac{x - 2y + 10}{\sqrt{5}}$$

Dicha distancia tiene el mismo signo que la distancia del origen al lado AB que es positiva.

La distancia del punto P(x,y) al lado AC es:

$$d_2 = \frac{2x - y - 4}{\sqrt{5}}$$

Que tiene el mismo signo que la distancia del origen al lado AC que es negativa.

La ecuación de la bisectriz del ángulo BAC es la siguiente:

$$\frac{x - 2y + 10}{\sqrt{5}} = -\frac{2x - y - 4}{\sqrt{5}}$$

$$x - y + 2 = 0$$

Ahora se encontrará la bisectriz del ángulo CBA.

Si Q(x, y) es un punto en la bisectriz del ángulo CBA, la distancia de Q al lado AB es:

$d_3 =$

La distancia de Q(x,y) al lado BC es:

$d_4 =$

Las dos distancias anteriores son positivas, entonces la ecuación de la bisectriz del ángulo CBA es:

$$\frac{4x + y + 4}{\sqrt{17}} = \frac{x - 2y + 10}{\sqrt{5}}$$

$$(4\sqrt{5} - \sqrt{17})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{17})y + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{17} = 0$$

Ahora se encontrará la bisectriz del ángulo ACB.

Si R(x, y) es un punto en la bisectriz del ángulo ACB, la distancia de R al lado AC es:

$d_5 =$

La distancia de R(x,y) al lado BC es:

$d_6 =$

Las dos distancias anteriores tienen signos contrarios, entonces la ecuación de la bisectriz del ángulo ACB es:

$$-\frac{2x - y - 4}{\sqrt{5}} = \frac{4x + y + 4}{\sqrt{17}}$$

$$(2\sqrt{17} - 4\sqrt{5})x + (\sqrt{5} - \sqrt{17})y + 4(\sqrt{5} - \sqrt{17}) = 0$$

Simplificamos la ecuación anterior de la siguiente manera: multiplicamos ambos miembros por $\sqrt{5} + \sqrt{17}$ para obtener:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{17})(2\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x + (\sqrt{5} + \sqrt{17})(\sqrt{5} - \sqrt{17})y + 4(\sqrt{5} + \sqrt{17})(\sqrt{5} - \sqrt{17}) = 0$$

$$(2\sqrt{85} + 20 + 34 + 4\sqrt{85})x + (5 - 17)y + 4(5 - 17) = 0$$

$$(54 + 6\sqrt{85})x - 12y - 48 = 0 \text{, dividiendo entre 6}$$

$$(9 + \sqrt{85})x - 2y - 8 = 0$$

Para calcular el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo tomamos dos de las ecuaciones y resolvemos el sistema:

$$x - y + 2 = 0$$
$$(9 + \sqrt{85})x - 2y - 8 = 0$$

$$x = \frac{12}{7 + \sqrt{85}} \quad , \quad y = 2 + \frac{12}{7 + \sqrt{85}} \quad \therefore \quad I\left(\frac{12}{7 + \sqrt{85}}, 2 + \frac{12}{7 + \sqrt{85}}\right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.-

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a las rectas $4x-3y=0$ y $3x+4y=0$ es siempre igual a 6.

b) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos A(3,2) y B(-5,2) es igual a 6.

2.-

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,4) y B(5,-7).

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,-4) y tiene pendiente $m=-\frac{5}{4}$.

c) Hallar la ecuación de la recta de pendiente $m=\frac{3}{2}$ y ordenada en el origen b = 4

d) Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son A(-2,0) y B(0,7).

e) Hallar la ecuación de la recta tal que la distancia al origen es 7 y forma un ángulo de 30°.

3.-

a) Relacionar las columnas que se refieren a formas de la ecuación de la recta:

Simplificada	( )	(1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
General	( )	(2) $y=mx+b$
Simétrica	( )	(3) $x\cdot\cos\theta+y\cdot\text{ sen }\theta-p=0$
Normal	( )	(4) $Ax+By+C=0$

b) Pasar las ecuaciones dadas a la forma indicada:

i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ a la forma general.

j) $3x-4y+3=0$ a la forma simétrica.

k) $5x-3y+7=0$ a la forma normal.

l) $x\cdot\cos 30°+y\cdot\text{sen}30°-5=0$ a la forma simplificada.

4.- En el triángulo cuyos vértices son A(-5,6) B(-1,-4) C(3,2) hallar las ecuaciones de las medianas y el baricentro.

5.- En el mismo triángulo hallar las ecuaciones de las mediatrices y el circuncentro.

6.- En el mismo triángulo hallar las ecuaciones de las alturas y el ortocentro.

7.- Comprobar que baricentro, circuncentro y ortocentro son colineales y hallar la ecuación de la recta que los contiene.

8.- Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A(-1,3) B(3,6) C($\frac{31}{5}$,0) .

9.- Un bebé pesa 10 libras al nacer y 3 años después alcanza un peso de 30 libras. Supón que el peso W en libras en la infancia está relacionado linealmente con la edad t en años.

a) Expresar W en términos de t.

b) ¿ Cuál será W cuando el niño cumpla 6 años ?

c) ¿ A qué edad pesará 70 libras ?

d) En un plano tW, dibuja una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.

10.- Un automóvil parte de una población X y viaja por una carretera a una velocidad constante de 60 Km/h . Otro automóvil sale, al mismo tiempo, de un punto en la carretera 25 Km delante de la población X, a una velocidad de 50 Km/h. ¿ Después de cuánto tiempo de viaje se encuentran los dos automóviles ?

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x,y) cuya suma de distancias a los puntos fijos A(4,3) B(-4,3) es igual a 12.

2.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,-1) .

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(5,4) y es perpendicular a la recta $x - y + 1 = 0$. Graficarlas.

4.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(-2,3) y sea paralela a la recta $5x - y + 8 = 0$. Graficarlas.

5.- Expresar $3x - 4y + 3 = 0$ en forma normal.

6.- Expresar la ecuación $5x - 2y + 3 = 0$ a la forma:

a) Simétrica.

b) Despejada o simplificada.

7.- Hallar la distancia del punto A(3,5) a la recta $3x - 2y + 7 = 0$. Hacer un dibujo.

8.- En el triángulo cuyos vértices son A(3,-4) B(7,3) C(-1,8) , hallar las ecuaciones de las alturas y el ortocentro. Dibujarlas.

9.- Un auto hace un recorrido total de 620 Km con 2 velocidades promedio, una de 80 Km/h y otra de 100 Km/h; si se hubieran incrementado ambas velocidades en 10 Km/h, la distancia recorrida sería 690 Km. Encuentre el tiempo empleado en cada una de las velocidades indicadas.

UNIDAD VII

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

INTRODUCCIÓN:

Al parecer el primero en estudiar las cónicas desde el punto de vista geométrico fue un discípulo de Platón, llamado Menaechmus de Grecia (350 A. C.).

Sin embargo la gran contribución al estudio de las cónicas desde el punto de vista geométrico se atribuye Apolonio de Pergamo (206-200 A. C.) quien usa el trabajo de sus predecesores y realiza un estudio completo de las cónicas. A él se deben los nombres de elipse, parábola e hipérbola y haber descubierto que todas las cónicas se pueden obtener como intersección de un cono circular recto y un plano.

Posteriormente Pappus de Alejandría (284 D. C.) contribuye al estudio de las cónicas describiéndolas usando la excentricidad.

A Descartes se debe el estudio de las cónicas desde el punto de vista analítico, descubriendo que la ecuación general de segundo grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación de una cónica, donde el tipo depende de los coeficientes de dicha ecuación.

En esta unidad mostraremos los tres puntos de vista para describir las cónicas, así como traslación y rotación de ejes coordenados para investigar que cónica representa alguna ecuación de segundo grado en dos variables.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de una ecuación de segundo grado en dos variables determine la cónica que representa.

Que aplique la definición de lugar geométrico para determinar la ecuación correspondiente, que traslade ejes coordenados para transformar una ecuación dada.

CONTENIDOS BÁSICOS: Criterios para identificar a la cónica que representa una ecuación de segundo grado, Traslación de ejes .

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Las cónicas, Ecuación general de segundo grado, excentricidad, Rotación de ejes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Comprenderán que al seccionar un cono con un plano en diferentes posiciones se obtienen las cónicas: elipse parábola e hipérbola.
- Observarán que la ecuación general de segundo grado en dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una cónica.
- Comprenderán el concepto general de excentricidad y que las cónicas pueden definirse en términos de la excentricidad y una recta llamada directriz.
- Establecerán los criterios para determinar que cónica representa una ecuación dada.
- Comprobarán que al trasladar los ejes coordenados se puede simplificar la ecuación general de segundo grado en dos variables de tal forma que no aparecen los términos lineales.
- Comprobarán que al rotar los ejes se puede eliminar el término xy de la ecuación general de segundo grado en dos variables.

BIBLIOGRAFÍA:

1.- Filloy, Eugenio, et al. Geometría Analitica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

2.- Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3.- Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

4.- López, Antonio, et al., Relaciones y Geometría Analitica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

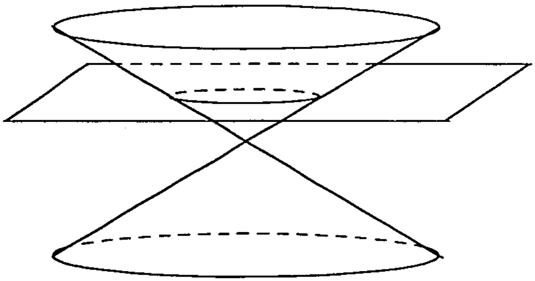
5.- Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.

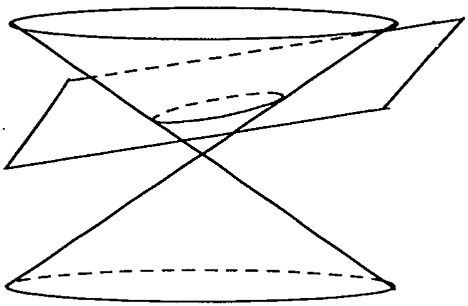
6.- Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

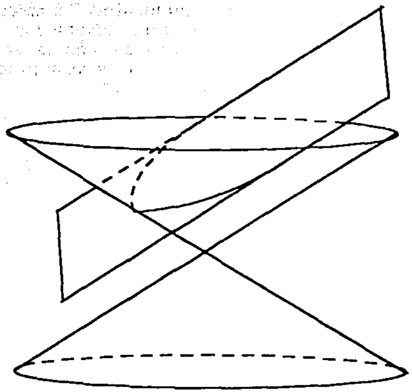
En esta unidad se observa que las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) pueden verse desde tres puntos de vista equivalentes: Como la intersección de un cono y un plano, como lugar geométrico y desde el punto de vista de la excentricidad. También se observa que la gráfica de una ecuación general de segundo grado es una cónica y que hay un número que llamamos discriminante que nos indica que tipo de cónica es. También se estudian las transformaciones de traslación y rotación que sirven para expresar en la forma más simple posible la ecuación general de segundo grado.

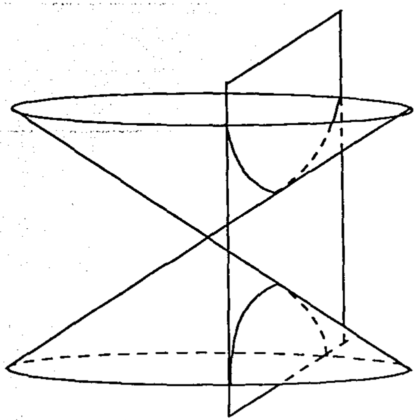
Problema 1.

Las siguientes figuras representan conos circulares rectos intersecados por un plano. Dibujar en los espacios correspondientes la curva que forma la intersección del cono y el plano.



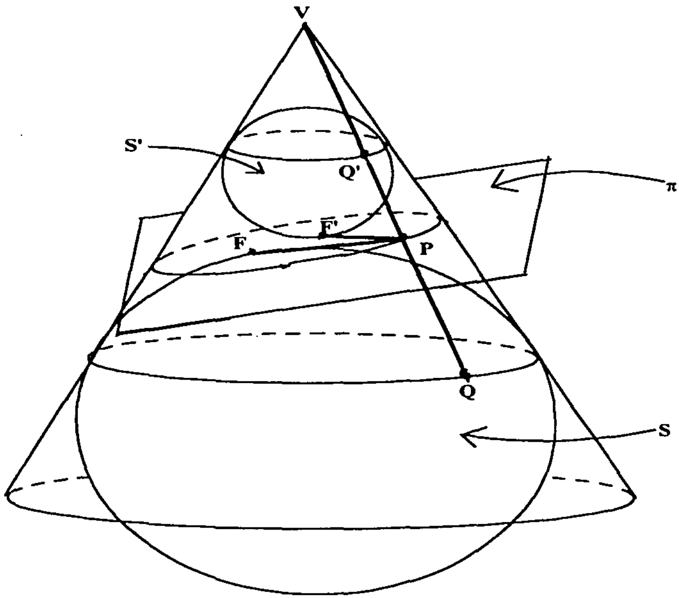






Problema 2.

La siguiente figura muestra a la elipse como la intersección de un cono circular recto y de un plano, así como dos esferas tangentes al cono y al plano. Tales esferas se llaman esferas de Dandelin. Llenar los espacios vacíos:



P es un punto de la elipse que se forma al intersecar el cono y el plano π.

El plano π es tangente a la esfera S en el punto F y a la esfera S' en F'.

Q es un punto en la circunferencia de tangencia de la esfera S con el cono.

Q' es un punto en la circunferencia de tangencia de la esfera S' con el cono.

PQ' = PF' ¿ Por qué?

PQ = PF ¿ Por qué?

De las igualdades anteriores tenemos:

PF + PF' = PQ + PQ'

En la figura se observa que:

PQ + PQ' = VQ – VQ'

Explicar porqué VQ – VQ' es constante:

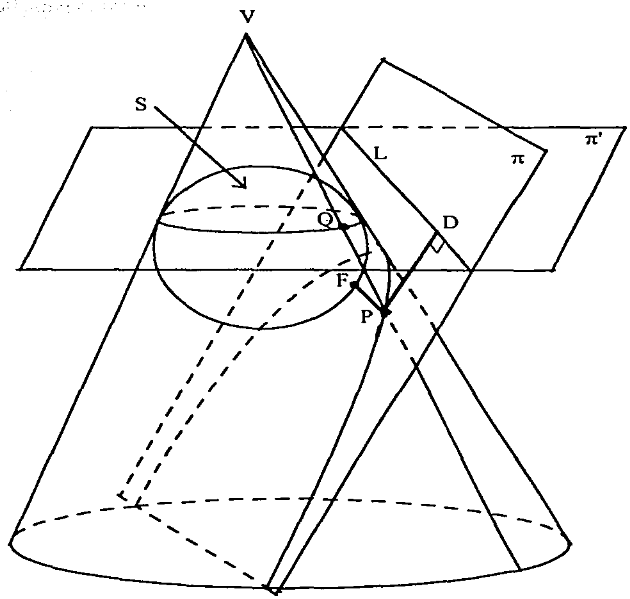
De todo lo anterior se concluye que:

PF + PF' = VQ – VQ' = constante

Entonces la elipse se puede definir de la siguiente manera:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante.

La siguiente figura muestra la intersección de un cono con un plano paralelo a una directriz de dicho cono, en este caso hay una sola esfera de Dandelin.



La parábola se obtiene de la intersección del plano π con el cono

P es un punto en la parábola.

El plano π' es el que contiene a la circunferencia de tangencia de la esfera S y el cono.

La intersección de los planos π y π' es la línea recta L.

F es el punto de tangencia del plano π con la esfera S.

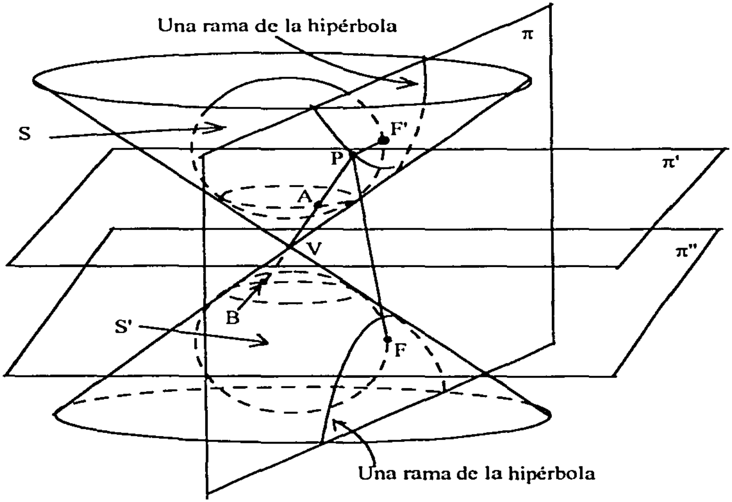
PD es la distancia de P a la línea L.

Se puede demostrar que PD = PF lo cual significa que P equidista de F y la recta L.

Entonces se puede definir la parábola de la siguiente manera:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

La siguiente figura muestra la intersección de un cono con un plano paralelo al eje de dicho cono y las dos esferas de Dandelin.



La hipérbola es la intersección del cono y el plano π.

El plano π' contiene a la circunferencia de puntos de tangencia de la esfera S y el cono.

El plano π'' contiene a la circunferencia de puntos de tangencia de la esfera S' y el cono.

P es un punto en la hipérbola.

A es un punto en la circunferencia de puntos de tangencia de la esfera S con el cono.

B es un punto en la circunferencia de puntos de tangencia de la esfera S' con el cono.

F es el punto de tangencia del plano π con la esfera S.

F' es el punto de tangencia del plano π con la esfera S'.

PF = PB ¿ Por qué?

PA = PF' ¿ Por qué?

De las igualdades anteriores se obtiene lo siguiente:

PF – PF' = PB – PA = AB.

Si variamos el punto P la diferencia antes mencionada siempre es AB, entonces podemos definir la hipérbola de la siguiente manera:

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

Problema 3.

Graficar la ecuación $x^2+2y-20=0$.

Intersecciones con los ejes coordenados:

Si x = 0 , y = _____ ; entonces la intersección con el eje y es: A(_____,_____)

Si y = 0 , x = _____ ; las intersecciones con el eje x son: B(_____,_____) y C(_____,_____)

Simetrías:

Si sustituimos x por –x en la ecuación y las comparamos, observaremos que son iguales por lo tanto la curva será simétrica respecto al eje y; con un procedimiento similar tendremos que no es simétrica respecto al eje x ni al origen.

Extensión:

Despejando x en la ecuación obtenemos: $x=\pm\sqrt{20-2y}$, al resolver la desigualdad $20-2y\geq 0$ tendremos que $y\leq 10$.

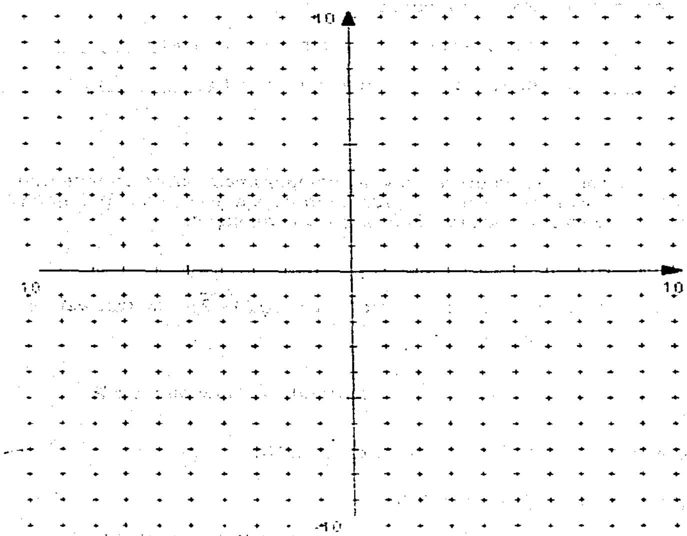
Despejando y obtenemos: $y=\dfrac{20-x^2}{2}$, de donde se tiene que $x\in\mathbb{R}$.

Entonces la extensión es: $E_x=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\leq 10\}$

No hay asíntotas horizontales y verticales.

Llenar la siguiente tabla y señalar los puntos obtenidos para graficar.

x	y	(x,y)
-6		
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0	10	(0,10)
1		
2		
3		
4		
5		
6		



Problema 4.

Graficar la ecuación $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0$

Si x = 0, $y = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$ por lo tanto las intersecciones con el eje y son:

A(____,____) y B(____,____)

Si y = 0, $x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$, entonces las intersecciones con el eje x son:

C(____,____) y D(____,____)

Simetrías:

No hay simetría respecto al eje x ni al eje y, pero si respecto al origen ya que:

$$3(-x)^2 - 2(-x)(-y) + 3(-y)^2 - 32 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32$$

Extensión:

Despejamos y:

$$3y^2 - 2xy = -3x^2 + 32$$
$$3\left(y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{x^2}{9}\right) = -3x^2 + 32 + \frac{x^2}{3}$$
$$3\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3}x^2 + 32$$
$$\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{3}$$
$$y - \frac{x}{3} = \pm\sqrt{-\frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{3}}$$
$$y = \frac{x}{3} \pm \sqrt{-\frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{3}}$$

Resolviendo la desigualdad $-\frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{3} \geq 0$:

$$-\frac{8}{9}x^2 \geq -\frac{32}{3} \quad ; \quad x^2 \leq \frac{-\frac{32}{3}}{-\frac{8}{9}} \quad ; \quad x^2 \leq \frac{32\cdot 9}{3\cdot 8}$$

$$x^2 \leq 12 \quad \therefore \quad x \in \left[-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right]$$

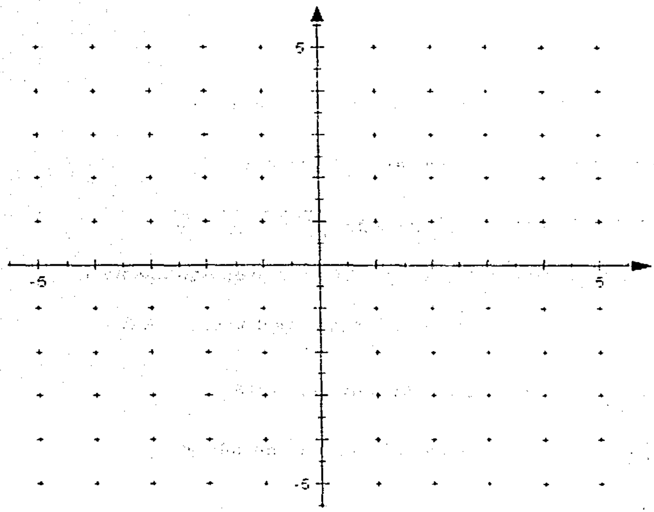
Despejar x y resolver la desigualdad correspondiente:

Para obtener: $y \in \left[-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right]$

Por lo anterior la extensión es: $E_x = \left\{(x, y) \mid x, y \in \left[-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right]\right\}$

Llenar la tabla siguiente para graficar:

x	y	(x,y)
$-\sqrt{12}$		
-3		
-2		
-1		
0	$\pm\sqrt{\frac{32}{3}}$	$\left(0, -\sqrt{\frac{32}{3}}\right)$, $\left(0, \sqrt{\frac{32}{3}}\right)$
1		
2		
3		
$\sqrt{12}$		



Problema 5.

Graficar la siguiente ecuación: $9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 124 = 0$

Intersecciones con los ejes:

Si x = 0 , obtenemos la ecuación

$-16y^2 - 32y - 124 = 0$, resolviendola obtenemos $y = \dfrac{-8 \pm \sqrt{-432}}{8}$

Como los valores obtenidos para y no son números reales, no hay intersección con el eje y.

Si y = 0, $x = \dfrac{-36 \pm \sqrt{5760}}{18} \approx \dfrac{-36 \pm 57.8946}{18}$ $\quad \therefore \quad x_1 \approx -6.2163 \quad$ y $\quad x_2 \approx 2.2163$

Entonces las intersecciones con el eje x son: A(-6.2163 , 0) y B(2.2163 , 0)

Extensión:

Para hallar la extensión de la curva despejamos cada variable de la siguiente forma:

$9x^2+36x=16y^2+32y+124$ dividimos entre 9

$x^2+4x=\frac{16}{9}y^2+\frac{32}{9}y+\frac{124}{9}$ sumamos 4 en ambos miembros

$x^2+4x+4=\frac{16}{9}y^2+\frac{32}{9}y+\frac{160}{9}$ factorizando y despejando x

$(x+2)^2=\frac{16}{9}y^2+\frac{32}{9}y+\frac{160}{9}$ $\quad\therefore\quad x=-2\pm\sqrt{\frac{16}{9}y^2+\frac{32}{9}y+\frac{160}{9}}$

Resolviendo la desigualdad $\frac{16}{9}y^2+\frac{32}{9}y+\frac{160}{9}\geq 0$ que es equivalente a:

$y^2+2y+10\geq 0$ cuya solución es : $y\in\mathbb{R}$

$-16y^2-32y=-9x^2-36x+124$ dividimos entre -16

$y^2+2y=\frac{9}{16}x^2+\frac{36}{16}x-\frac{124}{16}$ sumamos 1 en ambos miembros

$y^2+2y+1=\frac{9}{16}x^2+\frac{36}{16}x-\frac{108}{16}$ factorizamos y despejamos y

$(y+1)^2=\frac{9}{16}x^2+\frac{36}{16}x-\frac{108}{16}$ $\quad\therefore\quad y=-1\pm\sqrt{\frac{9}{16}x^2+\frac{36}{16}x-\frac{108}{16}}$

Resolvemos la siguiente desigualdad: $\frac{9}{16}x^2+\frac{36}{16}x-\frac{108}{16}\geq 16$ que es equivalente a:

$x^2+4x-12\geq 0$ que tiene como solución: $x\in(-\infty,-6]\cup[2,\infty)$

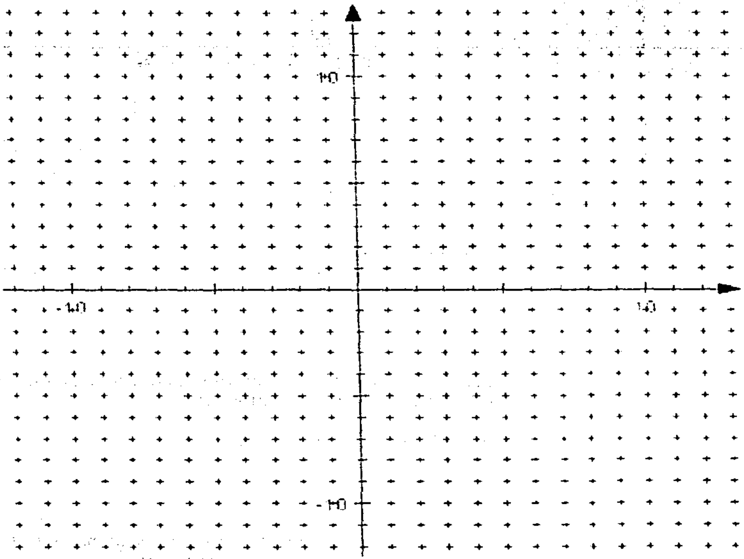
Lo que nos indica que la extensión de la curva es:

$$E_x=\{(x,y)\mid x\in(-\infty,-6]\cup[2,\infty),y\in\mathbb{R}\}$$

No tiene asíntotas horizontales y verticales.

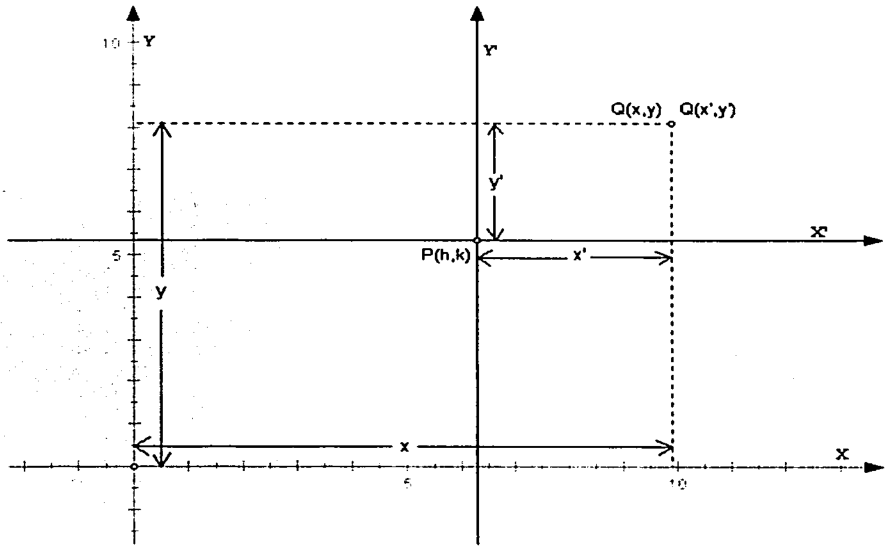
Llenar la siguiente tabla, para después señalar en el sistema de coordenadas correspondiente los puntos obtenidos y poder graficar la ecuación.

x	y	(x,y)
-10		
-9		
-8		
-7		
-6.2163	0	(-6.2163,0)
-6		
2		
2.2163	0	(2.2163,0)
3		
4		
5		
6		



Problema 6.

Consideremos el sistema de coordenadas xy, un punto P(h,k), un sistema de coordenadas x'y' con el origen en el punto P(h,k) y los ejes paralelos a los del sistema original. Observar la siguiente figura y hallar una relación entre las coordenadas de un punto Q(x,y) respecto del sistema original y de ese mismo punto Q(x',y') respecto del otro sistema de coordenadas x'y'.



La figura anterior nos muestra que la relación que hay entre las coordenadas del punto Q respecto de los dos sistemas de coordenadas es la siguiente:

$$x = x' + h \quad \therefore \quad x' = x - h$$

$$y = y' + k \quad \therefore \quad y' = y - k$$

Cuando en una ecuación de segundo grado en dos variables aparecen los términos de primer grado se puede hacer una traslación para eliminar dichos términos.

Encontrar un sistema de coordenadas en el que no aparezcan los términos de primer grado en la ecuación: $9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 124 = 0$

Si x'y' es un sistema de coordenadas en el cual no aparecen los términos de primer grado, entonces $x = x' + h$, $y = y' + k$ para algunos h, k adecuados que se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 124 = 0 \text{ se transforma en:}$$

$$9(x' + h)^2 - 16(y' + k)^2 + 36(x' + h) - 32(y' + k) - 124 = 0$$

Desarrollar la expresión anterior y factorizar:

$$9(x'^2 + 2x'h + h^2) - 16(y'^2 + 2y'k + k^2) + 36x' + 36h - 32y' - 32k - 124 = 0$$

$$9x'^2 - 16y'^2 + (18h + 36)x' + (-32k - 32)y' + (9h^2 - 16k^2 + 36h - 32k - 124) = 0$$

Como se quiere que no aparezcan los términos lineales, entonces:

$$18h + 36 = 0 \quad \therefore \quad h = -2$$

$$-32k - 32 = 0 \quad \therefore \quad k = -1$$

Sustituyendo los valores de h y k en la última expresión obtenida tendremos la ecuación:

$$9x'^2 - 16y'^2 - 144 = 0$$

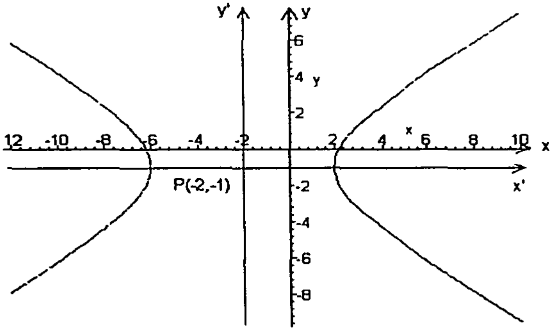
Lo anterior significa que en el sistema de coordenadas xy la ecuación de la curva es:

$$9x^2 - 16y^2 + 36x - 32y - 124 = 0$$

y si consideramos el sistema de coordenadas x'y' con origen en el punto P(-2,-1) y ejes paralelos a los ejes xy la ecuación anterior se transforma en:

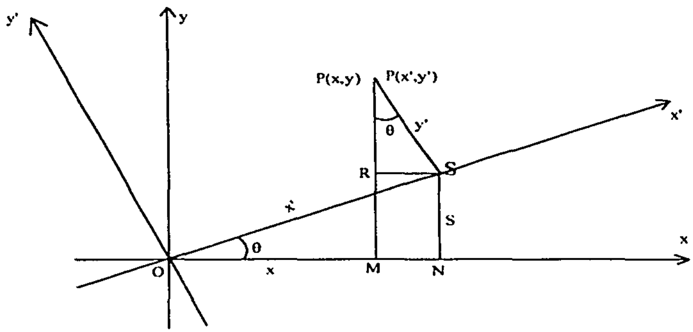
$$9x'^2 - 16y'^2 - 144 = 0$$

Observar la figura siguiente donde se aprecia que todo lo hecho anteriormente equivale a trasladar el sistema xy de tal manera que el origen coincida con el punto P(-2,-1).



Problema 7.

La siguiente figura muestra un sistema de coordenadas xy y otro que se obtiene del primero conservando el origen en su lugar, pero rotando los ejes un ángulo θ, veremos que relación hay entre las coordenadas de un punto P(x,y) respecto al primer sistema de coordenadas y las coordenadas de ese mismo punto P(x',y') respecto al otro.



El ángulo NOS es igual al ángulo RPS por tener sus lados mutuamente perpendiculares.

En el triángulo OSN:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{ON}}{x'} \quad \therefore \quad \mathrm{ON} = x'\cos\theta \quad ; \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{SN}}{x'} \quad \therefore \quad \mathrm{SN} = x'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

En el triángulo RSP:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{RP}}{y'} \quad \therefore \quad \mathrm{RP} = y'\cos\theta \quad ; \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{RS}}{y'} \quad \therefore \quad \mathrm{RS} = y'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Usar los datos anteriores para deducir lo siguiente:

x = OM =
y = MP =
$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta$
$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta$

Cuando en una ecuación general de segundo grado en dos variables aparece el término Bxy que llamaremos término cruzado, necesitamos una rotación de los ejes coordenados para que dicho término desaparezca.

Hacer la transformación adecuada de coordenadas para que en la ecuación

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

desaparezca el término cruzado.

Si x'y' es el nuevo sistema de coordenadas, entonces la relación que hay entre las coordenadas en los dos sistemas es la siguiente:

$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta$$

Al sustituir en la ecuación y simplificar se obtiene:

$$(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta)^2 + (x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta)(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta) + (x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 = 1$$

$$\left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \text{sen}\theta\cos\theta\right)x'^2 + \left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right)x'y'$$
$$+\left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \text{sen}\theta\cos\theta\right)y'^2 = 1$$

Usando las identidades trigonométricas siguientes:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{y} \quad \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

La expresión se transforma en: $(1 + \text{sen}\theta\cos\theta)x'^2 + (\cos 2\theta)x'y' + (1 - \text{sen}\theta\cos\theta)y'^2 = 1$

Como queremos que el término cruzado no aparezca, entonces:

$$\cos 2\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 45°$$

Calcular los coeficientes de los términos cuadráticos y escribir la nueva ecuación:

Coeficiente de x'^2: ____________

Coeficiente de y'^2: ____________

Ecuación: ____________

Con un procedimiento muy similar al anterior podemos comprobar que si tenemos la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y rotamos los ejes un ángulo θ, entonces la ecuación se transforma en:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Donde la relación que hay entre los coeficientes es:

$$A' = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$B' = B\cos 2\theta - (A - C)\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$C' = A\,\mathrm{sen}^2\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

$$D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$E' = E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$F' = F$$

El término cruzado será cero si:

$$B\cos 2\theta - (A - C)\,\mathrm{sen}\,2\theta = 0 \quad \text{o sea si } \tan 2\theta = \frac{B}{A - C} \quad \text{si } A \neq C$$

Si $A = C$ $\quad \theta = 45°$

Problema 8.

Si rotamos un ángulo θ para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ los coeficientes de los términos de segundo grado están relacionados de la siguiente manera:

$$A' = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta$$

$$B' = B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen}2\theta$$

$$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

Al calcular $B'^2 - 4A'C'$ se comprueba que es igual a $B^2 - 4AC$:

Con lo anterior se prueba que la expresión $\Delta = B^2 - 4AC$ llamada **discriminante** permanece invariante si se realiza una rotación de ejes para transformar una ecuación dada.

Al realizar una rotación de ejes es con el fin de que ya no aparezca el término cruzado, por lo tanto B' = 0 y entonces tendremos la siguiente igualdad:

$$-4A'C' = B^2 - 4AC$$

Cuando en la ecuación general de segundo grado no aparece el término cruzado, podemos usar los coeficientes de x^2 y y^2 para determinar el tipo de cónica; si dichos coeficientes tienen **el mismo signo, se trata de una elipse**. Si tienen **signos diferentes es una hipérbola** y finalmente, **si alguno de los dos es cero es una parábola**. De lo anterior tenemos el siguiente criterio para determinar la cónica :

Si $B^2 - 4AC < 0$ se trata de una elipse

Si $B^2 - 4AC > 0$ se trata de una hipérbola

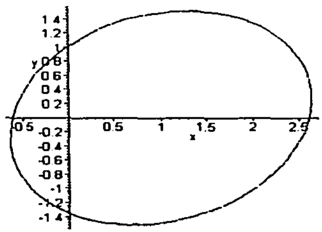
Si $B^2 - 4AC = 0$ se trata de una parábola

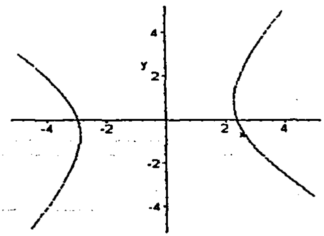
Calcular el discriminante en las siguientes ecuaciones y escribir de que cónica se trata:

a) $30x^2 - 12xy + 35y^2 - 60x + 12y - 48 = 0$

b) $14x^2 + 7xy - 12y^2 + 8x + 3y - 100 = 0$

Las siguientes gráficas corresponden a las ecuaciones anteriores, coloca el inciso correspondiente en cada gráfica:





Problema 9.

Realizar una rotación y una traslación para transformar la ecuación:

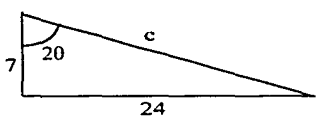
$$62x^2 + 168xy + 13y^2 + 340x + 380y + 700 = 0$$

para que desaparezcan el término cruzado y los términos lineales.

Sustituye los valores de A, B y C en la fórmula siguiente: $\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}$ para obtener el valor de $\tan 2\theta$:

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{24}{7}}$$

Usando el triángulo rectángulo siguiente, encontrar el valor de cos2θ:



$$c^2 = 7^2 + 24^2 \qquad \therefore \qquad c = 25$$

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}$$

Considerando las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

Encontrar lo siguiente:

$\operatorname{sen}\theta =$ $\boxed{}$

$\cos\theta =$ $\boxed{}$

Sustituir en las expresiones:

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Para obtener:

x =

y =

Sustituir en la ecuación $62x^2 + 168xy + 13y^2 + 340x + 380y + 700 = 0$ y simplificar para obtener la expresión mostrada:

$$5x'^2 - 2y'^2 + 20x' + 4y' + 28 = 0$$

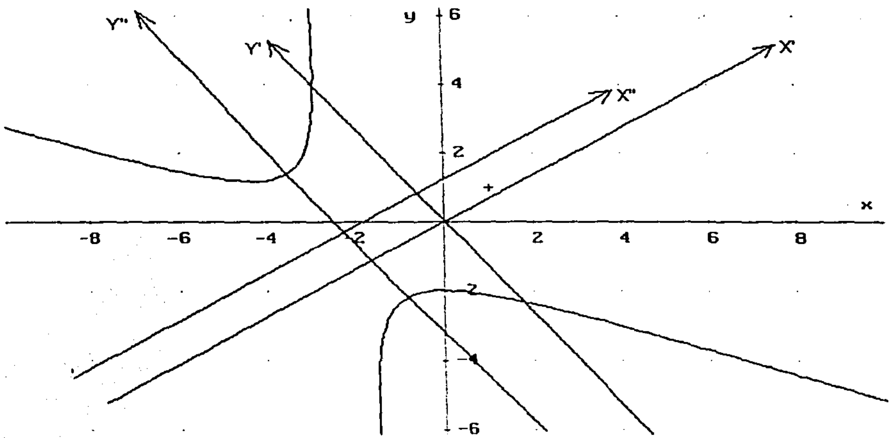
Completamos los trinomios cuadrados perfectos para determinar la traslación adecuada para que los términos lineales no aparezcan:

$$5(x'+2)^2 - 2(y'-1)^2 + 10 = 0$$

Si hacemos x'' = x' + 2 y y'' = y' - 1 tendremos que en el sistema x''y'' la ecuación se transforma en:

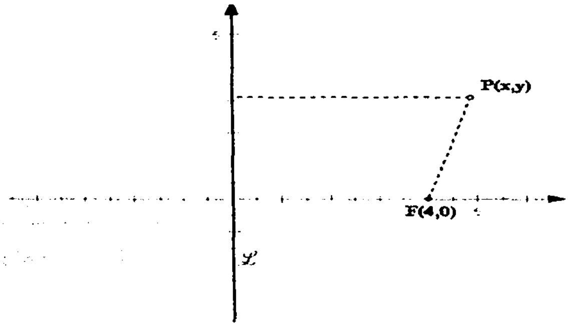
$$2y''^2 - 5x''^2 = 10$$

El dibujo siguiente muestra gráficamente lo hecho anteriormente:



Problema 10.

Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto que se mueve de manera que la razón de su distancia al punto F(4,0) entre la distancia a la recta $\mathscr{L}$ determinada por el eje y es una constante positiva e.



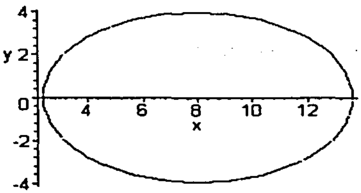
$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

Desarrollar lo anterior para obtener la ecuación pedida:

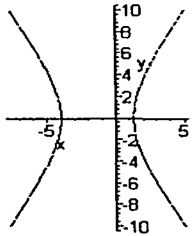
$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = e \cdot |x|$$

$$\left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 - 8x + 16 = 0$$

Las gráficas siguientes se obtienen para diferentes valores de e:

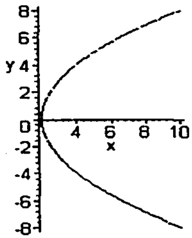


$0 < e < 1$



$e > 1$

$e = 1$



¿ Qué se puede concluir de lo anterior ?

Las cónicas se pueden definir como el lugar geométrico de los puntos para los cuales la distancia a un punto fijo y la distancia a una recta fija forma una razón constante.

La recta fija se llama directriz, el punto fijo es el foco y e es la excentricidad de la cónica.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Indicar que cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 + 4y^2 - 3x + 7y - 19 = 0$

b) $3x^2 - 5y^2 + 7x + 19y + 2 = 0$

c) $2x^2 + 4y^2 - 5x + 8y - 3 = 0$

d) $4x^2 - 5x + 6y - 8 = 0$

2.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x,y) tales que:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = \frac{4}{3}$$

Donde L es la recta y = 0 y las coordenadas de F son F(0,4).

3.- Indicar qué cónica representan las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 + 3xy - 6y^2 - 12x + 7y - 8 = 0$

b) $6x^2 - 2xy + 4y^2 + x - 3y + 9 = 0$

c) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

4.- Trasladar los ejes adecuadamente para que no aparezcan los términos x , y en la ecuación $x^2+y^2-6x+7y-11=0$.

5.- Rotar adecuadamente los ejes para que no aparezca el término xy en la ecuación:

$$4x^2-8xy-2y^2+20x-4y+15=0$$

6.- Dada la ecuación $9x^2-24xy+16y^2+220x+40y+300=0$, indicar de que cónica se trata, rotar los ejes para que no aparezca el término xy, trasladar los ejes para que no aparezcan los términos lineales y hacer un bosquejo de la gráfica.

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Graficar la ecuación $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 4 = 0$.

2.- Hallar la ecuación de la cónica con e = 2 , directriz eje Y y foco F(6,0).

3.- Usar el discriminante $B^2 - 4AC$ para indicar qué cónica representa cada ecuación:

a) $5x^2 + 3xy - 8y^2 + 9x - 17y + 90 = 0$.

b) $4x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x - 17y - 190 = 0$.

c) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 19y + 20 = 0$

4.- En la ecuación $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$ trasladar los ejes coordenados para que no aparezcan los términos lineales. Escribir la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas. Hacer un dibujo.

5.- Rotar los ejes coordenados para que en la ecuación xy = 1 no aparezca el término xy. Escribir la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas.

UNIDAD VIII

CIRCUNFERENCIA

INTRODUCCIÓN:

La circunferencia es una de las figuras geométricas mas usadas en la vida cotidiana ya que la encontramos en todos lados, como por ejemplo en las ruedas de los vehículos, en algunos envases que tienen forma cilíndrica, en algunos recipientes que tienen forma circular, etc.

En astronomía se usó cuando se pensaba que el movimiento de los planetas describía una circunferencia, cosa que fue desechada cuando Kepler mostró que el movimiento describe una elipse.

Otro fenómeno donde aparece, es cuando queremos determinar el campo de acción de un ave que vuela alrededor de su nido en busca de alimento, dicho campo de acción es un círculo donde el radio se puede calcular tomando en cuenta la velocidad con la que vuela el ave y el tiempo del que dispone para volar.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de las condiciones geométricas que cumplen los puntos de un lugar geométrico, sea capaz de interpretarlas analíticamente para obtener la ecuación que lo define, en este caso una circunferencia.

Que aplique los conceptos, incluidos en esta unidad, en la resolución de problemas de su entorno.

CONTENIDOS BÁSICOS: La circunferencia como lugar geométrico, formas ordinaria y general de la circunferencia y sus elementos.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Circunferencia determinada por tres condiciones, sector circular, circunferencia de los nueve puntos. Familias de circunferencias: concéntricas, excéntricas, ortogonales, tangentes, inscritas, circunscritas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Conocerán la definición de circunferencia como lugar geométrico.
- Obtendrán las ecuaciones ordinaria y general de una circunferencia con centro en el origen.
- Obtendrán las ecuaciones ordinaria y general de una circunferencia con centro C(h,k) y radio r.
- A partir de la ecuación de la circunferencia hallarán el centro, el radio y la graficarán.
- Hallarán la ecuación de la circunferencia determinada por tres condiciones.
- Calcularán el área de un sector circular.
- Señalarán las características de los principales elementos de la circunferencia: Centro, radio, diámetro, tangente, secante, normal, ángulo central, ángulo inscrito.
- En un triángulo hallarán la ecuación de la circunferencia de los nueve puntos: Que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Filloy, Eugenio et al. Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.
2. Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.
3. Kindle, Joseph, Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill serie Schawm, 1994.
4. Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.
5. López, Antonio et al. Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.
6. Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.
7. Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

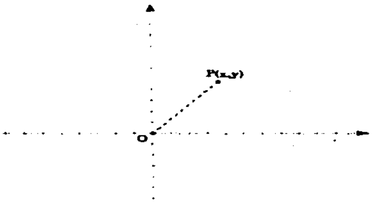
Aquí se estudia la circunferencia como lugar geométrico, su ecuación y elementos.

Problema 1.

La circunferencia se define de la siguiente manera:

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo llamado centro, es una constante llamada radio.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los P(x,y) cuya distancia al origen de coordenadas es 3.



$d(P,O)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=3$

Desarrollar lo anterior para obtener el resultado que está al final.

$x^2+y^2=9$

Con un procedimiento similar, se encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r:

$x^2+y^2=r^2$ forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.

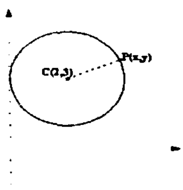
$x^2+y^2-r^2=0$ forma general.

Problema 2.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a C(2,3) es 2.

Tal lugar geométrico es una circunferencia con centro en C(2,3) y radio 2.

Usar la figura para determinar la ecuación en forma ordinaria y general.



$d(P,C)=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=2$

F. O.:

F. G.: $x^2+y^2-4x-6y+11=0$

Procediendo como antes se puede mostrar que la ecuación de la circunferencia con centro en C(h,k) y radio r es:

$$\text{FORMA ORDINARIA:} \quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Problema 3.

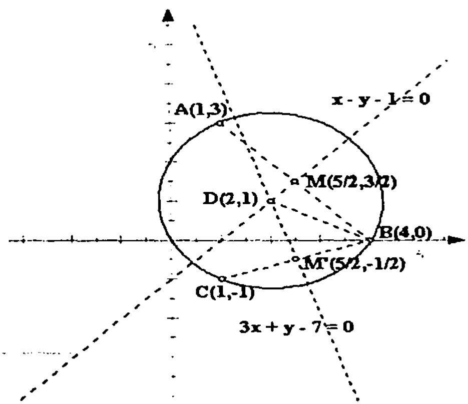
Relacionar las siguientes columnas:

$x^2+y^2-16=0$	*a*) C(4,2) , r = 3
$x^2+y^2-4x+6y+8=0$	*b*) C(0,0) , r = 4
$x^2+y^2-8x-4y+11=0$	*c*) C(2,-3) , r = $\sqrt{5}$

Problema 4.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1,3) B(4,0) C(1,-1).

Si la circunferencia pasa por los puntos A, B y C entonces el centro está en la intersección de las mediatrices de los segmentos AB y BC. Ver la siguiente figura:



Punto medio de AB: **M(5/2,3/2)**

Pendiente de AB:

Pendiente de la recta perpendicular a AB:

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$x - y - 1 = 0$$

Punto medio de BC: **M'(5/2,-1/2)**

Pendiente de BC:

Pendiente de la recta perpendicular a BC:

Ecuación de la mediatriz de BC:

$$3x + y - 7 = 0$$

Intersección de las mediatrices de AB y BC:

Resolver el sistema

$$x - y - 1 = 0$$
$$3x + y - 7 = 0$$

Para obtener el centro D(2,1)

Radio: $r = d(D, B) =$

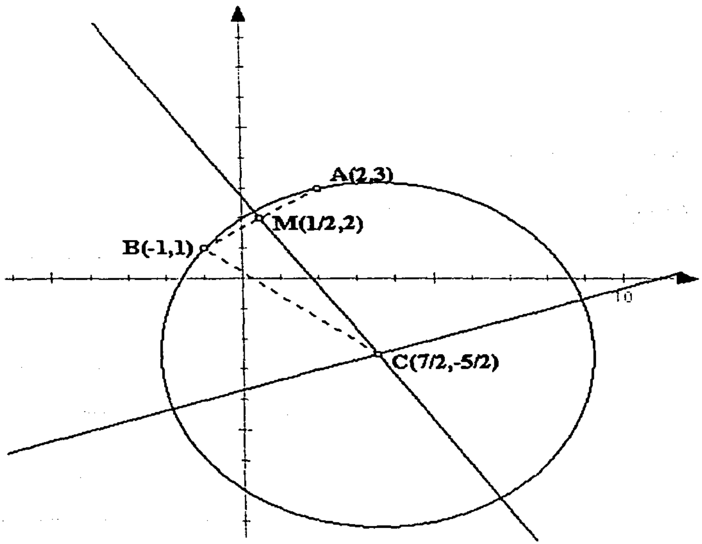
Ecuación en forma ordinaria: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

Ecuación en forma general:

Problema 5.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A(2,3) y B(-1,1) y el centro está situado en la recta $x-3y-11=0$.

El centro de la circunferencia es la intersección de la mediatriz de AB y la recta mencionada. Ver la siguiente figura:



El punto medio de AB es: M(1/2,2)

Pendiente del segmento AB :

Pendiente de la perpendicular al segmento AB :

Ecuación de la mediatriz de AB:

Resolver el sistema formado por la ecuación $x-3y-11=0$ y la de la mediatriz:

Entonces el centro es: C(7/2,-5/2).

$$r=d(C,B)=\sqrt{(\tfrac{7}{2}+1)^2+(-\tfrac{5}{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{130}}{2}$$

Ecuación en forma ordinaria:

Ecuación en forma general:

Problema 6.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,3) B(3,6) y es tangente a la recta $2x+y-2=0$

Si $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ es la ecuación de la circunferencia, como A y B son puntos en ella entonces satisfacen la ecuación:

$(2-h)^2+(3-k)^2=r^2$, entonces $h^2+k^2-4h-6k+13=r^2$

$(3-h)^2+(6-k)^2=r^2$, entonces $h^2+k^2-6h-12k+45=r^2$

Si la circunferencia es tangente a $2x+y-2=0$, entonces la distancia del centro C(h,k) a la recta es r, es decir:

$$\frac{|2h+k-2|}{\sqrt{5}}=r \quad , \quad r^2=\frac{(2h+k-2)^2}{5}$$

$$r^2=\frac{4h^2+k^2+4hk-8h-4k+4}{5}$$

Con lo obtenido anteriormente formamos el sistema de ecuaciones :

$$r^2=h^2+k^2-4h-6k+13 \text{ ---------------- } (1)$$

$$r^2=h^2+k^2-6h-12k+45 \text{ -------------- } (2)$$

$$r^2=\frac{4h^2+k^2+4hk-8h-4k+4}{5} \text{ --------- } (3)$$

Igualar (1) y (2), para obtener la ecuación (4).

Igualar (1) y (3) para obtener la ecuación (5).

$$5(h^2+k^2-4h-6k+13)=4h^2+k^2+4hk-8h-4k+4$$

$$h^2-4hk+4k^2-12h-26k=-61 \text{ ---------} \qquad (5)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$h+3k=16 \text{ ----------------------} \qquad (4)$$

$$h^2+4k^2-4hk-12h-26k=-61 \text{ ----} \qquad (5)$$

Despejar h de la ecuación (4) y sustituir en la ecuación (5) para obtener una ecuación de segundo grado con una sola incógnita k, resolverla para obtener dos valores para k, con los cuales se obtienen dos valores para h.

$$h=16-3k$$

$$(16-3k)^2-4(16-3k)k+4k^2-12(16-3k)-12k=-61$$

$$k_1=5 \quad , \quad k_2=1 \quad \therefore \quad h_1=16-15=1 \quad , \quad h_2=16-3=13$$

Entonces el problema tiene dos soluciones:

Primera: El centro es C(1,5) y el radio $r = d(C, A) = \sqrt{(1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 5$ Forma ordinaria.

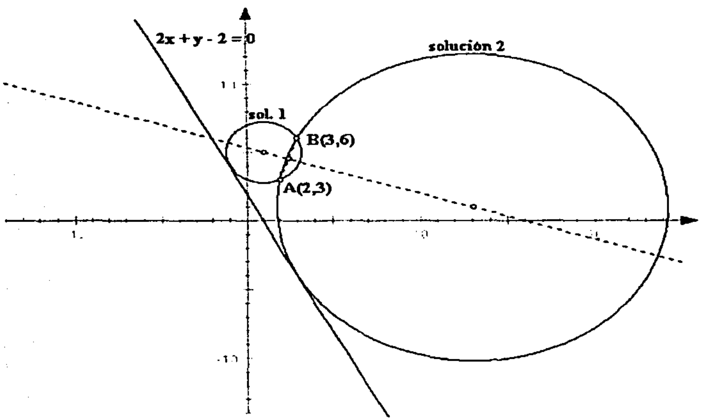
La ecuación en forma general es:

Segunda: Centro: C(,) r =

Ecuación en forma ordinaria:

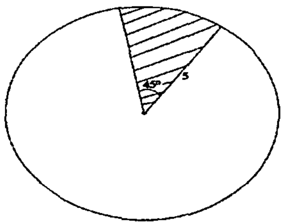
Ecuación en forma general:

Las gráficas de las dos soluciones se dibujan a continuación:



Problema 7.

Calcular el área del sector circular mostrado en la siguiente circunferencia de radio 5.



Área del círculo:

Número de veces que cabe el sector circular señalado en el círculo:

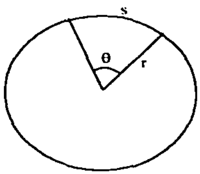
Área del sector circular:

Si tenemos un sector circular de ángulo central θ en radianes en una circunferencia de radio r, entonces el área del sector circular está dado por:

$$A = \frac{\pi r^2}{\frac{2\pi}{\theta}} = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$$

Si s es la longitud del arco que subtiende el ángulo θ en radianes entonces $s = r\theta$, entonces el área del sector circular es:

$$A = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{r \cdot r\theta}{2} = \frac{rs}{2}$$



Problema 8.

Se darán algunas definiciones de objetos relacionados con la circunferencia:

Recta Tangente: Recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, a dicho punto se le llama punto de tangencia.

Recta Secante: Recta que interseca a la circunferencia en dos puntos.

Recta Normal: Recta perpendicular a una Tangente en el punto de tangencia.

Cuerda: Segmento cuyos extremos están en la circunferencia.

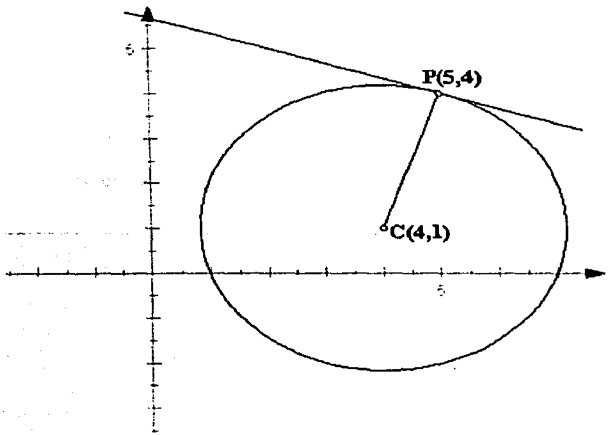
Diámetro: Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Radio: Segmento cuyos extremos son el centro y un punto en la circunferencia.

Ángulo central: Ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.

Ángulo inscrito: Ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados en el interior de la circunferencia.

Dada la circunferencia con ecuación: $x^2+y^2-8x-2y+7=0$, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P(5,4). Ver la siguiente figura.



Completar cuadrados y factorizar para obtener la ecuación en forma ordinaria:

Entonces el centro de la circunferencia es: C(,)

La pendiente de la recta que contiene al radio es:

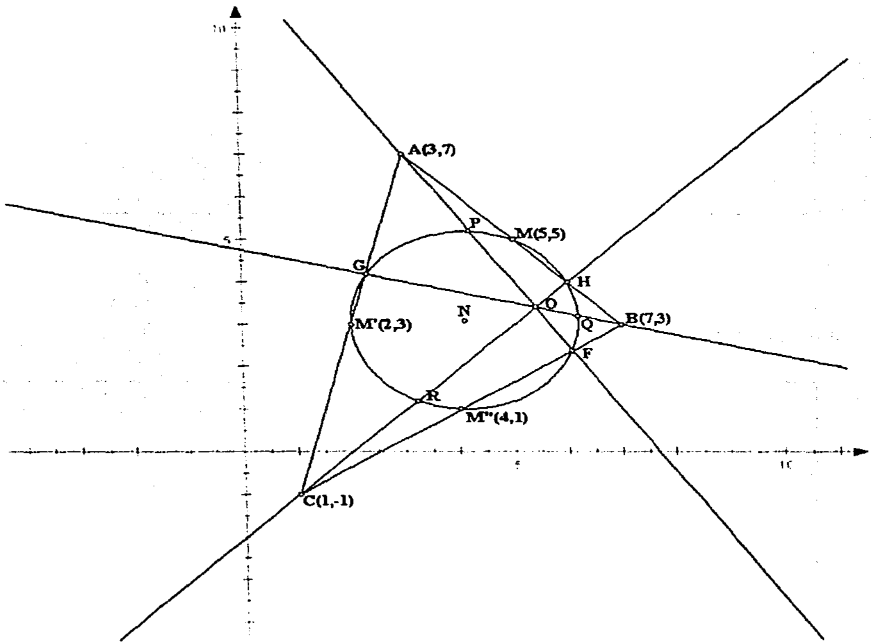
La pendiente de la recta perpendicular es: m' =

Ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P(5,4):

$$y-4=m'(x-5)$$

Problema 9.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo A(3,7) B(1,-1) C(7,3) y comprobar que pasa por los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices. Ver la siguiente figura:



Los puntos medios de los lados del triángulo son:

$$M(5,5) \quad , \quad M'(2,3) \quad , \quad M''(4,1)$$

Primero tenemos que encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos:

La ecuación de la mediatriz del segmento MM' es:

La ecuación de la mediatriz del segmento MM'' es:

El centro de la circunferencia es el punto de intersección de las dos mediatrices anteriores que se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$6x + 4y = 37$$

$$x - y = 1$$

Resolverlo:

Entonces el centro es **N(41/10,31/10)** .

El radio es: $r = d(N, M') = \sqrt{(\frac{41}{10} - 2)^2 + (\frac{31}{10} - 3)^2} = \sqrt{(\frac{21}{10})^2 + (\frac{1}{10})^2} = \sqrt{\frac{442}{100}}$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - \frac{41}{10})^2 + (y - \frac{31}{10})^2 = \frac{442}{100}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 41x - 31y + 110 = 0$$

Ecuación de la altura que pasa por el vértice A:

Pendiente de BC:

Pendiente de la perpendicular a BC:

Ecuación de la altura que pasa por A:

Ecuación de la altura que pasa por el vértice B:

Pendiente de AC:

Pendiente de la perpendicular a AC:

Ecuación de la altura que pasa por B:

Ecuación de la altura que pasa por el vértice C:

Pendiente de AB:

Pendiente de la perpendicular a AB:

Ecuación de la altura que pasa por C:

El ortocentro es la intersección de dos de estas alturas:

$$x+4y-19=0$$
$$x-y-2=0$$

$$x=\frac{27}{5}\quad,\quad y=\frac{17}{5}\quad\therefore\quad O\left(\frac{27}{5},\frac{17}{5}\right)$$

Las coordenadas del punto medio de OA son: P(,)

Las coordenadas del punto medio de OB son: Q(,)

Las coordenadas del punto medio de OC son: R(,)

Comprobación de que estos puntos están en la circunferencia:

El punto P está en la circunferencia:

$$5\left(\frac{21}{5}\right)^2+5\left(\frac{26}{5}\right)^2-41\left(\frac{21}{5}\right)-31\left(\frac{26}{5}\right)+110=$$

$$\frac{441}{5}+\frac{676}{5}-\frac{861}{5}-\frac{806}{5}+110=-110+110=0$$

El punto Q está en la circunferencia:

El punto R está en la circunferencia:

Los pies de las alturas son las intersecciones de los lados con las alturas.

Ecuación de la altura que pasa por el vértice A: $3x+2y-23=0$

Ecuación del lado BC: pendiente: $\frac{2}{3}$, ecuación: $y+1=\frac{2}{3}(x-1)$; $2x-3y-5=0$

El pie de la altura F se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$3x+2y-23=0$$

$$2x-3y-5=0$$

Resolverlo

Entonces las coordenadas del pie de la altura F son: $F\left(\frac{79}{13},\frac{31}{13}\right)$

Ecuación de la altura que pasa por el vértice B: $x - y - 2 = 0$

Ecuación del lado AC: pendiente: -1, ecuación: $y - 7 = -1(x - 3)$; $x + y - 10 = 0$

El pie de la altura F se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x - y - 2 = 0$$

$$x + y - 10 = 0$$

Resolverlo

Entonces las coordenadas del pie de la altura G son: $G(6,4)$

Con un procedimiento similar hallar el pie de la altura H:

Concluir que las coordenadas de H son: $H\left(\frac{39}{17},\frac{71}{17}\right)$

Comprobación de que los pies de las alturas F, G, H están en la circunferencia:

$F\left(\frac{79}{13},\frac{31}{13}\right)$ está en la circunferencia:

$$5\left(\frac{79}{13}\right)^2+5\left(\frac{31}{13}\right)^2-41\left(\frac{79}{13}\right)-31\left(\frac{31}{13}\right)+110=\frac{31205}{169}+\frac{4805}{169}-\frac{3239}{13}-\frac{961}{13}+110=$$

$$\frac{36010}{169}-\frac{4200}{13}+110=\frac{36010}{169}-\frac{54600}{169}+110=-110+110=0$$

$G(6,4)$ está en la circunferencia:

$H\left(\frac{39}{17},\frac{71}{17}\right)$ está en la circunferencia:

A la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo, por los pies de las alturas y por los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo, se llama **la circunferencia de los 9 puntos.**

Problema 10.

La tierra está a una distancia del sol de 155,000,000 Km aproximadamente. La trayectoria de la tierra alrededor del sol es casi circular ¿ Que distancia recorremos en órbita alrededor del sol cada año? Hallar una aproximación de la velocidad de la tierra en su órbita.

Número de horas en un año = $\boxed{}$

Perímetro de la órbita de la tierra = $\boxed{}$

Velocidad aproximada = $\dfrac{\text{PERIMETRO DE LA ORBITA}}{\text{NUMERO DE HORAS EN UN AÑO}} = \boxed{}$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Hallar la ecuación de las circunferencias con los datos dados y graficar:

a) $C(0,0)$, $r=5$ b) $C(0,0)$, $r=\sqrt{3}$ c) $C(0,0)$, $r=\frac{7}{2}$

2.- Hallar la ecuación de las circunferencias con los datos indicados y graficar:

a) $C(4,-2)$, $r=4$ b) $C(-2,\frac{3}{4})$, $r=\sqrt{5}$ c) $C(-\frac{3}{2},4)$, $r=\frac{5}{7}$

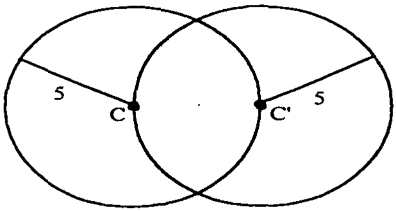
3.- Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias y graficar:

a) $x^2+y^2+2x-6y+3=0$ b) $36x^2+36y^2-36x+180y-119=0$

4.- En la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2-9=0$, hallar el punto C que está en el primer cuadrante y tal que la abscisa es 2. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son A(-3,0), B(0,3), C(2 ,) forman un triángulo rectángulo.

5.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(-5,-6) y tiene su centro en C(-9,7).

6.- Se tienen las circunferencias de radio 5 y de centros C y C' como se muestra en la figura. Hallar el área de la región sombreada.



7.- Hallar la ecuación de la recta tangente y la normal en el punto P(-2,13) de la circunferencia $x^2+y^2+4x-12y-9=0$.

8.- Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y+3=0$ que pasan por el punto, exterior a la circunferencia, A(2,-3). Hallar las coordenadas de los puntos de tangencia Q , Q' y comprobar que $d(P,Q)=d(P,Q')$.Hacer un dibujo.

9.- Dado el triángulo de vértices A(3,7), B(1,-1), C(7,3) , hallar la ecuación de la circunferencia de los nueve puntos. Graficar y comprobar que los puntos están en dicha circunferencia.

10.- Hallar la circunferencia circunscrita al triángulo A(-4,6), B(0,-1), C(2,6).

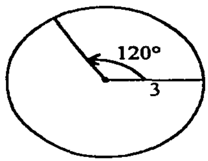
EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Escribir la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 5. Dibujarla.

2.- Escribir la ecuación en forma ordinaria y general de la circunferencia de centro en C(-3,-2) y radio r = 5 . Dibujarla.

3.- Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación en forma general es $x^2+y^2-8x+6y+22=0$. Dibujarla.

4.- Calcular el área del sector circular sombreado:



5.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2-6x-8y-15=0$ en el punto A(9,6).

6.- Hallar la <u>ecuación</u> de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son A(0,0) B(15,0) C(4,22).

7.- Hallar la circunferencia que tiene como diámetro al segmento A(-3,-7)B(5,3). Dibujarla.

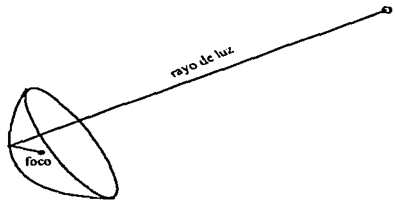
UNIDAD IX

PARÁBOLA

INTRODUCCIÓN:

La parábola tiene muchas aplicaciones que se pueden observar en la vida cotidiana, por ejemplo en la construcción de algunos puentes se emplean arcos parabólicos, los cables que sostienen ciertos puentes suspendidos son aproximadamente una parábola, siempre que la carga sobre el puente sea uniforme.

Una propiedad que tiene la parábola, hace que se pueda aplicar en la construcción de telescopios reflectores cuya superficie reflejante se obtiene de una parábola que gira alrededor de su eje, tal superficie se llama paraboloide de revolución. Si el eje del espejo parabólico se dirige hacia una estrella, los rayos de la estrella, después de reflejarse en el espejo, se concentrarán en un punto que llamaremos foco. Ver la siguiente ilustración.



Este mismo principio a la inversa se aplica en la construcción de reflectores, donde al contener una fuente luminosa en el foco, al reflejarse en la superficie parabólica toma la dirección del eje, obteniéndose así un haz cilíndrico de luz en esa dirección.

Finalmente mencionaremos que cuando lanzamos un proyectil, por ejemplo una piedra, su trayectoria es una parábola si no se consideran factores como la resistencia del aire y giros del proyectil sobre sí mismo.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de las condiciones geométricas que cumplen los puntos de un lugar geométrico, sea capaz de interpretarlas analíticamente para obtener la ecuación que lo define, en este caso una parábola.

Que aplique los conceptos, incluidos en esta unidad, en la resolución de problemas de su entorno.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Filloy, Eugenio et al. Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.
2. Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.
3. Kindle, Joseph, Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill serie Schawm, 1994.
4. Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.
5. López, Antonio et al. Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.
6. Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.
7. Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

En esta unidad se estudia la parábola como lugar geométrico, se encuentra su ecuación en forma ordinaria y general, se hallan sus elementos: foco, directriz, parámetro, distancia focal y ancho focal o lado recto.

Problema 1.

En la unidad VII se mostró que la definición de parábola como intersección de un cono con cierto plano es equivalente a la definición como lugar geométrico:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.

La lista que se da a continuación son los pasos para la construcción de algunos puntos de la parábola con foco dado F y directriz dada L.

La figura que se presenta después contiene el foco F y la directriz L, realizar los pasos indicados para construir los puntos que están en la parábola.

1.- Trazar la recta L' que pasa por F y es perpendicular a L. L' es **el eje de la parábola**.

2.- Si B es la intersección de L y L' , trazar el punto medio de BF al que llamaremos V. **A la longitud del segmento BF se le llama parámetro y V es el vértice de la parábola**.

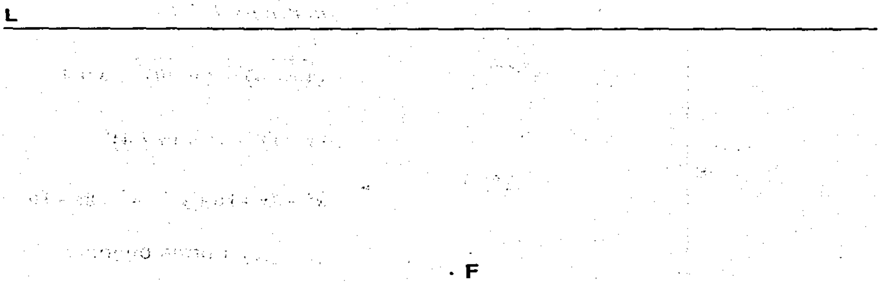
3.- Trazar una recta L" a la derecha de V y paralela a L.

4.- Si M es el punto de intersección de L' y L", con el compás tomamos la distancia BM y apoyándonos en el punto F trazamos dos arcos que cortan L" en los puntos N y N'. Demostrar que los puntos N y N' pertenecen a la parábola de foco F y directriz L.

5.- Trazamos la recta L''' que pasa por F y es paralela a L, con el compás tomamos la distancia BF y apoyándonos en F trazamos dos arcos que cortan a la recta L''' en los puntos E , E'. Al segmento EE' se le llama **lado recto**. Mostrar que si la longitud del parámetro es 2p entonces la longitud del lado recto es 4p.

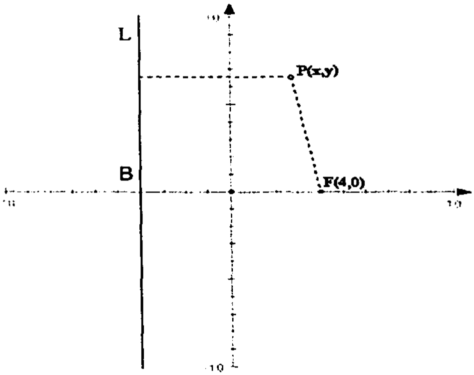
6.- Repetimos los pasos 3 y 4 para obtener mas puntos que pertenezcan a la parábola.

7.- Unimos los puntos obtenidos con un trazo continuo para obtener un dibujo de la parábola de foco F y directriz L.


L
F

Problema 2.

Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es F(4,0) y directriz x = -4 . Trazar la gráfica.



$$d(P,F) = d(P,L)$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = x+4$$

$$(x-4)^2 + y^2 = (x+4)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + 8x + 16$$

$y^2 = 16x$ Forma ordinaria

$y^2 - 16x = 0$ Forma ordinaria

El vértice de la parábola anterior está en el origen ya que es el punto medio del segmento BF.

Llenar la siguiente tabla para graficar la parábola en el dibujo anterior.

x	$y = \pm 4\sqrt{x}$	(x,y)
0		
1	$y = \pm 4$	(1,4) (1,-4)
2		
3		
4		

Hallar la ecuación de la parábola de foco F(-3,0) y directriz x = -3.

Aplicamos la definición de parábola para hallar la ecuación suponiendo que P(x,y) es un punto en la parábola:

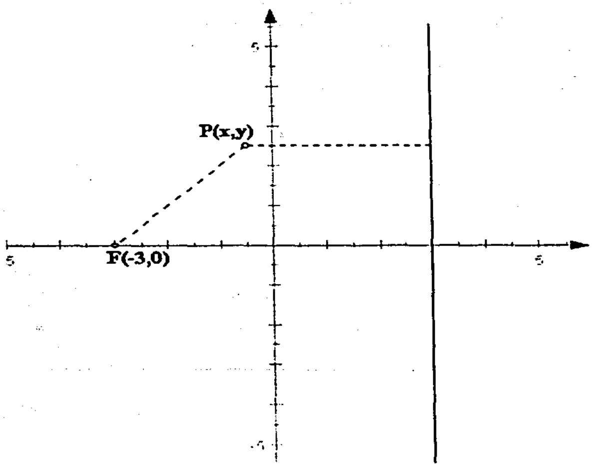
$$d(P,F) = d(P,L)$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = -x+3 \quad , \quad (x+3)^2 + y^2 = (-x+3)^2$$

Desarrollar lo anterior para encontrar la ecuación en forma ordinaria y general.

Llenar la tabla siguiente para graficar en el sistema de coordenadas correspondiente.

x	y	(x,y)
0		
-1		
-2		
-3		
-4		

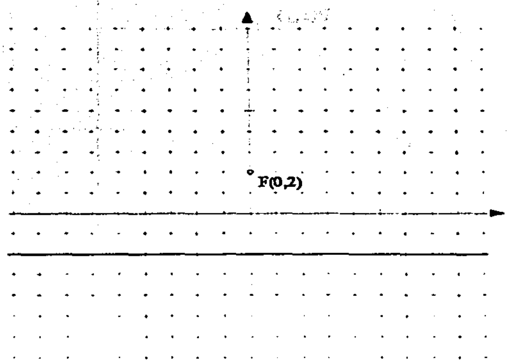


Con un procedimiento similar hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es F(0,2) y directriz $y = -2$.

Ecuación en forma ordinaria y general:

Llenar la tabla siguiente para graficar en el sistema de coordenadas que se dibuja después:

x	y	(x,y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

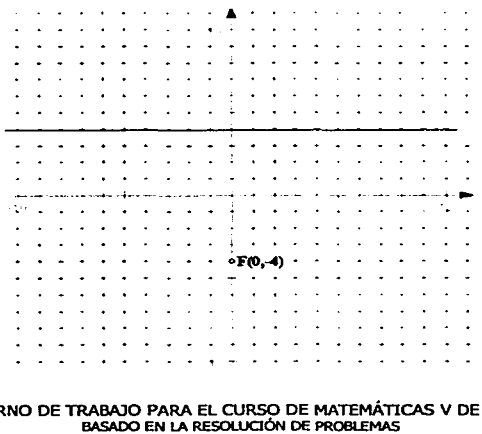


Con un procedimiento similar hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es F(0,-4) y directriz $y = 4$.

Ecuación en forma ordinaria y general:

Llenar la tabla siguiente para graficar en el sistema de coordenadas que se dibuja después:

x	y	(x,y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



Con procedimientos muy parecidos se puede concluir que la ecuación de la parábola con vértice en el origen y parámetro 2p es de dos tipos:

$$y^2 = \pm 4px \qquad \text{y} \qquad x^2 = \pm 4py$$

Donde la primera dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje x si consideramos el signo positivo y la dirige hacia la parte negativa del eje x si consideramos el signo menos.

La segunda dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje y si tomamos el signo mas y la dirige hacia la parte negativa del eje y si tomamos el signo menos.

Problema 3.

Hallar los elementos de la parábola cuya ecuación es $x^2 + 6y = 0$ y graficarla.
Los elementos que se mencionan son: **semiparámetro p, parámetro 2p, vértice, foco, directriz, eje y lado recto.**

La ecuación en forma ordinaria es: $x^2 = -6y$, es decir $x^2 = -4\left(\frac{3}{2}\right)y$

Es una parábola que dirige su concavidad hacia: $\boxed{}$

El semiparámetro p es: $\boxed{}$

El parámetro 2p es: $\boxed{}$

El vértice es: El origen O(0,0)

El foco es: F(0,-p) = F(0,   )

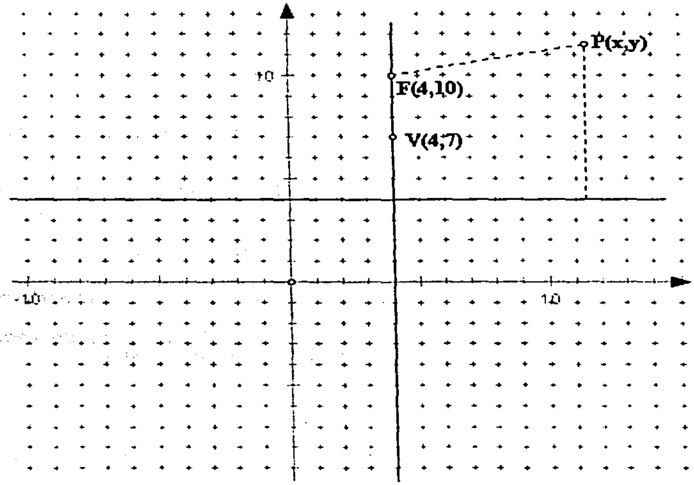
La ecuación de la directriz es: y = p , y = $\boxed{}$

Ecuación del eje: x = 0

Lado recto: l. r. = 4p = $\boxed{}$

Problema 4.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto F(4,10) y de la recta y = 4 y graficarla. Ver la siguiente figura:



La figura anterior nos indica que el parámetro, es decir, la distancia del foco F(4,10) a la directriz y = 4 es 2p = 6, entonces p = 3, con lo cual podemos encontrar que el vértice es: V(4,7).

Si consideramos el sistema de coordenadas X'Y' obtenido del original trasladando el origen al punto V(4,7) , lo que nos piden es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje Y y el el semipárametro es igual a 3, entonces la ecuación es:

$$x'^2 = 12y'$$

Pero $x' = x - 4$ y $y' = y - 7$ entonces la ecuación en el sistema XY es:

$$(x-4)^2 = 12(y-7)$$ forma ordinaria.

La ecuación en forma general es:

Llenar la siguiente tabla para graficar:

x	y	(x,y)
1		
2		
3		
4	7	(4,7)
5		
6		
7		

En la gráfica señalar los elementos de la parábola: **vértice, foco, parámetro, eje, directriz y lado recto.**

Si observamos la forma ordinaria de la ecuación de la parábola anterior y la expresamos así:

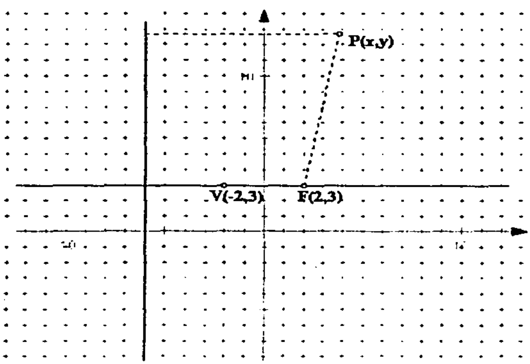
$$(x-4)^2 = 4\cdot 3(y-7)$$

Observamos que (4,7) son las coordenadas del vértice y tres es el semiparámetro p.

Entonces la parábola anterior se puede describir así: La parábola de vértice V(4,7), parámetro 2p = 6 y dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje y.

Problema 5.

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en V(-2,3), parámetro 2p = 8 y dirige su concavidad hacia la dirección positiva del eje x. Ver la figura.



Si 2p = 8, p = 4 , entonces el foco es: F(2,3) y la ecuación de la directriz es x = -6.

Considerando el sistema de coordenadas X'Y' cuyo origen está en el punto V(-2,3) lo que se nos pediría es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, parámetro 2p = 8 y dirige su concavidad hacia la dirección positiva del eje X'. Tal ecuación es:

$$y'^2 = 16x'$$

expresada en el sistema XY :

La ecuación en forma general es:

Llenar la siguiente tabla para graficar y señalar todos los elementos de la parábola:

x	y	(x,y)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

La descripción de la parábola se puede dar también así: La parábola de vértice V(-2,3) parámetro 2p = 8 y dirige su concavidad hacia la parte positiva del eje X y su ecuación se puede expresar:

$$(y-3)^2 = 4 \cdot 4(x-(-2))$$

Con procedimientos similares y suponiendo que p representa la distancia dirigida del segmento VF, se puede concluir lo siguiente:

La ecuación de la parábola de vértice V(h,k), parámetro 2p y eje paralelo al eje X es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

La ecuación de la parábola de vértice V(h,k), parámetro 2p y eje paralelo al eje Y es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Problema 6.

Hallar los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2+8x+6y+1=0$ y graficarla en el sistema de coordenadas dado.

Completar el trinomio cuadrado perfecto en y para expresarla en la forma ordinaria:

$$y^2+6y+\qquad = -8x-1+$$

$$(y+3)^2=-4\cdot 2(x-1)$$

De acuerdo a la ecuación obtenida, calcular lo que se pide:

Vértice: V(,)

Semiparámetro: p =

Parámetro: 2p =

Foco: F(,)

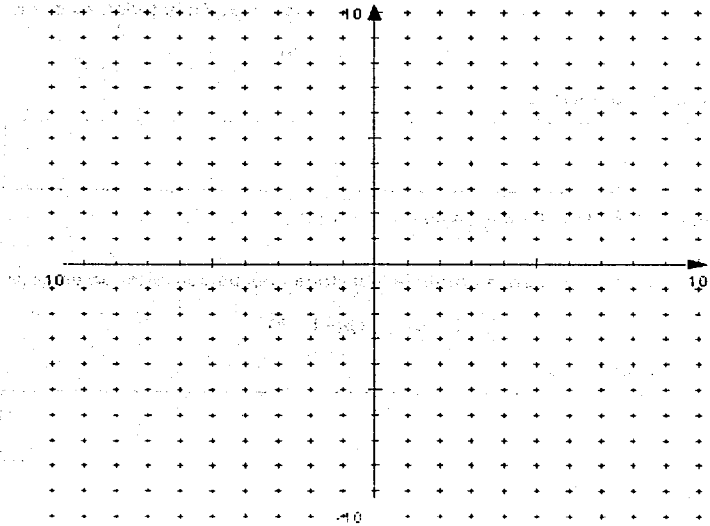
Ecuación del eje: y =

Ecuación de la directriz: x =

Lado recto: l. r. = 4p =

Llenar la siguiente tabla para graficar:

x	y	(x,y)
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		



Problema 7.

Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas X y que pase por los puntos A(-2,1), B(1,2) y C(-1,3).

De acuerdo a los datos la ecuación en forma ordinaria es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Como el punto A(-2,1) está en la parábola, satisface la ecuación anterior, es decir:

$$(1-k)^2 = 4p(-2-h)$$

Desarrollar estas operaciones:

Para obtener: $k^2 - 2k + 1 = -8p - 4ph$ ---------- (1)

Como el punto B(1,2) está en la parábola, satisface la ecuación anterior, es decir:

$$(2-k)^2 = 4p(1-h)$$

Desarrollar estas operaciones:

Para obtener: $k^2 - 4k + 4 = 4p - 4ph$ ———— (2)

Como el punto C(-1,3) está en la parábola, satisface la ecuación anterior, es decir:

$$(3-k)^2 = 4p(-1-h)$$

Desarrollar estas operaciones:

Para obtener: $k^2 - 6k + 9 = -4p - 4ph$ ———— (3)

Con las ecuaciones obtenidas formamos el siguiente sistema:

$$k^2 - 2k + 1 = -8p - 4ph \text{ ———— } (1)$$

$$k^2 - 4k + 4 = 4p - 4ph \text{ ———— } (2)$$

$$k^2 - 6k + 9 = -4p - 4ph \text{ ———— } (3)$$

Restamos la ecuación (2) de la ecuación (1) y la ecuación (3) de la (2) para obtener el siguiente sistema de dos por dos:

$$2k - 3 = -12p \text{ ——— } (4)$$

$$2k - 5 = 8p \text{ ———— } (5)$$

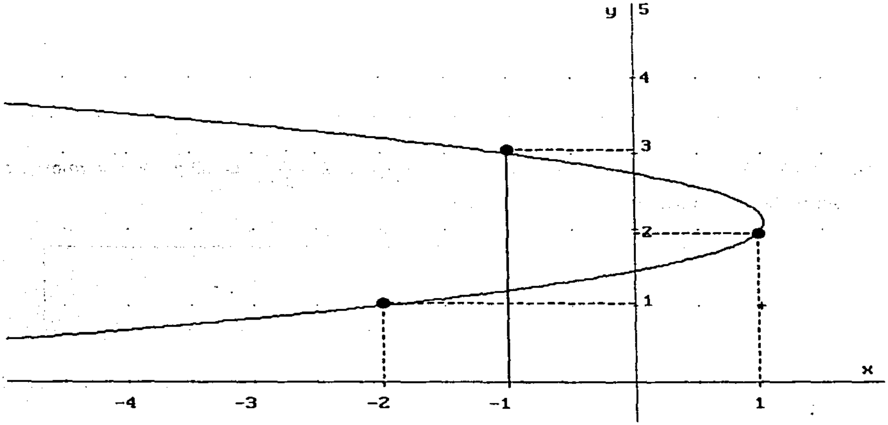
En el siguiente espacio resolver el sistema anterior:

Al resolver el sistema anterior se obtiene $p=-\frac{1}{10}$, $k=\frac{21}{10}$ sustituir dichos valores en la ecuación (1) para encontrar el valor de h:

Sustituir el valor de p, k y h en $(y-k)^2=4p(x-h)$, desarrollarla para obtener la ecuación de la parábola en forma general que se muestra como resultado.

Resultado: $5y^2-21y+2x+20=0$

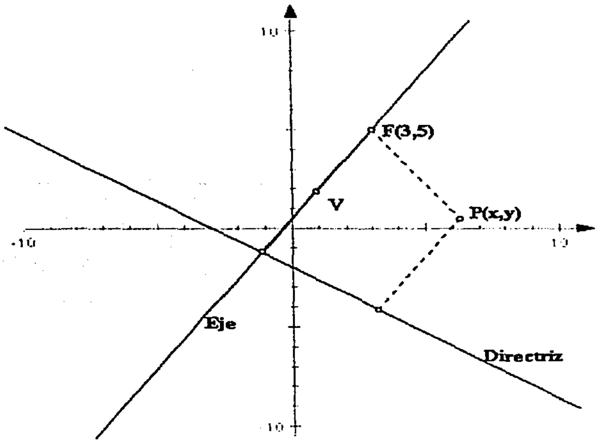
La gráfica de la ecuación $5y^2 - 21y + 2x + 20 = 0$ se muestra a continuación:



Comprobar que los puntos A(-2,1), B(1,2) y C(-1,3) satisfacen la ecuación obtenida:

Problema 8.

Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto F(3,5) y la directriz es la recta que tiene por ecuación $2x+3y+6=0$. Ver la siguiente figura:



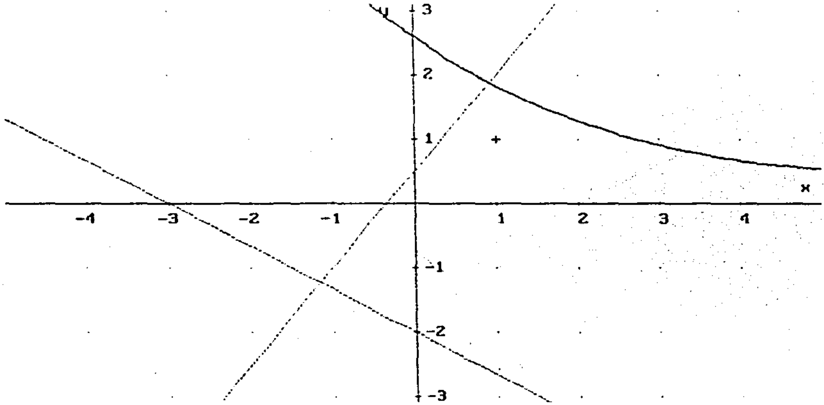
Si P(x,y) es un punto en la parábola entonces la distancia de P a la directriz y la distancia de P a F son iguales:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\frac{2x+3y+6}{\sqrt{13}}$$

Elevar al cuadrado la expresión anterior para encontrar la ecuación de la parábola en forma general:

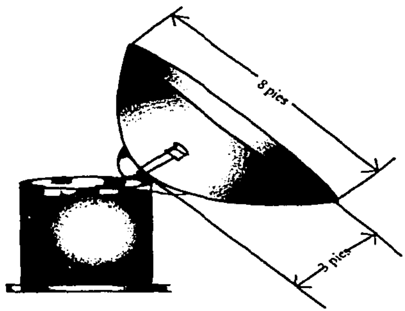
Ecuación: $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 102x - 166y + 406 = 0$

La gráfica de la ecuación anterior se muestra a continuación:



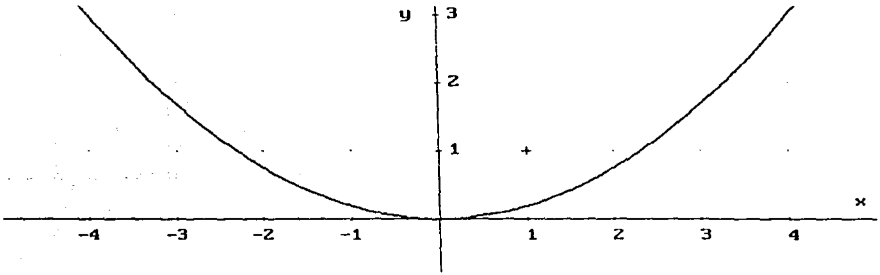
Problema 9.

Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde está localizado el receptor. Si la antena tiene 8 pies de abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿ En que posición debe colocarse el receptor? Ver la figura.



Queremos que el receptor esté en el foco de la parábola. Si consideramos la parábola cuyo vértice esta en el origen y su foco sobre el eje Y, su ecuación será:

$$x^2 = 4py$$

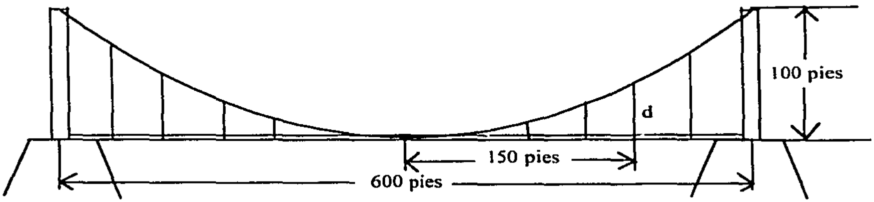


De los datos que se dan se deduce que los puntos A(-4,3) y B(4,3) están en la parábola, tomar uno de ellos y sustituirlo en la ecuación para obtener el valor de p y poder determinar las coordenadas del foco.

Entonces el receptor debe localizarse a ______________ de la base de la antena a lo largo del eje.

Problema 10.

Los cables de un puente colgante tienen forma parabólica. Las torres que soportan los cables están separadas 600 pies entre si y tienen 100 pies de altura. Si los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia entre las torres, ¿ Cuál será la altura del cable en un punto situado a 150 pies de una de las torres? Ver la figura.



Si situamos la parábola que forman los cables de tal manera que el vértice esté en el origen y dirija su concavidad hacia la parte positiva del eje Y , entonces la ecuación de dicha parábola será:

$$x^2 = 4py$$

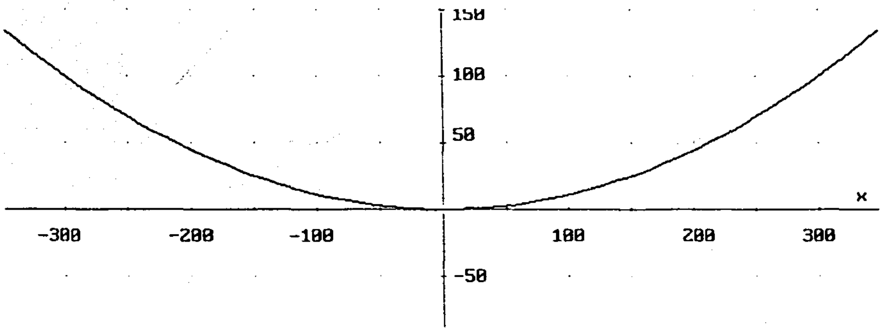
Los puntos A(-300,100) y B(300,100) están en la parábola, sustituir uno de ellos para obtener el valor de p.

Con el valor de p obtenido anteriormente, la ecuación es:

$$x^2 = 900y$$

Sustituir $x = 150$ para encontrar la altura d pedida:

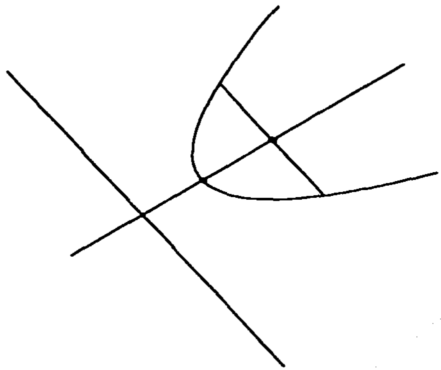
Gráfica de la parábola:



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- En la siguiente figura señalar los elementos mencionados:

a) Eje de la parábola
b) Directriz de la parábola
c) Foco
d) Parámetro
e) Semiparámetro
f) Vértice
g) Lado recto



2.- Hallar los elementos y graficar las siguientes parábolas:

a) $x^2 = 4y$ b) $y^2 = -4x$

3.- Hallar la ecuación de las parábolas siguientes:

a) foco: F(4,0); vértice: V(0,0).

b) foco: F(0,-1); directriz: y = 1 .

4.- Hallar los elementos de las siguientes parábolas y graficar:

a) $(x-3)^2 = -(y+1)$ b) $(y+3)^2 = 8(x-2)$

5.- Hallar los elementos y graficar las siguientes parábolas:

a) $x^2 - 4x - y - 4 = 0$ b) $y^2 + 12y + x - 1 = 0$

6.- Hallar la ecuación de cada una de las siguientes parábolas:

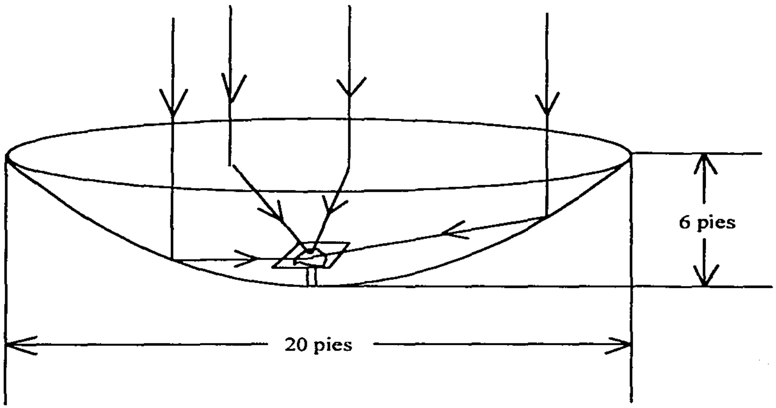
a) Vértice: V(2,-3), foco: F(2,5).

b) Foco: F(-3,4), directriz: $y = 2$.

7.- Hallar la ecuación de la parábola con foco F(4,5) y directriz la recta $y = -x - 1$.

8.- Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas X, y que pase por los puntos A(-2,1), B(1,2), C(-1,3).

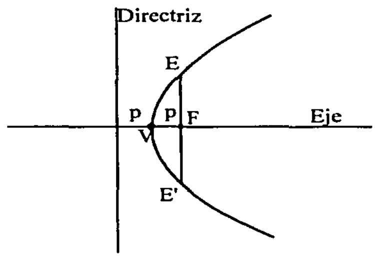
9.- Un espejo tiene la forma de un paraboloide de revolución y se usará para concentrar los rayos del sol en su foco, creando así una fuente de calor. Si el espejo tiene 20 pies de abertura y 6 de profundidad, ¿ dónde se concentrará la fuente de calor ? Ver la figura:



EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Usar la definición de parábola y el dibujo siguiente para expresar la longitud del lado recto, en términos de p.

l. r. = $\boxed{\qquad\qquad}$



2.- Hallar la ecuación de la parábola con foco F(0,5) y directriz la recta $y = -1$. Dibujar la curva.

3.- Determinar los elementos y dibujar la parábola $x^2 + 6y = 0$.

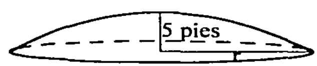
4.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice V(2,3), parámetro 2p = 4 y dirige su concavidad hacia arriba. Dibujarla.

5.- Hallar los elementos de la parábola $2x^2 - 6x + y + 10 = 0$ y dibujarla.

6.- Hallar la ecuación de la parábola con foco F(3,4) y directriz $2x - y + 3 = 0$.

7.- Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas X, y que pase por los puntos A(0,0), B(8,-4), C(3,1).

8.- Se va a construir un reflector con forma de paraboloide de revolución con ancho focal de 10 pies y profundidad de 5 pies. Encuentre el radio del reflector.



UNIDAD X

ELIPSE

INTRODUCCIÓN:

Una de las aplicaciones mas notorias de la elipse es en el movimiento planetario, ya que una de las leyes del movimiento planetario de Kepler dice que las órbitas de los planetas describen elipses con el sol en uno de sus focos.

Hay una propiedad que tiene la elipse que hace que tenga una aplicación muy importante en medicina. Dicha propiedad dice que si la elipse reflejara la luz como si fuera un espejo, entonces si un rayo de luz parte de uno de los focos al reflejarse en la elipse se dirige hacia el otro foco.

Si hacemos girar una elipse sobre su eje mayor, se obtiene una superficie que se llama elipsoide de revolución; si dicha superficie es un espejo y una fuente luminosa se coloca en uno de los focos, después de reflejarse en la pared del elipsoide la luz se dirige hacia el otro foco.

La propiedad reflectora de elipsoides (y semielipsoides) se usa en medicina moderna en un aparato llamado Litotríptero que desintegra cálculos renales por medio de ondas de choque de alta energía bajo el agua. Después de tomar medidas extremadamente precisas, el operador coloca al paciente de modo que el cálculo quede en un foco; luego genera ondas de choque de ultraalta frecuencia en el otro foco, y las ondas reflejadas desbaratan el cálculo. Las ventajas de este método respecto al de cirugía tradicional son muchas, en cuanto al tiempo de recuperación y la tasa de mortalidad (con el Litotríptero la tasa es menor de 0.01% y en la cirugía tradicional 2%).

Otra de las aplicaciones de la elipse es en la construcción de puentes con claro en forma de semielipse, en la construcción algunas veces se usan columnas de concreto de forma elíptica.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de las condiciones geométricas que cumplen los puntos de un lugar geométrico, sea capaz de interpretarlas analíticamente para obtener la ecuación que lo define, en este caso una elipse.

Que aplique los conceptos, incluidos en esta unidad, en la resolución de problemas de su entorno.

CONTENIDOS BÁSICOS: Definición de elipse como lugar geométrico, formas ordinaria y general de la ecuación de la elipse, elementos de la elipse.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Construcción de una elipse con regla y compás, elipse que pasa por cuatro puntos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Recordarán la definición de elipse como lugar geométrico.
- Construirán con regla y compás una elipse dados los focos y la cantidad constante 2a, señalarán los elementos de la elipse, se establecerá la relación que hay entre los parámetros a, b y c.
- Obtendrán a partir de la definición como lugar geométrico la ecuación en las formas ordinaria y general de la elipse de centro el origen y eje focal alguno de los coordenados, deducirán la fórmula de la longitud del lado recto de la elipse.
- Dada la ecuación de la elipse con centro en el origen, hallarán los elementos.
- Obtendrán mediante una traslación de ejes coordenados la ecuación en forma ordinaria de la elipse con centro fuera del origen y eje paralelo a alguno de los coordenados, efectuarán las operaciones indicadas en la forma ordinaria y obtendrán la forma general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde A y C tienen signos iguales, pero $A \neq C$.
- Hallarán los elementos de la elipse con centro fuera del origen, conociendo su ecuación en forma general.
- Hallarán la ecuación de la elipse con eje focal oblicuo a los ejes coordenados.
- Hallarán la ecuación de una elipse que pasa por cuatro puntos, sabiendo que los ejes son paralelos a los coordenados.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Filloy, Eugenio et al. Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

2. Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3. Kindle, Joseph, Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill serie Schawm, 1994.

4. Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

5. López, Antonio et al. Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

6. Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.

7. Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

Los problemas que se presentan en esta unidad nos muestran a la elipse como un lugar geométrico, se halla su ecuación en forma general y ordinaria, así como sus elementos: focos, distancia focal, vértices, eje mayor, eje menor, excentricidad y ancho focal o lado recto.

Problema 1.

La elipse se puede obtener como la intersección de un cono con un plano y en la unidad VII se comprobó que se puede definir como:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante representada por 2a .

La figura mostrada en la siguiente página tiene dos puntos F' y F que van a ser los focos y un segmento DD' que va a ser la cantidad constante de una elipse. Seguir los pasos descritos a continuación para construir algunos puntos que están sobre la elipse.

1.- Construir la recta que pasa por F y F' , luego el punto medio de FF' que denotaremos por C y le llamaremos **centro de la elipse, la longitud del segmento F'F se llama distancia focal y se representa por 2c.**

2.- La longitud del segmento DD' es 2a , si D" es el punto medio de dicho segmento, tomamos la longitud del segmento DD", dicha longitud mide a, nos apoyamos en C para traza dos arcos que cortan la recta FF' en los puntos A' y A . El segmento A'A se llama **eje mayor de la elipse, A' y A son vértices de dicha elipse.**

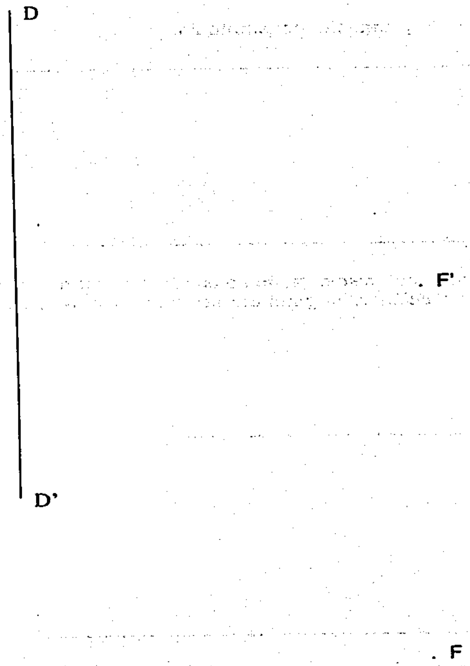
3.- Trazar una perpendicular L a FF' que pase por C.

4.- Tomar la medida del segmento DD" (dicha medida es a), apoyarse en F y trazar dos arcos que intersecan la recta L en B y B'. **Al segmento BB' se le llama eje menor de la elipse. B y B' son vértices de dicha elipse.**

5.- Tomar un punto M entre F' y F. Tomar la medida MF y trazar cuatro arcos, dos de ellos apoyándose en F y los otros dos en F'.

6.- Tomar la medida MF' y trazar otros cuatro arcos apoyándose en F y F' que intersecan a los otros cuatro en los puntos P, Q, R y S.

7.- Repetir el paso anterior unas 3 veces y unir los puntos obtenidos con un trazo continuo.


D
F'
D'
F

Basándose en la construcción anterior, verificar lo siguiente:

A y A´ son puntos de la elipse de focos F, F' y cantidad constante 2a.

Mostrar que: A'F' = FA = a-c   Mostrar que AF' + AF = A'A = 2a

Lo anterior muestra que A está en la elipse, del mismo modo se puede mostrar que A' es un punto de la elipse. Además por construcción la longitud del segmento AA' es 2a y C está en el punto medio de AA'.

B y B' son puntos de la elipse anterior.

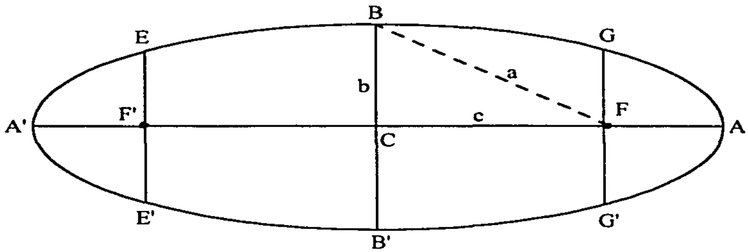
Mostrar que BF' = BF = a

Si consideramos el triángulo rectángulo BCF por el teorema de Pitágoras tendremos:

$a^2 = b^2 + c^2$ donde b es la distancia de BC

Mostrar que C es el punto medio de BB', calculando las distancias de BC y B'C.

Con argumentos muy similares se puede comprobar lo siguiente para una elipse de focos F' , F y cantidad constante 2a.



Los puntos A, A', B, B' son los vértices de la elipse.

El eje mayor A'A mide la cantidad constante 2a.

F y F' son los focos, su punto medio C es el centro de la elipse. La longitud de F'F se representa por 2c y se llama distancia focal.

El eje menor BB' tiene longitud 2b y se satisface la siguiente igualdad : $a^2 = b^2 + c^2$.

Los segmentos EE' y GG' que son perpendiculares al eje mayor y pasan por los focos, son los lados rectos de la elipse y su longitud se calculará posteriormente.

Problema 2.

Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje mayor sobre el eje X, distancia focal 8 y cantidad constante 12. Ver figura.

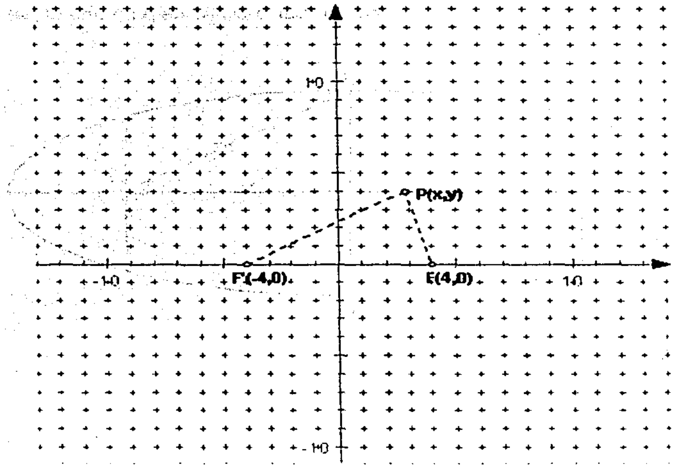
Puesto que el eje mayor está sobre el eje X, el centro es el origen y la distancia focal es 8 entonces las coordenadas de los focos son:

F'(,) y F(,)

Entonces nos piden la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos F y F' es igual a 12.

Si P(x,y) es un punto en la elipse entonces:

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=12 \quad \text{--------} \quad (1)$$



En la expresión (1) aislar un radical en el primer miembro, elevar al cuadrado y simplificar para obtener el resultado que se muestra:

$$\left(\sqrt{(x+4)^2+y^2}\right)^2=\left(12-\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2$$

$$3\sqrt{(x-4)^2+y^2}=18-2x$$

Elevar nuevamente al cuadrado y simplificar para obtener la ecuación en forma general mostrada.

$$\left(3\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2=(18-2x)^2$$

$$5x^2+9y^2-180=0$$

Expresada en forma ordinaria:

$$5x^2+9y^2=180 \qquad \text{dividiendo entre } 180$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

De acuerdo a los datos dados al principio 2a = 12, entonces a = 6; 2c = 8, entonces c = 4.

Obsérvese en la ecuación obtenida que $36=20+16$ donde 36 es a^2, 16 es c^2, entonces 20 corresponde a b^2.

Si x = 4, se obtienen dos valores para y, con lo que obtenemos dos puntos G y G' en la elipse y el segmento GG' es uno de los lados rectos, calcularemos la distancia del lado recto:

Despejar y en la siguiente expresión:

$$\frac{4^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

$$y=\pm\tfrac{10}{3}$$

Entonces la longitud del lado recto es: $\boxed{}$

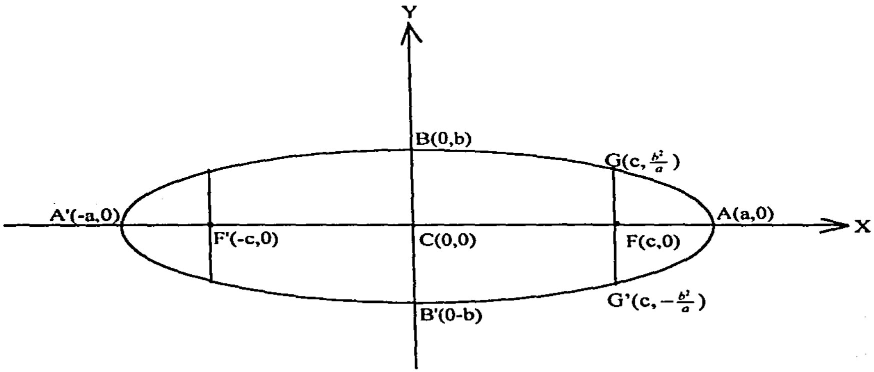
Con un procedimiento muy parecido al anterior se muestra que la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje sobre el eje X , distancia focal 2c y cantidad constante 2a es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde b se obtiene de la igualdad:

$$a^2=b^2+c^2$$

La interpretación geométrica de estos números se muestra en la siguiente ilustración:



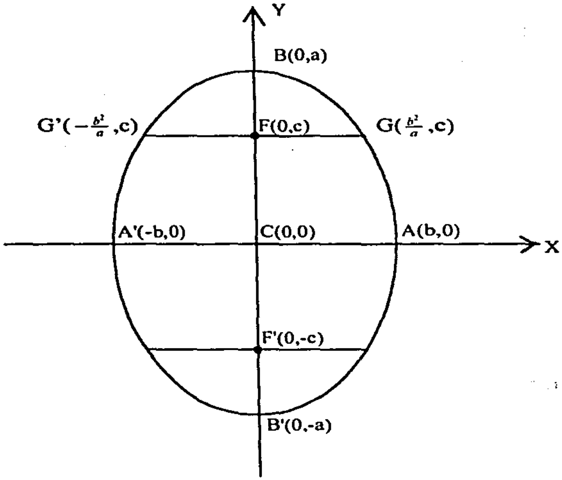
La longitud del lado recto es $\text{l. r.} = \dfrac{2b^2}{a}$

La excentricidad de la elipse se calcula con la fórmula: $e=\dfrac{c}{a}$ que en el caso de la elipse siempre es menor que 1, si la excentricidad es un número cercano a cero la elipse se parece a una circunferencia.

La ecuación de la elipse con centro en el origen, eje sobre el eje Y, distancia focal 2c y cantidad constante 2a es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Observar la siguiente figura:



Aquí también la longitud del lado recto es: $\text{l. r.} = \dfrac{2b^2}{a}$

Problema 3.

Hallar los siguientes elementos de la elipse $4x^2+9y^2-36=0$ y graficarla:

Centro, longitud de los semiejes y ejes, ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes, distancia y semidistancia focal, vértices, focos, excentricidad y lado recto.

La forma ordinaria de la ecuación es: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Entonces se trata de una elipse con eje mayor sobre el eje de coordenadas X , a = 3, b = 2. Contestar lo siguiente:

Centro: C(,)

Semidistancia focal: c = **distancia focal: 2c =**

Focos: F'(,) , F(,)

Vértices: A(,) , A'(,) , B(,) y B'(,)

Longitudes de los ejes y semiejes: semieje mayor: a = 3, eje mayor: 2a = 6

Semieje menor: b = 2, eje menor: 2b = 4.

Ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes:

Al eje mayor:

Al eje menor:

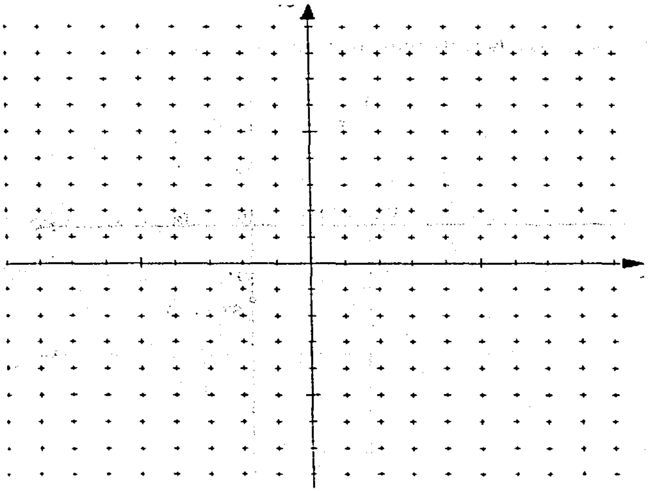
Lado recto: l. r. =

Excentricidad: e =

Llenar la siguiente tabla para graficar:

x	$y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}$	(x,y)
-3	0	(-3,0)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3	0	(3,0)

Graficar y señalar los elementos:



Problema 4.

Hallar la ecuación de la elipse con centro C(5,7), eje mayor paralelo al eje Y, distancia focal 6 y cantidad constante 8. Graficar.

Si consideramos el sistema de coordenadas X'Y' que se obtiene trasladando el origen a C(5,7), tendremos una elipse de centro en el origen, eje mayor sobre el eje Y', distancia focal 6 y cantidad constante 8.

La ecuación en el sistema X'Y' es:

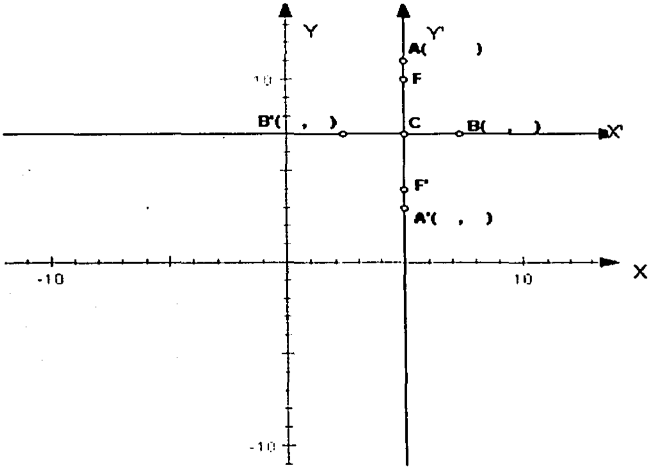
$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{7}=1$$

Pero $x' = x - 5$, $y' = y - 7$

Entonces la ecuación en el sistema XY es: $\boxed{}$

Expresar la ecuación anterior en forma general:

Observar la figura y usar la tabla correspondiente para graficar:



Observar que $a = 4$, $c = 3$ y por lo tanto $b = \sqrt{7}$ lo cual nos indica que la x se toma en el intervalo : $\left[5-\sqrt{7}, 5+\sqrt{7}\right]$.

Despejamos y de la ecuación de la elipse y llenar la tabla:

TABLA:

x	y	(x,y)
2.3542		
3		
4		
5		
6		
7		
7.6457		

En la ecuación en forma ordinaria $\frac{(y-7)^2}{16}+\frac{(x-5)^2}{7}=1$ sustituimos el valor de y = 10 que corresponde a la ordenada del foco y calculamos el valor x para calcular el lado recto:

$$\frac{(10-7)^2}{16}+\frac{(x-5)^2}{7}=1$$

$$7(9)+16(x-5)^2=112$$

x =

Lo anterior muestra que el lado recto es: $\text{l. r.}=\frac{2(\sqrt{7})^2}{4}=\frac{7}{2}$

Con procedimientos parecidos se muestra que la ecuación de la elipse de centro C(h,k), eje mayor paralelo al eje Y, distancia focal 2c y cantidad constante 2a es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{donde} \quad a^2=b^2+c^2$$

La ecuación de la elipse de centro C(h,k), eje mayor paralelo al eje X, distancia focal 2c, y cantidad constante 2a es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{donde} \quad a^2=b^2+c^2$$

En ambos casos la longitud del lado recto es $\text{l. r.}=\frac{2b^2}{a}$, la excentricidad es $e=\frac{c}{a}$

Problema 5.

Hallar los elementos de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$ y graficarla.

La expresamos en forma ordinaria:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Lo que nos indica que es una elipse con eje mayor paralelo al eje Y , con a = 4, b = 2 .

c =

Centro: C(,)

Semidistancia focal: c = **distancia focal: 2c =**

Focos: F'(,) , F(,)

Vértices: A(,) , A'(,) , B(,) y B'(,)

Longitudes de los ejes y semiejes: semieje mayor: a = 3, eje mayor: 2a = 6

Semieje menor: b = 2, eje menor: 2b = 4.

Ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes:

Al eje mayor:

Al eje menor:

Lado recto: l. r. =

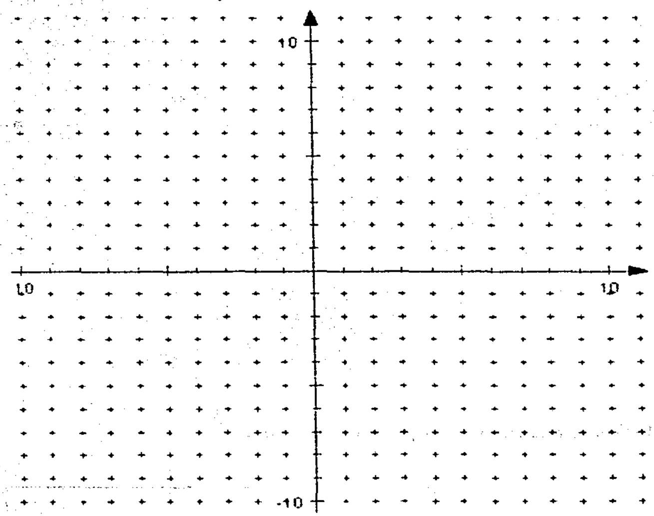
Excentricidad: e =

Despejar y para llenar la siguiente tabla y graficar en el sistema de coordenadas correspondiente:

y =

TABLA:

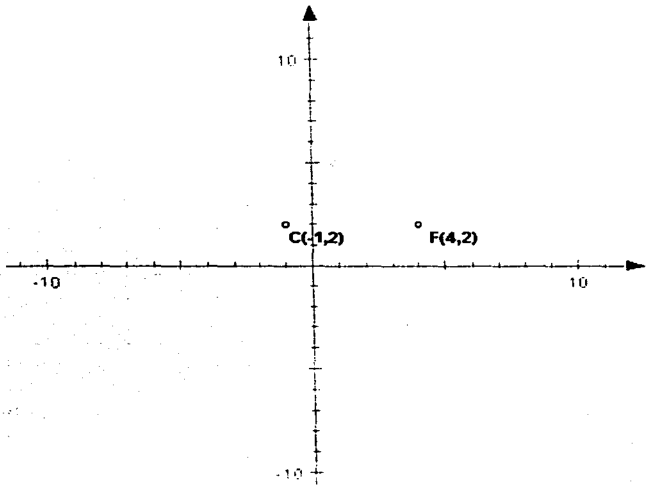
x	y	(x,y)
-1		
0		
1		
2		
3		



Problema 6.

Hallar la ecuación de la elipse con centro C(-1,2), uno de los focos F(4,2) y $e = \frac{5}{7}$

Observar el siguiente dibujo para encontrar a, b y c:



c =

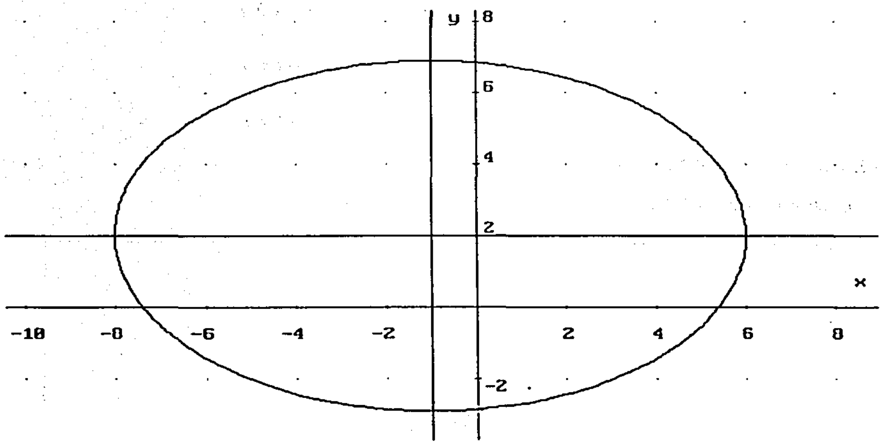
Usar el valor de la excentricidad para encontrar a =

b =

Ecuación en forma ordinaria:

Ecuación en forma general:

GRÁFICA:



Problema 7.

Hallar la ecuación de la elipse de ejes paralelos a los coordenados y que pasa por: A(6,-1), B(-4,-5), C(6,-5) y D(-12,-3).

La ecuación en forma general es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sustituir las coordenadas de A, B, C y D para obtener el sistema de ecuaciones:

$$36A + C + 6D - E + F = 0 \text{ --------- } (1)$$

$$16A + 25C - 4D - 5E + F = 0 \text{ ------ } (2)$$

$$36A + 25C + 6D - 5E + F = 0 \text{ ------ } (3)$$

$$144A + 9C - 12D - 3E + F = 0 \text{ ----- } (4)$$

Restar la ecuación (2) de las otras tres para obtener el siguiente sistema:

$$20A - 24C + 10D + 4E = 0 \text{ -------- } (5)$$

$$20A \qquad + 10D \qquad = 0 \text{ -------- } (6)$$

$$128A - 16C - 8D + 2E = 0 \text{ -------- } (7)$$

En la ecuación (6) se obtiene $D = -2A$

Sustituir en (5) y (7) para obtener C en términos de A:

$$\boxed{C = 36A}$$

Sustituir en (7) y en (1) para expresar E y F en términos de A:

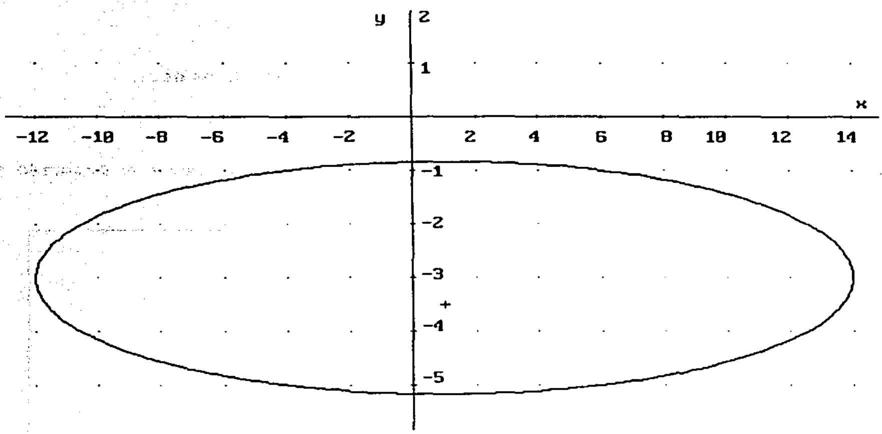
$$\boxed{E = 216A \qquad F = 156A}$$

Entonces la ecuación es: $Ax^2 + 36Ay^2 - 2Ax + 216Ay + 156A = 0$ dividiendo entre A:

$$x^2 + 36y^2 - 2x + 216y + 156 = 0$$

Comprobar que las coordenadas de los puntos A, B, C y D satisfacen la ecuación:

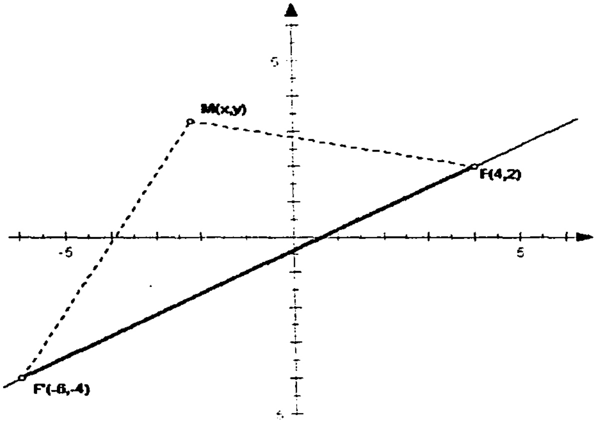
GRÁFICA:



Verificar que los puntos A, B, C y D están en la elipse anterior.

Problema 8.

Hallar la ecuación de la elipse de focos F'(-6,-4), F(4,2) y cantidad constante 2a = 13. Ver la figura siguiente.



Si M(x,y) es un punto en la elipse, entonces d(M,F) + d(M,F') = 13, es decir,

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+6)^2+(y+4)^2}=13$$

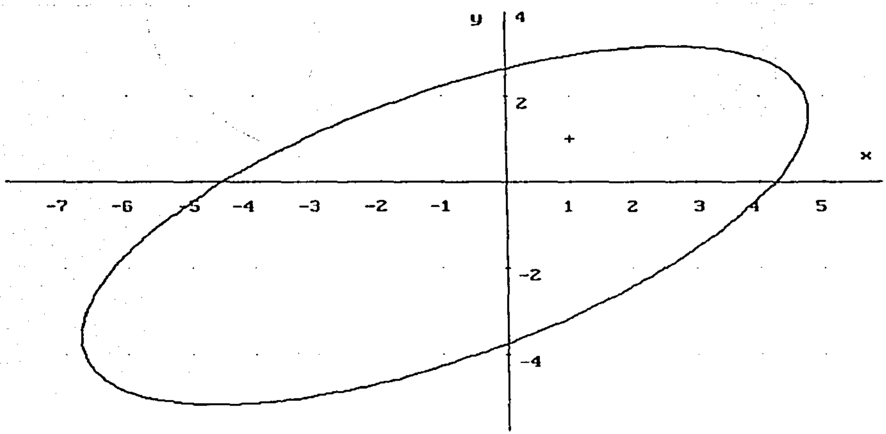
Aislar el primer radical en el primer miembro de la igualdad, elevar al cuadrado y simplificar para obtener la expresión mostrada:

$$26\sqrt{(x+6)^2+(y+4)^2}=20x+12y+201$$

Elevar al cuadrado nuevamente y simplificar:

$$276x^2 - 480xy + 532y^2 + 72x + 584y - 5249 = 0$$

GRÁFICA:



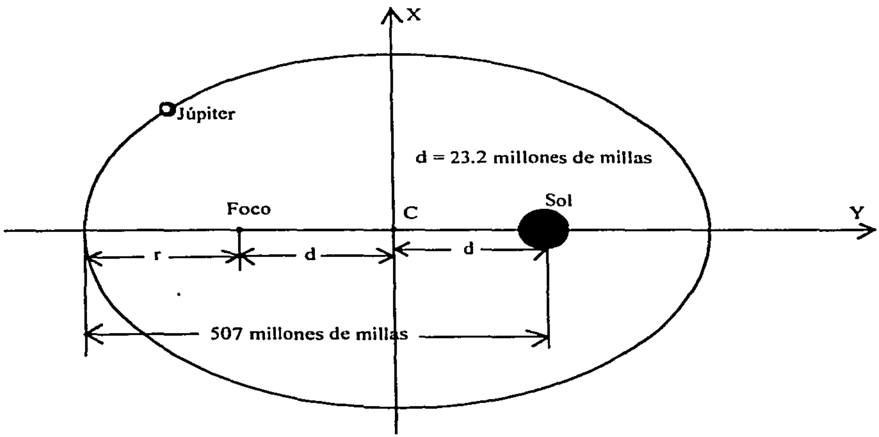
En la gráfica anterior señalar los focos, el centro y dibujar los ejes de la elipse. Dar las coordenadas del centro y las ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes.

Problema 9.

En el siguiente problema se considera que: El afelio de un planeta es su distancia mayor al sol, el perihelio su distancia menor y la distancia media de un planeta al sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica.

El afelio de Júpiter es de 507 millones de millas. Si la distancia del sol al centro de la órbita jupiteriana es de 23.2 millones de millas, ¿ cuál es su perihelio? ¿ cuál es su distancia media? Escriba una ecuación para la órbita de Júpiter alrededor del sol.

Para contestar las preguntas anteriores observar la siguiente figura:



r =

a = r + d =

c = d = 23.2 millones de millas

b =

Ecuación en forma ordinaria:

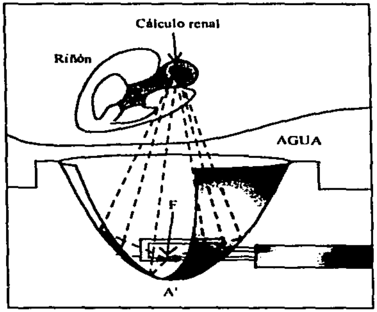
Problema 10.

Se va a construir un litotríptero de 15 cm de altura y 18 de diámetro (ver la figura). Las ondas de choque de alta energía bajo el agua se emitirán desde el foco F que es el punto mas cercano al vértice A'.

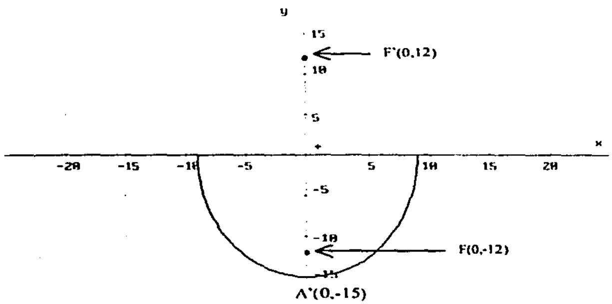
a) Encuentra la distancia de A' a F.

b) ¿ A que distancia de A' (en dirección vertical) debe localizarse el cálculo?

Observar la siguiente figura:



Suponiendo que el litotríptero es un semielipsoide y colocando la elipse que lo genera de tal manera que el centro coincida con el origen y el eje mayor con el eje Y, tendremos el siguiente dibujo:



De acuerdo a la figura anterior :

Distancia de A' a F =

Distancia de A' al cálculo renal, que debe estar en el foco F' =

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- En la siguiente figura señalar los elementos de la elipse mencionados:

a) Eje mayor

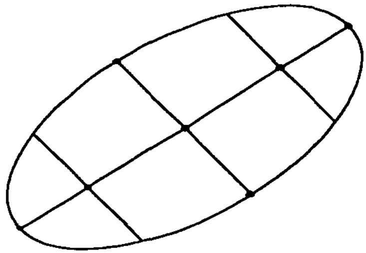
b) Eje menor

c) Lados rectos

d) Focos

e) Vértices

f) Centro



2.- Hallar los elementos y graficar las siguientes elipses con centro en el origen:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

3.- Hallar los elementos y graficar las siguientes elipses:

a) $4x^2+9y^2-36=0$ b) $4y^2+x^2-8=0$

4.- Hallar la ecuación de las elipses siguientes:

a) Centro: C(0,0), uno de los focos: F'(-1,0) y uno de los vértices: A(3,0).

b) Focos: F'(-2,0), F(2,0) , longitud del eje mayor 2a = 6.

c) Dos de los vértices: A'(0,-5), A(0,5) , semidistancia focal c = 2 .

5.- Hallar los elementos y graficar las siguientes elipses:

a) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ b) $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

6.- Hallar los elementos y graficar las elipses:

a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ b) $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$

7.- Hallar las ecuaciones de las elipses siguientes:

a) Centro: C(2,-2), uno de los vértices: A(7,-2), uno de los focos: F(4,-2).

b) Dos de los vértices: B(2,5), semidistancia focal: c = 2.

c) Centro: C(1,2), uno de los vértices: B(1,4) y pasa por el punto P(2,2).

8.- Hallar la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los coordenados y que pase por los puntos A(6,-1), B(-4,-5), C(6,-5) y D(-12,-3).

9.- El perihelio de Plutón es de 4551 millones de millas y la distancia del Sol al centro de su órbita elíptica es de 897.5 millones de millas. Encuentre el afelio de Plutón. ¿ Cuál es la distancia media de Plutón al Sol ? Escriba una ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

10.- Se construye un puente con forma de arco semielíptico, de modo que su claro mide 100 pies. La altura del arco, a 40 pies del centro, será de 10 pies. Encuentre la altura del arco en el centro. **Nota: El claro del arco semielíptico es la longitud del eje mayor.**

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Llenar los espacios vacíos para las elipses descritas por los datos que se dan:

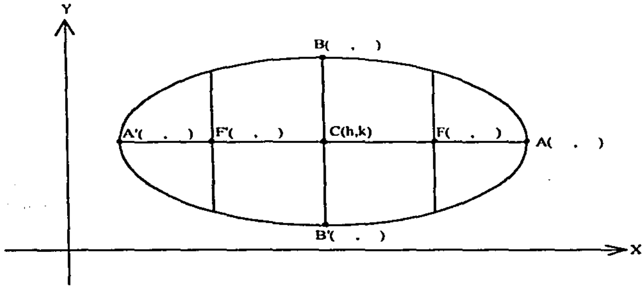
a) La elipse de centro C(h,k) , eje mayor paralelo al eje X, distancia focal 2c , longitud del eje menor 2b y longitud del eje mayor 2a.

l. r. =

Ecuación del eje mayor =

Ecuación del eje menor =

e =



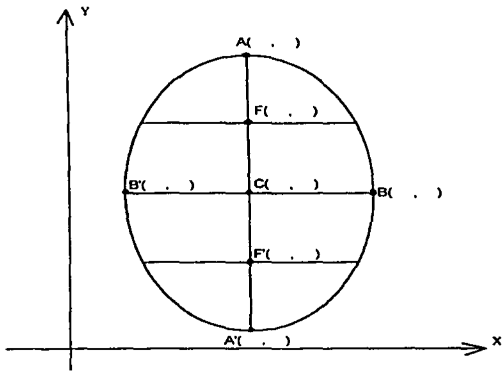
b) La elipse de centro C(h,k), eje mayor paralelo al eje Y, distancia focal 2c, longitud del eje menor 2b y longitud del eje mayor 2a.

l. r. =

Ecuación del eje menor =

Ecuación del eje mayor =

e =



2.- Hallar los elementos y graficar la elipse: $16x^2 + 12y^2 - 48 = 0$.

3.- Hallar la ecuación de la elipse tal que dos de los vértices son: A(5,0) A'(-5,0) y focos: F(2,0) y F'(-2,0).

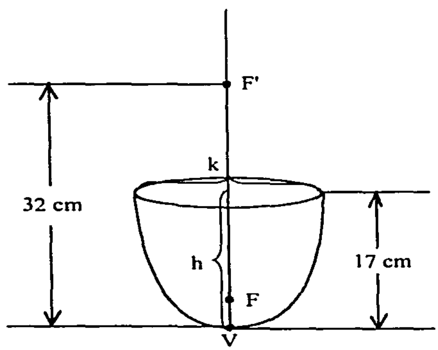
4.- Hallar los elementos de la elipse $16x^2 + y^2 - 32x + 6y - 39 = 0$ y graficarla.

5.- Hallar la ecuación de la elipse con focos F(5,1) , F'(-1,1) y eje menor 2b = 10.

6.- La forma básica de un reflector elíptico es una semielipsoide de altura h y diámetro k (ver la figura). Las ondas emitidas desde el foco F se reflejarán de la superficie al foco F'.

a) Indica las distancias $d(V,F)$ y $d(V,F')$ en términos de h y k.

b) Un reflector elíptico de 17 cm de altura se va a construir de modo que las ondas emitidas desde F se reflejen a un punto F' que esté a 32 cm de V. Encuentre el diámetro del reflector y la ubicación de F.



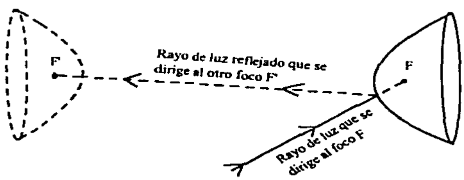
UNIDAD XI

HIPÉRBOLA

INTRODUCCIÓN:

El estudio de la hipérbola es importante porque tiene aplicaciones en múltiples fenómenos, tales como los de variación inversa como por ejemplo la ley de Boyle para gases que dice que en un gas ideal la presión por el volumen es una constante.

Hay una propiedad de la hipérbola que hace posible usar espejos hiperbólicos en ciertos telescopios junto con reflectores parabólicos. La aplicación es posible porque si tenemos un espejo cuya superficie es un hiperboloide de dos hojas que se obtiene haciendo girar sobre su eje real una hipérbola, los rayos de luz que se dirigen a uno de los focos se reflejan en la superficie y se dirigen al otro foco. Ver la figura:



Otra aplicación consiste en la localización de un lugar donde se llevó a cabo una detonación si es escuchada en tres lugares distintos. Esta aplicación se basa en que la diferencia de tiempos en que un sonido se oye en dos puestos de escucha, es proporcional a las distancias que separan la fuente sonora de los puestos de escucha. Se sabe, por lo tanto, que este punto está sobre una cierta hipérbola. Si se emplea un tercer puesto de escucha para poder determinar otra hipérbola, la fuente sonora estará en la intersección de las dos curvas.

Finalmente mencionaremos que la hipérbola se usa en un sistema de navegación llamado LORAN, que será descrito con más detalle en el problema 9.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

Que el alumno, a partir de las condiciones geométricas que cumplen los puntos de un lugar geométrico, sea capaz de interpretarlas analíticamente para obtener la ecuación que lo define, en este caso una hipérbola.

Que aplique los conceptos, incluidos en esta unidad, en la resolución de problemas de su entorno.

CONTENIDOS BÁSICOS: Hipérbola como lugar geométrico, Formas ordinaria y general de la ecuación de la hipérbola, elementos de una hipérbola.

CONTENIDOS COMPLEMENTARIOS: Hipérbola equilátera o rectangular, construcción de una hipérbola con regla y compás, hipérbola que pasa por cuatro puntos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Durante el desarrollo de esta unidad, los alumnos:

- Recordarán la definición de hipérbola como lugar geométrico.
- Construirán con regla y compás una hipérbola dados los focos y la cantidad constante 2a, señalarán los elementos y mostrarán la relación que hay entre los parámetros a, b y c.
- Obtendrán a partir de la definición como lugar geométrico, la ecuación en las formas ordinaria y general de la hipérbola de centro el origen y eje focal alguno de los coordenados, deducirán la fórmula de la longitud del lado recto de la hipérbola y las ecuaciones de las asíntotas.
- Obtendrán los elementos de una hipérbola con centro en el origen y eje focal paralelo a uno de los coordenados a partir de su ecuación en forma general, llevándola a la forma ordinaria. Trazarán la gráfica.
- Obtendrán la ecuación en forma ordinaria de la hipérbola con centro fuera del origen y eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados, considerando la ecuación de la hipérbola anterior y usando una traslación de coordenadas, efectuarán las operaciones indicadas en la forma ordinaria para obtener la forma general: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ con A y C de signos contrarios.
- Hallarán los elementos de la hipérbola con centro fuera del origen, conociendo su ecuación en forma general, completando cuadrados para expresarla en forma ordinaria, trazarán la gráfica.
- Hallarán la ecuación de la hipérbola con eje focal oblicuo a los ejes coordenados, notarán que la ecuación es del tipo: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.
- Hallarán la ecuación de una hipérbola que pasa por cuatro puntos, sabiendo que los ejes son paralelos a los coordenados.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Filloy, Eugenio et al. Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

2. Guerra, Manuel y Silvia Figueroa, Geometría Analítica para Bachillerato. México, Mc Graw Hill, 1994.

3. Kindle, Joseph, Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill serie Schawm, 1994.

4. Lehmann, Charles, Geometría Analítica. México, Limusa, 1994.

5. López, Antonio et al. Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

6. Sullivan, Michael, Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.

7. Torres, Carlos, Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

Aquí se presenta la hipérbola como lugar geométrico, se encuentra su ecuación en forma general y ordinaria con sus elementos: focos, vértices, distancia focal, eje real, eje imaginario, excentricidad, ancho focal o lado recto, asíntotas.

Problema 1.

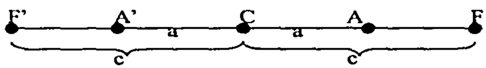
La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante que representaremos por 2a.

En la página donde están dibujados dos puntos F' , F y un segmento DD' cuya longitud representa la cantidad constante 2a, seguir los pasos indicados a continuación para construir puntos de la hipérbola de focos F' , F y cantidad constante 2a.

1.- Trazar la recta que pasa por F' y F. Señalar el punto medio C de F'F , dicho punto es el **centro de la hipérbola**. La longitud de F'F es la **distancia focal** y se representa por 2c.

2.- Señalamos el punto medio de DD' y le llamamos D", entonces DD" representa la cantidad a. Tomar la distancia DD", apoyarse en C para trazar dos arcos que cortan le recta F'F en los puntos A', A que son **los vértices de la hipérbola.** El segmento A'A **es el eje real de la hipérbola** y su longitud es 2a.

Usar el siguiente dibujo para mostrar que A y A' son puntos de la hipérbola de focos F', F y cantidad constante 2a.



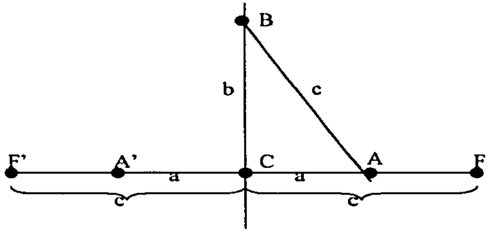
d(F',A) – d(F,A) =

d(F,A') – d(F',A') =

3.- Trazar la recta perpendicular L a F'F que pasa por C.

4.- Tomar la distancia CF y apoyarse en A para trazar dos arcos que cortan a L en los puntos B y B'. El segmento BB' es **el eje imaginario o conjugado de la hipérbola**, su longitud se representa por 2b.

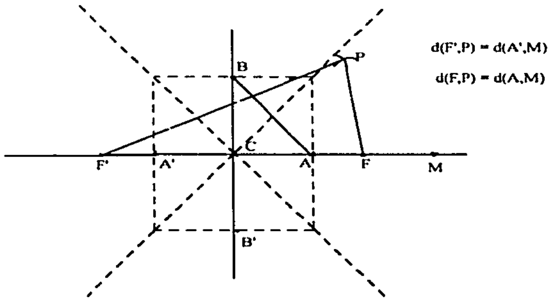
Usar el siguiente dibujo para mostrar que $c^2 = a^2 + b^2$



5.- Trazar el rectángulo de lados 2a y 2b con sus diagonales; dichas diagonales son **las asíntotas de la hipérbola**. Después que se haya encontrado la ecuación de la hipérbola se comprobará porqué son las asíntotas.

6.- Consideremos un punto M fuera del segmento F'F. Tomamos la distancia MA y trazamos cuatro arcos, dos apoyándose en F y los otro dos en F'. Tomando ahora la distancia MA', trazamos otros cuatro arcos que intersecan a los anteriores en los puntos P, Q, R y S.

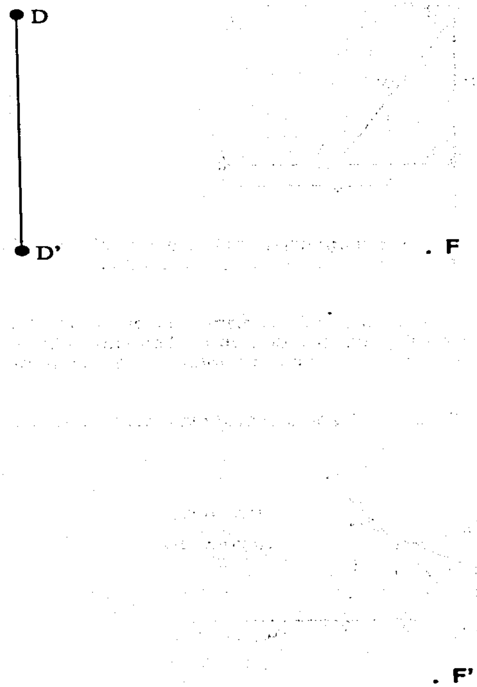
Usar la siguiente figura para mostrar que P, Q, R y S son puntos de la hipérbola de focos F , F' y cantidad constante 2a.



d(P,F') – d(P,F) =

Del mismo modo se comprueba que los puntos Q, R y S están en la hipérbola.

7.- Repetir el paso anterior otras tres veces para obtener mas puntos que pertenecen a la hipérbola. Finalmente unir los puntos obtenidos anteriormente para obtener las dos ramas de la hipérbola.

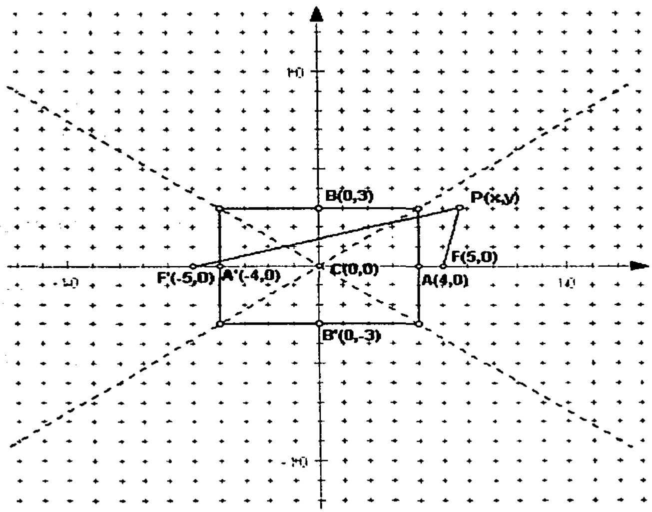

D
D'
F
F'

Problema 2.

Hallar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, eje real sobre el eje X, distancia focal 2c = 10 y cantidad constante 2a = 8.

De acuerdo a los datos y la definición de hipérbola lo que se pide es la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F'(-5,0) y F(5,0) es una constante 2a = 8.

Ver la siguiente figura:



Si P(x,y) es un punto que está en la hipérbola, entonces:

$$d(P,F') - d(P,F) = 8$$

Es decir:

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8$$

Aislar el primer radical, elevar al cuadrado y simplificar para obtener el resultado que se muestra:

$$4\sqrt{(x-5)^2+y^2}=-16+5x$$

Volver a elevar al cuadrado y simplificar para obtener la ecuación en forma general que se muestra:

$$16y^2-9x^2+144=0$$

La ecuación en forma ordinaria es:

Despejar y, después llenar la siguiente tabla para graficar en la ilustración del principio.

y =

x	y	(x,y)
-10		
-9		
-8		
-7		
-6		
-5		
-4		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Si en la ecuación en forma ordinaria sustituimos el valor de x = 5, obtendremos dos valores para y, con lo que se obtienen los puntos D y D' que están en la hipérbola, **el segmento DD' es uno de los lados rectos de la hipérbola** , el otro se obtiene sustituyendo x = -5 .

$$\frac{5^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$y=\pm\frac{9}{4}$$

Con lo cual obtenemos las coordenadas de los puntos D y D':

$$D(5,\frac{9}{4}) \quad \text{y} \quad D'(5,-\frac{9}{4})$$

Por lo que la longitud del lado recto es: l. r. =

En la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, despejar y para obtener el resultado que se muestra:

$$\frac{y^2}{9}=\frac{x^2}{16}-1$$

$$y=\pm\frac{3}{4}x\left(\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}\right)$$

Si la x crece en valor absoluto, entonces la expresión $\frac{16}{x^2}$ se acerca a cero y por lo tanto y se acerca a la expresión:

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

Las cuales son dos rectas, que corresponden a las diagonales del rectángulo dibujado en la primera figura. Dichas rectas se llaman **asíntotas de la hipérbola.**

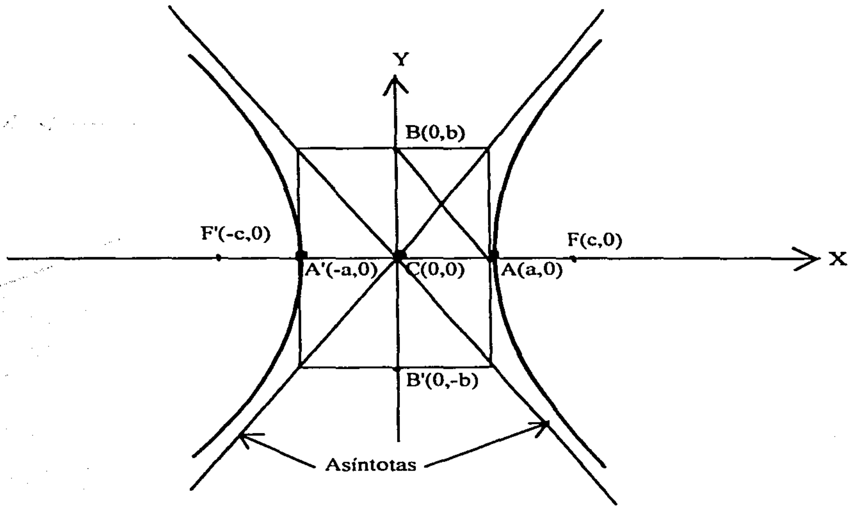
La excentricidad de la hipérbola se define como $e=\frac{c}{a}$, calcularla y mostrar que es mayor que uno.

Con procedimientos similares se puede ver que la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje real sobre el eje X, distancia focal 2c y cantidad constante 2a es :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{donde} \quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

Donde las asíntotas son: $y=\pm\frac{b}{a}x$, la longitud del lado recto es: $2\frac{b^2}{a}$ y la excentricidad se define como: $e=\frac{c}{a}$.

Observar la siguiente figura que corresponde a la situación anterior:

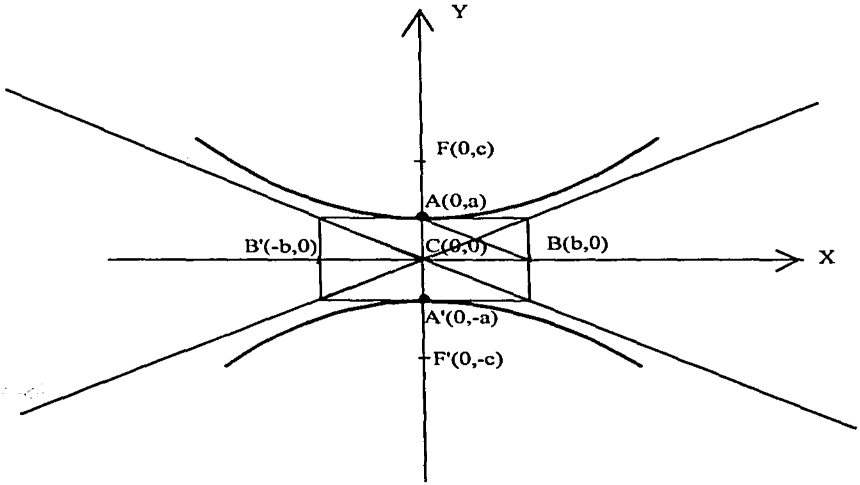


La ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje real sobre el eje Y, distancia focal 2c y cantidad constante 2a es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \text{donde} \quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

Donde las asíntotas son: $y=\pm\frac{a}{b}x$, la longitud del lado recto es: $2\frac{b^2}{a}$ y la excentricidad se define como: $e=\frac{c}{a}$.

La figura siguiente corresponde a esta situación:



Problema 3.

En la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, hallar los siguientes elementos: **centro, focos, vértices, distancia focal, longitud del eje real, longitud del eje imaginario, ecuaciones de las asíntotas, lado recto y excentricidad.**

La ecuación en forma ordinaria es: $\boxed{}$

De donde se obtiene a = 3, b = 2 y por lo tanto c = $\boxed{}$

Coordenadas de los focos: F'(,) , F(,)

Centro: C(0,0)

Vértices: A'(,) , A(,)

Distancia focal: 2c =

Longitud del eje real: 2a =

Longitud del eje imaginario: 2b =

Ecuaciones de las asíntotas:

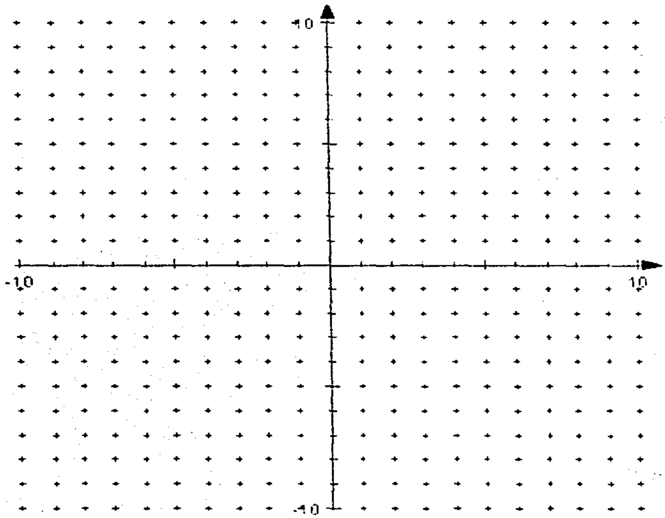
Lado recto: l. r. =

Excentricidad: e =

Despejar y para llenar la siguiente tabla y graficar en el sistema de coordenadas que se dibuja después.

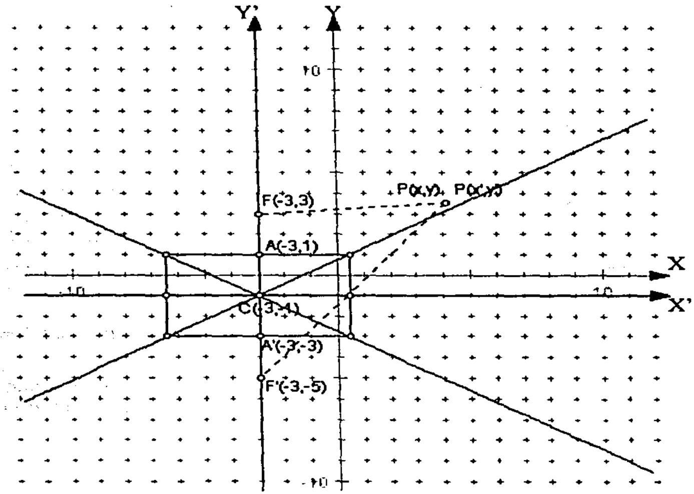
x	y	(x,y)
-5		
-4		
-3		
3		
4		
5		

GRÁFICA:
Señalar todos los elementos mencionados antes.



Problema 4.

Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en C(-3,-1), eje real paralelo al eje Y, distancia focal 2c = 8 y cantidad constante 2a = 4. Ver la siguiente figura:



Consideremos el sistema X'Y' que se obtiene del anterior trasladando el origen al punto C(-3,-1).

Ecuación de la hipérbola en el sistema X'Y' es:

Como $x' = x + 3$, $y' = y + 1$ entonces la ecuación en el sistema XY es:

Despejar y para llenar la siguiente tabla y graficar:

x	y	(x,y)
-8		
-7		
-6		
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		

De la ecuación en forma ordinaria $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{12}=1$ se observa que $b=\sqrt{12}\approx 3.46$

Sustituir en dicha ecuación y = 3 para obtener dos valores de x , con lo que se obtienen dos puntos D y D' ; El segmento DD' es uno de los lados rectos de la hipérbola.

Las coordenadas de D y D' son: D(, 3) , D'(,3)

Longitud del lado recto: l. r. =

Centro: C(,)

Focos: F(,) , F'(,)

Vértices: A(,) , A'(,)

Longitud del eje real: 2a =

Longitud del eje imaginario: 2b =

ecuaciones de las asíntotas: $(y+1)=\frac{3.46}{0.46}(x+3)$, $(y+1)=-\frac{3.46}{0.46}(x+3)$

simplificar las ecuaciones anteriores:

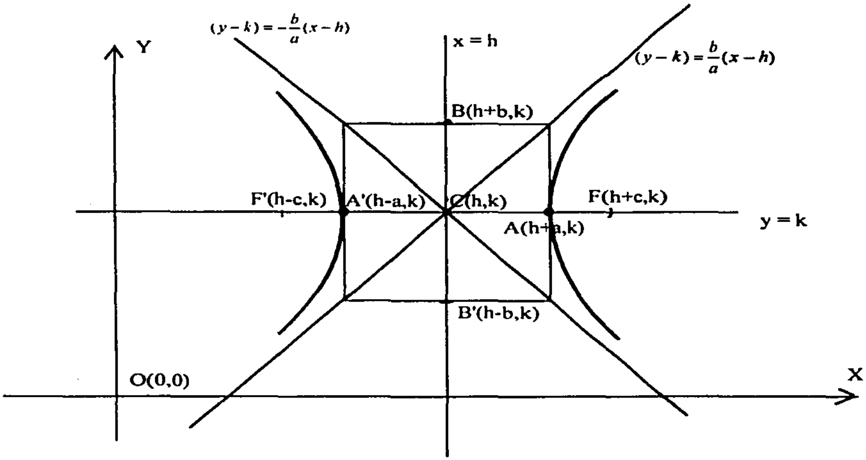
Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=$

Con procedimientos similares se puede ver que:

La ecuación de la hipérbola con centro en C(h,k) , eje real paralelo al eje X , distancia focal 2c y cantidad constante 2a es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{donde} \quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

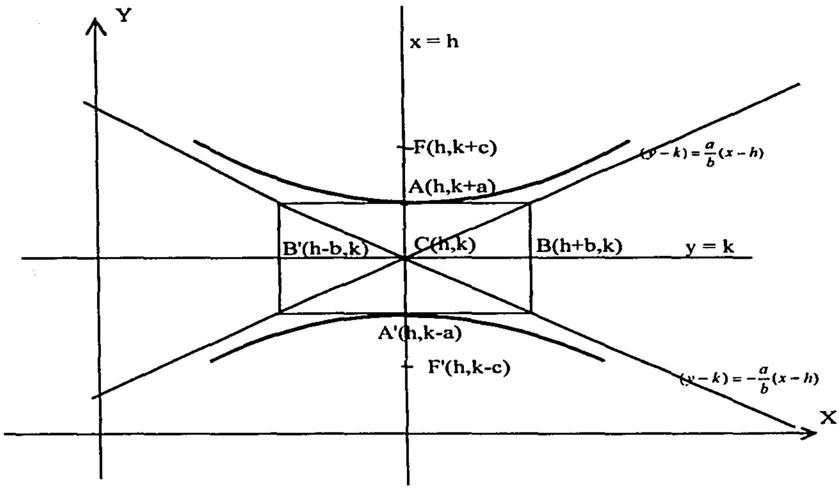
La figura correspondiente a esta situación es la siguiente:



La ecuación de centro C(h,k), eje real paralelo al eje Y, distancia focal 2c y cantidad constante 2 es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \text{donde} \quad b=\sqrt{c^2-a^2}$$

La figura correspondiente es:



Problema 5.

Hallar los elementos de la hipérbola cuya ecuación en forma general es :

$$16x^2 - 9y^2 - 128x - 18y + 391 = 0$$

Completar los trinomios cuadrados perfectos para expresarla en forma ordinaria:

$$16(x^2 - 8x + \qquad) - 9(y^2 + 2y + \qquad) = -391 + \qquad -$$

$$\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

Entonces se trata de una hipérbola con centro en C(4,-1), eje real paralelo al eje Y, a = 4, b = 3 y por lo tanto c = 5.

Con los datos obtenidos encontrar los elementos pedidos:

Centro: C(,)

Focos: F(,) , F'(,)

Vértices: A(,) , A'(,)

Longitud del eje real: 2a =

Longitud del eje imaginario: 2b =

Distancia focal: 2c =

Ecuación de la recta que contiene al eje real:

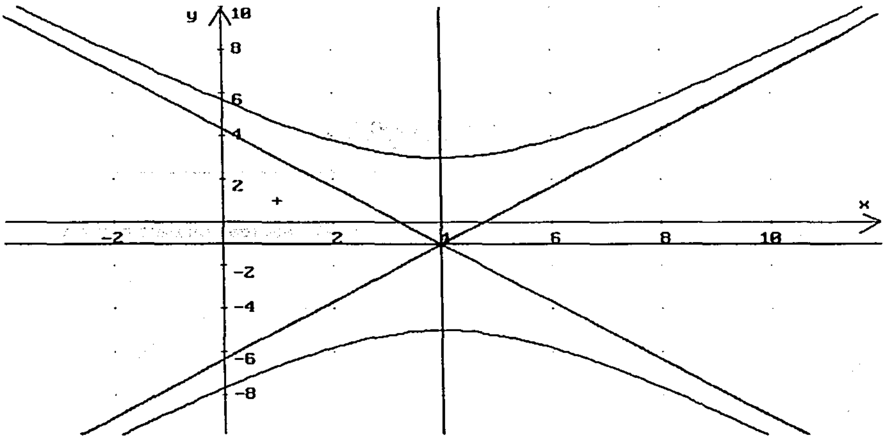
Ecuación de la recta que contiene al eje imaginario:

Ecuaciones de las asíntotas:

Longitud del lado recto: l. r. =

Excentricidad: e =

En la gráfica siguiente señalar los elementos anteriores y dibujar el rectángulo de lados 2a y 2b.



Problema 6.

Hallar la ecuación de la hipérbola, cuyo centro es C(2,5), longitud del eje real 2a = 8, excentricidad $e = \frac{9}{2}$ y el eje real es paralelo al eje Y.

Los datos anteriores indican que la ecuación es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Como $e = \frac{c}{a}$ y $e = \frac{9}{2}$ entonces:

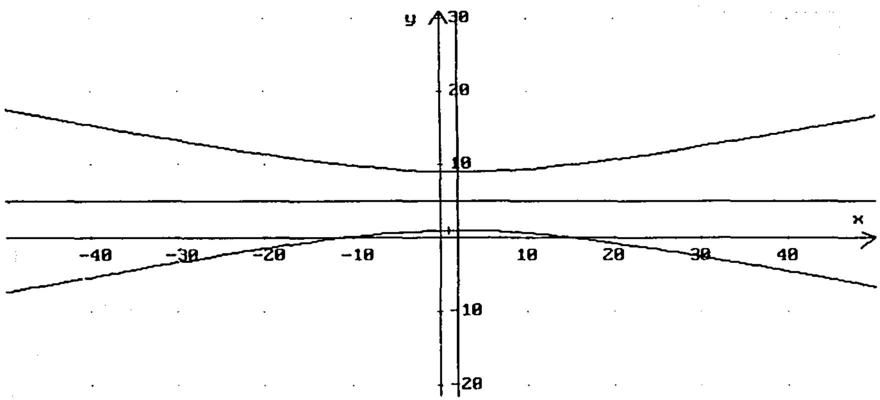
$$\frac{9}{2} = \frac{c}{4} \quad \therefore \quad c = 18$$

Calcular b: **b =**

La ecuación en forma ordinaria es:

En forma general.

Gráfica:



problema 7.

Hallar la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los coordenados y que pasa por los puntos P(7,-2), Q(-1,-2), R(8,1) y S(-2,-5).

La ecuación es de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir las coordenadas de los puntos P, Q, R y S en la ecuación anterior, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$49A + 4C + 7D - 2E + F = 0 \text{ ------------ } (1)$$

$$A + 4C - D - 2E + F = 0 \text{ ------------ } (2)$$

$$64A + C + 8D + E + F = 0 \text{ ------------ } (3)$$

$$4A + 25C - 2D - 5E + F = 0 \text{ ------------ } (4)$$

Para resolver el sistema proceder como se indica a continuación:

Restamos (2) de las otras tres ecuaciones y obtenemos el sistema de tres ecuaciones (5), (6) y (7) :

Sumamos (6) y (7) para obtener el sistema (5), (8) y restando (5) de (8) :

C = -A

Sustituyendo en las otras, obtenemos:

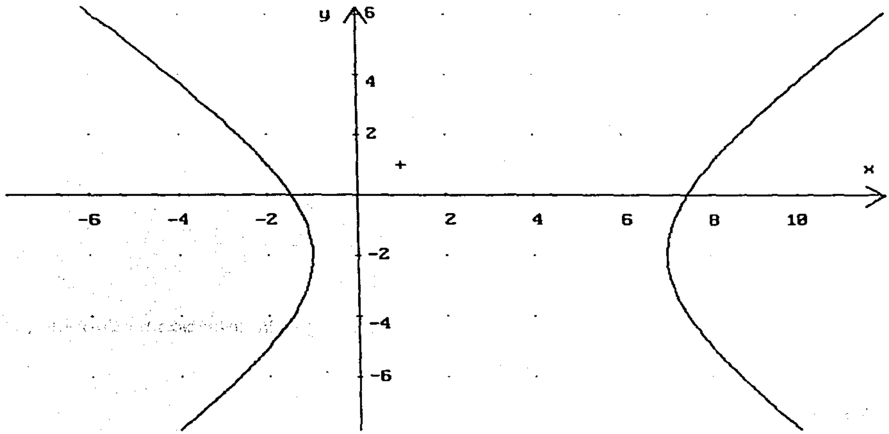
D = -6A , E = -4A , F = -11A

Sustituyendo en la ecuación del principio:

$$Ax^2 - Ay^2 - 6Ax - 4Ay - 11 = 0 \quad \text{dividiendo entre } A$$

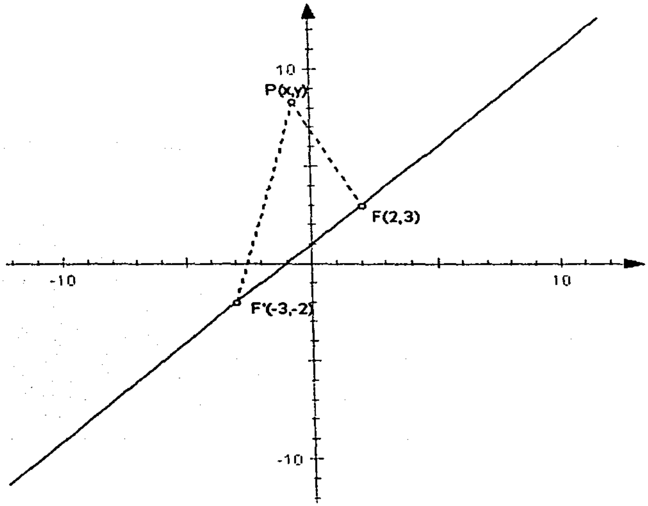
$$\boxed{x^2 - y^2 - 6x - 4y - 11 = 0}$$

La gráfica de la ecuación anterior se muestra a continuación, señalar los puntos P, Q, R y S para comprobar que están en la hipérbola.



Problema 8.

Hallar la ecuación de la hipérbola de focos F(2,3), F'(-3,-2) y longitud del eje real 2a = 4. Ver figura:



Si P(x,y) es un punto que está en la hipérbola, entonces por la definición tendremos que:

$$d(P,F) - d(P,F') = 4$$

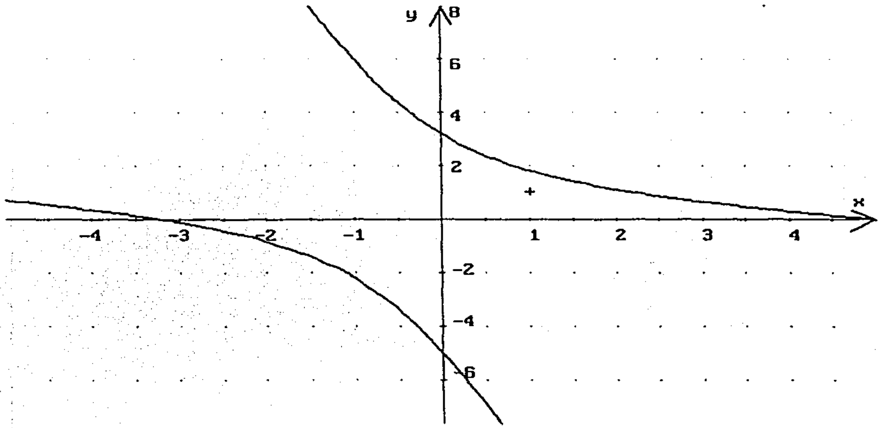
Lo que significa que:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 4$$

Simplificar la expresión anterior, para obtener la ecuación mostrada:

$$9x^2 + 9y^2 + 50xy - 16x + 16y - 144 = 0$$

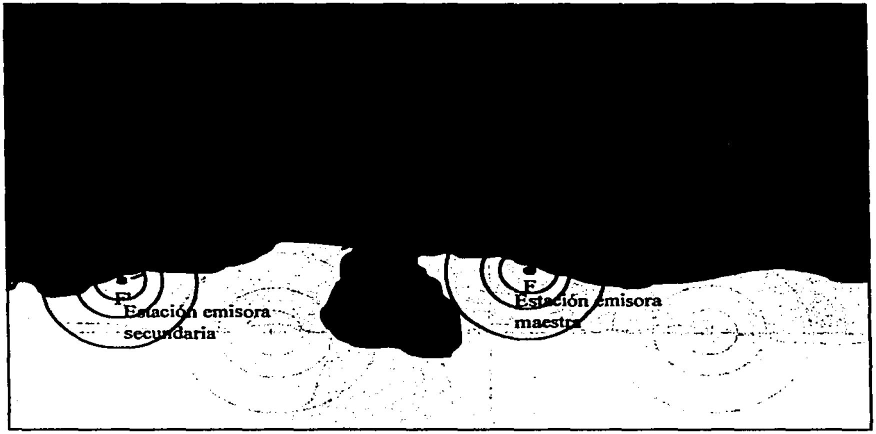
En la siguiente gráfica que corresponde a la hipérbola anterior, señalar y dar las coordenadas del centro y los vértices, así como las ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes.



Problema 9.

En el sistema de navegación LORAN, una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente mas cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales. En tanto que la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante. Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija en el tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Así, para cada diferencia de tiempo, se tendrá una hipérbola diferente, cada una de las cuales guía al barco a una posición diferente en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes trayectorias hiperbólicas correspondientes a las diversas diferencias de tiempo.

Ver la siguiente figura que ilustra esta situación:



$d(P,F) - d(P,F') = \text{constante}$

Supongamos que se tienen dos estaciones LORAN con una distancia de 250 millas entre sí a lo largo de un litoral recto.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las dos señales LORAN. Fije un sistema apropiado de coordenadas rectangulares para determinar dónde tocaría tierra el barco si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

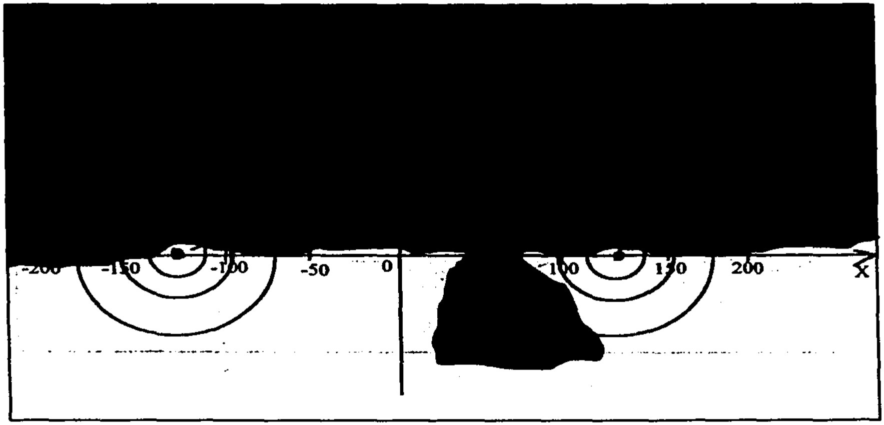
b) Si el barco quiere entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas de la estación maestra, qué diferencia de tiempo deberá buscar?

c) Si el barco está a 80 millas de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿ cuál es su posición exacta?

NOTA: La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo.

Para el inciso a:

El sistema de coordenadas que se va a usar se muestra en la siguiente figura:



Como la diferencia de tiempo es 0.00086 segundos y la velocidad de la señal es de 186000 millas por segundo, la diferencia de distancias del barco a cada estación es:

Esta diferencia de distancias es igual a 2a, entonces el vértice de la hipérbola correspondiente está en: V(,   ).

Puesto que el foco está en F(125,0), si el barco sigue esta hipérbola tocará tierra a 45 millas de la estación maestra.

Para el inciso b.

Si se quiere tocar tierra a 25 millas de la estación maestra, el barco deberá seguir una hipérbola con vértice en:

V(,) entonces a = $\boxed{}$

Por lo anterior, la diferencia constante entre las distancias del barco a cada estación es de:

$\boxed{}$

Entonces la diferencia de tiempo es:

Tiempo = $\boxed{}$

Para el inciso c

Si queremos la localización exacta del barco, necesitamos encontrar la ecuación de la hipérbola con vértice en A(100,0) y un foco en F(125,0). La forma de la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Con los datos que se tienen calcular b y escribir la ecuación de la hipérbola:

b = $\boxed{}$

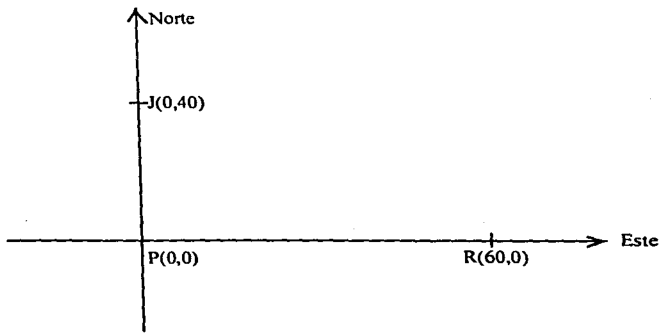
Ecuación: $\boxed{}$

Puesto que el barco está a 80 millas de la costa, usamos $y = 80$ en la ecuación y despejamos x:

De acuerdo a lo anterior, la posición del barco es P(146,80)

Problema 10.

El teniente coronel de la cuarta división de artillería, Pedro Rosas, se encuentra instalado en el puesto de mando con coordenadas P(0,0). Está en comunicación directa a través del equipo de radio con el teniente Juan Ramírez, situado en el puesto de escucha de avanzada, 40 km al norte del puesto de mando; y con el sargento Refugio Pérez, que se encuentra 60 km al este del puesto de mando. Ver la figura:



Donde J(0,40) corresponde a la posición del teniente Juan Ramírez y R(60,0) a la posición del sargento Refugio Pérez.

Durante el ejercicio anual de prácticas, el estruendo del disparo de salva de una pieza de artillería situada en un punto desconocido se escucha en el puesto del sargento Pérez a las 14:25 horas, un minuto después se registra el ruido del disparo en el puesto de escucha del teniente Ramírez y a las 14:27 se registra en el puesto de mando.

Si estuvieras en el lugar del teniente coronel ¿ hacia que punto ordenarías avanzar a las tropas para tomar la pieza de artillería?

Tomar como dato que la velocidad del sonido a 27 °C es aproximadamente 20 km/min.

Los puestos de escucha son los focos de dos hipérbolas, con un foco común, que en este caso es el puesto de mando P(0,0).

Consideremos los puntos : P(0,0) del teniente coronel Pedro Rosas y J(0,40) del teniente Juan Ramírez.

La diferencia de tiempo con que escuchan el estruendo es 1 minuto, entonces la diferencia de distancias es:

20 km

Considerando la hipérbola cuyos focos son P(0,0) y J(0,40), entonces se trata de una hipérbola con eje real sobre el eje Y, entonces:

La distancia focal 2c = **por lo tanto c =**

La cantidad constante 2a = **por lo tanto a =**

b =

Entonces la ecuación es:

$$\boxed{\frac{(y-20)^2}{100}-\frac{x^2}{300}=1}$$

Considerando ahora los puntos P(0,0) del teniente coronel Pedro Rosas y R(60,0) del sargento Refugio Pérez, la diferencia de tiempo con que escuchan el estallido es 2 minutos, por lo tanto la diferencia de distancias es:

40 km

Considerando la hipérbola cuyos focos son P(0,0) y J(60,0), se trata de una hipérbola con eje real sobre el eje X, entonces:

La distancia focal 2c = **por lo tanto c =**

La cantidad constante 2a = **por lo tanto a =**

b =

Entonces la ecuación es:

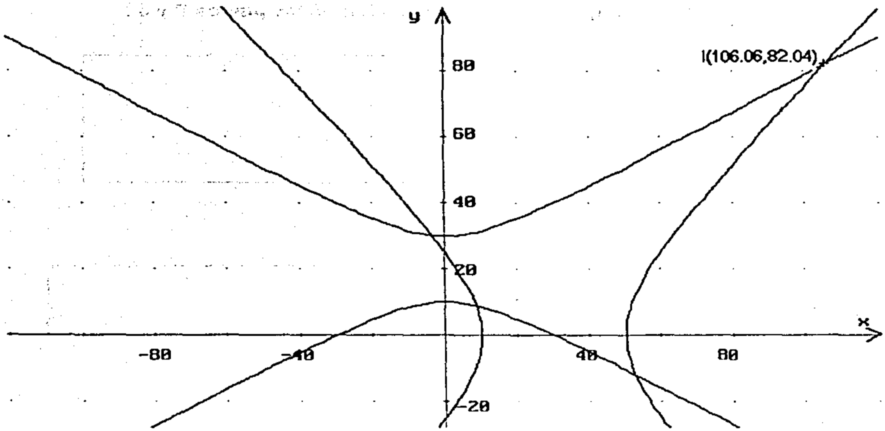
$$\boxed{\frac{(x-30)^2}{400}-\frac{y^2}{500}=1}$$

Expresar las ecuaciones en forma general para obtener lo que se muestra:

$$3y^2-x^2-120y+900=0$$
$$4y^2-5x^2+300x-2500=0$$

La solución del problema es una de las intersecciones de las hipérbolas anteriores que se encuentra resolviendo el sistema anterior, lo cual nos lleva a resolver una ecuación de cuarto grado en una variable, lo cual por el momento no es posible.

Usaremos las gráficas de dichas hipérbolas para encontrar una aproximación del punto que nos interesa:



En la gráfica anterior se tiene que una de las cuatro intersecciones de las hipérbolas es I(106.06,82.04), comprobar que este punto es donde se llevó a cabo la detonación:

d(I,P) =

d(I,J) =

d(I,P) – d(I,J) =

Diferencia de tiempo con que se oye la detonación en los puntos P y J :

d(I,P) =

d(I,R) =

d(I,P) – d(I,R) =

Diferencia de tiempo con que se oye la detonación en los puntos P y R :

De acuerdo a lo anterior, las tropas deben avanzar hacia el punto I(106.06,82.04)

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- En la siguiente figura señalar los elementos de la hipérbola mencionados:

a) Eje real

b) Eje imaginario

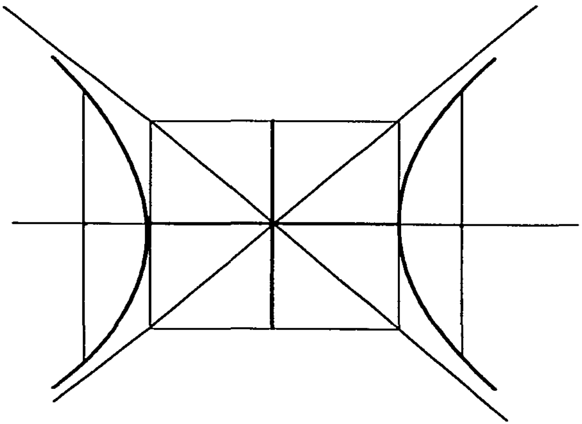
c) Asíntotas

d) Lados rectos

e) Focos

f) Vértices

g) Centro



2.- Hallar los elementos y graficar las siguientes hipérbolas con centro en el origen:

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

3.- Hallar los elementos y graficar las siguientes hipérbolas:

a) $y^2-9x^2-9=0$ b) $2x^2-y^2-4=0$

4.- Hallar la ecuación de las hipérbolas siguientes:

a) Centro: C(0,0), uno de los focos: F'(0,6), un vértice: A(0,4).

b) Uno de los focos: F(0,6), vértices: A'(0,-2), A(0,2).

c) Focos: F(0,2), F'(0,-2) ; una asíntota: $y = -x$.

5.- Hallar los elementos y graficar las hipérbolas siguientes:

a) $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$ b) $\dfrac{(y+3)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$

6.- Hallar los elementos y graficar las hipérbolas cuya ecuación es:

a) $2y^2 - x^2 + 2x + 8y + 3 = 0$ b) $x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$

7.- Hallar la ecuación de la hipérbola con focos F'(-2,-4) , F(3,5) y cantidad constante 2a = 5.

8.- Hallar la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pase por los puntos A(2,-2), B(-3,8), C(-1,-1), D(2,8).

9.- Dos estaciones LORAN están situadas a 200 millas de distancia una de la otra a lo largo de un litoral recto.

a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00038 segundos entre las señales LORAN. Fije un sistema coordenado rectangular apropiado para determinar dónde tocaría tierra el barco si siguiese la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

b) Si el barco quiere entrar a un punto localizado entre las dos estaciones a 20 millas de la estación maestra, ¿ qué diferencia de tiempo debe buscar ?

c) Si el barco está a 50 millas de la costa cuando obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿ cuál es su localización exacta ?

NOTA: La velocidad de cada señal de radio es de 186000 millas por segundo.

10.- En una prueba de dispositivos registradores, un grupo de sismólogos, coloca dos de sus dispositivos a 2000 pies uno del otro, uno en el punto A, al oeste del otro, que está en el punto B. En un punto intermedio a 200 pies de B, se detona una pequeña carga explosiva y se anota el tiempo en el que se registra la detonación en cada dispositivo. Una segunda explosión va a efectuarse en un punto directamente al norte del punto B.

a) ¿Qué tan al norte debe escogerse el punto para la segunda explosión, de manera que la diferencia de tiempo registrada por los dispositivos en A y B sea la misma que la registrada en la primera detonación ?

b) Explique por qué este experimento puede usarse para calibrar los instrumentos.

EXAMEN DE PRÁCTICA.

1.- Llenar los espacios vacios para las hipérbolas descritas por los datos siguientes:

a) La hipérbola de centro C(h,k), eje real paralelo al eje X y de longitud 2a, eje imaginario 2b y distancia focal 2c.

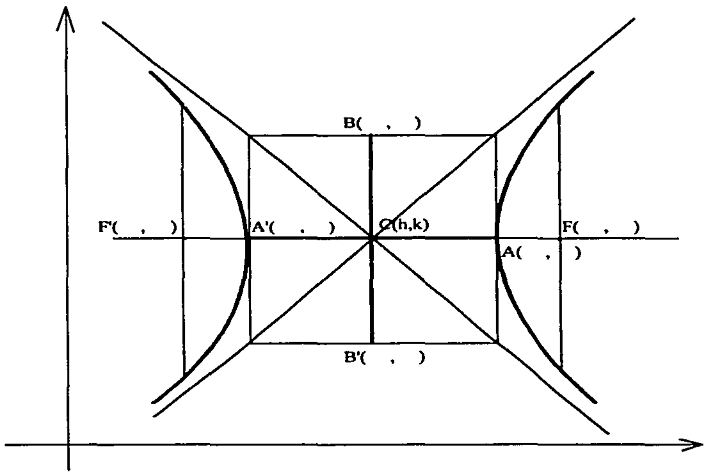
Ecuación del eje focal =

Ecuación del eje imaginario =

Ecuaciones de las asíntotas :

l. r. =

e =



b) La hipérbola de centro C(h,k), eje real paralelo al eje Y y de longitud 2a, eje imaginario 2b y distancia focal 2c.

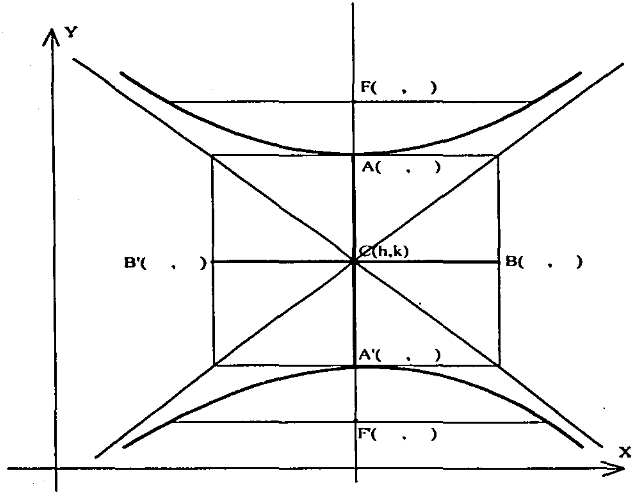
Ecuación del eje real =

Ecuación del eje imaginario =

Ecuaciones de las asíntotas =

l. r. =

e =



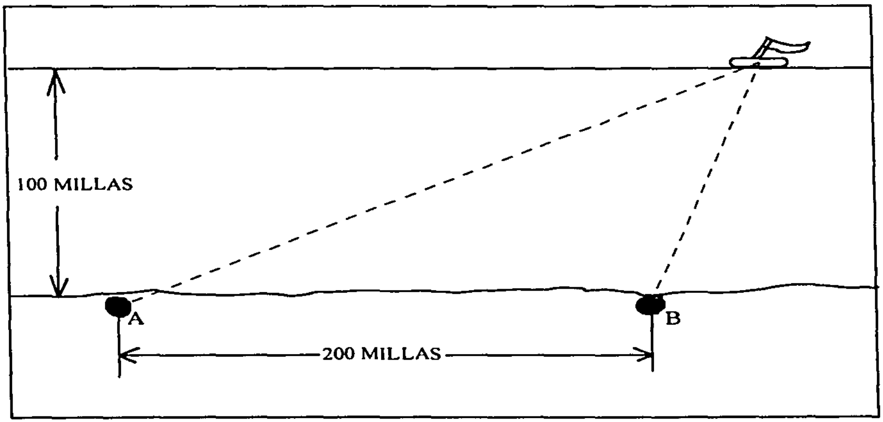
2.- Hallar los elementos y graficar la hipérbola $16x^2 = 9y^2 + 144$.

3.- Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, excentricidad $e = \frac{3}{2}$, pasa por el punto P(8,-5) y el eje focal está sobre el eje X.

4.- Hallar los elementos de la hipérbola $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$ y dibujarla.

5.- Hallar la ecuación de la hipérbola con centro C(2,5), $a = 4$, $e = 4.5$ y eje real paralelo al eje Y.

6.- Una embarcación navega siguiendo un curso que está a 100 millas de una costa en línea recta y paralela a la costa. El navío envía una señal de auxilio que se recibe en dos estaciones A y B de guardacostas, ubicadas a 200 millas entre sí, según se ve en la figura. Al medir la diferencia de los tiempos de recepción de la señal, se establece que el barco está 160 millas mas cerca de B que de A. ¿ Cuál es la ubicación de la nave ?



SOLUCIONES A:

- EL EXAMEN DIAGNÓSTICO
- LOS PROBLEMAS PROPUESTOS
- LOS EXÁMENES DE PRÁCTICA

SOLUCIÓN AL EXAMEN DIAGNÓSTICO.

1. c)
2. d)
3. a)
4. d)
5. b)
6. d)
7. c)
8. b)
9. a)
10. a)
11. c)
12. b)
13. b)
14. a)
15. d)
16. b)
17. b)
18. c)
19. a)
20. a)
21. b)
22. d)
23. c)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD I:

1.-R = $\{(a,1),(a,2),(c,2),(c,4),(b,5),(d,7),(e,6)\}$

2.- $\{(Al,Au),(Ag,Au),(Cr,Fe),(Ni,Cr),(Au,Cu),(Ag,Mg),(Fe,Pb),(Cr,Al),$
$(Mg,Fe),(Ni,Ag),(Al,Ni),(Fe,Fe),(Cr,Cr),(Pb,Fe),(Al,Cu)\}$

3.-

a) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\left(-\frac{1}{8},\infty\right]$

b) dominio : $\mathbb{R}-\{3\}$, rango : $\mathbb{R}-\{0\}$

c) dominio : $\left[\frac{2}{3},\infty\right)$, rango : $[0,\infty)$

d) dominio : $\mathbb{R}-\{3,1\}$, rango : $\mathbb{R}-\{0\}$

4.-

a) biyectiva.

b) inyectiva.

c) ninguna.

d) biyectiva.

5.-

a) $y^{-1}=\dfrac{x+3}{2}$

b) $y^{-1}=\sqrt{x+2}-1$

c) $y^{-1}=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

6.- $A(h)=h\left(\dfrac{12-h}{2}\right)$

7.- $d(t)=20\cdot\sqrt{13t^2+8t+4}$

8.- $V(h) = 250\pi - \dfrac{\pi(30-h)^3}{108}$

9.- $V(x) = 4x(30-x)(20-x)$

10.- $T(x) = \dfrac{5 \cdot \sqrt{x^2 - 12x + 40} + 3x}{15}$

SOLUCION AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD I.

1.- a) Si es función. b) Si es función. c) No es función.

2.-

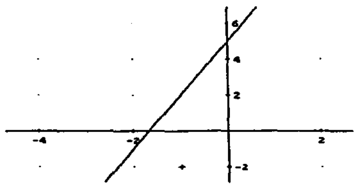
a) $f(-1) = \dfrac{1}{4}$ b) $f(\tfrac{1}{2}) = \dfrac{2}{11}$ c) $f(x+5) = \dfrac{1}{x+10}$

d) $f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{x+h+5} - \dfrac{1}{x+5}$

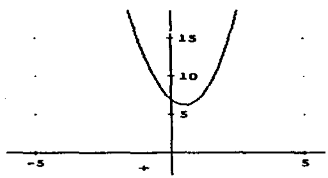
3.- a) No es función. b) Si es función.

4.-

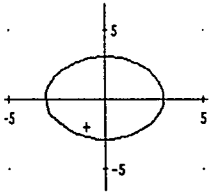
a) Si es función.



b) Si es función.



c) No es función.



5.-

a) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[-2, \infty)$

b) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$

c) dominio : $\mathbb{R} - \{3,1\}$, rango : $\mathbb{R} - \{0\}$

6.-

a) Rango = $[-3, 6]$

b) Rango = $[-1, \infty]$

c) Rango = $\{0, 2, 4\}$

7.-

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{3}$, dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}$, dominio : $\mathbb{R}$, rango : $\mathbb{R}$

c) No es biyectiva.

8.- $N(t) = 500 \cdot 2^{3 \cdot t}$

9.- $A(x) = 100x - 2x^2$

10.- $C(x) = (20 - 0.5x)(30 + x)$.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD II.

1.-

a)

$$(\tan\alpha+\cot\alpha)(sen\alpha\cos\alpha)=\left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right)(sen\alpha\cos\alpha)=$$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen\alpha\cos\alpha}(sen\alpha\cos\alpha)=$$

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}(sen\alpha\cos\alpha)=1$$

b)

$$\tan^2\alpha-sen^2\alpha=\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}-sen^2\alpha=\frac{sen^2\alpha-sen^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha(sen^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{sen^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

c) De la identidad $\cos 2\theta=1-2sen^2\theta$ obtenemos: $sen^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, si $2\theta=\alpha$ entonces $\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ sustituyendo se obtiene la identidad deseada: $sen^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

Procediendo en forma análoga usando la identidad $\cos 2\theta=-1+2\cos^2\theta$ se obtiene la otra.

d)

$$\frac{\csc\theta}{1+\csc\theta}=\frac{\frac{1}{sen\theta}}{1+\frac{1}{sen\theta}}=\frac{\frac{1}{sen\theta}}{\frac{sen\theta+1}{sen\theta}}=\frac{1}{1+sen\theta}=\frac{1}{1+sen\theta}\cdot\frac{1-sen\theta}{1-sen\theta}=$$

$$\frac{1-sen\theta}{1-sen^2\theta}=\frac{1-sen\theta}{\cos^2\theta}$$

e)

$$\frac{1-2sen^2\theta}{sen\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1-sen^2\theta-sen^2\theta}{sen\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-sen^2\theta}{sen\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{sen\theta\cdot\cos\theta}-\frac{sen^2\theta}{sen\theta\cdot\cos\theta}=$$

$$\cot\theta-\tan\theta$$

f)

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}=\frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}}=\frac{\dfrac{\cos\theta+1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}}=\cos\theta+1=1+\cos\theta\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}=$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}=\frac{sen^2\theta}{1-\cos\theta}$$

2.-

a) $AC=\sqrt{32}$, $\sphericalangle A\approx 19.47°$, $\sphericalangle B\approx 70.53°$

b) $BC\approx 3.28$, $AC\approx 6.18$, $\sphericalangle B\approx 62°$

3.- 5453 metros sobre el nivel del mar.

4.-

a) $\gamma=80°$, $b\approx 5.39$, $c\approx 6.128$

b) $\beta\approx 25.37°$, $\gamma\approx 114.63$, $c\approx 4.24$

c) dos soluciones: primera solución: $\beta\approx 49.88°$, $\gamma\approx 95.12°$, $c\approx 10.4$
segunda solución: $\beta\approx 130.12°$, $\gamma\approx 14.88°$, $c\approx 2.68$

d) No tiene solución.

5.- $\sphericalangle CAB\approx 84.74°$, distancia ≈ 183.72 pies

6.-

a) $\beta\approx 46.9°$, $\gamma\approx 103.10°$

b) $\alpha \approx 48.5°$, $\beta \approx 38.63°$, $\gamma \approx 92.87°$

c) $\alpha \approx 12.76°$, $\gamma \approx 147.24°$, $b \approx 3.2$

d) $\alpha \approx 127.16°$, $\beta \approx 32.1°$, $\lambda \approx 20.74°$

7.-

a) 26.5°

b) 30.8 horas.

8.- Aproximadamente 2.772469432 minutos.

9.- $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, -1 , -1 , $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$

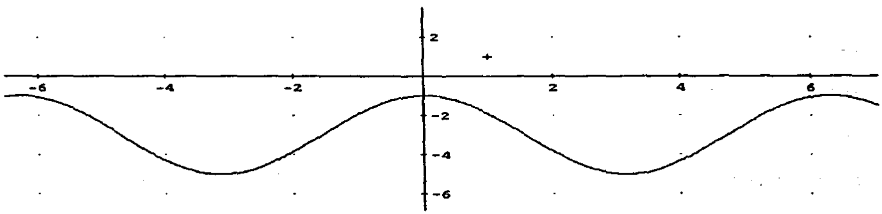
10.-

a) $sen2660° = sen40°$

b) $\cos 2357° = -\cos 17°$

c) $\tan 3555° = -\tan 45°$

11.- Amplitud: 2 , Periodo: 2π , desfasamiento: $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.



12.-

a) y_0 es la altura promedio del agua sobre P_0 y la altura que se tenia a las 0 horas del 1 de enero.

b) 7.5 metros.

c) $\frac{\pi}{6.25}$

SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD II.

1.-

a)

$$1-\frac{\cos^2\theta}{1+sen\theta}=1-\frac{\cos^2\theta(1-sen\theta)}{(1+sen\theta)(1-sen\theta)}=1-\frac{\cos^2\theta(1-sen\theta)}{1-sen^2\theta}=$$

$$1-\frac{\cos^2\theta(1-sen\theta)}{\cos^2\theta}=1-1+sen\theta=sen\theta$$

b)

$$\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{sen\theta}=\frac{sen^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{sen\theta(1+\cos\theta)}=\frac{sen^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{sen\theta(1+\cos\theta)}=$$

$$\frac{2+2\cos\theta}{sen\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2(1+\cos\theta)}{sen\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{sen\theta}=2\csc\theta$$

2.-

a) $\alpha\approx 57.42°$, $\beta\approx 32.58°$, $\text{a}\approx 10.95$

b) $\alpha=65°$, $\text{b}\approx 2.9$, $\text{a}\approx 6.34$

3.-

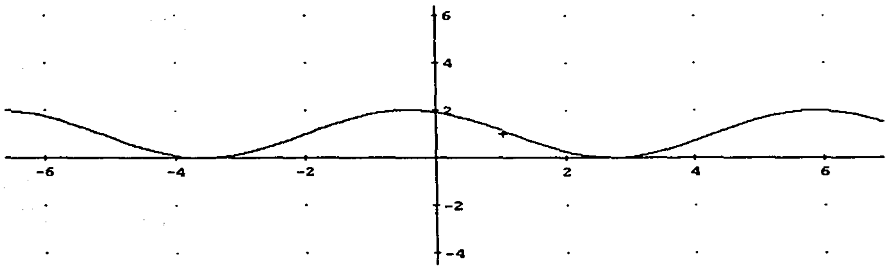
a) $\alpha\approx 157.75°$, $\gamma\approx 7.25°$, $\text{b}\approx 6.15$

b) $\beta=139°$, $\text{b}\approx 13.47$, $\text{c}\approx 5.31$

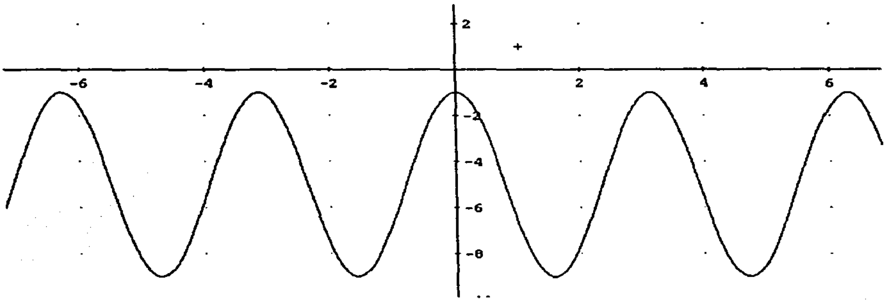
4.- $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -1 , -1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

5.-

a) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[0,2]$, amplitud : 1, periodo : 2π , desfasamiento: dos unidades a la izquierda.



b) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $[-9,-1]$, amplitud : 4 , periodo : π , desfasamiento: 0.



6.- 250.25 pies.

7.- 217.9 yardas.

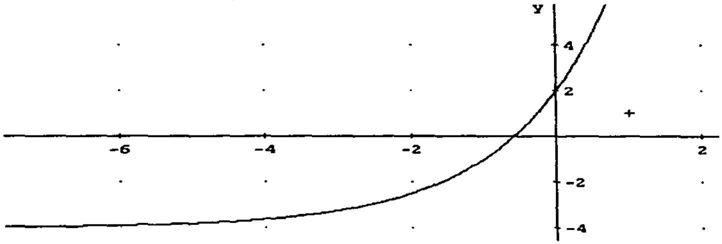
8.- $\alpha = 31.8351°$, $\beta = 98.07°$, $\gamma = 50.0949°$

9.- 12 radianes.

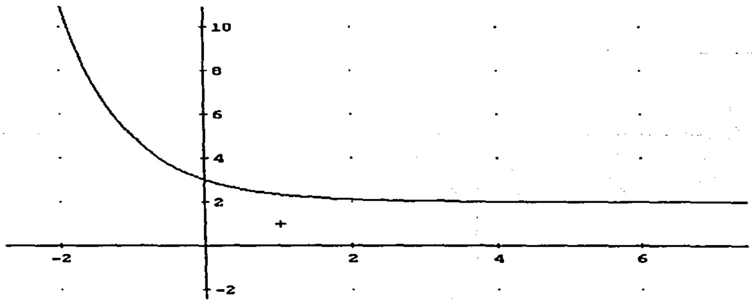
SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD III.

1.-

a) dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(-4,\infty)$, asíntota horizontal : y = -4 , creciente en $\mathbb{R}$.

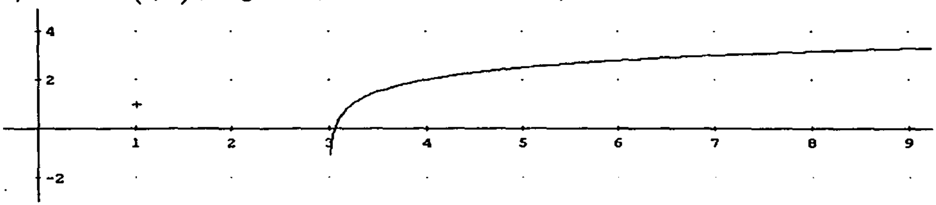


c) dominio : $\mathbb{R}$, rango $(2,\infty)$, asíntota : y = 2 , decreciente en $\mathbb{R}$.

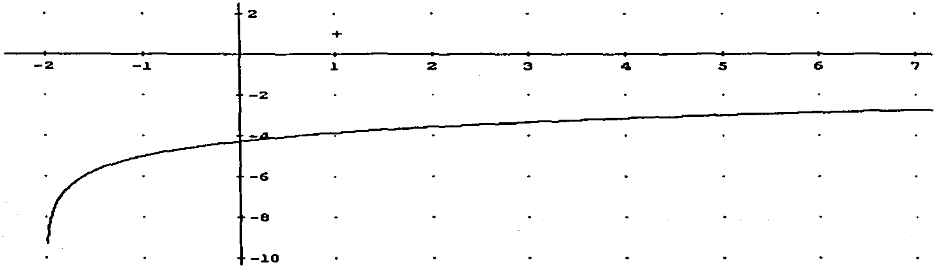


2.-

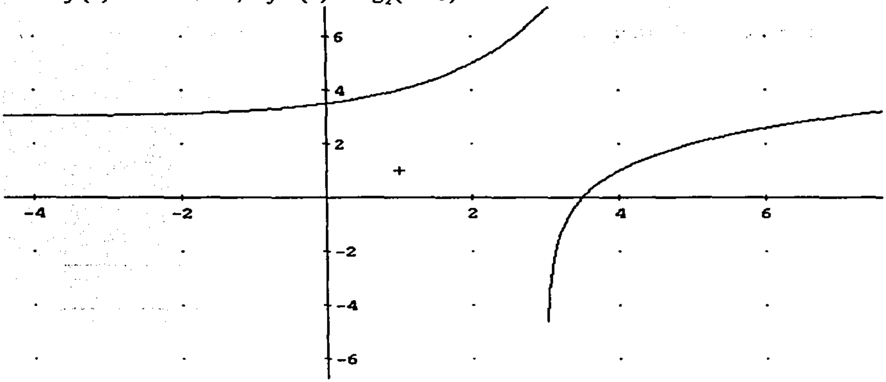
a) dominio : $(3,\infty)$, rango : $\mathbb{R}$, asíntota vertical : x = 3 , creciente en todo su dominio.



b) dominio : $(-2,\infty)$, rango : $\mathbb{R}$, asíntota vertical : x = -2 , creciente en todo su dominio.



3.- $f(x) = 2^{x-1} + 3$, $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)+1$



4.-

a) 2 , 5 , ¼ , x+y, -1 , 3/2 , -2 .

b) ¼ , 8 , 27 , - ½ , 25 , 64 .

5.-

a) x = 2 b) x = -2 c) x = 1.118285

6.-

a) $x = -1$ b) $x = 33$ c) $x = 2.27781122$

7.-

a)

Tiempo meses	cantidad
4 meses	$7500(1.1)$
8 meses	$7500(1.1)^2$
12 meses 1 año	$7500(1.1)^3$
16 meses	$7500(1.1)^4$
20 meses	$7500(1.1)^5$
24 meses 2 años	$7500(1.1)^6$
n años	$7500(1.1)^{3n}$

b) 8.19 años aproximadamente.

8.-

a)

Tiempo	Cantidad mg
8 horas	$3(.9)$
16 horas	$3(.9)^2$
24 horas 1 día	$3(.9)^3$
32 horas	$3(.9)^4$
40 horas	$3(.9)^5$
48 horas 2 días	$3(.9)^6$
n días	$3(.9)^{3n}$

b) 2.46 22 mg

c) 3.8 días.

9.- A las 5 horas 17.587 minutos PM.

10.- a) 28.4 años b) 94.368 años.

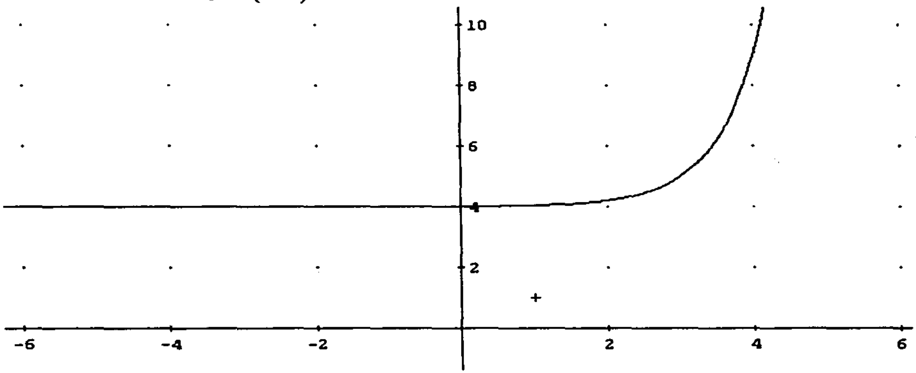
SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD III.

1.- a) $x = 1/3$ b) $x = 64$ c) $x = 32$ d) $x = 4$

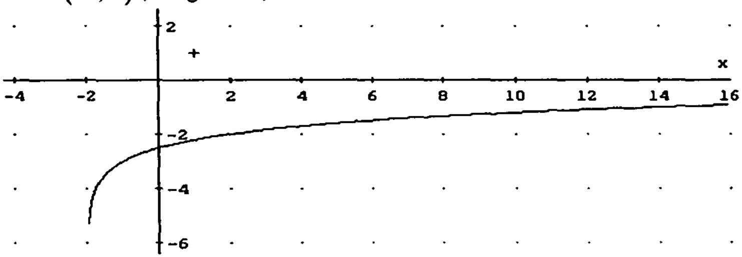
2.- No tiene solución.

3.- $x = 1/26$

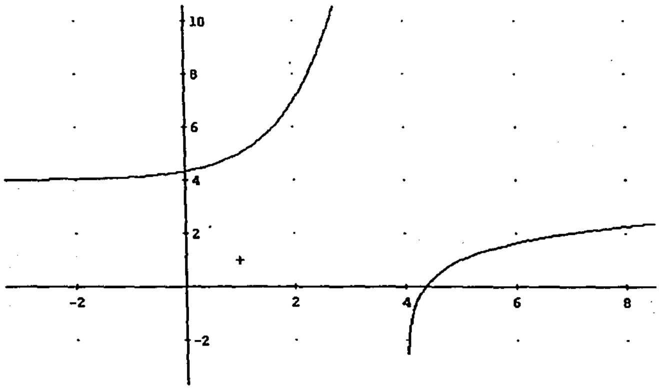
4.- dominio : $\mathbb{R}$, rango : $(4,\infty)$, asíntota : $y = 4$



5.- dominio : $(-2,\infty)$, rango : $\mathbb{R}$, asíntota : $x = -2$



6.- $f(x)=3^{x-1}+4$, $f^{-1}(x)=\log_3(x-4)+1$



7.-

a)

Tiempo	Cantidad restante
5 días	$100(2^{-1})$
10 días	$100(2^{-2})$
15 días	$100(2^{-3})$
20 días	$100(2^{-4})$
25 días	$100(2^{-5})$
30 días	$100(2^{-6})$
n días	$100(2^{-n/5})$

b) 11.66 mg

c) 21.6 días.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD IV.

1.-

a) $d(A,B)=7$ b) $d(B,C)=12$ c) $\vec{d}(C,B)=-12$ d) $\vec{d}(C,A)=-5$

e) $M\left(\dfrac{11}{2}\right)$

2.-

a) $x=\dfrac{14}{9}$ b) $x=26$

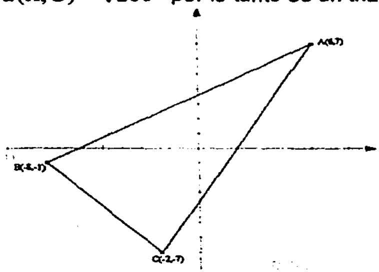
3.- $d(A,B)=\sqrt{50}$ $M\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{11}{2}\right)$

4.-

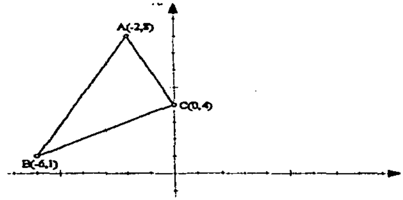
a) $x=\dfrac{11}{5}$, $y=-\dfrac{13}{5}$ b) $x=28$, $y=-37$

5.-

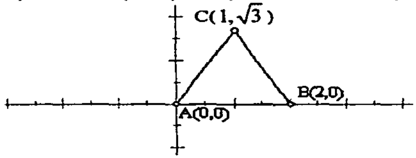
a) $d(A,B)=\sqrt{260}$ y $d(A,C)=\sqrt{260}$ por lo tanto es un triángulo isósceles.



b) $d(A,B)=\sqrt{65}$, $d(A,C)=\sqrt{20}$ y $D(B,C)=\sqrt{45}$. Como se cumple el teorema de Pitágoras, entonces es un triángulo rectángulo. Área = 15 .



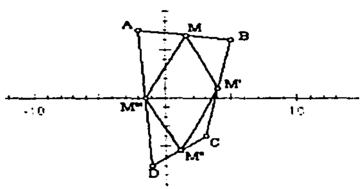
c) $d(A,B)=2$, $d(A,C)=2$, $d(B,C)=2$ por lo tanto es equilátero, el área es $\sqrt{3}$.



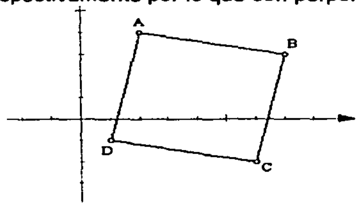
7.- b) $x=\dfrac{a\cdot c}{b+c}$

9.- La pendiente de la recta que pasa por A y B es 2, la de la recta que pasa por A y C también es 2, por lo tanto los tres puntos están en la misma recta.

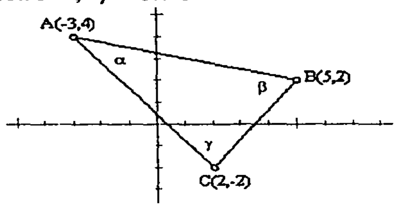
10.- los lados MM' y M''M''' son paralelos porque su pendiente es igual a $-\dfrac{11}{5}$, los lados MM''' y M'M'' son paralelos porque su pendiente es $\dfrac{13}{6}$ por lo tanto es un paralelogramo por tener sus lados opuestos paralelos.



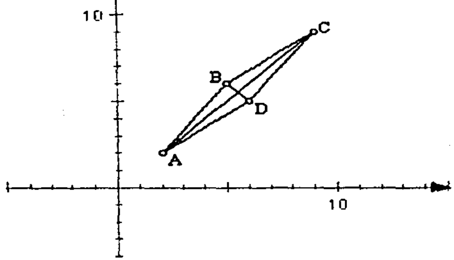
11.- Todos los lados miden $\sqrt{26}$, los lados consecutivos son perpendiculares porque sus pendientes son 5 y $-1/5$ por lo tanto es un cuadrado. Las pendientes de las diagonales AC y BD son $-3/2$ y $2/3$ respectivamente por lo que son perpendiculares.



12.- $\alpha \approx 36.16°$, $\theta \approx 75.96°$, $\gamma \approx 67.88°$



13.- Todos los lados miden $\sqrt{26}$ por lo tanto es un rombo, las pendientes de las diagonales AC y BD son 1 y -1 respectivamente lo que significa, que son perpendiculares.



15.- Área = 64 unidades de superficie.

SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD IV.

1.-

a) x = - 1/5 b) x = 55

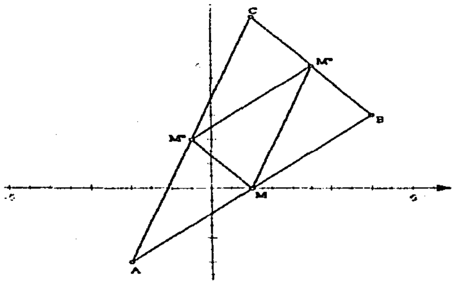
2.-

a) $d(A,B)=\sqrt{145}$ b) $d(A,C)\approx 10.25$ c) $d(B,D)\approx 8.693$ d) $d(C,D)\approx 6.57$

3.-

a) $d(A,B)\approx 15.36$ b) $d(B,C)\approx 19.72$ c) $d(A,C)\approx 8.3$

4.- Perímetro del triángulo ABC = $5+6\cdot\sqrt{2}+\sqrt{109}$, perímetro del triángulo MM'M'' = $\dfrac{5+6\cdot\sqrt{2}+\sqrt{109}}{2}$.



5.-

a) x = - 10/7 , y = -3/7 b) x = 32 , y = 33

6.-

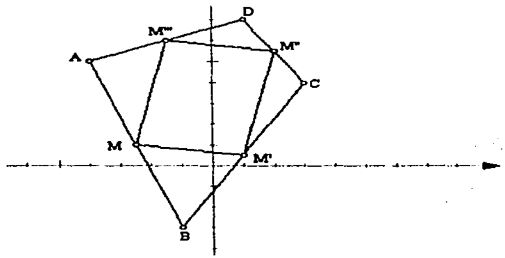
a) Las pendientes de las dos rectas son iguales a –1/2 por lo que son paralelas.
b) La pendiente de una recta es 4 y la de la otra es –1/4 por lo que son perpendiculares.

8.-

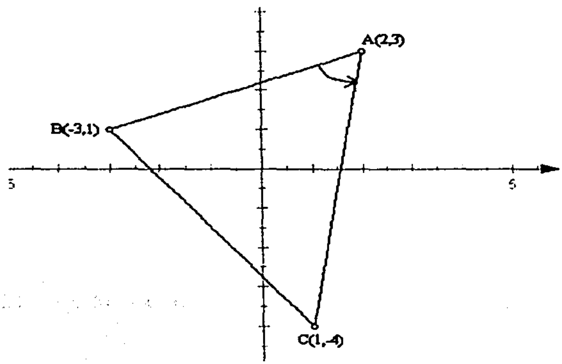
a) No son semejantes. b) i) $\dfrac{y\cdot z}{x}$ o $\dfrac{x\cdot z}{y}$

9.- 87 unidades de superficie.

10.- Las pendientes de MM' y M''M''' son –1/7 por lo tanto son paralelos. Las pendientes de MM'' y M'M'' son las dos 5 por lo que son paralelos y el cuadrilátero MM'M''M''' es un paralelogramo.



11.- 60.06848°

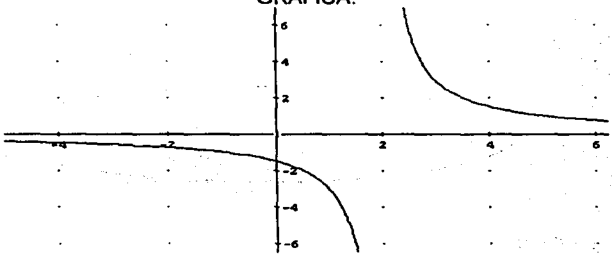


SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD V.

a) $xy-2y-3=0$

- Intersecciones con los ejes: A(0,- 3/2) .
- Simetrías: No hay simetría respecto al eje x, eje y , el origen.
- Extensión: $E_x=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}-\{2\},y\in\mathbb{R}-\{0\}\}$.
- Asíntotas: vertical: x = 2 , horizontal: y = 0 (eje x).

GRÁFICA:



b) $xy-4y=0$

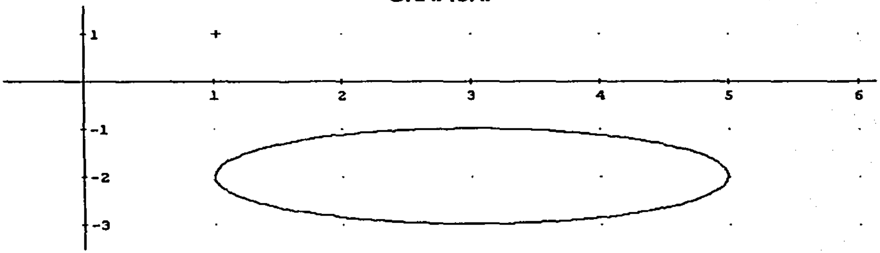
La ecuación es factorizable: $y(x-4)=0$, la gráfica se compone de dos rectas: y = 0 y x - 4 = 0.

GRÁFICA:

c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

- **Intersecciones con los ejes: No hay intersecciones con los ejes coordenados.**
- **Simetrías: No hay simetría respecto a los ejes coordenados y el origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in [1,5], y \in [-3,-1]\}$.
- **Asíntotas: No tiene asíntotas horizontales y verticales.**

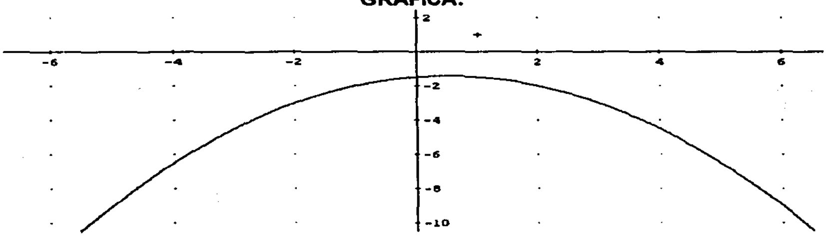
GRÁFICA:



d) $x^2 - x + 4y + 6 = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(0, -3/2).**
- **Simetrías: No hay simetría respecto a los ejes y el origen.**
- **Extensión:** $E_x = \left\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \le -\frac{23}{16}\right\}$.
- **Asíntotas: No hay asíntotas horizontales y verticales.**

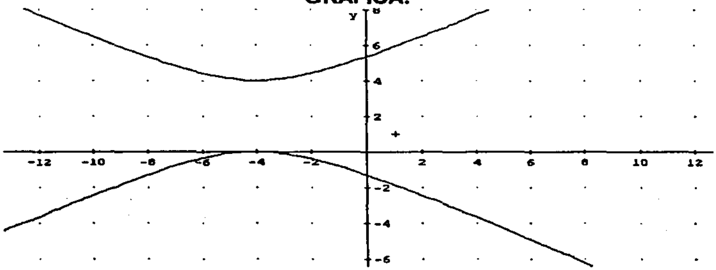
GRÁFICA:



e) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(-4,0) , B(0,-4/3) y C(0,46/9) .**
- **Simetrías: No hay simetría respecto a los ejes coordenados y el origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)\}$.
- **Asíntotas: No hay asíntotas horizontales y verticales.**

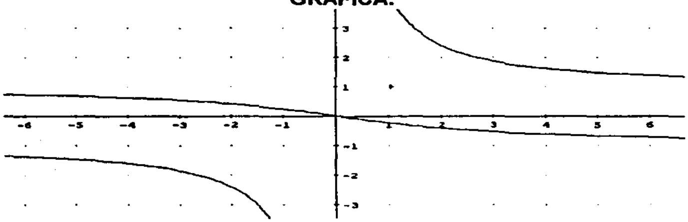
GRÁFICA:



f) $xy^2 - 4y - x = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(0,0).**
- **Simetrías: Es simétrica respecto al origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} - \{1, -1\}\}$
- **Asíntotas: Vertical: x = 0 (eje y), Horizontales: y = -1 , y = 1 .**

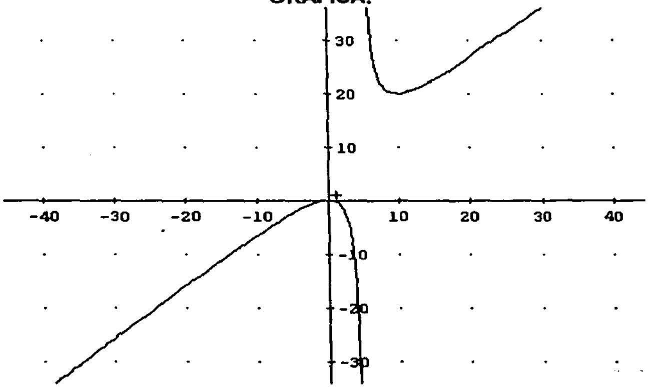
GRÁFICA:



g) $x^2 - xy + 5y = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(0,0) .**
- **Simetrías: No hay simetrías respecto a los ejes y al origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} - \{5\}, y \in (-\infty, 0] \cup [20, \infty)\}$.
- **Asíntotas: Vertical: x = 5 .**

GRÁFICA:

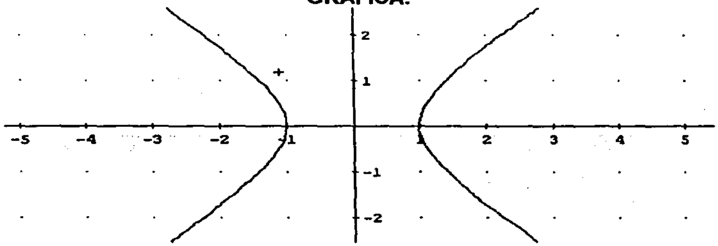


SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD V.

a) $x^2 - y^2 = 1$

- **Intersecciones con los ejes: A(1,0) , B(-1,0) .**
- **Simetrías: Es simétrica respecto a: el eje x , el eje y , al origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty), y \in \mathbb{R}\}$.
- **Asíntotas: No hay asíntotas horizontales y verticales.**

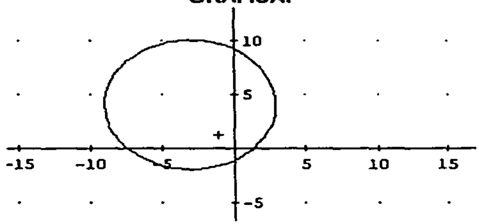
GRÁFICA:



b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(**$\frac{-6+\sqrt{80}}{2}$**,0) , B(**$\frac{-6-\sqrt{80}}{2}$**,0) , C(0,** $\frac{8+\sqrt{108}}{2}$**) , D(0,** $\frac{8-\sqrt{108}}{2}$**).**
- **Simetrías: No hay simetría respecto a los ejes coordenados y el origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in [-9,3], y \in [-2,10]\}$.
- **Asíntotas: No hay asíntotas horizontales y verticales.**

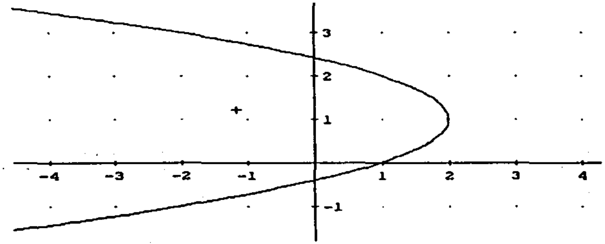
GRÁFICA:



c) $y^2 - 2y + x - 1 = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(1,0) , B(0, $\frac{2-\sqrt{8}}{2}$) , C(0, $\frac{2+\sqrt{8}}{2}$) .**
- **Simetrías: No hay simetría respecto a los ejes coordenados y el origen.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in (-\infty, 2], y \in \mathbb{R}\}$.
- **Asíntotas: No hay asíntotas verticales y horizontales.**

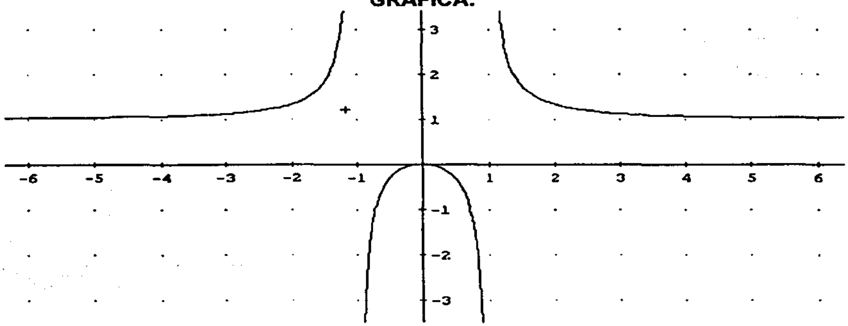
GRÁFICA:



d) $x^2 y - x^2 - y = 0$

- **Intersecciones con los ejes: A(0,0)**
- **Simetrías: Es simétrica respecto a los ejes coordenados.**
- **Extensión:** $E_x = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}, y \in (1,\infty) \cup (-\infty, 0]\}$.
- **Asíntotas: Horizontal: y = 1 , verticales: x = 1 , x = -1 .**

GRÁFICA:

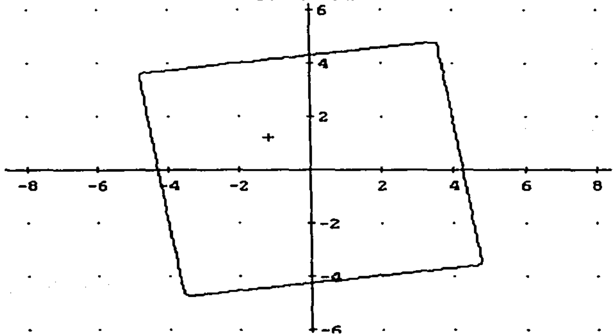


SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD VI.

1.-

a) $|4x-3y|+|3x+4y|=30$

GRÁFICA:



b) $7x^2-9y^2+14x+36y-92=0$

2.-

a) $11x+2y-41=0$ b) $5x+4y+1=0$ c) $y=\frac{3}{2}x+4$

d) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{7}=1$ e) $x\cdot\cos 30°+y\cdot sen30°-7=0$

3.-

a) Simplificada (2) , General (4) , Simétrica (1) , Normal (3).

b)

i) $4x+3y-12=0$

j) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1$

k) $\frac{-5}{\sqrt{34}}x+\frac{3}{\sqrt{34}}y-\frac{7}{\sqrt{34}}=0$

l) $y=-\frac{\cos 30°}{sen30°}x+\frac{5}{sen30°}$

4.- Medianas: $7x+6y-1=0$, $x=-1$, $x-6y+9=0$. Baricentro : $(-1,\frac{4}{3})$

5.- Mediatrices: $2x-5y+11=0$, $2x-y+6=0$, $2x+3y+1=0$. Circuncentro: $(-\frac{19}{8},\frac{5}{4})$.

6.- Alturas: $2x+3y-8=0$, $2x-y-2=0$, $2x-5y+4=0$. Ortocentro: $(\frac{7}{4},\frac{3}{2})$.

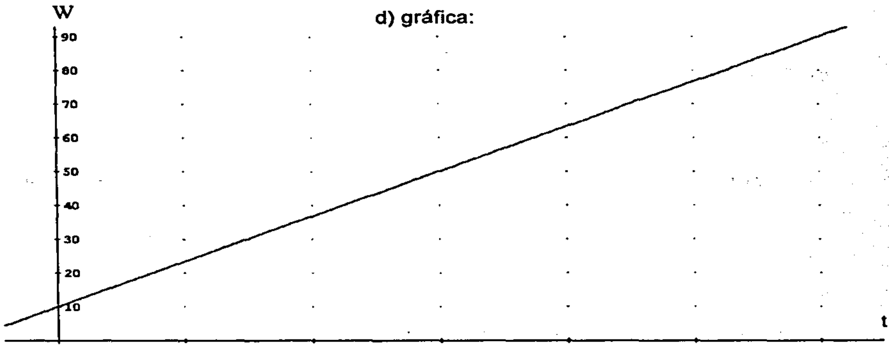
7.- La pendiente de la recta que pasa por el baricentro y el circuncentro es: $\frac{2}{33}$; la pendiente de la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro es: $\frac{2}{33}$, por lo tanto los tres puntos son colineales.

8.- $\left(\frac{17}{7},\frac{24}{7}\right)$

9.-

a) $W=\frac{20}{3}t+10$ b) 50 libras c) 9 años

d) gráfica:



10.- 2.5 horas.

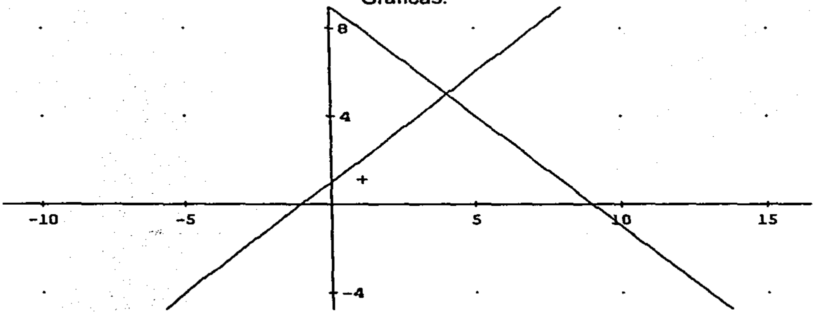
SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD VI.

1.- $5x^2+9y^2-54y+81=0$

2.- $4x+3y-17=0$

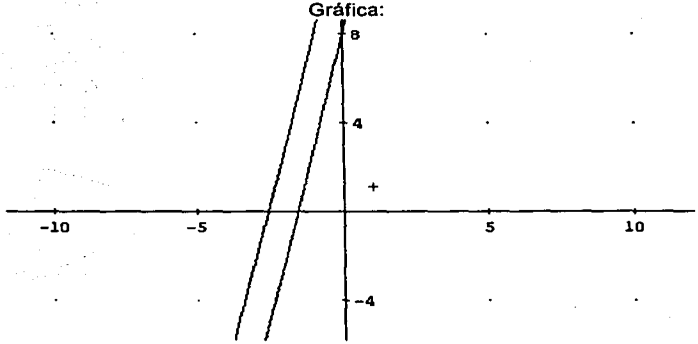
3.- $x+y-9=0$

Gráficas:



4.- $5x-y+13=0$

Gráfica:



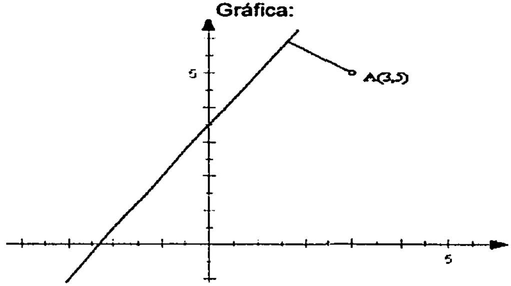
5.- $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}=0$

6.-

a) $\dfrac{x}{-\frac{3}{5}}+\dfrac{y}{\frac{3}{2}}=1$ b) $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

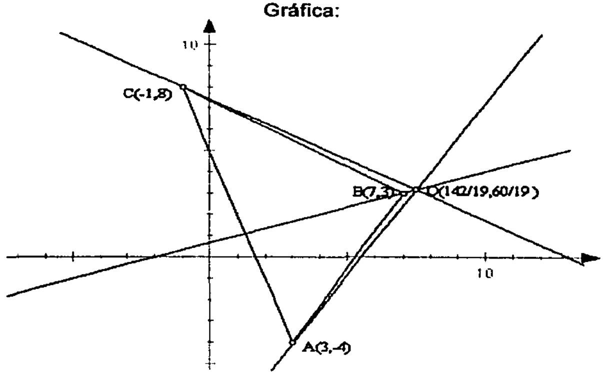
7.- $d(A,L)=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$

Gráfica:



8.- Ecuaciones de las alturas: $8x-5y-44=0$, $x-3y+2=0$, $4x+7y-52=0$. El ortocentro: $\left(\dfrac{142}{19},\dfrac{60}{19}\right)$.

Gráfica:



9.- 4 horas a 80 km/h y 3 horas a 100 km/h.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD VII.

1.- a) Circunferencia b) Hipérbola c) Elipse d) Parábola

2.- $9x^2 - 7y^2 - 72y + 144 = 0$

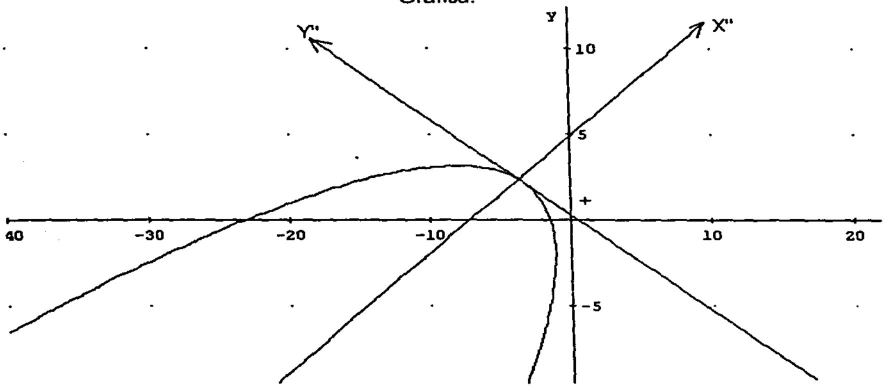
3.- a) Hipérbola b) Elipse c) Parábola

4.- La traslación es: $x' = x - 3$, $y' = y + \frac{7}{2}$ y la ecuación se transforma en:
$(x')^2 + (y')^2 = \frac{85}{4}$.

5.- La rotación es: $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ y la ecuación transformada es:
$-12(x')^2 + 30(y')^2 + 12 \cdot \sqrt{5}(x') - 44 \cdot \sqrt{5}(y') + 75 = 0$

6.- $(y'')^2 + 8(x'') = 0$

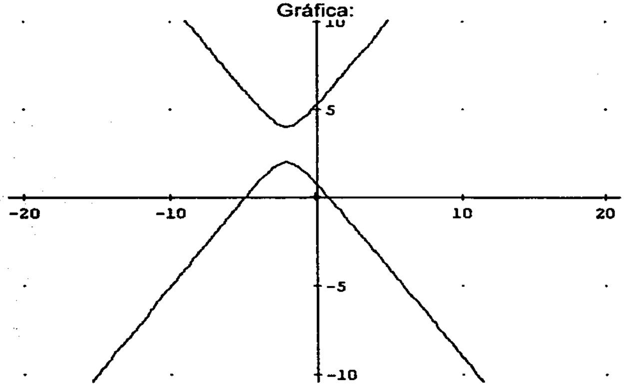
Gráfica:



SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD VII.

1.-

Gráfica:

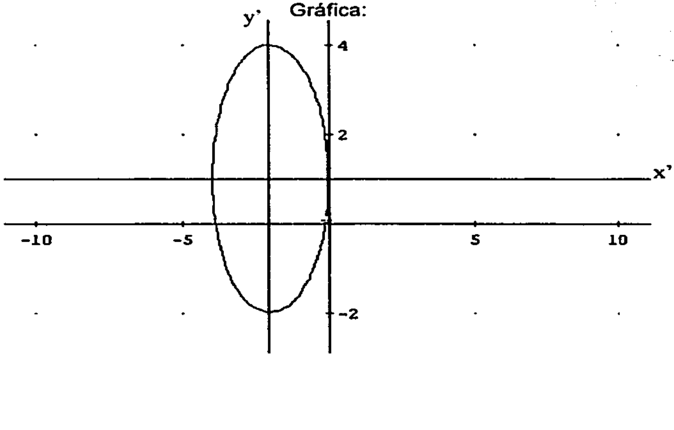


2.- $y^2 - 3x^2 - 12x + 36 = 0$

3.- a) Hipérbola b) Elipse c) Parábola

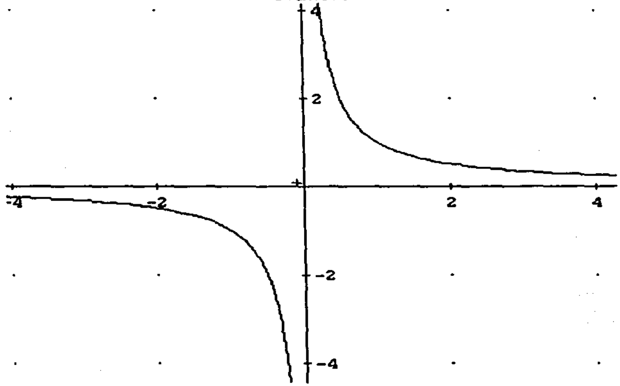
4.- $9(x')^2 + 4(y')^2 - 36 = 0$

Gráfica:



5.- $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$ La ecuación transformada es: $(x')^2-(y')^2-2=0$.

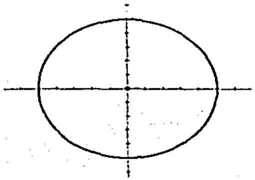
Gráfica:



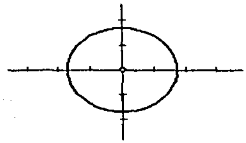
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD VIII.

1.-

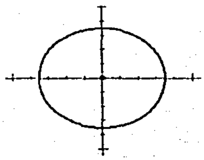
a) $x^2 + y^2 = 25$



b) $x^2 + y^2 = 3$

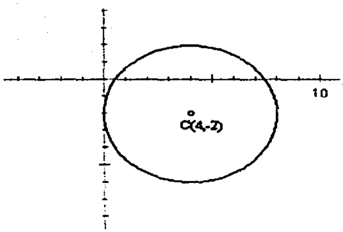


c) $x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$

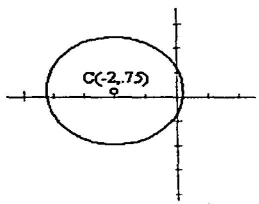


2.-

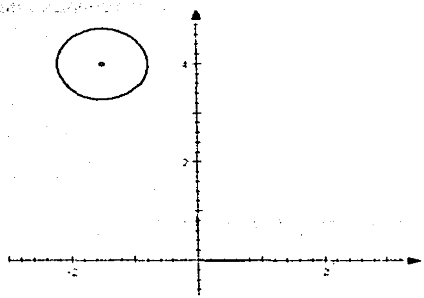
a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$



b) $(x+2)^2 + (y-\frac{3}{4})^2 = 5$

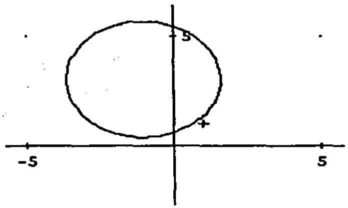


c) $(x+\frac{3}{4})^2+(y-4)^2=\frac{25}{49}$

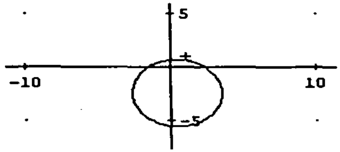


3.-

a) $C(-1,3)$, $r=\sqrt{7}$



b) $C(\frac{1}{2},-\frac{5}{2})$, $r=\sqrt{\frac{115}{36}}$



4.- Si x = 2 , y = $\sqrt{2}$. La pendiente de la recta que pasa por AC es $\frac{\sqrt{5}}{5}$ y la pendiente de la recta que pasa por BC es: $-\sqrt{5}$, el producto de estas pendientes es -1, por lo tanto las rectas son perpendiculares.

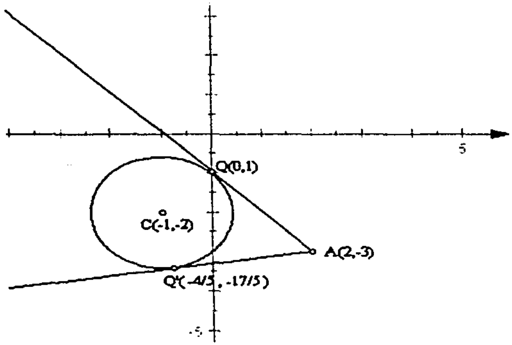
5.- $(x+9)^2+(y-7)^2=185$

6.- Área = $\frac{50\cdot\pi}{3}-\frac{5\cdot\sqrt{75}}{2}$

7.- Ecuación de la recta tangente: y = 13. la ecuación de la normal: x = -2 .

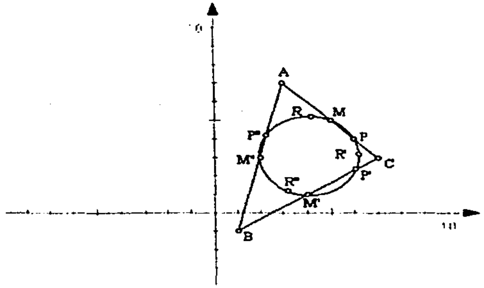
8.- Ecuaciones de las tangentes: $x-7y-23=0$, $x+y+1=0$. Las coordenadas de los puntos de tangencia son: $Q(0,-1)$, $Q(-\frac{4}{5},-\frac{17}{5})$.

Gráfica:



9.- Ecuación de la circunferencia de los nueve puntos: $5x^2+5y^2-41x-31y+110=0$. Los puntos medios de los lados: $M(5,5)$, $M'(4,1)$, $M''(2,3)$. Los pies de las alturas: $P(6,4)$, $P'(\frac{79}{13},\frac{31}{13})$, $P''(\frac{39}{17},\frac{71}{17})$. Puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo: $R(\frac{21}{5},\frac{26}{5})$, $R'(\frac{31}{5},\frac{16}{5})$, $R''(\frac{16}{5},\frac{6}{5})$.

Gráfica:



10.- $49x^2+49y^2+98x-301y-350=0$

SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD VIII.

1.- $x^2 + y^2 = 25$

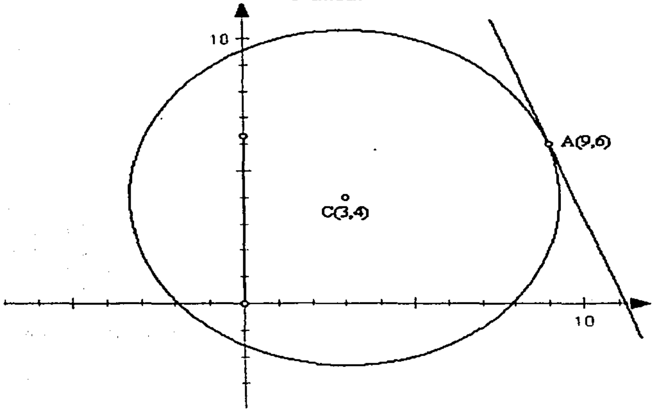
2.- $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$

3.- $C(4,-3)$, $r = \sqrt{3}$

4.- 3π

5.- $3x + y - 33 = 0$

Gráfica:

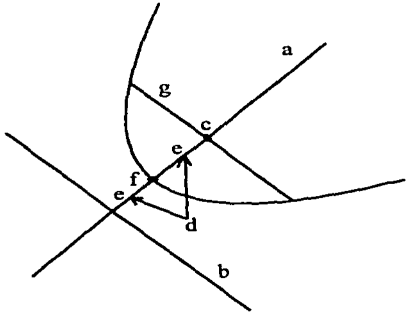


6.- $2x^2 + 2y^2 - 23x - 24y + 60 = 0$, los nueve puntos son: $(\frac{15}{2},0)$, $(2,11)$, $(\frac{19}{2},11)$, $(4,0)$, $(12,6)$, $(\frac{12}{25},\frac{66}{25})$, $(2,1)$, $(\frac{19}{2},1)$, $(4,12)$

7.- $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 36 = 0$

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD IX.

1.-



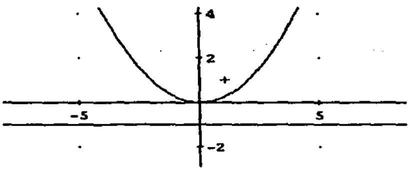
2.-

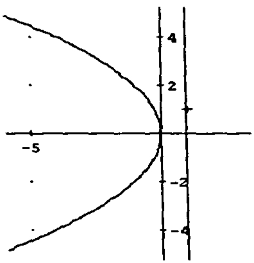
a)

- Parámetro: 2p = 2
- Semiparámetro: p = 1
- Vértice: V(0,0)
- Foco: F(0,1)
- Directriz: y = -1
- Lado recto: l. r. = 4

b)

- Parámetro: 2p = 2
- Semiparámetro: p = 1
- Vértice: V(0,0)
- Foco: F(-1,0)
- directriz: x = 1
- Lado recto: l. r. = 4





3.-

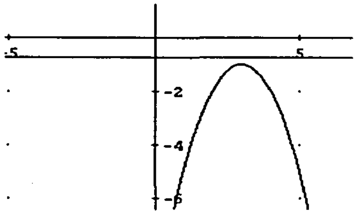
a) $y^2 = 16x$

b) $x^2 = -4y$

4.-

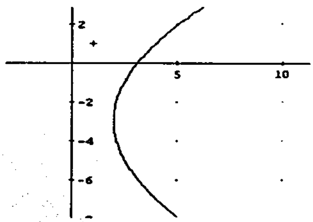
a)

- Parámetro: 2p = 1/2
- Semiparámetro: p = 1/4
- Vértice: V(3,-1)
- Foco: F(3,-5/4)
- Directriz: y = -3/4
- Lado recto: l. r. = 1



b)

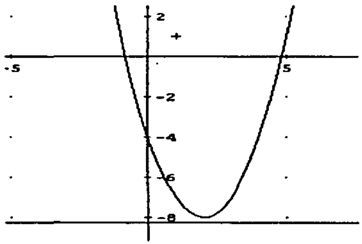
- Parámetro: 2p = 4
- Semiparámetro: p = 2
- Vértice: V(2,-3)
- Foco: F(4,-3)
- Directriz: x = 0
- Lado recto: l. r. = 8
-



5.-

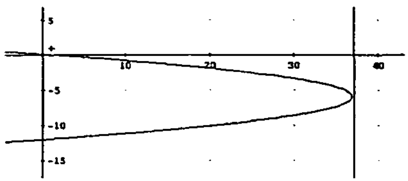
a)

- Parámetro: 2p = 1/2
- Semiparámetro: p = 1/4
- Vértice: V(2,-8)
- Foco: F(2,-31/4)
- Directriz: y = -33/4
- Lado recto: l. r. = 1



b)

- Parámetro: 2p = 1/2
- Semiparámetro: p = 1/4
- Vértice: V(37,-6)
- Foco: F(36.75,-6)
- Directriz: x = 37.25
- Lado recto: l. r. = 1



6.-

a) $(x-2)^2 = -8(y+3)$ b) $(x+3)^2 = 4(y-3)$

7.- $x^2 - 2xy + y^2 - 18x - 22y + 81 = 0$

8.- $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$

9.- A 25/7 pies del vértice.

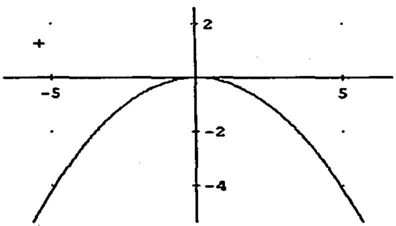
SOLUCIÓN DEL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD IX.

1.- l. r. = 4p

2.- $x^2 = 20y$

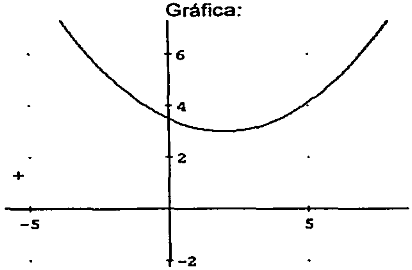
3.-

- Parámetro: 2p = 3
- Semiparámetro: p = 1.5
- Vértice: V(0,0)
- Foco: F(0,-1.5)
- Directriz: y = 1.5
- Lado recto: l. r. = 6



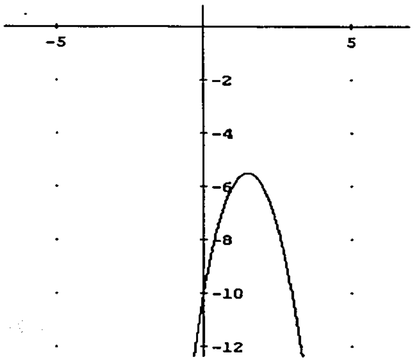
4.- $(x-2)^2 = 8(y-3)$

Gráfica:



5.-

- Parámetro: 2p = 1/4
- Semiparámetro: p = 1/8
- Vértice: V(3/2 , -11/2)
- Foco: F(3/2 , -45/8)
- Directriz: y = -43/8
- Lado recto: l. r. = ½



6.- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 42x - 34y + 71 = 0$

7.- $y^2 - x + 2y = 0$

8.- El radio mide $\sqrt{50} \approx 7.07$ pies.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD X.

1.-

Eje mayor: AA'

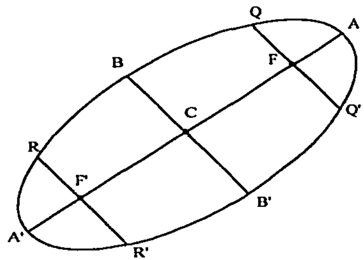
Eje menor: BB'

Lados rectos: QQ' y RR'

Focos: F y F'

Vértices: A, A' ,B ,B'

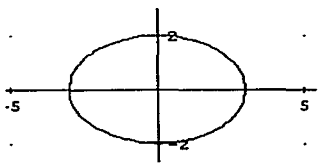
Centro: C



2.-

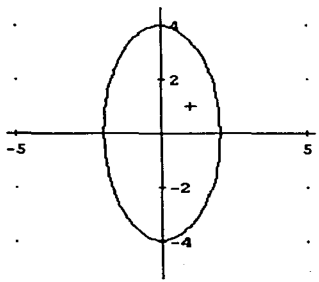
a)

- $a = 3$ $b = 2$ $c = \sqrt{5}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(3,0), A'(-3,0), B(0,2), B'(0,-2)
- Focos: F($\sqrt{5}$,0) , F'(-$\sqrt{5}$,0)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 8/3
- Excentricidad: $\sqrt{5}/3$



b)

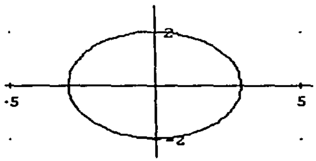
- $a = 4$ $b = 2$ $c = \sqrt{12}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(0,4), A'(0,-4), B(2,0), B'(-2,0)
- Focos: F(0, $\sqrt{12}$) , F'(0,- $\sqrt{12}$)
- Longitud del eje mayor: 8
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 2
- Excentricidad: $e = \sqrt{12}/4$



3.-

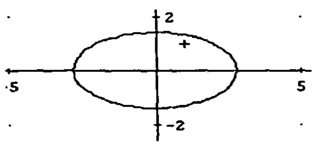
a)

- $a = 3 \quad b = 2 \quad c = \sqrt{5}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(3,0), A'(-3,0), B(0,2), B'(0,-2)
- Focos: F($\sqrt{5}$,0) , F'(-$\sqrt{5}$,0)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 8/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{5}/3$



b)

- $a = \sqrt{8} \quad b = \sqrt{2} \quad c = \sqrt{6}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A($\sqrt{8}$,0), A'(-$\sqrt{8}$,0), B(0, $\sqrt{2}$), B'(,-$\sqrt{2}$)
- Focos: F($\sqrt{6}$,0) , F'(-$\sqrt{6}$,0)
- Longitud del eje mayor: $2\sqrt{8}$
- Longitud del eje menor: $2\sqrt{2}$
- Lado recto: l. r. = $4/\sqrt{8}$
- Excentricidad: e = $\sqrt{6}/\sqrt{8}$



4.-

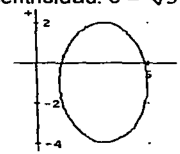
a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ b) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

c) $\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{25}=1$

5.-

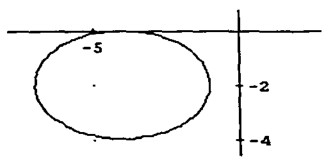
a)

- $a = 3 \quad b = 2 \quad c = \sqrt{5}$
- Centro: C(3,-1)
- Vértices: A(3,2), A'(3,-4), B(5,-1), B'(1,-1)
- Focos: F(3,-1+$\sqrt{5}$) , F'(3,-1-$\sqrt{5}$)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 8/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{5}/3$



b)

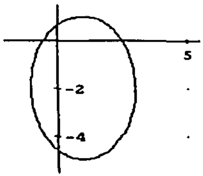
- $a = 3 \quad b = 2 \quad c = \sqrt{5}$
- Centro: C(-4,-2)
- Vértices: A(-1,-2), A'(-7,-2), B(-4,0), B'(-4,-4)
- Focos: F(-4+$\sqrt{5}$,-2), F'(-4-$\sqrt{5}$,-2)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 8/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{5}/3$



6.-

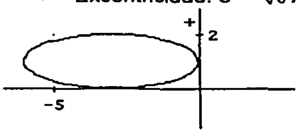
a)

- a = 3   b = 2   c = $\sqrt{5}$
- Centro: C(1,-2)
- Vértices: A(1,1), A'(1,-5), B(3,-2), B'(-1,-2)
- Focos: F(1,-2+$\sqrt{5}$) , F'(1,-2-$\sqrt{5}$)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 8/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{5}$/3



b)

- a = 3   b = 1   c = $\sqrt{8}$
- Centro: C(-3,1)
- Vértices: A(-1,-2), A'(-7,-2), B(-4,0), B'(-4,-4)
- Focos: F(-3+$\sqrt{8}$,1), F'(-3-$\sqrt{8}$,1)
- Longitud del eje mayor: 6
- Longitud del eje menor: 2
- Lado recto: l. r. = 2/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{8}$/3



7.-

a) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{21}=1$

b) $\frac{(x-2)^2}{13}+\frac{(y-8)^2}{9}=1$

c) $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

8.- $x^2+36y^2-2x+216y+156=0$

9.- La distancia media es: 5448.5 millones de millas. La ecuación es:

$$\frac{x^2}{(5448.5)^2}+\frac{y^2}{(5374.07)^2}=1$$

10.- La altura es: 50/3 pies.

SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD X.

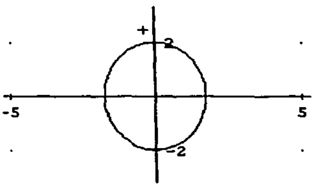
1.

a)
A(h+a,k), A'(h-a,k), B(h,k+b), B'(h,k-b)
F(h+c,k), F'(h-c,k). l. r. = $2b^2/a$.
Ecuación del eje mayor: y = k
Ecuación del eje menor: x = h
e = c/a .

b)
A(h,k+a), A'(h,k-a), B(h+b,k), B'(h-b,k),
F(h,k+c), F'(h,k-c), l. r. = $2b^2/a$
Ecuación del eje mayor: x = h
Ecuación del eje menor: y = k
e = c/a .

2.-

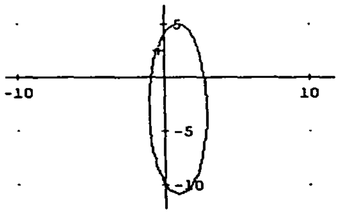
- a = 2   b = $\sqrt{3}$ c = 1
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(0,2), A'(0,-2),B($\sqrt{3}$,0), B'(- $\sqrt{3}$,0)
- Focos: F(0,1) , F'(0,-1)
- Longitud del eje mayor: 4
- Longitud del eje menor: 2 $\sqrt{3}$
- Lado recto: l. r. = 3
- Excentricidad: e = ½



3.- $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

4.-

- a = 8   b = 2   c = $\sqrt{60}$
- Centro: C(1,-3)
- Vértices: A(1,5), A'(1,-11), B(3,-3), B'(-1,-3)
- Focos: F(1,-3+ $\sqrt{60}$) , F'(1,-3- $\sqrt{60}$)
- Longitud del eje mayor: 16
- Longitud del eje menor: 4
- Lado recto: l. r. = 1
- Excentricidad: e = $\sqrt{60}$ /8



5.- $\frac{(x-2)^2}{34}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

6.-

a)
$$d(V,F)=h-\frac{\sqrt{4h^2-k^2}}{2}$$
$$d(V,F')=h+\frac{\sqrt{4h^2-k^2}}{2}$$

b) Diámetro: 16 cm. El foco F se localiza 2 unidades arriba de V.

SOLUCION A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA UNIDAD XI.

1.-

Eje real: AA'

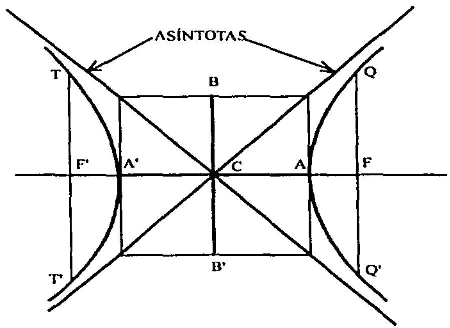
Eje imaginario: BB'

Lados rectos: QQ' , TT'

Focos: F y F'

Vértices: A y A'

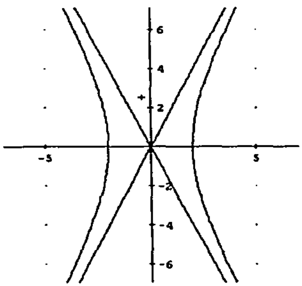
Centro: C



2.-

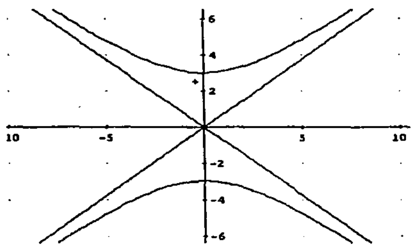
a)

- a = 2, b = 4, c = $\sqrt{20}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(2,0), A'(-2,0)
- Focos: F($\sqrt{20}$,0), F'(- $\sqrt{20}$,0)
- Longitud del eje real: 4
- Longitud del eje imaginario: 8
- Extremos del eje imaginario: B(0,2), B'(0,-2)
- Asíntotas: $y = \pm 2x$
- Lado recto: l. r. = 8
- Excentricidad: e = $\sqrt{20}$ /4



b)

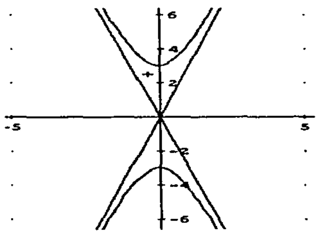
- a = 3, b = 4, c = 5
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(0,3), A'(0,-3)
- Focos: F(0,5), F'(0,-5)
- Longitud del eje real: 6
- Longitud del eje imaginario: 8
- Extremos del eje imaginario: B(4,0), B'(-4,0)
- Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{4} x$
- Lado recto: l. r. = 4.5
- Excentricidad: e = 5/4



3.-

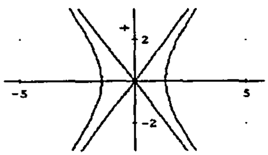
a)

- a = 3, b = 1, c = $\sqrt{10}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(0,3), A'(0,-3)
- Focos: F(0, $\sqrt{10}$), F'(0,- $\sqrt{10}$)
- Longitud del eje real: 6
- Longitud del eje imaginario: 2
- Extremos del eje imaginario: B(1,0), B'(-1,0)
- Asíntotas: $y = \pm 3x$
- Lado recto: l. r. = 2/3
- Excentricidad: e = $\sqrt{10}$/3



b)

- a = $\sqrt{2}$, b = 2, c = $\sqrt{6}$
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A($\sqrt{2}$,0), A'(-$\sqrt{2}$,0)
- Focos: F(0,5), F'(0,-5)
- Longitud del eje real: 2$\sqrt{2}$
- Longitud del eje imaginario: 4
- Extremos del eje imaginario: B(0, $\sqrt{2}$), B'(0,- $\sqrt{2}$)
- Asíntotas: $y = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} x$
- Lado recto: l. r. = 4
- Excentricidad: e = $\sqrt{6}$/2



4.-

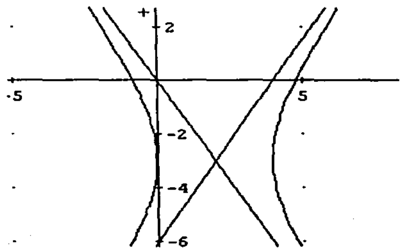
a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ b) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$

c) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$

5.-

a)

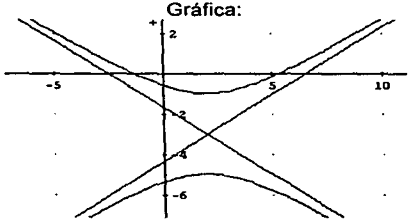
- a = 2, b = 3, c = $\sqrt{13}$
- Centro: C(2,-3)
- Vértices: A(4,-3), A'(0,-3)
- Focos: F(2+$\sqrt{13}$,-3), F'(2-$\sqrt{13}$,-3)
- Longitud del eje real: 4
- Longitud del eje imaginario: 6
- Extremos del eje imaginario: B(2,0), B'(2,-6)
- Asíntotas: $y + 3 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$
- Lado recto: l. r. = 9
- Excentricidad: e = $\sqrt{13}$/2



b)

- a = 2, b = 3, c = $\sqrt{13}$
- Centro: C(2,-3)
- Vértices: A(2,-1), A'(2,-5)
- Focos: F(2,-3+ $\sqrt{13}$), F'(2,-3- $\sqrt{13}$)
- Longitud del eje real: 4
- Longitud del eje imaginario: 6
- Extremos del eje imaginario: B(5,-3), B'(-1,-3)
- Asíntotas: $y+3=\pm\frac{2}{3}(x-2)$
- Lado recto: l. r. = 9
- Excentricidad: e = $\sqrt{13}$ /2

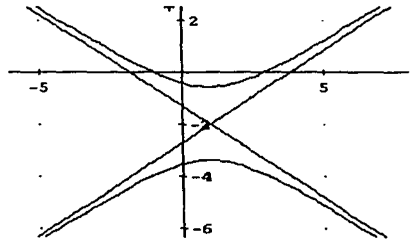
Gráfica:



6.-

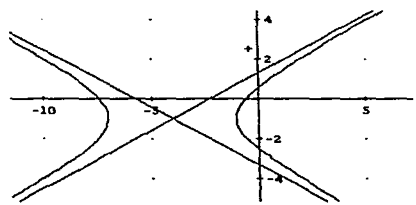
a)

- a = $\sqrt{2}$, b = 2, c = $\sqrt{6}$
- Centro: C(1,-2)
- Vértices: A(1,-2+ $\sqrt{2}$), A'(1,-2- $\sqrt{2}$)
- Focos: F(1,-2+ $\sqrt{6}$), F'(1,-2- $\sqrt{6}$)
- Longitud del eje real: 2 $\sqrt{2}$
- Longitud del eje imaginario: 4
- Extremos del eje imaginario: B(3,-2), B'(-1,-2)
- Asíntotas: $y+3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$
- Lado recto: l. r. = 8/ $\sqrt{2}$
- Excentricidad: e = $\sqrt{3}$



b)

- a = 3, b = $\sqrt{3}$, c = $\sqrt{12}$
- Centro: C(-4,-1)
- Vértices: A(-1,-1), A'(-7,-1)
- Focos: F(-4+ $\sqrt{12}$,-1), F'(-4- $\sqrt{12}$,-1)
- Longitud del eje real: 6
- Longitud del eje imaginario: 2 $\sqrt{3}$
- Extremos del eje imaginario: B(-4,-1+ $\sqrt{3}$), B'(-4,-1- $\sqrt{3}$)
- Asíntotas: $y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$
- Lado recto: l. r. = 2
- Excentricidad: e = $\sqrt{12}$ /3



7.- $224y^2 + 360xy - 180x - 404y - 1897 = 0$

8.- $3x^2 - 2y^2 + 3x + 12y + 14 = 0$

9.-

a) Tocaría tierra a 35.34 millas del punto medio de AB. Equivalentemente a 64.66 millas de A.
b) 0.00086 segundos.
c) Localización: C(104.14,50)

10.-

a) 450 pies al norte de B
b) Si en el punto indicado se obtienen otras medidas del tiempo, los instrumentos estarían fallando.

SOLUCIÓN AL EXAMEN DE PRÁCTICA DE LA UNIDAD XI.

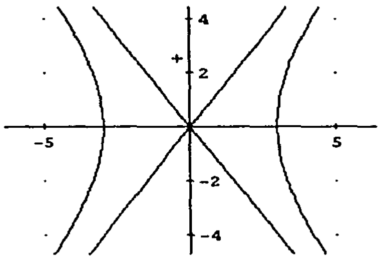
1.-

a) A(h+a,k), A'(h-a,k), B(h,k+b), B'(h,k-b), F(h+c,k), F'(h-c,k). Ecuación del eje focal: y = k, ecuación del eje imaginario: x = h, ecuaciones de las asíntotas: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, $l.r.=\dfrac{2b^2}{a}$, $e=\dfrac{c}{a}$.

b) A(h,k+a), A'(h,k-a), B(h+b,k), B'(h-b,k), F(h,k+c), F'(h,k-c). Ecuaciones de los ejes real e imaginario: x = h , y = k; ecuaciones de las asíntotas: $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$, $l.r.=\dfrac{2b^2}{a}$, $e=\dfrac{c}{a}$.

2.-

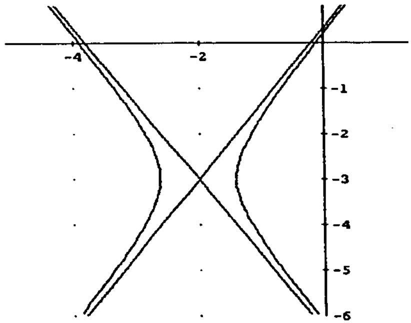
- a = 3, b = 4, c = 5
- Centro: C(0,0)
- Vértices: A(3,0), A'(-3,0)
- Focos: F(5,0), F'(-5,0)
- Longitud del eje real: 6
- Longitud del eje imaginario: 8
- Extremos del eje imaginario: B(0,4), B'(0,-4)
- Asíntotas: $y=\pm\frac{4}{3}x$
- Lado recto: l. r. = 32/3
- Excentricidad: e = 5/3



3.- $\dfrac{x^2}{44}-\dfrac{y^2}{55}=1$

4.-

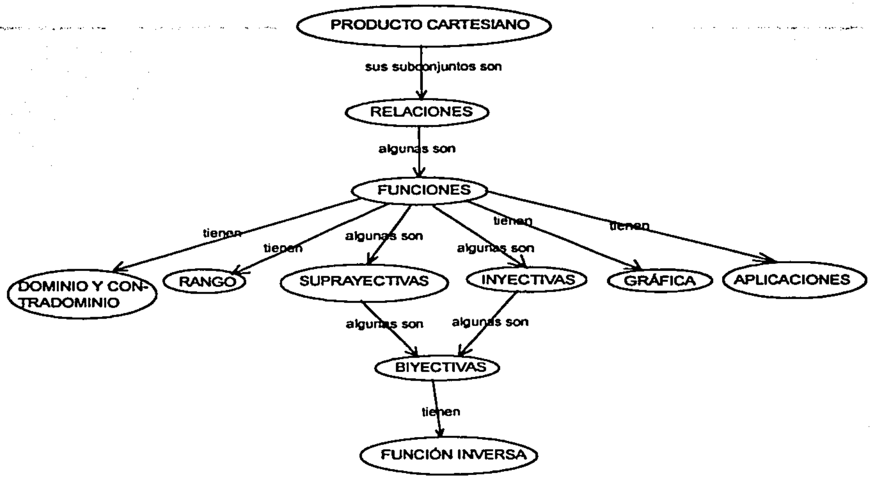
- a = 3/5, b = 1, c = $\frac{\sqrt{34}}{5}$
- Centro: C(-2,-3)
- Vértices: A(-7/5,-3), A'(-13/5,-3)
- Focos: F(-2+$\frac{\sqrt{34}}{5}$,-3), F'(-2-$\frac{\sqrt{34}}{5}$,-3)
- Longitud del eje real: 6/5
- Longitud del eje imaginario: 2
- Extremos del eje imaginario: B(-2,-2), B'(-2,-4)
- Asíntotas: $y+3=\pm\frac{5}{3}(x+2)$
- Lado recto: l. r. = 10/3
- Excentricidad: e = $\frac{\sqrt{34}}{3}$



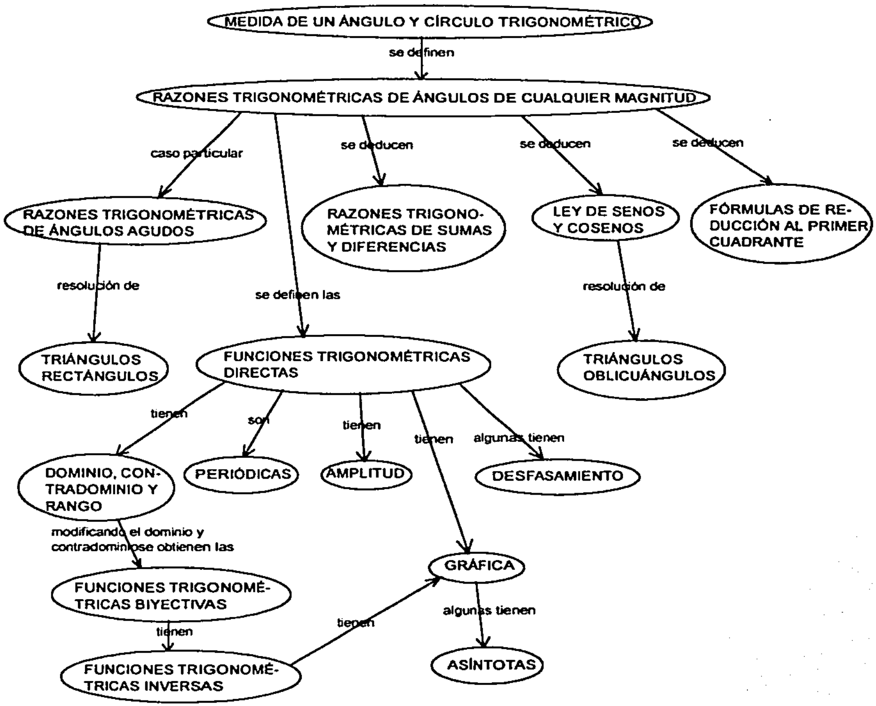
5.- $\dfrac{(y-5)^2}{16}-\dfrac{(x-2)^2}{308}=1$

MAPAS CONCEPTUALES DE LAS 11 UNIDADES

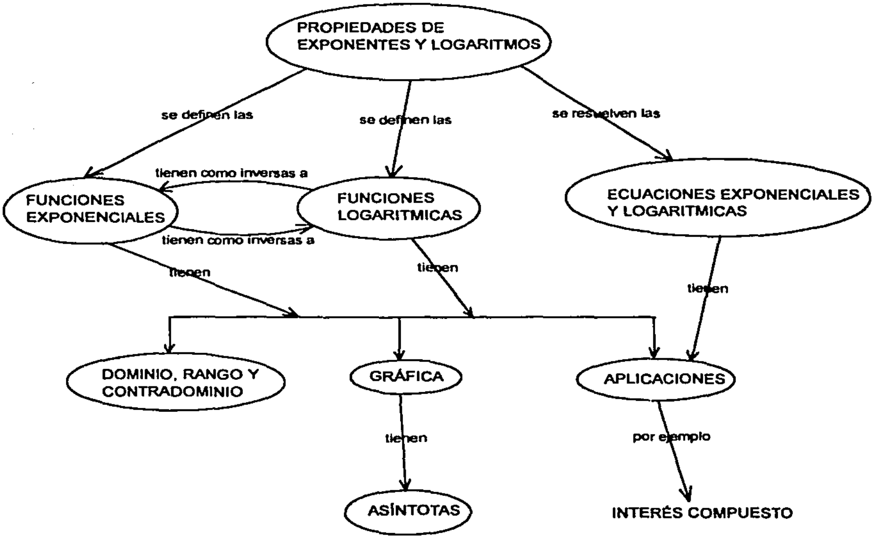
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD I. RELACIONES Y FUNCIONES



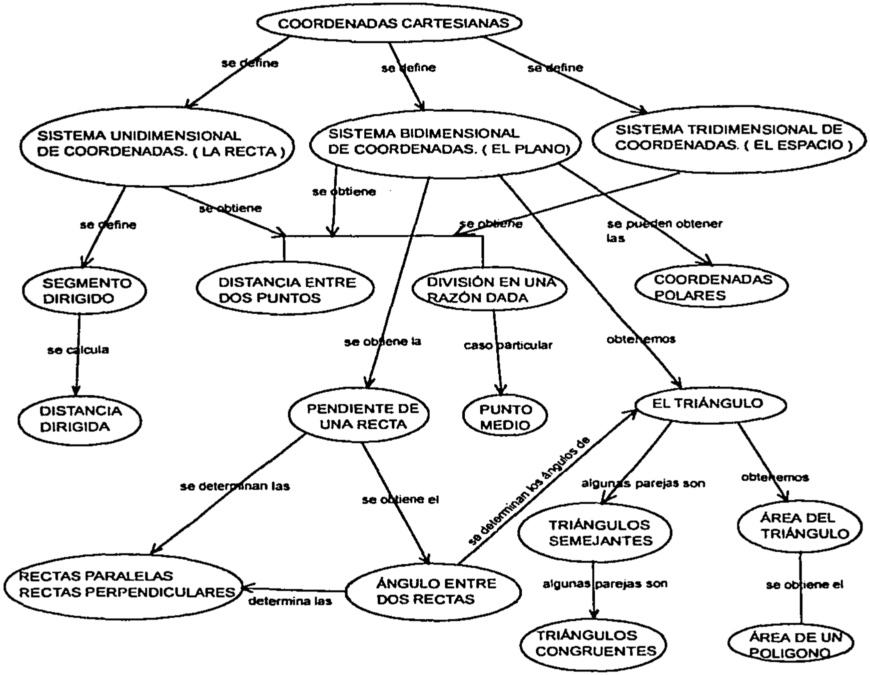
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD II. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS E INVERSAS



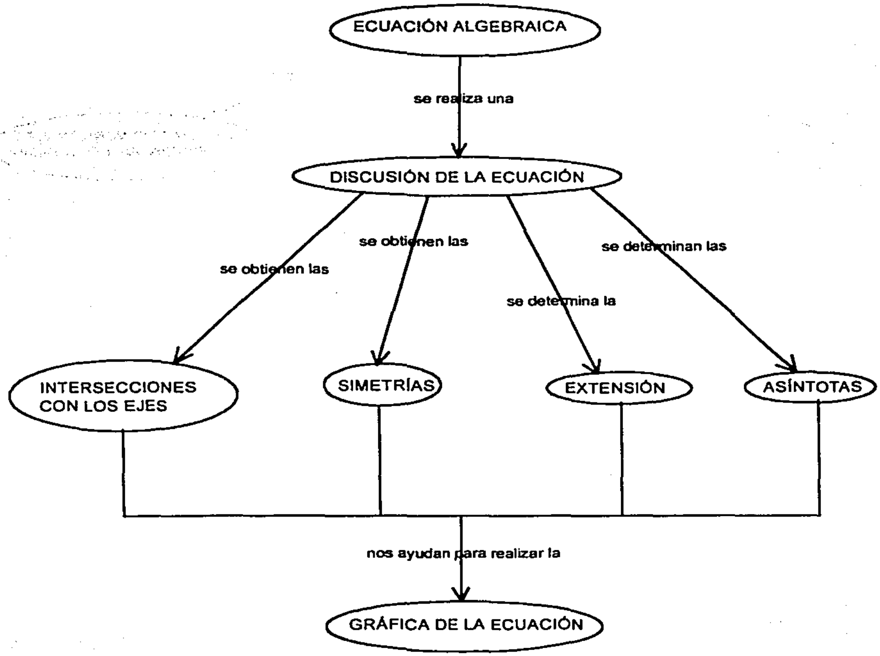
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD III. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



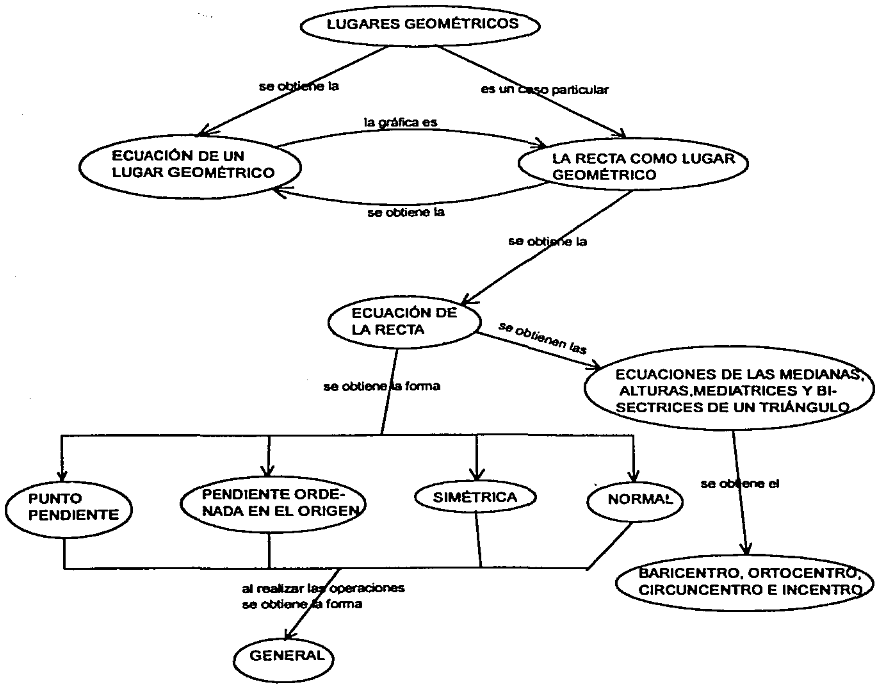
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD IV. SISTEMAS DE COORDENADAS Y ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS



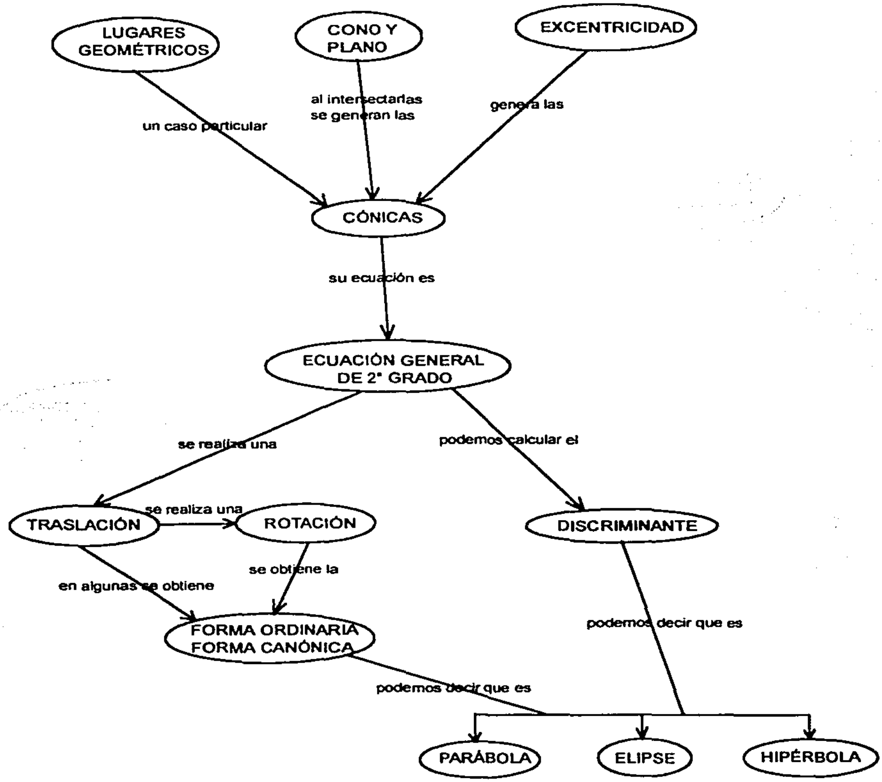
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD V. DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS



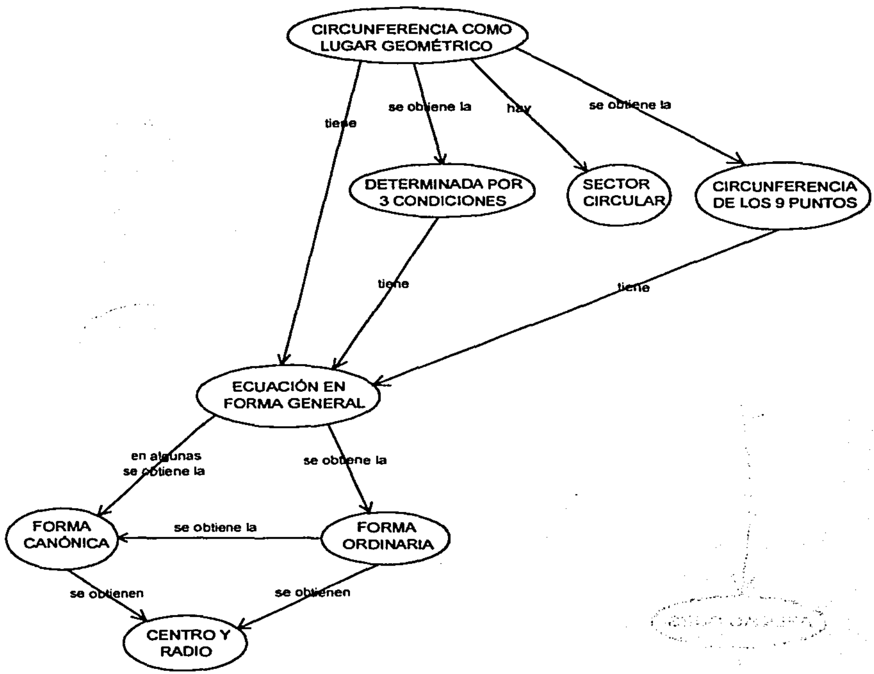
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD VI. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO



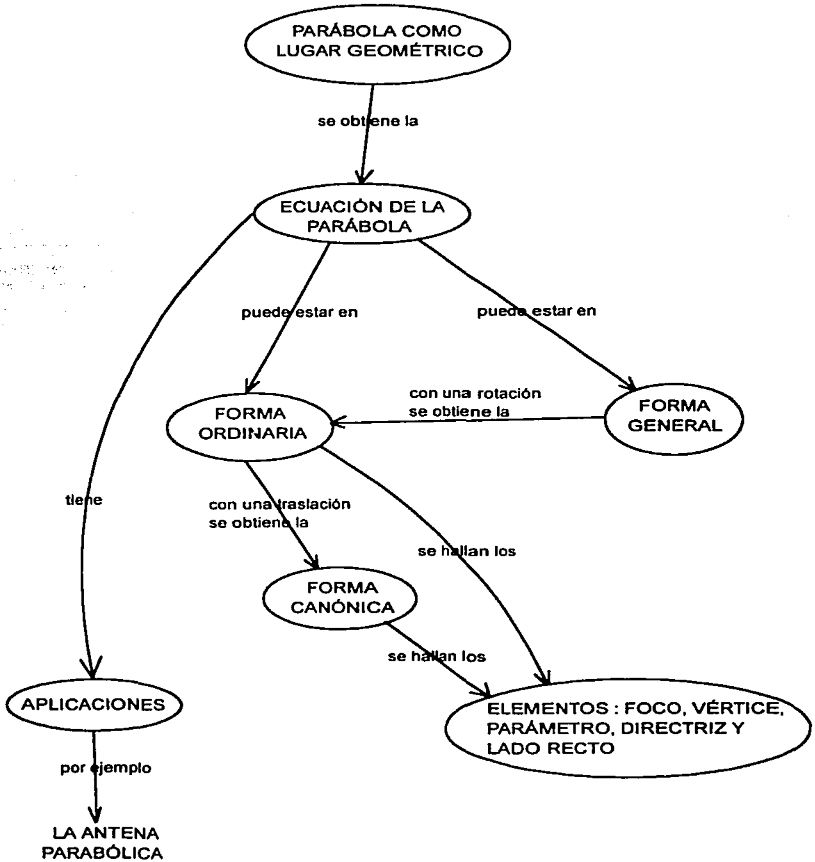
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD VII. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO



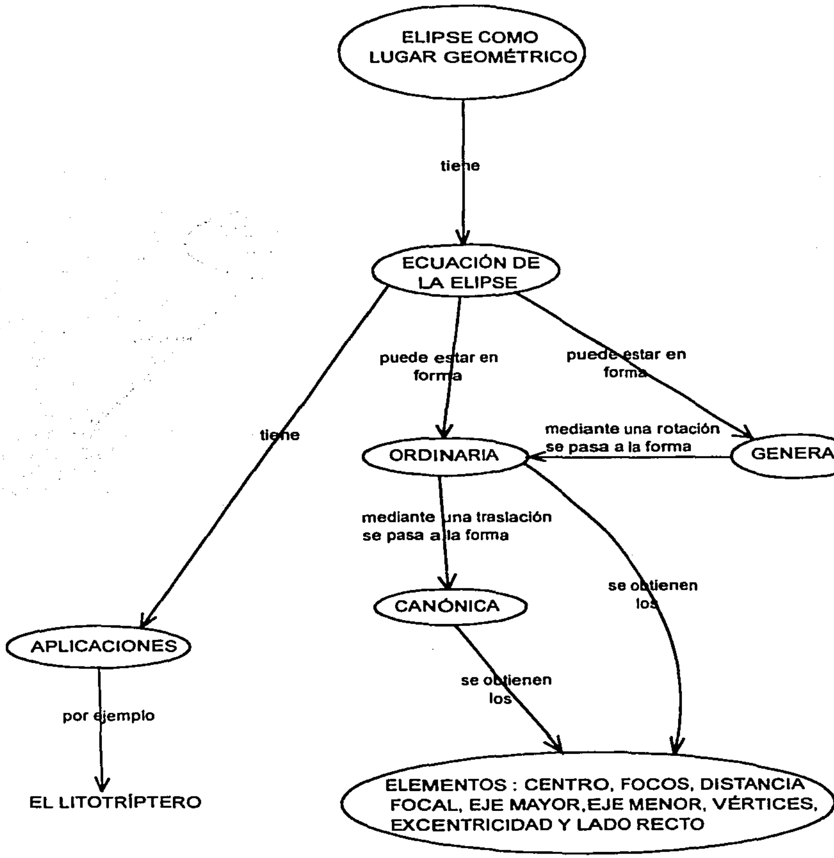
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD VIII. CIRCUNFERENCIA



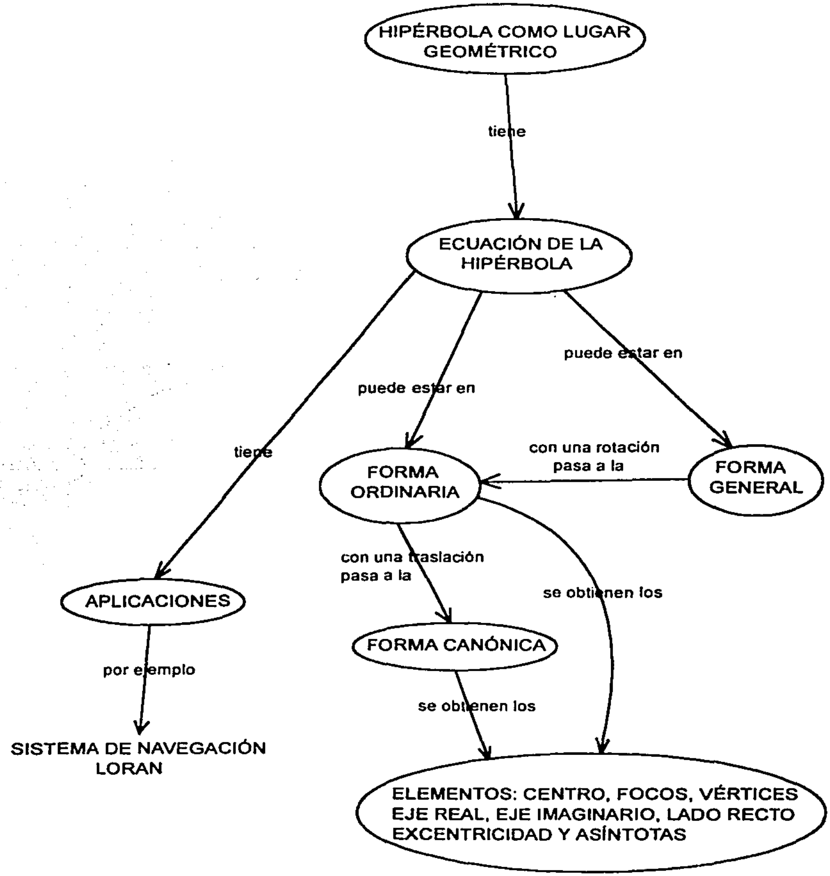
MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD IX. PARÁBOLA



MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD X. ELIPSE



MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD XI. HIPÉRBOLA



PERSPECTIVAS Y CONSIDERACIONES FINALES.

Considero que lo que se logró con el trabajo realizado es un material que cubre en su totalidad el contenido del programa de Matemáticas V de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), en muchas partes del trabajo se logró que los conceptos surgieran al resolver un problema de la misma matemática o problema de otro tipo; pero se debe aceptar que en otras no se pudo hacer esto, en estos casos se procedió a dar las definiciones correspondientes y se planteó un problema después donde se aplicaran los conceptos; es decir se procedió de manera tradicional.

Lo anterior corresponde en su mayoría con lo que se esperaba lograr en este aspecto al empezar a elaborar el Cuaderno de Trabajo que era obtener un material que cubriera todo el programa de Matemáticas V de la ENP de tal manera que los conceptos surgieran al resolver los problemas planteados, que mostrara en la mayor parte algunas aplicaciones que tienen los conceptos estudiados y que fuera de fácil acceso para los alumnos.

Algo en lo que considero que se puede usar el Cuaderno de Trabajo es en la preparación del examen extraordinario para los alumnos que no aprobaron el curso de Matemáticas V de la ENP puesto que al tener un primer acercamiento a los conceptos (el curso), resulta más sencillo para ellos abordar el material que ya se observó antes que contiene todos los temas incluidos en el curso.

Cuando se empezó a elaborar el Cuaderno de Trabajo se pensó en un material que nos sirviera para abordar el nuevo Programa de Matemáticas V de la ENP, se esperaba que fuera un instrumento mediante el cual cambiara un poco la manera de enseñar matemáticas en la ENP, que como se mencionó en los antecedentes la actividad se centraba en el profesor, atribuyéndole al alumno un papel pasivo; para transitar poco a poco hacia una enseñanza constructivista. Me parece que esta expectativa se cumplió ampliamente, puesto que con el Cuaderno de Trabajo la actividad ya no se centra en el profesor sino en el alumno y su quehacer en el aula.

Algo importante que se quiere aclarar es que no se pretendía elaborar una propuesta que nos llevara directamente hacia una enseñanza constructivista, sino que nos llevara a un paso intermedio entre dicha enseñanza y la que había cuando estaba vigente el Plan de Estudios de 1964. Esto es lo que demanda el Nuevo Plan de Estudios de la ENP, instrumentos que nos permitan transitar hacia una enseñanza constructivista.

Respecto a los resultados que se espera obtener al aplicar el material en el curso, considero que serán buenos. Afirmo esto por las observaciones hechas antes y por el hecho de que tuve la oportunidad de desarrollar algunas unidades con mis alumnos en el pasado ciclo escolar, aunque no como se propone aquí. Como muestra describiré brevemente lo que sucedió al abordar la unidad III: Funciones Exponencial y Logarítmica. En el salón de clases se planteaban los problemas procurando que en la solución de cada problema surgieran los conceptos que se debían estudiar, los alumnos en equipos de 3 o 4 personas trataban de resolverlos; yo intervenía en la solución de tales problemas aclarando lo que se pedía cuando era necesario y dándoles posibles pistas para su solución. Algunos problemas eran resueltos por ellos, en tales casos mi papel se reducía a hacer notar los conceptos involucrados en dichos problemas; cuando los alumnos a pesar de las pistas para resolver los problemas no los resolvían, lo hacía yo haciéndoles notar los conceptos mencionados antes también. Como un ejemplo de lo anterior se muestra la manera en que se trabajó un problema:

Se tiene una colonia de 750 bacterias que se duplican cada media hora. Hallar una función que nos exprese la cantidad de bacterias que hay en el tiempo t.

- Se aclara el problema explicándoles qué significa que la colonia de bacterias se duplica cada media hora.
- Casi todos los equipos calculan cuántas bacterias hay en media hora, una hora, una hora y media, etc.
- Yo les sugiero que en los cálculos anteriores dejen indicadas las operaciones y observen el papel que juega el tiempo. Muchos de los equipos no captan el significado de la sugerencia, se les explica con más detalle a cada uno.
- Cuando uno de los equipos resuelve el problema, lo expone frente al grupo.
- Yo hago la observación de que la solución: $C(t) = 750 \cdot 2^{2t}$ donde t es el tiempo en horas es una función exponencial que tiene cierto dominio, rango, así como el significado en términos del problema de la gráfica de esta función.

Una actividad que me parece importante mencionar porque contribuye a que los estudiantes no tengan una idea de que los conocimientos matemáticos son hechos aislados que se tienen que aprender de memoria para aprobar un examen y después olvidarlos, es la elaboración del mapa conceptual de cada unidad, ya que considero que al realizarlo, presentarlo ante los demás y compararlo con el mapa correspondiente que viene al final del Cuaderno de Trabajo enriquece el conocimiento que tiene el alumno en el sentido de que observa las conexiones que hay entre los conceptos estudiados en la unidad.

El programa de Estudios 1996 de la Escuela Nacional Preparatoria Matemáticas V, recomienda el uso de software matemático para el tratamiento de los contenidos, por tanto una de las perspectivas a desarrollar en el futuro es complementar el presente material con prácticas en algún paquete (Geómetra, Derive, Maple, etc.) que le sirva al alumno para comprender mejor los temas tratados en el programa.

También se tiene pensado elaborar materiales como el presente para las demás asignaturas de matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria invitando a algunos profesores que estén interesados en dicha tarea.

Se tiene pensado adecuar el material y complementarlo con un examen final para que sirva como guía para el examen extraordinario de Matemáticas V.

Por último, se tiene el propósito de invitar a todos los profesores interesados en la elaboración de materiales de apoyo para la docencia en el Bachillerato para formar un equipo de trabajo cuya función será la de analizar la falta de este tipo de materiales en los distintos medios educativos del nivel medio superior y elaborarlos.

BIBLIOGRAFÍA.

1) Armella, Luis, et al . Constructivismo y Educación Matemática. México, Educación Matemática Vol. 4 No. 2, Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.

2) Baldor J. Aurelio. Geometría Analítica y Trigonometría. México, Publicaciones Cultural, 1990.

3) Balmaseda, José Luis (Coordinador). Propuesta de Modificación al Plan de Estudios de Bachillerato 4°, 5° y 6°. México, UNAM, 1996.

4) Barnett, Raymond. Álgebra y Trigonometría. México, Mc. Graw Hill, 1989.

5) Bazan, José de Jesús (Coordinador). Plan de Estudios Actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades. México, UNAM, 1996.

6) Blais, Donald. Constructivism: A Theoretical revolution for álgebra. Artículo publicado en la revista "Mathematics Teacher", número 8 del volumen 81, noviembre de 1988. Traducido por Jaime Garibay Aguilar en 1993.

7) Coll, César, et al. Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. Cuadernos de Pedagogía #168, 1986.

8) De Oteyza, Elena et al. Geometría Analítica. México, Prentice Hall Hispanoamericana, 1994.

9) Dolciani, Mary P. et al. Álgebra Moderna y Trigonometría 2. México, Publicaciones Cultural, 1991.

10) Edwin, Moise, et al. Geometría Moderna. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

11) Figueroa, María de Jesús, et al. Guía de Estudio Para el Examen Extraordinario de Matemáticas IV. México, CCH Sur, 1991.

12) Figueroa, María de Jesús, et al. Matemáticas II Álgebra y Geometría. México, CCH Sur, 1997.

13) Filloy, Eugenio, et al. Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.

14) Fuenlabrada, Samuel. Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill, 2000.

15) Fuenlabrada, Samuel. Geometría y Trigonometría. México, Mc. Graw Hill, 2000.

16) Fuller, Gordon. Geometría Analítica. México, CECSA, 1995.

17) Fuller, Gordon, et al. Geometría Analítica. México, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

18) Guerra, Manuel, et al. Geometría Analítica para bachillerato. México, Mc. Graw Hill, 1994.

19) Kindle, Joseph. Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill (serie Schaum), 1994.

20) Lehmann, Charles. Geometría Analítica, México, Limusa, 1994.

21) López, Alfonso (Coordinador). Núcleo de Conocimientos y Formación Básicos que debe proporcionar el Bachillerato de la UNAM. México, UNAM, 1999.

22) López, Antonio, et al. Relaciones y Geometría Analítica. México, Alhambra Bachiller, 1993.

23) Lucio, Guadalupe. Geometría Analítica 1. La recta y el círculo. México, Limusa, 1984.

24) Medina, Berta, et al. Guía de Matemáticas I Para el Plan de Estudios del CCH de la UNAM. México, CCH Sur, 1999.

25) Middlemiss, Ross. Geometría Analítica. México, Mc. Graw Hill, 1994.

26) Morales, Jesús, et al. Matemáticas IV. Cuaderno de Trabajo. México, Trillas, 2000.

27) Nichols, Eugene et al. Geometría Moderna. México, CECSA, 1994.

28) Novak, Joseph. Mapas Conceptuales para el Aprendizaje significativo. Artículo en Ejercicio Docente en el aula para el desarrollo de competencias. México, SEP, 1988.

29) Parra, Blanca. Dos concepciones de Resolución de Problemas de Matemáticas. México, Educación Matemática Vol. 2 No. 3 Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

30) Polya, George. Cómo plantear y resolver problemas, Trillas. 1965 (Vigésimo quinta reimpresión, 2001).

31) Principles and Standards for School Mathematics de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Álgebra, Geometry Grades 9-12. USA, 2000.

32) Ramírez, Ana Irene. Geometría Analítica. México, Las prensas de Ciencias, 1998.Armella, Luis, et al .

33) Rangel, Catalina (Responsable académico). Programa de Estudio 1996 Preparatoria 5° Año. México, UNAM, 1997.

34) Rojano, Teresa, et al. Trigonometría. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.

35) Rojas, Manuel. Unidad IX Ecuación General de Segundo Grado. En Fundamentos de Geometría Analítica. México, ENP, 1994.

36) Santos, Luz Manuel. La Naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones didácticas. México, Mathesis 9, 1993.

37) Santos, Luz Manuel. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México, Didáctica. Lecturas, Grupo Editorial Iberoamérica.

38) Santos, Luz Manuel. Resolución de Problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. México, Educación Matemática Vol. 4 No. 2 Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.

39) Schoenfeld, Alan. Learning to mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense-making in Mathematics. En Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, Mc Millan, 1992.

40) Steen, Frederick. Geometría Analítica. México, Publicaciones Cultural, 1994.

41) Sullivan, Michael. Trigonometría y Geometría Analítica. México, Prentice Hall, 1997.

42) Swokowski, Earl. Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

43) Swokowski, Earl, et al. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, Thompson, 1998.

44) Torres, Carlos. Geometría Analítica. México, Santillana, 1998.

45) Zarzar, Carlos. ¿ Qué es la didáctica grupal ?. En Didáctica grupal. México, Progreso, 2000.

46) Zill, Dennis. Cálculo con Geometría Analítica. México, Grupo editorial Iberoamérica, 1996.