

1 00365



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DE  
SINCRONIZACIÓN DE UN MODELO  
MECÁNICO DE NEURONA**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS  
(MATEMÁTICAS)**

PRESENTA

**IRMA ELIZABETH DÍAZ BOBADILLA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. HUMBERTO ANDRÉS CARRILLO CALVET**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposo Hugo, por todo su amor.

A mis Papás Irma M. Bobadilla y Angel Díaz, por todo el apoyo y cariño que siempre me han dado.

A mis Hermanos Carlos A. y Miguel A., por apoyarme siempre.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice General

<b>1 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS</b>	<b>7</b>
1.1 Iteración de Mapeos.	7
1.2 Estabilidad de Puntos Fijos y Órbitas Periódicas.	10
1.2.1 Dinámica Topológica.	10
1.2.2 Sistemas Dinámicos en la Recta.	11
1.3 Conjuntos Límites.	14
1.4 Bifurcaciones.	15
1.4.1 Bifurcación Silla-nodo.	15
1.4.2 Bifurcación Tenedor.	19
1.4.3 Bifurcación Doblamiento de Período.	21
<b>2 FUNCIONES DE LA CIRCUNFERENCIA.</b>	<b>25</b>
2.1 Representación de una Función de la Circunferencia.	27
2.2 Endomorfismos de Grado Entero	29
2.3 Homomorfismos.	34
<b>3 ENDOMORFISMOS MONÓTONOS.</b>	<b>37</b>
3.1 Número de Rotación.	37
3.2 Envolvencia de las Órbitas Periódicas.	49
3.2.1 Conjuntos Límite Cantoreanos.	57
<b>4 ENDOMORFISMOS NO MONÓTONOS.</b>	<b>59</b>
4.1 Intervalo de Rotación.	59
4.2 Funciones Bimodales. Teorema de Boyland.	65
<b>5 LA FAMILIA CLÁSICA.</b>	<b>71</b>
5.1 Familia de Rotaciones.	71
5.2 Familia Completa	72
5.2.1 Puntos Periódicos	74
<b>6 BIFURCACIONES EN SISTEMAS CON PARÁMETROS.</b>	<b>89</b>
6.1 Lenguas de Arnold en la Familia Clásica.	89
6.1.1 Escalera del Diablo	91
6.2 Lenguas Racionales (Regiones de Sincronización)	96
6.3 Lenguas de Boyland	99
6.4 Familias Biparamétricas	101

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

7	APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE UN MODELO MECÁNICO DE NEURONA	106
7.1	Osciladores de Integración y Disparo	106
7.2	Estructura y Función de una Neurona	108
7.2.1	Exitabilidad	108
7.2.2	Respuesta Periódica	109
7.3	Neurona Mecánica	110
7.3.1	Oscilaciones Libres de la Neurona Mecánica	110
7.3.2	Oscilaciones Forzadas de la Neurona Mecánica	111
7.3.3	Modelo Geométrico de la Neurona Mecánica	112
7.4	Sincronización y Atractores Periódicos	114
7.4.1	Secuencias Rítmicas y Comportamientos Sincronizados	115
7.4.2	Saltos de Ciclo (Skipping)	117
7.5	Neurona Mecánica y Familia Clásica	119
7.6	Espacio de Parámetros	120
7.6.1	Configuraciones Paramétricas Equivalentes	120
7.6.2	Restricciones Físicas sobre los Parámetros	121
7.7	Aplicaciones de la Teoría de Rotación al Análisis de la Sincronización	122
7.7.1	Oscilaciones Libres	123
7.7.2	Oscilaciones Forzadas	124
7.7.3	Biestabilidad	125
7.7.4	Monoestabilidad	127
8	CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES	129
9	APÉNDICE	130

<b>TESIS CON FALLA DE ORIGEN</b>
--------------------------------------

## PRESENTACIÓN.

En este trabajo se revisan algunos aspectos de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos discretos y particularmente la teoría de los sistemas dinámicos en la circunferencia iniciada por Henri Poincaré. Nos interesamos principalmente en nociones y resultados que han probado ser útiles en estudios científicos. Buscando ejemplificar la importancia de la teoría en este sentido aplicativo, en el capítulo siete se discute un modelo de oscilador no lineal periódicamente forzado, que llamamos "la neurona mecánica". Se trata de un modelo relativamente simple, pero que captura la esencia de varios aspectos importantes de la dinámica de las oscilaciones de integración y disparo, que son típicas en las células nerviosas y en muchos otros sistemas de interés en Ciencia e Ingeniería. Estos sistemas son también llamados sistemas excitables u osciladores de relajación.

El estudio del comportamiento de la respuesta de un oscilador no lineal a una estimulación periódica es un problema clásico de la Ciencia y la Ingeniería cuyo estudio desde el punto de vista matemático ha retado a brillantes científicos de varias generaciones, como Lyapounov, van der Pol, Rayleigh, Poincaré, Lienard, Littlewood, Cartwright, Levinson, Arnold y Moser. La investigación de este problema ha rendido no sólo frutos tecnológicos, sino también importantes repercusiones teóricas. La famosa herradura de Smale surgió de la revisión de la problemática (sincronización y respuesta caótica) involucrada en el análisis de un oscilador modelado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales (no lineales) sujeto a un forzamiento sinusoidal. El trabajo de Smale está basado en las investigaciones previas de Littlewood, Cartwright y Levinson [7].

La teoría de rotación de funciones de la circunferencia surgió de los estudios sobre ecuaciones diferenciales en el toro y la estabilidad de órbitas periódicas iniciada por Poincaré [31] y continuada por Denjoy [8]. Posteriormente el trabajo del matemático soviético Vladimir I. Arnold, quien utilizó la teoría de las funciones de la circunferencia para la modelación de arritmias cardiacas y otros problemas de mecánica celeste (teoría KAM), revivió el interés de otros investigadores entre los cuales han destacado Michael R. Herman y Leon Glass.

Herman se interesó en cuestiones matemáticas [21], mientras que Glass se ha enfocado a la simulación de ritmos cardiacos por medio de modelos geométricos los cuales dan lugar a un sistema dinámico en la circunferencia [16]. Por otra parte, Newhouse, Palis y Takens [26] extendieron la teoría de

rotación para abarcar funciones no inyectivas.

En el primer capítulo de este trabajo se discuten conceptos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos unidimensionales. Se revisan tópicos como la dinámica periódica, la estabilidad de las órbitas, las bifurcaciones en sistemas con parámetros y la conjugación topológica de mapeos. Se trata de un material estándar que se ha incluido para hacer autocontenido este escrito.

El segundo capítulo se dedica al análisis de las funciones en la recta que determinan funciones en la circunferencia.

El capítulo tres se dedica a la discusión del concepto de número de rotación de un mapeo continuo de la circunferencia, de grado uno, monótono creciente. Esta teoría es muy útil para la determinación de dinámicas periódicas y aplica también para la determinación de comportamientos sincronizados de osciladores de integración y disparo forzados, pues las funciones de disparo de éstos están determinadas por funciones en la circunferencia. En general, las funciones de disparo de estos osciladores no son funciones continuas [25] ni monótonas y resulta necesario aplicar generalizaciones del concepto de número de rotación.

El capítulo cuatro generaliza esta teoría hasta llegar al concepto de intervalo de rotación de Newhouse, Palis y Takens (para mapeos continuos de la circunferencia de grado uno, no necesariamente inyectivos). En este capítulo se discuten también las propiedades del intervalo de rotación para familias bimodales de mapeos de la circunferencia (teoría de Boyland) que son de interés en las aplicaciones posteriores.

En el capítulo cinco presentamos un ejemplo clásico de familia bimodal de mapeos de la circunferencia llamada "familia de Arnold" o "familia clásica". Con esta familia se ilustran ideas y resultados discutidos en los capítulos anteriores.

Con miras al análisis de las propiedades de sincronización y las bifurcaciones que tienen lugar en la familia clásica, al variar sus parámetros, el capítulo seis se ocupa del análisis de bifurcaciones y, especialmente, de la clasificación de las regiones (lenguas) en el espacio de parámetros que producen dinámicas cualitativamente equivalentes. Esto conlleva a la discusión de diferentes definiciones alternativas para el concepto de lengua: lenguas de Arnold y lenguas de Boyland. Por su importancia para la teoría de la sincronización, se discute también el concepto de lenguas racionales presentado por Guzmán, Carrillo y Ongay [19].

La teoría de número de rotación, sus generalizaciones y otros resultados expuestos en los capítulos anteriores, se ejemplifican en el capítulo siete

analizando las propiedades de sincronización del modelo geométrico de la neurona mecánica. Es un hecho interesante (no reportado en la literatura) que la dinámica de este sistema está gobernada por la familia clásica de funciones de la circunferencia.

Este trabajo no pretende ser exhaustivo y comprende solamente un cuerpo de material seleccionado con el criterio mencionado al principio de esta presentación. La responsabilidad de la selección y su presentación en forma de una unidad coherente es nuestra responsabilidad.

Como se trata de un tema clásico, la mayor parte del material contenido en este trabajo es estándar y puede consultarse (aunque se encuentra disperso) en las referencias obligadas del tema: Arnold [1], Herman [21], Arrowsmith [3], Block-Coppel [4], Nitecki [27] y Wellington de Melo [29]. Sin embargo, una buena parte del material sólo lo hemos podido encontrar en artículos de investigación. Esperamos que el lector interesado en el tema aprecie nuestra selección y la concentración de todo este material en esta monografía.

En lo que se refiere a la forma de presentación de cada uno de los temas considerados, no hemos seguido el formato de ningún otro trabajo previo. El lector encontrará también originalidad en la discusión de algunos conceptos importantes para comprender la problemática, por ejemplo, del estudio del concepto de envolvencia introducido en el capítulo tres. Los resultados que presentamos, involucrando este concepto y la aplicación que se hace de él al estudio de la sincronización, muestran claramente su necesidad en la teoría. En este sentido este trabajo constituye una presentación más organizada de la teoría de la rotación y la sincronización.

En todo el trabajo se enfatizan los aspectos geométricos y se incluye una amplia muestra de ilustraciones gráficas. Estas gráficas han sido calculadas con el programa **Sawtooth** (versión Windows/C++ 1.0), desarrollado en el Laboratorio de Dinámica no Lineal de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Agradezco los valiosos comentarios y sugerencias enriquecedoras para este trabajo de los doctores: Fernando Ongay, Héctor Méndez, Ana Guzmán, Lourdes Esteva, Manuel Falconi y Guillermo Sienra.

Agradezco la colaboración, la amistad y el apoyo incondicional del Dr. Humberto Carrillo. A Miguel Angel Mendoza y Antonio Carrillo, por su amistad y apoyo técnico y a los amigos del Laboratorio de Dinámica no Lineal por todo el apoyo y los ánimos: Myrna, Carolina, Maybel, Josefina, Heriberto, Miguel, Oscar, Agustín.



Agradezco el apoyo y cariño que siempre me han dado el Sr. Hugo Rodríguez y la Sra. Ma. Bertha Ordóñez de R.

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico con el que conté para mis estudios de maestría.

*Irma Elizabeth Díaz Bobadilla.*

# 1 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

El estudio de los Sistemas Dinámicos es de interés en todas las ramas de las ciencias. En los sistemas dinámicos se manifiestan fenómenos y procesos que cambian con el tiempo y pueden ser modelados matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales y la iteración de mapeos (ecuaciones en diferencias). Tradicionalmente, la teoría matemática de los sistemas dinámicos ha tenido un gran éxito en la Física y en las últimas décadas hemos visto una explosión de interés en el estudio matemático de sistemas dinámicos en otros campos como la Economía, la Química, la Medicina y la Biología.

## 1.1 Iteración de Mapeos.

Si  $f : X \rightarrow X$  es una función continua de una Variedad Diferencial  $X$ , las iteradas de  $f$  son las funciones  $f^n$  definidas inductivamente por  $f^0(x) = x$ ,  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$ . Si  $f$  es un homeomorfismo entonces también podemos definir la función  $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1** Sea  $X$  una variedad diferencial. Un Sistema Dinámico Discreto en  $X$  de clase  $C^k$  es la terna  $(X, \mathbb{Z}, \Phi)$ , donde  $\Phi$  es un función de clase  $C^k$ ,  $k > 0$ , tal que,

$$\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X,$$

y donde  $\Phi(m, x) = \Phi_m(x)$ ; la función  $\Phi_m : X \rightarrow X$  satisface:

(i)  $\Phi_0 : X \rightarrow X$ , es la identidad.

(ii)  $\Phi_{m_1} \circ \Phi_{m_2} = \Phi_{m_1 + m_2}$ , para cada  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

$x$  representa el estado del sistema y toma valores en  $X$ , al cual se le llama espacio fase del sistema dinámico.

Algunas veces el espacio fase es un espacio euclideo o un subconjunto de él, pero también puede no tener una estructura Euclidea, como un círculo, una esfera, un toro ó alguna otra variedad diferencial.

Si en esta definición se sustituye el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ , por el de los naturales  $\mathbb{N}$ , tenemos un *Sistema Semidinámico Discreto (SSD)* en  $X$  de clase  $C^k$ .

La función  $f : X \rightarrow X$  dada por

$$f(x) = \Phi_1(x), \quad x \in X \text{ (mapeo a tiempo uno),}$$

es un difeomorfismo de clase  $C^k$ , cuyas iteraciones determinan el sistema dinámico en  $X$ . A la función  $f$  se le llama la *función generadora del Sistema Dinámico*. Recíprocamente, todo  $f : X \rightarrow X$  difeomorfismo de clase  $C^k$ , determina un Sistema Dinámico de clase  $C^k$  en  $X$  mediante la asignación:

$$\Phi_n(x) = f^n(x), \quad \forall x \in X \text{ y } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Obviamente una función  $\Phi_n$ , así definida, cumple las condiciones (i) y (ii):

$$(i) \quad \Phi_0(x) = f^0(x) = Id_X(x) = x.$$

$$(ii) \quad \Phi_n \circ \Phi_m(x) = f^n \circ f^m(x) = f^{n+m}(x) = \Phi_{n+m}(x).$$

Como  $f$  es difeomorfismo existe  $f^{-1}$ , por lo cual  $f^{-m}(x) = (f^{-1})^m(x)$ .

En el caso en que  $f$  no es difeomorfismo, pero es un endomorfismo de clase  $C^k$ , que no es inyectivo o suprayectivo,  $f^{-1}$  no está definida en todo  $X$  y las iteraciones de  $f$  sólo determinan un sistema semidinámico de clase  $C^k$ .

Existe otra clase de sistemas dinámicos llamados *continuos*, donde la terna es  $(X, \mathbb{R}, \Phi)$ , los cuales se relacionan con ecuaciones diferenciales, pero estos sistemas no se tratarán en el presente trabajo. En lo sucesivo cuando nos refiramos a un sistema dinámico, entenderemos que este es discreto.

Para entender la dinámica de los sistemas dinámicos discretos tenemos que analizar la evolución y el comportamiento asintótico de los puntos bajo estos procesos iterativos. Con este fin, a continuación se establecen algunas definiciones.

Sea  $X$  una variedad diferencial y consideremos el sistema dinámico (o semidinámico) generado por una función  $f : X \rightarrow X$ .

**Definición 2** La semiórbita positiva de  $x$ , es la sucesión  $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$ . Si  $f$  es biyectiva, la semiórbita negativa de  $x$  es la sucesión  $\mathcal{O}^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n \geq 0}$ , y definimos la órbita de  $x$ ,  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}^-(x)$  como la sucesión  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Teorema 1** (Unicidad de las órbitas). Por cada punto  $x \in X$ , pasa una sólo órbita del sistema dinámico generado por una función invertible  $f$ . Es decir, si  $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ .

*Demostración:*

Como  $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$ , entonces existe  $z \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y)$  tal que,

$$z = f^n(x) = f^m(y), \quad \text{para algún } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Si  $\gamma \in \mathcal{O}(x)$ , entonces  $\gamma = f^k(x)$ , tal que,

$$\begin{aligned} f^n(\gamma) &= f^n(f^k(x)) = f^{n+k}(x) = f^k(f^n(x)) = f^k(z) \\ &= f^k(f^m(y)) = f^{k+m}(y) = f^n(f^{k-n+m}(y)), \end{aligned}$$

como  $f$  es inyectiva,  $\gamma = f^{k-n+m}(y)$ , entonces  $\gamma \in \mathcal{O}(y)$ , por lo tanto  $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(y)$ . Análogamente  $\mathcal{O}(y) \subset \mathcal{O}(x)$ . Concluimos que  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ . ■

**Observación 1** Si  $f$  no es inyectiva, entonces el sistema semidinámico generado por  $f$  no cumple el teorema de unicidad.

**Definición 3** Un punto  $x$  es llamado punto periódico de  $f$ , si  $f^q(x) = x$  para algún  $q \geq 1$ . El mínimo número  $q$  es llamado el período de  $x$ . Los puntos periódicos de período  $q = 1$ , son llamados puntos fijos de  $f$ .

**Definición 4** Un punto  $x$  es eventualmente periódico de período  $q$ , si existe  $m > 0$  tal que  $f^m(x)$  es periódico de período  $q$ .

**Definición 5** Cada punto periódico  $x$ , de período  $q$ , determina un conjunto de  $q$  puntos periódicos, de período  $q$ , que es llamado órbita periódica.

$$\mathcal{O}(x) = \{x, x_1 = f(x), x_2 = f^2(x), \dots, x_{q-1} = f^{q-1}(x)\}.$$

**Proposición 1** Si  $f$  es biyectiva entonces todo punto eventualmente periódico es periódico.

*Demostración.*

Como  $x$  es eventualmente periódico de período  $q$ , existe  $m > 0$  tal que,

$$f^q(f^m(x_1)) = f^m(x_1),$$

como  $f$  es biyectiva, aplicamos  $f^{-m}$ ,

$$f^q(x_1) = x_1,$$

por lo tanto,  $x_1$  es un punto periódico de período  $q$ .

Supongamos que existe  $r = 1, \dots, q-1$  con  $f^r(x_1) = x_1$ , por lo tanto,

$$f^r(f^m(x_1)) = f^m(x_1),$$

lo cual no es cierto, ya que  $f^m(x_1)$  es un punto periódico de período  $q$ . ■

**Observación 2** Si  $x_1$  es un punto eventualmente periódico de período  $q$  de  $f$ , entonces existen  $x_2, x_3, x_4, \dots, x_q$ , en  $\mathcal{O}(x_1)$  con  $x_i \neq x_j$  para  $i, j = 1, \dots, q$ , tales que  $f(x_k) = x_{k-1}$ , para  $k = 1, \dots, q-1$  y  $f^q(x_k) = x_k$ , para  $k = 1, \dots, q$ .

## 1.2 Estabilidad de Puntos Fijos y Órbitas Periódicas.

### 1.2.1 Dinámica Topológica.

Consideremos  $f : X \rightarrow X$  con  $X$  un espacio topológico. Llamamos vecindad de un subconjunto de  $X$  a un abierto que contiene a dicho subconjunto.

**Definición 6** La órbita periódica  $\mathcal{O}(x_0)$  es estable para la función continua  $f$ , si para toda vecindad  $V$  de  $\mathcal{O}(x_0)$  existe  $U$ , vecindad de  $\mathcal{O}(x_0)$ , tal que  $x \in U$  implica que  $f^n(x) \in V$  para todo  $n > 0$ . Un punto periódico es estable si pertenece a una órbita periódica estable. Un punto periódico o una órbita, que no es estable, se dice que es inestable.

**Definición 7** Se dice que  $\mathcal{O}(x_0)$  es un atractor periódico o la órbita  $\mathcal{O}(x_0)$  es asintóticamente estable, si la órbita  $\mathcal{O}(x_0)$  es estable para  $f$  y se cumple la condición de atractividad siguiente: Existe una vecindad  $W$  de  $\mathcal{O}(x_0)$  tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(\xi), \mathcal{O}(x_0)) = 0, \forall \xi \in W.$$

La cuenca de atracción de  $\mathcal{O}(x_0)$  es el máximo abierto  $W$  con esta propiedad. Si se cumple la condición de atractividad se dice que la órbita periódica es atractiva. Un punto periódico  $x_0$  es asintóticamente estable, si pertenece a una órbita periódica asintóticamente estable.

**Definición 8** Los puntos fijos estables pero no asintóticamente estables se llaman neutralmente ó marginalmente estables.

Podría pensarse que si una órbita es atractiva, entonces debe ser estable, pero el siguiente ejemplo muestra que no es cierto.

**Ejemplo 1** El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales se debe a Mendelson [24].

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}, \\ \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho). \end{aligned}$$

La discretización de este sistema ofrece un ejemplo de un conjunto atractivo, que no es asintóticamente estable.

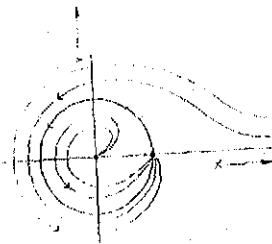


Figura 1: Atractor de Mendelson.

**Definición 9** Una órbita periódica es repulsora para el mapeo  $f$ , si existe una vecindad  $V$  de  $\mathcal{O}(x)$  y, para todo  $x \in V$ , un natural  $N(x)$  tal que  $f^n(x) \notin V$ . Un punto periódico es repulsor si pertenece a una órbita periódica repulsora.

### 1.2.2 Sistemas Dinámicos en la Recta.

En esta sección especializamos nuestro estudio de la estabilidad de órbitas periódicas a funciones,  $f : X \rightarrow X$ , de clase  $C^1$ , donde  $X$  es algún subconjunto abierto  $\mathbb{R}$ .

**Definición 10** Sea  $x$  un punto periódico de  $f$ , de período  $q$ . El punto  $x$  es hiperbólico si  $|Df^q(x)| \neq 1$ . El número  $Df^q(x)$  es llamado el multiplicador del punto periódico. Una órbita periódica es hiperbólica, si todos sus puntos son hiperbólicos.

**Observación 3** El valor del multiplicador de todo punto de una órbita periódica  $\mathcal{O}(x_0)$ , es el mismo.

*Demmostración*

Sea  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$ , tal que  $x_i = f^i(x_0)$ . Supongamos sin perdida de generalidad  $i > j$ , tal que,

$$f^{q-k}(x_i) = f^{-k}(x_i) = f^{i-j-k}(x_j), \text{ con } k = 1, \dots, q,$$

para evitar iteraciones negativas, hagamos,

$$f^{q-k}(x_i) = \begin{cases} f^{i-j-k}(x_j) & \text{si } 1 \leq k \leq i-j. \\ f^{q+i-j-k}(x_j) & \text{si } i-j+1 \leq k \leq q. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 Df^q(x_i) &= Df(f^{q-1}(x_i)) Df(f^{q-2}(x_i)) \cdots Df(x_i) \\
 &= Df(f^{i-j-1}(x_j)) Df(f^{i-j-2}(x_j)) \cdots Df(f^0(x_j)) \\
 &\quad Df(f^{q-1}(x_j)) Df(f^{q-2}(x_j)) \cdots Df(f^{i-j}(x_j)) \\
 &= Df(f^{q-1}(x_j)) Df(f^{q-2}(x_j)) \cdots Df(f^{i-j}(x_j)) \\
 &\quad Df(f^{i-j-1}(x_j)) Df(f^{i-j-2}(x_j)) \cdots Df(f^0(x_j)) \\
 &= Df^q(x_j) \blacksquare
 \end{aligned}$$

Decimos que el multiplicador de una órbita es el multiplicador de cualquiera de sus puntos.

**Teorema 2** Si el valor absoluto del multiplicador de una órbita periódica  $\mathcal{O}(x)$  es menor que uno,  $\mathcal{O}(x)$  es un atractor periódico. Si el valor absoluto del multiplicador es mayor que uno la órbita  $\mathcal{O}(x)$  es repulsora.

*Demostración:*

Sea  $\mathcal{O}(x)$  una órbita de período  $q$ , como  $f$  es de clase  $C^1$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|Df^q(\xi)| < A < 1$  para  $\xi \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ . Por el teorema del valor medio,

$$|f^q(\xi) - x| = |f^q(\xi) - f^q(x)| \leq A |\xi - x| < |\xi - x| \leq \epsilon,$$

por lo cual,  $f^q(\xi) \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$  y es más cercano a  $x$  que  $\xi$ . Vía el mismo argumento,

$$|f^{qn}(\xi) - x| \leq A^n |\xi - x|, \quad n > 0,$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{qn}(\xi) - x| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A^n |\xi - x|,$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{qn}(\xi) = x.$$

Sea  $\mathcal{O}(x)$  una órbita de período  $q$ . Como  $f$  es de clase  $C^1$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $|Df^q(\xi)| > A > 1$  para  $\xi \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ . Por el teorema del valor medio,

$$|f^q(\xi) - f^q(x)| = |f^q(\xi) - x| > A |\xi - x|$$

en este caso,  $f^q(\xi)$  está más lejos de  $x$ , que  $\xi$  de  $x$ . Así,

$$|f^{nq}(\xi) - x| > A^n |\xi - x|.$$

Si continuamos el mismo proceso, podemos encontrar  $k > 0$  tal que,  $f^k(\xi) \notin (x - \epsilon, x + \epsilon)$ . ■

**Definición 11** Sea  $x$  un punto periódico de período  $q$ . Decimos que  $x$  es superestable si  $Df^q(x) = 0$ . Una órbita  $O(x) = \{x_1, \dots, x_q\}$  de período  $q$  es superestable, si  $x_i$  es superestable, para cualquiera  $i = 1, \dots, q$ .

Consideremos funciones  $f : I \rightarrow I$  donde  $I$  es un intervalo de números reales e incluso la recta real. La dinámica puede ser visualizada por el procedimiento indicado en la figura 2 A, que consiste en tomar punto  $(x_0, x_0)$  en la diagonal, trazamos la recta vertical, a partir de este punto, hasta intersectar la gráfica de  $f$  y de ahí la recta horizontal hasta intersectar la diagonal; el punto de intersección es  $(f(x_0), f(x_0))$ ; podemos seguir iterando de esta manera y obtener una sucesión de puntos en la diagonal, que se proyecta sobre una órbita en  $I$ . Otra forma útil de examinar la dinámica es dibujando la recta  $y = x$  y la gráfica de la función  $f$ , en el cuadrado  $I \times I$  como se muestra en la figura 2 B.

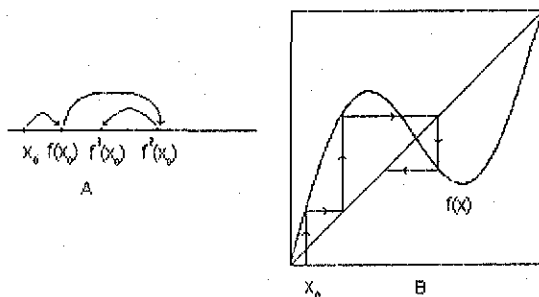


Figura 2: Iteración de una función.

Las intersecciones de la gráfica  $f$  con la diagonal determinan los puntos fijos de la función  $f$ . Así mismo, las intersecciones de la gráfica  $f^q$  con la diagonal determinan los puntos periódicos de período  $q$ .



### 1.3 Conjuntos Límites.

**Definición 12** El conjunto omega-límite de  $x$ ,  $\omega(x) = \omega(x, f)$ , del sistema dinámico generado por  $f$ , es el conjunto de puntos de acumulación de  $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Observación 4** El punto  $y \in \omega(x) = \omega(x, f)$ , si existe una sucesión  $\{n_i\}$  de naturales  $n_i \rightarrow \infty$ , tal que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y.$$

De manera análoga se define el conjunto  $\alpha$  - límite.

**Definición 13** Si la función  $f$  tiene inverso, definimos el conjunto alfa-límite de  $x$ ,  $\alpha(x) = \alpha(x, f)$ , del sistema dinámico generado por  $f$ , como el conjunto de puntos de acumulación de  $\{f^n(x) : -n \in \mathbb{N}\}$ .

**Observación 5** El punto  $y \in \alpha(x, f)$ , si existe una sucesión  $\{n_i\}$  de naturales  $n_i \rightarrow \infty$ , tal que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{-n_i}(x) = y.$$

**Definición 14** Diremos que la función  $f$  es  $C^k$ -conjugada a la función  $g$ , si existe  $h$  difeomorfismo de clase  $C^k$ , tal que el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ S & \rightarrow & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S & \rightarrow & S \\ & g & \end{array}$$

conmuta, es decir  $h \circ f = g \circ h$ . Si  $k = 0$  entonces  $f$  es topológicamente conjugada a la función  $g$ .

**Proposición 2** Dos funciones que son conjugadas dan lugar a sistemas dinámicos tales que:

- (i) Tienen igual número de puntos periódicos (de cada período).
- (ii) Sus correspondientes  $\omega$  - límites son homeomorfos.

*Demostración.*

Sean dos funciones  $f$  y  $g$

(i) Sean  $f$  y  $g$  dos funciones conjugadas y  $h$  es homeomorfismo tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

$$g^q \circ h = g^{q-1} \circ g \circ h = g^{q-1} \circ h \circ f = g^{q-2} \circ h \circ f^2 = h \circ f^2.$$

Sea  $x$  tal que  $f^q(x) = x$ . Entonces,

$$g^q(h(x)) = h(f^q(x)) = h(x).$$

Así pues, cada punto periódico de  $f$  se mapea en un punto periódico de  $g$  del mismo período.

(ii) Si  $y \in \omega(x, f)$ , existe una sucesión  $\{n_i\}$  de naturales  $n_i \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$ . Así

$$h(y) = h\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x)\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} h(f^{n_i}(x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} g^{n_i}(h(x)),$$

por lo que,  $h(y) \in \omega(h(x), g)$ . ■

## 1.4 Bifurcaciones.

El objeto de la teoría de bifurcaciones es estudiar los cambios cualitativos que sufre un sistema dinámico cuando los parámetros cambian. Consideremos familias de funciones reales de variable real,  $F_\lambda(t) \in C^\infty$ , que son de clase  $C^1$ , respecto al parámetro real  $\lambda$ .

La bifurcación de puntos fijos es el caso más simple, en esta sección veremos algunos tipos de bifurcaciones de funciones unidimensionales que serán de interés para la discusión en los próximos capítulos.

La bifurcación puede ser descrita gráficamente mediante un *diagrama de bifurcación*, en el cual se localizan los puntos fijos en el plano del parámetro  $\lambda$  contra  $t$ . Cada rebanada vertical da la localización de puntos fijos de  $F_\lambda$ , en la línea real.

### 1.4.1 Bifurcación Silla-nodo.

**Ejemplo 2** Consideremos la familia  $F_\lambda(t) = t + \lambda + 0.1 \operatorname{sen} 2\pi t$ .

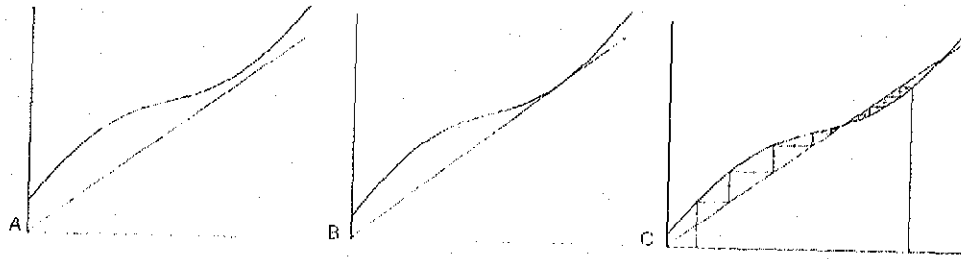


Figura 3: Bifurcación Silla-nodo: A)  $\lambda = 0.15$ , B)  $\lambda = 0.1$ , C)  $\lambda = 0.05$

El comportamiento que observamos en la figura 3, cuando variamos el parámetro  $\lambda$ , es el siguiente: en A) la función no tiene puntos fijos; en B) hay un punto fijo no hiperbólico; en C) aparecen dos puntos fijos (atractor y repulsor). Este tipo de bifurcación en la que repentinamente aparecen dos puntos fijos de estabilidad complementaria es conocida como *Bifurcación Silla-nodo*.

El siguiente resultado describe el escenario en el que ésta bifurcación ocurre

**Teorema 3 (Bifurcación Silla-nodo).** *Supóngase que para  $\lambda = \lambda_0$ , el origen  $t = 0$  es un punto fijo no hiperbólico con  $F'_{\lambda_0}(0) = 1$ , y que:*

- (i)  $F''_{\lambda_0}(0) \neq 0$ ,
- (ii)  $\frac{\partial F'_\lambda(0)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$ .

*Entonces existe una curva continua de puntos fijos en una vecindad de  $(t, \lambda) = (0, \lambda_0)$ , la cual es tangente a  $\lambda = \lambda_0$  en  $(0, \lambda_0)$ . Si  $(\frac{\partial F'_\lambda}{\partial \lambda}) F''_\lambda < 0$  ( $> 0$ ) no hay puntos fijos cerca de  $t = 0$  si  $\lambda < \lambda_0$  ( $\lambda > \lambda_0$ ), mientras que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$  ( $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ ) existen dos puntos fijos hiperbólicos  $t_+$ ,  $t_-$  cerca de  $t = 0$ . El punto fijo superior  $t_+$  es estable y el inferior  $t_-$  es inestable si  $F''_\lambda < 0$  y la estabilidad se invierte si  $F''_\lambda > 0$ .*

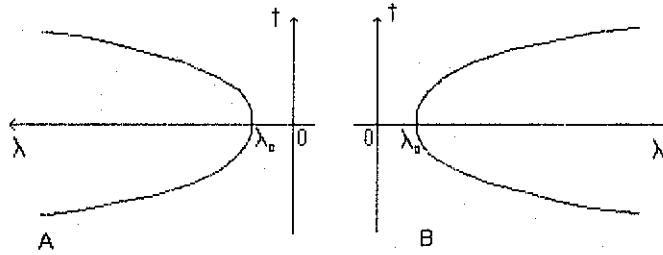


Figura 4: Diagrama de Bifurcación Silla-nodo. A)  $\lambda''(0) > 0$ , B)  $\lambda''(0) < 0$ .

*Demostración.*

Definimos  $G_\lambda(t) \equiv F_\lambda(t) - t$ . Notemos que  $G_\lambda(t) = 0$  implica que  $F_\lambda(t)$  tiene un punto fijo en  $t$ . Buscamos condiciones bajo las cuales  $G_\lambda(t) = 0$ , define una curva en el plano  $t - \lambda$ , tal que  $F_{\lambda_0}(0) = 0$  y  $F'_{\lambda_0}(0) = 1$ . Como  $G_{\lambda_0}(0) = F_{\lambda_0}(0) = 0$  y,

$$\frac{\partial G_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial F_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0,$$

por el Teorema de la Función Implícita, existe una curva simple de puntos fijos que pasa por  $t = 0$  y  $\lambda_0$ , más aún, para un  $t$  suficientemente pequeño esta curva de puntos fijos puede ser representada como una gráfica sobre la variable  $t$ , es decir, existe una función  $\lambda(t)$  de clase  $C^r$ , con  $t$  suficientemente pequeño tal que,  $\lambda_0 = \lambda(0)$  y,

$$G_{\lambda(t)}(t) \equiv F_{\lambda(t)}(t) - t = 0. \quad (1)$$

Ahora simplemente requerimos que,

$$\lambda'(0) = 0 \text{ y } \lambda''(0) \neq 0,$$

derivando implícitamente la ecuación 1,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda} \lambda'(t) + G'_{\lambda(t)}(t) &= \frac{\partial F_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda} \lambda'(t) + (F'_{\lambda(t)}(t) - 1) = 0, \\ \lambda'(t) &= -\frac{G'_{\lambda(t)}(t)}{\frac{\partial G_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}} = -\frac{F'_{\lambda(t)}(t) - 1}{\frac{\partial F_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}}. \end{aligned}$$

entonces  $\lambda'(0) = 0$ . Usando la expresión anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\lambda''(t) &= \frac{\frac{\partial G'_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda} G'_{\lambda(t)}(t) - G''_{\lambda(t)}(t) \frac{\partial G_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}}{\left(\frac{\partial G_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right)^2} \\ &= \frac{\left(F'_{\lambda(t)}(t) - 1\right) \frac{\partial F'_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda} - F''_{\lambda(t)}(t) \frac{\partial F_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}}{\left(\frac{\partial F_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right)^2},\end{aligned}$$

así,

$$\lambda''(0) = \frac{F''_{\lambda(0)}(0)}{\frac{\partial F_{\lambda(0)}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_0}} \neq 0.$$

El signo de  $\lambda''(0)$  nos dice de que lado de  $\lambda_0$  se localiza la curva de puntos fijos, es decir, determinan la dirección de la bifurcación (ver figura 4).

Por último, verifiquemos la estabilidad. Consideremos la expansión de Taylor de  $F_{\lambda}(t)$ , alrededor de  $t = 0$  y  $\lambda_0$ ,

$$\begin{aligned}F_{\lambda}(t) &= F_{\lambda_0}(0) + F'_{\lambda_0}(0)t + \frac{\partial F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( F''_{\lambda_0}(0)t^2 + \frac{\partial F'_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} t (\lambda - \lambda_0) + \frac{\partial^2 F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda^2} (\lambda - \lambda_0)^2 \right) + \dots \\ &= t + \frac{\partial F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} F''_{\lambda_0}(0)t^2 + \dots\end{aligned}$$

los puntos fijos son,

$$t_{\pm} \sim \pm \sqrt{\frac{-2 \frac{\partial F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda}}{F''_{\lambda_0}(0)}} (\lambda - \lambda_0)$$

para  $F''_{\lambda_0}(0) \left(\frac{\partial F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda}\right) < 0$  y  $\lambda > \lambda_0$ , y una expresión similar en  $\lambda < \lambda_0$  si  $F''_{\lambda_0}(0) \left(\frac{\partial F_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda}\right) > 0$ .

Ahora consideremos la expansión de Taylor de  $F'_{\lambda}(t)$ , alrededor de  $t = 0$  y  $\lambda_0$ ,

$$\begin{aligned}F'_{\lambda}(t) &= F'_{\lambda_0}(0) + \frac{\partial F'_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_0) + F''_{\lambda_0}(0)t + \dots \\ &= 1 + \frac{\partial F'_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} (\lambda - \lambda_0) + F''_{\lambda_0}(0)t + \dots,\end{aligned}$$

En cualquiera de los dos casos ( $t_{\pm}$ ), el término dominante es  $1 + F'_{\lambda_0}(0)t$ , (para  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$  ( $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ ))  $t_+$  es estable si  $F'_{\lambda}(t) < 0$  e inestable si  $F'_{\lambda}(t) > 0$ . La estabilidad de  $t_-$  es la opuesta a  $t_+$ . ■

#### 1.4.2 Bifurcación Tenedor.

**Ejemplo 3** Sea  $F_{\lambda}(t) = \lambda t + t - t^3$ . Observamos que al variar el parámetro  $\lambda$ , se da la inestabilización de un punto fijo atractor, apareciendo dos atractores más.

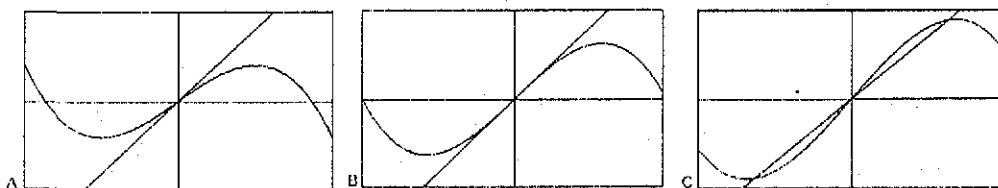


Figura 5: Bifurcación Tenedor. El valor del parámetro en cada caso es: A)  $\lambda = -0.25$ , B)  $\lambda = 0$ , C)  $\lambda = 0.4$ .

**Teorema 4 (Bifurcación Tenedor).** Sea  $F_{\lambda} \in C^{\infty}$ . Supongamos que  $t = 0$ , es un punto fijo no-hiperbólico en  $\lambda_0$ , con  $F'_{\lambda_0}(0) = 1$ . Entonces si:

(i)  $\frac{\partial F'_{\lambda}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0 = F''_{\lambda_0}(0)$ ,

(ii)  $\frac{\partial F'_{\lambda}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$ ,

(iii)  $F'''_{\lambda_0}(0) \neq 0$ ,

existe una rama de puntos fijos la cual pasa a través de  $(0, \lambda_0)$  transversal a  $\lambda_0$ . Una segunda rama de puntos fijos bifurca de  $(0, \lambda_0)$  tangencial a  $\lambda_0$  en  $\lambda > \lambda_0$  ( $\lambda < \lambda_0$ ) si,

$$\left( \frac{\partial F'_{\lambda}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right) F'''_{\lambda_0}(0) < 0 \left( \left( \frac{\partial F'_{\lambda}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right) F'''_{\lambda_0}(0) > 0 \right).$$

(tal que, existe  $\varepsilon > 0$  y para  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ , hay tres puntos fijos cerca de  $t = 0$  si  $\left( \frac{\partial F'_{\lambda}(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \right) F'''_{\lambda_0}(0) < 0$ ).

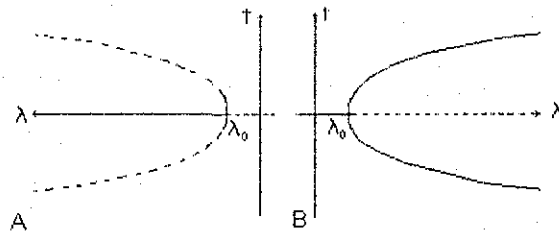


Figura 6: Diagrama de Bifurcación. A)  $-\frac{F''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial F''_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda}} > 0$ , B)  $-\frac{F''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial F''_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda}} < 0$

*Demostración.*

Los puntos fijos de  $F_\lambda(t)$ , están dados por  $G_\lambda(t) \equiv F_\lambda(t) - t = 0$ . Para tener más de una curva de puntos fijos que pasan a través de  $\lambda_0$  y  $t = 0$ , debemos tener

$$\frac{\partial G_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial F_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0.$$

Como queremos que una curva de puntos fijos sea  $t = 0$ , definimos  $G_\lambda(t)$  de la forma siguiente,

$$G_\lambda(t) = tH_\lambda(t) - t(f_\lambda(t) - 1),$$

donde,

$$H_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{G_\lambda(t)}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ G'_\lambda(0), & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{F_\lambda(t)}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ F'_\lambda(0), & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Además de dicha curva, para que exista una adicional de puntos fijos que pasen por  $\lambda_0$  y  $t = 0$ , requerimos,  $H_{\lambda_0}(0) = F'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$  y,

$$\frac{\partial H_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial f_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial F'_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0, \quad (2)$$

entonces el teorema de la función implícita, implica que existe una única función de clase  $C^1$ ,  $\lambda(t)$ , (con  $t$  suficientemente pequeño) tal que,

$$H_{\lambda(t)}(t) = f_{\lambda(t)}(t) - 1 = 0. \quad (3)$$

Requerimos que  $\lambda'(0) = 0$  y  $\lambda''(0) \neq 0$ . Diferenciamos implícitamente la ecuación 3,

$$H'_{\lambda(t)}(t) + \left(\frac{\partial H_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right) \lambda'(t) = f'_{\lambda(t)}(t) + \left(\frac{\partial f_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right) \lambda'(t),$$

$$\lambda'(t) = -\frac{H'_{\lambda(t)}(t)}{\frac{\partial H_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}} = -\frac{f'_{\lambda(t)}(t)}{\frac{\partial f_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}}, \text{ entonces } \lambda'(0) = -\frac{F'_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial F'_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0}} = 0, \quad (4)$$

$$\lambda''(t) = \frac{H''_{\lambda(t)}(t) \left(\frac{\partial H_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right) - H'_{\lambda(t)}(t) \left(\frac{\partial H'_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial H_{\lambda(t)}(t)}{\partial \lambda}\right)^2},$$

$$\lambda''(0) = -\frac{H''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial H_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0}} = -\frac{F''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial F'_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0}} \neq 0,$$

Más aún, el signo de  $\lambda''(0)$  nos dice de que lado de  $\lambda_0$ , descansa una de las curvas de puntos fijos, ver figura 6.■

### 1.4.3 Bifurcación Doblamiento de Período.

**Ejemplo 4** Consideremos la función  $F_{\lambda}(t) = t + \lambda \text{sen}2\pi t$ . Cuando variamos el parámetro  $\lambda$ , observamos que después de tener dos puntos fijos un atractor y un repulsor, la pendiente del punto donde se da el atractor se incrementa, de modo que los dos puntos fijos se vuelven repulsores, apareciendo una órbita de período dos. Este tipo de bifurcación es conocida como Bifurcación Doblamiento de Período.

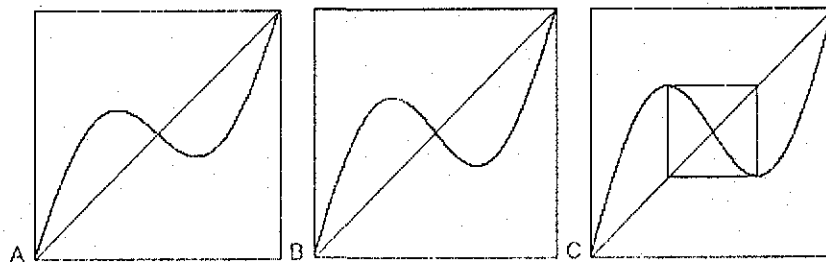


Figura 7: Bifurcación Doblamiento de Período A)  $\lambda = 0.3$ , B)  $\lambda = 0.35$ , C)  $\lambda = 0.4$ .



**Teorema 5 (Bifurcación Doblamiento de Período).** Supongamos que para una función  $F_\lambda(t_n)$ ,  $t = 0$  es un punto fijo no-hiperbólico en  $\lambda_0$  y  $F'_{\lambda_0}(0) = -1$ . Entonces si además

$$(i) \frac{\partial F_\lambda^2(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0 = (F'_{\lambda_0}(0))'',$$

$$(ii) \frac{\partial (F'_\lambda)^2(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0,$$

$$(iii) (F'_{\lambda_0})'''(0) \neq 0,$$

existe una curva de puntos periódicos de período dos que bifurca desde  $(\lambda_0, 0)$ .

*Demostración*

Los puntos periódicos de período dos de  $F_\lambda(t)$ , están dados por  $G_\lambda(t) \equiv F_\lambda^2(t) - t = 0$ . Como,

$$\frac{\partial G_\lambda(t)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_\lambda^2(t)}{\partial \lambda} = 0,$$

para aplicar el teorema de la función implícita, definamos,

$$H_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{G_\lambda(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ G'_\lambda(0) & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

tenemos que,

$$H_{\lambda_0}(0) = G'_{\lambda_0}(0) = (F'_{\lambda_0})'(0) - 1 = (F'_{\lambda_0})'(F'_{\lambda_0}(0)) (F'_{\lambda_0})'(0) - 1 = 0,$$

y

$$\frac{\partial H_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial G'_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (F'_\lambda)^2(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Aplicamos el teorema de la función implícita a  $H_\lambda(t)$ , entonces existe una única función de clase  $C^r$ ,  $\lambda(t)$ , (con  $t$  suficientemente pequeño), que satisface  $\lambda(0) = \lambda_0$  y  $H_{\lambda(t)}(t) = 0$ . En particular, para  $t \neq 0$ , tenemos,

$$H_{\lambda(t)}(t) = \frac{G_{\lambda(t)}(t)}{t} = 0,$$

es decir, un punto periódico de período dos de  $F_{\lambda(t)}(t)$ . Verifiquemos que,  $\lambda'(0) = 0$  y  $\lambda''(0) \neq 0$ . De la ecuación 4, calculamos,

$$\lambda'(0) = -\frac{H'_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial H_\lambda(0)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}} = 0,$$

ya que,

$$(F_{\lambda_0}^2)''(0) = ((F_{\lambda_0}')'(0))^2(F_{\lambda_0})''(0) + (F_{\lambda_0})''(0)(F_{\lambda_0}')'(0) = 0.$$

La concavidad de la curva  $\lambda(t)$ , se puede conocer si calculamos

$$\lambda''(0) = \frac{-H_{\lambda_0}''(0) \left( \frac{\partial H_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} \right)}{\left( \frac{\partial H_{\lambda_0}(0)}{\partial \lambda} \right)^2}.$$

Entonces,

$$\lambda''(t) = \frac{\frac{2}{3} (F_{\lambda_0}^2)'''(0) + ((F_{\lambda_0}^2)''(0))^2}{\frac{\partial (F_{\lambda_0}^2)'(0)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0}}$$

debido a que,  $H_{\lambda}(t)$  es diferenciable y satisface,

$$\begin{aligned} H'_{\lambda_0}(0) &= \frac{1}{2} (F'_{\lambda}(0)), \\ H''_{\lambda_0}(0) &= \frac{1}{3} (F''_{\lambda_0}(0)). \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación 6** La gráfica de la bifurcación de doblamiento de período depende del signo de  $\lambda''(t)$ .

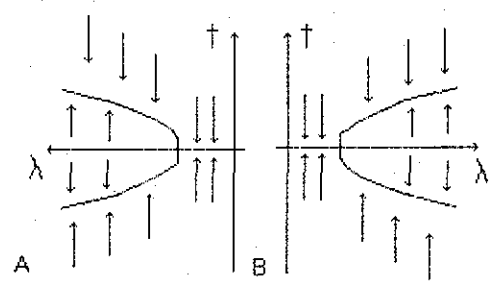


Figura 8: Gráfica de la Bifurcación de Doblamiento de Período con: A)  $\frac{2}{3} F'''_{\lambda}(0) + (F''_{\lambda}(0))^2 > 0$ ; B)  $\frac{2}{3} F'''_{\lambda}(0) + (F''_{\lambda}(0))^2 < 0$ .

**Observación 7** Observamos que si  $t$  es un punto fijo de  $F$ ,  $F_\lambda(t) = t$ , entonces  $t$  es un punto fijo de  $F_\lambda^2(t)$ ,

$$F_\lambda^2(t) = F_\lambda(F_\lambda(t)) = F_\lambda(t) = t,$$

si  $F'_\lambda(t) = -1$ ,

$$\xi (F_\lambda^2)'(t) = F'_\lambda(F_\lambda(t)) F'_\lambda(t) = F'_\lambda(t) F'_\lambda(t) = 1,$$

y además si  $F''_\lambda(t) = 0$ , se tiene que,

$$(F_\lambda^2)''(t) = (F'_\lambda(t))^2 F''_\lambda(t) + F''_\lambda(t) F'_\lambda(t) = 0.$$

Con lo anterior, vemos que las condiciones del teorema 4 se satisfacen para  $f^2$ , si  $f$  cumple las condiciones del teorema 5.

Observamos que en la segunda iterada de la función dada en el ejemplo 4 (ver figura 9), ocurre la bifurcación tenedor antes vista.

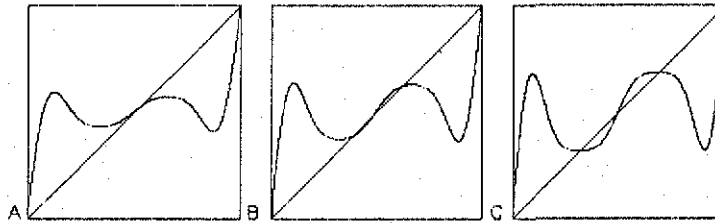


Figura 9: Bifurcación Tenedor. A)  $b = 0.3$ , B)  $b = 0.35$ , C)  $b = 0.4$ .

## 2 FUNCIONES DE LA CIRCUNFERENCIA.

En este capítulo discutiremos las ideas y conceptos básicos que involucran el estudio de la dinámica de las funciones de la circunferencia.

**Definición 15** Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , definimos,

$$a \bmod 1 = a - [a],$$

donde  $[a]$  es el mayor entero menor o igual a  $a$ .

**Observación 8** (i)  $a \bmod 1 \geq 0$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $a \bmod 1$  es la parte fraccionaria de  $a$ , si  $a \geq 0$  y uno menos el valor absoluto de la parte fraccionaria si  $a < 0$ .

**Lema 1** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$(a + b) \bmod 1 = (a \bmod 1 + b \bmod 1) \bmod 1.$$

Es importante hacer notar que, para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a(b \bmod 1) \neq (ab) \bmod 1$ .

*Demostración*

Basta probar que  $(a \bmod 1 + b \bmod 1) - (a + b)$ , es un entero.

$$\begin{aligned} (a \bmod 1 + b \bmod 1) - (a + b) &= (a \bmod 1 - a) + (b \bmod 1 - b) \\ &= -[a] - [b] \in \mathbb{Z}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 16** Sea  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .  $S$  es la clase de equivalencia topológica de  $C$ .

Un modelo de  $S$  es el espacio cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , determinado por,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}, \text{ donde } [x] = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Z}\}.$$

Otro modelo resulta al identificar los extremos del intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 17** Una función  $f : S \rightarrow S$ , es llamada una Función de la Circunferencia.

Estas funciones pueden ser especificadas usando un modelo cualquiera de la clase de  $S$ .

**Ejemplo 5** *Las rotaciones son funciones naturales de la circunferencia.*

$$\begin{aligned} r_a : S &\rightarrow S \\ x &\mapsto (x + a) \bmod 1 \end{aligned}$$

Donde el ángulo de rotación es de  $2\pi a$ . Equivalentemente decimos que el ángulo de rotación es de  $a$  radianes normalizados.

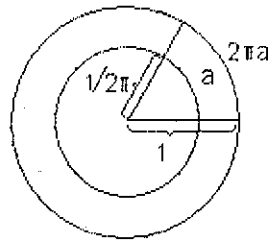


Figura 10: Rotación  $r_a(x)$ .

**Ejemplo 6** *La proyección canónica es la clase de equivalencia de la función*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\rightarrow S \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

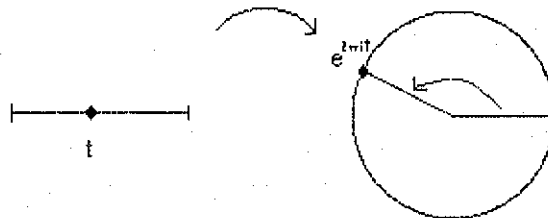


Figura 11: Proyección Canónica.

Otra caracterización de la proyección canónica es

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\rightarrow S \\ t &\mapsto t \bmod 1 \end{aligned}$$

**Definición 18** Toda  $f : S \rightarrow S$ , continua, es llamada Endomorfismo de la Circunferencia.

## 2.1 Representación de una Función de la Circunferencia

**Definición 19**  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representa (o es el levantamiento de) una función de la circunferencia, si para todo  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\pi(s) = \pi(t), \text{ implica que } \pi(F(s)) = \pi(F(t)).$$

**Proposición 3**  $F$  representa a una función de la circunferencia si y sólo si existe una única función  $f$  de la circunferencia que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \rightarrow & S \\ & f & \end{array} \quad (5)$$

Esto es,  $F$  representa o es el levantamiento de una función de la circunferencia si y sólo si existe una única  $f : S \rightarrow S$ , que cumple.

$$\pi(F(t)) = f(\pi(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

*Demostración.*

Supongamos que  $F$  representa una función de la circunferencia y escojamos una rama cualquiera  $\pi^{-1}$  de la inversa de  $\pi$ , para definir,

$$f(x) = \pi(F(\pi^{-1}(x))), \quad \forall x \in S.$$

Por hipótesis  $F(t) - F(s) \in \mathbb{Z}$  para  $t, s = \pi^{-1}(\pi(t)), \in \mathbb{R}$ , tal que  $t - s \in \mathbb{Z}$  y entonces,

$$\pi(F(t)) = \pi(F(s)) = \pi(F(\pi^{-1}(\pi(t)))) = f(\pi(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

por lo tanto, existe  $f$  función de la circunferencia, tal que  $F$  es representación de ella.

Recíprocamente, si existe  $f$  función de la circunferencia, que cumple,

$$\pi(F(t)) = f(\pi(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

con una  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sean  $s, t \in \mathbb{R}$ , tales que  $\pi(s) = \pi(t)$ , entonces,

$$\pi(F(t)) = f(\pi(t)) = f(\pi(s)) = \pi(F(s)),$$

por lo que,  $F$  es representación (o es el levantamiento) de  $f$ . ■

**Observación 9** Sea  $\pi^{-1}$  una rama de la inversa de la proyección canónica  $\pi$ . Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  determina una función de la circunferencia, mediante la regla,

$$f(x) = (\pi \circ F \circ \pi^{-1})(x),$$

independientemente de la rama ( $\pi^{-1}$ ) de la inversa que se escoja, si y sólo si  $F$  representa a una función de la circunferencia.

**Observación 10** (i) Toda función de la circunferencia tiene representaciones en la recta.

(ii) Sea  $F$  representación de  $f$ .  $F$  continua implica  $f$  continua, sin embargo una  $f$  continua puede tener representaciones discontinuas.

(iii) Todas las representaciones continuas de un endomorfismo difieren por una constante entera.

*Demostración.*

(i) Dada  $f : S \rightarrow S$ , escogemos  $\pi^{-1}$ , una rama cualquiera de la inversa de  $\pi$ . Obviamente la función,

$$F(t) = \pi^{-1}(f(\pi(t))), \quad (7)$$

satisface que  $\pi(F(t)) = f(\pi(t))$ .

(ii) Sea  $U \subset S$  un abierto, demostremos que  $f^{-1}(U)$  es abierto. Como  $\pi$  es continua,  $\pi^{-1}(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}$ , y además por hipótesis  $F$  es continua, entonces  $F^{-1}(\pi^{-1}(U))$  es abierto en  $\mathbb{R}$ . Por la conmutatividad del diagrama, esto por ser  $F$  representación de  $f$ ,

$$F^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(f^{-1}(U)),$$

pero  $\pi$  es la proyección canónica, por lo que un subconjunto de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , es abierto, entonces  $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$  es abierto si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto.

(iii) Sean  $F(t)$  y  $F^*(t)$  representaciones continuas de  $f$ , entonces

$$\pi(F^*(t)) = f(\pi(t)) = \pi(F(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces,

$$F^*(t) - F(t) \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es decir,  $F^* - F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , como  $F^*(t)$ ,  $F(t)$  son continuas y  $\mathbb{Z}$  es discreto, entonces  $F^*(t) - F(t)$  es constante. Por lo tanto, existe  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$F^*(t) - F(t) = m,$$

para toda  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Observación 11** *Las funciones de la circunferencia pueden tener representaciones discontinuas que no difieren por una constante entera.*

En virtud de la observación 10 (iii), podemos dar la siguiente definición.

**Definición 20** *Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia y  $F$  una representación continua de  $f$ . Diremos que  $f$  es monótono creciente (decreciente) si  $F$  lo es.*

## 2.2 Endomorfismos de Grado Entero

Por definición, cuando una  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representa una función de la circunferencia, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $k(t) \in \mathbb{Z}$  tal que  $F(t+1) - F(t) = k(t)$ . Veremos ahora que para todas las representaciones continuas de un endomorfismo de la circunferencia, este entero  $k$  es independiente de  $t$ .

Generalizamos primero el concepto de función periódica.

**Definición 21**  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódica de grado entero  $k$ , si

$$F(t+1) = F(t) + k, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

**Observación 12** *Toda función periódica de grado cero es periódica, de período  $T = 1$ .*



**Proposición 4** (i) Si  $F$  es periódica de grado  $k$  entonces, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$F(t + m) = F(t) + mk, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Toda función periódica de grado entero representa una función de la circunferencia.

*Demostración.*

(i)

$$\begin{aligned} F(t + m) &= F(t + m - 1) + k \\ &= F(t + m - 2) + 2k \\ &\vdots \\ &= F(t + m - m) + mk. \end{aligned}$$

(ii) Sea  $F$  periódica de grado entero  $k$  y sean  $s, t \in \mathbb{R}$  tales que  $s = t + m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces,

$$F(s) - F(t) = F(t + m) - F(t) = mk, \quad mk \in \mathbb{Z},$$

por lo tanto,  $F$  representa una función de la circunferencia ■

**Proposición 5** Todo endomorfismo de la circunferencia tiene una representación que es continua y periódica de grado entero. Todas sus representaciones continuas son periódicas del mismo grado entero.

*Demostración.*

Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia y  $F$  una representación continua de  $f$ . Consideremos,

$$\varphi(t) \equiv F(t + 1) - F(t),$$

por ser  $F$  representación,  $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Probemos que  $\varphi(t)$  es constante, por reducción al absurdo. Supongamos que  $\varphi(t)$  no es constante, entonces existen  $t_1, t_2$  tales que,  $\varphi(t_1) = k \in \mathbb{Z}$  y  $\varphi(t_2) = k + 1 \in \mathbb{Z}$ , dado  $\xi$  un real no entero, por el teorema del valor intermedio existen  $t \in (t_1, t_2)$  tal que  $\varphi(t) = \xi$ , esto es contradictorio, ya que  $\varphi(t)$  toma valores enteros.

Sea  $H(t)$  otra representación continua de  $f$ , entonces  $H(t) = F(t) + c$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ , luego,

$$H(t+1) = F(t+1) + c = F(t) + k + c = H(t) + k,$$

es decir,  $H(t)$  es periódica de grado  $k$ . Por lo tanto,  $\varphi(t)$  no depende de  $t$  ■

**Observación 13** Una función discontinua de la circunferencia puede tener representaciones periódicas de diferente grado o incluso que no sean periódicas de grado entero.

**Definición 22** El grado de un endomorfismo  $f$ , es el grado de cualquier representación continua y periódica de grado entero de él.

**Observación 14** La gráfica de un endomorfismo  $f : S \rightarrow S$  es una curva cerrada en el toro,  $T^2 = S \times S$ , que se enrolla una sola vez en la dirección de los paralelos. El grado de  $f$  es el número de veces que ésta curva se enrolla en el el toro, en la dirección de los meridianos. Para visualizar estas gráficas conviene pensar a  $T^2$  como el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  donde los lados opuestos están identificados.

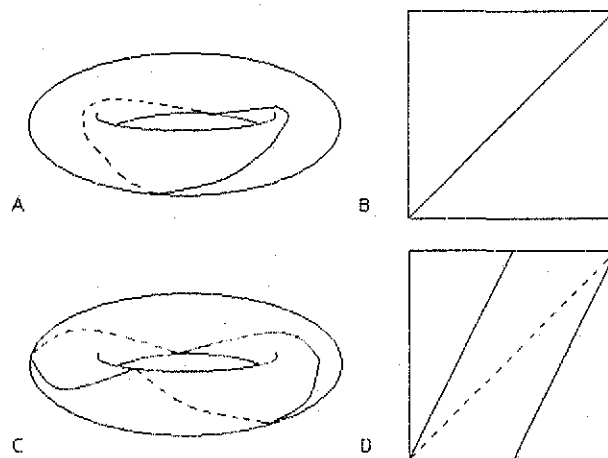


Figura 12: Funciones en el Toro y en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ :  $f(x) = (x) \bmod 1$  (A,B) y  $f(x) = (2x) \bmod 1$  (C,D).

Nos referimos al cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  con esa indentificación, como el *Toro Plano*.

**Proposición 6** *Todo endomorfismo de la circunferencia, de grado  $k \neq 0$ , es suprayectivo.*

*Demostración:*

Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia de grado  $k \neq 0$  y  $F$  representación continua de  $f$ . De la ecuación 8,  $F(1) = F(0) + k$ , para todo  $u \in [F(0), F(0) + |k|)$  existe  $t \in [0, 1)$  tal que  $u = F(t)$ . Por lo tanto,  $F$  es suprayectiva de  $[0, 1]$ . Como  $F$  es suprayectiva, entonces  $f \circ \pi = \pi \circ F$  es suprayectiva. ■

**Definición 23** *Sea  $f$  una función de la circunferencia de grado  $k$  y  $F$  representación continua de  $f$ . Decimos que  $F$  es una representación principal, si  $F(0) \in [0, 1)$ .*

**Observación 15** *Sea  $f$  una función de la circunferencia de grado  $k$ . Dada  $\overline{F}$  representación continua de  $f$ , existe  $F$  representación principal de  $f$ .*

*Demostración.*

Dada  $\overline{F}$  representación continua de  $f$ , existe  $\bar{c}$ ,  $c$  tal que  $\overline{F}(0) = \bar{c} \in [c, c+1)$ . Hagamos,

$$F(t) = \overline{F}(t) - [\bar{c}], \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde  $[\bar{c}]$  es el mayor entero menor o igual a  $\bar{c}$ , entonces,  $F(0) \in [0, 1)$  ■

A continuación presentaremos dos proposiciones técnicas que se necesitarán en la secuela.

**Proposición 7** *Definimos  $F^n$  como la  $n$ -ésima iterada de  $F$ . Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia de grado  $k$  y  $l$ , respectivamente.*

(i) *Si  $F$  y  $G$  son representaciones continuas de  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces  $F^n \circ G^m$  y  $G^m \circ F^n$  son representaciones de  $f^n \circ g^m$  y  $g^m \circ f^n$ .*

(ii)  *$f^n \circ g^m$  y  $g^m \circ f^n$ , son de grado  $k^n l^m$ .*

*Demostración.*

(i) Primero probemos que  $F^n$  es representación de  $f^n$ . (Inducción sobre  $n$ ).

Para  $n = 1$  es válido, por hipótesis.

Supongamos que válida para  $n - 1$ , es decir,

$$\pi \circ F^{n-1} = f^{n-1} \circ \pi.$$

Demostraremos que es válido para  $n$ ,

$$(\pi \circ F^n) = (\pi \circ F^{n-1}) \circ F = (f^{n-1} \circ \pi) \circ F = f^{n-1} \circ f \circ \pi = f^n \circ \pi,$$

entonces  $F^n$  es representación de  $f^n$ . Similarmente,  $G^n$  es representación de  $g^n$ .

Probemos ahora que  $G^m \circ F^n$  es representación de  $g^m \circ f^n$ .

$$\pi \circ (G^m \circ F^n) = (g^m \circ \pi) \circ F^n = g^m \circ (\pi \circ F^n) = g^m \circ (f^n \circ \pi) = (g^m \circ f^n) \circ \pi,$$

similarmente,  $F^n \circ G^m$  es representación de  $f^n \circ g^m$ .

(ii) Primero probemos que  $f^n$  tiene grado  $k^n$ .

$$F^n(t+1) = F(F^{n-1}(t+1)) = F(F^{n-1}(t) + k^{n-1}).$$

Aplicando la proposición 4 (i), tenemos,

$$F^n(t+1) = F(F^{n-1}(t)) + k(k^{n-1}) = F^n(t) + k^n.$$

por lo tanto,  $f^n$  tiene grado  $k^n$ . Análogamente,  $g^m$  tiene grado  $l^m$ .

Ahora veamos que  $f^n \circ g^m$  y  $g^m \circ f^n$  son de grado  $k^n l^m$ .

$$F^n(G^m(t+1)) = F^n(t + l^m) = F^n(t) + k^n l^m. \blacksquare$$

**Proposición 8** Sean  $f$  un endomorfismo de la circunferencia de grado  $k$  y  $\bar{F}$ ,  $F$  representaciones de  $f$ , tales que para toda  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{F}(t) = F(t) + c$ , con  $c \in \mathbb{Z}$ . Entonces,

$$\bar{F}^n(t) = F^n(t) + c \sum_{i=0}^{n-1} k^i.$$

*Demostración:* (Inducción sobre  $n$ )

Para  $n = 1$ , se cumple por hipótesis.

Supongamos que la proposición es válida para  $n - 1$ .

Demostremos que se vale para  $n$ :

$$\begin{aligned} \bar{F}^n(t) &= \bar{F}(\bar{F}^{n-1}(t)) = F(\bar{F}^{n-1}(t)) + c \\ &= F(F^{n-1}(t) + c \sum_{i=0}^{n-2} k^i) + c \\ &= F(F^{n-1}(t)) + (c \sum_{i=0}^{n-2} k^i)k + c \\ &= F^n(t) + c \sum_{i=0}^{n-1} k^i + c \\ &= F^n(t) + c \sum_{i=0}^{n-1} k^i \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario 1** Si  $f$  es de grado uno ( $k = 1$ ) entonces  $\overline{F^n}(t) = F^n(t) + cn$ .

### 2.3 Homeomorfismos.

Sea  $F$  una representación de  $f$ . Puede demostrarse que si  $F$  es un homeomorfismo, entonces  $f$  es también un homeomorfismo, pero el recíproco no es cierto. Sin embargo, si  $f$  es un homeomorfismo de la circunferencia y  $F$  es una representación continua de  $f$ , entonces  $F$  es un homeomorfismo y además  $F^{-1}$  es una representación de  $f^{-1}$ .

**Observación 16** Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia. Si  $f$  y  $g$  son conjugadas, entonces existen  $F$  y  $G$  representaciones continuas respectivas que son conjugadas.

*Demostración:*

Si  $f$  y  $g$  son conjugadas, existe  $h$  homeomorfismo con  $H$  su representación, tal que,

$$h \circ f = g \circ h,$$

usando la proposición 3, tenemos,

$$\begin{aligned} (h \circ f) \circ \pi &= (g \circ h) \circ \pi, \\ h \circ (f \circ \pi) &= g \circ (h \circ \pi), \\ h \circ (\pi \circ F) &= g \circ (\pi \circ H), \\ (h \circ \pi) \circ F &= (g \circ \pi) \circ H, \\ (\pi \circ H) \circ F &= (\pi \circ G_1) \circ H, \\ \pi \circ (H \circ F) &= \pi \circ (G_1 \circ H), \end{aligned}$$

lo cual implica que,  $H \circ F = G_1 \circ H + c$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ , si definimos  $G(t) = t + c$

$$H \circ F = G \circ H,$$

por lo tanto, existen  $F$  y  $G$  que son conjugadas. ■

Consideremos orientación positiva como la orientación en sentido contrario de las manecillas del reloj y negativa en caso contrario.

**Definición 24** Sea  $f$  un homeomorfismo de la circunferencia.  $f$  preserva la orientación, si todo segmento orientado (con orientación positiva o negativa) con extremos  $x, y$ , al iterarlo y obtener el segmento con extremos  $f(x), f(y)$ , éste conserva dicha orientación. Abreviaremos "Homeomorfismo que preserva la Orientación" por HPO.

**Observación 17** Sea  $f$  un homeomorfismo y  $F$  una representación continua de  $f$ . Si  $f$  preserva orientación positiva entonces  $F$  es creciente y de grado uno. Si  $f$  invierte orientación,  $F$  es una función estrictamente decreciente y tiene grado  $-1$ .

**Proposición 9** (i) Si un endomorfismo de la circunferencia, es inyectivo entonces tiene grado  $k = 1$  o  $k = -1$ .

(ii)  $f$  es un endomorfismo de la circunferencia, inyectivo, si y sólo si  $f$  es un homeomorfismo.

*Demostración.*

Sea  $F$  una representación continua de  $f$ .

(i) Por definición,  $F(t+1) = F(t) + k$ . Supongamos que  $|k| \geq 2$ , entonces existen  $t_0, t_1 \in [0, 1)$  distintos, tales que,  $F(t_1) - F(t_0) = |k|$ , es decir,  $\pi(F(t_0)) = \pi(F(t_1))$ , entonces,

$$f(\pi(t_0)) = f(\pi(t_1))$$

como  $f$  es inyectiva,  $\pi(t_0) = \pi(t_1)$ , pero eran distintos. Por lo tanto  $|k| < 2$ . Ahora si  $k = 0$ ,  $f$  no es inyectiva. Así que  $|k| = 1$ , es decir,

$$F(t+1) = F(t) \pm 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Como  $[0, 1)$  es compacto y Hausdorff, por el Teorema Fundamental de la Topología que dice "Toda biyección continua de un compacto a un Hausdorff, es homeomorfismo", por lo tanto  $f$  es homeomorfismo. ■

**Ejemplo 7** Para cada  $a \in [0, 1)$  la función  $R_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $R_a(t) = t + a$ , es la representación de una función de la circunferencia  $r_a(x)$

Si  $a \in \mathbb{Q}$  se dice que  $R_a$  es una rotación racional y si  $a \notin \mathbb{Q}$ ,  $R_a$  es una rotación irracional. Las rotaciones son los ejemplos más sencillos de HPO.

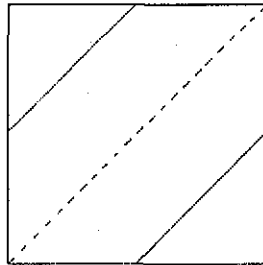


Figura 13: Rotación,  $r_{\frac{1}{2}}(x) = (x + \frac{1}{2}) \bmod 1$ .

### 3 ENDOMORFISMOS MONÓTONOS.

En los dos capítulos siguientes se discute la teoría de rotación iniciada por Poincaré, en este capítulo se consideran endomorfismos monótonos de grado uno, en el capítulo 4, siguiendo el trabajo de Newhouse, Palis y Takens, se aborda la generalización de la teoría de rotación para endomorfismos de grado uno (no necesariamente monótonos) de la circunferencia.

#### 3.1 Número de Rotación.

En esta sección veremos que a cada endomorfismo monótono creciente,  $f$ , de la circunferencia, se le puede asociar un número real,  $\rho(f)$ , llamado número de rotación [31]. Este número caracteriza importantes propiedades del sistema dinámico determinado por las iteraciones de  $f$ , y constituye un indicador de la existencia de órbitas periódicas.

**Definición 25** Definimos la longitud del arco (orientado) entre dos puntos  $x, y$  de la circunferencia como:

$$\text{larc}(x, y) = \begin{cases} (t - s) \bmod 1, & \text{si } s \leq t \\ (1 - (s - t) \bmod 1) \bmod 1, & \text{si } s > t \end{cases}$$

donde  $s, t \in \mathbb{R}$  son tales que  $\pi(s) = x$ ,  $\pi(t) = y$

La definición de longitud de arco implica la selección de una orientación en la circunferencia, el arco de  $x$  a  $y$  se recorre avanzando en la dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj.

**Observación 18** La definición anterior es independiente de representantes: el valor de  $\text{larc}(x, y)$  es independiente de la selección de los puntos  $s$  y  $t$  en  $\pi^{-1}(x)$  y  $\pi^{-1}(y)$  respectivamente.

*Demostración:*

Dados  $s, s'$  y  $t, t'$  en  $\pi^{-1}(x)$  y  $\pi^{-1}(y)$  respectivamente, para que la  $\text{larc}(x, y)$  sea independiente de la selección de los puntos, tenemos cuatro casos: 1)  $s \leq t$  y  $s' \leq t'$ , 2)  $s > t$  y  $s' > t'$ , 3)  $s > t$  y  $s' \leq t'$ , y 4)  $s \leq t$  y  $s' > t'$ ; los casos 1) y 2) son triviales y el 3) y 4) son similares, así que basta probar que,

$$(t - s) \bmod 1 = 1 - (s' - t') \bmod 1,$$



para  $s \leq t$  y  $s' > t'$ .

Como  $s \leq t$  y  $s' > t'$ ,  $s' = s + k$ ,  $t' = t + l$ ;  $k, l \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} (t - s) - (1 - (s' - t') \bmod 1) &= t' - l - s' + k - 1 + (s' - t') \bmod 1 \\ &= (s' - t') \bmod 1 - (s' - t') - l + k - 1 \\ &= m \in \mathbb{Z}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación 19** (i)  $0 \leq \text{larc}(x, y) < 1$  y  $\text{larc}(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .  
(ii)  $\text{larc}(x, y) = 1 - \text{larc}(y, x)$

**Definición 26** Sea  $\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$  la órbita positiva de un punto  $x_0$ , bajo el endomorfismo  $f : S \rightarrow S$ . Definimos el avance promedio de la órbita  $\mathcal{O}^+(x_0)$ , en  $n$  iteraciones, como:

$$\mathbf{P}_n(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{larc}(x_{k-1}, x_k).$$

El avance promedio de la órbita  $\mathcal{O}^+(x_0)$  (completa) estaría entonces dado por:

$$\mathbf{P}_\infty(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(x_0).$$

**Observación 20** Más adelante, veremos que este límite puede no existir, aún siendo la función  $f$  un endomorfismo de grado uno.

**Ejemplo 8** Consideremos el sistema dinámico en  $S$  determinado por la rotación,  $r_a(x_0)$ , de arco (ángulo)  $0 < a < 1$ . Como es de esperarse, el avance promedio de las órbitas resulta ser  $a$ . Una representación de  $r_a(x)$  es  $R_a(t) = t + a$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Dado que  $R_a^k(t) = t + ka$  y entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\infty(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{larc}(x_{k-1}, x_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{larc}(r_a^{k-1}(x_0), r_a^k(x_0)). \end{aligned}$$

Sea  $t_0$  tal que  $\pi(t_0) = x_0$ . Como  $a > 0$ ,  $R_a^k(t_0) > R_a^{k-1}(t_0)$  y entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\infty(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (R_a^k(t_0) - R_a^{k-1}(t_0)) \bmod 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (t_0 + ka - (t_0 + (k-1)a)) \bmod 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n} = a, \end{aligned}$$

Uno de los teoremas principales de esta sección es el siguiente.

**Teorema 6** Si  $f$  es un endomorfismo de grado uno, monótono creciente, entonces para toda órbita  $\mathcal{O}^+(x)$  está bien definido el avance promedio  $P_\infty(x)$  y es el mismo para todas ellas. Esto es: para todo  $x$  está bien definido  $P_\infty(x)$  y es independiente de  $x$ . Este límite depende solamente de la función  $f$  y se denota por  $\rho(f)$ . Más aún, si  $F$  es una representación continua de  $f$ , se tiene que,

$$\rho(f) \equiv P_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \pmod{1},$$

para todo  $x$  en  $S$ . Este último límite es también independiente de la representación continua  $F$  y del punto  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $\tilde{F}$  es una representación principal,

$$\rho(f) \equiv P_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}^n(t)}{n}.$$

(La demostración aparece más adelante)

**Definición 27** El número de rotación de una representación continua  $F$  de un endomorfismo de grado uno, monótono creciente se define como,

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n}.$$

El real  $\rho(f) = \rho(F) \pmod{1}$ , es conocido como el número de rotación de la función  $f$ .

**Ejemplo 9** Para endomorfismos de grado distinto de uno, el cociente  $\frac{F^n(t)}{n}$  puede no estar acotado. Sea  $F(t) = 2t$ , entonces,

$$\begin{aligned} F^2(t) &= F(F(t)) = 2(2t), \\ F^3(t) &= F(F^2(t)) = 2(2(2t)), \\ &\vdots \\ F^n(t) &= F(F^{n-1}(t)) = 2^n t, \end{aligned}$$

de aquí que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n t}{n} = \infty.$$

Nótese que  $F$  es una representación de un endomorfismo  $f$  de grado dos.

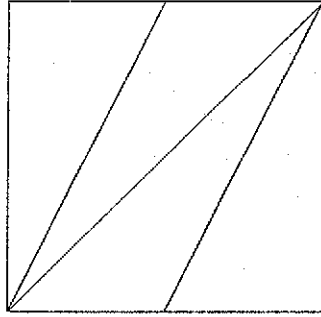


Figura 14: Función de grado dos:  $f(x) = (2x) \bmod 1$ .

**Ejemplo 10** El  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}$ , puede depender de la condición inicial. Consideremos la función  $F(t) = t + 0.314159 + (0.41)\text{sen}2\pi t$ .

Si escogemos  $t = 0.638938$ , tenemos que  $F(0.638938) = 0.638938$ , y

$$\begin{aligned} F^n(0.638938) &= F^{n-1}(F(0.638938)) = F^{n-1}(0.638938) \\ &\vdots \\ &= F(F(0.638938)) = 0.638938, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = 0;$$

pero si  $t = 0.328056$ , tenemos,  $F(0.328056) = 1 + 0.003886$ ; así que,

$$\begin{aligned} F^2(0.328056) &= 1 + 0.328056, \\ F^{2n}(0.328056) &= n + 0.328056, \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F^{2n+1}(0.328056) &= F(F^{2n}(0.328056)) = F(n + 0.328056) \\ &= n + F(0.328056) = n + 1 + 0.003886, \end{aligned}$$

con lo que concluimos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \frac{1}{2}$$

En este caso,  $F$  es la representación de un endomorfismo  $f$  de grado uno pero que no es inyectivo, figura 15.

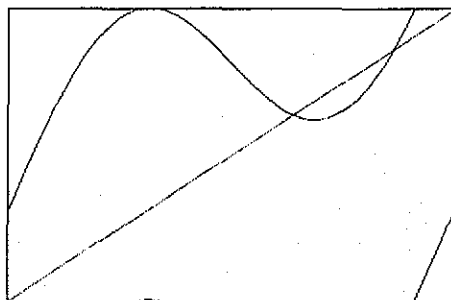


Figura 15:  $f(x) = (x + 0.314159 + 0.41\text{sen}2\pi x) \bmod 1$ . Función no inyectiva.

*Demostración del Teorema 6.*

Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(t_0) = x_0$ ,  $F$  representación continua de  $f$  y  $x_k = \pi(F^k(t_0))$ . Como  $F$  es monótona creciente,  $F^{k-1}(t_0) \leq F^k(t_0)$  si  $t_0 \leq F(t_0)$  o bien  $F^{k-1}(t_0) \geq F^k(t_0)$  si  $t_0 \geq F(t_0)$

Probemos que si  $f$  no tiene puntos fijos, y  $F$  es una representación principal ( $F(0) \in [0, 1)$ ), entonces

$$F(t_0) - t_0 < 1,$$

para todo  $t_0 \in [0, 1)$ . Supongamos que  $F(t_0) \geq t_0 + 1$ . Sea,

$$\varphi(t) = F(t) - t - 1,$$

entonces  $\varphi(0) = F(0) - 1 < 0$  y  $\varphi(t_0) = F(t_0) - t_0 - 1 \geq 0$ , por el teorema del valor intermedio existe  $\xi \in (0, t_0)$  tal que  $\varphi(\xi) = 0$ , es decir,

$$\varphi(\xi) = F(\xi) - \xi - 1 = 0,$$

lo cual implica que,  $F(\xi) = \xi - 1$  y por lo tanto,  $f$  tiene puntos fijos.

Consideremos dos casos:

1) Si  $f$  tiene un punto fijo existe  $\xi \in S$  y una condición inicial  $x_0$  tal que los puntos  $x_k$  en la órbita de  $x_0$  quedan encerrados en una vecindad de  $\xi$  de radio arbitrario  $\varepsilon$  y se aproximan monótonamente a  $\xi$ . De esto se sigue que, para  $N$  suficientemente grande, se cumple que  $\sum_{k=N}^{\infty} \text{arc}(x_{k-1}, x_k) < \varepsilon$ .

Entonces  $P_{\infty}(x) = 0$ .

2) Si  $f$  no tiene puntos fijos y  $F$  es una representación principal,  $F(t_0) - t_0 < 1$  y por inducción  $F^k(t_0) - F^{k-1}(t_0) < 1$ . Como la representación  $F$

es principal,  $t_0 \leq F(t_0)$ . Entonces, como  $F$  es monótona, para toda  $k \geq 1$  tenemos que  $F^{k-1}(t_0) \leq F^k(t_0)$  y,

$$\begin{aligned} P_\infty(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{arc}(x_{k-1}, x_k) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F^k(t_0) - F^{k-1}(t_0)) \bmod 1 \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F^k(t_0) - F^{k-1}(t_0)) \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0) - t_0}{n} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n} \right). \end{aligned}$$

Demostraremos que el límite existe. Por la observación 46<sup>1</sup> dados,

$$M_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Máx}}(F^n(t) - t) \quad \text{y} \quad m_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Mín}}(F^n(t) - t),$$

se tiene que  $M_n - m_n < 1$ . Entonces,

$$F^n(t_1) - t_1 - 1 \leq M_n - 1 < m_n \leq F^n(t_2) - t_2 \leq M_n < m_n + 1 \leq F^n(t_1) - t_1 + 1,$$

así,

$$F^n(t_1) - t_1 - 1 < F^n(t_2) - t_2 < F^n(t_1) - t_1 + 1, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Sea  $t_1 = 0$  y  $t_2 = F^{n(j-1)}(0)$ , sustituimos en la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned} F^n(0) - 1 &\leq F^n(F^{n(j-1)}(0)) - F^{n(j-1)}(0) \leq F^n(0) + 1, \\ F^n(0) - 1 &\leq F^{nj}(0) - F^{n(j-1)}(0) \leq F^n(0) + 1, \\ \sum_{j=1}^k (F^n(0) - 1) &\leq \sum_{j=1}^k (F^{nj}(0) - F^{n(j-1)}(0)) \leq \sum_{j=1}^k (F^n(0) + 1), \\ kF^n(0) - k &\leq F^{nk}(0) \leq kF^n(0) + k, \end{aligned}$$

dividimos entre  $nk$ ,

$$\frac{F^n(0)}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{F^{nk}(0)}{nk} \leq \frac{F^n(0)}{n} + \frac{1}{n},$$

---

<sup>1</sup>Se probará en el apéndice.

de lo anterior tenemos,

$$\left| \frac{F^{nk}(0)}{nk} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

y similarmente,

$$\left| \frac{F^{nk}(0)}{nk} - \frac{F^k(0)}{k} \right| \leq \frac{1}{k}.$$

De las desigualdades anteriores se tiene,

$$\left| \frac{F^k(0)}{k} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto la sucesión  $\frac{F^n(0)}{n}$  es de Cauchy. Esto prueba que el límite existe para  $t = 0$ .

Sea  $t_1 = 0$  en 9 y dividimos entre  $n$ ,

$$\frac{F^n(0)}{n} - \frac{1}{n} < \frac{F^n(t_2)}{n} - \frac{t_2}{n} < \frac{F^n(0)}{n} + \frac{1}{n},$$

esto prueba que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_2)}{n}$  existe.

Ahora demostraremos que es independiente de  $t$ . Si  $F$  es una representación de  $f$  entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $F^n(t) - t$  es de grado cero. Sean  $t_1, t_2$  condiciones iniciales tales que  $t_1 \neq t_2$ , entonces si,

$$|t_1 - t_2| < 1,$$

tenemos,

$$|F^n(t_1) - F^n(t_2)| \leq |F^n(t_1) - t_1 - (F^n(t_2) - t_2)| + |t_1 - t_2| < 1 + |t_1 - t_2|,$$

entonces,

$$\left| \frac{F^n(t_1) - F^n(t_2)}{n} \right| < \frac{1 + |t_1 - t_2|}{n} < \frac{2}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F^n(t_1) - F^n(t_2)}{n} \right| = 0.$$

Ahora consideremos  $F^*$  otra representación continua de  $f$ , tal que  $F^* = F + m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces,

$$(F^*)^n = F^n + nm, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{*n}(t_0)}{n} \right) \bmod 1 &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0) + nm}{n} \right) \bmod 1 \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \right) \bmod 1 \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n} \right) \bmod 1. \end{aligned}$$

con lo cual, tenemos que el límite es independiente de la representación continua. ■

**Lema 2** Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno y  $F$  una representación continua de  $f$ . Entonces,

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t) - t}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.*

Sean  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  y  $t_2 = F^{n(j-1)}(t_0)$  en  $\mathcal{I}$ ,

$$F^n(t_1) - t_1 - 1 < F^n(F^{k(j-1)}(t_0)) - F^{n(j-1)}(t_0) < F^n(t_1) - t_1 + 1,$$

sumamos  $t_1$  a todos los miembros,

$$F^n(t_1) - 1 < F^n(F^{n(j-1)}(t_0)) - F^{n(j-1)}(t_0) + t_1 < F^n(t_1) + 1,$$

$$\sum_{j=1}^m (F^n(t_1) - 1) < \sum_{j=1}^m (F^{nj}(t_0) - F^{n(j-1)}(t_0) + t_1) < \sum_{j=1}^m (F^n(t_1) + 1),$$

$$\begin{aligned} m(F^n(t_1) - 1) &< F^{mn}(t_0) + mt_1 < m(F^n(t_1) + 1), \\ \frac{m(F^n(t_1) - 1)}{mn} &< \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} < \frac{m(F^n(t_1) + 1)}{mn}, \end{aligned}$$

$$\frac{F^n(t_1) - 1}{n} < \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} < \frac{F^n(t_1) + 1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0) + mt_1}{mn} - \frac{F^n(t_1)}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} + \frac{t_1}{n} - \frac{F^n(t_1)}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{mn}(t_0)}{mn} \right) - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t_1) - t_1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \blacksquare$$

La proposición siguiente nos dice que  $\rho(F)$  es continua para la  $C^0$ -topología.

**Proposición 10** Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia, monótonos crecientes, de grado uno y sean  $F, G$  representaciones continuas de  $f$  y  $g$  respectivamente. Entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si

$$\|F - G\|_o \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t) - G(t)| = \max_{t \in [0,1]} |F(t) - G(t)| < \delta$$

entonces  $|\rho(F) - \rho(G)| < \epsilon$ .

*Demostración.*

Sea  $t \in \mathbb{R}$ . Usando el lema anterior tenemos,

$$\begin{aligned} |\rho(F) - \rho(G)| &= \left| \rho(F) - \frac{F^n(t) - t}{n} + \frac{F^n(t) - t}{n} - \frac{G^n(t) - t}{n} + \frac{G^n(t) - t}{n} - \rho(G) \right| \\ &\leq \left| \rho(F) - \frac{F^n(t) - t}{n} \right| + \left| \frac{F^n(t) - t}{n} - \frac{G^n(t) - t}{n} \right| + \left| \frac{G^n(t) - t}{n} - \rho(G) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} |F^n(t) - G^n(t)| + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n} |F^n(t) - G^n(t)|, \end{aligned}$$

fijamos  $n \in \mathbb{Z}$ , tal que  $\frac{2}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ , y elegimos  $\delta > 0$ , tal que,

$$|F^n(t) - G^n(t)| < \frac{n\epsilon}{2} \text{ si } \|F - G\|_o < \delta$$



entonces

$$|\rho(F) - \rho(G)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \frac{n\epsilon}{2} = \frac{2}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo tanto

$$|\rho(F) - \rho(G)| < \epsilon \text{ si } \|F - G\|_0 < \delta. \blacksquare$$

**Rotaciones** Sea  $r_a(x)$  la rotación de ángulo  $0 < a < 1$  en  $S$  y  $R_a(t) = t + a$  una de sus representaciones. Usando el teorema 6 tenemos que

$$\rho(r_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_a)^n(t)}{n} \bmod 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t + na}{n} \bmod 1 = a.$$

y se corrobora el cálculo realizado en el Ejemplo 8 de la sección precedente.

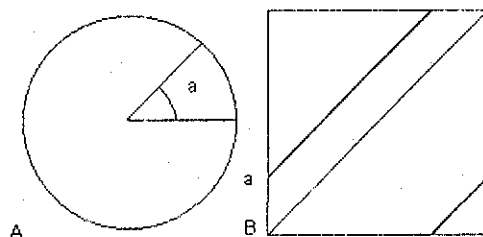


Figura 16: Rotación  $r_a(x)$  en: A) la circunferencia, B) en el toro.

**Proposición 11** Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia, monótonos crecientes, de grado uno. Entonces:

(i) Si existen  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tales que,  $t + a_1 \leq F(t) \leq t + a_2$ , para todo  $t$ , entonces  $a_1 \leq \rho(F) \leq a_2$ .

(ii) Si  $h$  es un endomorfismo de grado uno y  $h \circ f = g \circ h$ , entonces  $\rho(f) = \rho(g)$ .

*Demostración:*

(i) Tenemos que  $t + a_1 \leq F(t) \leq t + a_2$ , entonces

$$t + a_1 + a_1 \leq F(t) + a_1 \leq F(F(t)) \leq F(t) + a_2 \leq t + a_2 + a_2, \\ t + 2a_1 \leq F^2(t) \leq t + 2a_2,$$

siguiendo el proceso  $n$  veces obtenemos,

$$\begin{aligned} t + na_1 &\leq F^n(t) \leq t + na_2, \\ \frac{t + na_1}{n} &\leq \frac{F^n(t)}{n} \leq \frac{t + na_2}{n}, \end{aligned}$$

calculando el límite,

$$a_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \leq a_2,$$

y concluimos  $a_1 \leq \rho(F) \leq a_2$ .

(ii) Si  $h \circ f = g \circ h$ , por inducción  $h \circ f^n = g^n \circ h$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por la proposición 16, existen  $F, G, H$  representaciones de  $f, g, h$  respectivamente, tal que,

$$(H \circ F^n)(t) = (G^n \circ H)(t),$$

Como  $h$  es un endomorfismo de grado uno,  $\varphi(t) = H(t) - t$  es de grado cero. Sustituimos,

$$((t + \varphi) \circ F^n)(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t) + H(t),$$

$$F^n(t) + (\varphi \circ F^n)(t) - H(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t),$$

$$F^n(t) + (\varphi \circ F^n)(t) - t - \varphi(t) = (G^n \circ H)(t) - H(t),$$

$$F^n(t) - t + \varphi(F^n(t)) = G^n(H(t)) - H(t) + \varphi(t),$$

tenemos que cuando  $n$  tiende a infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi(F^n(t)))}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G^n(H(t)) - H(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n} \right),$$

como  $\varphi(t)$  está acotada su límite tiende a cero y como el número de rotación para estas funciones es independiente de la condición inicial, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(t)}{n}$$

Tomando la parte fraccionaria, resulta que,

$$\rho(f) = \rho(g). \blacksquare$$

**Ejemplo 11** El recíproco del inciso (ii) de la proposición anterior, no es válido; dos funciones pueden tener el mismo número de rotación y no están conjugadas por un homeomorfismo de grado uno. Consideremos la rotación

$$r_{\frac{1}{2}}(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \bmod 1,$$

y la función,

$$f(x) = (x + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi x) \bmod 1,$$

no son conjugadas, esto se debe a la proposición 2, que dice que bajo conjugación se preserva el número de órbitas periódicas de cada período.

Verifiquemos que el número de rotación de  $f(x)$  es  $\frac{1}{2}$ . Con  $t = 0$  tenemos,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi(0) = 0.5 \\ f^2(0) &= f(0.5) = 0.5 + 0.5 + (0.12)\text{sen}2\pi(0.5) = 1.0 \end{aligned}$$

como 0 y 1 son el mismo punto  $f^2(0) = 0$ .

$$\rho(f) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}\right) \bmod 1 = \frac{1}{2}.$$

Cuando el número de rotación es irracional se puede hacer valer el recíproco de la proposición 11 para conjugación en funciones continuas.

**Teorema 7 (Denjoy [8])** Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^2$  con número de rotación irracional  $\alpha$ . Entonces  $f$  es  $C^0$ -conjugada a  $R_\alpha$ , es decir, existe un homeomorfismo  $h$  tal que  $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ .

**Teorema 8 (Arnold [1])** Sea  $f$  un difeomorfismo analítico suficientemente próximo a  $R_\alpha$  con número de rotación irracional  $\alpha$ . Entonces  $f$  es analíticamente conjugada a la rotación  $R_\alpha$ .

M. R. Herman [22] descubrió un interesante resultado que complementa los casos cubiertos por los dos teoremas previos. Para enunciarlo se requiere una clasificación de los números irracionales.

**Definición 28** Sea  $\alpha$  un irracional y  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , con  $a_i \in \mathbb{Z}^+$ , una sucesión tal que  $\alpha$  se desarrolla en fracciones continuas de la siguiente manera,

$$\alpha = a_0 + \left( \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \right).$$

Decimos que  $\alpha$  satisface la condición  $H$  (de Herman) si se tiene:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{a_i > B} \log_{1 \leq i \leq N} (1 + a_i)}{\sum \log_{1 \leq i \leq N} (1 + a_i)} \right) = 0.$$

Sea  $\eta = \{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \alpha \text{ satisface la condición } H\}$ . Herman probó que  $\mathbb{R} - \eta$  tiene medida de Lebesgue nula y si  $\alpha \in \eta$  entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $B_\epsilon > 0$  tal que para todo  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{B_\epsilon}{q^{2+\epsilon}}$$

**Teorema 9 (Herman [22])** Si  $3 \leq r \leq \omega$  y  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^r$ , con  $\rho(F) = \alpha \in \eta$ . Entonces  $f$  es  $(\forall \beta > 0)$   $C^{r-1-\beta}$ -conjugada a  $R_\alpha$  (con la convención:  $\infty - 2 = \infty$  y  $\omega - 2 = \omega$ ).

### 3.2 Envolvencia de las Órbitas Periódicas.

**Definición 29** Si  $\mathcal{O} = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$  es una órbita periódica, de período  $q$ , de una función  $f$  de la circunferencia, definimos la envolvencia (wrapping number) de la órbita como:

$$E(\mathcal{O}) = \text{larc}(x_{q-1}, x_0) + \sum_{i=1}^{q-1} \text{larc}(x_{i-1}, x_i).$$

**Observación 21** (i)  $E(\mathcal{O})$  es un entero.

(ii)  $E(\mathcal{O}) \geq 0$  y  $E(\mathcal{O}) = 0$  si y sólo si  $q = 1$  (la órbita periódica es un punto fijo)

(iii) Como la longitud de arco entre dos puntos distintos de la circunferencia, es menor que uno,  $E(\mathcal{O}) < q$  para toda órbita de período  $q$ .

*Demostración.*

i) Consideremos la órbita periódica  $\mathcal{O} = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ , y sean  $t_0, t_1, \dots, t_{q-1}$  tales que,  $\pi(t_i) = x_i$ . Sin pérdida de generalidad los escogemos tales que  $t_{i-1} < t_i$ , para  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E(\mathcal{O}) &= \text{larc}(x_{q-1}, x_0) + \sum_{i=1}^{q-1} \text{larc}(x_{i-1}, x_i) \\ &= 1 - (t_{q-1} - t_0) \bmod 1 + \sum_{i=1}^{q-1} (t_i - t_{i-1}) \bmod 1 \\ &= 1 - (t_{q-1} - t_0) \bmod 1 + \sum_{i=1}^{q-1} (t_i - t_{i-1}) \bmod 1 + \\ &\quad (t_{q-1} - t_0) - \sum_{i=1}^{q-1} (t_i - t_{i-1}) \\ &= 1 + ((t_{q-1} - t_0) - (t_{q-1} - t_0) \bmod 1) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{q-1} ((t_i - t_{i-1}) \bmod 1 - (t_i - t_{i-1})), \end{aligned}$$

que es un número entero ■

**Ejemplo 12** Todas las órbitas de una rotación de ángulo  $a = \frac{p}{q} < 1$  con  $(p, q) = 1$  son periódicas de período  $q$  y envolvencia  $p$ .

*Demostración.*

Consideremos la rotación  $r_a(x)$  dada por  $r_a(x) = (x + a) \bmod 1$ . Primero probemos por inducción que,  $r_a^q(x) = (x + qa) \bmod 1$ . Suponemos que se vale para  $q-1$ ,

$$r_a^{q-1}(x) = (x + (q-1)a) \bmod 1.$$

Entonces,

$$r_a^q(x) = r_a(r_a^{q-1}(x)) = ((x + (q-1)a) \bmod 1 + a) \bmod 1.$$

Como  $a < 1$ :

$$\begin{aligned} r_a^q(x) &= ((x + (q-1)a) \bmod 1 + a \bmod 1) \bmod 1 = (x + (q-1)a + a) \bmod 1 \\ &= (x + qa) \bmod 1. \end{aligned}$$

Haciendo  $\alpha = \frac{p}{q}$  :

$$r_{\frac{p}{q}}^q(x) = \left(x + q \frac{p}{q}\right) \bmod 1 = (x + p) \bmod 1 = x \bmod 1 = x.$$

Así pues,  $x$  es un punto periódico de  $f$  y su período divide a  $q$ .

Demostremos ahora que ningún divisor propio de  $q$ , puede cumplir que  $r_{\frac{p}{q}}^{q'}(x) = x \bmod 1$ , con  $q = kq'$ , entonces,

$$x \bmod 1 = r_{\frac{p}{q}}^{q'}(x) = \left(x + q' \frac{p}{q}\right) \bmod 1 = \left(x \bmod 1 + \left(q' \frac{p}{q}\right) \bmod 1\right) \bmod 1,$$

lo cual implica,  $\left(x - x \bmod 1 + \left(q' \frac{p}{q}\right) \bmod 1\right) \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto  $q' \frac{p}{q} = \frac{p}{k} \in \mathbb{Z}$ , por lo que,  $k \mid p$  y  $k \mid q$  pero como  $(p, q) = 1$ , entonces  $k = 1$ .

Sea  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$ , una órbita de la rotación  $r_{\frac{p}{q}}$  y sea  $R_{\frac{p}{q}}(t) = t + \frac{p}{q}$ . Si  $t_0$  es tal que  $\pi(t_0) = x_0$  entonces  $\pi\left(R_{\frac{p}{q}}^i(t_0)\right) = x_i$ , para  $i = 0, \dots, q-1$ , así la envoltura de la órbita  $\mathcal{O}(x_0)$ , está dada por,

$$\begin{aligned} E(\mathcal{O}) &= \text{larc}(x_{q-1}, x_0) + \sum_{i=1}^{q-1} \text{larc}(x_{i-1}, x_i) \\ &= 1 - (R^{q-1}(t_0) - t_0) \bmod 1 + \sum_{i=1}^{q-1} (R^i(t_0) - R^{i-1}(t_0)) \bmod 1 \\ &= 1 - \left(t_0 + (q-1) \frac{p}{q} - t_0\right) \bmod 1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} \left(t_0 + i \frac{p}{q} - t_0 - (i-1) \frac{p}{q}\right) \bmod 1 \\ &= 1 - \left((q-1) \frac{p}{q}\right) \bmod 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{p}{q}\right) \bmod 1 \end{aligned}$$

usando que  $\frac{p}{q} < 1$  y la definición de módulo uno, tenemos,

$$E(\mathcal{O}) = 1 - (q-1) \frac{p}{q} \bmod 1 + (q-1) \frac{p}{q} = 1 - \left[(q-1) \frac{p}{q}\right] = p. \blacksquare$$

**Ejemplo 13** En general, la envolvenca es una propiedad de la órbita y no del endomorfismo. Un mismo endomorfismo  $f$ , de grado uno, puede tener varias órbitas periódicas con distintos períodos y envolvencias, incluso puede tener distintas órbitas del mismo período, pero con diferente envolvenca. Más adelante se concluirá (Corolario 3), que si el endomorfismo es monótono creciente, todas sus órbitas periódicas tienen el mismo período y la misma envolvenca.

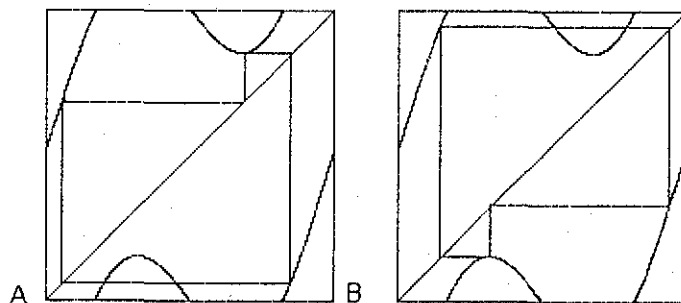


Figura 17: Órbitas de período 3 con envolvenca 1 (A) y con envolvenca 2 (B) para la familia clásica con  $a = 0.5$ ,  $b = 0.365$ .

**Definición 30** Decimos que una órbita periódica tiene característica  $(q, p)$ , si tiene período  $q$  y envolvenca  $p$

**Teorema 10** Sea  $f$  un endomorfismo de grado uno de la circunferencia. Existe una órbita periódica  $\mathcal{O}$  de  $f$ , de característica  $(q, p)$  si y sólo si dada cualquier representación continua  $F$  de  $f$  existe  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$F^q(t) = t + m,$$

para todo  $t \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$ . Además, si  $q > 1$  y  $m \neq nq$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  existe una única representación continua  $F$ , para la cual,

$$F^q(t) = t + p, \text{ con } p = m \bmod q,$$

para todo  $t \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$ .

*Demostración.*

Existe una órbita de característica  $(q, p)$ ,  $f^q(x) = x$ , como  $F$  es una representación continua de  $f$ ,

$$f^q(\pi(t)) = \pi(F^q(t)),$$

se sigue de que,  $f(\pi(t)) = \pi(F(t))$ . Entonces,

$$\pi(F^q(t)) = \pi(t),$$

y por lo tanto existe  $m(t, F) \in \mathbb{Z}$  tal que

$$F^q(t) = t + m(t, F).$$

Consideremos  $F_1, F_2$  representaciones continuas de  $f$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(t_1), \pi(t_2) \in \mathcal{O}(x)$  y  $F_1^q(t_1) = t_1 + m_1$ ,  $F_2^q(t_2) = t_2 + m_2$  Sean  $r > s$ ,  $x_r, x_s$  tales que

$$\begin{aligned} \pi(t_1) &= x_r = f^r(x) \\ \pi(t_2) &= x_s = f^s(x) \end{aligned}$$

y  $k = r - s > 0$ , tenemos que

$$x_r = f^r(x) = f^{r-s+s}(x) = f^{r-s}(x_s) = f^k(x_s)$$

por lo cual

$$\pi(t_1) = x_r = f^k(x_s) = f^k(\pi(t_2)) = \pi(F^k(t_2))$$

$$t_1 = F^k(t_2) + m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

como  $F_1, F_2$  son dos representaciones continuas que difieren por un entero  $c$ ,  $F_1^q(t_1) = F_2^q(t_1) + qc$ , entonces

$$\begin{aligned} m_1 &= F_1^q(t_1) - t_1 = F_2^q(t_1) + qc - t_1 \\ &= F_2^q(F_2^k(t_2) + m) + qc - t_1 \\ &= F_2^{q+k}(t_2) + mK + qc - t_1 \\ &= F_2^k(F_2^q(t_2)) + mK + qc - t_1 \\ &= F_2^k(t_2 + m_2) + m + qc - t_1 \\ &= F_2^k(t_2) + m + m_2 + qc - t_1 \\ &= t_1 + m_2 + qc - t_1 \\ &= m_2 + qc. \end{aligned}$$



lo cual, prueba la independencia del punto y de la representación para  $F^q(t) = t + p$ , con  $p = m \bmod q$

Tomamos el  $p \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 \leq p < q$ . Veamos que  $F$  es única, supongamos que existe otra representación continua  $\bar{F}$  tal que,  $\bar{F}^q(t) = t + p$ ,

$$\begin{aligned} F^q(t) &= \bar{F}^q(t) + cq, \\ t + p &= t + p + cq, \end{aligned}$$

como  $q \neq 0$ , entonces  $c = 0$ . Por lo tanto,  $F$  es única.

Consideremos una función monótona creciente  $f$  y  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$  de  $f$ . Si  $t_0$  es tal que  $\pi(t_0) = x_0$  entonces  $\pi(F^i(t_0)) = x_i$ , para  $i = 0, \dots, q-1$ , con  $F$  una representación continua, entonces la envoltura de la órbita  $\mathcal{O}(x_0)$ , está dada por,

$$\begin{aligned} E(\mathcal{O}) &= \text{larc}(x_{q-1}, x_0) + \sum_{i=1}^{q-1} \text{larc}(x_{i-1}, x_i) \\ &= (F^q(t_0) - F^{q-1}(t_0)) \bmod 1 + \sum_{i=1}^{q-1} (F^i(t_0) - F^{i-1}(t_0)) \bmod 1 \\ &= \sum_{i=1}^q (F^i(t_0) - F^{i-1}(t_0)) \bmod 1 - \sum_{i=1}^q (F^i(t_0) - F^{i-1}(t_0)) \\ &\quad + (F^q(t_0) - t_0) \\ &= \sum_{i=1}^q [F^i(t_0) - F^{i-1}(t_0)] + (F^q(t_0) - t_0) = (F^q(t_0) - t_0) + ql, \end{aligned}$$

con  $l \in \mathbb{Z}$ , es decir,  $E(\mathcal{O}) = p$ , donde  $F^q(t_0) - t_0 = m$  y  $p = m \bmod q$ , siempre que  $m \neq nq$ , con  $q > 1$ . ■

**Observación 22** *Es importante hacer notar que la representación que cumple que  $F^q(t) = t + p$ , no es necesariamente la representación principal, definida en el capítulo dos.*

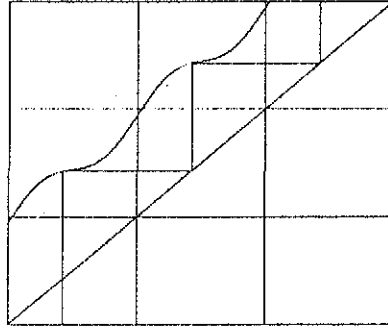


Figura 18: Para este ejemplo se cumple que  $F(t) = t + 1$ , y la representación que cumple que  $p = 1 \pmod 1$ , no es principal.

**Definición 31** Sea  $\mathcal{O}$  una órbita periódica de un endomorfismo  $f$  de grado uno. Sea  $F$  una representación continua de  $f$  y  $m$  como en el teorema 10. Entonces definimos la Envolvencia de la órbita  $\mathcal{O}$  respecto a la representación continua, como:

$$E(\mathcal{O}, F) = m.$$

**Observación 23** En este ejemplo tenemos que,  $E(\mathcal{O}) = 1$  y  $m = 0$

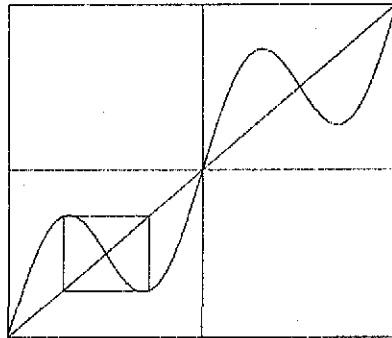


Figura 19:

**Observación 24** Si  $f$  es un endomorfismo de grado uno de la circunferencia,  $\mathcal{O}$  es una órbita periódica y  $m$  como en el teorema 10  $m \neq nq$ ,  $q > 1$ , entonces para toda  $F$ , representación continua de  $f$ :

$$E(\mathcal{O}) = E(\mathcal{O}, F) \pmod q.$$

**Teorema 11** Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente y de grado uno.  $f$  tiene una órbita de período  $q$  y envolvencia  $p$ , con  $(p, q) = 1$ , si y sólo si  $\rho(f) = \frac{p}{q}$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $f$  tiene una órbita de período  $q$  y de envolvencia  $p$ , por el teorema 10 existe  $t \in \mathbb{R}$  con  $\pi(t) = x$ , tal que  $F^q(t) = t + p$ , con  $(p, q) = 1$   $p < q$ , entonces,

$$F^{nq}(t) = t + np,$$

por lo tanto,

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(t)}{nq} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t + np}{nq} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t}{nq} + \frac{p}{q} \right) = \frac{p}{q}.$$

Ahora supongamos que  $f$  no tiene órbitas de período  $q$  y de envolvencia  $p$ , es decir, por el teorema 10,  $F^q(t) \neq t + p$ , ésto significa que existe  $\epsilon > 0$ , tal que:

$$F^q(t) = t + p \pm \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces,

$$\begin{aligned} F^{nq}(t) &= F^q(F^{(n-1)q}(t)) \\ &= F^{(n-1)q}(t) + p \pm \epsilon \\ &= F^q(F^{(n-2)q}(t)) + p \pm \epsilon \\ &= F^{(n-2)q}(t) + 2(p \pm \epsilon) \\ &= \dots = t + n(p \pm \epsilon). \end{aligned}$$

$$F^{nq}(t) = t + n(p \pm \epsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(t)}{nq} = \frac{t + n(p \pm \epsilon)}{nq} = \frac{p \pm \epsilon}{q},$$

entonces,

$$\rho(f) < \frac{p - \epsilon}{q} \quad \text{ó} \quad \rho(f) > \frac{p + \epsilon}{q},$$

para cualquier  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $\rho(f) \neq \frac{p}{q} \pmod{1}$ . ■

**Corolario 2** Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno  $f$  tiene un punto fijo si y sólo si  $\rho(f) = 0$ .

**Corolario 3** Si  $f$  es un endomorfismo, monótono creciente, de grado uno todas sus órbitas tienen el mismo período y la misma envoltencia.

### 3.2.1 Conjuntos Límite Cantoreanos

**Definición 32** Un conjunto cerrado no vacío, denso en ninguna parte (no contiene ningún abierto) y que todos sus puntos son de acumulación es llamado un conjunto de Cantor.

**Teorema 12** Si  $f$  es un homeomorfismo, de grado uno, de la circunferencia con número de rotación irracional se tiene que:

- (i)  $\omega(x)$  no depende de  $x$ .
- (ii)  $\omega(x)$  es el todo  $S$  ó un conjunto de Cantor.

*Demostración*

(i) Definimos  $I = [f^m(x), f^n(x)]$ , para  $m, n \in \mathbb{Z}$  con  $m < n$ . Entonces cada punto final de cada intervalo de la sucesión,

$$\{f^{-k(m-n)}(I)\}_{k=0}^{\infty},$$

coincide con el punto inicial del siguiente intervalo, de aquí que,

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{f^{-k(m-n)}(I)\} = S,$$

ó la sucesión converge a un punto fijo de  $f^{m-n}$ . Si  $f^{m-n}$  tiene un punto fijo,  $f$  tiene puntos periódicos y  $\rho(f)$  es racional, lo cual es una contradicción.

Como  $\omega(x)$  es no vacío, tomemos  $z \in \omega(x)$  entonces, existe una sucesión  $\{f^{m_l}(x) : l \in \mathbb{N}\}$  que tiene como punto límite a  $z$ .

Consideremos ahora el conjunto,  $I_l = [f^{m_l}(x), f^{m_{l+1}}(x)]$  y la sucesión asociada,  $\{f^{-k(m_l - m_{l+1})}(I_l)\}$ , esta sucesión es del tipo descrito anteriormente y por lo tanto, cubre a  $S$ . Entonces, dado cualquier  $y \in S$ , existe  $k = k_l$  tal que,  $y \in f^{-k(m_l - m_{l+1})}(I_l)$ , de aquí que, para cada  $l$ ,

$$f^{k(m_l - m_{l+1})}(y) \in I_l,$$

y como,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(x) = z,$$

el intervalo  $I_l$  se colapsa a  $z$  cuando  $l$  tiene a infinito, es decir,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(I_l) = z,$$

por lo que,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{k(m_l - m_{l+1})}(y) = z,$$

de esta forma  $z \in \omega(y)$ . Como  $z$  es cualquier punto en  $\omega(x)$  entonces  $\omega(x) \subseteq \omega(y)$  y de manera análoga  $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ . Por lo tanto,  $\omega(x) = \omega(y)$ , es decir es independiente del punto.

(ii) Si tomamos  $z \in \omega(x) = E$ , existe una sucesión convergente  $\{f^{m_l}(x) : l \in \mathbb{N}\}$ , tal que,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l}(Ix) = z,$$

de tal forma que,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^{m_l+1}(Ix) = f(z),$$

ya que  $f$  es continua y por lo tanto  $E$  es invariante bajo  $f$ .

Para mostrar que  $E$  es minimal, consideremos  $E'$  un conjunto cerrado e invariante bajo  $f$ . Si  $x \in E'$ , entonces  $\mathcal{O}(x) \subseteq E'$ , sin embargo  $E'$  es cerrado y por lo tanto contiene puntos de acumulación,  $\omega(x)$ , de la órbita. Por lo tanto,  $E = \omega(x) \subseteq E'$ . Concluimos que  $E$  es minimal y no existen conjuntos  $f$ - invariantes cerrados que contengan a  $E$ . Para  $x \in E$ , existe una subsucesión convergente de la órbita de  $x$ , con límite  $x$ , como el número de rotación es irracional, entonces  $f$  no tiene puntos periódicos, de tal modo que los puntos de  $f^{m_l}(x)$ , son todos distintos y se acumulan en  $x$ . Por lo tanto,  $x$  es punto de acumulación de  $E$  y  $E$  es perfecto. La frontera de  $E$  ( $\partial E$ ) es también invariante bajo  $f$ , ya que  $f$  es continua,  $E$  es  $f$ -invariante y los puntos en  $\partial E$  son límites de sucesiones de puntos  $E$  y  $E^c$ . Sin embargo,  $E$  es minimal y este no tiene subconjuntos propios  $f$ -invariantes. Por lo tanto  $\partial E = \emptyset$  o  $\partial E = E$ . Si  $\partial E = E$ , el interior del conjunto cerrado  $E$ , es vacío y  $E$  es denso en ninguna parte y como  $E$  es perfecto, por lo tanto es un conjunto cantor. ■

## 4 ENDOMORFISMOS NO MONÓTONOS.

### 4.1 Intervalo de Rotación.

Como vimos en el ejemplo 10, cuando  $f$  es un endomorfismo de la circunferencia no inyectivo, el límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n},$$

puede cambiar con la variable  $t$ . Sin embargo, puede demostrarse que el cociente,

$$\frac{F^n(t)}{n}$$

está acotado y por lo tanto, siempre existe su límite superior.

**Proposición 12** *Si  $f$  es un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno, y  $F$  una representación continua de  $f$ , entonces existe  $K > 0$  tal que,*

$$\left| \frac{F^n(t)}{n} \right| < K, \quad \forall n \in \mathbb{N}_k,$$

y todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.*

Como  $F$  es de grado uno,  $\varphi(t) \equiv F(t) - t$  es de grado cero, y por lo tanto acotada,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| < A.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(t) &= t + \varphi(t) \\ F^n(t) &= F(F^{n-1}(t)) = F^{n-1}(t) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\ &= F(F^{n-2}(t)) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\ &= F^{n-2}(t) + \varphi(F^{n-2}(t)) + \varphi(F^{n-1}(t)) \\ &\vdots \\ &= t + \varphi(t) + \dots + \varphi(F^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} |F^n(t) - t| &= |\varphi(t) + \dots + \varphi(F^{n-1}(t))| \\ &\leq n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = nA. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^n(t)}{n} \right| &= \left| \frac{F^n(t) - t + t}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{F^n(t) - t}{n} \right| + \left| \frac{t}{n} \right| \leq A + \left| \frac{t}{n} \right| \end{aligned}$$

Sea  $K = A + 1$ , entonces, para  $n$  suficientemente grande tenemos que,

$$\left| \frac{F^n(t)}{n} \right| < K \blacksquare$$

**Definición 33** Sea  $f$  un endomorfismo de grado uno de la circunferencia y  $l'$  una representación continua cualquiera de  $f$ . El número de rotación de la representación  $F$ , en el punto  $t$ , es,

$$\rho(F, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n}.$$

**Observación 25** Dadas  $F_1, F_2$  representaciones continuas de  $f$ , el número de rotación de  $F$  en el punto  $t$  difiere por un entero.

*Demostración:*

Tenemos que dos representaciones continuas  $F_1$  y  $F_2$  difieren por una constante entera, entonces,

$$\rho(F_1, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1^n(t)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2^n(t) + nc}{n} = \rho(F_2, t) + c.$$

**Proposición 13** Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia, de grado uno y  $F$  representación de  $f$ .

i)  $\rho(F, \_): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es de grado cero y en general no constante.

ii)  $\rho(R_p \circ F, t) = \rho(F, t) + p$ , si  $p \in \mathbb{Z}$ .

iii)  $\rho(R_p, t) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

iv) Si  $h \circ g = f \circ h$ , con  $h$  homeomorfismo de la circunferencia y  $H$  una representación continua de  $h$ , entonces existe  $G$  representación de  $g$  tal que,  $\rho(G, t) = \rho(F, H(t))$ . En particular si  $F = R_p$ , se tiene  $\rho(G, t) = p \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.*

i)

$$\begin{aligned}\rho(F, t+1) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t+1)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) + 1}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F^n(t)}{n} + \frac{1}{n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \\ &= \rho(F, t)\end{aligned}$$

ii) Como  $(R_p \circ F)(t) = F(t) + p$ , y  $F$  es de grado uno, entonces,

$$\begin{aligned}(R_p \circ F)^n(t) &= (F + p)^n(t) = (F + p)^{n-1}((F + p)(t)) \\ &= (F + p)^{n-1}(F(t) + p) = (F + p)^{n-2}((F + p)(F(t) + p)) \\ &= (F + p)^{n-2}(F^2(t) + 2p) \\ &\vdots \\ &= F^n(t) + np,\end{aligned}$$

así tenemos que,

$$\begin{aligned}\rho(R_p \circ F, t) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(R_p \circ F)^n(t)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) + np}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F^n(t)}{n} + p \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} + p \\ &= \rho(F, t) + p.\end{aligned}$$

iii)

$$\rho(R_p, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R_p^n(t)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t + np}{n} \right) = p.$$

iv) Como las funciones  $f, g$  son conjugadas, por la observación 16 existen representaciones  $F$  y  $G$  que también lo son:

$$(H \circ G)(t) = (F \circ H)(t).$$

Por inducción,

$$(H \circ G^n)(t) = (F^n \circ H)(t).$$



Como  $H(t)$  tiene grado uno, sea  $\varphi(t) = H(t) - t$  nótese que  $\varphi$  tiene grado cero. Sustituimos  $H$ ,

$$\begin{aligned} ((t + \varphi) \circ G^n)(t) &= (F^n \circ H)(t), \\ G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) &= (F^n \circ H)(t) - H(t) + H(t), \\ G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) - H(t) &= (F^n - Id) \circ H(t), \\ G^n(t) + (\varphi \circ G^n)(t) - t - \varphi(t) &= (F^n - Id) \circ H(t), \\ G^n(t) - t + (\varphi \circ G^n)(t) &= (F^n - Id) \circ H(t) + \varphi(t), \\ \frac{G^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} &= \frac{((F^n - Id) \circ H)(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n}, \\ \frac{G^n(t)}{n} - \frac{t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} &= \frac{((F^n - t) \circ H)(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n}, \end{aligned}$$

si calculamos el límite superior cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G^n(t) - t}{n} + \frac{(\varphi \circ G^n)(t)}{n} \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(F^n - t) \circ H(t)}{n} + \frac{\varphi(t)}{n} \right), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{G^n(t) - Id}{n} \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F^n(H(t)) - H(t)}{n} \right), \\ \rho(G, t) &= \rho(F, H(t)). \blacksquare \end{aligned}$$

**Definición 34** Si  $f$  es un endomorfismo de la circunferencia, de grado uno y  $F$  una representación continua de  $f$  entonces el conjunto de rotación de  $F$ , está dado por:

$$I(F) = \{ \rho(F, t) : t \in \mathbb{R} \}.$$

El conjunto de rotación de  $f$ , está dado por:

$$I(f) = I(F) \text{ mod } 1.$$

**Observación 26** Es fácil verificar que  $I(f)$  es un conjunto acotado.

*Demostración.*

$F(t) - t$  es una función continua periódica con  $L = \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t) - t| = \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t) - t|$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^n(t)}{n} - \frac{t}{n} \right| &\leq \left| \frac{F^n(t)}{n} - \frac{t}{n} \right| \\ &\leq \frac{|F^n(t) - t|}{n} = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (F^i(t) - F^{i-1}(t)) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(F(F^{i-1}(t)) - F^{i-1}(t))| \leq L. \\ \left| \frac{F^n(t)}{n} \right| &\leq L + \left| \frac{t}{n} \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $-L \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \leq L$  ■

Newhouse, Palis, Takens [26] demostraron que la cerradura de  $I(f)$  es un intervalo cerrado, después Ito [23] probó que  $I(f)$  es un conjunto cerrado, tenemos entonces el siguiente teorema.

**Teorema 13**  $I(f)$ , es un intervalo cerrado.

**Observación 27** Cuando  $f$  es un endomorfismo monótono creciente, de grado uno de la circunferencia, del teorema 6, se sigue que,

$$\rho(F, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} = \rho(F), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto, el intervalo de rotación se reduce a un punto,

$$I(f) = \{\rho(f)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por  $\rho_1(F)$  y  $\rho_2(F)$  los extremos del intervalo de rotación de  $F$ , es decir:

$$I(F) = [\rho_1(F), \rho_2(F)].$$

**Lema 3** [5] Sea  $f$  un endomorfismo de grado uno y  $F, G, H$  representaciones continuas de  $f$ , con  $G$  y  $H$  monótonas crecientes

(i) Si  $G \leq H$  entonces  $G^n \leq H^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\rho(G) \leq \rho(H)$ .

(ii) Si  $G < H$  entonces  $G^n < H^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y si  $\rho(G)$  o  $\rho(H)$  es irracional,  $\rho(G) < \rho(H)$ .

(iii) Si  $F \geq H$  entonces  $F^n \geq H^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\rho_1(F) \geq \rho(H)$ . Si  $F \leq H$  entonces  $F^n \leq H^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\rho_2(F) \leq \rho(H)$ .

*Demostración.*

(i)  $n = 1$ ,  $G \leq H$ .

Supongamos para  $n - 1$ , entonces  $G^{n-1} \leq H^{n-1}$ .

Para  $n$ , tenemos que,

$$G^n = G^{n-1}(G) \leq G^{n-1}(H) \leq H^{n-1}(H) = H^n.$$

Usando lo anterior, dividiendo entre  $n$ ,

$$\frac{G^n}{n} \leq \frac{H^n}{n},$$

$$\rho(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n}{n} = \rho(H).$$

(iii) Si  $F \geq H$  entonces  $F^2 = F(F) \geq H(F)$ ,  $H(F) \geq H(H)$ , entonces  $F^2 \geq H^2$ . Supongamos que  $F^{n-1} \geq H^{n-1}$ . Demostremos para  $n$ ,

$$F^n = F^{n-1}(F) \geq H^{n-1}(F) \geq H^{n-1}(H) = H^n.$$

De lo anterior  $\frac{F^n}{n} \geq \frac{H^n}{n}$ , entonces  $\rho_1(F) \geq \rho(H)$ . Para  $F \leq H$  es totalmente similar. ■

**Lema 4** Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente tal que  $f'(x) = 0$  para  $x \in [x_2, x_1]$ .

(i) Si  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $\mathcal{O}(x_i) \cap (x_2, x_1) = \emptyset$  para  $i = 1, 2$ .

(ii) Si  $\rho(f) = p/q$ , existe un punto  $x$  de característica  $(q, p)$ , con  $\mathcal{O}(x) \cap (x_2, x_1) = \emptyset$ .

*Demostración.*

(i) Si para algún  $j$ ,  $f^j(x_i) \in [x_2, x_1]$ , entonces  $f^{j+1}(x_i) = f(x_i)$  y  $\rho(f)$  es racional, lo cual contradice la hipótesis.

(ii) Sea  $I = (x_2, x_1)$  y  $y = f(I)$ . Como  $\rho(f) = p/q$  entonces  $f$  tiene un punto periódico de período  $q$  y envoltencia  $p$ ,  $y_1$ . Si  $\mathcal{O}(y_1) \cap I = \emptyset$  todo está

hecho. Supongamos que  $\mathcal{O}(y_1) \cap I \neq \emptyset$  y así,  $y$  es un punto periódico de período  $q$  y envoltura  $p$ . Sea  $y' = f^{q-1}(y)$  y  $I_{-i} = f^{-i}(I)$ .

Mostremos que los conjuntos  $I, I_{-1}, \dots, I_{-(q-1)}$  son disjuntos a pares. Supongamos que existe un  $w \in I_{-i} \cap I_{-j}$ , con  $j > i$ . Entonces  $f^j(w) \in I$  y  $f^i(w) \in I$ , y tal que  $f^{j+1}(w) = f^{i+1}(w) = y$ . Por lo tanto,

$$f^{j-i}(y) = f^{j-i}(f^{i+1}(w)) = f^{j+1}(w) = y,$$

es decir,  $y$  es un punto periódico de período  $j-i < q$ , es una contradicción.

Ahora como  $I_{-i}$  son disjuntos para  $0 \leq i \leq q-1$ ,  $f^j(I_{-i}) \cap I = \emptyset$  para todo  $j < i$  y tal que  $f^i|_{I_{-i}}$  es un homeomorfismo en  $I$ , tal que para cada  $i$ ,  $I_{-i}$  es un intervalo abierto. Además,

$$f^q(I_{-i}) = f^{q-i+i-1}(f(I)) = f^{-i}(f^{q-1}(y)) = f^{-i}(y') \in I_{-i},$$

y tal que  $f^q(I_{-i}) \in I_{-i}$ , para todo  $0 \leq i \leq q-1$ .

Si  $I_{-j} = (f^{-j}(x_2), f^{-j}(x_1))$  es el siguiente  $I_{-i}$ , a la derecha de  $I = (x_2, x_1)$ , entonces, usando el hecho de que  $f$  es no decreciente,

$$f^q([x_1, f^{-j}(x_2)]) \supseteq [x_1, f^{-j}(x_2)].$$

Por lo tanto, tenemos un punto  $x \in [x_1, f^{-j}(x_2)]$ , de característica  $(q, p)$ , y por construcción,  $\mathcal{O}(x) \cap I = \emptyset$ . ■

## 4.2 Funciones Bimodales. Teorema de Boyland.

Consideremos la clase  $\mathcal{A}$  de endomorfismos de la circunferencia,  $f$ , que tienen una representación,  $F$ , continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente, por partes, con dos puntos críticos  $m_1 > m_2$  ( $f'(m_1) = f'(m_2) = 0$ ) en el intervalo  $(0, 1]$ , de los cuales  $m_2$  es un máximo y un  $m_1$  es un mínimo.

Sean  $\bar{m}_1$  y  $\bar{m}_2$ , tales que  $f(\bar{m}_i) = f(m_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Definimos dos funciones auxiliares (continuas y monótonas crecientes de grado uno),  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  de la siguiente manera.

$$F_1(t) = \begin{cases} F(m_1) & \text{si } t \in [\bar{m}_1, m_1] \\ F(t) & \text{si } t \notin [\bar{m}_1, m_1] \end{cases} \text{ y } F_2(t) = \begin{cases} F(m_2) & \text{si } t \in [\bar{m}_2, m_2] \\ F(t) & \text{si } t \notin [\bar{m}_2, m_2] \end{cases}$$

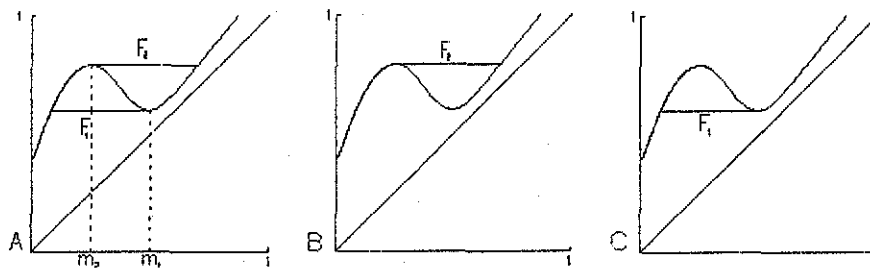


Figura 20: A) Gráfica de  $F$ , B) Función Interpolante  $F_1(t)$ , C) Función Interpolante  $F_2(t)$ .

**Teorema 14** Sea  $F$  una representación continua de  $f \in \mathcal{A}$ . Entonces,

$$\rho_1(F) = \rho(F_1), \quad \rho_2(F) = \rho(F_2),$$

donde  $\rho_1(F)$  y  $\rho_2(F)$  son los extremos del intervalo de rotación.

*Demostración.*

Sea  $f_i$  la función de la circunferencia representada por  $F_i$ . Tenemos que  $F \geq F_1$ , por el lema 3 (iii) tenemos,  $\rho_1(F) \geq \rho(F_1)$ . Por otro lado como  $F_1$  es monótona creciente con  $F_1'(t) = 0$ , con  $t \in [t_2, t_1]$ , por el lema 4 existe un punto  $t$  tal que,  $\mathcal{O}(F_1, t) \cap (t_2, t_1) = \emptyset$  o si  $\rho(F_1)$  es irracional  $\mathcal{O}(F_1, t_i) \cap (t_2, t_1) = \emptyset$ , para  $i = 1, 2$ , entonces,

$$\mathcal{O}(F, t) = \mathcal{O}(F_1, t),$$

tal que  $\rho(F_1) = \rho(F_1, t) = \rho(F, t) \geq \rho_1(F)$ . Por lo tanto  $\rho(F_1) = \rho_1(F)$ . Análogo para  $F_2$ . ■

Se definirá ahora una familia paramétrica auxiliar,  $F_\mu(t)$ , para  $\mu \in [1, 2]$ . Cada elemento de la familia será una representación monótona creciente de grado uno. Los elementos de esta familia pueden considerarse representaciones que interpolan a  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  (ver figura 21)

**Observación 28** Para  $\mu \in [1, 2]$ , existen únicos puntos  $t_{1,\mu} \in [m_1, 1]$  y  $t_{2,\mu} \in [0, m_2]$  tales que

$$F(t_{1,\mu}) = F(t_{2,\mu}) = F(m_1) + (\mu - 1)(F(m_2) - F(m_1)).$$

**Definición 35** Para cada  $\mu \in [1, 2]$ , definimos  $F_\mu(t)$  el mapeo de interpolación de  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  como,

$$F_\mu(t) = \begin{cases} F(m_1) + (\mu - 1)(F(m_2) - F(m_1)), & \text{si } t \in [t_{2,\mu}, t_{1,\mu}] \\ F(t), & \text{si } t \notin [t_{2,\mu}, t_{1,\mu}] \end{cases}$$

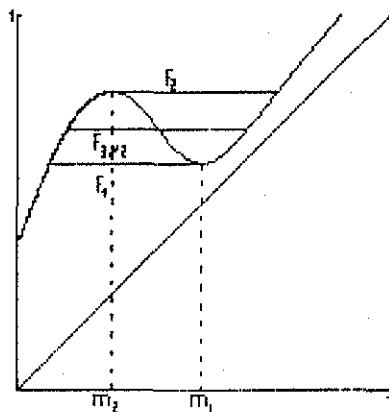


Figura 21: Funciones Interpolantes.

Sea  $End(S)$  el conjunto de todos los endomorfismos, de grado uno, de la circunferencia.

**Teorema 15** [5], [26],  $\rho_1$  y  $\rho_2 : End(S) \rightarrow \mathbb{R}$ , son continuas con la  $C^0$ -topología.

**Teorema 16** Sea  $F$  una representación continua de  $f \in \mathcal{A}$  y  $F_\mu$  el mapeo de interpolación de  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$ . Sea  $f_\mu \in \mathcal{A}$  la función de la circunferencia cuya representación es  $F_\mu$ . Para cada  $r \in I(f)$ , existe un  $\mu \in [1, 2]$  tal que  $r = \rho(f_\mu)$ .

*Demostración.*

Usando el teorema 14 y como  $\rho(f_\mu)$  es una función continua de  $\mu$ , usando el teorema del valor intermedio, para cada  $r \in I(F)$ , existe un  $\mu \in [1, 2]$  con  $r = \rho(f_\mu)$ . ■

Dada una función  $f \in \mathcal{A}$ , consideramos la familia de rotaciones de ángulo  $a \in [0, 1)$  de  $f$ :

$$\{f_a : f_a = R_a \circ f\}$$

Su correspondiente familia de representaciones continuas, es la familia de traslaciones de una representación continua particular  $F$ , es:

$$\{F_a : F_a = F(t) + a\}.$$

Sean  $F_{\mu,a}$  con  $\mu = 1, 2$ , las correspondientes funciones interpolantes. Para cada  $a$  definimos  $\rho_1$  y  $\rho_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\rho_\mu(a) = \rho_\mu(F_a) = \rho(F_{\mu,a}), \text{ para } \mu = 1, 2.$$

**Lema 5** Sea  $R_r(t)$  la representación de una rotación  $r_a(x)$  y  $F$  una representación de un endomorfismo de la circunferencia  $f$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  tal que  $(p, q) = 1$ .

- (i) Si  $F \geq R_a$  (respectivamente  $F \leq R_a$ ), entonces  $\rho_1(F) \geq a$  ( $\rho_2(F) \leq a$ ).
- (ii) Si  $F > R_a$  (respectivamente  $F < R_a$ ), entonces  $\rho_1(F) > a$  ( $\rho_2(F) < a$ ).
- (iii)  $F^q > R_p$  (respectivamente  $F^q < R_p$ ), si y sólo si  $\rho_1(F) > p/q$  ( $\rho_2(F) < p/q$ ).

*Demostración.*

(i) Como  $F(t+1) = F(t) + 1$ ,  $F(t) - t$  es periódica y su imagen es compacta. Podemos encontrar un  $\varepsilon > 0$  con  $F(t) \geq t + a + \varepsilon$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Usando inducción tenemos que  $F^n(t) \geq t + n(a + \varepsilon)$  o bien

$$\frac{F^n(t) - t}{n} \geq a + \varepsilon$$

para todo  $n$ , y  $t \in \mathbb{R}$ , la demostración para (ii) es análoga.

(iii) Como  $F^q > R_p$ , por (ii)  $\rho_1(F^q) > p$  por la proposición 19  $\rho_1(F^q) = q\rho_1(F)$ , entonces  $\rho_1(F) > p/q$ .

Recíprocamente, supongamos que existe un  $t$  tal que,

$$F^q(t) \leq t + p,$$

usando la continuidad  $F^q(t) < R_p$  en cuyo caso  $\rho_1(F^q) \leq \rho_2(F^q) < p/q$  o existe un  $t$  tal que,

$$F^q(t) = t + p$$

entonces  $\rho(F, t) = p/q$ , y  $p/q \in I(f)$ , por lo cual,  $\rho_1(F) \leq p/q \leq \rho_2(F)$   
Por lo tanto,  $\rho_1(F) \leq p/q$ . ■

**Lema 6** Si  $f \in Bd\left(E_{\frac{p}{q}}\right)$ , entonces  $F^q \geq R_p$  o  $F^q \leq R_p$ . En el primer caso  $\rho_1(f) = \frac{p}{q}$  y en el segundo caso  $\rho_2(f) = \frac{p}{q}$ .

*Demostración.*

Como  $E_{\frac{p}{q}}$  es cerrado, Si  $f \in Bd\left(E_{\frac{p}{q}}\right)$  implica que  $\frac{p}{q} \in I(f)$  existe  $t$  tal que  $F^q(t) = t + p$ . Supongamos que existen puntos  $t_1, t_2$  tales que  $F^q(t_1) > t_1 + p$  y  $F^q(t_2) < t_2 + p$ , esto se sigue cumpliendo para una representación  $G$  de  $g$   $C^0$ -cerrado a  $f$ . Entonces existe un punto  $t$  con  $G(t) = t + p$ . Por lo tanto  $p/q \in I(g)$  para cualquier  $g$ ,  $C^0$ -cerrado a  $f$ , entonces  $f \notin Bd\left(E_{\frac{p}{q}}\right)$ .

Como  $p/q \in I(f)$  entonces  $\rho_1(F) \leq p/q \leq \rho_2(F)$  usando el lema 5 (iii) si  $F^q \geq R_p$ ,  $\rho_1(F) \geq p/q$  por lo tanto  $\rho_1(f) = \frac{p}{q}$ . Si  $F^q \leq R_p$ ,  $\rho_2(F) \leq p/q$  entonces  $\rho_2(f) = \frac{p}{q}$ . ■

**Lema 7**  $\rho_1$  y  $\rho_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son no decrecientes y suprayectivas. Para  $\mu = 1, 2$ ,  $\rho_{\mu}^{-1}(p/q)$  es un intervalo cerrado de interior no vacío y para  $\alpha$  irracional,  $\rho_{\mu}^{-1}(\alpha)$  contiene un sólo punto. Si fijamos un  $\frac{p}{q}$ , tenemos que  $\rho_1^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) =$

$$[\Psi_1, \Phi_1], \quad \rho_2^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = [\Phi_2, \Psi_2].$$

(i)  $F_{\mu,a}^q \leq R_p$  si y sólo si  $a = \Psi_1$ , si  $\mu = 1$  y  $a = \Phi_2$ , si  $\mu = 2$ .

(ii)  $F_{\mu,a}^q \geq R_p$  si y sólo si  $a = \Phi_1$ , si  $\mu = 1$  y  $a = \Psi_2$ , si  $\mu = 2$ .

(iii) Existen  $t_1$  y  $t_2$  con  $F_{\mu,a}^q(t_1) > t_1 + p$  y  $F_{\mu,a}^q(t_2) < t_2 + p$  si y sólo si  $a \in (\Psi_1, \Phi_1)$  para  $\mu = 1$  y  $a \in (\Phi_2, \Psi_2)$  para  $\mu = 2$ .

*Demostración.*

Definimos  $E_{p/q} = \{f : f \text{ endomorfismo de la circunferencia, de grado uno, tal que } \frac{p}{q} \in I(f)\}$ .

Por el teorema 14,  $\rho_1(F_{a_1}) = \rho(F_{1,a_1})$ . Si  $a_1 > a_2$ , entonces  $F_{1,a_1} > F_{1,a_2}$  y por el lema 3,

$$\rho_1(F_{a_1}) = \rho(F_{1,a_1}) \geq \rho(F_{1,a_2}) = \rho_1(F_{a_2}),$$

por lo cual  $\rho_1$  es no decreciente. Ahora  $\rho_1$  es suprayectiva, ya que  $\rho_1$  es continua y podemos encontrar  $a$  tal que,  $\rho(F_{1,a}) = n$ , para cualquier entero  $n$ . Por lo tanto podemos concluir que para cualquier número real  $r$ ,  $\rho_1^{-1}(r)$  es un punto o un intervalo cerrado no trivial.

Como ya notamos que,  $a_1 > a_2$ , implica  $F_{1,a_1} > F_{1,a_2}$ , y por el lema 3,

$$\rho(F_{1,a_1}) \geq \rho(F_{1,a_2})$$



si uno de ellos es irracional, esto prueba que  $\rho_1^{-1}(\alpha)$  es un punto.

Elegimos un  $\beta \in Bd\left(\rho_1^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ . Como  $\rho_1(F_a) = \rho(F_{1,a})$ , entonces  $F_{1,\beta} \in Bd(E_{p/q})$ , por el lema 6, se dá

$$1) F_{\mu,\beta}^q \leq R_p \text{ ó } 2) F_{\mu,\beta}^q \geq R_p.$$

Ahora si  $F_{\mu,\beta}^q = R_p$  entonces  $f_{1,\beta} = id$  y  $f_{1,\beta}$  es inyectiva pero es una contradicción por la forma en que fue definida. Entonces si suponemos que se da 1), podemos encontrar un  $\epsilon > 0$  tal que, existe un punto  $t$  con  $F_{\mu,\beta-\epsilon}^q(t) = t + p \text{ ó } \frac{p}{q} = \rho(F_{\mu,\beta-\epsilon}) = \rho_1(F_{\beta-\epsilon})$ . Si suponemos que se dá 2), podemos encontrar un  $\epsilon > 0$  tal que, existe un punto  $t$  con  $F_{\mu,\beta+\epsilon}^q(t) = t + p \text{ ó } \frac{p}{q} = \rho(F_{\mu,\beta+\epsilon}) = \rho_1(F_{\beta+\epsilon})$ . Por lo tanto,  $\rho_1^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  es un intervalo cerrado no trivial. ■

## 5 LA FAMILIA CLÁSICA.

Una familia de funciones, que ha sido ampliamente estudiada es la llamada "Familia Clásica" o "Familia de Arnold". Se trata de una familia bi-paramétrica de funciones de la circunferencia cuyo estudio ha sido de interés, para la matemática y también en varios contextos científicos que incluyen a la Mecánica y el estudio de ritmos en Biología. La familia clásica de funciones de la circunferencia está dada por:

$$f_{a,b}(x) = (x + a + b \operatorname{sen} 2\pi x) \bmod 1.$$

donde  $a, b$  son parámetros reales.

Cuando  $b = 0$  tenemos una familia de rotaciones de ángulo  $a$ , para valores pequeños del parámetro  $b$ , lo que se tiene es una pequeña perturbación (no lineal) de una rotación. En el contexto de la Mecánica Clásica el interés por esta familia ha surgido como parte de la teoría KAM (Kolomogorv-Arnold y Moser) [2] y en Biología en conexión con el estudio de ritmos neuronales y cardiacos [11].

### 5.1 Familia de Rotaciones.

Consideremos la familia de rotaciones  $r_a(x) = x + a \bmod 1$ . Anteriormente vimos que, si el parámetro  $a$  es racional, digamos  $p/q$ , entonces todas las órbitas tienen período  $q$  y envolvencia  $p$ . Para el caso irracional tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 17 (Jacobi [9])** *Sea  $r_a(x) = x + a$  una rotación. Si  $a$  es irracional todas las órbitas de  $r_a(x)$  son densas en  $S$ .*

*Demostración:*

Primero demostremos que no hay puntos periódicos. Sea  $R_a$  representación de la rotación  $r_a$  y  $x \in S$ . Supongamos que dos puntos cualesquiera de una órbita cualquiera fueran iguales entonces existirían  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ , con  $n \neq m$

tal que,

$$\begin{aligned}
 r_a^n(x) &= r_a^m(x) \\
 r_a^n(\pi(t)) &= r_a^m(\pi(t)) \\
 \pi((R_a)^n(t)) &= \pi((R_a)^m(t)) \\
 \pi(t+na) &= \pi(t+ma) \\
 e^{2\pi i(t+na)} &= e^{2\pi i(t+ma)} \\
 e^{2\pi i a(n-m)} &= 1
 \end{aligned}$$

entonces  $(n-m)a \in \mathbb{Z}$ , lo cual contradice el hecho de que  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , por lo tanto  $n = m$  y no hay puntos periódicos.

Como consecuencia del Teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual dice "Todo conjunto de puntos infinito y acotado tiene por lo menos un punto límite", tenemos el criterio de la convergencia de Cauchy, que nos diría " $r_a^n(x)$  es de Cauchy; entonces dado cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $n, m \in \mathbb{Z}^+$  tal que,

$$|r_a^n(x) - r_a^m(x)| < \epsilon$$

Sea  $k = n - m$ ,

$$|r_a^k(x) - r_a^0(x)| = |r_a^{n-m}(x) - r_a^{m-m}(x)| = |r_a^n(r_a^{-m}(x)) - r_a^m(r_a^{-m}(x))| < \epsilon,$$

$r_a$  es una simetría en  $S$ , además  $r_a$  preserva longitudes en  $S$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 |r_a^{lk}(x) - r_a^l(x)| &= |r_a^{n+(l-1)n-lm}(x) - r_a^{m-m+l}(x)| \\
 &= |r_a^n(r_a^{(l-1)n-lm}(x)) - r_a^m(r_a^{l-m}(x))| < \epsilon,
 \end{aligned}$$

además  $[x, r_a^k(x)]$  es el arco que une a  $x$  con  $r_a^k(x)$ , al iterar éste arco el punto inicial del nuevo arco coincide con el punto final del arco anterior y así sucesivamente. Entonces  $x, r_a^k(x), r_a^{2k}(x)$  particionan  $S$  en arcos de longitudes menores que  $\epsilon$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario y  $a$  es irracional,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [r_a^{nk}(x), r_a^{(n+1)k}(x)] = S. \blacksquare$$

## 5.2 Familia Completa

En el siguiente panel (figura 22), vemos que, el variar el parámetro  $b$  causa el efecto de aumentar la amplitud y el variar el parámetro  $a$  de trasladar verticalmente la gráfica de la función  $f_{a,b}(x)$  y la de su representación

$$F_{a,b}(t) = t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t.$$

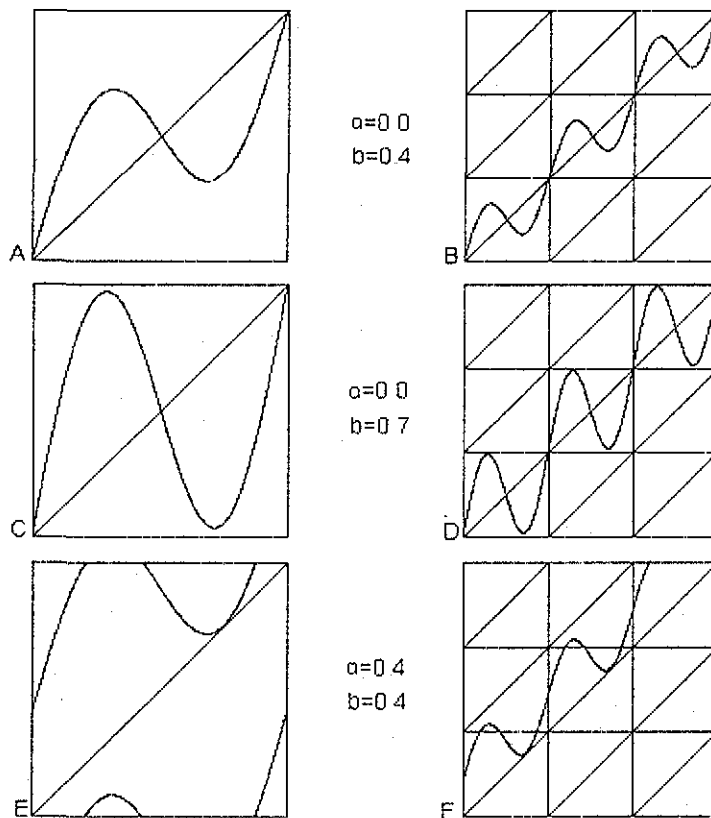


Figura 22: Gráficas de la función y su representación.

**Observación 29**  $f_{a,b}(x)$  es un difeomorfismo en la región:

$$a \geq 0, 0 < b < \frac{1}{2\pi}.$$

*Demostración.*

Como  $b < \frac{1}{2\pi}$ , entonces  $1 < \frac{1}{2\pi b}$  y  $-1 > -\frac{1}{2\pi b}$ , además  $-1 < \cos 2\pi x < 1$ , entonces  $\cos 2\pi x \neq -\frac{1}{2\pi b}$ ,

$$2\pi b \cos 2\pi x \neq -1, \\ f'_{a,b}(x) = 1 + 2\pi b \cos 2\pi x \neq 0,$$

así por el Teorema de la función Inversa  $f_{a,b}$  es un difeomorfismo local, además  $f_{a,b}$  es inyectiva globalmente, pues si no lo fuera, por el Teorema de Rolle

existiría  $x^*$  tal que  $f'_{a,b}(x^*) = 0$ , lo cual contradice que  $f'_{a,b}(x) \neq 0$  para todo  $x$  en dicha región, por lo tanto  $f_{a,b}$  es un difeomorfismo (ver figura 23). ■

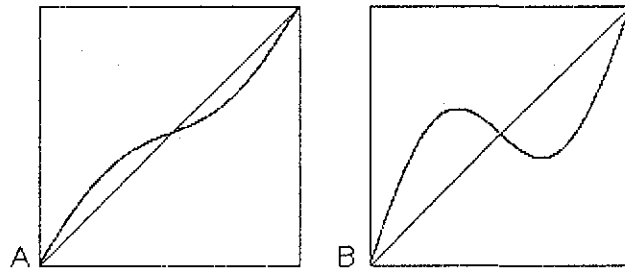


Figura 23: A) Función inyectiva,  $b < \frac{1}{2\pi}$ . B) Función no inyectiva,  $b > \frac{1}{2\pi}$ .

### 5.2.1 Puntos Periódicos

Para encontrar las órbitas de período  $q$  de  $f_{a,b}(x)$  buscamos los puntos fijos de  $f_{a,b}^q(x)$ . Por ejemplo, los puntos de período dos de  $f_{a,b}(x)$ , serán los puntos fijos de  $f_{a,b}^2(x)$  que no son puntos fijos de  $f_{a,b}(x)$  (ver figura 24).

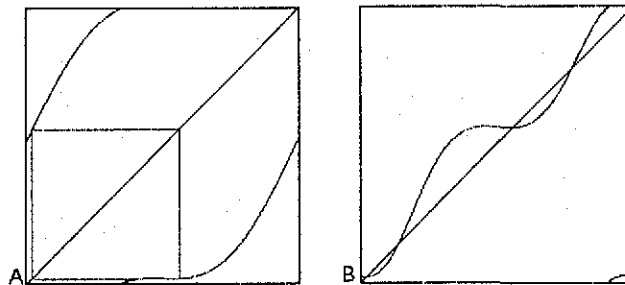


Figura 24: A) Órbita de período dos de  $f$ , B) Puntos fijos de  $f^2$ .

En la figura 25 A y B, vemos que para las rotaciones todas sus órbitas son del mismo período y la misma envolvente. En la figura 25 C, D, E, F, se observa la coexistencia de puntos atractores y repulsores o bien la coexistencia de dos órbitas periódicas de estabilidades opuestas.

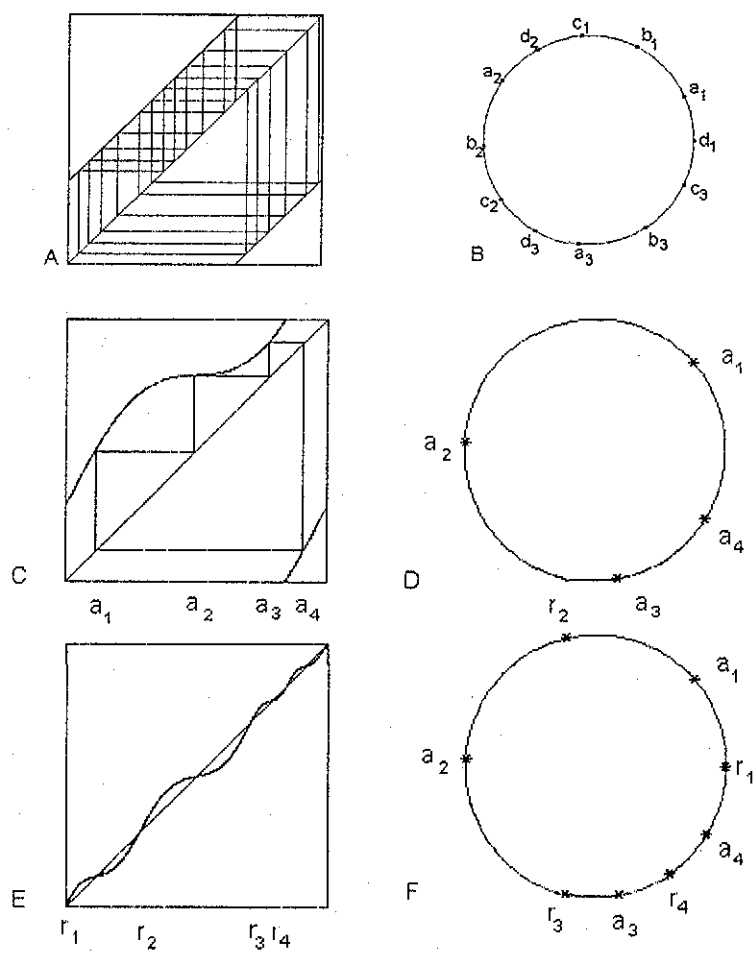


Figura 25: A) Todas sus órbitas son del mismo período 3, y la misma envolvente 1. B) Órbitas de período 3 en el círculo. Con parámetros:  $a = 0.28$   $b = 0.15$ : C) Gráfica de  $f$  en el toro, D) Órbita en el círculo, E) Gráfica de  $f^4$  en el toro, F) Órbita en el círculo.

Para endomorfismos monótonos crecientes de grado uno, todas sus órbitas periódicas son del mismo período y envolvente figuras 26 A), B). Otro fenómeno interesante que puede observarse en esta familia es la coexistencia de órbitas periódicas de distintos períodos como, por ejemplo, figura 26 (C, D, E, F).

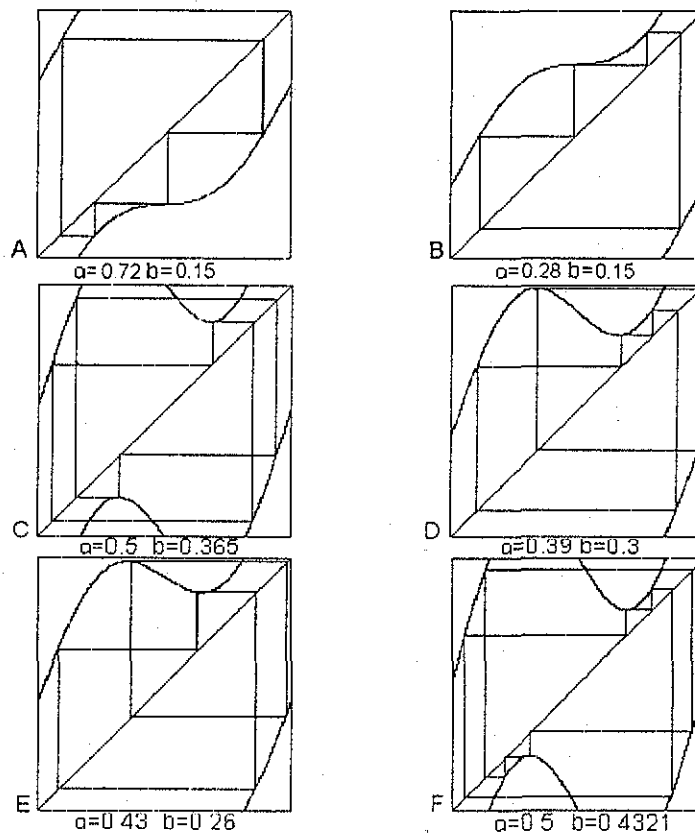


Figura 26: Función inyectiva con A)  $\rho(f) = \frac{3}{4}$ ; B)  $\rho(f) = \frac{1}{4}$ . Coexistencia de órbitas atractoras: C) Período tres, D) Período dos y cuatro, E) Período dos y tres, F) Período cuatro.

**Puntos Fijos** En esta sección, especializamos nuestro estudio de los puntos periódicos de la familia clásica al caso de los puntos fijos, ya que para estos pueden encontrarse interesantes resultados analíticos, que ilustran la complejidad de la dinámica de esta familia paramétrica.

Del capítulo dos, sabemos que  $f_{a,b}(x)$  tiene puntos fijos, en los puntos donde la gráfica de  $f_{a,b}(x)$ , se interseca con la identidad o bien cuando la gráfica de su representación interseca alguna de las rectas  $g(t) = t + a$ , con  $a \in \mathbb{Z}$ . Podemos concluir que estos puntos fijos son atractores si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f_{a,b}$  en el punto fijo tiene valor absoluto menor que uno o repulsores si es mayor que uno (ver ejemplo figura 27).

Podemos obtener puntos fijos, de dos maneras: variando el parámetro  $a$  o variando el parámetro  $b$ . (ver figuras 28)

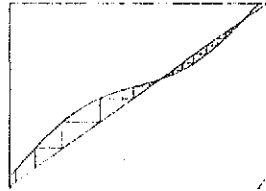


Figura 27: Puntos fijos: atractor y repulsor.

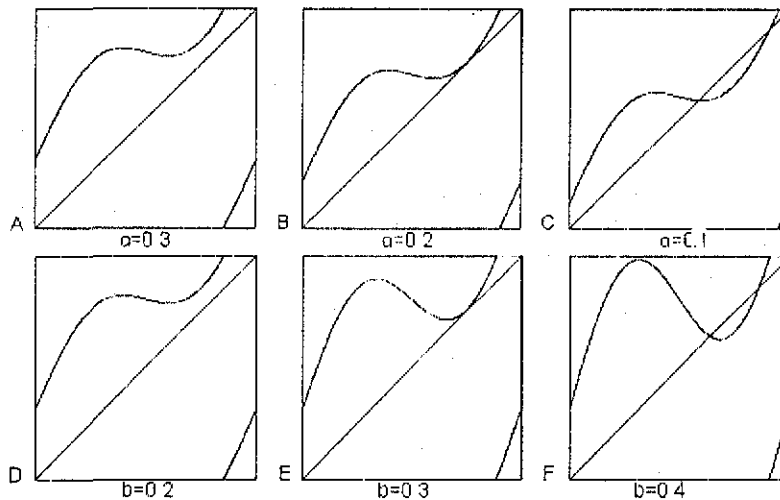


Figura 28: Variación del Parámetro  $a$ , con  $b = 0.2$  fijo. Variación del Parámetro  $b$ , con  $a = 0.3$  fijo.

Por la manera en que aparecen los puntos fijos, notamos que  $f_{a,b}(x)$  puede sufrir bifurcaciones silla-nodo, cuando incrementamos el parámetro  $b$  o cuando incrementamos el parámetro  $a$ .

**Proposición 14** Sea  $k \in \mathbb{Z}$ . En el conjunto,

$$b = |k - a|,$$

del espacio de parámetros, la familia de Arnold sufre una Bifurcación Silla-Nodo.



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

*Demostración*

Veamos en donde se cumplen las condiciones del Teorema 3, que nos garantiza la bifurcación silla-nodo. Consideremos  $F_{a,b}(t)$  una representación de  $f_{a,b}$ , los puntos fijos de  $f_{a,b}$  son los  $t$  tales que,  $F_{a,b}(t) = t + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} F_{a,b}(t) &= t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t = t + k, \\ \operatorname{sen} 2\pi t &= \frac{k - a}{b}, \quad b \neq 0. \end{aligned}$$

Ahora  $F'_{a,b}(t) = 1 + 2\pi b \cos 2\pi t = 1$ , entonces;

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi b \cos 2\pi t = 2\pi b \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 2\pi t} \\ 0 &= 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k - a}{b}\right)^2}, \end{aligned}$$

de aquí que,

$$b^2 = (k - a)^2, \quad b = |k - a| \neq 0.$$

Falta verificar que,  $F''_{a,b}(t) \neq 0$ ,  $\frac{\partial F_{a,b}(t)}{\partial a} \neq 0$ ,  $\frac{\partial F_{a,b}(t)}{\partial b} \neq 0$ .

$$F''_{a,b}(t) = -4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi t = -4\pi^2 b \left(\frac{k - a}{b}\right) \neq 0$$

Por último, verifiquemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{a,b}(t)}{\partial b} &= \operatorname{sen} 2\pi t = \frac{k - a}{b} \neq 0, \\ \frac{\partial F_{a,b}(t)}{\partial a} &= 1 \neq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Como observamos en el siguiente panel, al aumentar  $b$  se vuelve a dar la bifurcación silla nodo, y continuando con el incremento de  $b$ , ocurre una sucesión de bifurcaciones silla-nodo, como lo muestra las figuras 29.

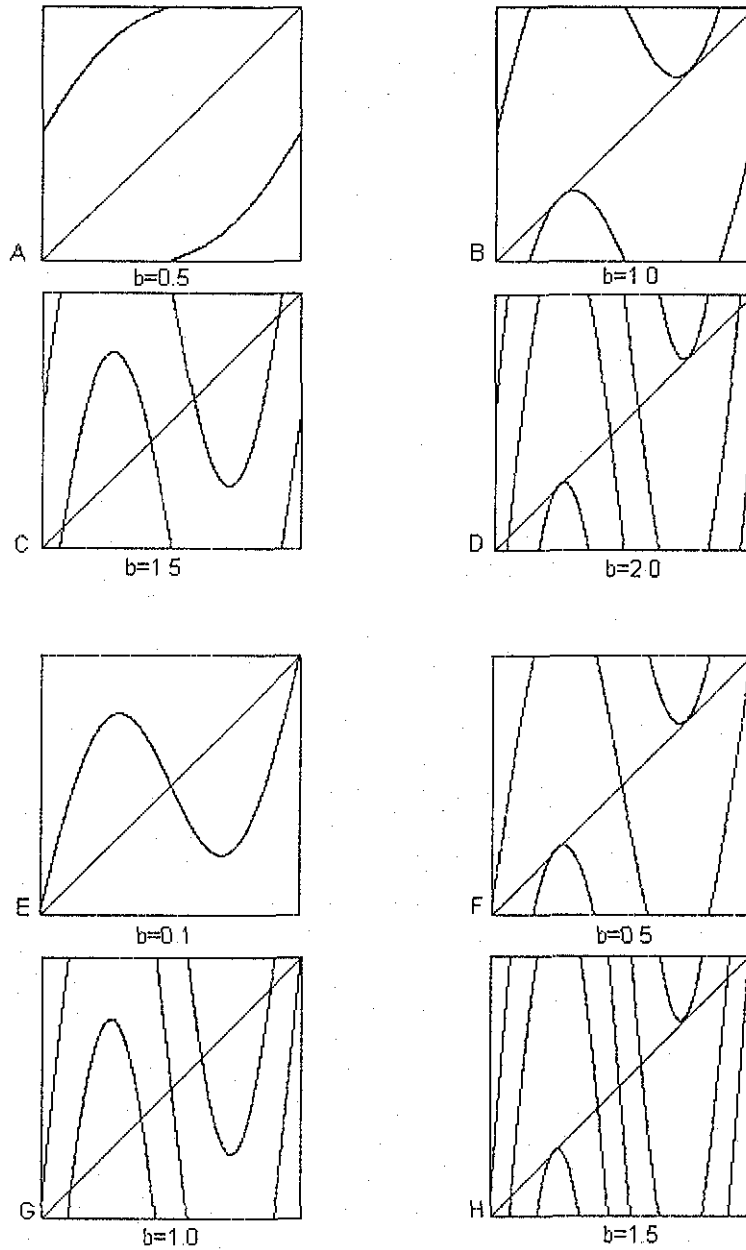


Figura 29: Variación del parámetro  $b$ . Fijamos  $a = 0$ , en las figuras A, B, C, D; y  $a = 0.5$  en la figuras E, F, G, H.

La siguiente proposición permite producir un diagrama para localizar todas los puntos del plano de parámetros donde se producen este tipo de bifurcaciones de puntos fijos.

**Proposición 15** Sean  $k, l \in \mathbb{N}$ . Entonces:

- (i) Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $l - 1 < b < a - k + l$  o  $\frac{2k-1}{2} < a < k$ ,  $l - 1 < b < -a + k + l - 1$   $F_{a,b}(t)$  tiene  $4(l - 1)$  puntos fijos.
- (ii) Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $b = a - k + l$  o  $\frac{2k-1}{2} < a < k$ ,  $b = -a + k + l - 1$   $F_{a,b}(t)$  tiene  $4l - 3$  puntos fijos.
- (iii) Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $a - k + l < b < -a + k + l - 1$  o  $\frac{2k-1}{2} < a < k$ ,  $-a + k + l - 1 < b < a - k + l$   $F_{a,b}(t)$  tiene  $2(2l - 1)$  puntos fijos.
- (iv) Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $b = -a + k + l - 1$  o  $\frac{2k-1}{2} < a < k$ ,  $b = a - k + l$   $F_{a,b}(t)$  tiene  $4l - 1$  puntos fijos.
- (v) Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $-a + k + l - 1 < b < l$  o  $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ ,  $a - k + l < b < l$   $F_{a,b}(t)$  tiene  $4l$  puntos fijos.

*Demostración.*

Sean  $k, l \in \mathbb{N}$ . Para  $k$  fijo, realizamos inducción sobre  $l$ . Para  $l = 1$ , la región sería:

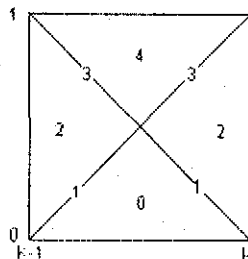


Figura 30: Número de puntos fijos en el espacio de parámetros  $[k - 1, k] \times [0, 1]$ .

Los puntos fijos son los  $t$  tales que,  $F_{a,b}(t) = t + n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es decir,

$$t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t = t + n, \quad \operatorname{sen} 2\pi t = \frac{n - a}{b},$$

pero  $|\operatorname{sen} 2\pi t| \leq 1$ , entonces tenemos puntos fijos en las regiones tales que,

$$|n - a| \leq |b|,$$

y claramente no hay puntos fijos en  $|n - a| > |b|$ ,  $b > 0$ .

Si  $n = k$ ,  $|k - a| > b$ , y si  $n = k - 1$ ,  $|k - 1 - a| > b$ . Dado que las rectas que cruzan la región estudiada son  $b = k - a$  y  $b = a - k + 1$ ; así tenemos que la región donde no hay puntos fijos es si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ , entonces  $0 < b < a - k + 1$  y si  $\frac{2k-1}{2} < a < k$  entonces  $0 < b < k - a$ .

Analizando todas las regiones que nos generan estas rectas, por la proposición 14, la bifurcación silla-nodo ocurre en estas rectas, entonces si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$  y  $b = a - k + 1$ , o bien  $\frac{2k-1}{2} < a < k$  y  $b = k - a$ ,  $F_{a,b}(t)$  tiene un punto fijo tangente y cuando  $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$  y  $a - k + 1 < b$ , o bien  $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$  y  $k - a < b$   $F_{a,b}(t)$  tiene 2 puntos fijos.

Por otro lado si  $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$  y  $b = k - a$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$  y  $b = a - k + 1$ , aparece un punto tangente, entonces  $F(t)$  tiene 3 puntos fijos.

Por último, si  $k - 1 \leq a \leq \frac{2k-1}{2}$ ,  $k - a < b$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$ ,  $a - k + 1 < b$ , como ya ocurrió la bifurcación silla-nodo, el punto tangente al aumentar  $b$ , se convierten en 2 puntos fijos, es decir  $F_{a,b}(t)$  tiene ahora 4 puntos fijos. Acotando superiormente las regiones obtenemos los resultados.

Supongamos que las afirmaciones de la proposición son ciertas para algún  $l$ .

Demostremos para  $l + 1$ .

Si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$  y  $l < b$  entonces  $-a + k + l - 1 < b$  o bien si  $\frac{2k-1}{2} < a < k$  y  $l < b$  entonces  $a - k + l < b$ . Así por hipótesis de inducción  $F_{a,b}(t)$  tiene  $4l$  puntos fijos, es decir  $F_{a,b}(t)$  tiene  $4((l + 1) - 1)$  puntos fijos.

Analizando todas las regiones que nos generan estas rectas, por la proposición anterior, la bifurcación silla-nodo, ocurre en las rectas, entonces si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$  y  $b = a - k + l + 1$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a \leq k$  y  $b = k - a + l$   $F_{a,b}(t)$  tiene 1 punto fijo más, distinto de los que ya tenía, es decir  $F_{a,b}(t)$  tiene  $4(l + 1) - 3$  y cuando  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$  y  $a - k + l + 1 < b$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a < k$  y  $k - a + l < b$   $F_{a,b}(t)$  tiene 2 puntos fijos más, es decir  $F_{a,b}(t)$  tiene  $2(2(l + 1) - 1)$ .

Por otro lado si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$  y  $b = k - a + l$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a < k$  y  $b = a - k + l + 1$  en particular  $F_{a,b}(t)$  tiene  $2(2(l + 1) - 1)$  puntos fijos, pero además ocurre otra bifurcación silla-nodo, aumentado un punto fijo más distinto de los anteriores, es decir  $F(t)$  tiene ahora  $4(l + 1) - 1$  puntos fijos.

Por último, si  $k - 1 < a < \frac{2k-1}{2}$ ,  $k - a + l < b$  o bien  $\frac{2k-1}{2} < a < k$ ,  $a - k + l + 1 < b$ , en particular  $F_{a,b}(t)$  tiene  $2(2(l + 1) - 1)$  puntos fijos, pero además ya ocurrió otra bifurcación silla-nodo, aumentado 2 puntos fijos más distintos de los anteriores, es decir  $F(t)$  tiene ahora  $4(l + 1)$  puntos fijos.

Las cotas superiores para las regiones donde coexisten  $n$  puntos fijos estan dadas por las cotas inferiores donde coexisten  $n + 2$  puntos fijos. ■

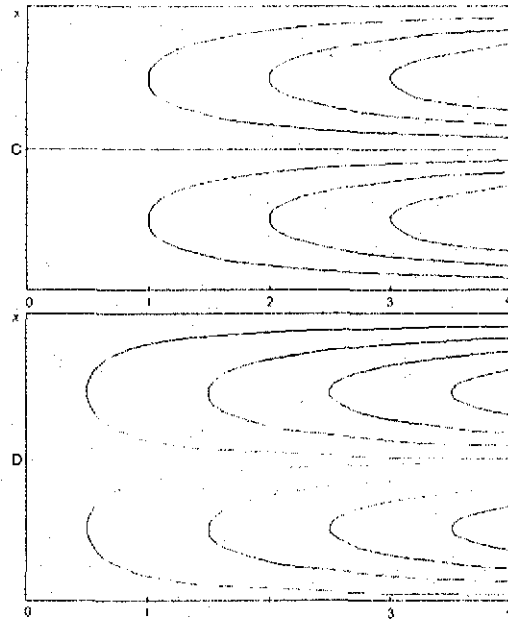
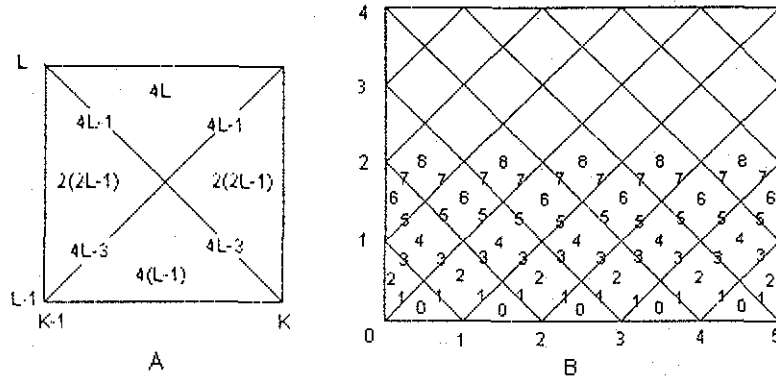


Figura 31: A) Número de puntos fijos en el espacio de parámetros  $[K - 1, K] \times [L - 1, L]$ . B) Número de puntos fijos en el espacio de parámetros de la función  $f(x)$ . Secuencia de Bifurcaciones Silla-nodo, con: C)  $a = 0.5$  y  $b \in [0, 4]$ , D)  $a = 0.0$  y  $b \in [0, 4]$ .

Observamos en la figura 31 C, D, el diagrama de bifurcaciones de puntos fijos fijando  $a$  y variando  $b$ . La proposición anterior nos determina el número

de puntos fijos en un espacio de parámetros, pero no el tipo de estabilidad, ésta la determinan las siguientes condiciones.

**Observación 30** Si  $a, b$  satisfacen

$$|a - k| \leq b, \text{ y } b^2 - (k - a)^2 < \frac{1}{\pi^2}$$

para algún  $k \in \mathbb{N}$ , la función  $F_{a,b}(t)$  tiene un punto fijo estable (figura 32).

*Demostración.*

Ya sabemos que los puntos fijos cumplen,  $\text{sen } 2\pi t = \frac{k-a}{b}$ ,

$$\left| \frac{k-a}{b} \right| \leq 1.$$

Por otro lado tenemos que el punto fijo es estable si,

$$|F'_{a,b}(t)| < 1,$$

$$|1 + 2\pi b \cos 2\pi t| < 1,$$

como,

$$\cos 2\pi t = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 2\pi t},$$

$$\left| 1 \pm 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} \right| < 1, \text{ entonces } \left( 1 \pm 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} \right)^2 < 1,$$

entonces,

$$4\pi^2 b^2 \left( 1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2 \right) < \pm 4\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2},$$

$$\pi^2 (b^2 - (k-a)^2)^2 < (b^2 - (k-a)^2),$$

de esta forma, obtenemos,

$$b^2 - (k-a)^2 < \frac{1}{\pi^2} \blacksquare$$

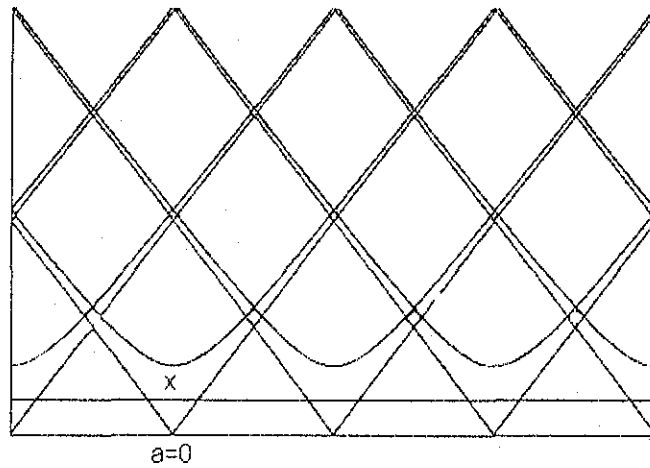


Figura 32: Región de puntos fijos atractores.

Como ejemplo tomemos un punto en la región de estabilidad (marcado con una cruz) y observemos la dinámica del correspondiente sistema dinámico, figura 33.

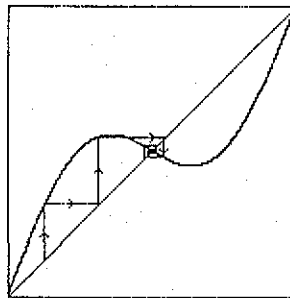


Figura 33:  $a = 0.5$ ,  $b = 0.52$ , coexistencia de fijos atractores.

En la región donde  $f$  no es inyectiva puede darse la coexistencia de atractores.

**Observación 31** *El conjunto*

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ (a, b) : |a - k| \leq b, \text{ y } b^2 - (k - a)^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B'_k,$$

determina los valores de parámetros para los cuales la función  $F$  tiene dos puntos fijos estables (y dos puntos fijos inestables) figura 34.

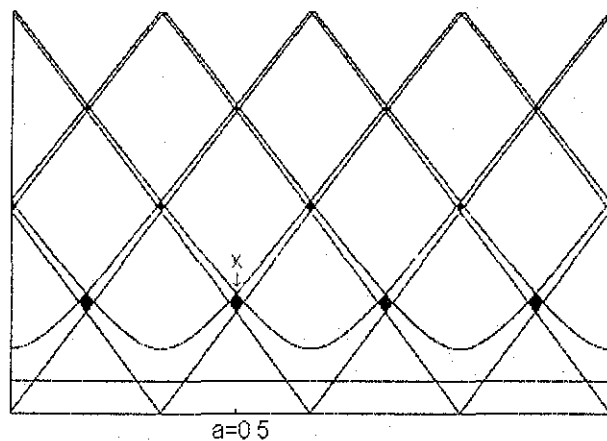


Figura 34: Regiones de biestabilidad de puntos fijos atractores.

Como ilustración tomemos un par de parámetros en alguna de estas regiones donde coexisten dos fijos atractores y observemos la gráfica del endomorfismo correspondiente, figura 35.

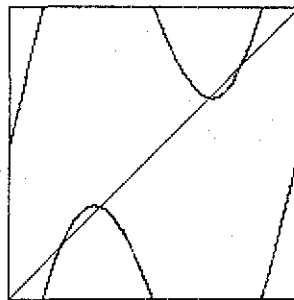


Figura 35: Coexistencia de fijos atractores de  $f_{a,b}$  con parámetros  $a = 0.5$ ,  $b = 0.52$ .

Fuera de la región de endomorfismos monótonos crecientes puede ocurrir otro tipo de bifurcación. En las figuras siguientes vemos gráficas de funciones en la primera (figura 36) y segunda iterada (figura 37), en la región de estabilidad dada por la proposición 30, en el límite de ésta y fuera de ésta.



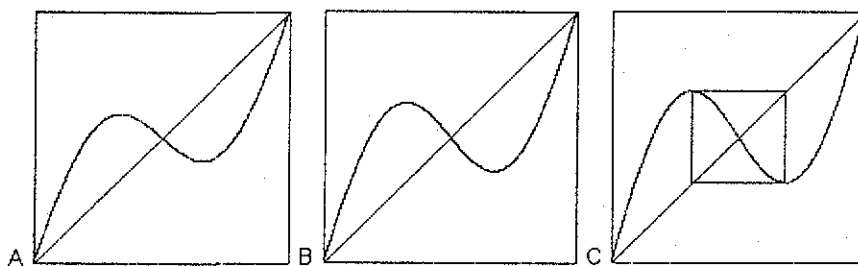


Figura 36:  $f_{0,b}(x)$  : A)  $b = 0.3$ , B)  $b = 0.35$ , C)  $b = 0.4$

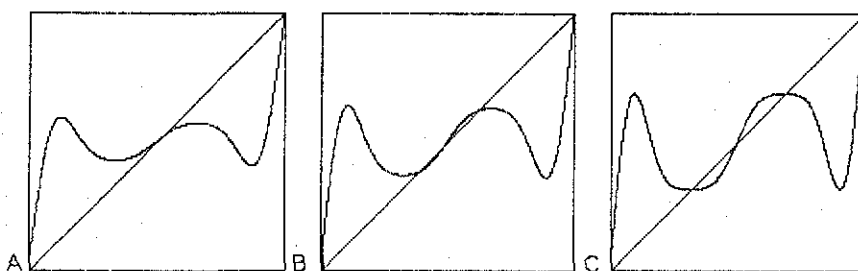


Figura 37:  $f_{0,b}^2(x)$  : A)  $b = 0.3$ , B)  $b = 0.35$ , C)  $b = 0.4$

Observamos que el punto fijo atractor se vuelve repulsor, pero aparece una órbita periódica de período dos; ya que anteriormente teníamos que no puede haber solamente puntos repulsivos, por lo cual debe de aparecer algún punto de período mayor que sea atractor. Lo anterior es la bifurcación de doblamiento de período y tenedor (ver capítulo 1).

**Proposición 16** Para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ , sobre el conjunto

$$b^2 - (k - a)^2 = \frac{1}{\pi^2}$$

del espacio de parámetros la función de Arnold sufre una **Bifurcación de Doblamiento de Período**.

*Demostración.*

Veamos en donde se cumplen las condiciones del Teorema 5, que nos garantiza la bifurcación doblamiento de período. Tenemos que los puntos fijos cumplen,  $\text{sen}2\pi t = \frac{k-a}{b}$ . Otra condición es que  $F'_{a,b}(t) = -1$ , entonces,

$$\begin{aligned}
F'_{a,b}(t) &= 1 + 2\pi b \cos 2\pi t \\
&= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \sin^2 2\pi t} \\
&= 1 + 2\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} = -1
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \left(\frac{k-a}{b}\right)^2} &= -\frac{1}{\pi b} \\
1 - \frac{(k-a)^2}{b^2} &= \frac{1}{\pi^2 b^2} \\
b^2 - (k-a)^2 &= \frac{1}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos que :  $(F'_{a,b}(t))'' = 0$ ,  $(F'_{a,b}(t))''' \neq 0$ ,  $\frac{\partial(F'_{a,b}(t))'}{\partial b} \neq 0$  y  $\frac{\partial(F'_{a,b}(t))'}{\partial a} \neq 0$ . Como,

$$F'_{a,b}(t) = t + 2a + b \sin 2\pi t + b \sin 2\pi (t + a + b \sin 2\pi t)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(F'_{a,b}(t))' &= 1 + 2\pi b \cos 2\pi t + (1 + b2\pi \cos 2\pi t) 2\pi b \cos 2\pi (t + a + b \sin 2\pi t), \\
(F'_{a,b}(t))'' &= -(2\pi)^2 b \sin 2\pi t + (-(2\pi)^2 b \sin 2\pi t) 2\pi b \cos 2\pi (t + a + b \sin 2\pi t) - \\
&\quad (1 + 2\pi b \cos 2\pi t)^2 (2\pi)^2 b \sin 2\pi (t + a + b \sin 2\pi t) \\
&= -2b(2\pi)^2 \sin 2\pi t - b^2(2\pi)^3 \sin 2\pi t \cos 2\pi t - b^3(2\pi)^4 \cos^2 2\pi t \sin 2\pi t + \\
&\quad 2(2\pi)^3 b^2 \cos 2\pi t \sin 2\pi t \\
&= -8\pi^2(k-a) - 8\pi^2(k-a) - 16\pi^2(k-a) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F'_{a,b}(t))''' &= -2b(2\pi)^3 \cos 2\pi t - b^2(2\pi)^4 \sin^2 2\pi t + b^2(2\pi)^4 \cos^2 2\pi t \\
&\quad - b^3(2\pi)^5 \cos^3 2\pi t + b^3(2\pi)^5 2 \cos 2\pi t \sin^2 2\pi t \\
&= 16\pi^2 - (2\pi)^4(k-a)^2 + 16\pi^2 + 32\pi^2 + (2\pi)^4(k-a)^2 = 64\pi^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(r^2(t))'}{\partial b} &= 2\pi \cos 2\pi t + (2\pi + 8\pi^2 b \cos 2\pi t) \cos 2\pi (t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t) - \\
&\quad (1 + 2\pi b \cos 2\pi t) 2\pi b \operatorname{sen} 2\pi (t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t) \operatorname{sen} 2\pi t \\
&= 2\pi \cos 2\pi t + (2\pi + 8\pi^2 b \cos 2\pi t) \cos 2\pi (t + a + b (\frac{k-a}{b})) + \\
&\quad 2\pi b \operatorname{sen} 2\pi (t + a + b (\frac{k-a}{b})) \operatorname{sen} 2\pi t \\
&= 4\pi \cos 2\pi t + 8\pi^2 b \cos^2 2\pi t + 2\pi b \operatorname{sen}^2 2\pi t \\
&= 4\pi \left(-\frac{1}{\pi b}\right) + 8\pi^2 b \left(-\frac{1}{\pi b}\right)^2 + 2\pi b \left(1 + \left(\frac{1}{\pi b}\right)^2\right) \\
&= \frac{-4\pi^2 b + 8\pi^2 b + 2\pi^3 b^3 + 2\pi b}{(\pi b)^2} = \frac{4\pi + 2\pi^2 b^2 + 2}{\pi b} \neq 0.
\end{aligned}$$

y por último,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(r^2(t))'}{\partial a} &= -(1 + 2\pi b \cos 2\pi t) 4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi (t + a + b \operatorname{sen} 2\pi t) \\
&= -4\pi^2 b (-1) \operatorname{sen} 2\pi (t + a + b (\frac{k-a}{b})) \\
&= 4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi (t + k) = 4\pi^2 b \operatorname{sen} 2\pi t = 4\pi \sqrt{\pi^2 b^2 + 1} \neq 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

## 6 BIFURCACIONES EN SISTEMAS CON PARÁMETROS.

Sea  $f_\lambda : S \rightarrow S$ , una familia de endomorfismos de grado uno de la circunferencia que depende de un vector de parámetros  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ :

$$f_\lambda : S \rightarrow S.$$

### 6.1 Lenguas de Arnold en la Familia Clásica.

Si la familia  $\{f_\lambda\}$  consta de homeomorfismos o al menos endomorfismos monótonos de grado uno, podemos definir las lenguas de Arnold de la siguiente manera:

**Definición 36** Dado  $r \in \mathbb{R}$ , la lengua  $r$ , que denotamos por  $L_r$ , es el conjunto de puntos  $\lambda$ , en el espacio de parámetros, tales que el número de rotación,  $\rho(f_\lambda)$ , es igual a  $r$ ,

$$L_r = \{\lambda : \rho(f_\lambda) = r\}.$$

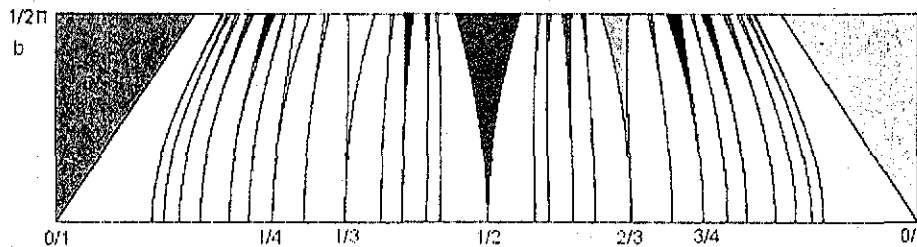


Figura 38: Lenguas racionales para la familia clásica  $f_{a,b}(x) = (x + a + b \sin 2\pi x) \bmod 1$ , con  $a \in [0, 1]$  y  $b < \frac{1}{2\pi}$ .

Como el número de rotación depende únicamente del endomorfismo  $f$ , tenemos que estas regiones (lenguas) del espacio de parámetros no pueden intersectarse. Si  $\lambda$  está en la lengua  $L_r$ , tenemos que  $f_\lambda$  tiene órbitas periódicas, de período  $q$  y envolvencia  $p$  (ver corolario 3) y toda órbita periódica de  $f_\lambda$  va a tener necesariamente esta misma característica  $(q, p)$ .

En la figura 39, observamos la dinámica de la familia clásica, en el toro y en la circunferencia, con parámetros  $(a, b)$  que pertenecen a las lenguas  $L_{\frac{1}{4}}$  y  $L_{\frac{1}{3}}$ .

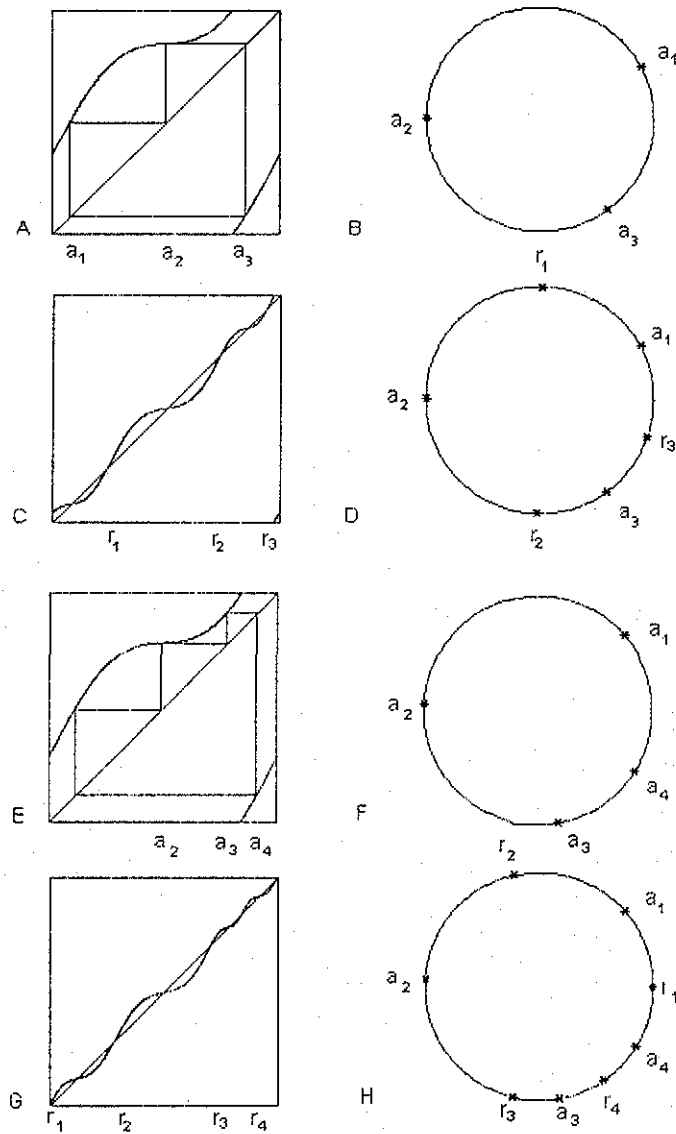


Figura 39: Parámetros en  $L_{\frac{1}{3}}$ ,  $a = 0.35$ ,  $b = 0.15$ . A) Órbita atractora en el toro. B) Puntos de período tres atractores en  $S$ , C) Puntos fijos de  $f^3(x)$ , D) Puntos atractores y repulsores de  $f^3(x)$  en  $S$ . Parámetros en  $L_{\frac{1}{4}}$   $a = 0.28$ ,  $b = 0.15$ . E) Órbita atractora en el toro. F) Puntos de período cuatro atractores en  $S$  G) Puntos fijos de  $f^4(x)$ . H) Puntos atractores y repulsores en  $S$ .

En los ejemplos anteriores, vimos que, para los valores de los parámetros considerados, sólo existen dos órbitas periódicas, una atractora y la otra repulsora, el siguiente resultado de Jacobson [2] nos da una cota para el número de órbitas periódicas que puede tener cierto tipo de funciones.

**Teorema 18** *Un difeomorfismo de la circunferencia,*

$$f(x, \lambda) = x + \phi(x, \lambda)$$

*para el cual la función angular  $\phi(\cdot, \lambda)$  es un polinomio trigonométrico de grado  $n > 0$ , tiene a lo más  $2n$  órbitas periódicas.*

El teorema anterior y las simulaciones computacionales, sugieren que toda  $f_{a,b}$  con  $(a, b)$  en la lengua  $L_q$  de la familia clásica, toda función  $f_{a,b}$  tiene una órbita periódica atractora y otra repulsora de característica  $(q, p)$ , excepto en  $b = 0$  donde, por tratarse de una rotación, todas las órbitas son periódicas de característica  $(q, p)$ .

### 6.1.1 Escalera del Diablo.

Hemos analizado la familia clásica y el efecto que causa la variación de los parámetros  $a$  y  $b$ , sobre las gráficas de funciones en el toro y de sus representaciones, la dinámica en el círculo y las lenguas de Arnold.

Analicemos ahora el efecto que tiene variar solamente al parámetro  $a$  a lo largo de la recta  $b = \text{constante}$ . En la figura 40, graficamos el número de rotación en función del parámetro  $a$  para un valor fijo del parámetro  $b$ .

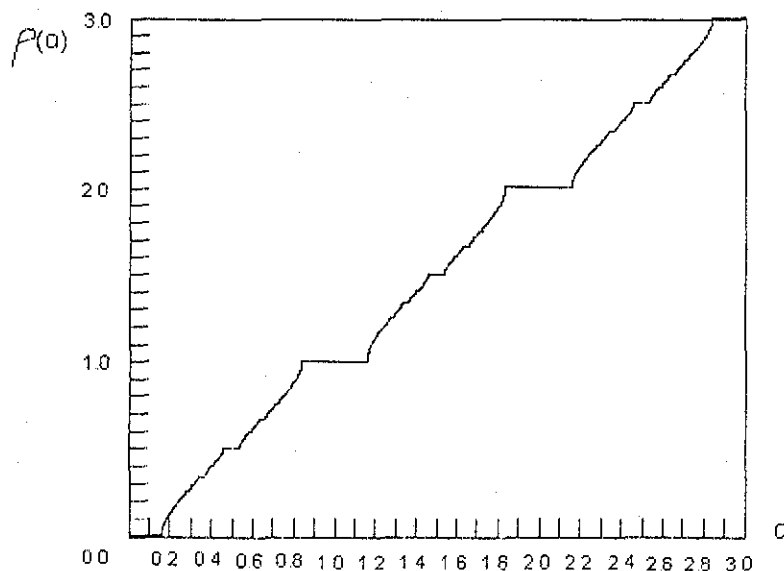


Figura 40: Gráfica del número de rotación variando  $a \in [0, 3]$  y fijando  $b = 0.159$ .

A este tipo de gráficas se les llama **Escaleras del Diablo**. El siguiente teorema de Michael Herman [21] nos ayudará a comprender mejor las propiedades de la figura 40.

**Teorema 19** [22] Sea  $\rho_b(a) \equiv \rho(F_{a,b})$  donde  $F_{a,b}(t) = t + a + b \sin 2\pi t$ , entonces,

- (i)  $\rho_b(a + 1) = \rho_b(a) + 1$ .
- (ii)  $\rho_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, monótona creciente y  $\rho_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .
- (iii) Si  $\rho_b(a_0) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  entonces  $\rho_b$  es estrictamente creciente en  $a_0$ .
- (iv) Si  $b > 0$ ,  $\rho_b^{-1}(\frac{\mathbb{p}}{q})$  es un intervalo de interior no vacío.
- (v)  $\mathbf{K} = \mathbb{R} - \text{Int}(\rho_b^{-1}(\mathbb{Q}))$  es un conjunto de Cantor.

*Demostración.*

(i) Tenemos por la proposición 13 (ii),

$$\begin{aligned} \rho_b(a + 1) &= \rho(F_{a+1,b}) = \rho(R_{a+1} \circ F_{0,b}) = \rho(R_1 \circ R_a \circ F_{0,b}) \\ &= 1 + \rho(R_a \circ F_{0,b}) = 1 + \rho(F_{a,b}) = 1 + \rho_b(a) \end{aligned}$$

(ii) La continuidad de  $\rho_b$  está dada por la proposición 10, ahora como  $\rho_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $\rho_b(0) = 0$ ,  $\rho_b(1) = 1$  por el teorema del valor intermedio  $\rho_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Demostremos que  $\rho_b$  es monótona creciente. Sean  $a_1 < a_2$ ,  $F_{a,b}^n(t)$  es monótona creciente respecto al parámetro  $a$ , entonces

$$\rho_b(a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a_1,b}^n(t)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a_2,b}^n(t)}{n} = \rho_b(a_2)$$

es decir,  $\rho$  es monótona creciente.

(iii) y (iv) Ver lema 7.

(v) Tenemos que  $\mathbf{K}$  es cerrado. Demostraremos que el interior de  $\mathbf{K}$  es vacío. Dado  $a_0 \in \mathbf{K}$  y  $U$  cualquier intervalo abierto que contiene al punto  $a_0$ , existe  $\rho_b(a_1) < \rho_b(a_2)$  tal que  $\rho_b(a_1), \rho_b(a_2) \in \rho(U)$ .

Si  $\frac{p}{q} \in (\rho_b(a_1), \rho_b(a_2))$  entonces  $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q}) \in U$ , ya que  $\rho_b$  es monótona creciente y  $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q}) \notin \mathbf{K}$  ya que no puede contener un intervalo en el que  $\rho_b$  sea racional. Por lo tanto, el interior de  $\mathbf{K}$  es vacío.

Demostremos que no existen puntos aislados en  $\mathbf{K}$ . En cada intervalo abierto que contiene a  $a_0$  existe  $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q}) \subset V$  intervalo donde  $\rho_b$  es racional y los puntos extremos de  $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q})$  son elementos de  $\mathbf{K}$ .

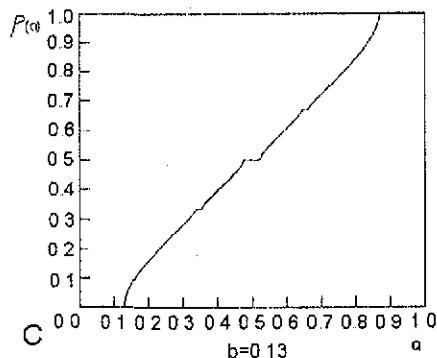
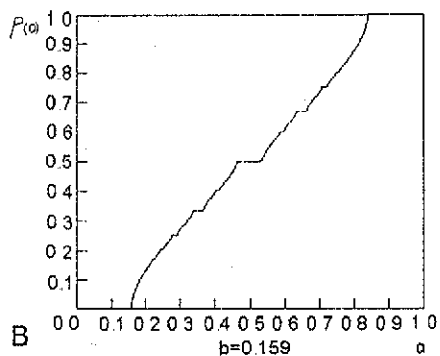
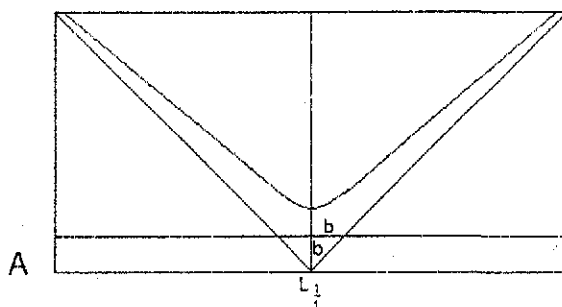
Así pues, tenemos que  $\mathbf{K}$  es un conjunto perfecto y totalmente discontinuo. ■

Del resultado anterior sabemos que  $\rho_b^{-1}(\frac{p}{q})$  es un intervalo de interior no vacío, es decir los cortes transversales con  $b = cte$  de lenguas racionales tienen interior no vacío, una estimación para el ancho de ellas a una altura  $b$  esta dada por el siguiente resultado [2].

**Teorema 20** *Sea  $f_{a,b}(x)$  un homeomorfismo de grado uno que preserva orientación en la familia clásica. El ancho de la lengua  $L_{\frac{p}{q}}$  a la altura  $b$  no excede a  $Cb^q$ , donde  $C$  es una constante positiva*



**Ejemplo 14** En la figura 41 A, podemos verificar que  $L_{\frac{1}{2}}$  tiene una anchura igual a  $Cb$  con  $C = 2$ . Tenemos una cota para la anchura de las lenguas a una altura  $b$ , ahora podríamos preguntarnos por la medida del conjunto de puntos en una sección transversal que no están en las lenguas racionales. En la figura 41 B, C, D, E, F, G, veremos como cambia la medida de estas secciones cuando  $b$  tiende a cero.



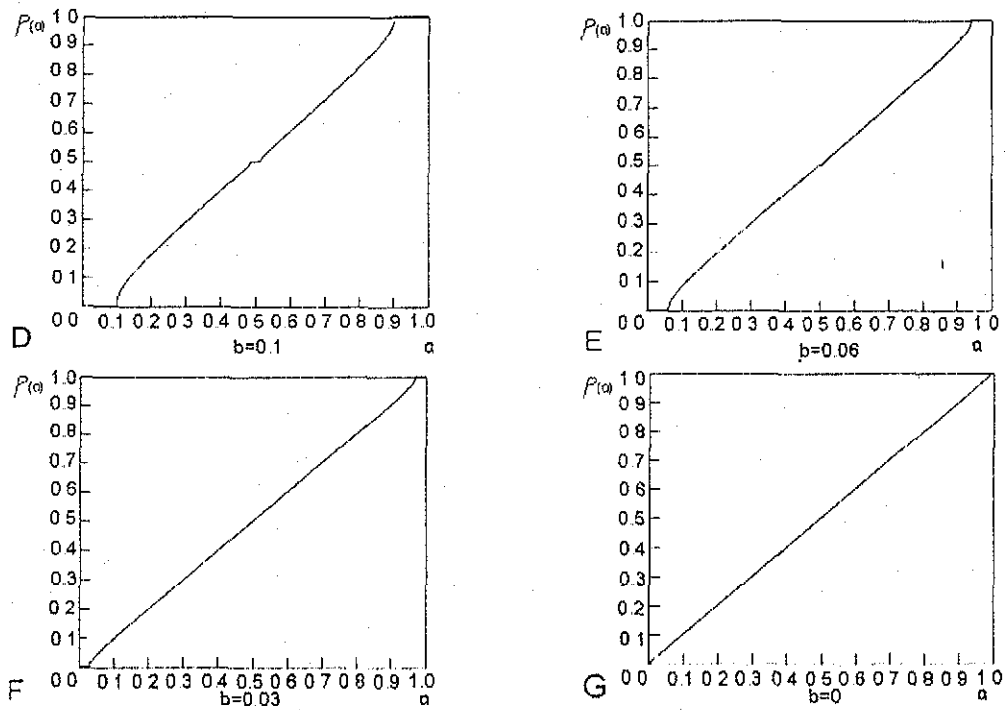


Figura 41: Lengua  $L_{\frac{1}{2}}$  y gráficas de  $\rho(a)$ , fijando el parámetro  $b$  en el valor indicado y con  $a \in [0, 1]$

Lo que observamos en el panel de la figura 41, es que la medida de los puntos que no están en alguna  $L_{\frac{1}{2}}$  tiende a uno cuando  $b$  tiende a cero, esto ha sido expresado y demostrado por Arnold [1] y Herman [21] en los siguientes resultados

**Teorema 21 (Arnold)** Sea  $E_B = \{(a, b) : a \in [0, 1], b \in [0, B], \text{ tal que } f(x) \text{ es analíticamente conjugada a una rotación irracional}\}$ , entonces,

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{m(E_B)}{B} = 1,$$

donde  $m$  es la medida de Lebesgue del conjunto considerado.

**Teorema 22** Sea  $E^B = \{(a, b) : a \in [0, 1], b \in [B, \frac{1}{2\pi}]\}$ , tal que  $f(x)$  es

analíticamente conjugada a una rotación irracional } entonces,

$$\lim_{B \rightarrow \frac{1}{2\pi}} \frac{m(E^B)}{\frac{1}{2\pi} - B} = 0.$$

El siguiente resultado por Herman es también muy interesante

**Definición 37** Dados  $u, v \in [0, 1]$  y  $b$  fijo sea,

$$M(b, u, v) = m \{ a \in [u, v] : f_{a,b} \text{ es } C^{r-2} \text{ - conjugada a una rotación irracional} \},$$

**Teorema 23** Para cualesquiera  $u, v \in [0, 1]$  tales que  $\rho_b(u) \neq \rho_b(v)$ , se tiene que  $M(b, u, v) > 0$ .

Herman generaliza el Teorema 21 para conjugaciones no analíticas.

Sea fija  $\beta > 0$  pequeña ( $\beta \leq 10^{-100}$ ) y  $\beta' > \beta$ ;  $\beta' = \frac{3}{2}\beta$ .

**Teorema 24** Sea  $r \geq 2 + 2\beta$  y  $\{(F_{a,b})_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de representaciones de  $C^r$  - difeomorfismos de la circunferencia tal que  $(F_{a,b})_n \rightarrow Id$  en la  $C^{2n+2\beta}$ -topología. Entonces

$$M(F_{a,b}) = m \{ a \in [0, 1] : F_{a,b} \text{ es } C^{r-1-\beta'} \text{ - conjugada a una traslación irracional} \} \rightarrow 1$$

es decir, la medida de Lebesgue del conjunto considerado tiende a 1.

## 6.2 Lenguas Racionales (Regiones de Sincronización)

Las Lenguas de Arnold están definidas en términos del número de rotación y pierde sentido cuando entramos a una región del espacio de parámetros donde el número de rotación no está definido. Por ejemplo, para la familia clásica esto ocurre cuando  $b > \frac{1}{2\pi}$ , ya que en esta región las funciones no son inyectivas.

Algunos autores han ofrecido generalizaciones del concepto de lengua (e.g.: Glass y Belair. *Continuation of Arnold Tongues in Mathematical Models of Periodically Forced Biological Oscillations* [15]) para abarcar regiones más amplias del espacio de parámetros, en las que el problema científico de interés requiere ser analizado, pero el número de rotación no está definido para

las funciones del modelo. A continuación nosotros extenderemos el concepto de lengua de una manera natural y útil para poder realizar las aplicaciones al estudio de osciladores periódicamente forzados que se discutirán en el capítulo 7. Esta generalización (Guzmán, Carrillo y Ongay. *Dinámica de las Iteraciones de la Función de Arnold* [19]) no está restringida a homeomorfismos sino que aplica para definir las *lenguas racionales* de cualquier familia paramétrica de funciones.

**Definición 38**  $R_{q,p}$  es la cerradura del conjunto de puntos,  $\lambda$ , en el espacio de parámetros, tales que la familia paramétrica de funciones de la circunferencia,  $f_\lambda$ , tiene una órbita periódica atractora de período  $q$  y envuolencia  $p$ . Al conjunto  $R_{q,p}$  se le llama *lengua racional* (o región de sincronización)  $q : p$ .

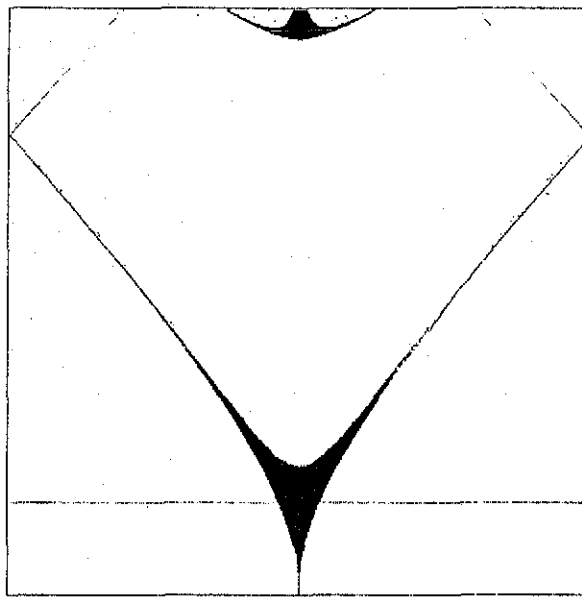


Figura 42: Lenguas Generalizada  $R_{2,1}$

Una ventaja de las lenguas racionales es que son accesibles computacionalmente. El teorema que ofrecemos a continuación (Guzmán, Carrillo y Ongay. *Dinámica de las Iteraciones de la Función de Arnold* [19]), permite el diseño de algoritmos para el cálculo de lenguas racionales, basados en la determinación numérica de órbitas periódicas.

**Teorema 25** Sea  $f$  un endomorfismo de grado uno de la circunferencia.  $f$  tiene una órbita de característica  $(q, p)$  si y sólo si para toda representación continua  $F$  y todo entero positivo  $n$  existen  $t \in \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{Z}^+$  tales que,

$$\begin{aligned} F^m(t) - [F^m(t)] &= F^n(t) - [F^n(t)], & (10) \\ m - n &= q, & y \\ [F^m(t)] - [F^n(t)] &= p. \end{aligned}$$

*Demostración:*

Dada una representación continua  $F$  de  $f$ , la órbita  $\mathcal{O}$  de característica  $(q, p)$  implica por el teorema 10, que existe  $\bar{m} \in \mathbb{Z}$ , dependiente de  $F$ , tal que,

$$F^q(t) = t + \bar{m},$$

para todo  $t \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$  y  $\bar{m} = p \pmod{q}$ . Entonces, dado  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $m = n + q$  tenemos que,

$$\begin{aligned} F^m(t) - [F^m(t)] &= F^q(F^n(t)) - [F^q(F^n(t))] \\ &= F^n(t) + \bar{m} - [F^n(t) + \bar{m}] \\ &= F^n(t) + \bar{m} - [F^n(t)] - \bar{m} \\ &= F^n(t) - [F^n(t)], \end{aligned}$$

pues  $F^n(t) \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$ . Ahora,

$$\begin{aligned} [F^m(t)] - [F^n(t)] &= [F^q(F^n(t))] - [F^n(t)] \\ &= [F^n(t) + \bar{m}] - [F^n(t)] = \bar{m}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si para alguna  $F$  se cumplen las condiciones dadas por 10,

$$F^{n+q}(t) - [F^{n+q}(t)] = F^n(t) - [F^n(t)],$$

implica que,

$$\begin{aligned} F^{n+q}(t) &= F^n(t) + [F^{n+q}(t)] - [F^n(t)] \\ &= F^n(t) + \bar{m}, \end{aligned}$$

con  $p = \bar{m} \pmod{q}$  y de esto se sigue por el teorema 10, que  $f$  tiene una órbita periódica de característica  $(q, p)$ . ■

En la siguiente Figura se puede observar otras regiones de biestabilidad en el espacio de parámetros.

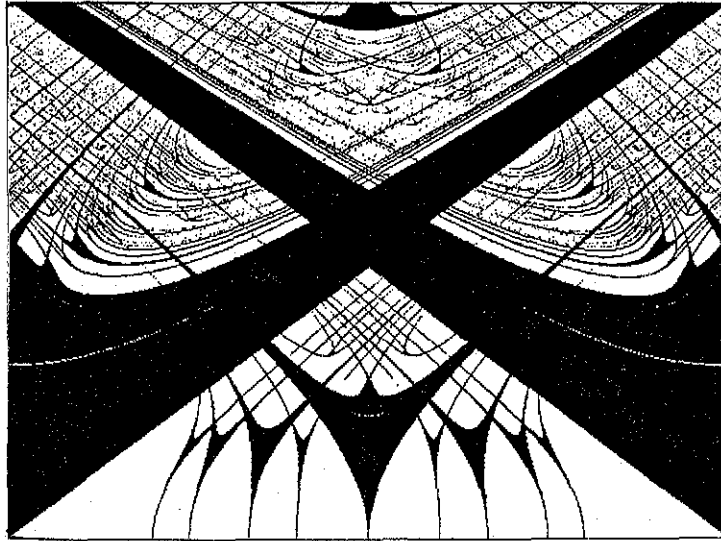


Figura 43: Lenguas Generalizadas.

**Observación 32** *Los experimentos computacionales y el análisis que hemos hecho, nos hacen pensar que: Dadas dos Lenguas de Arnold Generalizadas*

$R_{q_1:p_1}, R_{q_2:p_2}$

(i) *Para todo  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$  se tiene que  $R_{q_1:p_1} \cap R_{q_2:p_2} \neq \emptyset$ , es decir pueden coexistir atractores periódicos de distintas características.*

(ii) *Ningún valor en el espacio de parámetros cumple que,  $R_{q_1:p_1} \cap R_{q_2:p_2} \cap R_{q_3:p_3} \neq \emptyset$  para  $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2} \neq \frac{p_3}{q_3}$ .*

### 6.3 Lenguas de Boyland

Consideramos una familia,  $f_\lambda$ , de endomorfismos de grado uno y su correspondiente intervalo de rotación  $I(f_\lambda) = [\rho_1, \rho_2]$ . En su artículo "Bifurcations of circle Maps: Arnold Tongues, Bistability and Rotation Intervals. Commun. Math. Phys." [5], Philip L. Boyland define las siguientes regiones en el espacio de parámetros:

**Definición 39** *La región  $T_r$  (Lengua de Boyland) consta de aquellos puntos  $\lambda$  en de la lengua  $T_r$ , donde el intervalo de rotación contiene al número real  $r$ :*

$$T_r = \{\lambda : r \in I(f_\lambda)\}.$$

Las regiones  $S_{1,r}$  y  $S_{2,r}$  de Boyland constan de aquellos puntos  $\lambda$  en el espacio de parámetros donde uno de los extremos del intervalo de rotación es el número real  $r$  :

$$S_{i,r} = \{(a, b) : r = \rho_i(f_{a,b})\}, \quad i = 1, 2$$

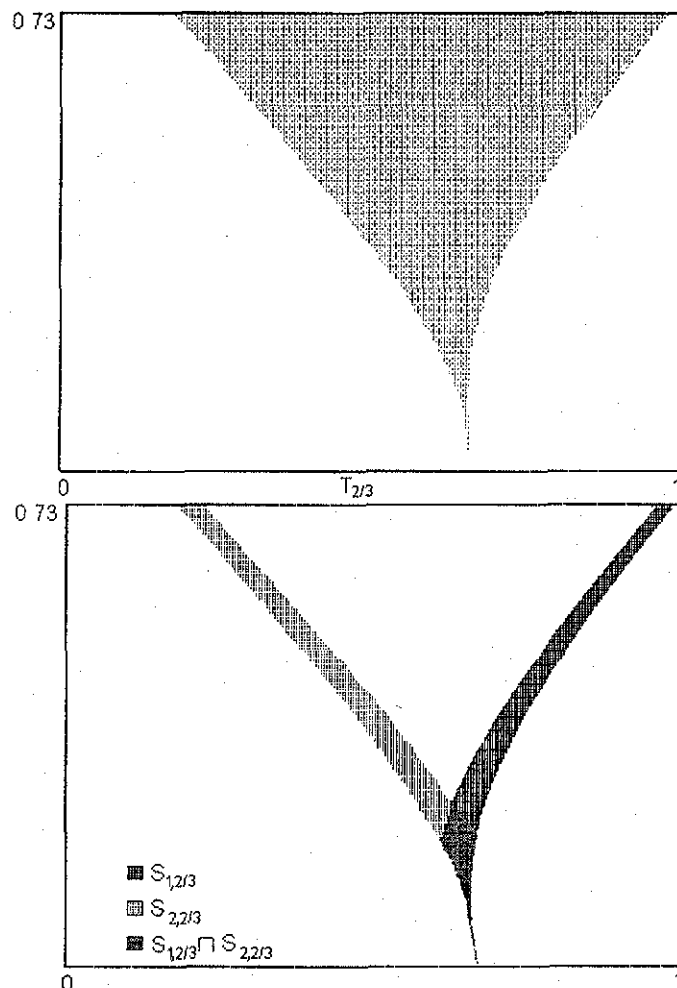


Figura 44: Lengua de Boyland  $T_{2/3}$  y regiones  $S_{1,2/3}$ ,  $S_{2,2/3}$ , para la Familia Clásica.

En la zona de homeomorfismos  $L_r = T_r$  y si  $r$  es racional las lenguas racionales coinciden con estas lenguas ( $L_{p/q} = R_{q,p} = T_{p/q}$ ). Fuera de la

zona de homeomorfismos, las lenguas racionales  $R_{q,p}$  son subconjuntos de las lenguas de Boyland:  $R_{q,p} \subset T_{p/q}$ .

**Observación 33** *Los puntos en la intersección de las regiones  $S_{1,r}$  y  $S_{2,s}$ , con  $r, s \in \mathbb{R}$   $r < s$ , tienen intervalo de rotación  $[r, s]$ .*

Por ejemplo, en la siguiente figura tenemos el caso para regiones en lenguas racionales, la región sombreada, denota los puntos donde el intervalo de rotación es  $[\frac{p}{q}, \frac{m}{n}]$ .

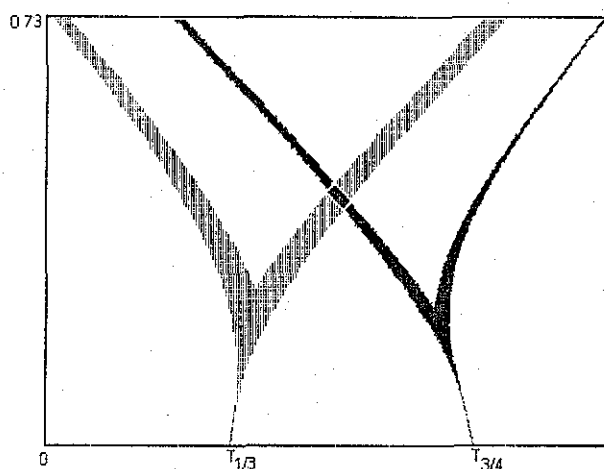


Figura 45: El intervalo de rotación, de la región de intersección entre  $T_{1/3}$  y  $T_{3/4}$ , es  $[1/3, 3/4]$ .

## 6.4 Familias Biparamétricas

Generalizando las propiedades cualitativas de la familia clásica, Boyland [5] considera la familia,  $f_{a,b}$ , de endomorfismos, de grado uno, de la circunferencia, con representación continua  $F_{a,b}$ :

$$F_{a,b}(t) = t + a + bp(t)$$

donde  $t, a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in [0, \infty)$  y  $p(t)$  es tal que:

1.  $p(t)$  continua y periódica de período  $\tau$ , tal que:  $\max p(t) = 1 = -\min p(t)$ ,  $p(0) = 0 = p(1)$ .



2.  $f_{a,b}$  es un endomorfismo monótono creciente para  $b \leq \frac{1}{2\pi}$ .
3.  $f_{a,b} \in \mathcal{A}$ , para todo  $b \geq \frac{1}{2\pi}$ .
4. Para  $0 < b < \frac{1}{2\pi}$ ,  $F_{a,b}^q(t) \neq R_p$  siempre que  $\rho(f_{a,b}) = p/q$ .

**Teorema 26** Sean  $r$  un número real arbitrario,  $\alpha$  irracional y  $\frac{p}{q}$  racional.

(i) Para  $i = 1$  o  $2$ , las funciones  $\Phi_{i,r}$  y  $\Psi_{i,\frac{p}{q}}$  son Lipschitz con constante  $K = 1$ .

(ii)  $\Phi_{2,r} \leq \Phi_{1,r}$ ,  $\Phi_{2,\frac{p}{q}} \leq \Psi_{1,\frac{p}{q}}$  y  $\Psi_{2,\frac{p}{q}} \leq \Phi_{1,\frac{p}{q}}$ . Cuando  $b > 0$ ,  $\Psi_{1,\frac{p}{q}} \leq \Phi_{1,\frac{p}{q}}$ ,  $\Phi_{2,\frac{p}{q}} \leq \Psi_{2,\frac{p}{q}}$

(iii)  $T_r = \{(a, b) : \Phi_{2,r}(b) \leq b \leq \Phi_{1,r}(b)\}$

*Demostración*

(i) Fijamos un  $\frac{p}{q}$ . Probaremos los resultados para  $\Phi_{1,\frac{p}{q}}$ .

Supongamos que existe un  $b_0$ , donde  $\Phi_{1,\frac{p}{q}}$  no es Lipschitz con constante 1, entonces existe un  $b_1$  tal que, los puntos  $(b_0, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0))$  y  $(b_1, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1))$ , están en una línea con pendiente  $\bar{m} > 1$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que,  $\Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0) > \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)$ . Entonces existe un  $\bar{c}$  con,

$$\bar{m}b_0 + \bar{c} = \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0), \text{ y } \bar{m}b_1 + \bar{c} = \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)$$

Sean  $m = \frac{1}{\bar{m}}$  y  $c = -\frac{\bar{c}}{\bar{m}}$ , tenemos que,

$$mb_0 + c = \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0), \text{ y } mb_1 + c = \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)$$

Ahora como  $|m| < 1$  y  $|p(t)| \leq 1$ , ciertamente  $mp(t) > -1$  y tal que,

$$mp(t) > \frac{\Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1) - \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0)}{\Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0) - \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)}$$

Por lo tanto, tenemos que,

$$t + \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0) + (\bar{m}b_0 + \bar{c})p(t) < t + \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1) + (\bar{m}b_1 + \bar{c})p(t),$$

lo cual nos dice que,  $F_{b_0, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0)} < F_{b_1, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)}$  y tal que  $F_{1, b_0, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0)} < F_{1, b_1, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)}$

Tenemos que,

$$F_{1, b_0, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_0)}^q < F_{1, b_1, \Phi_{1,\frac{p}{q}}(b_1)}^q$$

por el lema 7, pero por definición  $F_{1,b_1,\Phi_1,\frac{p}{q}}^q \leq R_p$  y  $F_{1,b_0,\Phi_1,\frac{p}{q}}^q < R_p$ , entonces,

$$\rho \left( F_{1,b_0,\Phi_1,\frac{p}{q}}^q \right) < \frac{p}{q}$$

lo cual es una contradicción. La demostración para las demás funciones es similar.

(ii) Primero mostraremos que,

$$\Psi_{2,\frac{p}{q}} \leq \Phi_{1,\frac{p}{q}}$$

Para simplificar notación evitaremos la dependencia de  $\frac{p}{q}$ , hagamos  $\rho(F_{a,b}) = \rho(a,b)$ . Supongamos lo contrario,

$$\Psi_2 > \Phi_1,$$

como  $\Phi_1$ , es el máximo valor de  $a$ , con  $\rho_1(a,b) = \frac{p}{q}$ , usando la monotonía de  $\rho_1$ , tenemos que,

$$\frac{p}{q} = \rho_1(\Phi_1(b), b) < \rho_1(\Psi_2(b), b) \leq \rho_2(\Psi_2(b), b) = \frac{p}{q},$$

una contradicción. La demostración para  $\Phi_{2,\frac{p}{q}} \leq \Psi_{1,\frac{p}{q}}$ ,  $\Phi_{2,\alpha} \leq \Phi_{1,\alpha}$ .

(iii) Para  $i = 1, 2$ , elegimos  $(a,b)$  con  $\Phi_2(b) \leq a \leq \Phi_1(b)$ .  $\Phi_1(b) \geq a$  implica que,

$$\alpha \leq \rho_1(\Phi_1(b), b) \geq \rho_1(a, b).$$

Similarmente,  $\Phi_2(b) \leq a$  implica que,

$$\alpha \leq \rho_2(a, b)$$

tal que  $\alpha \in \rho(F_{a,b})$ , es decir,  $(a,b) \in T_\alpha$

Ahora como  $\Phi_1(b)$ , es el máximo  $a$ , (si  $r$  es irracional, es el único), con  $\rho_1(a,b) = \alpha$ , tenemos que,

$$a > \Phi_1(b),$$

implica que  $\rho_1(a,b) > \alpha$ , tal que  $\alpha \notin T_\alpha$  o  $(a,b) \notin T_\alpha$ . Similarmente,  $a < \Phi_2(b)$ , también implica que  $(a,b) \notin T_\alpha$ . ■

Una consecuencia del lema 7, es el siguiente lema, que describe las convergencias de las funciones dadas por el lema 7:

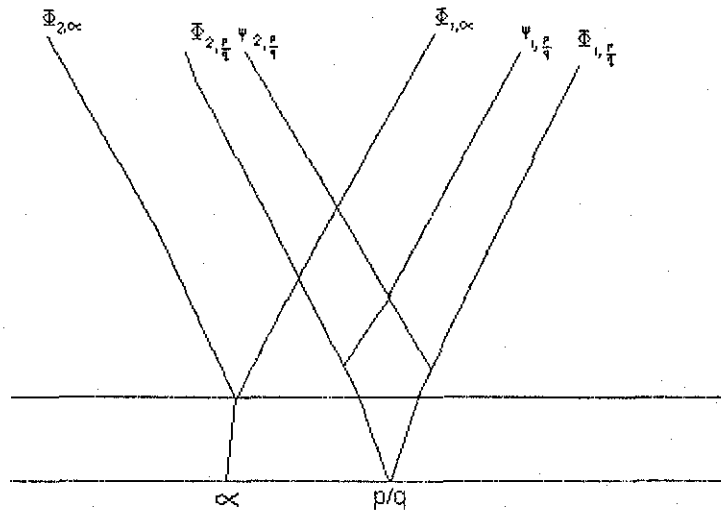


Figura 46: Funciones  $\Phi_{i,p/q}$ ,  $\Psi_{i,p/q}$  y  $\Phi_{i,\alpha}$ .

**Lema 8** Sean  $p/q, \alpha$  y  $r$  racional, irracional y un número real arbitrario, respectivamente.

- (i) Para  $r > p/q$ ,  $\Phi_{1,r} \searrow \Phi_{1,p/q}$ , y  $\Phi_{2,r} \searrow \Psi_{2,p/q}$ .
- (ii) Para  $r < p/q$ ,  $\Phi_{1,r} \nearrow \Psi_{1,p/q}$ , y  $\Phi_{2,r} \nearrow \Phi_{2,p/q}$ .
- (iii) Para  $r > \alpha$  y  $i = 1, 2$ ,  $\Phi_{i,r} \searrow \Phi_{i,\alpha}$ .
- (iv) Para  $r < \alpha$  y  $i = 1, 2$ ,  $\Phi_{i,r} \nearrow \Phi_{i,\alpha}$ .

Usando la continuidad de las funciones, sean  $r, s \in \mathbb{R}$ ,  $p/q, m/n \in \mathbb{Q}$ , con  $r > p/q > s > m/n$ . En cada uno de los siguientes casos existe un  $b > \frac{1}{2\pi}$  tal que, lo siguiente se cumple:

- (i)  $\Phi_{2,r}(b) = \Phi_{1,s}(b)$ .
- (ii)  $\Psi_{2,p/q}(b) = \Phi_{1,s}(b)$ .
- (iii)  $\Psi_{1,p/q}(b) = \Phi_{2,r}(b)$ .
- (iv)  $\Psi_{1,m/n}(b) = \Psi_{2,p/q}(b)$ .
- (v)  $\Psi_{1,p/q}(b) = \Psi_{2,p/q}(b)$ .

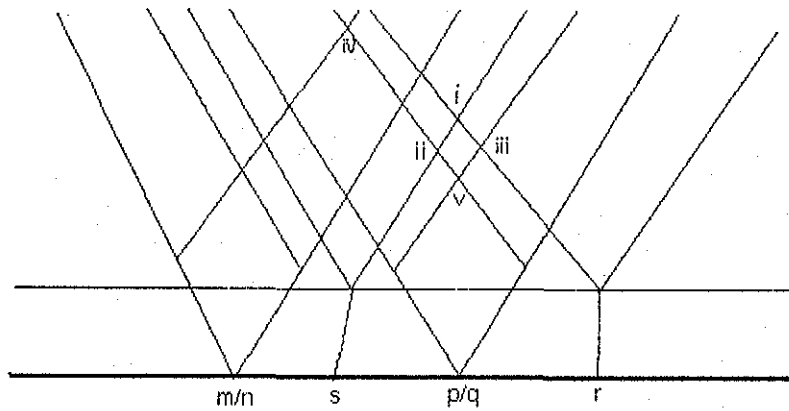


Figura 47: Cruces de las lenguas de boyland

**Proposición 17** [5] Sea  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $p/q \in \mathbb{Q}$ .

- (i) Si  $p(x)$  es  $C^2$  entonces para  $b > \frac{1}{2\pi}$ ,  $\Phi_{2,\alpha} > \Phi_{1,\alpha}$ .
- (ii) Si  $p(x)$  es  $C^1$  entonces dado un  $p/q$ , existe  $b_0 > \frac{1}{2\pi}$  tal que,

$$\begin{aligned} \Psi_{1,p/q}(b) &= \Phi_{2,p/q}(b), \\ \Phi_{1,p/q}(b) &= \Psi_{2,p/q}(b), \end{aligned}$$

para  $0 \leq b \leq b_0$ .

Finalmente, tenemos las lenguas de Boyland.

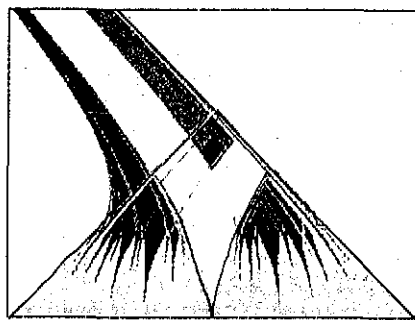


Figura 48: Lenguas de Boyland en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 7 APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE UN MODELO MECÁNICO DE NEURONA

En varios campos de la ciencia se estudian fenómenos en los cuales se dan comportamientos periódicos, pues después de cierta evolución el sistema retorna a su configuración original. A tales sistemas se les conoce como "osciladores". Un problema fundamental de la teoría de oscilaciones no lineales, es investigar la respuesta de estos osciladores a un forzamiento periódico. En algunos de estos osciladores es característica la existencia de algún proceso de acumulación que hace que una magnitud,  $W(t)$ , crezca hasta alcanzar un valor umbral,  $W_r$ ; al rebasar este umbral, el sistema produce una súbita descarga para liberar la magnitud acumulada  $W_r$  y el proceso se repite una y otra vez de la misma forma. Existen dispositivos mecánicos, circuitos eléctricos, sistemas biológicos y muchos otros sistemas no lineales en los que se presentan este tipo de fenómenos. A este tipo de sistemas se les conoce como *osciladores de integración y disparo* o *osciladores de relajación*.

En este capítulo analizaremos un dispositivo mecánico que constituye un modelo de neurona apropiado para estudiar las propiedades de sincronización y respuesta caótica de una neurona sujeta a una estimulación periódica. En la secuela veremos que las propiedades dinámicas de esta neurona mecánica se pueden conocer estudiando las iteraciones de una función de la circunferencia y aplicando la teoría cualitativa discutida en los capítulos anteriores.

Con el fin de producir un contexto, antes de discutir la neurona mecánica, recordaremos algunos antecedentes históricos de los modelos de osciladores de integración y disparo y revisaremos algunas propiedades básicas de las células nerviosas, que ellos modelan.

### 7.1 Osciladores de Integración y Disparo.

Raleigh (1896) y más tarde van der Pol (1928), usaron ecuaciones diferenciales de segundo orden para estudiar las oscilaciones de sistemas no lineales. Raleigh estaba interesado en las vibraciones que tienen lugar en algunos instrumentos musicales (e.g.: una boquilla de un clarinete o la cuerda de violín) y van der Pol en circuitos eléctricos con tubos al vacío, principalmente. Baltasar van der Pol propuso la ecuación,

$$\ddot{v} + \alpha(v - 1)\dot{v} + \omega^2 v = 0, \quad (11)$$

y observó que las oscilaciones del sistema convergen a un ciclo límite que es de tipo senoidal, cuando  $\alpha$  es pequeño comparado con  $\omega$ , pero se aproxima por una onda cuadrada cuando  $\alpha$  es grande, que van der Pol llamó *oscilaciones de relajación*. Los osciladores de relajación son adecuados para sistemas de control, en los cuales un estímulo debe producir una respuesta de amplitud fija pero frecuencia adaptable.

Un ejemplo de oscilaciones de relajación es el latido cardiaco: es conocido que cada contracción del ventrículo es desatada por un impulso nervioso generado en el nodo senoatrial que primero produce la contracción de la aurícula. van der Pol y van der Mark propusieron un circuito eléctrico (compuesto de una pareja de osciladores de relajación) como un modelo cualitativo del modelo cardiaco. Ellos reportaron que por ajustar el acoplamiento de un oscilador a otro, estimulaciones convincentes de ambos latidos cardíacos de ciertos desórdenes fueron observados.

Una conexión entre las células nerviosas y las ecuaciones de van der Pol fue descubierto independientemente por FitzHugh (1961). FitzHugh sugirió una variante de la ecuación de van der Pol como una simplificación del exitoso modelo de respuesta del nervio del axón desarrollado por Hodgkin y Huxley (1952) quienes, por este trabajo obtuvieron el premio Nobel de Medicina y Fisiología en 1963, abriendo un horizonte de investigación que sigue vigente en la actualidad.

Además de los impulsos nerviosos de las neuronas y los latidos del corazón, existen una gran variedad de fenómenos, observables en diferentes escenarios de interés científico o tecnológico, que pueden ser considerados osciladores de integración y disparo. En todos estos sistemas se observa:

(1) La presencia de algún proceso de acumulación lenta y descarga en una escala de tiempo mucho más rápida;

(2) Este proceso es concomitante a fenómenos de excitabilidad y oscilaciones no lineales (de relajación).

(3) El proceso se repite siempre de una misma manera y constituye un estereotipo genérico del sistema.

(4) Por su brevedad respecto al proceso de carga el proceso estereotípico puede ser considerado instantáneo y entonces la evolución del sistema puede describirse por la secuencia de tiempos  $\{t_n\}$  en que estos eventos instantáneos ocurren.

## 7.2 Estructura y Función de una Neurona.

Entender el funcionamiento del sistema nervioso es uno de los proyectos más ambiciosos que ha abordado la comunidad científica. La Neurociencia involucra diversas disciplinas: desde las que adoptan una visión integral de sus capacidades, como la Filosofía, la Biología Evolutiva, la Psicología y la Medicina, hasta la Genética, la Biofísica y la Fisicoquímica que analizan sus componentes estructurales en escalas microscópicas, que varían desde unas cuantas células hasta átomos individuales.

Los órganos que integran el sistema nervioso están formados por el tejido nervioso, el cual, a su vez, está formado por células altamente especializadas en la conducción de impulsos eléctricos, denominadas *neuronas*. Existen además otras células de menor importancia fisiológica, llamadas células gliares que constituyen la neuroglia y sirven de sostén y protección de las neuronas. El cerebro humano tiene del orden de  $10^{11}$  neuronas.

Las neuronas están formadas por tres partes fundamentales que son: *cuerpo celular o soma, dendritas, y axón*. El cuerpo celular o soma tiene una forma más o menos esférica o piramidal, que presenta un núcleo grande, con un nucleolo prominente, en donde actúan los mecanismos bioquímicos sintetizadores de enzimas y ocurren los demás procesos esenciales para la vida de la célula. Las dendritas o prolongaciones cortas son los delgados brazos que se ramifican profusamente, formando una red que rodea a la célula constituyen los canales físicos principales por los cuales la neurona puede recibir señales provenientes de otras células. El axón es una fibra cuya longitud puede variar en el rango de milímetros a metros y es el camino por el cual viajan las señales que la neurona envía a otras partes del sistema nervioso. *Sinapsis* es el nombre que recibe la unión entre dos neuronas. La comunicación a través de las sinapsis se produce por medio de agentes químicos llamados *neurotransmisores*.

El “*disparo*” de un *impulso nervioso* depende de la actividad simultánea de cientos de sinapsis en la neurona receptora. Algunas sinapsis son excitatorias: promueven que se dispare un impulso; otras son inhibitorias: cancelan las señales que de otra manera excitarían a la célula.

### 7.2.1 Exitabilidad

El impulso nervioso se desarrolla como respuesta a una estimulación eléctrica de cierta magnitud mínima, llamada *umbral*. También se le conoce como

*potencial de acción*. Suele originarse en el cuerpo celular en respuesta a la actividad de las sinapsis dendríticas. Al iniciarse, el voltaje a través de la membrana del axón aumenta localmente (en la base del axón).

El fundamento físico-químico del impulso nervioso está en las diferencias de concentración de los iones de sodio y potasio a ambos lados de la membrana. Esta situación crea una diferencia de potencial de aproximadamente -70 mv (milivolts), negativos con respecto al exterior de la célula, que se conoce como *potencial de reposo*. El fenómeno se observa midiendo la actividad eléctrica en un punto específico del axón, utilizando un osciloscopio. El paso de un impulso nervioso se manifiesta como un pico de voltaje, llamado potencial de acción. En la preparación clásica del axón gigante del calamar, durante el punto de acción, el voltaje a través de la membrana celular crece bruscamente desde -70 mv hasta +40 mv, aproximadamente; luego decrece hasta unos -90 mv para después recuperar lentamente el nivel original de -70 mv. Esta última etapa, en la cual se recupera el voltaje de reposo lentamente es llamada *período refractario*, pues mientras dura, no es posible que se registre otro pico de voltaje. Todo el proceso dura de 1 a 2 milisegundos.

El potencial de acción es un mecanismo eficiente en términos de la transmisión de información ya que no permite que la señal se deforme o se amortigüe, pues se propaga como una onda viajera (amplitud y forma fijas).

### 7.2.2 Respuesta Periódica

Las neuronas son capaces de generar potenciales de acción con frecuencias muy diversas, desde menos de uno hasta varios cientos de disparos por segundo. Esto es muy relevante porque todos los impulsos tienen la misma amplitud, y por lo tanto la información que transmite una neurona está encriptada en el número de señales que se producen por unidad de tiempo. Esta codificación en frecuencia implica que, por lo menos en algunos casos, un estímulo más intenso es traducido en una mayor frecuencia de disparo: la neurona actúa como un transductor. En ausencia de estimulación externa, algunas células nerviosas (*marcapasos neuronales*) pueden responder espontáneamente con una ráfaga o tren de potenciales de acción que se repite periódicamente y es conocida como actividad tónica. Esta actividad tónica puede producirse también, al aplicar una corriente constante, en células ordinarias y se observa experimentalmente que la frecuencia de la respuesta tónica es una función creciente de la intensidad del estímulo aplicado.



### 7.3 Neurona Mecánica

El voltaje a través de la membrana celular es una variable fisiológica importante. El fenómeno de excitabilidad de las células nerviosas se caracteriza por: i) la existencia de un potencial de reposo y un potencial umbral por debajo del cual no hay respuesta activa; ii) una respuesta del tipo todo o nada y un iii) período de recuperación o período refractario dentro del cual no es posible descargar ningún potencial de acción.

El dispositivo mecánico, conocido como “la neurona mecánica”, reproduce estas tres características. Éste tiene un comportamiento que es cualitativamente análogo al de una célula nerviosa.

#### 7.3.1 Oscilaciones Libres de la Neurona Mecánica

La neurona mecánica [6] consiste de una balanza o sube y baja que en uno de sus extremos tiene un contrapeso fijo que toca el plano horizontal y del otro lado un recipiente con agua la cual está siendo vertida a una razón constante. Cuando el peso del agua en el recipiente es mayor que el contrapeso, el brazo de la balanza de lado del recipiente desciende hasta el piso, así el agua se vacía instantáneamente, luego, el brazo del contrapeso vuelve a bajar y el proceso reinicia.

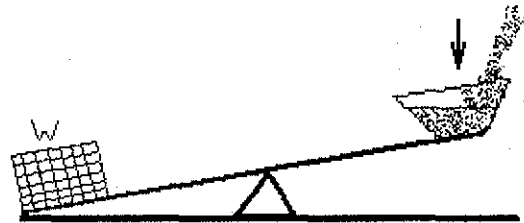


Figura 49: Neurona Mecánica.

En la analogía de la neurona mecánica, las variaciones del potencial de membrana de la célula se corresponde con las variaciones de la cantidad de agua en el recipiente de la balanza y los potenciales de acción quedan representados por las descargas del recipiente. En este análogo mecánico se manifiestan descargas “todo o nada”, umbral de disparos y período refractario.

### 7.3.2 Oscilaciones Forzadas de la Neurona Mécanica

En la neurona mecánica se verifica también la actividad tónica que tienen las neuronas en respuesta a la aplicación de una corriente constante y, como en las neuronas biológicas, la frecuencia de las descargas crece con la intensidad de la corriente aplicada. Otro asunto de interés biológico (para comprender el efecto que tiene la estimulación de una célula sobre otra) es estudiar la forma en que las neuronas responden a un estímulo, que ya no es constante, pero varía de una forma regular predeterminada (periódica). Esto implica conocer las series de tiempos en los que la célula producirá los potenciales de acción en respuesta al estímulo externo.

El estudio de analogías, como la neurona mecánica, es de gran importancia científica. El estudio de modelos simples es de gran utilidad para el análisis de problemas complejos, como el estudio de la respuesta de una neurona a una estimulación periódica. Gracias a los resultados que se han obtenido estudiando simples analogías, se ha podido avanzar en la comprensión de los diferentes tipos de respuesta que las células pueden tener ante la aplicación de diferentes estimulaciones.

Para estudiar el problema del forzamiento periódico, consideremos la misma balanza, pero ahora con un elevador debajo del recipiente de agua. Las descargas de agua se producen ahora a diferentes alturas, según la posición en que esté el elevador en el momento que estas se producen, subiendo con diferente cantidad de agua, de manera que los tiempos entre descargas consecutivas serán diferentes.

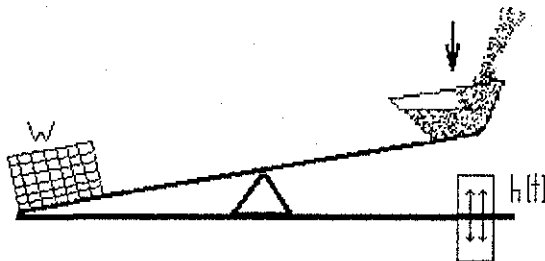


Figura 50: Neurona Mécanica Forzada

Nos interesa el caso en el que se aplica un forzamiento periódico al elevador. Se tiene entonces la interacción de dos osciladores, que tienen dos

períodos naturales diferentes, y naturalmente surge el interés por investigar si la acción combinada de ellos producirá un movimiento periódico. ¿Cuál será su período del sistema forzado?, ¿El período de las oscilaciones libres de la balanza? o ¿El período del elevador? ¿Podrán combinarse estos dos diferentes ritmos para producir un tercer ritmo de período diferente?

### 7.3.3 Modelo Geométrico de la Neurona Mecánica

Las variables involucradas en el sistema forzado son:  $W_u$  el peso del contrapeso;  $I$ , la intensidad de la corriente de agua;  $W_r$ , el nivel residual de agua (es decir, la cantidad de agua que queda en la cubeta después de la descarga) y  $W(t)$  el peso del agua en la cubeta al tiempo  $t$ . Si suponemos que en  $t = 0$  la cubeta se empieza a llenar a partir de una cantidad residual de agua, que tiene un peso  $W_r$ , entonces  $W(t) = It + W_r$ , y la serie de tiempos de las descargas (disparos de impulsos eléctricos) se obtiene fácilmente por el procedimiento gráfico que está indicado en la figura 51. De este análisis resulta que la serie de tiempos de descarga o secuencia de tiempos de disparos está dada recursivamente por la fórmula

$$t_{n+1} = t_n + T,$$

o bien, por la fórmula

$$t_n = t_0 + nT,$$

donde  $t_0$  representa la condición o tiempo inicial y  $T$  el intervalo (constante) entre disparos.

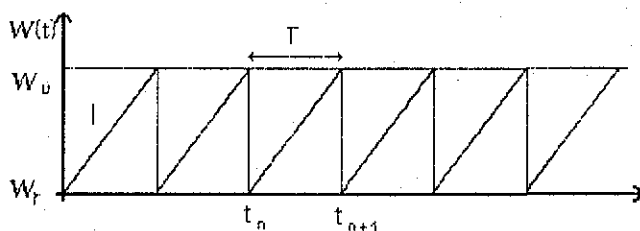


Figura 51: Oscilaciones libres de la neurona mecánica.

Para modelar las oscilaciones forzadas de la neurona mecánica. Suponemos que el elevador se mueve de tal manera que el peso de la cantidad de agua

residual está dado por la función periódica, de período uno,  $h(t)$  Con referencia a la figura 52 hacemos los siguientes cálculos:

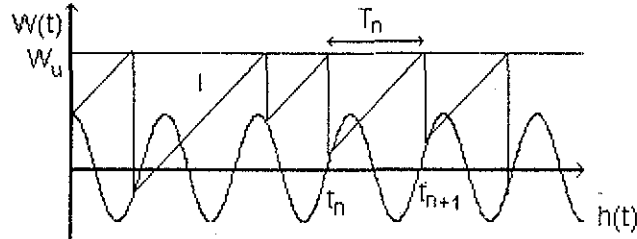


Figura 52:

$$I = \frac{W_u - h(t_n)}{T_n},$$

$$T_n = \frac{W_u - h(t_n)}{I} = t_{n+1} - t_n.$$

Por lo tanto, la secuencia de tiempos de disparo del oscilador, está dada recursivamente por :

$$t_{n+1} = t_n + \frac{W_u}{I} - \frac{h(t_n)}{I}. \quad (12)$$

Así pues, las secuencias de disparos están determinadas por las iteraciones del sistema dinámico discreto generado por la función,

$$F(t) = t + \frac{W_u}{I} - \frac{h(t)}{I}. \quad (13)$$

**Observación 34** Si  $h(t)$  es periódica, de período 1, la función  $F(t)$  representa una función, de grado uno, de la circunferencia:

$$\begin{aligned} F(t+1) &= t+1 + \frac{W_u}{I} - \frac{h(t+1)}{I} \\ &= t+1 + \frac{W_u}{I} - \frac{h(t)}{I} = F(t) + 1. \end{aligned}$$

La función de la circunferencia,  $f : S \rightarrow S$ , representada por  $F(t)$  es llamada la función de disparo de disparo del oscilador. Si identificamos a  $S$  con el intervalo unitario con los extremos identificados, tenemos que

$$f(x) = F(x) \bmod 1, \forall x \in [0, 1).$$

En general, para algunos valores de los parámetros, las funciones de disparo de un oscilador de integración y disparo pueden ser discontinuas [25], [28] aún cuando el forzamiento aplicado sea continuo. Por el contrario, de la ecuación 13, vemos que para la neurona mecánica esto no puede ocurrir.

**Observación 35** *La función de disparo de la neurona mecánica es un endomorfismo de grado uno de la circunferencia.*

## 7.4 Sincronización y Atractores Periódicos.

Determinar comportamientos organizados es un problema fundamental en el estudio de osciladores forzados. En general la respuesta de un oscilador no lineal a la estimulación externa puede no tener una estructura ordenada e incluso ser completamente caótica. Un tipo de organización es el comportamiento sincronizado. En la neurona mecánica periódicamente estimulada las oscilaciones de la balanza pueden sincronizarse respecto a las del elevador. Esto significa que las descargas ocurren siempre en un conjunto finito y fijo de fases de ciclo del elevador. Por ejemplo, podría suceder que se produjeran tres descargas cada dos ciclos del elevador y que estas descargas siempre ocurran cuando el elevador está en tres posiciones fijas (e.g.: en la altura máxima, en medio y en su altura mínima). Asociadas al estudio de la sincronización surgen varias cuestiones que requieren ser investigadas:

¿Cómo definir matemáticamente lo que es un comportamiento rítmico o sincronizado? ¿A qué deben su existencia los comportamientos sincronizados? ¿Qué tipos de comportamientos sincronizados son posibles? ¿Por qué? ¿Bajo que condiciones (en los parámetros o condiciones iniciales del sistema) se produce cada uno de los distintos tipos posibles de sincronización? ¿Qué tipos de comportamientos sincronizados no pueden darse en la Neurona Mecánica?

### 7.4.1 Secuencias Rítmicas y Comportamientos Sincronizados

Precisemos lo que entendemos por un comportamiento sincronizado y cómo este concepto puede expresarse en términos de las secuencias de disparo del oscilador. La discusión de esta sección puede ampliarse para que aplique en un contexto mucho más general, pero, para los propósitos de este trabajo, nos limitaremos a la consideración del oscilador de integración y disparo conocido como "Neurona Mecánica".

La dinámica de la neurona Mecánica periódicamente estímulada está determinada por la sucesión  $\{t_n\}$  de tiempos de disparo (descargas). Esta sucesión puede ser rítmica o desordenada (arrítmica).

**Definición 40** Sea  $\{t_n\}$  una sucesión de números reales. Si existen  $q, p \in \mathbb{Z}^+$  (mínimos) tal que

$$t_{n+q} = t_n + p, \quad \text{para todo } n$$

entonces  $\{t_n\}$  es una secuencia rítmica  $(q, p)$  y decimos que  $q$  es su período y  $p$  su duración. Si no existen  $q, p \in \mathbb{Z}^+$  que cumplan esta definición decimos que la sucesión  $\{t_n\}$  no es rítmica o es arrítmica.

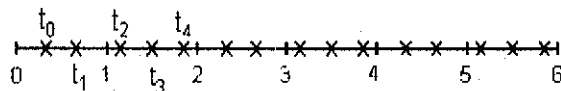


Figura 53: Secuencia Rítmica 5:2 ( $t_{n+5} = t_{n+2}$ ).

**Definición 41** Decimos que la neurona mecánica periódicamente estimulada tiene un comportamiento sincronizado, con sincronización  $q : p$ , si este comportamiento está determinado por una secuencia rítmica de tiempos de disparo, con período  $q$  y duración  $p$ . En caso contrario decimos que el comportamiento está determinado por una secuencia arrítmica, o que el movimiento es asincrónico.

El elevador realiza un movimiento que se repite cíclicamente. En cada ciclo se repiten las mismas fases (posiciones) obedeciendo una misma secuencia temporal. Estas fases pueden visualizarse como puntos en una circunferencia. De acuerdo al modelo matemático que estamos considerando, las descargas del tanque están dadas por las iteraciones de una función en la circunferencia y, generalmente, cada una de ellas ocurrirá, en una fase distinta del movimiento del elevador.

**Observación 36** Una predicción que se deriva del modelo matemático que estamos usando es que, si alguna fase de descarga del tanque se repitiera, entonces el conjunto de fases de descarga sería finita y en consecuencia la respuesta del oscilador será sincronizada.

**Observación 37** Las secuencias arrítmicas representan respuestas asíncronas del sube y baja e implican descargas en una infinidad de fases (que no se repiten) del movimiento del elevador. Cada secuencia rítmica, de período  $q$  y duración  $p$ , generada por una función de disparo  $F$ , se corresponde con una órbita periódica de la función de fases de disparo ( $f : S \rightarrow S$ ) de característica  $(q, p)$ , respecto a la representación  $F$ . (Figura 54)

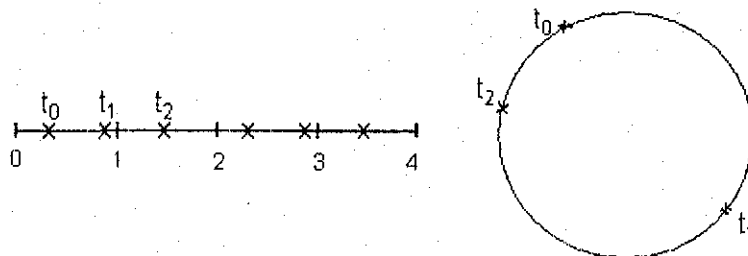


Figura 54: Secuencia Rítmica 3 : 2 en  $\mathbb{R}$  y en  $S$ ,  $\pi(t_k) = x_k$ .

**Observación 38** Es importante observar que las órbitas periódicas del modelo, pueden dar lugar a sincronizaciones espurias del oscilador en el sentido de que, aunque exista una sucesión rítmica  $\{t_n\}$  de tiempos de disparo, esta sincronización no es observable experimentalmente debido a la inestabilidad de la correspondiente órbita periódica. Sólo determinan sincronías observables los atractores periódicos del sistema dinámico en la circunferencia.

**Definición 42** Decimos que un comportamiento sincronizado de la neurona mecánica periódicamente estimulada es observable, si se corresponde con un atractor periódico del sistema dinámico en la circunferencia.

**Observación 39** Correspondiendo a la existencia de un atractor periódico, con característica  $(q, p)$ , del sistema dinámico en la circunferencia determinado por la función  $f$ , la neurona mecánica tiene un comportamiento  $q : p'$ -sincronizado (observable), siendo  $p' = p + kq$ , y  $k$  algún número entero.

*Demostración.*

Las funciones de disparo de la neurona mecánica son continuas para todos los valores de los parámetros (Observación 35). Por el teorema 10, tenemos que la envoltura de una órbita  $(q, p)$ -periódica de  $f$ , respecto a una representación principal, es  $p$ . Finalmente, de la observación siguiente se sigue que la envoltura respecto a cualquier otra representación continua será de la forma  $p' = p + kq$ , siendo  $k$  algún número entero. ■

**Observación 40** Si una sucesión rítmica, generada por una función de disparo  $F$ , tiene período  $q$  y duración  $p$ , entonces una generada por  $G = F + k$  tiene período  $q$  y duración  $p + kq$ .

*Demostración.*

Si  $t_{n+q} = F^q(t_n) = t_n + p$ , entonces,

$$G^q(t_n) = F^q(t_n) + kq = t_n + p + kq.$$

Por lo tanto, la duración respecto a  $G$  es  $p + kq$ . ■

**Observación 41** Si la neurona mecánica tiene un comportamiento  $q : p$ -sincronizado, con  $p < q$ , entonces la función de disparos de la neurona mecánica es una representación principal (de la función de la circunferencia que representa). Recíprocamente, si la función de disparos de la neurona mecánica es una representación principal y la neurona mecánica tiene un comportamiento  $q : p$ -sincronizado, entonces  $p < q$ .

#### 7.4.2 Saltos de Ciclo (Skipping)

**Definición 43** Decimos que un comportamiento  $q : p$ -sincronizado de la neurona mecánica, presenta el fenómeno de saltos de ciclo (skipping), si durante la evolución transcurre (al menos) un ciclo completo del forzamiento (elevador) en el que no se produce ninguna descarga.



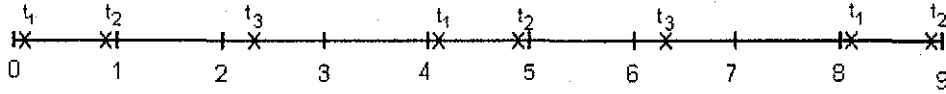


Figura 55: Secuencia Rítmica 3:4

**Observación 42** *La información sobre los saltos de ciclo no está contenida en la característica (período y envoltura) de la órbita periódica, sino en la envoltura de la órbita respecto a la específica representación que constituye la función de disparos del oscilador.*

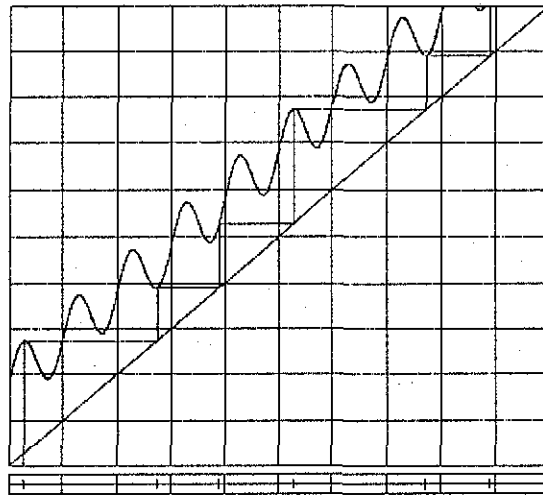


Figura 56: Representación de una función de la circunferencia con sincronización 3:5, con  $a = 1.907522$ ,  $b = 0.651917$ .

**Observación 43** *Un comportamiento sincronizado  $q : p$ , de la neurona mecánica presenta el fenómeno de saltos de ciclo (skipping) cuando la función de disparos cumple que,*

$$F^q(t_n) = t_n + p,$$

con  $p > q$ .

Son muy importantes los saltos de ciclo desde el punto de vista de la neurona mecánica, podemos tener  $q$  descargas, en  $p + kq$  ciclos, con  $k \in \mathbb{Z}$ .

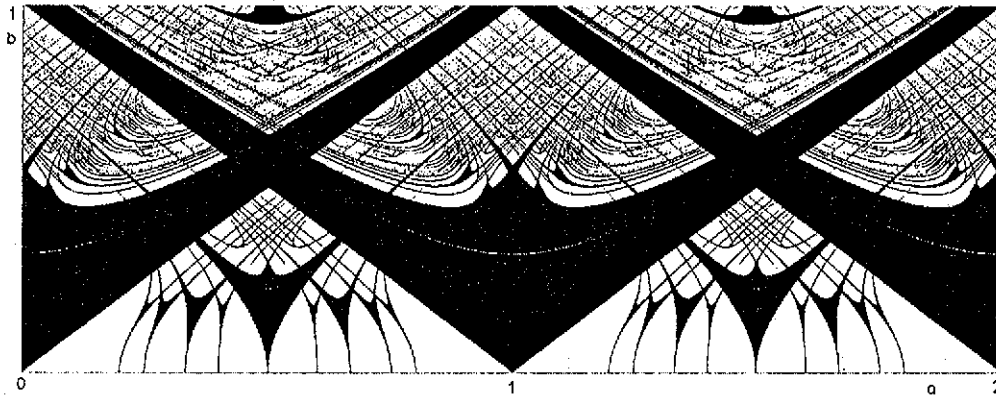


Figura 57:

### 7.5 Neurona Mecánica y Familia Clásica.

Es un hecho muy interesante que si le aplicamos al elevador de la Neurona Mecánica un forzamiento, tal que,

$$h(t) = -A \sin(2\pi t),$$

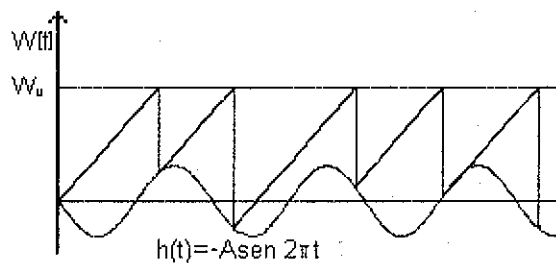


Figura 58: Oscilador con forzamiento.

la dinámica del oscilador resulta estar gobernada por las iteraciones de la familia clásica de funciones de la circunferencia. Efectivamente, sustituyendo  $h(t)$  en la ecuación 12 y haciendo el cambio de variables,

$$a = \frac{W_u}{I}, \quad b = \frac{A}{I}, \quad (14)$$

obtenemos:

$$t_{n+1} = t_n + a + b \operatorname{sen}(2\pi t_n). \quad (15)$$

Definiendo la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por la regla

$$F(t) = t + a + b \operatorname{sen}(2\pi t) \quad (16)$$

resulta que las sucesiones  $\{t_n\}$  de tiempos de disparo de las descargas (potenciales de acción) quedan cifradas como las órbitas del sistema semidinámico en la recta determinado por las iteraciones de ésta función  $F$ .

La familia de funciones de la circunferencia dada por la ecuación 15, ha sido estudiada en el contexto de los osciladores biológicos de integración y disparo por muchos autores, entre los cuales destacan V. Arnold, L. Glass, R. Pérez Pascual, R. S. Mackey, M. R. Guevara, C. Tresser, J. Belair y A. Shrier, entre muchos otros. Por otra parte, hasta donde nosotros sabemos, las oscilaciones de relajación del sube y baja, conocidas desde tiempos ancestrales, nunca habían sido estudiadas bajo la acción de un elevador, ni habían sido asociadas al comportamiento de una neurona.

## 7.6 Espacio de Parámetros.

### 7.6.1 Configuraciones Paramétricas Equivalentes

El número de parámetros del sistema originalmente es tres:  $(W_u, A, I)$ . Vía el modelo, el número de parámetros se redujo a dos:  $(a, b)$ , significando esto que los tres parámetros físicos  $(W_u, A, I)$  no varían independientemente. La relación entre estos dos conjuntos de parámetros está dada por las ecuaciones (14). Entonces, sobre rectas que pasan por el origen del espacio  $(W_u, A, I)$ , el comportamiento del oscilador es dinámicamente equivalente (figura 59). Así pues, los puntos en la superficie de una esfera con centro en el origen, nos sirven para representar cada una de las clases de equivalencia dinámica.

Ahora, como  $W_u \geq 0, I > 0, A \geq 0$ , entonces tenemos el primer octante de la esfera, el cual se mapea al primer cuadrante del espacio de parámetros  $a, b$ .

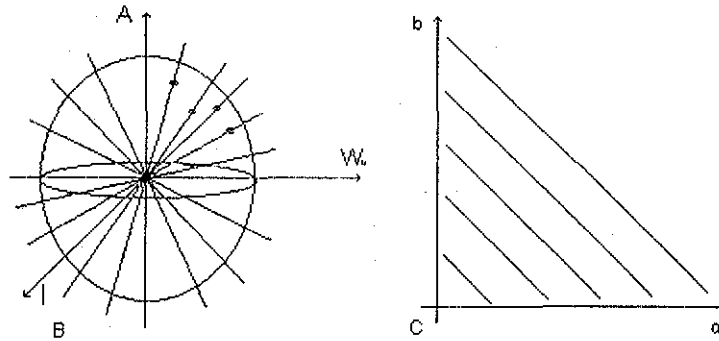


Figura 59: B) Clases de Equivalencia en espacio de parámetros. C) Espacio de parámetros reducido.

### 7.6.2 Restricciones Físicas sobre los Parámetros

Matemáticamente, el sistema dinámico en la recta, determinado por las iteraciones de la familia clásica, tiene sentido en todo el plano  $a, b$ , pero el modelo tiene sentido físicamente sólo en la subregión de éste donde se cumple que

$$W_u > A \geq 0,$$

que es equivalente a la condición  $a > b \geq 0$ . Esta condición debe cumplirse ya que  $A$ , la cantidad máxima de agua que queda en el recipiente, después de la descarga, no puede ser mayor que la que tenía cuando empezó a caer.

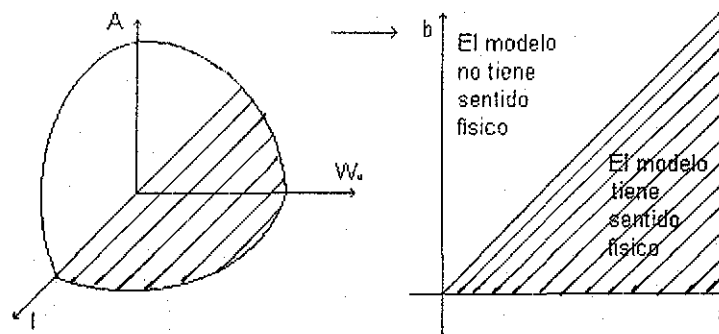


Figura 60: Espacio de parámetros donde tiene sentido físico, la neurona mecánica.

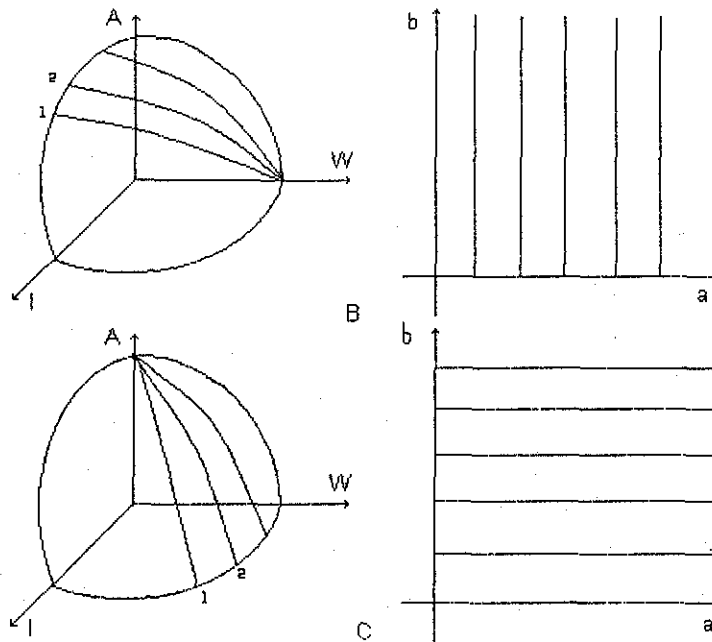


Figura 61:

**Observación 44** *Mientras que para la neurona mecánica el espacio de parámetros es la región no acotada del plano  $(a, b)$ , que se muestra en la figura 60, para la familia de clásica de funciones de la circunferencia el espacio de parámetros natural es el cilindro que resulta de identificar las rectas  $a = 0$  y  $a = 1$ .*

## 7.7 Aplicaciones de la Teoría de Rotación al Análisis de la Sincronización

Hemos visto, que la existencia de órbitas periódicas de la función de fases de disparo se corresponde con la existencia de comportamientos sincronizados del elevador. La teoría de rotación de las funciones en la circunferencia resulta ser de gran utilidad pues nos provee de condiciones, accesibles computacionalmente, para garantizar la existencia de órbitas periódicas del sistema dinámico en la circunferencia determinado por la función de fases de disparo.

A continuación ejemplificaremos la aplicación de la teoría de rotación

y otras herramientas de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, al análisis de la respuesta de la neurona mecánica a la estimulación periódica externa, dada por la función  $h(t) = -A \sin(2\pi t)$ . Como hemos observado antes, con esta selección de  $h(t)$ , la dinámica del sistema queda regida por la familia clásica de funciones de la circunferencia cuya representación está dada por la ecuación 16.

### 7.7.1 Oscilaciones Libres

Si la amplitud de las oscilaciones del elevador es cero ( $A = 0$ ), entonces la función de fases de disparo es una rotación de ángulo  $a \in [0, 1)$  (medido en radianes normalizados). Se presenta la disyuntiva clásica:

1) El parámetro  $a$  es irracional. En este caso, cada descarga del oscilador ocurre en una fase distinta del ciclo del elevador y el conjunto de fases de disparo es denso en el conjunto  $[0, 1)$  que representa las fases de este ciclo. Este hecho se sigue de que la función de fases de disparo es de clase  $C^2$  y podemos aplicar el teorema de Denjoy [8].

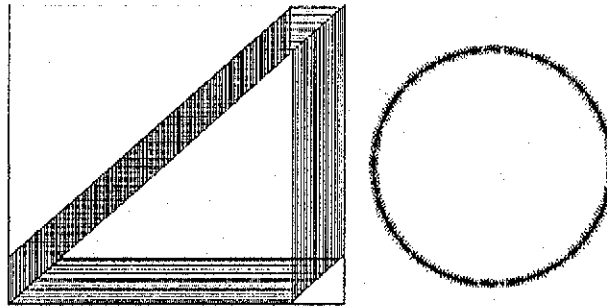


Figura 62: Representación pictórica de una órbita aparentemente densa en la circunferencia, familia clásica  $a = 0.159$ ,  $b = 0$ .

En la figura 62, se muestra una órbita de un período muy grande. Dada la resolución finita de los pixels de la pantalla, si continuáramos haciendo iteraciones se llenaría toda la circunferencia de puntos de la órbita.

2)  $a = p/q + k$ . Para este valor de los parámetros las funciones de tiempos de disparo son las funciones lineales ("rotaciones")

$$F(t) = t + p/q + k,$$

con  $k \in \mathbb{Z}^+$ , las cuales producen ritmos de período  $q$  y duración  $p + kq$ . Entonces todas las órbitas del sistema dinámico en la circunferencia son periódicas de característica  $(q, p)$  y todas las condiciones iniciales del oscilador producen una sincronización  $q : p + kq$ .

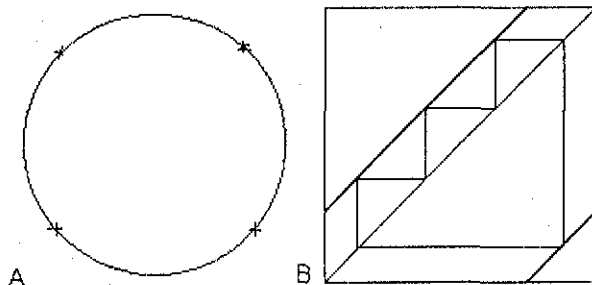


Figura 63: Rotación periódica. A) en  $S$ , y B) en el toro.

### 7.7.2 Oscilaciones Forzadas

Si  $A > 0$  entonces conviene distinguir dos casos: cuando las funciones de la familia son homeomorfismos y cuando éstas no son inyectivas.

**Región de Homeomorfismos** La función de disparos dada por la familia clásica siempre es continua y es inyectiva (homeomorfismo) cuando  $b < 1/2\pi$ . En esta región del espacio de parámetros el número de rotación está bien definido y es independiente de condiciones iniciales. Otra vez, se distinguen dos casos:  $\rho(f)$  es racional o es irracional, en el primer caso la dinámica es periódica y en el segundo, cuasiperiódica, pero para ningún valor de los parámetros dentro de esta región puede ser caótica.

1)  $\rho(f)$  es irracional. (Dinámica cuasiperiódica). Como la función de disparo es de clase  $C^2$ , todas las órbitas son densas en  $S$ . (ver teorema 12). Todas las descargas del oscilador ocurren en una fase distinta del ciclo del elevador, siendo el conjunto de fases de disparo denso en  $[0, 1)$  que representa las fases de este ciclo.

2)  $\rho(f) = p/q$ . (Dinámica periódica). Mientras el mapeo de disparos sea un homeomorfismo por el teorema 3 todas las secuencias que sean rítmicas tienen que tener el mismo período  $q$  y duración  $p$ . Sin embargo, en contraste

con el caso de las oscilaciones libres, aquí no todas las órbitas serán periódicas. De hecho, por el teorema de Jacobson 18 no puede haber más de dos órbitas periódicas y la evidencia computacional indica (para  $b > 0$ ) la existencia de un atractor y un repulsor periódico (de período  $q$  y envolvencia  $p$ ) de la función de la circunferencia, lo cual significa que el oscilador tiene un comportamiento con sincronización  $q : p + kq$ .

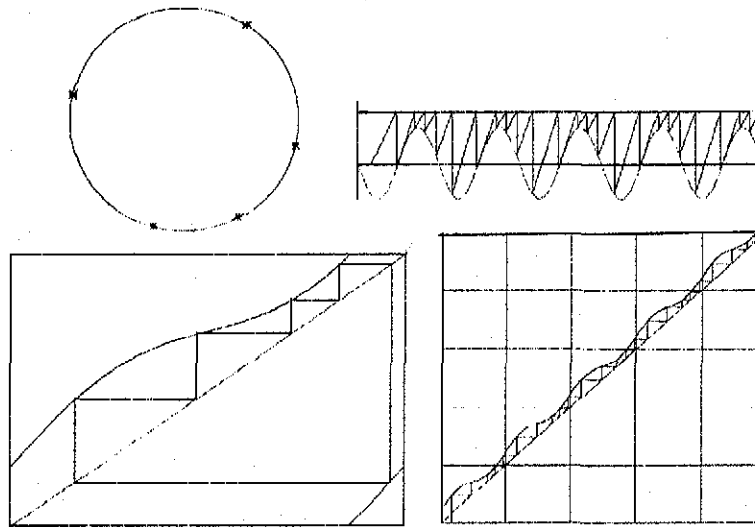


Figura 64: Sincronización 5 : 1; con  $a =$ ,  $b =$ .

Cuando  $b$  tiende a  $\frac{1}{2\pi}$ , (Teorema 22) la medida del conjunto de puntos donde se producen sincronizaciones irracionales, tiende a 0. Así pues, si se seleccionaran parámetros al azar la probabilidad de tener un comportamiento  $q : p$  - sincronizado es mayor cuando  $b$  es cercano a  $\frac{1}{2\pi}$ . Por el contrario, cuando  $b$  tiende a 0, (Teorema 24) la medida del conjunto de puntos donde se producen sincronizaciones irracionales, tiende a 1. Por lo cual es más factible que la neurona mecánica descargue en fases distintas, cuando  $b$  es cercano a 0.

### 7.7.3 Biestabilidad

La función de disparos de la neurona mecánica siempre es continua pero puede no ser inyectiva. Por ejemplo, cuando está gobernada por la familia



clásica de funciones de la circunferencia la inyectividad se pierde para valores grandes de la amplitud del elevador ( $b > 1/2\pi$ ). En este régimen el sistema es capaz de desplegar un espectro más rico de comportamientos que incluyen biestabilidad y comportamiento desordenado. Como hemos visto antes (figura 43) las regiones de sincronización  $R_{q:p}$  se cruzan dos a dos. En el cruce de dos lenguas vamos a observar un fenómeno sorprendente: perturbando las condiciones iniciales, el sistema puede saltar de una forma de sincronización a otra. Por ejemplo en la intersección de dos regiones  $R_{q:p}$  y  $R_{q':p'}$  el sistema puede alternar entre la sincronización  $q : p$  y la sincronización  $q' : p'$ . Esto se debe a la coexistencia de dos atractores del sistema dinámico en la circunferencia, con distinto período y envoltencia.

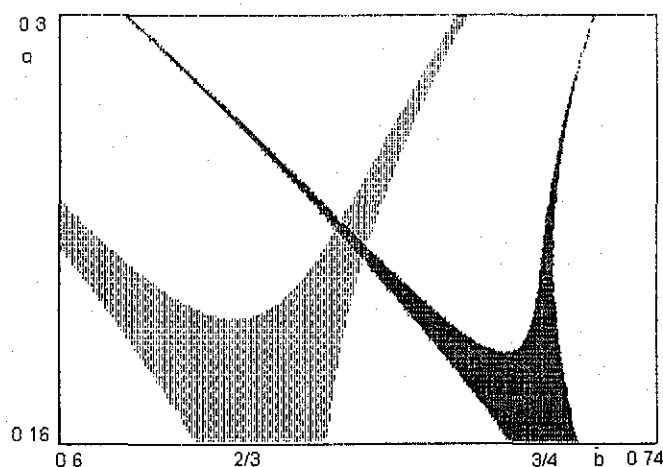


Figura 65: Intersección de las lenguas generalizadas  $R_{3:2}$  y  $R_{4:3}$ .

La dinámica de un punto en la intersección de las lenguas de la figura anterior es la presentada en la figura 66.

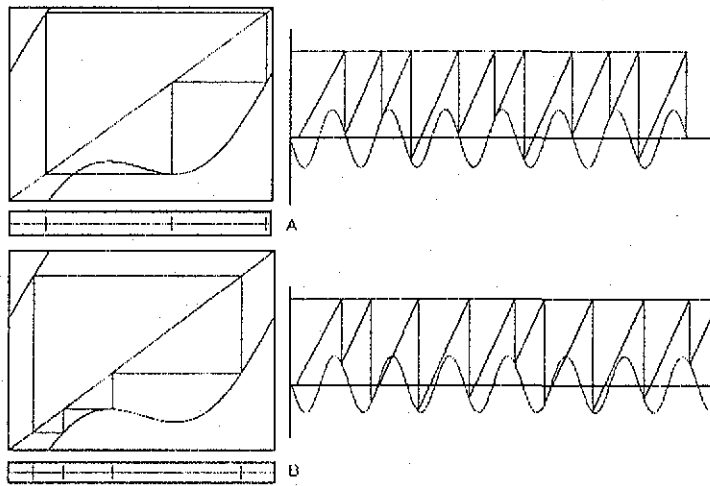


Figura 66: Coexistencia de Atractores. Familia Clásica  $a = 0.670354$ ,  $b = 0.223289$ . Sincronizaciones A) 3 : 2, B) 4 : 3.

#### 7.7.4 Monoestabilidad

La teoría de Boyland aplica para determinar las regiones de monoestabilidad que nacen en la región de homeomorfismos y se prolongan dentro de la región donde la función de disparos no es inyectiva. En esta región se tiene un sólo número de rotación, en lugar de todo un intervalo y se tiene un único atractor, aún cuando la función no es un homeomorfismo. Más aún, dentro de una misma lengua (con el mismo número de rotación) el tipo de sincronización no es el mismo y se suceden infinitas cascadas de bifurcación de doblamiento de período. (Duplicación del Número de Fases de Descarga).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

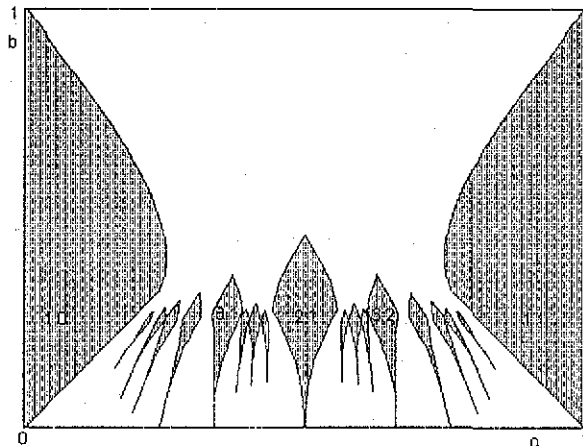


Figura 67: Regiones de monoestabilidad de las lenguas de boyland, para la familia clásica.

En esta región podemos garantizar, que la neurona mecánica, aún cuando la función de disparos ya no sea inyectiva, descargará únicamente  $nq$  veces, en  $np$  ciclos.

## 8 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES.

En este trabajo se ha hecho una recopilación de resultados sobre la dinámica de funciones de la circunferencia que aparecen dispersos en la literatura. Como ejemplo se han analizado varios aspectos interesantes de la dinámica de la familia clásica y de un modelo geométrico de neurona. Se han expuesto resultados teóricos y se ha mostrado también la conveniencia de realizar simulaciones computacionales, como las obtenidas usando el sistema de software **Sawtooth**, desarrollado en el Laboratorio de Dinámica no Lineal de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Se han interpretado las propiedades dinámicas de la familia clásica de funciones de la circunferencia en términos de los movimientos y comportamientos sincronizados (o caóticos) de la neurona mecánica. Por ejemplo, se vió cómo la coexistencia de atractores (multiestabilidad) permite entender claramente el fenómeno de cambio de sincronización del oscilador en respuesta a perturbaciones de las condiciones iniciales (manteniendo fijos los parámetros del sistema).

Sorpresivamente se ha encontrado, en este tema tan clásico, la falta de la importante noción de envolvencia. Se ha propuesto una definición formal de este concepto y se ha mostrado su utilidad para producir una nueva versión (más organizada) de la teoría de la rotación y la sincronización de los sistemas de integración y disparo modelados con funciones de la circunferencia. Entre otras cosas, esta noción ha servido para producir mejores formulaciones de varios resultados teóricos y para poder generalizar el concepto de lengua de Arnold (en el espacio de parámetros) de una forma apropiada para realizar estudios de sincronización.

Se ha puesto en relieve la importancia que tiene la consideración de modelos simples, como la neurona mecánica, para el estudio de la dinámica de sistemas más complejos, como una célula nerviosa periódicamente estimulada.

Así ha quedado demostrada la importancia que tiene la teoría de rotación de las funciones de la circunferencia para el análisis matemático de la dinámica de osciladores periódicamente estimulados.

## 9 APÉNDICE.

**Definición 44** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. El conjunto  $C^0(X, Y)$  es la colección de todas las funciones continuas de  $X$  a  $Y$ .

Topológicamente  $C^0(X, Y)$  se define con la  $\varepsilon$ -bola alrededor de  $f$ , como sigue:

$$\mathfrak{B}_\varepsilon^0(f) = \{g : X \rightarrow Y \text{ continuas} : \forall x \in X \quad \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\}$$

El conjunto de las  $\varepsilon$ -bolas ( $\varepsilon > 0$ ) alrededor de las funciones  $f : X \rightarrow Y$  forman una base para norma uniforme o la  $C^0$ -topología. Esta es justamente la Topología de la Convergencia Uniforme en  $X$ .

Para definir las topologías de orden más grande, revisaremos algo de cálculo.

**Definición 45**  $f$  es una función de clase  $C^r$ , si existe todas las derivadas  $C^r(X, Y)$  es la colección de todas las funciones de clase  $C^r$  de  $X$  a  $Y$ .

Topológicamente las  $C^r - \varepsilon$ -bolas alrededor de  $f \in C^r(X, Y)$  son

$$\mathfrak{B}_\varepsilon^r(f) = \{g \in C^r(X, Y) : \forall k \leq r \text{ y } \forall x \in X \quad \|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}g(x)\| < \varepsilon\}$$

esta definición es equivalente a que: para toda  $k \leq r$ ,  $D^{(k)}g \in \mathfrak{B}_\varepsilon^0(D^{(k)}f)$

Las  $C^r - \varepsilon$ -bolas ( $\varepsilon > 0$ ) alrededor de funciones de clase  $C^r$  forman una base para la topología en  $C^r(X, Y)$ , llamada la  $C^r$ -topología

**Definición 46** Sea  $f : X \rightarrow Y$ . La función  $f(x)$  es un homeomorfismo, si  $f$  es una función biyectiva, continua y  $f^{-1}(x)$  también es continua.

**Definición 47** Sea  $f : X \rightarrow Y$ . La función  $f(x)$  es un  $C^r$ -difeomorfismo, si  $f(x)$ ,  $f^{-1}(x)$  son  $C^r$ -homeomorfismos.

$Diff^r(X, Y)$  es la colección de todos los difeomorfismos de clase  $C^r$  de  $X$  a  $Y$

**Teorema 27 (Valor Medio)** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$ , entonces existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Teorema 28 (Valor Intermedio)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^0$ . Si  $f(a) = u$  y  $f(b) = v$ , entonces para toda  $z$  entre  $u$  y  $v$  existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = z$ .

**Teorema 29 (de la Función Inversa)** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^\infty$  y  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $f'(x) \neq 0$ . Entonces existe  $U$  vecindad de  $x$ ,  $V$  vecindad de  $f(x)$  y una función  $g : V \rightarrow U$  de clase  $C^1$ , tales que,

$$\begin{aligned} f \circ g &= Id_V \\ g \circ f &= Id_U. \end{aligned}$$

**Teorema 30 (De la Función Implícita)** Si  $f$  es una función de clase  $C^1$  y,

1.  $f(x_0, y_0) = 0$ ,
2.  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ ,

entonces existen intervalos abiertos  $I$  alrededor de  $x_0$  y  $J$  alrededor de  $y_0$ , y una función  $p : I \rightarrow J$  de clase  $C^1$  tal que  $p(x_0) = y_0$  y  $f(x, p(x)) = 0$ , para toda  $x \in I$ .

**Observación 45** Sean  $f, g$  endomorfismos de la circunferencia de grado  $k$  y  $F, G$  representaciones de  $f$  y  $g$  respectivamente. Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $F^n(t) - G^n(t)$  es una función de grado cero, es decir, es una función periódica.

En particular, si  $F$  es de grado uno se tiene  $F^n(t) - t$  es de grado cero

*Demostración.*

Sea  $n = 1$ . Como  $f$  y  $g$  tienen grado  $k$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) + k, \\ G(t+1) &= G(t) + k, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} F(t+1) - G(t+1) &= F(t) + k - G(t) - k \\ &= F(t) - G(t), \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F(t) - G(t)$  es de grado cero.

Como  $F^n, G^n$  son representaciones de  $f^n$  y  $g^n$  endomorfismos de la circunferencia de grado  $k$ , se cumple el paso anterior y por lo cual  $F^n(t) - G^n(t)$  es de grado cero. ■

**Observación 46** Sea  $f$  un endomorfismo de la circunferencia, monótono creciente, de grado uno y sea  $F$  una representación de  $f$ . Entonces para  $n = 1, 2, \dots$  si,

$$M_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Máx}}(F^n(t) - t) \quad \text{y} \quad m_n = \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{Mín}}(F^n(t) - t),$$

se tiene  $M_n - m_n < 1$ .

*Demostración:*

Como  $F^n(t) - t$  es continua, existen  $T, t \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq (T - t) < 1$  tal que,

$$F^n(T) - T = M \quad \text{y} \quad F^n(t) - t = m,$$

además como  $F(t)$  es monótona creciente, de grado uno,  $F^n(t)$  también, entonces

$$F^n(T) \leq F^n(t + 1) = F^n(t) + 1,$$

$$F^n(T) - F^n(t) \leq 1,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} M_n - m_n &= (F^n(T) - T) - (F^n(t) - t) = (F^n(T) - F^n(t)) - (T - t) \\ &\leq 1 - (T - t) < 1. \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición 18 (Herman [22])** Sean  $f, g$  endomorfismos monótonos crecientes de la circunferencia, de grado uno y sean  $F, G$  sus representaciones respectivas. Entonces si conmutan, es decir  $F \circ G = G \circ F$ , se tiene,

$$\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G).$$

*Demostración.*

Sea  $\{t_m\}$  una sucesión cualquiera, por la proposición 2, tenemos que,

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n(t_m) - t_m}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

por lo cual,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_m) - t_m}{n} = \rho(F),$$

entonces,

$$\rho(F \circ G) - \rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F \circ G)^n(t)}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n},$$

como  $F \circ G = G \circ F$ , tenemos que,  $(F \circ G)^n(t) = F^n(G^n(t))$ , así que,

$$\begin{aligned} \rho(F \circ G) - \rho(F) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(F^n(t))}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(F^n(t)) - F^n(t)}{n} \\ &= \rho(G), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G) \blacksquare$$

**Corolario 4** Sea  $f$  un endomorfismo monótono creciente de la circunferencia, de grado uno y  $F$  representación de  $f$ . Entonces,

$$\rho(F^n) = n\rho(F)$$

para  $n > 0$ .

**Proposición 19** Sea  $f$  un homeomorfismo de la circunferencia. y  $F$  representación de  $f$ . Entonces,

$$\rho(F^k) = k\rho(F),$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$

*Demostración.*

Sea  $k = 1$  y  $\{(F^{-1})^n(t)\}$  una sucesión, por la proposición 2, tenemos que,

$$\left| \rho(F) - \frac{F^n((F^{-1})^n(t)) - (F^{-1})^n(t)}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$



como  $F^n((F^{-1})^n(t)) = t$ ,

$$\left| \rho(F) - \frac{t - (F^{-1})^n(t)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$
$$|\rho(F) - (-\rho(F^{-1}))| \leq \frac{1}{n}$$

entonces,  $\rho(F) + \rho(F^{-1}) = 0$ , por lo tanto,

$$\rho(F^n) = n\rho(F)$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

## Referencias

- [1] Arnold V. I. Small denominators I. *On the Mappings on the circumference onto itself*. Am. Math. Soc. 2ª ser 46, 213, (1965).
- [2] Arnold, V. I., Anosov, D.V. *Dynamical Systems I Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems*. Springer Verlag, (1985).
- [3] Arrowsmith D.K. , Place C.M. *An introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, (1990), U.K.
- [4] Block L. S. , Coppel W. A. *Dinamics in One dimentions*. Springer Verlag.
- [5] Boyland Philip L. *Bifurcations of Circle Maps: Arnold Tongues, Biestability and Rotation Intervals*. Commun. Math. Phys. 106, pag. 353-381, (1986).
- [6] Carrillo, H. *La neurona mecánica*. En preparación.
- [7] Cratwright, M.L. *Non-linear vibrations: a chapter in mathematical history*, Math. Gazette, 36 (1952). pag. 80-88.
- [8] Denjoy, A. *Sur les Courbes définies par les equations differentiellesa la surface du tore*.
- [9] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley. (1986). USA.
- [10] Díaz Bobadilla, I.E. "*Sistemas Dinámicos en la Circunferencia*". Tesis Profesional. UAEM (1996).
- [11] Glass, L., Mackey M. *From Clocks to Chaos. The Rithms of Life*. Princeton University Press. (1988).
- [12] Glass, L. *Synchronization and rhythmic processes in physiology*. Department of Physiology, Center for Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, McGill University, Montreal, Quebec, Canada. Nature, Vol. 410, pag. 277-284. (2001)
- [13] Glass, L., Bélair, J. *Universality and self-similarity in the bifurcations of maps*. Physica 16D. . North Holland, Amsterdam, pag. 143-154, (1985).

- [14] Glass L., Bélair J., *Self similarity in periodically forced oscillators* Physics Letters 96A, pag 113-116 (1983).
- [15] Glass, L., Bélair, J. *Continuation of Arnold Tongues in Mathematical Models of Periodically Forced Biological Oscillators*. En Lecture Notes in Biomathematics 66. Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry. Proceedings, Utah, 1985, pag. 232-243. Ed. S. Levin. Springer Verlag, (1985).
- [16] Glass L., Guevara M.R., Belair J, Shier A., *Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator*, Phys. Rev. A 29, pag. 1348-1357, (1984).
- [17] Glendinning, Paul. *Stability, Instability and Chaos*. An introduction to the theory of nonlinear differential equations, Cambridge university, (1994).
- [18] Guzmán, J.R. *Sistemas Dinámicos en la Circunferencia. Aplicaciones a Teoría de Números y Modelación de Neuronas*. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. (1994). UNAM.
- [19] Guzmán J. R., Carrillo C. H., Ongay L. F. *Dinámica de las iteraciones de la Función de Arnold*. Aportaciones Matemáticas al XXVI Congreso Nacional de la S.M.M. (1994).
- [20] Guzmán A., *Dinámica generada por homeomorfismos del Círculo*. tesis Profesional, (1988), UNAM.
- [21] Herman, M.R. *Measure de Lebesgue et Nombre de rotation*. Springer Lecture Notes in Math., n°597. Berlin, pag. 271-293, (1977).
- [22] Herman, M. R., *Topologie Differentielle* C. R. Acad. Sc. París, tomo 282 (1976) Serie A 503.
- [23] Ito R., *Rotation sets are closed*. Math Proc. Camb Philos. Soc 89. pag 107-111, (1981).
- [24] Mendelson, P. *On unstable attractors*. Symposium de Ecuaciones Diferenciales ordinarias y sus Aplicaciones. U.N.A.M. (1961).
- [25] Mendoza Reyes, M. A. "*Neuronas de Integración y Disparo con acumulación Lineal*", Tesis de Maestría, UNAM, (2001).

- [26] Newhouse S., Palis J., Takens, F. "*Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*". Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math. 57, pag. 5 - 71, (1983).
- [27] Nitecki, Z. Differentiable Dynamics. "*An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*". The MIT Press, (1971).
- [28] Ongay, F. y Carrillo, H. "*On the firing maps of a general class of forced integrate and fire neurons*". Aceptado para su publicación en Math Biosc., (2001).
- [29] Palis J., W. Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems, an Introduction*. Springer, Berlin New York, (1982).
- [30] Perez, P., Glass, L., *Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator*. Physics letters vol. 90 A, number 9, pag. 441-443, (1982).
- [31] Poincare, H. *Sur les Courbes Definies par les equations differentielles*. *Journal de Mathematiques pures et appliquees*, 4<sup>o</sup> serie, pag 16-244, (1885).
- [32] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics 2, Springer Verlag. (1990).