63

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS ACTUARIAL DEL METODO DE GOMPERTZ Y MAKEHAM EN LOS SEGUROS DE PENSIONES DERIVADOS DE LA SEGURIDAD SOCIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

HAZAEL LOPEZ GARCIA

CIENCIAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. MIGUEL ANGEL BELTRAN PRADO

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Análisis Actuarial del método de Gompertz y Makeham en los Seguros de Pensiones Derivados de la Seguridad Social".

realizado por Hazael López García

con número de cuenta 9324005-3 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Miguel Angel Beltrán Prado
Propietario	Act. Rosa María Alatorre Salgado
Propietario	Act. Oscar Aranda Martínez
Suplente	Act. Mauricio Aguilar González
Suplente	Act. Salvador Pérez Maldonado

Mauricio Aguilar

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A Dios:

Gracias por la inmensa cantidad de bendiciones que has derramado en mi vida, por tu presencia, por ayudarme a alcanzar una meta más y sobre todo por el alto honor de haberme constituido un hijo tuyo. Gracias Dios.

A mis Padres:

Por que sin duda soy fruto del amor que hubo entre ustedes, gracias por darme la vida.

A mi Madre

A ti mamá, te agradezco muy en especial por tu inmenso amor, por todos tus cuidados, principios, regaños, por tu incansable sacrificio, porque nunca evadiste la responsabilidad que Dios te delegó; por tu júbilo en mis risas y tu hombro en mis lágrimas, Gracias.

A mi Padre

Por tu apoyo y amor incondicionales, por ser sin duda un gran hombre y un excelente amigo

A Susana López:

Por tu incomparable amor, por las experiencias compartidas, por tu apoyo y consejo, por complementar mi vida, por toda la felicidad que me has dado. Una vez más hemos alcanzado una nueva meta juntos. Te amo

A Héctor Raúl López:

Por los hermosos momentos que hemos pasado juntos, por los juegos de niños, por las experiencias compartidas, por tu compañía, por el apoyo que me has dado, por la bendición de ser mi hermano y por el amor fraternal que nos tenemos, el cual siempre nos sacará a flote en cualquier circunstancia. Recuerda que cuentas conmigo siempre. Eres mi mejor amigo

A Miguel Angel:

Por la confianza que depositaste en mí. Por el tiempo, paciencia y apoyo que me brindaste durante la realización de este trabajo.

A la CNSF:

En especial a Norma Alicia Rosas, a Cecilia Navarro y a Miguel Angel Beltrán por haberme dado la oportunidad de iniciar mi vida laboral como profesionista y permitirme conocer a un excelente grupo de profesionales y amigos.

A la UNAM:

Por darme la mejor oportunidad para formarme como profesionista, por permitirme recibir las enseñanzas de mis profesores y por hacer de mi un mejor hombre.

...Todo lo que soy, todo lo que tengo, no es mío se lo debo a otros; pero sobre todo a ***Dios.***

INTRODUCCION

El sector asegurador tiene dos grandes manifestaciones: los seguros que son operados por entidades privadas, con quienes los asegurados contratan libremente las coberturas que les interesan, destinadas a proteger intereses individuales, y que reciben el nombre de seguros privados; y los seguros derivados de las leyes de seguridad social, los cuales aluden a un sistema de protección, dirigido a proporcionar bienestar a la población.

El sistema de seguridad social comprende un conjunto de medidas de previsión, ejercidas por determinados organismos e instituciones oficiales, dirigido a cubrir las contingencias que pudieren afectar a los trabajadores asalariados y autónomos, así como a sus familiares. Sobre esta base se garantiza la asistencia sanitaria en caso de enfermedad o accidente, la prestación económica en caso de incapacidad laboral, vejez, desempleo y fallecimiento, entre otros.

La seguridad social ha sido siempre una de las preocupaciones de todo país. Desde su origen las prestaciones sociales han tenido como objetivo contribuir a mejorar el nivel de vida de la población, al brindar protección a los trabajadores para evitar que queden desprotegidos ante la ocurrencia de eventos económicamente desfavorables.

En el caso de México, con el fin de mejorar el esquema de pensiones derivadas de la seguridad social, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público y el Instituto Mexicano del Seguro Social, en coordinación con la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas y la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros, acordaron modificar la Ley del Seguro Social con el fin de tener un sistema más eficiente para los pensionados y disminuir la carga económica del Estado.

Fue así como a partir del 1° de julio de 1997 se inició una nueva etapa para las aseguradoras, al entrar en vigor la Nueva Ley del Seguro Social la cual establece que cuando un trabajador y/o sus beneficiarios cumplan las condiciones necesarias para disfrutar de una pensión, entonces se destinarán los recursos acumulados de su cuenta individual para la contratación de una renta vitalicia con una aseguradora. Por esto, las instituciones de seguros son las depositarias de los recursos financieros para el pago de rentas vitalicias al pensionado y/o sus beneficiarios. Es así que la supervisión y vigilancia por parte de las autoridades hacia una compañía de seguros especializada en los seguros de pensiones es de suma importancia, debido a que se deberá cuidar que las áreas financiera, técnica y legal funcionen de acuerdo con los preceptos legales establecidos para así poder garantizar su correcto desempeño. La Secretaria de Hacienda y Crédito Público a través de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) es la encargada de realizar labores de supervisión y vigilancia a cada una de las aseguradoras autorizadas para realizar la actividad de seguros de pensiones. El supervisor utiliza herramientas actuariales que le permiten conocer el comportamiento de la compañía. En efecto el supervisor actuarial, durante la revisión, debe identificar y advertir problemas de carácter técnico que afecten la solvencia de la empresa, es por lo que se plantea la necesidad de contar con procedimientos para verificar, analizar y evaluar la información necesaria para la valuación de las reservas técnicas. Como resultado de una visita de inspección actuarial se pueden identificar desapegos a los lineamientos técnicos, legales y administrativos, tales como la utilización de parámetros técnicos inadecuados en el cálculo de las reservas técnicas.

Tanto el inspector como el supervisor actuarial del seguro de pensiones e incluso el área técnica de la compañía requieren de procedimientos alternativos de análisis actuarial que permitan validar el cálculo del importe requerido para satisfacer las rentas futuras y otras prestaciones y obligaciones económicas provenientes de los seguros de pensiones.

La valuación de reservas técnicas de los seguros de pensiones derivados de la seguridad social, se realiza de acuerdo a lo establecido en las reglas de operación publicadas en el Diario Oficial de la Federación del 26 de febrero de 1997 y emitidas por la CNSF a través de la circular S-22.1 y demás disposiciones referentes a la definición de los procedimientos técnicos que deben seguirse para la determinación de cada una de las reservas. Asimismo, en la circular S-22.3 del 31 de marzo de 1997 se da a conocer la Nota Técnica de beneficios básicos a seguir para cada tipo de seguro (Riesgos de Trabajo, Invalidez y Vida) y tipo de pensión (invalidez, incapacidad, viudez, orfandad, viudez y orfandad, ascendencia) según el estatus familiar, así como cada uno de los términos involucrados para el cálculo de la aportación económica que el IMSS transfiere a la aseguradora como contraprestación para el pago de la renta vitalicia, conocida con el nombre de *monto constitutivo.*

El monto constitutivo se integra por el valor presente de las obligaciones futuras el cual recibe el nombre de prima de riesgo, así como de los recargos por gastos de adquisición y un margen de seguridad. El cálculo de la prima de riesgo involucra la combinación de probabilidades conjuntas, denominadas convoluciones, en función de la composición familiar de que se trate.

Actualmente se cuenta con un Sistema Unico de Cotización, cuyas siglas son SUC. Este sistema tiene como función calcular los montos constitutivos para las pensiones derivadas de los seguros de Riesgos de Trabajo y de Invalidez y

Vida, y los diferenciales de prima derivados de un ajuste en el estatus del grupo familiar.

En el presente trabajo se propone un procedimiento alternativo para la determinación del monto constitutivo, reduciendo el número de convoluciones involucradas, a través de la teoría actuarial definida por Gompertz y Makeham, en lo referente a la determinación de una tasa instantánea de mortalidad y las propiedades de ésta, las cuales establecen que se puede determinar de forma aproximada una edad común z, que reemplaza a las edades distintas $x, y, w, \ldots$ de un grupo de m vidas, lo cual nos deja diseñar un procedimiento alterno que permita validar el resultado de la prima de riesgo a utilizar en la valuación de la reserva matemática, a través de simplificar las convoluciones que involucran a dos o más hijos del mismo sexo, en términos de la probabilidad de una sola persona al considerar una edad equivalente.

Se analizará la prima de riesgo de un seguro de riesgos de trabajo con una composición familiar formada por el incapacitado con cónyuge e hijos, debido a que es el más representativo en cuanto a convoluciones se refiere; de esta manera, al analizar este caso, el procedimiento alternativo propuesto puede extenderse a cualquier otro tipo de pensión, incluso aquellos que cuentan un seguro de invalidez y vida, según su composición familiar.

Entonces, si se aplican las propiedades de la tasa instantánea de mortalidad de Gompertz y Makeham para obtener la edad equivalente de dos o más hijos del mismo sexo que integren un grupo familiar para la determinación de la prima de riesgo de los seguros de pensiones, el valor de la prima de riesgo es equivalente al que se obtiene al utilizar la combinación de probabilidades de un estatus familiar con hijos del mismo sexo de acuerdo con las bases técnicas de los seguros de pensiones.

Para llevar a cabo nuestro análisis, el presente trabajo consta de tres capítulos. En el primero se describen los principios actuariales básicos de los seguros de pensiones, así como los principales tipos de estructura de los regímenes de seguridad social, y se desarrolla enuncia la teoría actuarial de Gompertz y Makeham, la cual nos permitirá obtener la edad equivalente.

Una vez familiarizados con los aspectos técnicos, en el Capítulo 2 realizaremos un análisis del sistema de pensiones derivadas de las leyes de seguridad en México, para entender los aspectos técnicos de éste, basándonos en sus fundamentos legales aplicables.

Finalmente, en el Capítulo 3, con la ayuda de los elementos técnicos y legales referidos en los capítulos anteriores, desarrollaremos el proceso alternativo que nos permita reducir el número m de hijos a uno sólo con una edad equivalente.

Adicionalmente, se realiza un ejercicio comparativo entre el cálculo de anualidades conjuntas contra el resultado de anualidades para una sola persona de edad equivalente, de acuerdo con el desarrollo técnico expuesto dentro del Capítulo 3 con el objeto de validar el procedimiento planteado.

CAPITULO 1: MATEMATICAS ACTUARIALES BASICAS DE LOS SEGUROS DE PENSIONES DERIVADOS DE LAS LEYES DE SEGURIDAD SOCIAL

La teoría matemática es la que determina los procedimientos y las fórmulas de cálculo que se utilizan en cada uno de los regímenes de seguridad social existentes de acuerdo con los planes de cada país, por lo que la diversidad de estos explica el abundante material que existe en materia de pensiones. En el presente capítulo nos ocuparemos de los elementos típicos, para facilitar la comprensión de los aspectos técnicos.

CONDICIONES DE OTORGAMIENTO DE PENSIONES

Para el pago de las pensiones es necesario cumplir con una serie de requisitos de elegibilidad, los cuales se describen a continuación.

Pensiones de vejez

El derecho a la pensión de vejez está casi siempre relacionado con un cierto límite de edad y al cumplimiento de un período de trabajo determinado.

En la mayoría de los países de Europa Occidental, así como en otros países industrializados, la edad para el otorgamiento de la pensión para los hombres está determinada a los 65 años (67 años en Dinamarca, Islandia, Irlanda, Noruega y Suecia) mientras que en los países de Europa Oriental la edad más frecuente es de 60 años. En muchos países en vías de desarrollo, sobre todo los de las zonas tropicales, la pensión se otorga a los 60 años y aún a los 55 años.

Actualmente se manifiestan dos tendencias opuestas: por un lado, numerosas organizaciones de asalariados reivindican una disminución de la edad para la pensión, o por lo menos un límite de edad flexible; por otro lado, se observa una tendencia a elevar esta edad, en virtud de que la esperanza de vida aumenta.

Ciertas legislaciones prevén el pago de la pensión completa, a una edad menos avanzada, si el asegurado, durante un período determinado, ha estado trabajando en ocupaciones insalubres o peligrosas, si estuvo desempleado antes de alcanzar la edad normal para la pensión, o bien si sufre de agotamiento mental o físico prematuro sin tener derecho a una pensión de invalidez. Otras legislaciones prevén, en caso de retiro voluntario de la vida activa, la posibilidad de otorgar una pensión reducida a una edad que pueda ser menor de cinco años de la edad normal de otorgamiento.

Según ciertos regímenes, los períodos de espera para tener derecho al goce de una prestación se expresan en períodos de cotización, de seguro, de empleo o de residencia. Estos períodos son con frecuencia superiores a 10 años y alcanzan 25 o más en ciertos países. En algunos regímenes los períodos de espera son más cortos para las mujeres que para los hombres. Otros regímenes en lugar de determinar la edad para la pensión fijan un período de espera relativamente largo; existen también fórmulas mixtas, en las cuales la edad para percibir una pensión está en función de los períodos de cotización. La condición de espera durante un cierto período para el disfrute de las prestaciones, pierde su importancia cuanto más general es el campo de aplicación del régimen.

Ciertos períodos de incapacidad por enfermedad, maternidad, accidentes de trabajo o desempleo involuntario se consideran como períodos cotizados, aun si no dieron lugar al pago de cotizaciones.

Cuando se instituye un régimen de pensiones la ley puede prever, en beneficio de las personas de edad avanzada, disposiciones transitorias especiales que reduzcan los periodos de trabajo o incorporar periodos no asegurados.

Algunos regímenes determinan, además del cumplimiento de tiempos de espera, una "densidad" mínima de cotizaciones, ya sea durante la carrera completa del asegurado, en un periodo calculado a partir de cierta edad de ingreso teórico, o a un periodo determinado antes de la edad de la pensión. Finalmente, si para un gran número de regimenes, tener derecho a la pensión no implica ninguna condición de jubilación efectiva para otros, por el contrario, el pago de la pensión está sujeto al cese de una actividad cualquiera.

Pensiones de invalidez

El pago de una pensión de invalidez está sujeto a una condición fundamental: la existencia de un estado de "invalidez" tal como lo define la ley. A pesar de las diferencias en las definiciones legales las nociones de invalidez pueden clasificarse en dos grandes categorías:

- Invalidez profesional
- Invalidez general o incapacidad general

En el segundo caso se supone que la invalidez está causada por una enfermedad que es permanente, de larga duración o que persiste después de cierto periodo y el pago de las incapacidades de enfermedad y el de las pensiones de invalidez se coordina de manera que si persiste la incapacidad de trabajo cuando termina el derecho a las prestaciones de enfermedad se tiene derecho a una pensión de invalidez.

La invalidez profesional se relaciona con la ocupación acostumbrada del interesado o con una ocupación equivalente apropiada, mientras que la invalidez general es una incapacidad general de ganancias en cualquier actividad profesional. La primera de éstas se usa frecuentemente en los regímenes de pensiones que cubren únicamente a empleados o grupos de profesionales determinados, mientras que la invalidez general en regímenes que cubren a la totalidad de trabajadores. Algunos regímenes hacen uso de ambos conceptos de invalidez; la pensión que se otorga por la invalidez profesional es menos elevada que si se otorga por invalidez general.

Algunas legislaciones diferencian la invalidez general, que consideran como total, a la invalidez parcial. Por ejemplo, en la legislación suiza se reconoce la invalidez de dos tercios junto con la invalidez parcial del 50% lo que da lugar al otorgamiento de una pensión reducida. Esto también se presenta en Chile, Checoslovaquia, Nicaragua y Suecia.

Para aclarar esta noción, se cita la definición que daba la antigua legislación alemana, ya que tuvo influencia en la legislación de muchos países:

"Será considerado como afectado de invalidez, aquel que no está en estado de ganar, por una ocupación apropiada a sus fuerzas y a sus aptitudes y que responda, en la medida conveniente, a su instrucción y a su profesión, la tercera parte de lo que las personas de su condición, sanas de cuerpo y de espíritu, que hayan recibido una instrucción análoga y trabajando en la misma región, ganan usualmente por su trabajo"

Es evidente que estas definiciones se prestan a diferentes interpretaciones; la práctica y la jurisprudencia tienen una influencia directa sobre la definición de invalidez que da efectivamente derecho a la pensión.

Existe una dificultad esencial para el procedimiento matemático, debido a la diversidad de definiciones y a la manera como se aplican en la práctica, al comparar valores básicos obtenidos a partir de campos de experiencia diferentes (por ejemplo, las probabilidades de entrada a la invalidez, la mortalidad de los inválidos, o más generalmente, las variables de "salida" como beneficio de una pensión incluyendo sus probabilidades de reactividad) o al aplicar directamente probabilidades que resultan de un sistema determinado para efectuar los cálculos correspondientes en otro sistema diferente.

Con algunas excepciones, además del estado de invalidez, se exige el cumplimiento de un periodo de trabajo cuya duración es generalmente de tres a cinco años; este requisito se complementa, y en ocasiones se reemplaza, por una densidad de cotizaciones durante un periodo determinado, previo al comienzo de la invalidez. Para otras legislaciones como, por ejemplo, de Bulgaria y Rusia, la duración del trabajo aumenta con la edad.

Pensiones de sobrevivencia

Las pensiones de sobrevivencia se otorgan en caso de fallecimiento de un pensionado por vejez o invalidez o de un asegurado activo; en este último caso, generalmente se otorga a condición de que el asegurado activo haya satisfecho las condiciones requeridas para tener derecho a una pensión de invalidez en lo que se refiere a los periodos de seguro.

Las dos principales categorias de sobrevivientes que pueden pretender una pensión (casi siempre en el caso de un seguro general de pensiones) son las viudas y los hijos del fallecido. En ocasiones se consideran los derechos de otros sobrevivientes eventuales o, en casos muy raros, del viudo de una mujer asegurada.

También se prevé el otorgamiento de pensiones de viudez sin ninguna condición particular, mientras que otros la otorgan únicamente bajo ciertas condiciones, como una edad mínima determinada, la invalidez o el mantenimiento de los hijos. Es conveniente distinguir si estas condiciones deben ser cumplidas en el momento del fallecimiento del cónyuge (como lo prevé la legislación de algunos países) o si la pensión de viudez se otorga cuando se alcanza la edad mínima después de esta fecha. En ciertos regímenes, una viuda que no satisface los requisitos indicados arriba, tiene derecho a una pensión temporal durante un período de adaptación a su nueva situación. En caso de que la viuda contraiga nuevas nupcias, el derecho a la pensión se termina, con frecuencia después del pago de una cantidad que equivale a uno o varios años de pensión. Sin embargo, en algunos regímenes, si no se obtuvo ningún derecho a pensión, los derechos anteriores pueden resurgir en el momento del fallecimiento del segundo cónyuge por estar asegurado; los gastos que implican estas disposiciones pueden casi siempre omitirse en los cálculos, pues están cubiertos por los márgenes de seguridad.

Las pensiones de orfandad, o los suplementos a la pensión de viudez que le corresponden, se pagan hasta una edad máxima alcanzada; en su mayoría los regímenes prevén una edad límite de la edad general situada entre los 14 y 18 años para los hijos que siguen estudiando. La mayoria de los regímenes pagan la pensión de orfandad sin límite de edad a los hijos inválidos.

De todo esto se concluye que los cálculos matemáticos relativos a las tres categorías de pensión exigen el conocimiento de una serie de probabilidades y de cantidades básicas: la mortalidad de activos, la mortalidad de beneficios de pensiones de invalidez y de vejez, la probabilidad de estar casado o la probabilidad de dejar una viuda con derecho a pensión, la mortalidad de esas viudas y sus probabilidades de contraer nuevas nupcias y la distribución por edad de las mujeres en función de la edad del cónyuge asegurado, el número y la distribución por edad de los hijos, etcétera.

PENSIONES BASICAS

En la presente sección y en la siguiente se supone que los montos anuales de las pensiones son iguales a la unidad y que todos los pagos periódicos se efectúan en mensualidades de 1/12, aún cuando no se precise de manera expresa cada vez. Si se prevé otra forma de pago, entonces $\beta^{(12)}$ es reemplazado por el término de corrección que corresponda.

$$\beta^{(m)} = \frac{m-1}{2m}$$

dónde m es el número de fracciones que se le hacen a un año.

En el tratamiento matemático del seguro de pensiones sólo se consideran las pensiones pagaderas por adelantado. Sin embargo, la transición a pensiones pagaderas a plazo vencido no presenta ninguna dificultad.

Todas las fórmulas se refieren a hombres asegurados, pero también son válidas para las mujeres aseguradas.

El cálculo de los valores conmutados necesarios y la deducción de los valores actuales de las diferentes categorías de pensiones consisten casi siempre en una transcripción formal inmediata de los valores y fórmulas generales, de tal suerte que en la mayoría de los casos será suficiente una enumeración esquemática.

Asegurados activos

$\{l_x^{aa}\}$= orden dado de los activos $x_0 \le x \le u$

$D_x^{aa} = l_x^{aa} v^x$ = valor conmutado básico de primer orden de los activos de edad x.

El conmutado básico de segundo orden es:

$$N^{aa}_{x:u-x} = N^{aa}_{x(u)} = D^{aa}_{x} + D^{aa}_{x+1} + \ldots + D^{aa}_{u-1}$$

Ello corresponde a los pagos efectuados por adelantado por cada año del período de actividad [*x*, *u*]. Si en la práctica el período de actividad se termina a una edad $s \leq u$, entonces

$$N^{aa}_{x:u-x} = N^{aa}_{x(s)} = N^{aa}_{x(u)} - N^{aa}_{s(u)}$$

El conmutado de segundo orden para los pagos mensuales es igual a:

$$\overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x(u)} = N^{aa}_{x(u)} - \beta^{(12)}(D^{aa}_{x} - D^{aa}_{u})$$

Si $u = \omega$, entonces el término D^{aa}_{u} desaparece.

El conmutado de primer orden correspondiente a $\overset{(12)}{D}{}^{aa}_{x}$ rara vez es utilizado y casi no hay posibilidad de encontrarlo en las tablas usuales. En dado caso, se calcula igual que la diferencia.

$$\overset{(12)}{D}{}^{aa}_{x} = \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x(u)} - \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x+1(u)} = (1-\beta^{(12)})D^{aa}_{x} + \beta^{(12)}D^{aa}_{x+1}$$

El conmutado de tercer orden para los pagos mensuales se define de la manera siguiente:

$$\overset{(12)}{S}{}^{aa}_{x(u)} = \sum_{t=0}^{u-x-1} \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x+t(u)} = \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x(u)} + \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x+1(u)} + \ldots + \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{u-1(u)}$$

entonces

$$\overset{(12)}{S}{}^{aa}_{x(u)} = \sum (t+1)\,\overset{(12)}{D}{}^{aa}_{x+t} = \overset{(12)}{D}{}^{aa}_{x} + 2\,\overset{(12)}{D}{}^{aa}_{x+1} + \ldots + (u-x)\,\overset{(12)}{D}{}^{aa}_{u-1}$$

para $s<u$ se tiene:

$$\overset{(12)}{S}{}^{aa}_{x} = \overset{(12)}{S}{}^{aa}_{x(u)} - \overset{(12)}{S}{}^{aa}_{s(u)}$$

y

$$\overset{(12)}{D}{}_x^{aa} + 2\overset{(12)}{D}{}_{x+1}^{aa} + \ldots + (s-x)\overset{(12)}{D}{}_{s-1}^{aa} = \overset{(12)}{S}{}_{x(u)}^{aa} - \overset{(12)}{S}{}_{s(u)}^{aa} - (s-x)\overset{(12)}{N}{}_s^{aa}$$

Si el orden de los activos efectivamente se termina con $x=u$, las mayoría de las veces se reemplazan los símbolos, respectivamente por los símbolos más sencillos $\overset{(12)}{N}{}_x^{aa}$ y $\overset{(12)}{S}{}_x^{aa}$.

La cotización a pagar por un asegurado activo puede ser interpretada como una "renta de actividad"; el valor actual de los salarios cotizables también lo es. En los regímenes de pensiones vinculadas a los salarios con frecuencia hay una relación aritmética fija entre el salario sujeto a cotización y la cotización, de modo tal que uno puede ser determinado a partir de la otra.

Si $s \leq u$ es el límite efectivo para el otorgamiento de la pensión de vejez, entonces el valor actual de una renta de actividad pagadera por adelantado, en mensualidades de 1/12 es dado por:

$$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}_{x:s-x}^{aa} = \frac{\overset{(12)}{N}{}_x^{aa} - \overset{(12)}{N}{}_s^{aa}}{D_x^{aa}} = \ddot{a}_{x:s-x}^{aa} - \beta^{(12)}\left(1 - \frac{D_s^{aa}}{D_x^{aa}}\right)$$

El término de corrección respecto a $\overset{(12)}{\ddot{a}}{}_{x:u-x}^{aa}$ siempre es $\beta^{(12)}\left(1 - \frac{D_u^{aa}}{D_x^{aa}}\right)$ y que solamente en el caso de que $u=\omega$ dicho término se reduce a $\beta^{(12)}$.

Por consiguiente, el fallecimiento y la invalidez serán considerados como las únicas causas de eliminación que dan derecho al disfrute de una prestación, a la que corresponden las probabilidades dependientes q_x^a e i_x. Los conmutados correspondientes de primer orden de las salidas son:

$$C_x^{aa} = v^{\frac{1}{2}} D_x^{aa} * q_x^{a}$$

y

$$C_x^{ai} = v^{\frac{1}{2}} D_x^{aa} * i_x$$

Para los conmutados de orden superior se utilizan los símbolos siguientes:

$$M_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{aa} \qquad R_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}^{aa}$$

o bien:

$$M_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{ai} \qquad R_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}^{ai}$$

El mecanismo aritmético de estos conmutados, particularmente la relación entre los conmutados de orden superior con el de primer orden, es el mismo que para los conmutados básicos *Dx, Nx, Sx.*

Inválidos

$\{l_x^i\}$ = orden (cerrado) simple o compuesto de supervivencia de los beneficiarios de una pensión de invalidez, siempre que la muerte sola o la muerte y la reactividad sean consideradas como causas de eliminación.

$D_x^i = l_x^i v^x$ = número descontado o conmutado de primer orden.

$N_x^i = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}^i$ = conmutado de segundo orden

$\ddot{a}_x^i = \dfrac{N_x^i}{D_x^i}$ = valor actual de la edad x de la pensión de invalidez de monto "1" pagadero anualmente por anticipado.

$$\overset{(12)}{N_x^i} = N_x^i - \beta^{(12)} D_x^i$$

$\overset{(12)}{\ddot{a}_x^i} = \dfrac{\overset{(12)}{N_x^i}}{D_x^i} = \ddot{a}_x^i - \beta^{(12)}$ = valor actual de la edad x de la pensión de invalidez de un monto anual "1" pagadero mensualmente por anticipado.

En la hipótesis de que $q_x^i = q_x$ para $x \geq u$ en

$$\overset{(12)}{\ddot{a}_x^i} = \overset{(12)}{\ddot{a}_x^i} (x \geq u)$$

En ciertos regímenes, la pensión de invalidez es considerada como una pensión temporal pagadera hasta el límite de edad *s* y se convierte a partir de la edad *s* en pensión de vejez. El valor actual de dicha pensión es

$$\overset{(12)}{\ddot{a}^i_{x:\overline{s-x}|}} = \frac{(\overset{(12)}{N_x^i} - \overset{(12)}{N_s^i})}{D_x^i}$$

El número descontado o conmutado de primer orden de los inválidos fallecidos es representado por:

$$C_x^i = v^{\frac{1}{2}} D_x^i q_x^i$$

y los conmutados de segundo y tercer orden correspondientes, por:

$$M_x^i = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^i \qquad R_x^i = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}^i$$

Si, excepcionalmente, se necesita el número descontado de reanudaciones de actividad, entonces éste se representa por:

$$C_x^i = v^{\frac{1}{2}} D_x^i * r_x^{ia}$$

Entonces, el número total descontado de personas eliminadas del beneficio de una persona de invalidez es

$$C_x^i + C_x^{ia}$$

Para los conmutados de orden superior se emplearán las notaciones correspondientes.

Viudas

$\{l_y^w\}$= orden de sobrevivencia compuesto para las viudas

$$D_y^w = l_y^w v^y$$

$$N_y^w = \sum_{t=0}^{\omega-y-1} D_{y+t}^w$$

$$\overset{(12)}{N_y^w} = N_y^w - \beta^{(12)} D_y^w$$

$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}_y^w = \dfrac{\overset{(12)}{N}{}_y^w}{D_y^w} = \ddot{a}_y^w - \beta^{(12)} =$ valor actual de la edad "*y*" y de la pensión de viudez de un monto anual unitario pagadera mensualmente por adelantado.

De los dos casos de eliminación: muerte (q_y^w) y segundas nupcias (h_y^w) el término da derecho, en general, al pago de una asignación o finiquito cuyo total es casi siempre un múltiplo de la pensión anual. Así, se necesitan los siguientes conmutados:

$$C_y^{wh} = v^{\frac{1}{2}} D_y^w h_y$$

$$M_y^{wh} = \sum_{t=0}^{w-y-1} C_{y+t}^{wh}$$

Si la indemnización se compone de λ pensiones anuales de monto unitario cada una, entonces el valor actual de esta asignación que corresponde a una viuda de edad "*y*" está dado por:

$$\lambda A_y^{wh} = \lambda \frac{M_y^{wh}}{D_y^w}$$

El valor actual global de una pensión de viudez, incluyendo el finiquito en caso de un nuevo matrimonio es:

$$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}_y^{w+\lambda} = \overset{(12)}{\ddot{a}}{}_y^w + \lambda A_y^{wh}$$

Huérfanos

Si $\{l_x\}$ es el orden de sobrevivencia de los huérfanos, S_z la edad límite de la pensión de orfandad, entonces $\ddot{a}^{(12)}_{z:s_z-z}$ es el valor actual de la pensión de orfandad pagadera mensualmente por adelantado en el intervalo de edad $[z, S_z]$.

Con frecuencia se prefieren las rentas temporales fijas correspondientes:

$$\ddot{a}^{(12)}_{s_z-z} = \frac{1-v^{S_z-z}}{1-v} - \beta^{(12)}(1-v^{S_z-z}) = (1-v^{S_z-z})\left(\frac{1}{1+i} - \beta^{(12)}\right)$$

Como en un régimen completo de pensiones de vejez, invalidez y sobrevivencia, el peso financiero relativo de las pensiones de orfandad de todos modos es muy reducido.

En los países en vías de desarrollo, donde la mortalidad es más elevada, el efecto de emplear las rentas temporales en vez de rentas vitalicias será más importante. En cambio, como a menudo se ignoran las estipulaciones especiales aplicables, por ejemplo a los huérfanos de padre y madre o a los huérfanos enfermos, el empleo de rentas temporales puede compensar el efecto de no tomar en cuenta dichas estipulaciones especiales.

EXPECTATIVAS BASICAS DEL SEGURO DE PENSIONES

Se trata de determinar la expectativa, para un trabajador activo de edad *x*, haciendo referencia a algunas prestaciones, a los salarios asegurados o a las cotizaciones. El camino a seguir casi siempre consiste en establecer primero las expectativas de D_x^{aa} trabajadores activos de edad x y luego dividir por D_x^{aa}. En consecuencia, es suficiente conocer las expectativas para D_x^{aa} activos. Además de que, en los cálculos prácticos, se puede renunciar a la determinación inmediata de las expectativas individuales para un activo.

En la medida en que el método discreto se emplea a continuación, se recordará que a las personas eliminadas en el intervalo $[x, x+1]$ se les atribuye la edad promedio de eliminación $x+1/2$.

Se supondrá que las anualidades (pensiones o salarios) en el futuro también son iguales a "1" y que las mensualidades son iguales a 1/12

La expectativa para D_x^{aa} activos de edad x, con referencia a una renta de actividad que se amplía hasta la edad s es dada por:

$$\overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x:S-x} = \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x} - \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{S}$$

y la expectativa correspondiente para un activo de edad x es dada por la renta de actividad establecida.

$$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{aa}_{x:s-x} = \frac{\overset{(12)}{N}{}^{aa}_{x} - \overset{(12)}{N}{}^{aa}_{s}}{D_x^{aa}}$$

El cálculo de la expectativa para un activo de edad s, a una pensión de invalidez servirá al mismo tiempo de modelo para la elaboración de otras expectativas. Por eso, este caso se trata de manera detallada.

El número descontado de personas que quedaron inválidas en el intervalo anual x es:

$$C_x^{ai} = v^{\frac{1}{2}} D_x^{aa} * i_x$$

El valor actual de una pensión de invalidez que se origina en la edad promedio admitida x + 1/2 y que es pagadera mensualmente por adelantado mientras dure la invalidez, se proporciona por la fórmula aproximada:

$$\ddot{a}^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ddot{a}^{i\,(12)}_{x} + \ddot{a}^{i\,(12)}_{x+1}\right)$$

Por tanto, la carga total de las pensiones otorgadas a las personas que quedaron inválidas en el intervalo de edad $[x+1]$es:

$$D_x^{ai} = C_x^{ai}\, \ddot{a}^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} D_x^{aa} * i_x\, \ddot{a}^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}}$$

Esta expresión recibe el nombre de conmutado compuesto de primer orden con la parte demográfica $v^{\frac{1}{2}} D_x^{aa} * i_x$ (número descontado y conmutación de inválidos) y la parte de la pensión $\ddot{a}^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}}$

El conmutado de segundo orden:

$$N_x^{ai} = D_x^{ai} + D_{x+1}^{ai} + \ldots + D_{w-1}^{ai}$$

es igual al valor de la expectativa, referida a D_x^{aa} activos de edad x, de tener acceso al beneficio de una pensión de invalidez entre las edades x y u. La expectativa correspondiente para un activo de edad x es representada por:

$$a_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}}$$

Las expectativas que se limitan al intervalo de edad *[x, s]* son proporcionadas por:

$$N_x^{ai} - N_s^{ai} \quad \text{donde} \quad a_{x:s-x}^{ai} = \frac{(N_x^{ai} - N_s^{ai})}{D_x^{aa}}$$

Los conmutados de orden superior que se necesitarán posteriormente son:

$$S_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t}^{ai} = D_x^{ai} + 2D_{x+1}^{ai} + \ldots + (u-x)D_{u-1}^{ai}$$
$$T_x^{ai} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} S_{x+t}^{ai} = N_x^{ai} + 2N_{x+1}^{ai} + \ldots + (u-1)N_{u-1}^{ai}$$

Debe observarse que:

$$N_u^{ai} = S_u^{ai} = T_u^{ai} = 0$$

En los regímenes en los que la pensión de invalidez como tal es pagada hasta la edad *u* y luego es transformada en una pensión de vejez a partir de *u*, se ajustan los conmutados D_x^{ai} sobre las pensiones de invalidez temporales y se escribe:

$$D_{x/u}^{ai} = C_x^{ai}\, \ddot{a}^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}:u-x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} C_x^{ai} \left\{ \ddot{a}^{i\,(12)}_{x:u-x} + \ddot{a}^{i\,(12)}_{x:u-x-1} \right\}$$

De manera análoga, se denotarán los conmutados de orden superior $N_{x/u}^{ai}$. El valor de la expectativa de un activo es, entonces

$$a_{x/u}^{ai} = \frac{N_{x/u}^{ai}}{D_x^{aa}}$$

Dicha transformación es necesaria si las pensiones de vejez e invalidez son efectivamente diferentes, pero puede ser deseable por razones estadísticas.

Expectativas a las pensiones de sobrevivientes

Se pueden distinguir dos métodos principales para establecer las expectativas que se refieren a las pensiones de sobrevivientes. En el primer método, se considera como una unidad al grupo familiar de sobrevivientes que tienen derecho a pensión al fallecimiento de la persona asegurada (incluyendo el fallecimiento de un beneficiario de pensión de vejez o de invalidez); de este modo, se establece un orden especial de eliminación del núcleo familiar y su composición promedio en función de la edad del fallecido y del tiempo transcurrido desde su muerte.

Con el segundo método, se fijan expectativas separadas para cada categoría de beneficiarios de pensiones de sobrevivientes. Este método se puede emplear también en un régimen en el que las tasas de pensiones de viudas y huérfanos son combinadas en una sola fórmula. En un régimen de este tipo, se puede asignar a la viuda una parte equivalente a la pensión que corresponde al "primer" beneficiario o la de un grupo familiar compuesto de un beneficiario único y luego asignar partes convenientes a los huérfanos, teniendo en cuenta el hecho de que en la mayoría de los regímenes el peso actuarial de las pensiones de orfandad es medianamente ligero en comparación con el de las pensiones de viudez.

Expectativas a las pensiones de viudez

Hay que tener en cuenta las disposiciones del esquema legal de las pensiones; por ejemplo, el derecho a una pensión de viudez puede ser incondicional o depender de ciertas condiciones (una edad determinada, incapacidad para trabajar, existencia de hijos pequeños, etc.). Si el derecho es condicional, entonces se debe distinguir además si está vinculado al hecho de que dichas condiciones deberán estar cumplidas en el momento del fallecimiento del esposo asegurado, o si se trata de un derecho que puede ser diferido, por ejemplo, hasta que se llegue posteriormente al límite de edad o que ulteriormente sobrevenga la incapacidad para trabajar. Recordemos también que existen regímenes que otorgan pensiones de adaptación temporal para viudas, que tienen una duración de uno o dos años.

Evidentemente, no es posible tratar todos los casos posibles; también nos limitaremos al más frecuente, a saber, aquél en el que existe una probabilidad determinada w_x, de que un hombre asegurado de edad x deje al morir una viuda que tenga derecho a pensión; las condiciones existentes eventualmente son tomadas en consideración en el valor de las w_x.

Para determinar, bajo estas condiciones, la expectativa para un activo de edad x, se deben distinguir tres casos; el asegurado puede fallecer como activo en el intervalo de edad $[x, u]$ y dejar una viuda que tiene derecho a pensión; puede quedar inválido primero y morir más tarde como inválido o bien llegar a la edad u en estado activo y muere mientras disfruta una pensión de vejez.

Por esto resulta útil desglosar la expectativa buscada en tres expectativas parciales correspondientes.

Debido a un cierto paralelismo con el procedimiento principal en los tres casos, primero se toma un orden general de sobrevivencia $\{l_x\}$ como base. El número descontado del número de viudas de los hombres fallecidos en el intervalo de edad $[x, x+1]$ y que tienen derecho a pensión es aproximadamente:

$$v^{\frac{1}{2}} D_x q_a w_{x+\frac{1}{2}} = C_x w_{x+\frac{1}{2}}$$

El valor actual promedio de una pensión de viudez para las viudas de los hombres fallecidos a la edad x (incluyendo la asignación o finiquito en caso de nuevo matrimonio al total de λ pensiones anuales). Entonces:

$$D_x^w = C_x w_{x+\frac{1}{2}} \ddot{a}_{y(x+\frac{1}{2})}^{(12)\,w+\lambda h}$$

designa la expectativa de una pensión de viudez referida a Dx hombres de edad x y en relación al caso de que el fallecimiento se produzca en el intervalo de tiempo $[x, x+1]$ $N_x^w = \sum_{t=0}^{w-x-t} D_{x+t}^w$ fórmula que designa la expectativa total, para los mismos hombres, de una pensión de viudez independiente del fallecimiento.
Para el cálculo del valor actual promedio de una pensión de viudez, existen dos posibilidades:

El método probablemente más utilizado en el pasado es el de la edad promedio y_x de las esposas de hombres de edad **x**, se tiene entonces:

$$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{w+\lambda h}_{y(x)} = \overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{w+\lambda h}_{x(y)}$$

El método más preciso para la distribución relativa de las edades de las viudas utiliza la función de reparto k_x^y de las esposas de edad "*y*" de hombres de edad x ó $\sum_{(y)} K_x = 1$ para una edad *x* dada. Con este método se obtiene:

$$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{w+\lambda h}_{y(x)} = \sum_{(y)} k_x^y \, \overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{w+\lambda h}_{y}$$

En la práctica, uno se deberá preguntar si aún se puede utilizar el método de las edades promedio "yx" frente a una gran dispersión de la distribución de las edades de las mujeres. Eso dependerá evidentemente también de las estadísticas disponibles. También se puede desear introducir, conscientemente, un margen de seguridad más grande, para cubrir ciertas prestaciones secundarias no tomadas en consideración en los cálculos, por ejemplo los derechos a pensión de otros sobrevivientes que no sean las viudas y los huérfanos, puesto que puede revestir cierta importancia en un régimen de pensiones de sobrevivientes.

La aplicación conforme al sentido de los símbolos generales D_x^w y N_x^w conduce al establecimiento de las diferentes partes de la expectativa buscada, para un activo, refiriéndose a una pensión de viudez, incluyendo la asignación o finiquito en caso de que la viuda se vuelva a casar.

Primero se debe determinar, por facilidad, la expectativa que se refiere a una pensión de viudez para una persona que ya está recibiendo una pensión de invalidez o de vejez.

Expectativa para el beneficio de una pensión de invalidez a la edad *x:*

$$a_x^{iw} = \frac{N_x^{iw}}{D_x^i}; \qquad \left(D_x^{iw} = C_x^i w_{x+\frac{1}{2}} \, \ddot{a}_{y(x+\frac{1}{2})}^{\overset{(12)}{w+\lambda h}}; N_x^{iw} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}^{iw} \right)$$

Expectativa para el beneficiario de una pensión de vejez a la edad x:

$$a_x^{w} = \frac{N_x^{w}}{D_x}; \qquad \left(D_x^{w} = C_x w_{x+\frac{1}{2}} \, \ddot{a}_{y(x+\frac{1}{2})}^{\overset{(12)}{w+\lambda h}}; N_x^{w} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}^{w} \right) \qquad x \geq u$$

Al relacionar primero todas las expectativas para D_x^{aa} activos, sucesivamente se obtiene:

en caso de fallecimiento en estado activo (físico) en el intervalo de edad $[\xi, \xi+1]$; $x \leq \xi \leq u-1$;

$$C_\xi^{aa} w_{\xi+\frac{1}{2}} \, \ddot{a}_{y(\xi+\frac{1}{2})}^{\overset{(12)}{w+\lambda h}}$$

en caso de que un activo de edad *x* quede inválido en el intervalo $[\xi, \xi+1)$; $x \leq \xi \leq u-1$ y muera entonces como inválido, la expectativa correspondiente es igual al producto de los números descontados de los nuevos inválidos C_ξ^{ai} de la expectativa para un inválido, con relación a una pensión de viudez, a saber:

$$C_{\xi}^{ai} a_{\xi+\frac{1}{2}}$$

en caso de que el asegurado llegue a la edad u como activo (en sentido físico) y fallezca más tarde, la expectativa global está dada por:

$$D_{u}^{aa} a_{u}^{w}$$

Resumamos estas expectativas de la manera siguiente:

$$D_{\xi}^{aw} = C_{\xi}^{aa} w_{\xi+\frac{1}{2}} \ddot{a}^{(12)\,w+\lambda h}_{y(x+\frac{1}{2})} + C_{\xi}^{ai} a^{iw}_{\xi+\frac{1}{2}}; \qquad x \leq \xi \leq u-1$$

$$D_{x}^{aw} = N_{u}^{aw} = D_{u}^{ai} a_{u}^{w}$$

De este modo, la expectativa total para los D_{x}^{aa} activos, con relación a una pensión de viudez es:

$$N_{x}^{aw} = N_{x(u)}^{aw} + N_{u}^{aw}, \text{ ó } N_{x(u)}^{aw} = D_{x}^{aw} + \ldots + D_{u-1}^{aw}$$

La expectativa para un activo de edad *x* es:

$$a_{x}^{aw} = \frac{N_{x}^{aw}}{D_{x}^{aa}}$$

Para los cálculos prácticos a partir del método discreto, frecuentemente se utilizarán las expectativas completas N_{a}^{aw}. Cuando las fórmulas de cálculo de las pensiones son complicadas, la solución puede ser simplificada por un tratamiento separado de $N_{x(u)}^{aw}$ y N_{u}^{aw}.

Los conmutados de orden superior S_x^{aw} y $S_{x(u)}^{aw}$ así como T_x^{aw} y $T_{x(u)}^{aw}$ son establecidos de la siguiente manera:

$$S_x^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x} N_{x+t}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x} (t+1) D_{x+t}^{aw}$$

$$S_{x(u)}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x-1} N_{x+t(u)}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x-1} (t+1) D_{x+t}^{aw}$$

de modo que

$$S_x^{aw} - S_{x(u)}^{aw} = (u-x+1) D_u^{aw} + (u-x+1) N_u^{aw}$$

además:

$$T_x^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x} S_{x+t}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x} (t+1) N_{x+t}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x} \frac{(t+1)(t+2)}{2} D_{x+t}^{aw}$$

$$T_{x(u)}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x-1} S_{(x+t)(u)}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x-1} (t+1) N_{(x+t)(u)}^{aw} = \sum_{t=0}^{u-x-1} \frac{(t+1)(t+2)}{2} D_{x+t}^{aw}$$

entonces:

$$T_x^{aw} - T_{x(u)}^{aw} = \frac{(u-x+1)(u-x+2)}{2} D_u^{aw} = \frac{(u-x+1)(u-x+2)}{2} N_u^{aw}$$

Expectativas a las pensiones de orfandad

Se estableció que:

Z = edad de los hijos

S_z = edad límite para el disfrute de una pensión de orfandad.

Se distinguen dos límites de edad diferentes: $S_z^{(1)}$ edad límite normal y $S_z^{(2)}$ la de un niño que continúa sus estudios, se puede tomar como base la edad límite promedio fijado con ayuda de estadísticas, sin cometer por tal motivo errores de cierta importancia.

Los casos raros de niños totalmente inválidos con pensiones de orfandad pagaderas sin límite de edad, con frecuencia no son tomados en consideración dentro de los cálculos, puesto que se supone que las cargas suplementarias están cubiertas por el margen de seguridad general. Se procede de modo análogo en lo concerniente a las pensiones más elevadas para los huérfanos de padre y madre. Sin embargo, tanto en uno como en otro caso, ninguna dificultad se opondrá a un cálculo preciso.

Si la ley prevé límites de edades diferentes para niños y niñas (como sucede en diferentes países de Latinoamérica), se efectuarán por separado los cálculos, según el sexo de los huérfanos, o bien se elegirá una edad límite promedio establecida por medio de estadísticas.

K_z = número promedio de hijos (de edad $z \leq S_z$) de un hombre de edad *x*.
El establecimiento de fórmulas de las expectativas que se relacionan con las pensiones de orfandad se hace de modo paralelo a las fórmulas desarrolladas anteriormente para las expectativas que se refieren a las pensiones de viudez.

$\overset{(12)}{\ddot{a}}{}^{k}_{z(x)}$ significará el valor presente promedio de las pensiones de orfandad de los niños que tienen derecho a pensión y cuyo padre tenía la edad x al fallecer.

i) El método de la edad promedio z_x de los hijos cuyos padres tenían la edad *x*; tenemos:

$$\ddot{a}^{(12)k}_{z(x)} \cong \ddot{a}^{(12)}_{z:\overline{s_t - z_t}|}$$

El método de las edades promedio proporciona en general valores más elevados, en presencia de edades límite s_t que, por lo general son más elevadas hoy. El margen de seguridad obtenido puede ser oportuno para cubrir las cargas adicionales referentes a los niños inválidos o a los huérfanos de padre y madre, si estas cargas no fueron calculadas directamente. Como por otra parte, las cargas de las pensiones de orfandad de todos modos sólo tienen, en las cargas totales de un régimen de pensiones, un peso menor, se dará preferencia a este método. Lo que importa es que uno se dé cuenta de los límites de error y los márgenes de seguridad posibles.

Valor actual de las pensiones de vejez y de invalidez en curso de pago

Si se tiene que evaluar el conjunto de pensiones de vejez y de invalidez, se agregará al valor presente de la pensión propiamente dicha, el valor de la expectativa referente a las pensiones de sobrevivientes resultantes. Con base en la anterior, para el valor total presente se tiene:

Pensiones de vejez de una pensión de edad x:

$$\ddot{a}^{(12)(a)}_{x} + a^{w}_{x} + a^{k}_{x}$$

Con frecuencia, tal como se hace aquí se pueden tomar sin cometer un error grave las a^{w}_{x} que, en primer lugar, sólo son válidas para $x \geq u$ ya que de todos modos no se distingue si el pensionado de edad x es "activo" o "inválido", en el sentido del orden de los activos.

Pensiones de invalidez de una persona de edad x

$$\ddot{a}_x^{(12)i} + a_x^{iw} + a_x^{ik}$$

RESERVA MATEMATICA (Método individual)

Si el régimen dado está financieramente equilibrado, entonces la ecuación de equivalencia generalizada deberá ser verificada en todo momento $t > t_0$.

Reserva + {Valor presente de los ingresos en primas futuras probables} = {Valor presente de los gastos futuros probables}

De lo que resulta que la reserva es igual a la diferencia de los valores presentes de los ingresos en primas futuras probables y de los gastos futuros probables.

Si la reserva efectiva existente en el momento t es superior o inferior a la reserva teórica obtenida a partir de la ecuación de equivalencia, el régimen presenta un excedente actuarial o un déficit actuarial. Un déficit actuarial no necesariamente debe traducirse como un déficit de tesorería. Con frecuencia, las fuertes reservas acumuladas pueden hacer creer en una situación financiera favorable, aunque esta situación sea deficitaria en sentido actuarial desde tiempo atrás.

Para efectos del método "individual" seguido en esta sección, es importante hacer las distinciones siguientes:

La reserva de los activos: se obtiene relacionando la ecuación de equivalencia con la comunidad de riesgos de todos los activos que existen en el momento de la observación, lo que significa en particular que el valor presente de los gastos sólo comprende las pensiones de invalidez, vejez y sobrevivientes procedente en el futuro de este efectivo de los activos.

La reserva de los pensionados: la comunidad de riesgos de la ecuación de equivalencia es representada por el efectivo de los pensionados que existe en el momento de la observación; el valor presente de los ingresos en primas es nulo y el valor presente de los gastos incluye, junto con el total de las pensiones existentes, las pensiones de sobrevivientes que en el futuro originarán las pensiones de invalidez y vejez en curso.

Por esta razón, a continuación sólo desarrollaremos los métodos de determinación de la reserva:

Para establecer la fórmula de la reserva de los activos, hay dos métodos principales: el método prospectivo y el método retrospectivo. La determinación de la reserva con ayuda de la ecuación de equivalencia previamente citada, corresponde al método prospectivo, ya que ella está vinculada al valor presente de los ingresos y gastos futuros.

En el caso teórico de que un seguro se desarrolle exactamente de acuerdo con las bases de cálculo, el importe acumulado con el auxilio del excedente de los ingresos en primas sobre los gastos - estos últimos también incluyen las contribuciones a las reservas de los pensionados existentes - y con la ayuda de los intereses calculados al porcentaje técnico adoptado, debe constituir igualmente la reserva buscada de los activos. El método retrospectivo de determinación de la fórmula de la reserva se basa en el examen del desarrollo de este proceso.

Por supuesto, todas las consideraciones siguientes se refieren ante todo al aseguramiento de una generación hipotética de personas que ingresaron al seguro a la misma edad x. Se trata, principalmente, de establecer la fórmula de la reserva individual de un activo en el momento t. Aquí los métodos, el prospecto y el retrospectivo, son equivalentes.

Además, es ilustrativo prestar atención a la evolución de las reservas de los activos de un régimen de pensiones y por consiguiente de las reservas del régimen mismo -tomando en cuenta un ejemplo para el cual se realizaron los cálculos concretos.

Pero antes se recordarán las consideraciones siguientes, que permiten extraer mejor el sentido de las dos reservas, es decir las de los activos y las de los beneficiarios de las pensiones; los conmutados fundamentales utilizados en el seguro de pensiones y que sirvieron de base para el establecimiento de las expectativas:

Se sabe que el riesgo asumido por la compañía de seguros es creciente en el tiempo, es decir, que la probabilidad de que una persona de edad x fallezca al año siguiente es mayor que la probabilidad de que una persona de edad x + t fallezca en el año siguiente:

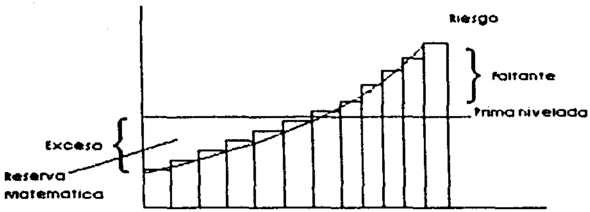
$$ {}_1q_x < {}_1q_{x+t} $$

por otra parte en los seguros de vida siempre se pacta el pagar el seguro correspondiente a prima nivelada por lo que se asume que la prima pagada en los primeros años es mayor al riesgo asumido por la compañía.

$$ PNN > A_{x+t:1} \quad \text{Para alguna t} $$

Supongamos un seguro ordinario de vida:

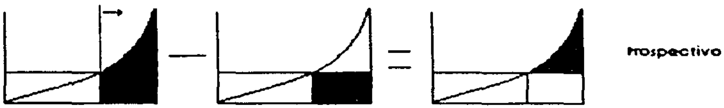
$$ * \, PNN \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Obligacion} \\ \text{aseg.} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Obligacion} \\ \text{compañia} \end{Bmatrix} $$



Método prospectivo

$${}_tV^P_x = A_{x+t} - P_x\,\ddot{a}_{x+t}$$

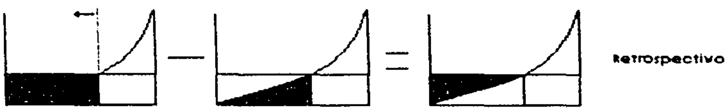
$${}_tV^P_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$



Método retrospectivo

$${}_tV^R_x = \left\{P_x\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A^1_{x:\overline{t}|}\right\}\frac{(1+i)^t\,l_x}{l_{x+t}}$$

$${}_tV^R_{x:\overline{n}|} = \left\{P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A^1_{x:\overline{t}|}\right\}\frac{1}{{}_tE_x}$$



A continuación demostraremos que ambos métodos, son equivalentes:

Demostrar:

$${}_t\overset{P}{V}_x = {}_t\overset{R}{V}_x$$

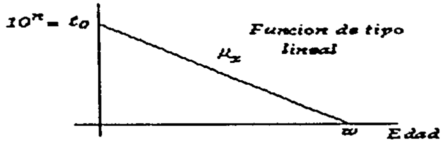
$$
\begin{aligned}
{}_t\overset{P}{V}_x &= A_{x+t} - P_x\ddot{a}_{x+t} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \\
&= \left[\frac{M_{x+t}-M_x+M_x}{D_{x+t}} - P_x\frac{N_{x+t}-N_x+N_x}{D_{x+t}}\right] \\
&= \left[\frac{M_{x+t}-M_x+M_x}{D_{x+t}} - P_x\frac{N_{x+t}-N_x+N_x}{D_{x+t}}\right]\left(\frac{D_x}{D_x}\right) \\
&= \left[\frac{M_{x+t}-M_x+M_x}{D_x} - P_x\frac{N_{x+t}-N_x+N_x}{D_x}\right]\left(\frac{D_x}{D_{x+t}}\right) \\
&= -\left[-\left(\frac{M_{x+t}-M_x+M_x}{D_x}\right) - P_x\left(-\left(\frac{N_{x+t}-N_x+N_x}{D_x}\right)\right)\right]\frac{1}{{}_tE_x} \\
&= \left[\frac{M_x-M_{x+t}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x} - P_x\left(\frac{-N_x+N_{x+t}}{D_x} + \frac{N_x}{D_x}\right)\right]\frac{1}{{}_tE_x} \\
&= \left[-A_{x:t} + A_x - \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\left(-\ddot{a}_{x:t} + a_x\right)\right]\frac{1}{{}_tE_x} \\
&= \left[-A_{x:t} + A_x + \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x:t} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x}a_x\right]\frac{1}{{}_tE_x} \\
&= \left[-A_{x:t} + A_x + \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x:t}\right]\frac{1}{{}_tE_x} \\
&= \left[P_x\,\ddot{a}_{x:t} - A_{x:t}\right]\frac{1}{{}_tE_x}
\end{aligned}
$$

Además de los principios básicos de las pensiones, otro aspecto técnico que se utilizará en el presente trabajo es la tasa instantánea de mortalidad, la cual se detalla en la siguiente sección.

ANTECEDENTES DE LA TASA INSTANTANEA DE MORTALIDAD

Desde que se realizaron los primeros estudios acerca de la mortalidad, a principios del siglo XVIII, se trató de hallar una expresión analítica que representara la función l_x. El objetivo era simplificar los cálculos en que intervenían las probabilidades de vida de varias personas.

Se propusieron algunas teorías por Abraham de Moivre, que datan de 1725, las cuales sólo consideraban la función l_x, debido a que la función μ_x no había surgido aún. En el siglo XVIII un francés llamado L'Moivre creó la función de mortalidad con el principio de linealidad.



Con pendiente $\frac{0-\ell_0}{\omega - 0} = \frac{-\ell_0}{\omega}$

$$\mu_x = \frac{-\ell_0}{\omega}$$

La función μ_x Tuvo su origen, un siglo después, cuando Gompertz enunció la llamada "hipótesis de Gompertz", en una comunicación dirigida a la "Royal Society" de Londres.

Decía Gompertz en su célebre memoria:

"Es posible que la muerte sea consecuencia de dos causas generalmente coexistentes: una, el azar, sin disposición previa a la muerte o al deterioro; otra, una deterioración o una impotencia creciente para resistir a la destrucción. Si, por ejemplo, existiesen ciertas enfermedades a las que jóvenes y viejos estuvieran igualmente expuestos, y que fuesen igualmente funestas para viejos y para jóvenes, es evidente que las muertes por esta causa, en ambos grupos guardarían entre sí la misma proporción que en los grupos dados, con tal de que los números fueran suficientemente grandes como para que pudiesen operar las leyes del azar. La intensidad de la mortalidad podría tenerse por

constante. Si no hubiera otras enfermedades la vida tendría en todas las edades el mismo valor y, tanto el número de sobrevivientes como de muertos decrecería con la edad en progresión geométrica mientras que las edades crecían en progresión aritmética.
Pero si el género humano adquiere, de día en día gérmenes de indisposición, o está cada vez más expuesto a morir, lo que implica que el número de sobrevivientes, a partir de cierto número de personas de igual edad, decrece en intervalos iguales de tiempo, más rápidamente que la progresión geométrica y que, así como las probabilidades de oír decir que un determinado hombre a llegado a un determinado punto de la vejez, disminuyen en una progresión mucho más rápida, aunque no haya límite alguno con respecto a la edad que pueda alcanzar.
Si el agotamiento del poder del hombre para evitar la muerte fuera tal que, en promedio, y al fin de periodos de tiempo infinitamente pequeños, pero de igual duración, perdiera, también porciones iguales del poder de oponerse a la muerte que tenía al principio de dicho intervalo, entonces a la edad x la intensidad de la mortalidad por B(c)^x, siendo B y c constantes a determinar."

El modelo matemático de la hipótesis de Gompertz establece:

$$\mu_x = Bc^x$$

A partir de esta ecuación se tiene que:

$$-\frac{d}{dx}\log l_x = Bc^x$$

Al integrar ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$-\frac{B}{\log c} = \log g$$

$$\log l_x = -\frac{B}{\log c}c^x + cte$$

Sean:

$$cte = \log K$$

Entonces:

$$\log l_x = c^x \log g + \log K$$

$$l_x = Kg^{c^x}$$

Lo anterior será retomado en el capítulo tres, a fin de desarrollar el método alternativo propuesto. A continuación conoceremos los aspectos más relevantes del los seguros de pensiones derivados de las leyes de seguridad en nuestro país.

CAPITULO 2: LOS SEGUROS DE PENSIONES DERIVADOS DE LAS LEYES DE SEGURIDAD SOCIAL EN MÉXICO

Después de haber estudiado las bases técnicas de las matemáticas actuariales estamos en condiciones de comprender el régimen de seguridad social en México, desde un punto de vista técnico, en concordancia con los aspectos legales que lo sustentan.

México a través del tiempo ha vivido grandes cambios en su estructura económica y social. Las variables de salud, demografía y empleo en las que se sustentaron los conceptos y criterios que dieron origen al Instituto Mexicano del Seguro Social, han evolucionado en forma radical.

La seguridad social en el país inicia a principios del siglo, con la promulgación, el 5 de febrero de 1917, de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, que en su artículo 123 comprendido en el título VI, en el Apartado "A", señala que la seguridad tiene como principios fundamentales el garantizar a los trabajadores el derecho a la salud, la asistencia médica y el bienestar social, más adelante estos principios se aplican también para proteger a la familia del trabajador.

Como resultado del movimiento revolucionario de principios de este siglo, surge el Instituto Mexicano del Seguro Social en el año de 1943, otorgando prestaciones en dinero y especie, a cambio de una contribución tripartita, es decir, Estado, Empresa y Trabajadores.

La Ley del Seguro Social ha sufrido diversas modificaciones sustanciales, siendo la más reciente la publicada el día 21 de diciembre de 1995, cuyo efecto entró en vigor a partir del 1° de julio de 1997. Dentro de dichos cambios, el más importante fue el abandonar el sistema de reparto como base de funcionamiento, tanto del seguro de Invalidez, Vejez, Cesantía en Edad Avanzada y Muerte, introduciendo en su lugar el Sistema denominado de Capitalización Individual como base de funcionamiento de ambos seguros.

En México el esquema de seguridad social sufrió un cambio importante al modificarse la ley del seguro social cuyo objeto es un replanteamiento de los beneficios considerados en la Ley anterior, mediante el pago de rentas vitalicias a través de instituciones privadas de seguros.

Cabe mencionar que también se contempló el efecto colateral de propiciar ahorro interno que sirva de base para la inversión, resolver la problemática financiera enfrentada por el IMSS y coadyuvar a un sistema de beneficios más equitativo.

"El Nuevo Sistema de Pensiones constituye uno de los contribuyentes más importantes a la conformación de ahorro interno, elemento estratégico para reducir la dependencia de capitales del exterior.

Al cierre de 1999, la acumulación total del sistema representó 4.3% del PIB, 10% del ahorro financiero y 20.8% de la captación bancaria, al exhibir más de 194,000 millones de pesos, incluidos los recursos administrados por el INFONAVIT".[1]

El proceso de adquisición y operación de las pensiones derivadas de la seguridad social es regulado por la Secretaría de Hacienda y Credito Público

[1] Lunes 3 de julio de 2000; "Economista", "A tres años, ahorro interno creciente con el Nuevo Sistema de Pensiones", María Teresa Izquierdo.

(SHCP) a través la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro y la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF).

El Sistema de capitalización individual funciona a través de aportaciones periódicas que deben de hacer los asegurados a una cuenta individual, a nombre de cada uno de ellos en una institución especializada en el manejo de dichas cuentas individuales, con el objeto de que los asegurados formen un fondo durante toda su vida activa, mismo que le genera intereses periódicamente, con la finalidad de que al momento de su retiro, las aportaciones que haya hecho, adicionadas a los intereses que éstas hubieren generado, sean suficientes para financiarse la pensión que le corresponda de acuerdo con la ley y la cantidad necesaria que deberá entregarse a la compañía de pensiones denominada como monto constitutivo, para que la entidad aseguradora pueda otorgarle al trabajador una renta vitalicia y un seguro de sobrevivencia para sus beneficiarios cuando el pensionado fallezca.

El monto constitutivo está integrado por la cuenta individual del trabajador y, si esta no fuere suficiente, el Gobierno, a través del Seguro Social, otorga el complemento para establecer dicho monto.

La Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros (LGISMS), conocida originalmente con el nombre de Ley General de Instituciones de Seguros, fue publicada en el diario oficial de la federación del 31 de agosto de 1935. A partir de entonces y hasta la fecha ha tenido diversas modificaciones a fin de adecuar sus disposiciones conforme a la evolución del sector financiero del país, dentro del cual la actividad aseguradora tiene una relevante participación.

Las modificaciones a la citada ley en los últimos 10 años, si bien se han orientado a desregular la actividad de las aseguradoras, a liberalizarlas con fines de autogestión, también han tenido como propósito fundamental el mantener adecuadas regulaciones prudenciales que protejan los intereses de los usuarios y una supervisión que cuide el estricto cumplimiento de las normas técnicas y del régimen de solvencia que deben mantener las aseguradoras. La citada ley fue modificada mediante acuerdo publicado en el diario oficial de la federación el 23 de mayo de 1996, para dar lugar, como nuevo ramo de seguros de vida, a los seguros de pensiones derivados de la seguridad social.

LOS BENEFICIOS BASICOS DERIVADOS DE LA LEY DEL SEGRO SOCIAL

La nueva Ley del Seguro Social que entró en vigor el 1° de julio de 1997, contempla el otorgamiento de beneficios derivados de los siguientes riesgos:

1. Riesgos de trabajo
2. Enfermedades y Maternidad
3. Invalidez y Muerte
4. Retiro, Cesantia en Edad Avanzada y Vejez

Adicionalmente se consideran los servicios de guarderías y prestaciones sociales.

En el nuevo esquema de seguridad social se contemplan formas de aseguramiento que se llevarán a cabo por la seguridad privada de acuerdo a cada uno de los riesgos antes señalados.

De acuerdo al tipo de riesgos en función a los cuales se define el monto del beneficio a otorgar, los seguros se pueden clasificar de la siguiente forma:

1. Seguros de Riesgos de Trabajo.

Cubre los riesgos de accidente y/o enfermedades a que está expuesto el trabajador, con motivo del trabajo que desempeña y por el cual se hace acreedor al seguro social. La cobertura aplica durante el tiempo en que el trabajador se encuentre laborando así como el traslado desde o hacia su casa. En este caso, las enfermedades de trabajo son las consignadas en la Ley Federal del Trabajo.

Los seguros que se derivarán de los riesgos de trabajo específicamente son los siguientes:

a) Incapacidad Temporal
b) Incapacidad Permanente Parcial
c) Incapacidad Permanente Total
d) Muerte

2. Seguro de Enfermedades y Maternidad.

Quedan amparados por este seguro, según el artículo 84 de la Ley del Seguro Social:

I. El asegurado
II. El pensionado por:

a) Incapacidad permanente total o parcial
b) Invalidez
c) Cesantía en edad avanzada, y
d) Viudez, orfandad o ascendencia.

III. La esposa del asegurado o a falta de ésta la mujer con que haya hecho vida marital durante los últimos cinco años anteriores a la enfermedad, o con la que haya procreado hijos, siempre que ambos permanezcan libres de matrimonio. Si el asegurado tiene varias concubinas, ninguna de ellas tendrá derecho a la protección.

IV. Del mismo derecho gozará el esposo de la asegurada o a falta de éste, el concubinario, siempre que hubiera dependido económicamente de la asegurada, y reúnan en su caso, los requisitos del párrafo anterior.

V. La esposa del pensionado, en los términos de los incisos a), b), c) de la fracción II, a falta de esposa, la concubina si se reúnen los requisitos de la fracción III.

VI. Del mismo derecho gozará el esposo de la pensionada o a falta de este el concubinario, si se reúne los requisitos de la fracción III.

VII. Los hijos menores de dieciséis años del asegurado o de los pensionados en los términos confinados en las fracciones anteriores.

VIII. Los hijos del asegurado cuando no puedan sostenerse por su propio trabajo debido a una enfermedad crónica, defecto físico o psíquico, hasta en tanto no desaparezcan la incapacidad que padecen o hasta la edad de 25 años cuando realicen estudios en planteles del sistema educativo nacional;

IX. Los hijos mayores de 16 años de los pensionados por invalidez, cesantía en edad avanzada y vejez, que se encuentren disfrutando de asignaciones familiares, así como de los pensionados por incapacidad permanente, en los mismos casos y condiciones establecidas en el articulo 136.

X. El padre y la madre del asegurado que vivan en el hogar de este, y

XI. El padre y la madre del pensionado en los términos de los incisos a), b), c) de la fracción II, si reúnen los requisitos de convivencia señalado en la fracción VIII.

Los sujetos comprendidos en las fracciones III a IX, inclusive, tendrán derecho a las prestaciones respectivas si reúnen además los requisitos siguientes:

a) que dependan económicamente del asegurado o pensionado, y
b) que el asegurado tenga derecho a las prestaciones consignadas en él articulo 91 de esta Ley.

Para los efectos de este seguro se tendrá como fecha de iniciación de la enfermedad, aquella en que el instituto certifique el padecimiento. (art. 85)

El disfrute de las prestaciones de maternidad se iniciará a partir del día en que el Instituto certifique el estado de embarazo. La certificación señalará la fecha probable de parto, la que servirá de base para el computo de los cuarenta y dos días anteriores a aquel, para los efectos del disfrute del subsidio que se otorgue en los términos de esta Ley.

Todas las prestaciones establecidas en este seguro son complementarias o independientes a los seguros que se aplicarán vía la seguridad privada.

3. Seguro de Invalidez y Vida.

Los riesgos protegidos en este capítulo son la invalidez y la muerte del asegurado o del pensionado por invalidez.

El pago de la pensión por invalidez, en su caso, se suspenderá durante el tiempo en que el pensionado desempeñe un trabajo en un puesto igual a aquel que desarrollaba al declararse ésta.

El estado de invalidez da derecho al asegurado, en los términos de esta Ley y sus reglamentos, al otorgamiento de las prestaciones siguientes:

I. Pensión temporal.
II. Pensión definitiva.

La pensión y el seguro de sobrevivencia al que se refiere esta fracción, se contratarán por el asegurado con la institución de seguros que elija.

La renta vitalicia y el seguro de sobrevivencia se sujetarán a lo dispuesto en el articulo 159 fracciones IV y VI de esta Ley.

Pensión temporal es la que otorgue el Instituto, con cargo a este seguro, por periodos renovables al seguro en los casos de existir posibilidades de recuperación para el trabajo, o cuando por la continuación de una enfermedad no profesional se termine el disfrute del subsidio y la enfermedad persista. Es pensión definitiva la que corresponde al estado de invalidez que se estima de naturaleza permanente.

Cuando ocurra la muerte del asegurado o del pensionado por invalidez, el Instituto otorgará a sus beneficiarios, conforme a lo dispuesto en el presente capítulo, las siguientes prestaciones (Art.127)

I. Pensión de invalidez.
II. Pensión de orfandad.
III. Pensión de ascendientes.
IV. Ayuda asistencial a la pensionada por viudez, en los casos en que lo requiera, de acuerdo con el dictamen médico que al efecto se formule.

4. Del Seguro de Retiro, Cesantía en Edad Avanzada y Vejez.

Los riesgos protegidos por este seguro son el retiro, la cesantía en edad avanzada y la vejez del asegurado, así como la muerte de los pensionados por este seguro, en los términos y con las modalidades previstas en el artículo 152 de la Ley del Seguro Social.

- *Del ramo de cesantía en edad avanzada*

Para los efectos de la Ley en cuestión existe cesantía en edad avanzada cuando el asegurado quede privado de trabajos remunerados después de los sesenta años de edad (Art.154).

El derecho al goce de pensión de cesantía en edad avanzada comenzará desde el día que el asegurado cumpla con los requisitos señalados en el artículo 154 de la Ley en referencia, siempre que solicite el otorgamiento de dicha pensión y acredite haber quedado privado de trabajo, si no fue recibido en el Instituto el aviso de baja (Art. 156)

Los asegurados que reúnan los requisitos establecidos en esta sección podrán disponer de su cuenta individual con el objeto de disfrutar una pensión de cesantía en edad avanzada. Para tal propósito podrá optar por cualquiera de las siguientes alternativas:

I. Contratar con la institución de seguros de su elección una renta vitalicia que se actualizará anualmente en el mes de febrero conforme al Indice Nacional de Precios al Consumidor.

II. Mantener el saldo de su cuenta individual de una AFORE y efectuar con cargo a este, retiros programados.

El asegurado que opere por la alternativa prevista en la fracción II podrá, en cualquier momento, contratar una renta vitalicia de acuerdo a lo dispuesto en la fracción I. El asegurado no podrá optar por la alternativa señalada si la renta mensual vitalicia a convenirse fuera inferior a la pensión mínima garantizada.

El asegurado podrá pensionarse antes de cumplir las edades establecidas, siempre y cuando la pensión que se le calcule en el sistema de renta vitalicia sea superior en mas del treinta por ciento de la pensión garantizada una vez cubierta la prima del seguro de sobrevivencia para sus beneficiarios, de acuerdo a lo establecido en Articulo 158 de la Ley del Seguro Social.

El pensionado tendrá derecho a recibir el excedente de los recursos acumulados en su cuenta individual en una o varias exhibiciones, solamente si la pensión que se le otorgue es superior en mas del treinta por ciento de la pensión garantizada una vez cubierta la prima del seguro de sobrevivencia para sus beneficiarios. La disposición de la cuenta así como de sus rendimientos estará exenta de pago de contribuciones.

- *Del ramo de vejez*

El ramo de vejez según la Ley del Instituto Mexicano del Seguro Social en su artículo 161 da derecho al otorgamiento de las siguientes prestaciones:

I. - Pensión.
II. - Asistencia médica.
III.- Asignaciones familiares.
IV.- Ayuda asistencial.

El otorgamiento de la pensión de vejez sólo se podrá efectuar previa solicitud del asegurado y se le cubrirá a partir de la fecha en que haya dejado de trabajar, siempre que cumpla con los requisitos señalados en el 162 de la Ley.

Los asegurados que reúnan los requisitos establecidos en esta sección podrán disponer de su cuenta individual con el objeto de disfrutar una pensión de vejez. Para tal propósito podrá optar por cualquiera de las siguientes alternativas:

I. Contratar con una compañía de seguros pública o privada de su elección una renta vitalicia que se actualizará anualmente en el mes de febrero conforme al Indice Nacional de Precios al Consumidor.

II. Mantener el saldo de su cuenta individual de una AFORE y efectuar con cargo a este, retiros programados.

ASPECTOS TECNICOS DE LAS PENSIONES

NOTA TECNICA

Desde que la Nueva Ley del Seguro Social se publicó en el Diario Oficial el 21 de Diciembre de 1995, las instituciones involucradas a través de la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) determinaron la Nota Técnica que plasmara las disposiciones en la Nueva Ley del Seguro Social con el propósito de unificar y generalizar los criterios que se utilizarían para dichos seguros.
La Nota Técnica para los seguros de pensiones en lo que corresponde a los beneficios básicos tiene definidos los criterios técnicos para obtener el cálculo del monto constitutivo necesario para brindar a los asegurados, las pensiones derivadas de las coberturas por riesgos de trabajo e invalidez y vida, establecidas en la Ley del Seguro Social.

Hipótesis Demográficas.

Las tablas de mortalidad por sexos del CONAPO se eligieron como base para el cálculo de las pensiones de viudez, orfandad, ascendencia y vejez. Al tratarse de obligaciones de largo plazo, las tablas se ajustarán con base en el aumento en la esperanza de vida que se debe presentar en el futuro, continuando con la tendencia de los últimos años.

Las bases demográficas resultantes de mortalidad, para la determinación de las primas netas y reserva matemática de pensiones de beneficios básicos son las siguientes:

Experiencia demográfica de mortalidad para Activos **EMSSAH-97**, la cual deberá ser aplicada para reflejar las tasas de mortalidad de asegurados no inválidos, del sexo masculino.

Experiencia demográfica de mortalidad para Activos **EMSSAM-97**, la cual deberá ser aplicada para reflejar las tasas de mortalidad de asegurados no inválidos, del sexo femenino.

Experiencia demográfica de mortalidad para Inválidos **EMSSIH-97**, la cual deberá ser aplicada para reflejar las tasas de mortalidad de asegurados inválidos, del sexo masculino.

Experiencia demográfica de mortalidad para Inválidos **EMSIM-97**, la cual deberá ser aplicada para reflejar las tasas de mortalidad de asegurados inválidos, del sexo femenino.

Experiencias Demográficas de Invalidez **EISS-97**, la cual deberá ser aplicada para reflejar las tasas de invalidez de asegurados sin distinción de sexo.

El valor de las tasas de mortalidad y morbilidad, de las experiencias demográficas descritas, serán las que correspondan de acuerdo a la edad y sexo del asegurado, conforme a las tablas que se presentan en el anexo 1.

Hipótesis Financieras

Para la determinación de la prima neta y reserva matemática de pensiones, en lo referente a los beneficios básicos, se utilizará una tasa anual de interés técnico del 3.5% real.

Para los efectos de la valuación de reservas, el incremento mensual de las rentas se realizará empleando el incremento a la UDI publicado por el Banco de México.

SISTEMA UNICO DE COTIZACION

El Sistema Unico de Cotización (SUC), tiene como función calcular los Montos Constitutivos para las pensiones derivadas de los seguros de Riesgos de Trabajo y de Invalidez y Vida, así como los diferenciales de prima derivados de un ajuste en el estatus del grupo familiar.

Cálculo de Montos Constitutivos. Proceso uno a uno

Este módulo está diseñado para calcular los Montos Constitutivos de los registros cuyos datos sean capturados en la pantalla correspondiente. Asimismo, mediante el uso de este módulo será posible emitir dos documentos: el documento de oferta básica, que servirá para que la aseguradora dé a conocer al prospecto los beneficios básicos a los que tiene derecho; y la impresión especial, que servirá para visualizar los resultados parciales del proceso de cálculo del Monto Constitutivo.

En esta sección se procesan los registros uno por uno. Deben capturarse todos los datos relacionados con el asegurado y sus beneficiarios.

Para iniciar la captura, se debe introducir el número de seguridad social del asegurado. El sistema utiliza este número como llave para relacionar a los asegurados con sus beneficiarios. Este número está sujeto a un proceso de validación, por lo que no cualquier dato sirve como número de seguridad social. Los números proporcionados por el IMSS deben satisfacer los requisitos de validación.

Mientras el número de seguridad social no sea válido, será imposible capturar cualquier otro dato y no se tendrá acceso a los botones de cálculo e impresión.

Aún cuando sólo algunos datos tienen efecto en el cálculo de los Montos Constitutivos, el sistema requiere que se capturen la mayoría, según se especifica en cada caso.

Ajuste de Montos Constitutivos

Este módulo está diseñado para calcular el diferencial de prima originado por ajustes en el estatus del grupo familiar pensionado. Dicho diferencial constituirá un superávit o déficit que deberá ser acreditado a la reserva correspondiente para el cumplimiento de las obligaciones futuras de la compañía. Asimismo, realiza el cálculo de los pagos vencidos, rentas mensuales, aguinaldos y pagos indebidos a cada uno de los componentes del grupo familiar pensionado tanto de la información última como de la información ajustada.

En esta sección únicamente se procesan los registros uno por uno, debiendo capturarse todos los datos relacionados con el asegurado y sus beneficiarios, tanto para la información última conocida como para la información ajustada.

La información última conocida se refiere a la vigente antes del ajuste y que no necesariamente corresponde a la del documento de elegibilidad. La información ajustada se refiere a la vigente inmediatamente después del cambio.

Parámetros

Los parámetros son necesarios para efectuar los cálculos de Montos Constitutivos y Diferenciales de prima por ajustes en el estatus del grupo familiar. Los parámetros utilizados son los siguientes:

- Interés Técnico
- Margen de seguridad
- Gastos de Adquisición
- Salario Mínimo
- Tablas de Mortalidad
- Tablas de Mortalidad de Inválidos
- Tabla de Invalidez
- UDI Mensual
- INPC Anual
- Tablas de mortalidad de hijos

La captura y modificación de parámetros solamente está disponible en la versión de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Para tener nuevamente acceso al sistema, se deberán cargar los archivos de parámetros actualizados, mismos que están disponibles en la página WEB de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

RESERVAS TECNICAS DE PENSIONES

BENEFICIOS BASICOS

Reserva Matemática

La reserva matemática de los seguros de pensiones, es el fondo necesario con el que cuenta una institución de seguros, de acuerdo a las responsabilidades asumidas con sus asegurados con la finalidad hacer frente al pago de las pensiones a las que tienen derecho de acuerdo con lo establecido en la Ley del Seguro Social.

El valor de este pasivo se debe determinar de acuerdo a los criterios actuariales que se muestran a continuación.

El procedimiento para calcular la reserva matemática de pensiones del beneficio básico al final de cada año póliza, está dado por la siguiente fórmula:

$$ {}_{r}V_{u(r)} = R_0 \prod_{j=1}^{r} (1 + \Delta UDI_j) \ddot{a}_{u(r)} $$

Donde ΔUDI_j es el incremento de la unidad de inversión que corresponda al año póliza j; R_0 es el valor de la renta alcanzada a la fecha de emisión y $\ddot{a}_{u(r)}$

representa el valor presente actuarial de las obligaciones futuras en el año póliza r, considerando el estatus familiar

Dado que dicha reserva no permanece constante de un aniversario a otro debido a que el estatus de la póliza va aumentando su edad, que debe actualizarse mensualmente por efectos de la inflación (contenida implícitamente en el valor de la UDI) y derivado de la necesidad de conocer la reserva de forma mensual, se utiliza la fórmula que se indica a continuación, en la cual p indica el número de meses que han transcurrido desde el último aniversario hasta el mes de valuación:

$$_{r-1+p/12}V_{u(r-1)} = R_{r-1}(1+\Delta UDI_{p/12,r})(a_{u(r-1)} + \frac{p}{12}(a_{u(r)} - a_{u(r-1)}))$$

Donde R_r es la renta alcanzada al año póliza r, y $\Delta UDI_{p/12,r}$,r se refiere al incremento del valor de la unidad de inversión desde el aniversario r hasta p meses después.

Con el fin de simplificar el cálculo, se puede hacer uso del SUC como herramienta para calcular la reserva matemática de cada póliza, siguiendo el método que a continuación se describe:

- Se calcula el monto constitutivo a la fecha de resolución. (MCt)
- Se calcula el monto constitutivo a la fecha de resolución, pero cambiando las fechas de nacimiento de todos los integrantes del grupo familiar, de tal forma que sean un año más viejos. Todo lo demás permanece constante. (MCt+1)
- Dichos montos constitutivos se dividen entre 1.03; al resultado se le restan los pagos vencidos y se dividen entre el factor de inflación (FI), obteniendo dos valores de prima neta. (PRt y PRt+1)

- Se realiza la interpolación entre estas dos primas netas, desde el mes de inicio de vigencia de la póliza hasta el mes de valuación. Si suponemos que transcurrieron "p" meses, entonces se tiene:

$$PR_{p/12} = PRt + p/12 * (PRt - PRt+1)$$

- Finalmente, se multiplica esta prima por el incremento de la UDI desde el primer mes de vigencia hasta el mes de valuación, con lo cual se obtiene el valor exacto de la reserva matemática (RMAT), es decir:

$$RMAT_{p/12} = PR_{p/12} * \frac{UDImval}{UDImiv\text{-}1}$$

Donde *UDImval* es el valor de la UDI al último día del mes de valuación y *UDImiv-1* es el valor al cierre al último día del mes anterior al del inicio de vigencia de la póliza, con lo cual se obtiene el incremento de la inflación deseado.

El procedimiento anterior es el que se utiliza cuando la póliza está en su primer año de vigencia, por lo que se interpola entre primas netas calculadas a la edad real y un año envejecidas, este procedimiento se puede generalizar para cualquier antigüedad de la póliza.

Por otra parte, dado que el método expuesto depende directamente de los montos constitutivos, debe revisarse antes de efectuar el cálculo, que el tipo de pensión, el estatus familiar, sus fechas de nacimiento y la fecha de inicio de derechos correspondan a los estipulados en la oferta y el documento de elegibilidad, así como que la fecha de proceso del monto constitutivo coincida con la fecha de la resolución emitida por el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS).

Es importante señalar que el supuesto principal de este procedimiento es que no varía el número de integrantes del grupo familiar, sino que únicamente van envejeciendo, por lo que en caso de existir un cambio de estatus, deberá calcularse el monto constitutivo con los integrantes que tengan derecho a la pensión a la fecha de valuación.

Reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir

La reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir, tiene fundamento en el artículo 50 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros y deberá constituirse con las cantidades que resulten por los siguientes conceptos:

Pago de rentas cuyo periodo de pago haya vencido y no hayan sido reclamadas, y para las cuales no se tenga evidencia de que los beneficiarios hayan perdido el derecho y/o que el pensionado, en su caso, haya muerto. La reserva de obligaciones pendientes de cumplir por este concepto corresponderá al monto de las rentas vencidas y no pagadas del asegurado-pensionado y de cada uno de los beneficiarios, en su caso.

También se deberán incluir los aguinaldos o finiquitos derivados del beneficio básico cuyo periodo de pago haya vencido y que no hayan sido reclamados, en los mismos supuestos del punto anterior.

Beneficios Adicionales.- por los pagos que en forma evidente constituyan una obligación de la institución de seguros para con sus asegurados-pensionados y que se hayan derivado del riesgo asegurado.

Cabe señalar que las obligaciones pendientes de cumplir están directamente relacionadas con la forma de pago que tenga la empresa, es decir, si el pago de pensiones se realiza a través de depósitos en cuentas bancarias, giros telegráficos, en ventanillas, etc.

Reserva de Previsión

Este pasivo se constituye para hacer frente a posibles desviaciones en la siniestralidad, esta desviación corresponde a un exceso de obligaciones derivado de un mayor número de sobrevivientes que los previstos en la tabla de mortalidad adoptada, tanto de beneficios básicos como adicionales. Su cálculo deberá hacerse aplicando el 2% a la reserva matemática de pensiones y a la de riesgos en curso de beneficios adicionales, respectivamente, de planes de pensiones en vigor al cierre del mes en cuestión. Por tanto, su determinación está directamente relacionada con los resultados que se obtengan de las reservas matemática de pensiones y de riesgos en curso.

Reserva Matemática Especial de Pensiones

De acuerdo al artículo 52 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público ordena mediante reglas de carácter general la constitución de reservas técnicas especiales cuando, a juicio, sean necesarias para hacer frente a posibles pérdidas u obligaciones presentes o futuras a cargo de las instituciones, distintas a las especificadas en las fracciones I y III del artículo 46 de la citada Ley, o para reforzar tales reservas.

La Reserva Matemática Especial se constituye con el propósito de reforzar la reserva matemática de pensiones en el caso de que se presenten desviaciones en las expectativas de vida supuestas y sólo deberá calcularse para los beneficios básicos de los seguros de pensiones.

Cabe señalar que sólo las pensiones por muerte a causa de un riesgo profesional o un riesgo no profesional, así como los seguros de sobrevivencia, computan para la reserva en cuestión, por lo que deberán separarse los datos de estas pólizas del resto de la cartera para efectuar el cálculo correspondiente.

La reserva matemática especial se determina como:

$$RME_m = RME_{t-1} + SFEA_m + RMAA_m$$

donde :

RME_m = Reserva Matemática Especial del mes

RME_{t-1} = Reserva Matemática Especial del cierre del ejercicio anterior

$SFEA_m$ = Siniestralidad favorable excedente acumulada del mes

$RMAA_m$ = Rendimiento Mínimo Acreditable acumulado del mes

La siniestralidad favorable excedente acumulada es la cantidad que resulta inferior de la diferencia entre la siniestralidad esperada máxima acumulada menos la siniestralidad real acumulada y la diferencia que exista entre la siniestralidad esperada máxima acumulada y la siniestralidad esperada mínima acumulada; en caso de que la diferencia entre la siniestralidad esperada máxima acumulada menos la siniestralidad real acumulada resultara negativa, se considerará que la siniestralidad favorable excedente acumulada es igual a cero.

Cabe señalar que la siniestralidad esperada máxima involucra saldos de reserva matemática, primas de riesgos y pagos, por lo que antes de realizar el cálculo se debe verificar que dichas cantidades sean correctas.

Reserva para Fluctuación de Inversiones Básica y Adicional

Esta reserva se constituye con el propósito de hacer frente a futuras pérdidas derivadas de una fluctuación en los valores en que se inviertan las reservas técnicas.

La reserva para fluctuación de inversiones básica correspondiente a los beneficios básicos se calcula como sigue:

$$RFLUCT_m = RFLUCT_{m-1} + AM_m + RMAF_m$$

Donde :

$RFLUCTm$ = Reserva para Fluctuación de Inversiones Básica de Beneficios Básicos al mes m

AMm = Aportación mensual a la reserva para fluctuación de inversiones básica al mes m

$RMAFm$ = Rendimiento Mínimo Acreditable de la reserva para fluctuación de inversiones básica al mes m

La reserva para fluctuación de inversiones básica para beneficios básicos, no deberá ser en ningún momento superior al porcentaje que resulte de aplicar el factor 0.10, al resultado que se obtenga de multiplicar la tasa de interés técnico anual por la suma de las siguientes reservas técnicas al cierre del mes en cuestión: Reserva Matemática de Pensiones, Reserva Matemática Especial y Reserva de Previsión.

La reserva para fluctuación de inversiones adicional para beneficios básicos se constituirá en forma anual de acuerdo a los siguientes criterios:

Se determinará el factor que resulte de dividir el saldo de contribución anual a la reserva para fluctuación de inversiones básica para beneficios básicos resultante, entre los rendimientos anuales que haya tenido la institución de seguros, en exceso al total del rendimiento mínimo acreditable a las reservas técnicas.

Deberá entenderse por reservas técnicas: la matemática de pensiones, matemática especial, de previsión y para fluctuación de inversiones básica correspondientes a los planes básicos.

Cuando dicho factor sea superior a uno, la institución de seguros no podrá hacer ninguna contribución a la reserva para fluctuación de inversiones adicional para beneficios básicos, por concepto de rendimientos.

Cuando el factor resulte inferior a uno y mayor a cero, la institución de seguros deberá hacer una contribución a la reserva para fluctuación de inversiones adicional para beneficios básicos, en un porcentaje igual al 25% del porcentaje que resulte de restar de uno, el factor obtenido, aplicando este resultado a los rendimientos financieros anuales obtenidos por la institución de seguros en exceso al total de los rendimientos mínimos acreditables a las reservas técnicas.

Es decir:

FC = Factor de contribución $\qquad$ RR_t = Rendimientos Reales
RMT_t = Rendimiento Mínimo Anual de Reservas Técnicas (*RM, RME, RPREV, RFIB*)
AA_t = Aportación Anual

$$FC = \frac{AA_t}{(RR_t - RMT_t)}$$

$$A_t = \Sigma\,(AM\,m + RMAFB_m)$$

$$RMT_t = RM_t + RMA_t + RMAP + RMAFB$$

Si

$0 < FC_t < 1$ entonces $CRFIA = FC_t)(0.25)(RR_t - RMT_t)$

$FC_t > 1$ entonces no hay contribución

En lo referente a los beneficios adicionales, las compañías de pensiones deberán presentar a consideración de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas los procedimientos de cálculo de la reserva para fluctuación de inversiones básica y adicional, los cuales deberán apegarse a los criterios generales establecidos para los beneficios básicos.

Cabe señalar que en el caso de los beneficios adicionales se utilizan en el cálculo las reservas relativas a estos beneficios; el excedente que se calcule para la reserva para fluctuación de inversiones básica para beneficios adicionales no contribuirá al fondo especial de contingencia y en el caso del límite de la reserva para fluctuación de inversiones adicional, deberán considerarse tanto beneficios básicos como adicionales, y será el 25% del requerimiento bruto de solvencia.

Flujo de Liberación de la Reserva de Previsión

La reserva de previsión tiene un flujo continuo de liberación, debido al "envejecimiento natural" de las pólizas. Dicho flujo corresponde a un recurso financiero que se destina a la constitución de un Fondo Global de Contingencia del Sistema de Pensiones, en virtud que se encuentra considerado en el monto constitutivo como un recargo adicional. Para determinar el Flujo de liberación a la Reserva de Previsión se sigue el siguiente algoritmo:

$$Flujom = RPm\text{-}1(1+\Delta UDIm)(1+i)1/12 + 0.02PRm(1+p[(1+\Delta UDIm)(1+i)1/12 - 1])\text{-}0.02mV+0.02PVm$$

Donde:

Flujom= Flujo de liberación de la reserva de previsión en el mes *m*
RPm-1 = Reserva de previsión al cierre del mes anterior
mV = Reserva matemática de pensiones de planes al cierre del mes *m*
PRm = Prima de riesgo de las pólizas emitidas en el mes *m*
ΔUDIm = Incremento de la UDI en el mes *m*
i = Tasa de interés técnico
PVm = Pagos vencidos (*C*), correspondientes a las pólizas emitidas en el mes *m*

El flujo de liberación es afectado por los montos de devolución de reserva de previsión que hagan al Instituto Mexicano del Seguro Social en el mes en cuestión. En caso de que el resultado sea negativo, se entenderá que no existe contribución al fondo especial del mes en cuestión.

Por otra parte, cuando por efecto de una disminución de la reserva matemática de pensiones, la reserva de previsión de beneficios básicos tenga un monto excedente correspondiente a la liberación de la misma reserva dicho monto deberá destinarse como contribución al Fondo Especial.

Fondo Especial

Las instituciones de seguros deberán constituir un Fondo Especial, a través de un fideicomiso, el cual tiene como objeto conformar un volumen de recursos que garantice la viabilidad del Sistema de Pensiones en el largo plazo, de acuerdo a lo establecido en el artículo 52 bis-1 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros; este fondo estará sujeto a inspección y vigilancia de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

El Fondo Especial se conformará con aportaciones derivadas de las siguientes fuentes:

- El flujo de liberación de la reserva de previsión.

- Las liberaciones que se produzcan en la reserva de previsión por cambios en el nivel de la reserva matemática de pensiones.

- Los montos excedentes de la reserva para fluctuación de inversiones básica.

De acuerdo con lo previsto en el artículo 52 Bis-1 de la LGISMS, el Fondo Especial se conformará como un fideicomiso, el cual será administrado por la institución fiduciaria que al efecto determine la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

En este fideicomiso actuarán como:

a).- Fideicomitentes, las instituciones de seguros autorizadas para operar los seguros de pensiones, las cuales deberán establecer en sus estatutos sociales la obligación de contribuir al Fondo Especial de acuerdo con lo establecido en las presentes Reglas.

b).- Fideicomisarios:

i).- El IMSS para, previa instrucción de la Secretaría, cubrir a las instituciones de seguros fideicomitentes los recursos que requieran en el supuesto de que el monto constitutivo que les haya entregado originalmente en la contratación de un seguro de pensiones en los términos de la fracción VII del artículo 159 de la LSS haya sido insuficiente para cubrir las pensiones correspondientes, en virtud de cambios en la composición y características familiares de un pensionado y las ayudas asistenciales a las que tuviere derecho.

ii).- Las instituciones de seguros fideicomitentes, cuando demuestren a satisfacción de la Secretaría que no cuentan con los recursos necesarios para hacer frente a sus obligaciones derivadas de los planes básicos de los seguros de pensiones a que se refiere la LSS por presentarse cualquiera de los supuestos siguientes:

1).- Desviación en la siniestralidad de su mutualidad, respecto de las hipótesis demográficas adoptadas en el cálculo original de las primas que haya cobrado.

2).- Desviación generalizada en la siniestralidad del mercado respecto de las hipótesis demográficas adoptadas en el cálculo de los montos constitutivos.

3).- Variación en los mercados financieros que impida a las instituciones de seguros fideicomitentes obtener los productos financieros necesarios para incrementar adecuadamente sus reservas técnicas y, en consecuencia, contar con los recursos suficientes para cumplir con sus obligaciones respecto a los asegurados.

4).- Cuando por cualquier motivo las instituciones de seguros presenten problemas que pongan en peligro su estabilidad o solvencia. En este supuesto, el apoyo previsto en este numeral tendrá como único propósito salvaguardar los intereses de los asegurados y requerirá previa intervención gerencial de la sociedad por parte de la Comisión en los términos de la LGISMS. El interventor determinará y propondrá a la Secretaria el monto de recursos necesarios para apoyar la reconstitución de las reservas técnicas y, en su caso, proceder a la cesión gratuita de la cartera a otra institución de seguros y dar inicio al proceso de liquidación de la sociedad.

iii).- El Gobierno Federal, cuando existan remanentes en caso de extinción del fideicomiso.

Para efectos de lo señalado en el punto i) del inciso b) de la presente Regla, se entenderá por "cambios en la composición y características familiares de un pensionado" los siguientes casos: el nacimiento o adopción de un hijo, el ingreso al Sistema Educativo Nacional de un hijo entre 16 y 25 años de edad, la aparición de un ascendiente con derecho a pensión - siempre y cuando no exista otro beneficiario con igual derecho -, así como el matrimonio del pensionado; en este último caso, sólo cuando dicho evento se presente en un periodo mayor a un año de emitida la resolución respectiva por parte del IMSS. Asimismo, se entenderá por "ayudas asistenciales" a las que se refieren los artículos 138 y 140 de la LSS.

Para el caso de los apoyos que otorgue el Fondo Especial a las instituciones de seguros derivados de los supuestos previstos en el punto ii), inciso b) dichos recursos deberán destinarse, exclusivamente, a apoyar el ajuste de la reserva c).- Para el caso del supuesto previsto en el numeral 3) del punto ii), inciso b) los apoyos que otorgue el Fondo Especial a las instituciones de seguros podrán ser, como máximo, por un monto que no excederá el menor de los resultados siguientes:

i).- Se determinará el factor que resulte de la diferencia entre la tasa de interés técnico utilizada para el cálculo de la reserva matemática de pensiones correspondiente a los planes básicos y la tasa de rendimiento real promedio del mercado, al momento en que se produjo la fluctuación. Dicho factor será aplicado al saldo de las reservas matemática de pensiones y matemática especial, correspondientes a los planes básicos, de cada una de las instituciones de seguros.

ii).- Se determinará el factor que resulte de la diferencia entre la tasa de interés técnico utilizada para el cálculo de la reserva matemática de pensiones correspondiente a los planes básicos y la tasa de rendimiento real obtenida por la Institución de seguros, al momento en que se produjo la fluctuación. Dicho factor será aplicado al saldo de las reservas matemática de pensiones y matemática especial, correspondientes a los planes básicos, de cada una de las instituciones de seguros.

En ningún caso procederá el otorgamiento de apoyos por parte del Fondo Especial cuando la institución de seguros de que se trate haya obtenido un rendimiento real promedio igual o superior a la tasa de interés técnico.

Las instituciones de seguros solicitarán los apoyos que requieran, al Comité Técnico del Fondo Especial y éste las someterá a la consideración de la Secretaría, que será la instancia, que de conformidad con la LGISMS, determinará la procedencia de los apoyos solicitados.

No fue sino hasta el 16 de noviembre de 2000 cuando se afectó por primera vez al fondo especial derivado de 160 casos de cambios en el estatus de acuerdo a lo antes referido.

Cuando una institución de seguros, por efectos de una desviación en su siniestralidad, disponga de una parte o del total de la reserva de previsión, quedará exenta de realizar contribuciones al Fondo Especial, hasta en tanto reconstituya la reserva de previsión correspondiente. De manera análoga, las instituciones de seguros que hayan dispuesto de parte o de la totalidad de la reserva para fluctuación de inversiones básica, no deberán contribuir al Fondo Especial hasta en tanto la misma alcance nuevamente su límite máximo.

Las instituciones de seguros determinarán y efectuarán la contribución al Fondo Especial de manera mensual, debiendo informar y comprobar a la Comisión todo lo relativo al Fondo Especial en la forma y términos que ésta establezca.

El patrimonio del Fondo Especial deberá invertirse de conformidad con el régimen establecido en el Título Séptimo de las Reglas de operación, relativo a la inversión de los recursos afectos a la cobertura de las reservas técnicas de las instituciones de seguros.

BENEFICIOS ADICIONALES

La competencia de las compañías de pensiones en el mercado estriba en los beneficios adicionales ofrecidos por cada una de estas, en virtud de que todas ofrecen por ley el beneficio básico. El prospecto a pensionarse generalmente elige a la compañía de pensiones que ha de administrar su pensión en función de quién es la aseguradora que le ofrece el beneficio adicional más acorde con sus necesidades, los servicios que algunas instituciones ofrecen y la calidad del servicio de las mismas.

Los beneficios adicionales se clasifican de forma general en económicos y nc económicos. Se consideran beneficios económicos, las becas, ayudas mensuales como porcentaje de la pensión. básica. Los no económicos se refieren a seguros de vida.

Reserva de Riesgos en Curso de Beneficios Adicionales

Se constituye únicamente para aquellos beneficios adicionales que son otorgados directamente por la propia empresa de pensiones, tales como aumentos en la renta, aguinaldos adicionales, ayudas educacionales, etc.

A diferencia de la reserva matemática de pensiones, el procedimiento de cálculo de esta reserva depende directamente del beneficio adicional de que se trate, cuya metodología de cálculo deberá estar descrita en la nota técnica correspondiente la cual debe hacerse conforme a las disposiciones establecidas en la circular S-8.1 del 26 de septiembre de 2000. Cabe señalar que los beneficios adicionales que se refieren a seguros de vida o de accidentes y enfermedades, no deberán generar reserva de riesgos en curso en la compañía de pensiones ya que ésta contrata con una compañía de seguros el plan que se pretende otorgar como beneficio adicional y es ésta última quien asume la totalidad del riesgo.

Reserva de Previsión de Beneficios Adicionales

Los beneficios adicionales operados por las compañías de pensiones que generen reserva de riesgos en curso deberán constituir reserva de previsión y se constituye como el 2% de la reserva de riesgos en curso.

- **Reserva para Fluctuación de Inversiones de Beneficios Adicionales**

Asimismo, los beneficios adicionales que generen reserva de riesgos en curso deberán constituir reserva para fluctuación de inversiones básica y adicional, el procedimiento de constitución de esta reserva deberá estar descrito en la nota técnica correspondiente del beneficio adicional.

Ahora que conocemos la operación del sistema de pensiones en México, estamos en condiciones de abordar el siguiente y último capitulo del presente trabajo.

CAPITULO 3: EDADES EQUIVALENTES: LA TEORIA ACTUARIAL DE GOMPERTZ Y MAKEHAM

La valuación de reservas técnicas de los Seguros de Pensiones derivados de la Seguridad Social, se realiza de acuerdo a la Circular S-22.1 "Reglas de Operación de los Seguros de Pensiones", la Circular S-22.7 y la Circular S-22.3 la cual especifica el algoritmo técnico a seguir de acuerdo al tipo de seguro y pensión según el estatus familiar para el cálculo del Monto Constitutivo, emitidas por la CNSF. El monto constitutivo transferido por el IMSS a la Aseguradora está formado de la siguiente manera:

$$MCT = MCSI + MCSS$$

$MCT =$ Monto Constitutivo a Transferir por el IMSS
$MCSI =$ Monto Constitutivo del Seguro de Incapacidad
$MCSS =$ Monto Constitutivo del Seguro de Sobrevivencia

El monto constitutivo se integra de la prima neta del seguro correspondiente según su ramo de aseguramiento y tipo de pensión, la cuantía básica, la prima básica del seguro de sobrevivencia, el finiquito para los hijos, los pagos vencidos, recargos para un margen de seguridad y un porcentaje para gastos de adquisición (alfa y beta), así como factores de actualización, los cuales se definen más adelante.

En este capítulo analizaremos el seguro de riesgos de trabajo con una composición familiar de un incapacitado con cónyuge e hijos, ya que este caso involucra el mayor número de probabilidades de sobrevivencia y muerte, al analizar este caso, el procedimiento propuesto puede ser extenderse a cualquier otro tipo de estatus, incluso aquellos que cuentan con un seguro de invalidez y vida.

A continuación se muestra el procedimiento a seguir con base en los criterios técnicos y actuariales para la determinación del monto constitutivo a transferir por el Instituto de acuerdo a la Circular S-22.3 de fecha 31 de marzo de 1997. Las bases técnicas para la determinación de la prima neta y monto constitutivo de los seguros de pensiones por riesgo de trabajo son:

mp, ap	Mes y año de contratación
i	Tasa de interés técnico
v	$\frac{1}{1+i}$
$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}\rceil}$	$\frac{1-v}{1-(1+i)^{-1/12}}$
${}_kp_x$	Probabilidad de que un individuo de edad x alcance la edad x+k
${}_kp_x^{(inc)}$	Probabilidad de que un individuo incapacitado de edad x, permanezca como tal hasta alcanzar la edad x+k
${}_kp_x^{(inv)}$	Probabilidad de que un hijo inválido de edad x, permanezca como tal hasta alcanzar la edad x+k
${}_kr_x$	Probabilidad de invalidarse entre las edades x y x+k
ω	Ultima edad de la tabla de mortalidad
x	Edad del incapacitado
y	Edad del cónyuge
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	Edad de los hijos en orden ascendente
n	Número de hijos
na	Número de ascendientes que dependen económicamente del asegurado o pensionado
z_1, z_2	Edad de los ascendientes
PMG	Pensión Mínima Garantizada
SP_n	Sueldo pensionable para el cálculo de la pensión mensual del incapacitado por riesgos de trabajo de acuerdo a la Ley del Seguro Social
AA	Ayudas asistenciales
AF	Asignaciones familiares
PIP	Porcentaje de incapacidad parcial
CB_n	Cuantía básica para el cálculo de la pensión mensual del incapacitado por riesgos de trabajo de acuerdo a la Ley del Seguro Social

Si PIP = 100% entonces,

$$CB_n = \max(0.7 \times SP_n, CB_{iv} \times (1 + AF + AA), PMG)$$

Donde:

$$AF = \begin{cases} 0.15 \text{ por cónyuge} \\ 0.10 \text{ por cada hijo} \\ 0.10 \text{ por cada ascendiente} \end{cases}$$

Si PIP < 100% entonces,

$$CB_n = \max(0.7 \times SP_n, PMG)$$

b_y	Beneficio de la viuda (en porcentaje de la cuantía básica del incapacitado por riesgos de trabajo) $$b_y = \max\left(0.4, \frac{0.9 \times PMG}{CB_n}\right)$$
C	Monto por concepto de pagos vencidos a la fecha de cálculo.
PNSI	Prima neta seguro de incapacidad
PNSS	Prima neta seguro de sobrevivencia
PBSS	Prima básica del seguro de sobrevivencia
PSIH	Prima básica del seguro de invalidez para hijos
PFH	Prima básica del finiquito para hijos
MCSI	Monto Constitutivo del seguro de incapacidad
MCSS	Monto Constitutivo del seguro de sobrevivencia
α	Porcentaje para margen de seguridad
β	Porcentaje para gastos de adquisición
FACBI	Factor de actualización de la cuantía básica por inflación
$INPC_{mm,aa}$	Índice Nacional de Precios al Consumidor del mes mm y año aa

Los pagos vencidos no prescritos están considerados como un pago único (C) dentro de la fórmula de cálculo de la prima.

Factor de actualización de la cuantía básica por inflación:

$$FACBI = \begin{cases} \dfrac{UDI_{12,ap-1}}{UDI_{12,ap-2}} & si \text{ mp} = 1,2 \\ \dfrac{UDI_{mp-1,ap}}{UDI_{12,ap-1}} & \text{si mp} = 3,4,\ldots,12 \end{cases}$$

SEGURO DE INCAPACIDAD

Beneficio del incapacitado(a) con incapacidad mayor al 50%

$$A_x^{(n)} = 12.5 \times (\ddot{a}_x - \frac{11}{24})$$

Donde:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x^{(inc)} \times v^k$$

$$PNSI = PIP \times CB_n \times FACBI \times A_x^{(n)} + C$$

Beneficio del incapacitado(a) con incapacidad mayor al 25% y menor o igual al 50%

$$A_x^{(n)} = 12 \times (\ddot{a}_x - \frac{11}{24})$$

Donde:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x^{(inc)} \times v^k$$

$$PNSI = PIP \times CB_n \times FACBI \times A_x^{(n)} + C$$

MONTO CONSTITUTIVO DEL SEGURO DE INCAPACIDAD

$$MCSI = PNSI \times (1 + \alpha + \beta)$$

SEGURO DE SOBREVIVENCIA

Incapacitado(a) con hijos y cónyuge

$$PSIH = a_{ij}^{(12)} \times \sum_{j=1}^{n} {}_{25-x_j}r_{x_j} \times a_{x,y,x_1,x_2,\ldots,x_n}^{(*j)}$$

Donde:

$$a_{x,y,x_1,x_2,\ldots,x_n}^{(*j)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=25-x_j}^{\omega-x_j} (1-{}_kp_x^{(inc)}) \times \left(\sum_{h=0}^{n} \begin{matrix} (p_k^{**(n)}(h) - p_k^{*(n)}(h)) \times ({}_kp_y \times b_1(h) \\ + (1-{}_kp_y) \times b_2(h)) \end{matrix} \right) \times v^k & si\ (x_m)\ \text{no es inválido} \\ 0 & si\ (x_m)\ \text{es inválido} \end{cases}$$

$$b_1(h) = min\left(\frac{25}{24} \times b_y + (h \times 0.2), \frac{25}{24}\right)$$

$$b_2(h) = \frac{25}{24} \times \min(h \times 0.3, 1)$$

Finiquito para hijos

$$PFH = \sum_{j=1}^{n} B(x_j)$$

Donde:

$$B(x_j) = \begin{cases} 0.6 \times v^{19-x_j} \times {}_{19-x_j}p_{x_j} \times (1-{}_{25-x_j}p_x^{(inc)}) & \text{si } x_j < 19 \\ 0.6 \times (1-{}_{25-x_j}p_x^{(inc)}) & \text{si } x_j \geq 19 \\ 0 & \text{si } x_j \geq 25 \end{cases}$$

Prima Neta del Seguro de Sobrevivencia

$$PNSS = PIP \times FACBI \times CB_n \times (PBSS + PSIH + PFH) + C$$

MONTO CONSTITUTIVO DEL SEGURO DE SOBREVIVENCIA

$$MCSS = PNSS \times (1 + \alpha + \beta)$$

En la Prima Básica del Seguro de Sobrevivencia se desarrollan las convoluciones según el número de hijos que existan en el estatus a tratar, en nuestro caso particular se obtiene de acuerdo al procedimiento siguiente:

$$A^{(n)}_{x,y,x_1,\ldots,x_n}=\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}|}\times\sum_{k=0}^{\omega-x_1}(1-{}_kp_x^{(inc)})\times\left[\begin{array}{l}{}_kp_y\times\left(\sum_{j=0}^{n}p_k^{*(n)}(j)\times b_1(j)\right)+\\(1-{}_kp_y)\times\left(\sum_{j=0}^{n}p_k^{*(n)}(j)\times b_2(j)\right)\end{array}\right]\times v^k$$

Donde:

$p_k^{*(n)}(j)$ es la probabilidad que sobrevivan j hijos de n originales en el año k

$b_1(j)$ es el beneficio a pagar por los sobrevivientes considerando que el cónyuge sobrevive

$b_2(j)$ es el beneficio a pagar por los sobrevivientes considerando que el cónyuge ha muerto

$$p_k^{*(n)}(j)=\begin{cases}\sum_{t=0}^{j}p_k^{*(n-1)}(t)\times p_{k,n}(j-t) & n\geq j\\ 0 & n<j\end{cases}$$

$$p_k^{*(0)}(0)=1$$

$$p_{k,m}(s)=\begin{cases}1-{}_kp^u_{x_m} & s=0\\ {}_kp^u_{x_m} & s=1\\ 0 & s=2,3,4\ldots,n\end{cases}$$

$${}_kp^u_{x_m}=\begin{cases}{}_kp_{x_m} & \text{si } (x_m) \text{ no es inválido}\\ {}_kp^{(inv)}_{x_m} & \text{si } (x_m) \text{ es inválido}\end{cases}\qquad {}_kp_{x_m}=\begin{cases}0 & \text{si } x_m+k\geq 25\\ 1 & \text{si } x_m+k\leq 16\end{cases}$$

$$b_1(j)=\min(\frac{25}{24}\times b_y+(j\times 0.2),\frac{25}{24})$$

$$b_2(j)=\frac{25}{24}\times\min(j\times 0.3,1)$$

$$PBSS=A^{(n)}_{x,y,x_1,x_2,\ldots,x_n}$$

Como puede observar el cálculo de la prima básica del seguro de sobrevivencia, involucra una serie de probabilidades conjuntas, denominadas convoluciones.

El objetivo de esta investigación es analizar la teoría que permite simplificar las convoluciones que involucran dos o más hijos del mismo sexo, para el cálculo de la Prima Básica de Sobrevivencia, en términos de la probabilidad de una sola persona considerando una edad equivalente, para llevar a cabo esta simplificación utilizaremos la propiedad de la tasa instantánea de mortalidad, la cual establece que se puede determinar de forma aproximada una edad común z, que reemplaza a las edades distintas $x, y, w,...$ de un grupo de m vidas.

La probabilidad de que una persona de edad x viva n años más es:

$$_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}}$$

Aplicando la fórmula de Makeham, $\mu_x = Bc^x + A$, desarrollada en el primer capítulo, la expresión anterior equivale a:

$$_{n}p_{x} = \frac{ks^{x+n}g^{c^{x+n}}}{ks^{x}g^{c^{x}}} = s^{n}g^{c^{x}(c^{n}-1)}$$

$$_{n}p_{y} = s^{n}g^{c^{y}(c^{n}-1)}$$

$$_{n}p_{xy} = {}_{n}p_{x} \times {}_{n}p_{y} = s^{2n}g^{(c^{x}+c^{y})(c^{n}-1)}$$

Si, en vez de dos vidas de edades diferentes, x e y, se trata de dos vidas de la misma edad z, entonces:

$$_{n}p_{zz} = s^{2n}g^{2c^{z}(c^{n}-1)}$$

Es correcto sustituir dos vidas de distinta edad por dos vidas de la misma edad, siempre y cuando:

$$2c^{z} = c^{x} + c^{y}$$

$$c^z = \frac{(c^x + c^y)}{2}$$

Si suponemos que x es la edad menor:

$$y = x + h, \qquad z = x + t$$

siendo necesariamente, t menor que h.

Si la última expresión la ponemos en términos de x según lo definido anteriormente, obtenemos:

$$c^{x+t} = \frac{c^x + c^{x+h}}{2}$$

$$c^t = \frac{1 + c^h}{2}$$

Obsérvese que el valor de t no depende de x ni de y sino de su diferencia h.

El análisis anterior es la propiedad que los actuarios ingleses denominan "*uniform seniority*" o "*envejecimiento uniforme*".

Este procedimiento puede extenderse a más de dos vidas.

Sea: $$\mu_x = -\frac{d \log l_x}{dx}$$

Se puede obtener:

$$\mu_{xy} = -\frac{d \log l_{xy}}{dt} = -\frac{d \log(l_x \cdot l_y)}{dt} = -\frac{d(\log l_x + \log l_y)}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y$$

Si tomamos dos vidas de la misma edad tales que:

$2\mu_z = \mu_x + \mu_y$ lo que implica que $\mu_z = \frac{\mu_x + \mu_y}{2}$

Por otro lado, recordemos que en 1825, el actuario inglés Benjamín Gompertz elaboró una hipótesis sobre la forma en que se comporta la mortalidad en función a la edad. En la notación actual su hipótesis se puede formular de la siguiente manera:

$$\mu_x = Bc^x$$

donde B y c son constantes a determinar con las restricciones $B > 0$ y $c > 1$.

Lo anterior significa que Gompertz considera que la fuerza de mortalidad es una variable que crece exponencialmente en función de la edad (x), como lo muestra el siguiente desarrollo.

Denotamos con $T(x_i)$ la variable aleatoria continua "tiempo restante de vida de una persona de edad x_i".

Suponiendo que las variables aleatorias $T(x_1),\dots,T(x_n)$ son independientes, tenemos, de la definición generalizada de vidas conjuntas de la fuerza de mortalidad,

$$\mu_{x_1 x_2 \dots x_n}(t)=\frac{f_{T(x_1 x_2 \dots x_n)}(t)}{1-F_{T(x_1 x_2 \dots x_n)}}=\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left[1-\prod_{i=1}^{n}{}_t p_{x_i}\right]}{\prod_{i=1}^{n}{}_t p_{x_i}}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_{x_i}\right]\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}{}_t p_{x_j}}{\prod_{i=1}^{n}{}_t p_{x_i}},$$

dónde:

$\mu_{x_1 x_2 \dots x_n}(t)$ fuerza de mortalidad para el status de vidas conjuntas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$f_{T(x_1 x_2 \dots x_n)}(t)$ función de densidad de la variable aleatoria

$T(x_1, x_2, \dots, x_n)=Min\{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)\}$,

$F_{T(x_1 x_2 \dots x_n)}(t)$ función de distribución acumulada de esta misma variable aleatoria.

La fuerza de mortalidad se simplifica a

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_{x_i}(t)$$

ya que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1-\prod_{i=1}^{n}{}_t p_{x_i}\right]=\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{x_i+t}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}{}_t p_{x_i}\right)$$

como lo demuestra el siguiente argumento por inducción matemática:
Para n=2,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}$$

$$=-\left({}_tp_{x_1}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_{x_2}+{}_tp_{x_2}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_{x_1}\right)$$
$$=-\left({}_tp_{x_1}\left[{}_tp_{x_2}\mu_{x_2+t}\right]+{}_tp_{x_2}\left[{}_tp_{x_1}\mu_{x_1+t}\right]\right)$$
$$=\left(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}\right){}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}$$

Suponiendo que para n-1 se cumple la preposición

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}\right]=\left(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\ldots+\mu_{x_{n-1}}\right){}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}$$

demostraremos que la relación seguirá siendo válida para n.
Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[1-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left[{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\right]$$
$$=-\left[\left({}_tp_{x_n}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}\right)+\left({}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_{x_n}\right)\right]$$
$$=-\left[\left({}_tp_{x_n}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(1-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}\right)\right\}\right)-\left({}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\mu_{x_n+t}\right)\right]$$
$$=-\left[\left({}_tp_{x_n}\left\{-\left(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\ldots+\mu_{x_{n-1}+t}\right){}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_{n-1}}\right\}\right)-\left({}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\mu_{x_n+t}\right)\right]$$
$$=\left[\left(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\ldots+\mu_{x_{n-1}+t}\right){}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\right]+\left({}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}\mu_{x_n+t}\right)$$
$$=\left(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\ldots+\mu_{x_n+t}\right){}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_n}$$

Por lo tanto, como se cumple la hipótesis de Gompertz, la edad equivalente es el número x, tal que satisface la relación:

$$\sum_{i=1}^{n} Bc^{x_i} = Bc^{x}$$

Con el objeto de simplificar la notación y encontrar la edad equivalente en términos de las diferencias en edades del conjunto, sustituimos el estatus $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ donde $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$, es el estatus original presentando las edades de menor a mayor.

Este último estatus lo podemos escribir como $(\phi, \phi + t_1, \phi + t_2, \ldots, \phi + t_{n-1})$ donde $\phi = Min\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y $t_j = y_{j+1} - \phi$, es decir, el exceso de cada una de las edades con respecto a la edad mínima del conjunto.

De lo anterior nos permite escribir $\sum_{i=1}^{n} Bc^{x_i} = Bc^{x}$ como $Bc^{\phi} + Bc^{\phi+t_1} + \ldots + Bc^{\phi+t_{n-1}} = Bc^{\phi+t}$, donde $t = x - \phi$.

Basta despejar t en función de las t_j.

De la expresión anterior, $c^{\phi}\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} c^{t_i}\right] = c^{\phi} c^{t}$, puesto que $c > 1$ tenemos:

$$t = \frac{\log\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} c^{t_i}\right]}{\log c}$$

Para el caso de dos vidas conjuntas, que es el que se utilizará en el presente trabajo y el utilizado con mayor frecuencia en la práctica, la ecuación anterior se transforma en

$$t = \frac{\log\left[1 + c^{t_1}\right]}{\log c}$$

por lo que el estatus $(\phi, \phi + t_1)$ se puede sustituir por el de una sola vida $(\phi + t)$, es decir, que para hallar la edad equivalente en el estatus de dos vidas conjuntas, basta con sumar a la edad menor el número t que se obtiene de la expresión anterior.

Lo anterior nos permite suponer que si se consideran las propiedades de la tasa instantánea de mortalidad (Gompertz) para obtener una edad equivalente para los hijos de un estatus familiar, esta puede ser utilizada en la determinación de la prima de riesgo de los seguros de Pensiones Derivados de las Leyes de Seguridad Social, y el resultado es equivalente al que se obtiene cuando se utiliza la nota técnica correspondiente.

Para determinar la edad equivalente necesitamos conocer el parámetro c de la expresión de Gompertz para μ. Como únicamente contamos con la tabla de mortalidad como herramienta, estimaremos los valores de los parámetros B y c mediante métodos numéricos.

El primer paso consiste en estimar el valor de μ_x a partir de las bases demográficas. Para aceptar o rechazar la hipótesis planteada en el párrafo anterior es necesario determinar los distintos valores que puede tomar la tasa instantánea de mortalidad (μ_x) en periodos anuales, para una persona de edad x, donde x puede tomar cualquier valor de cero al límite superior de sobrevivencia.

Consideremos un recién nacido y asociemos una variable aleatoria ξ a la edad de fallecimiento del individuo considerado. Sea $F(x)$ la función de distribución de ξ,

$$F(x) = P(\xi \leq x), \qquad x \geq 0$$

y establezcamos

$$s(x) = 1 - F(x) = P(\xi > x), \qquad x \geq 0$$

donde $F(0) = 0$, lo cual implica que $s(0) = 1$. La función $s(x)$ se denomina "función de sobrevivencia", debido a que para cualquier valor positivo de x, la $s(x)$ nos determina la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x.

Denotando por l_0 al número de recién nacidos. Cada edad de fallecimiento de un recién nacido tiene asociada una determinada distribución especificada por la función de sobrevivencia $s(x)$. Por otra parte, denotando por $\lambda(x)$ el número de sobrevivientes a la edad x y $l_x = E[\lambda(x)]$, se tiene:

$l_x = l_0 \cdot S(x)$

De forma análoga, denotando por ${}_n\delta_x$ el número de fallecidos entre las edades x y $x+n$, de los l_0 iniciales y ${}_nd_x = E[{}_n\delta_x]$, se tendría:

$${}_nd_x = E[{}_n\delta_x] = l_0[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}$$

Sabemos que q_x mide la probabilidad de muerte dentro de un año, es decir, es un índice de fallecimiento promedio efectivo en el año de edad x a $x+1$.
Es evidente que la intensidad de mortalidad varía en cada momento y, por lo tanto, es interesante disponer de alguna forma de medir tasa instantánea de mortalidad.
Para ello, consideremos la probabilidad:

$$P[x < \xi \leq x + \Delta x / \xi > x] = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x) \cdot \Delta x}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

donde $f(x)/1 - F(x)$ es una función de densidad de probabilidad condicionada que nos da, para cada edad x, el valor de la función de densidad de probabilidad condicionada de ξ a la edad exacta x, sobreviviendo a aquella edad. Se le denomina tasa instantánea de mortalidad y se tiene:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{d\log l_x}{dx}$$

Considerando la propiedad de la función de densidad $f(x)$ y de la función de distribución, la tasa instantánea de mortalidad $\mu_x \geq 0$ se observa:

$$-\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \mu_x$$

de donde

$$-\mu_y \cdot d_y = d\log S(y)$$

e integrando entre x y $x+n$, tenemos:

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \log\left[\frac{s(x+n)}{s(x)}\right] = \log({}_n p_x)$$

de donde

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y dy}$$

y mediante el cambio $t = y - x$, se tiene

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}$$

$${}_n q_x = 1 - e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}$$

A continuación se presentan dos métodos del cálculo aproximado de la tasa instantánea de mortalidad, ambos parten de la expresión anterior.

Método I

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}$$

cuando n=1

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt}$$

tomando logaritmos, tenemos,

$$\log_e p_x = -\int_0^1 \mu_{x+t} dt$$

y en términos aproximados

$$\mu_{x+1/2} \approx -\log_e p_x$$

Si integramos μ_{x+t} entre $t = -1$ y $t = 1$, obtenemos

$$\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} dt = -\log_e p_{x-1} - \log_e p_x$$

y esto es dos veces el valor medio de μ entre las edades $x-1$ y $x+1$, lo que conduce a la siguiente aproximación:

$$\mu_x \approx -\frac{1}{2}(\log_e p_{x-1} + \log_e p_x) = \frac{1}{2}(\log_e l_{x-1} - \log_e l_{x+1})$$

Método II

Partiendo de

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}$$

se obtiene

$$l_{x+n} = l_x e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} = l_x e^{-\int_x^{x+n} \mu_s ds}$$

Si se admite que l_x es una función de segundo grado se tiene:

$$l_x = a + bx + cx^2 \qquad \therefore$$

$$\frac{dl_x}{dx} = b + 2cx$$

y para $x=0$

$$\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0} = b$$

si se dan, ahora, a x los valores 1 y –1, sucesivamente,

$$l_1 = a + b + c$$

$$l_{-1} = a - b + c$$

$$l_{-1} - l_1 = -2b$$

$$\frac{l_{-1} - l_1}{2} = -b = -\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0}$$

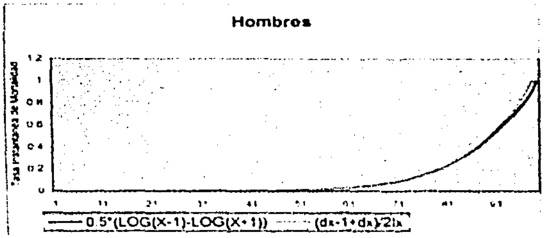
Poniendo en vez de 1 y -1, $x+1$ y x-1, y dividiendo por l_x se tiene:

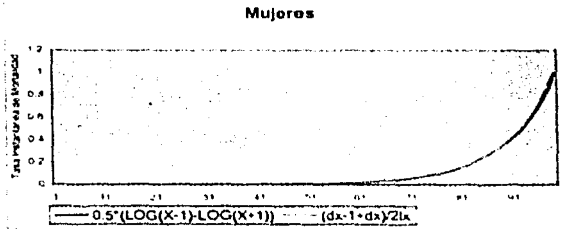
$$\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} \cong \frac{1}{l_x} \bullet \frac{dl_x}{dx} = \mu_x$$

a la expresión anterior se le puede dar la forma:

$$\mu_x \cong \frac{d_{x-1} + d_x}{2l_x}$$

En el anexo 2 se presentan los resultados del cálculo de la tasa instantánea de mortalidad con ambas aproximaciones, y se compara una con respecto a la otra, para los propósitos del presente trabajo es indistinto el método de aproximación utilizado, ya que sólo se consideran hijos menores de 25 años no inválidos, y las diferencias entre los métodos de aproximación se presentan hasta después de la edad 51. Las siguientes gráficas muestran este hecho, tanto para hombres como para mujeres.





Con el objetivo de encontrar un procedimiento que nos permita estimar el valor de c, debemos conocer el valor de μ para cada edad, para nuestro cálculos posteriores utilizaremos el (método II)

Recordemos que:

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt}$$

Por lo tanto, bajo el supuesto de Gompertz tenemos:

$$e^{-\int_0^1 Bc^{x+t} dt} = e^{-\frac{Bc^x}{\log c}\int_0^1 (\log c) c^{t} dt} = e^{-\frac{\mu_x}{\log c}\left[c^{t}\right]_{t=0}^{t=1}} = e^{-\frac{\mu_x}{\log c}[c-1]}$$

De aquí se puede concluir que

$$-\log p_x = \frac{c-1}{\log c}\mu_x$$

por lo tanto

$$-\frac{\log p_x}{\mu_x} = \frac{c-1}{\log c}$$

Ahora determinamos los valores de $-\frac{\log p_x}{\mu_x}$.

Teóricamente, estos cocientes deberían ser iguales sin importar la edad, como lo muestra la última relación, pero como hemos utilizado una estimación para la tasa de instantánea de mortalidad, entonces los valores diferirán ligeramente unos de otros, estas diferencias no afectan significativamente los resultados. Anexo 3.

Calculamos ahora la media aritmética de todos estos cocientes y obtenemos un solo valor, el cual denominaremos ψ y lo consideraremos como el valor representativo para la expresión $-\frac{\log p_x}{\mu_x}$ para todas las edades.

Si se tiene entonces la expresión

$$\psi = -\frac{c-1}{\log c}$$

Se requiere encontrar un c tal que $\psi = 0$. Esto se puede lograr mediante un iterativo, en particular podemos resolver la ecuación anterior, por el método de la derivada *Newton-Rhapson*, con lo cual lograremos encontrar el parámetro c, que necesitamos conocer para encontrar la edad equivalente. Apéndice II

De acuerdo con las bases demográficas de mortalidad para activos **EMSSAH-97** y **EMSSAM-97**, se realizó el cálculo de la tasa instantánea de mortalidad y se determino la variable c tal que ψ fuera igual a cero, para hombres y mujeres respectivamente. A continuación se muestra el valor de ψ definido anteriormente y el valor de c obtenido.

Sexo	Experiencia Demográfica	ψ	c
Hombres	EMSSAH-97	1.046017482	1.093425502
Mujeres	EMSSAM-97	1.054097351	1.110111400

A continuación se presenta un ejemplo del cálculo de una edad equivalente.

Consideremos dos personas del mismo sexo y de edades distintas x e y respectivamente; determinemos la edad equivalente z

Ejemplo1:

Sean $x_1 = 17$ *y* $x_2 = 23$, *ambos del sexo masculino, determinar la edad equivalente* z.
n = 23 - 17= 6, ahora buscamos 6 en el anexo 4 y se toma el valor de t correspondiente, en este caso t = 11, por lo tanto, $z = x_1 + t$, *es decir, z = 17 + 11, entonces* <u>*z = 28*</u>

Ejemplo2:

Sean $x_1 = 16$ *y* $x_2 = 19$, *ambos del sexo femenino, determinar la edad equivalente* z.
n = 19 - 16= 3, ahora buscamos 3 en el anexo 5 y se toma el valor de t correspondiente, en este caso t = 8, por lo tanto, $z = x_1 + t$, *es decir, z = 16 + 8, entonces* <u>*z = 24*</u>

Lo anterior nos permite concluir que no importa cuantas personas existan en un determinado grupo, este puede reducirse a una sola vida, lo único que necesitamos es agrupar de dos en dos, por ejemplo, si tenemos un grupo formado por cuatro integrantes, primero sacamos la edad equivalente de dos personas y la edad obtenida la combinamos con la edad del tercer componente y al resultado con la del último.

Como puede observarse en el anexo 1, es imposible determinar una edad equivalente si se consideran vidas menores a 15 años, ya que la probabilidad de muerte en las bases demográficas utilizadas es distinta de cero a partir de edad 15. Si se utilizarán tablas de mortalidad en las cuales la probabilidad de muerte existiera desde el año uno, sería sencillo determinar una edad equivalente a partir de distintos miembros con cualquier edad.

Para llevar acabo nuestro análisis es necesario considerar los siguientes supuestos:
Un tipo de seguro de Riesgos de Trabajo, con una pensión de incapacidad y una composición familiar conformada por un incapacitado con cónyuge y 2 hijos del mismo sexo y mayores o iguales a 15 años. Y compararemos la prima básica del seguro de sobrevivencia del estatus original contra la composición familiar resultante en función de un solo hijo.

Al 31 de octubre de 2001, la base datos de las resoluciones ocurridas ascendía a un total de 105,423 asegurados de los cuales sólo 16,705 contaban con un tipo de seguro de Riesgos de trabajo y 10,318 con tipo de pensión incapacidad.

Para efectos del siguiente ejemplo, consideraremos un estatus conformado por un inválido de edad 45 y una esposa de edad 43 y dos hijos de sexo masculino de edades 15 y 17 años. Entonces:

Sean $x_1 = 15$ *y* $x_2 = 17$, *ambos del sexo masculino, determinar la edad equivalente* z. $n = 17 - 15 = 2$, *ahora buscamos 2 en el anexo 4 y se toma el valor de* t *correspondiente, en este caso* $t = 9$, *por lo tanto,* $z = x_1 + t$, *es decir,* $z = 15 + 9$, *entonces* $\underline{z = 24}$, *por lo tanto la prima básica del seguro de sobrevivencia del estatus*

original será comparada contra el estatus resultante de un incapacitado de edad 45, esposa de 43años y un hijo de edad 24.

Ahora, realizaremos una comparación entre el monto calculado por el Sistema Unico de Cotización considerando el estatus original de la póliza y el calculado al utilizar el proceso alternativo propuesto, es decir, considerando sólo un hijo con una edad equivalente de acuerdo a las edades de los dos hijos del estatus original. Los datos originales, a sí como el estatus resultante son datos que se capturan el SUC, el cual arrogó los siguientes resultados. Anexo 6

Estatus	PNSS	Diferencia
Original	96,682.90	1.11%
Resultante	95,607.71	

La diferencia entre el estatus original y el modificado, no sólo es derivada de la aproximación que estamos utilizando de la tasa instantánea de mortalidad, también influye la determinación del parámetro "t" que estamos redondeando, como se observa en los anexos 4 y 5.

Si observamos la expresión que determina la Prima Básica del Seguro de Sobrevivencia para un Incapacitado(a) con hijos y cónyuge

$$A^{(n)}_{x,y,x_1,\ldots,x_n} = \ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}|} \times \sum_{k=0}^{\omega-x_1}(1-{}_kp_x^{(inc)}) \times \left[\begin{array}{l} {}_kp_y \times \left(\sum_{j=0}^{n} p_k^{*(n)}(j) \times b_1(j)\right) + \\ (1-{}_kp_y) \times \left(\sum_{j=0}^{n} p_k^{*(n)}(j) \times b_2(j)\right)\end{array}\right] \times v^k$$

Donde:

$p_k^{*(n)}(j)$ es la probabilidad que sobrevivan j hijos de n originales en el año k

$b_1(j)$ es el beneficio a pagar por los sobrevivientes considerando que el cónyuge sobrevive

$b_2(j)$ es el beneficio a pagar por los sobrevivientes considerando que el cónyuge ha muerto

$$p_k^{*(n)}(j) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{j} p_k^{*(n-1)}(t) \times p_{k,n}(j-t) & n \geq j \\ 0 & n < j \end{cases}$$

$$p_k^{*(0)}(0) = 1$$

$$p_{k,m}(s) = \begin{cases} 1-{}_kp^u_{x_m} & s = 0 \\ {}_kp^u_{x_m} & s = 1 \\ 0 & s = 2,3,4\ldots,n. \end{cases}$$

$${}_kp^u_{x_m} = \begin{cases} {}_kp_{x_m} & \text{si } (x_m) \text{ no es inválido} \\ {}_kp^{(inv)}_{x_m} & \text{si } (x_m) \text{ es inválido} \end{cases} \qquad {}_kp_{x_m} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_m + k \geq 25 \\ 1 & \text{si } x_m + k \leq 16 \end{cases}$$

$$b_1(j) = \min\left(\frac{25}{24} \times b_y + (j \times 0.2), \frac{25}{24}\right)$$

$$b_2(j) = \frac{25}{24} \times \min(j \times 0.3, 1)$$

$$PBSS = A^{(n)}_{x,y,x_1,x_2,\ldots,x_n}$$

y ponemos especial atención en:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x_1}(1-{}_kp_x^{(inc)}) \times \left[\begin{array}{l} {}_kp_y \times \left(\sum_{j=0}^{n} p_k^{*(n)}(j) \times b_1(j)\right) + \\ (1-{}_kp_y) \times \left(\sum_{j=0}^{n} p_k^{*(n)}(j) \times b_2(j)\right)\end{array}\right]$$

podemos apreciar que la convolución es multiplicada por las b_j's y por otras probabilidades lo cual indica que, al ser las probabilidades menores a uno y las

b_j's mayores que uno, la diferencia es ocasionada por el beneficio de la esposa. Si suponemos que es igual a uno el beneficio de la esposa, obtenemos en nuestro ejemplo el siguiente resultado

Estatus	PNSS	Diferencia
Original	61,747.69	-0.05%
Resultante	61,719.75	

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo, fue analizar y definir los aspectos técnicos de los seguros de pensiones particularizando en el calculo de una edad equivalente para un grupo de *m* vidas y con ello calcular la prima básica del seguro de sobrevivencia, en un seguro de riesgos de trabajo y una composición familiar de un incapacitado con esposa e hijos.

La lectura y análisis de este trabajo se enfoca principalmente a los actuarios, estudiantes y profesionistas interesados en el tema de la seguridad social y los aspectos técnicos de esta. Así como las características generales de los regímenes de seguridad social conociendo los aspectos técnicos generales.

En el capítulo dos, el lector puede apreciar de manera general el esquema de pensiones derivadas de las leyes de seguridad social a partir de la reforma a la Ley del Seguro Social que entró en vigor el 1° de julio de 1997. Desde los fundamentos legales hasta los aspectos técnicos de este sistema. El lector puede conocer como esta formado el monto constitutivo, las bases demográficas y financieras utilizadas para su determinación; cuales son las reservas técnicas que actualmente prevé las disposiciones legales vigentes, así como las causas de su constitución, el método de cálculo y el momento de sus afectación si esta se requiriera.

En el capítulo tres se describe la construcción de una tabla de edades equivalentes que sustituye el estatus de vidas conjuntas por el de una sola vida. El método de calculo utilizado para la determinación de la edad equivalente, se realiza considerando las bases técnicas de Gompertz y Makeham para la utilización de la tasa instantánea de mortalidad, para posteriormente calcular las constantes de Gompertz que nos permiten obtener el parámetro "*t*" que se suma a la edad del componente más joven y así determinar la edad equivalente.

Si tenemos un grupo de m vidas con edades distintas, a constante "*C*" bajo la teoría de Makeham también puede ser utilizada para la determinación de un estatus de m vidas con edades iguales "*z*".

Dicho procedimiento es correcto y sería más exacto si conociéramos la función de supervivencia que se uso para la construcción de las bases demográficas, ya que con esta podríamos determinar la tasa instantánea de mortalidad con exactitud.

Con lo anterior podemos concluir que las bases actuariales bien definidas pueden aplicarse en cualquier época, Gompertz desarrollo su teoría ya hace varios años y en la actualidad podría ser explotada con la creación de nuevos procedimientos que podrían simplificar la operación del sector asegurador.

Apéndice I

FUNCIONES BIOMÉTRICAS.

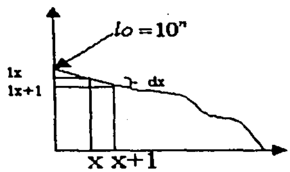
Definiciones:

l_x :Número de personas vivas a edad x.

p_x :Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x+1$.

q_x :Probabilidad de que una persona de edad x no sobreviva a la edad $x+1$.

d_x :Número de personas fallecidas entre la edad x y $x+1$.



${}_np_x$:Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x+n$.

${}_nq_x$:Probabilidad de que una persona de edad x no sobreviva a la edad $x+n$, es decir,

muera dentro de los siguientes n años.

${}_nd_x$:Número de fallecimientos entre las edades x y $x+n$.

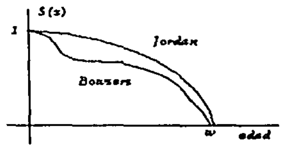
${}_{n/}q_x$:Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x+n$ y

fallezca en el siguiente año, es decir ,sobrevive n años y muere entre las

edades $x+n$ y $x+n+1$.

${}_{n/m}q_x$:Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x+n$ y muera dentro de los siguientes m años, es decir, sobrevive n años y fallece entre las edades $x+n$ y $x+n+m$.

El ser humano en el tiempo experimenta una depreciación biológica, esto es, que a medida que pasa el tiempo, la probabilidad de que llegue con vida a un año más es decreciente; puede entenderse también que la probabilidad de mortalidad es creciente con el tiempo. Este comportamiento puede ser planteado matemáticamente a través de una función de supervivencia $S(x)$ la cual debe cumplir tres características:



1) Es una función continua.

2) Es una función decreciente.

3) La función valuada en los extremos del intervalo dado [a,b] tiene los siguientes valores:

S(a)= 1 y S(b)= 0.

$S(x)=1-F(x)$ donde $F(x)$es la función de distribución.

En la práctica, dada $S(x)$ se define:

$l_x = kS(x)$ donde $k=10^n$ con $n \in Z$

l_ω:Número de vivos a la edad ω.

$l_{\omega} = 0$

m_x :Tasa central de mortalidad.

Si se ha definido como q_x a la probabilidad de que una persona de edad x fallezca dentro del siguiente año, es decir, que no alcance la edad $x+1$, entonces m_x es exactamente la probabilidad de fallecimiento a la mitad del periodo entre las edades x y $x+1$.

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Esperanza de vida: Se define como esperanza de vida al número de años que una persona llegará a vivir a través del tiempo.

Para fines demográficos existen dos tipos de esperanza:

1. Esperanza completa
2. Esperanza abreviada

La primera de ellas garantiza dentro de la expresión la probabilidad de vivir por lo menos medio año.

Notación: $\overset{\circ}{e}_x$: Esperanza de vida completa

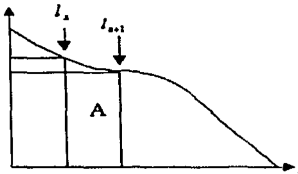
e_x : Esperanza de vida abreviada.

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{2} + {}_1P_x + {}_2P_x + {}_3P_x + \cdots + {}_{w-x}P_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-x} {}_tP_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{w-x} l_{x+t}$$

$$e_x = \overset{\circ}{e}_x - \frac{1}{2} = \sum_{t=1}^{w-x} {}_tP_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{w-x} l_{x+t}$$

Lx = Número de personas de edad x que aún no cumplen edad x+1.

Consideremos:



Busquemos el área bajo el siguiente supuesto:

$d_{x+t} = d_x \; \forall t$

Una forma: $A = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} (1)$

o integrando:

$$A = \int_0^1 l_{x+t}\,dt$$

pero :

$$l_{x+t} = l_x - \sum_{t=0}^{t-1} d_{x+t} = l_x - (d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots + d_{x+t-1})$$

$$l_{x+t} = l_x - (l_x - l_{x+t}) = l_x - td_x$$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 (l_x - td_x)dt = tl_x\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}dx\Big|_0^1 = l_x - \frac{1}{2}dx = l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = Lx$$

Sabemos:

μ_x es la tasa nominal anual de mortalidad basada en el supuesto de que la intensidad de mortalidad existe durante un año, es decir, entre las edades x a x+1.

Bajo la definición anterior es de suponer que el efecto de mortalidad (fuerza) es el mismo entre x y x+1.

Por lo anterior, para un año, la función empleada:

$\mu_x = -\frac{1}{lx}\frac{dl_x}{dx}$ puede representarnos lo siguiente:

$-dl_x = l_x \mu_x dx$ representa el número de fallecimientos que están ocurriendo en el momento de edad x.

$-\frac{dl_x}{l_x} = \mu_x dx$ representa la probabilidad de que una persona de edad x muera exactamente en el momento x.

que μ_x es una función continua, es decir, al momento de determinar $\lim_{n \to 0} \frac{{}_nq_x}{n}$ suponemos que l_x es una función que depende de la edad del individuo.

Sin embargo no existen tablas que determinen la probabilidad de sobrevivencia o fallecimiento por intervalos menores a un año.

Por lo anterior trataremos de encontrar una aproximación de μ_x bajo el supuesto de función discreta.

$$\mu_x = -\frac{1}{lx}\frac{dl_x}{dx}$$

supuesto $l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ .... (A)

$$\frac{dl_x}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \quad \text{.....................................} \quad (B)$$

valuando en l_0:

$$\frac{dl_0}{dx} = b$$

Consideremos –1, 1 en la expresión (A):

$$l_{-1} = a - b + c - d + e$$
$$l_{+1} = a + b + c + d + e$$

$$l_{-1} - l_{+1} = -2b - 2d \text{.....................................} (D)$$

Para –2, 2 en la expresión (A):

$$l_{-2} = a - 2b + 4c - 8d + 16e$$
$$l_{+2} = a + 2b + 4c + 8d + 16e$$

$$l_{-2} - l_{+2} = -4b - 16d \text{.....................................} (E)$$

Multipliquemos (D) por 8:

$$8(l_{-1} - l_{+1}) = -16b - 16d \text{..............................} (F)$$

Restando (E) de (F):

$$8(l_{-1} - l_{+1}) - (l_{-2} - l_{+2}) = -12b$$
$$\Rightarrow b = \frac{8(l_{-1} - l_{+1}) - (l_{-2} - l_{+2})}{-12}$$

Como $\dfrac{dl_0}{dx} = b$, $\mu_0 = -\dfrac{1}{l_0}\dfrac{dl_0}{dx} = -\dfrac{b}{l_0}$ y x=0:

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{8(l_{-1} - l_{+1}) - (l_{-2} - l_{+2})}{12 l_0}$$

$$\therefore \mu_x = \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 l_x}$$

Tx = Número de años vividos por todo el grupo.

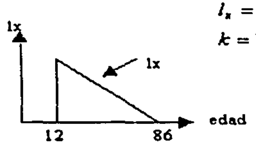
$$Tx = \int_0^{w-x} l_{x+t}dt = \int_0^1 l_{x+t}dt + \int_1^2 l_{x+t}dt + \cdots + \int_{w-x-1}^{w-x} l_{x+t}dt = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{w-1}$$

$$Tx = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{2} + \cdots + \frac{l_{w-1} + l_w}{2} = \frac{l_x}{2} + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots$$

$$\therefore Tx = \frac{1}{2} l_x + \sum_{t=1}^{w-x-1} l_{x+t}$$

ALGUNAS LEYES DE MORTALIDAD

Desde el inicio en el que el ser humano se interesó por conocer el comportamiento de la supervivencia del hombre en el tiempo se ha propuesto y sugerido la expresión para determinar el comportamiento de número de vivos de un grupo específico denotado por l_x, tal es el caso que el Actuario Moivre, en 1724 propuso una expresión a fin de dar una aproximación simplificada de este comportamiento.

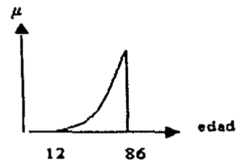


$l_x = k(w - x)$

$k = 10^n$

x ε [12,86]

n ε Z



Conclusión: La mortalidad era constante.

Posteriormente el Actuario Gompertz consideró en el año 1825 que la expresión propuesta un siglo atrás no era la más acorde para expresar el comportamiento de la mortalidad en el tiempo, en virtud de que esa tasa de mortalidad m_x y la probabilidad de sobrevivencia P_x siempre eran valores constantes, él observó que la fuerza de la resistencia a la muerte decrece en razón proporcional a ésta.

Si bien m_x que representa la tasa instantánea de mortalidad, el recíproco representa la resistencia a la mortalidad $\left(\frac{1}{\mu_x}\right)$. Consideró que el decremento en intervalos muy pequeños de tiempo de esa resistencia de mortalidad debería ser tal que se cumpliera la siguiente condición:

$$D\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\left(\frac{1}{\mu_x}\right)$$

Ahora bien, lo interesante de esta expresión es conocer el valor l_x.

Por otra parte recordemos la expresión $l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu_x dx}$. Por lo anterior procederemos a determinar la expresión de l_x con base a la teoría de Gompertz.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\frac{1}{\mu_x}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right)}{\frac{1}{\mu_x}} = -h$$

Integrando:

$$\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right)}{\frac{1}{\mu_x}} = -\int h dx$$

$$Ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h(x + cte)$$

$$Ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -hx + hcte$$

Sea LnB = hcte

Ln(1) - Ln(2) = -hx –LnB

Ln(m_x) = hx + LnB

$$e^{Ln(\mu_x)} = e^{(hx+LnB)}$$

$$\mu_x = e^{hx}e^{LnB} = (e^h)^x B$$

Sea c = e^h

$\Rightarrow \mu_x = BC^x$, es decir, existe mayor resistencia a la mortalidad a edad baja y menor resistencia a edad alta.

ANUALIDADES

Una anualidad vitalicia es una serie de pagos hechos de forma continua o a intervalos iguales como meses, trimestres, años, mientras se sobrevive. Puede ser temporal, es decir, limitada a un plazo determinado de años.

Los pagos puede cobrarse al principio de los intervalos (anualidad anticipada) ó al final de los mismos (anualidad vencida).

En el calculo actuarial la teoría de la anualidad vitalicia es análoga, pero se introduce a la sobrevivencia como condición de pago.

Las anualidades vitalicias juegan un papel muy importante en las operaciones de los seguros de vida, los seguros de vida generalmente se compran por una anualidad vitalicia de primas mas que por una prima única.

Algunos tipos de seguro de vida llevan este concepto aun más lejos y en lugar de ofrecer una suma asegurada total pagadera al fallecimiento, prevén formas establecidas de beneficios en términos de ingresos.

Es una serie de pagos generalmente iguales con igual duración o periodicidad entre cada uno de ellos.
Se pueden clasificar en dos ramas:

- Ciertas.

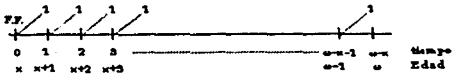
Es aquella en la cual el numero de pagos esta establecido de antemano.

- Contingentes.

Es aquella que depende de la sobrevivencia del ente involucrado (Es la que recibe o realiza una serie de pagos).

- Anualidad vitalicia anticipada

Se entiende como anualidad anticipada vitalicia es aquella la cual el numero de pagos dependerá de la probabilidad de que se encuentre con vida cada K-ésimo de años y pagadera durante toda la vida del individuo valuado.



$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{\omega-x-1}|} = V_i^{\,0}\ {}_0P_x + V_i^{\,1}\ {}_1P_x + V_i^{\,2}\ {}_2P_x + \dots\dots\dots + V_i^{\,\bar{\omega}-x-1}\ {}_{\bar{\omega}-x-1}P_x$$

$$= \lim_{\substack{h\to\omega-x-1 \\ h\to\infty}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} V_i^t\ {}_tP_x$$

Sea ${}_tE_x$: Dotal Puro, representa el pago que se realiza a un individuo de edad x si este se encuentra con vida en los próximos t-años, es decir, que alcance la edad "x+t" años.

$t \in R$

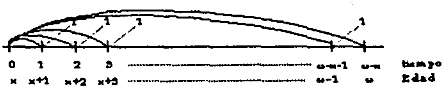
$$tEx = 1{*}Vit{*}tPx = \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

$$v^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \frac{V_i^x}{V_i^x}$$

$$\frac{V^{x+t}\ell_{x+t}}{V_i^x \ell_x} = \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

- Anualidad vitalicia vencida

Es aquella en la que la serie de pagos inicia al final de cada periodo.



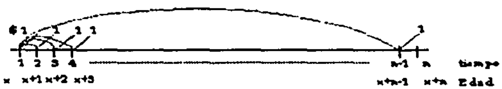
$$a_x = \lim_{\substack{h \to \omega - x - 1 \\ h \to \infty}} a_{x:\overline{n}|} = V^1\,{}_1P_x + V^2\,{}_2P_x + \ldots$$

$$= \sum_{t=1}^{\omega - x} V_i^t\,{}_tP_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} {}_tE_x$$

$$= \sum_{t=1}^{\omega - x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega - x} D_{x+t} = \frac{1}{D_x}\left[D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_\omega\right]$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

- Anualidad anticipada temporal N-años.



$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$= Anualidad (contingente valuada por un individuo de edad x) Anticipada temporal n-años.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + \left(1 * V_i^1 *_1 P_x\right) + \left(1 * V_i^2 *_2 P_x\right) + \left(1 * V_i^3 *_3 P_x\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(1 * V_i^{n-1} *_{n-1} P_x\right)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} V_i^t \, {}_tP_x = \sum_{t=0}^{n-1} V_i^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

Este valor presente de un conjunto de pagos tiene dos aplicaciones:

→ Para una compañía de seguros prevé un conjunto de pagos en el futuro bajo la condición de que el individuo de edad x se encuentre con vida a cada año.

→ Para pago de primas que efectúa cada individuo o contratante cada año.

Definición.

Conmutados.- Los conmutados son una forma simplificada de valores que involucran valores presentes de sobrevivencia o fallecimiento y se utilizan generalmente para simplificar términos ya definidos.

$VI\,x * lx = Dx$

$Nx = Dx + Dx{+}1 + Dx{+}2 + \ldots$

$Sx = Nx + Nx{+}1 + Nx{+}2 + \ldots$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} V_i^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{V_i^x}{V_i^x} V_i^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{V_i^{x+t}\,\ell_{x+t}}{V_i^x\,\ell_x} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = \frac{1}{D_x}\{D_x + D_{x+1} + \ldots\ldots\ldots + D_{x+n-1}\}$$

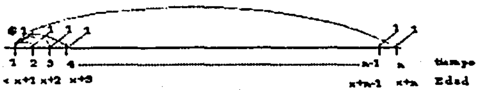
Tenemos: $Nx = Dx + Dx{+}1 + \ldots\ldots\ldots + Dx{+}n{-}1 + Dx{+}n + Dx{+}n{+}1 + \ldots$

$Nx{+}1 = Dx{+}n + Dx{+}n{+}1 + \ldots$

$Nx - Nx{+}1 = Dx + Dx{+}1 + \ldots\ldots\ldots + Dx{+}n{-}1$

$$\Rightarrow \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

- Anualidad vencida temporal n-años.

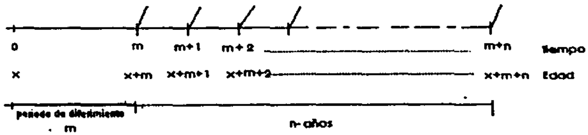


$$a_{x:\overline{n}|} = \left(1 * V_i^{1} *_{1} P_x\right) + \left(1 * V_i^{2} *_{2} P_x\right) + \left(1 * V_i^{3} *_{3} P_x\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(1 * V_i^{n} *_{n} P_x\right) =$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} V_i^{t}\,{}_tP_x = \sum_{t=1}^{n} V_i^{t}\,\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\,\frac{V_i^{x}}{V_i^{x}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{V_i^{x+t}\,\ell_{x+t}}{V_i^{x}\,\ell_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n} D_{x+t}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

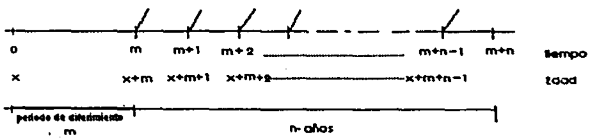
- Anualidad vencida temporal n-años, diferida m-años * $\quad {}_{m|}a_{x:\overline{n|}}$



$$ {}_{m|}a_{x:\overline{n|}} = a_{x+m:\overline{n|}} \cdot {}_mE_x $$

$$ = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} $$

- Anualidad anticipada temporal n-años, diferida m-años * $\quad {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$



$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} \cdot {}_mE_x $$

$$ = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} $$

- Anualidades fraccionadas

Una renta anticipada por un año tiene un valor actual de

$\ddot{a}_x = 1 + a_x$

Si, en lugar de tomar como base la renta vencida se calcula ésta en base a la anticipada, se puede escribir

$1/\ \ddot{a}_x = \ddot{a}_x$

De ambas maneras, la relación es exacta, porque el pago anticipado o el que se deja de lado, según se considere una u otra forma de expresión, es al contado: no hay que tomar en cuenta, por lo tanto, ni el interés ni la mortalidad.

Otra cosa ocurre cuando el adelanto o retraso se refiere a un plazo menor de un año.

Sea una renta anticipada por una fracción de año, $(m - 1)/m$, que se puede considerar, con respecto a la anticipada, como diferida por el plazo complementario, $1/m$. Interpolando linealmente, entre a_x y $\ddot{a}_x$ queda:

$$\frac{1}{m}\Big/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-1}{m} = \ddot{a}_x - \frac{1}{m}$$

Esta fórmula no es sino aproximada, porque se ha prescindido deliberadamente de considerar la influencia del interés y de la mortalidad. Si se acepta de atemano ese error, y se procede del mismo modo para anticipos de *(m-2)/m, (m-3)/m, ...,1/m*, se tiene

$$\frac{1}{m}\Big/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-1}{m}$$

$$\frac{2}{m}\Big/\ddot{a}_x = a_x + \frac{m-2}{m}$$

...

$$\frac{m-1}{m}\Big/\ddot{a}_x = a_x + \frac{1}{m}$$

$$1/\ddot{a}_x = a_x$$

Son rentas de uno pagaderas en distintos subperiodos. Representando por $a_x^{(m)}$ la renta de uno al año, pagadera en fracciones de *1/m* al final de cada subperiodo, la suma de las *m* rentas anteriorès equivale a *m* veces la renta considerada. Se puede, pues, escribir

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Si la renta es anticipada hay, desde luego, que agregarle *1/m*.

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m}$$

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m+1}{2m}$$

- Anualidad Continua

Cuando la serie de pagos se efectúa en cada m-ésimo de tiempo y esa partición tiende a cero se le conoce como anualidad continua.
Sea el caso de una anualidad vencida, fraccionada m-veces al año, vitalicia.

* $\lim_{m\to\infty} a_x^{(m)} = \bar{a}_x$; donde cada $\frac{1}{m} \to 0$

Determinemos la anualidad continua vitalicia como $\bar{a}_x$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \lim_{m\to\infty} \bar{a}_x^{(m)} \\
&\cong \lim_{m\to\infty} \left\{ a_x + \frac{m-1}{2m} \right\} \\
&= \lim_{m\to\infty} a_x + \lim_{m\to\infty} \frac{m-1}{2m} \\
&= a_x + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \\
&= a_x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Seguros

En México el seguro por sobrevivencia no se ofrece por separado del seguro por fallecimiento. En caso de que se llegara a vender únicamente por sobrevivencia y e individuo falleciera antes del periodo pactado, entonces la aseguradora estará obligada a devolver la reserva matemática.

${}_nE_x = A_{x:n}^{\,1}$

Bajo esta situación, no existe un intervalo especifico de tiempo para que el asegurado reclame.

En la ley del Contrato sobre Seguros se establece que para planes temporales de mas de diez años, la compañía está obligada a otorgar valores garantizados, entendiéndose como valor garantizado a una proporción de la reserva matemática.

Este valor garantizado se puede convertir en seguro saldado, seguro prorrogado o valor en efectivo. A estos conceptos también se les conoce como valores de rescate.

Establezcamos acuerdos con la notación de los seguros:

$A_{x:\overline{n|}}$: cubre fallecimiento y sobrevivencia

$A_{x^1:\overline{n|}}$: cubre fallecimiento (riesgo sobre x)

$A_{x:n^1}$: cubre sobrevivencia por n años

Sabemos que:

{ obligación de la compañía} ={ obligación del asegurado}

es decir:

$A_x = P\ddot{a}_x$

PRIMAS

$$P_x = \frac{A_x}{a_x}$$

similarmente

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}$$

Se debe tener cuidado especial para no confundir el concepto de prima única, utilizado para

- Fallecimiento: A_x
- Sobrevivencia: a_x
- Fallecimiento y sobrevivencia: ${}_nE_x$

Prima de tarifa P

Las compañías de seguros para efecto de hacer frente a la obligación contraida por el asegurado, considera en forma adicional a la prima de riesgo que se traduce como prima neta nivelada (PNN)

en el tiempo, los gastos de administración y de adquisición que serás repartidos a agentes, y como proceso del negocio en marcha.

Para ilustrar lo anterior supongamos lo siguiente:

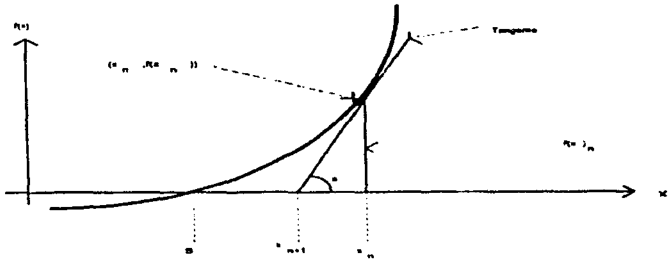
La compañía X establece un plan de seguro temporal consistente en pagar la suma asegurada alcanzada al fallecimiento del asegurado, si esto ocurre antes de terminar el plazo estipulado, siempre y cuando la póliza se encuentre en vigor.

La obligación del contratante es pagar las primas mientras viva el asegurado y como máximo hasta la extinción del plazo estipulado.

Apéndice II

Método de la Derivada

Método de la derivada



Planteamiento:

$$\tan a = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

De la gráfica se tienen que

$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Solución: despejando x_{n+1}, se tiene que

Pero esta última es una secuencia que converge a s (raíz o solución buscada),por lo tanto, dado x_0 en la vecindad de s, se puede obtener la secuencia $x_1, x_2, x_3, \ldots$, que converge a s. Este método se denomina de la tangente o de la derivada.

Este método, también se puede obtener a partir del principio lineal. En efecto, si se acepta que $f(x)=a+bx$, la recta que pasa por el punto (x_n, f(x_n)),satisface la ecuación, es decir, $f(x_n)=a+bx_n$,por otra parte, derivando ambos lados de la ecuación se tiene que $f'(x_n)=b$

Si se resuelve para a y b, se obtiene que

$$b=f'(x_n)$$

$$a=f(x_n)-f'(x_n)x_n$$

Sustituyendo en la ecuación y despejando a x, se tiene que

$f(x)=f(x_n)-f'(x_n)x_n+f'(x_n)x$, o también

$x=x_n+f(x)-f(x_n)$, y para $f(x)=0$, se obtiene un siguiente valor para x, o sea que $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

ANEXOS:

ANEXO1

EDAD	IMSS-NO INVALIDOS		IMSS-INVALIDOS	
	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
12				
13				
14				
15	0.00043	0.00015	0.00316	0.00069
16	0.00046	0.00015	0.00316	0.00069
17	0.00049	0.00016	0.00316	0.00069
18	0.00053	0.00017	0.00316	0.00072
19	0.00058	0.00018	0.00316	0.00080
20	0.00063	0.00019	0.00316	0.00092
21	0.00069	0.00021	0.00316	0.00108
22	0.00076	0.00022	0.00320	0.00127
23	0.00083	0.00024	0.00334	0.00149
24	0.00090	0.00025	0.00358	0.00174
25	0.00097	0.00026	0.00389	0.00202
26	0.00106	0.00027	0.00428	0.00231
27	0.00114	0.00028	0.00474	0.00262
28	0.00123	0.00030	0.00524	0.00294
29	0.00132	0.00031	0.00579	0.00328
30	0.00141	0.00033	0.00637	0.00362
31	0.00151	0.00035	0.00698	0.00397
32	0.00161	0.00038	0.00762	0.00433
33	0.00172	0.00041	0.00826	0.00469
34	0.00183	0.00044	0.00892	0.00506
35	0.00194	0.00048	0.00958	0.00543
36	0.00206	0.00053	0.01024	0.00580
37	0.00219	0.00060	0.01090	0.00618
38	0.00232	0.00067	0.01155	0.00656
39	0.00246	0.00075	0.01220	0.00695
40	0.00261	0.00085	0.01283	0.00734
41	0.00276	0.00095	0.01344	0.00773
42	0.00293	0.00107	0.01405	0.00813
43	0.00311	0.00119	0.01464	0.00855
44	0.00330	0.00134	0.01522	0.00897
45	0.00351	0.00149	0.01579	0.00940
46	0.00374	0.00166	0.01635	0.00985
47	0.00399	0.00185	0.01690	0.01032
48	0.00426	0.00206	0.01745	0.01081

EDAD	IMSS-NO INVALIDOS		IMSS-INVALIDOS	
	HOMBRES	MUJERES	HOMBRES	MUJERES
61	0.01186	0.00740	0.02683	0.02103
62	0.01298	0.00815	0.02801	0.02230
63	0.01422	0.00899	0.02931	0.02368
64	0.01560	0.00991	0.03074	0.02516
65	0.01713	0.01092	0.03232	0.02676
66	0.01883	0.01205	0.03405	0.02848
67	0.02071	0.01329	0.03596	0.03034
68	0.02279	0.01467	0.03806	0.03234
69	0.02510	0.01619	0.04037	0.03449
70	0.02765	0.01787	0.04290	0.03680
71	0.03048	0.01972	0.04567	0.03929
72	0.03361	0.02177	0.04870	0.04195
73	0.03707	0.02402	0.05201	0.04481
74	0.04088	0.02652	0.05562	0.04786
75	0.04509	0.02926	0.05955	0.05113
76	0.04973	0.03228	0.06381	0.05462
77	0.05484	0.03561	0.06844	0.05835
78	0.06046	0.03927	0.07344	0.06232
79	0.06664	0.04330	0.07885	0.06655
80	0.07341	0.04772	0.08469	0.07105
81	0.08083	0.05256	0.09097	0.07583
82	0.08895	0.05787	0.09774	0.08091
83	0.09781	0.06368	0.10500	0.08630
84	0.10747	0.07003	0.11279	0.09200
85	0.11789	0.07700	0.12113	0.09805
86	0.12910	0.08464	0.13005	0.10444
87	0.14114	0.09303	0.13958	0.11119
88	0.15403	0.10221	0.14974	0.11833
89	0.16780	0.11226	0.16057	0.12585
90	0.18247	0.12325	0.17209	0.13379
91	0.19806	0.13526	0.18433	0.14214
92	0.21457	0.14835	0.19733	0.15094
93	0.23201	0.16262	0.21111	0.16019
94	0.25038	0.17815	0.22571	0.16991
95	0.26966	0.19500	0.24116	0.18012
96	0.28983	0.21327	0.25749	0.19083
97	0.31086	0.23303	0.27474	0.20206
98	0.33273	0.25435	0.29294	0.21383

49	0.00456	0.00229	0.01800	0.01132	**99**	0.35536	0.27728	0.31212	0.22616
50	0.00489	0.00254	0.01855	0.01187	**100**	0.37871	0.30188	0.33233	0.23906
51	0.00525	0.00281	0.01912	0.01244	**101**	0.40271	0.32818	1.00000	1.00000
52	0.00565	0.00310	0.01970	0.01305	**102**	0.42728	0.35619	1.00000	1.00000
53	0.00609	0.00343	0.02030	0.01371	**103**	0.45233	0.38589	1.00000	1.00000
54	0.00658	0.00378	0.02093	0.01440	**104**	0.47775	0.41723	1.00000	1.00000
55	0.00712	0.00417	0.02159	0.01515	**105**	0.50346	0.45014	1.00000	1.00000
56	0.00772	0.00459	0.02230	0.01596	**106**	0.52933	0.48450	1.00000	1.00000
57	0.00839	0.00505	0.02306	0.01683	**107**	0.55525	0.52012	1.00000	1.00000
58	0.00912	0.00555	0.02389	0.01776	**108**	0.58111	0.55679	1.00000	1.00000
59	0.00994	0.00610	0.02478	0.01877	**109**	0.60677	0.59423	1.00000	1.00000
60	0.01085	0.00672	0.02576	0.01986	**110**	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

ANEXO 2

EDAD	HOMBRES μx 0.5*(LOG(X-1)-LOG(X+1))	μx (dx-1+dx)/2lx	Diferencia	MUJERES μx 0.5*(LOG(X-1)-LOG(X+1))	μx (dx-1+dx)/2lx	Diferencia
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
15	0.000215	0.000215	0.000000	0.000075	0.000075	0.000000
16	0.000445	0.000445	(0.000000)	0.000150	0.000150	(0.000000)
17	0.000475	0.000475	(0.000000)	0.000155	0.000155	(0.000000)
18	0.000510	0.000510	(0.000000)	0.000165	0.000165	(0.000000)
19	0.000555	0.000555	(0.000000)	0.000175	0.000175	(0.000000)
20	0.000605	0.000605	(0.000000)	0.000185	0.000185	(0.000000)
21	0.000660	0.000660	(0.000000)	0.000200	0.000200	(0.000000)
22	0.000725	0.000725	(0.000000)	0.000215	0.000215	(0.000000)
23	0.000795	0.000795	(0.000000)	0.000230	0.000230	(0.000000)
24	0.000865	0.000865	(0.000000)	0.000245	0.000245	(0.000000)
25	0.000935	0.000935	(0.000000)	0.000255	0.000255	(0.000000)
26	0.001016	0.001015	(0.000000)	0.000265	0.000265	(0.000000)
27	0.001101	0.001101	(0.000000)	0.000275	0.000275	(0.000000)
28	0.001186	0.001186	(0.000000)	0.000290	0.000290	(0.000000)
29	0.001276	0.001276	(0.000000)	0.000305	0.000305	(0.000000)
30	0.001366	0.001366	(0.000000)	0.000320	0.000320	(0.000000)
31	0.001461	0.001461	(0.000000)	0.000340	0.000340	(0.000000)
32	0.001561	0.001561	(0.000000)	0.000365	0.000365	(0.000000)
33	0.001666	0.001666	(0.000000)	0.000395	0.000395	(0.000000)
34	0.001777	0.001776	(0.000000)	0.000425	0.000425	(0.000000)
35	0.001887	0.001887	(0.000000)	0.000460	0.000460	(0.000000)
36	0.002002	0.002002	(0.000000)	0.000505	0.000505	(0.000000)

37	0.002127	0.002127	(0.000000)	0.000565	0.000565	(0.000000)
38	0.002258	0.002257	(0.000000)	0.000635	0.000635	(0.000000)
39	0.002393	0.002393	(0.000000)	0.000710	0.000710	(0.000000)
40	0.002538	0.002538	(0.000000)	0.000800	0.000800	(0.000000)
41	0.002689	0.002688	(0.000000)	0.000900	0.000900	(0.000000)
42	0.002849	0.002849	(0.000000)	0.001011	0.001010	(0.000000)
43	0.003025	0.003024	(0.000000)	0.001131	0.001131	(0.000000)
44	0.003210	0.003210	(0.000000)	0.001266	0.001266	(0.000000)
45	0.003411	0.003410	(0.000000)	0.001416	0.001416	(0.000000)
46	0.003632	0.003631	(0.000000)	0.001576	0.001576	(0.000000)
47	0.003872	0.003872	(0.000000)	0.001757	0.001756	(0.000000)
48	0.004134	0.004133	(0.000001)	0.001957	0.001957	(0.000000)
49	0.004420	0.004419	(0.000001)	0.002177	0.002177	(0.000000)
50	0.004736	0.004735	(0.000001)	0.002418	0.002418	(0.000000)
51	0.005083	0.005082	(0.000001)	0.002679	0.002678	(0.000000)
52	0.005465	0.005464	(0.000001)	0.002959	0.002959	(0.000000)
53	0.005887	0.005886	(0.000001)	0.003270	0.003270	(0.000001)
54	0.006355	0.006354	(0.000002)	0.003612	0.003611	(0.000001)
55	0.006874	0.006872	(0.000002)	0.003983	0.003982	(0.000001)
56	0.007448	0.007446	(0.000002)	0.004390	0.004389	(0.000001)
57	0.008088	0.008085	(0.000003)	0.004832	0.004831	(0.000001)
58	0.008794	0.008790	(0.000003)	0.005314	0.005313	(0.000001)
59	0.009576	0.009572	(0.000004)	0.005842	0.005840	(0.000002)
60	0.010450	0.010445	(0.000005)	0.006431	0.006429	(0.000002)
61	0.011420	0.011415	(0.000006)	0.007085	0.007083	(0.000002)
62	0.012498	0.012491	(0.000007)	0.007805	0.007803	(0.000003)
63	0.013694	0.013685	(0.000008)	0.008607	0.008603	(0.000004)
64	0.015023	0.015013	(0.000010)	0.009495	0.009491	(0.000004)
65	0.016501	0.016489	(0.000012)	0.010470	0.010465	(0.000005)
66	0.018144	0.018129	(0.000015)	0.011552	0.011545	(0.000006)
67	0.019969	0.019951	(0.000018)	0.012751	0.012743	(0.000008)
68	0.021991	0.021969	(0.000022)	0.014079	0.014070	(0.000009)

101	0.495655	0.506132	0.010477	0.378565	0.380299	0.001735
102	0.536355	0.550754	0.014399	0.419058	0.422342	0.003284
103	0.579720	0.599192	0.019472	0.463966	0.469572	0.005605
104	0.625846	0.651834	0.025988	0.513772	0.522801	0.009029
105	0.674850	0.709126	0.034276	0.569027	0.583041	0.014014
106	0.726845	0.771633	0.044789	0.630355	0.651572	0.021218
107	0.781921	0.839940	0.058020	0.698419	0.729992	0.031574
108	0.840195	0.914782	0.074587	0.773965	0.820322	0.046357
109	0.901754	0.997016	0.095262	0.857840	0.925248	0.067408
110	1.000000	1.000000	0.000000	1.000000	1.000000	0.000000

69	0.024237	0.024211	(0.000026)	0.015551	0.015539	(0.000011)
70	0.026730	0.026698	(0.000032)	0.017177	0.017163	(0.000014)
71	0.029497	0.029458	(0.000039)	0.018974	0.018958	(0.000017)
72	0.032571	0.032524	(0.000047)	0.020964	0.020943	(0.000020)
73	0.035981	0.035924	(0.000057)	0.023162	0.023137	(0.000025)
74	0.039757	0.039689	(0.000068)	0.025596	0.025566	(0.000030)
75	0.043939	0.043856	(0.000082)	0.028287	0.028251	(0.000036)
76	0.048574	0.048475	(0.000099)	0.031255	0.031211	(0.000044)
77	0.053705	0.053586	(0.000119)	0.034536	0.034483	(0.000053)
78	0.059383	0.059241	(0.000142)	0.038161	0.038097	(0.000063)
79	0.065665	0.065495	(0.000169)	0.042164	0.042088	(0.000076)
80	0.072604	0.072404	(0.000200)	0.046581	0.046490	(0.000091)
81	0.080264	0.080028	(0.000236)	0.051444	0.051336	(0.000108)
82	0.088721	0.088444	(0.000277)	0.056802	0.056673	(0.000129)
83	0.098044	0.097722	(0.000322)	0.062705	0.062552	(0.000153)
84	0.108313	0.107942	(0.000371)	0.069200	0.069020	(0.000180)
85	0.119567	0.119150	(0.000417)	0.076364	0.076152	(0.000213)
86	0.131833	0.131373	(0.000461)	0.084282	0.084032	(0.000250)
87	0.145189	0.144689	(0.000500)	0.093042	0.092748	(0.000294)
88	0.159710	0.159182	(0.000528)	0.102732	0.102391	(0.000341)
89	0.175477	0.174938	(0.000539)	0.113448	0.113053	(0.000395)
90	0.192575	0.192052	(0.000523)	0.125305	0.124853	(0.000452)
91	0.211095	0.210628	(0.000466)	0.138430	0.137918	(0.000512)
92	0.231123	0.230773	(0.000350)	0.152953	0.152383	(0.000570)
93	0.252751	0.252599	(0.000152)	0.169028	0.168406	(0.000623)
94	0.276084	0.276240	0.000156	0.186837	0.186175	(0.000662)
95	0.301217	0.301835	0.000618	0.206555	0.205884	(0.000672)
96	0.328248	0.329528	0.001280	0.228392	0.227753	(0.000639)
97	0.357281	0.359487	0.002206	0.252589	0.252057	(0.000532)
98	0.388436	0.391907	0.003471	0.279403	0.279091	(0.000312)
99	0.421812	0.427002	0.005190	0.309116	0.309196	0.000080
100	0.457510	0.464982	0.007471	0.342049	0.342771	0.000722

Anexo 3

HOMBRES					MUJERES				
x	px	qx	µx	-logPx/mx	x	px	qx	µx	-logPx/mx
15	0.99957	0.00043	0.000215	2.000430123	15	0.99985	0.00015	0.000075	2.000150015
16	0.99954	0.00046	0.000445092	1.033730838	16	0.99985	0.00015	0.000150011	0.999999996
17	0.99951	0.00049	0.000475106	1.031601885	17	0.99984	0.00016	0.000155011	1.03226572
18	0.99947	0.00053	0.00051012	1.039246425	18	0.99983	0.00017	0.000165013	1.030310676
19	0.99942	0.00058	0.000555141	1.045083613	19	0.99982	0.00018	0.000175014	1.028579065
20	0.99937	0.00063	0.000605168	1.041360785	20	0.99981	0.00019	0.000185016	1.027034656
21	0.99931	0.00069	0.000660199	1.045500832	21	0.99979	0.00021	0.000200018	1.050015484
22	0.99924	0.00076	0.000725238	1.048329957	22	0.99978	0.00022	0.000215022	1.023263423
23	0.99917	0.00083	0.000795289	1.044079096	23	0.99976	0.00024	0.000230024	1.04349368
24	0.9991	0.0009	0.000865345	1.040516231	24	0.99975	0.00025	0.000245029	1.020415756
25	0.99903	0.00097	0.000935405	1.037486838	25	0.99974	0.00026	0.000255031	1.019615431
26	0.99894	0.00106	0.001015471	1.044404316	26	0.99973	0.00027	0.000265034	1.018875508
27	0.99886	0.00114	0.001100562	1.036424921	27	0.99972	0.00028	0.000275036	1.018189397
28	0.99877	0.00123	0.001185651	1.038043696	28	0.9997	0.0003	0.000290039	1.034498087
29	0.99868	0.00132	0.001275757	1.035362982	29	0.99969	0.00031	0.000305045	1.01640101
30	0.99859	0.00141	0.001365872	1.033035762	30	0.99967	0.00033	0.000320048	1.031265295
31	0.99849	0.00151	0.001460995	1.034322999	31	0.99965	0.00035	0.000340054	1.02942704
32	0.99839	0.00161	0.001561142	1.032127555	32	0.99962	0.00038	0.000365061	1.041118979
33	0.99828	0.00172	0.001666298	1.033116978	33	0.99959	0.00041	0.000395072	1.037997724
34	0.99817	0.00183	0.001776482	1.031069696	34	0.99956	0.00044	0.000425084	1.035317116
35	0.99806	0.00194	0.001886678	1.029261343	35	0.99952	0.00048	0.000460097	1.043509089
36	0.99794	0.00206	0.002001885	1.030091262	36	0.99947	0.00053	0.000505115	1.049543632
37	0.99781	0.00219	0.002127126	1.03068712	37	0.9994	0.0006	0.000565141	1.062001478
38	0.99768	0.00232	0.002257403	1.028923523	38	0.99933	0.00067	0.00063518	1.055172449
39	0.99754	0.00246	0.002392697	1.029394988	39	0.99925	0.00075	0.000710225	1.056400173
40	0.99739	0.00261	0.002538033	1.029699661	40	0.99915	0.00085	0.000800281	1.062577976

41	0.99724	0.00276	0.002688415	1.028046585	41	0.99905	0.00095	0.000900362	1.055633182
42	0.99707	0.00293	0.002848819	1.030005943	42	0.99893	0.00107	0.001010452	1.059499312
43	0.99689	0.00311	0.003024305	1.029937799	43	0.99881	0.00119	0.001130573	1.053190325
44	0.9967	0.0033	0.003209851	1.029785142	44	0.99866	0.00134	0.001265709	1.059405215
45	0.99649	0.00351	0.003410463	1.030996224	45	0.99851	0.00149	0.001415899	1.053119713
46	0.99626	0.00374	0.003631182	1.031898579	46	0.99834	0.00166	0.001576112	1.054099985
47	0.99601	0.00399	0.00387202	1.032531141	47	0.99815	0.00185	0.00175638	1.05427827
48	0.99574	0.00426	0.004132992	1.032932006	48	0.99794	0.00206	0.001956714	1.053871069
49	0.99544	0.00456	0.004419113	1.03424124	49	0.99771	0.00229	0.002177126	1.053051532
50	0.99511	0.00489	0.004735444	1.03517109	50	0.99746	0.00254	0.002417628	1.051953072
51	0.99475	0.00525	0.005082015	1.03577614	51	0.99719	0.00281	0.002678234	1.050675724
52	0.99435	0.00565	0.005463854	1.037000923	52	0.9969	0.0031	0.002958959	1.049292934
53	0.99391	0.00609	0.005886052	1.037812738	53	0.99657	0.00343	0.00326982	1.050790562
54	0.99342	0.00658	0.006353658	1.039046164	54	0.99622	0.00378	0.003610903	1.048813156
55	0.99288	0.00712	0.006871792	1.039826087	55	0.99583	0.00417	0.003982171	1.049356839
56	0.99228	0.00772	0.007445529	1.040886886	56	0.99541	0.00459	0.004388731	1.048268063
57	0.99161	0.00839	0.008085031	1.042097936	57	0.99495	0.00505	0.004830583	1.048071162
58	0.99088	0.00912	0.008790494	1.042244265	58	0.99445	0.00555	0.005312816	1.047553407
59	0.99006	0.00994	0.00957197	1.043644272	59	0.9939	0.0061	0.005840487	1.047631952
60	0.98915	0.01085	0.010444898	1.044461203	60	0.99328	0.00672	0.006428719	1.048837361
61	0.98814	0.01186	0.011414507	1.045239271	61	0.9926	0.0074	0.007082732	1.048679503
62	0.98702	0.01298	0.012491174	1.045936628	62	0.99185	0.00815	0.007802584	1.048805457
63	0.98578	0.01422	0.013685348	1.046526036	63	0.99101	0.00899	0.008603484	1.049650785
64	0.9844	0.0156	0.015012563	1.047320224	64	0.99009	0.00991	0.009490777	1.04937997
65	0.98287	0.01713	0.016488608	1.047900192	65	0.98908	0.01092	0.010464596	1.049258024
66	0.98117	0.01883	0.018129276	1.048554965	66	0.98795	0.01205	0.011545281	1.050055802
67	0.97929	0.02071	0.019950687	1.048959362	67	0.98671	0.01329	0.012743487	1.049877684
68	0.97721	0.02279	0.021968987	1.049375014	68	0.98533	0.01467	0.014069502	1.050404558
69	0.9749	0.0251	0.024210748	1.049962474	69	0.98381	0.01619	0.015539207	1.050406917
70	0.97235	0.02765	0.026698115	1.050241069	70	0.98213	0.01787	0.017163215	1.050595515

71	0.96952	0.03048	0.029458131	1.050785434	71	0.98028	0.01972	0.018957574	1.050610918
72	0.96639	0.03361	0.032524119	1.051152218	72	0.97823	0.02177	0.020943351	1.05095231
73	0.96293	0.03707	0.03592446	1.051499719	73	0.97598	0.02402	0.02313724	1.050824756
74	0.95912	0.04088	0.039688544	1.051665743	74	0.97348	0.02652	0.02556558	1.05133538
75	0.95491	0.04509	0.043856202	1.052033276	75	0.97074	0.02926	0.028251235	1.051161536
76	0.95027	0.04973	0.048474555	1.052286595	76	0.96772	0.03228	0.031210977	1.051312491
77	0.94516	0.05484	0.053586247	1.052528518	77	0.96439	0.03561	0.034483378	1.051506666
78	0.93954	0.06046	0.059240961	1.052732502	78	0.96073	0.03927	0.038097448	1.051563009
79	0.93336	0.06664	0.06549532	1.052965321	79	0.9567	0.0433	0.042087584	1.051745246
80	0.92659	0.07341	0.07240398	1.053037391	80	0.95228	0.04772	0.046489874	1.051759579
81	0.91917	0.08083	0.08002799	1.053183899	81	0.94744	0.05256	0.051335656	1.051738166
82	0.91105	0.08895	0.088444016	1.053293408	82	0.94213	0.05787	0.056672904	1.051860858
83	0.90219	0.09781	0.097722299	1.053292231	83	0.93632	0.06368	0.062552322	1.051887099
84	0.89253	0.10747	0.107941985	1.053298698	84	0.92997	0.07003	0.069020468	1.051904649
85	0.88211	0.11789	0.119150259	1.05277584	85	0.923	0.077	0.076151752	1.052189111
86	0.8709	0.1291	0.131372732	1.052182727	86	0.91536	0.08464	0.084031809	1.052432992
87	0.85886	0.14114	0.144688728	1.051563262	87	0.90697	0.09303	0.092748176	1.052806747
88	0.84597	0.15403	0.159182059	1.050818053	88	0.89779	0.10221	0.102391151	1.053011812
89	0.8322	0.1678	0.174937507	1.049989138	89	0.88774	0.11226	0.113053111	1.053278149
90	0.81753	0.18247	0.192052111	1.049026112	90	0.87675	0.12325	0.124852972	1.053506278
91	0.80194	0.19806	0.210628351	1.04791917	91	0.86474	0.13526	0.137917995	1.053715977
92	0.78543	0.21457	0.230773041	1.04658646	92	0.85165	0.14835	0.152383479	1.053786381
93	0.76799	0.23201	0.252598968	1.045050062	93	0.83738	0.16262	0.168405638	1.053867978
94	0.74962	0.25038	0.276240144	1.043254841	94	0.82185	0.17815	0.18617548	1.053830409
95	0.73034	0.26966	0.301834616	1.041116835	95	0.805	0.195	0.205883525	1.053571438
96	0.71017	0.28983	0.329527646	1.038610584	96	0.78673	0.21327	0.227753012	1.053203037
97	0.68914	0.31086	0.359486775	1.035673247	97	0.76697	0.23303	0.252057054	1.052569598
98	0.66727	0.33273	0.39190698	1.032287094	98	0.74565	0.25435	0.279090981	1.051624659
99	0.64464	0.35536	0.427001864	1.028246701	99	0.72272	0.27728	0.309195891	1.050251367
100	0.62129	0.37871	0.464981706	1.023604393	100	0.69812	0.30188	0.342770861	1.048409628

101	0.59729	0.40271	0.506132157	1.018217306	101	0.37182	0.32818	0.380299248	1.045925896
102	0.57272	0.42728	0.5507543	1.011990897	102	0.64381	0.35619	0.422341971	1.042642356
103	0.54767	0.45233	0.599191959	1.004823837	103	0.61411	0.38589	0.469571645	1.038353187
104	0.52225	0.47775	0.651833533	0.996587081	104	0.58277	0.41723	0.522801384	1.032825655
105	0.49654	0.50346	0.709125883	0.987259458	105	0.54986	0.45014	0.583041412	1.025813203
106	0.47067	0.52933	0.77163322	0.976627299	106	0.5155	0.4845	0.651572373	1.016952227
107	0.44475	0.55525	0.839940423	0.964643361	107	0.47988	0.52012	0.729992105	1.005790613
108	0.41889	0.58111	0.914782094	0.951206773	108	0.44321	0.55679	0.820322148	0.99[illegible]941498
109	0.39323	0.60677	0.997015786	0.936154281	109	0.40577	0.59423	0.92524839	0.974839612
110	0	1	1		110	0	1	1	
			MEDIA	1.046017482				MEDIA	1.054097351

Anexo 4

Hombres

TABLA PARA LA OBTENCIÓN DE EDAD EQUIVALENTE (z) BAJO HIPÓTESIS DE GOMPERTZ								
(x,y) con x < y, t=ln(1+C^n)/lnC, C=1.093425502 —> z = x+t								
n = y - x	t exacto	t entero	n = y - x	t exacto	t entero	n = y - x	t exacto	t entero
0	7.7606655	8	34	34.5248341	35	68	70	70
1	8.2718262	8	35	35.4809396	35	69	71	71
2	8.8052639	9	36	36.4406443	36	70	72	72
3	9.3608462	9	37	37.4036646	37	71	73	73
4	9.9383544	10	38	38.3697373	38	72	74	74
5	10.5374873	11	39	39.3386186	39	73	75	75
6	11.1578657	11	40	40.3100828	40	74	76	76
7	11.7990381	12	41	41.2839214	41	75	77	77
8	12.4604872	12	42	42.2599417	42	76	78	78
9	13.1416370	13	43	43.2379658	43	77	79	79
10	13.8418607	14	44	44.2178297	44	78	80	80
11	14.5604888	15	45	45.1393824	45	79	81	81
12	15.2968169	15	46	46.1824846	46	80	82	82
13	16.0501140	16	47	47.1670083	47	81	83	83
14	16.8196298	17	48	48.1528356	48	82	84	84
15	17.6046025	18	49	49.1398580	49	83	84	84
16	18.4042656	18	50	50.1279762	50	84	85	85
17	19.2178538	19	51	51.1170985	51	85	86	86
18	20.0446090	20	52	52.1071410	52	86	87	87
19	20.8837850	21	53	53.0980265	53	87	88	88
20	21.7346520	22	54	54.0896843	54	88	89	89
21	22.5965002	23	55	55.0820494	55	89	90	90
22	23.4686425	23	56	56.0750623	56	90	91	91
23	24.3504171	24	57	57.0686684	57	91	92	92
24	25.2411892	25	58	58.0628176	58	92	93	93
25	26.1403526	26	59	59.0574640	59	93	94	94
26	27.0473298	27	60	60.0525656	60	94	95	95
27	27.9615732	28	61	61.0480839	61	95	96	96
28	28.8825646	29	62	62.0439835	62	96	97	97
29	29.8098154	30	63	63.0402322	63	97	98	98
30	30.7428657	31	64	64.0368003	64	98	99	99
31	31.6812839	32	65	65.0336607	65	99	100	100
32	32.6246657	33	66	66.0307885	66	100	101	101
33	33.5726333	34	67	67.0281612	67			

Anexo 5

Mujeres

TABLA PARA LA OBTENCIÓN DE EDAD EQUIVALENTE (z) BAJO HIPÓTESIS DE GOMPERTZ								
(x,y) con x < y, $t=\ln(1+C^n)/\ln C$, C=1.110111400 ---> z = x+t								
n = y - x	t exacto	t entero	n = y - x	t exacto	t entero	n = y - x	t exacto	t entero
0	6.5844366	7	34	34.2271500	34	68	68	68
1	7.0935397	7	35	35.2040424	35	69	69	69
2	7.6284748	8	36	36.1832622	36	70	70	70
3	8.1890319	8	37	37.1645795	37	71	71	71
4	8.7748666	9	38	38.1477861	38	72	72	72
5	9.3855065	9	39	39.1326940	39	73	73	73
6	10.0203617	10	40	40.1191331	40	74	74	74
7	10.6787361	11	41	41.1069501	41	75	75	75
8	11.3598410	11	42	42.0960065	42	76	76	76
9	12.0628091	12	43	43.0861775	43	77	77	77
10	12.7867101	13	44	44.0773505	44	78	78	78
11	13.5305647	14	45	45.0694242	45	79	79	79
12	14.2933602	14	46	46.0623075	46	80	80	80
13	15.0740634	15	47	47.0559180	47	81	81	81
14	15.8716340	16	48	48.0501820	48	82	82	82
15	16.6850355	17	49	49.0450330	49	83	83	83
16	17.5132461	18	50	50.0404111	50	84	84	84
17	18.3552663	18	51	51.0362626	51	85	85	85
18	19.2101271	19	52	52.0325393	52	86	86	86
19	20.0768949	20	53	53.0291977	53	87	87	87
20	20.9546765	21	54	54.0261987	54	88	88	88
21	21.8426219	22	55	55.0235074	55	89	89	89
22	22.7399270	23	56	56.0210922	56	90	90	90
23	23.6458339	24	57	57.0189249	57	91	91	91
24	24.5596320	25	58	58.0169801	58	92	92	92
25	25.4806572	25	59	59.0152350	59	93	93	93
26	26.4082914	26	60	60.0136691	60	94	94	94
27	27.3419609	27	61	61.0122641	61	95	95	95
28	28.2811346	28	62	62.0110034	62	96	96	96
29	29.2253225	29	63	63.0098722	63	97	97	97
30	30.1740734	30	64	64.0088572	64	98	98	98
31	31.1269726	31	65	65.0079466	65	99	99	99
32	32.0836399	32	66	66.0071295	66	100	100	100
33	33.0437271	33	67	67.0063965	67			

Anexo 6

SEGUROS DE PENSIONES DERIVADOS DE LA SEGURIDAD SOCIAL
CONDICIONES DE LA INFORMACIÓN AJUSTADA
SEGURO DE INCAPACIDAD PERMANENTE TOTAL O PARCIAL POR RIESGOS DE TRABAJO Y SEGURO DE SOBREVIVENCIA

TIPO DE SEGURO	PENSIÓN SOLICITADA	FECHA DE VALUACIÓN
Riesgo de Trabajo	Incapacidad	2001/11/30

NOMBRE DEL ASEGURADO	SEXO
INCAPACITADO EDAD 45	M

NÚMERO DE SEGURIDAD SOCIAL	CLAVE ÚNICA DE REGISTRO POBLACIONAL
00000000000	TESIS-FC
FECHA DE NACIMIENTO	**FECHA DE INICIO DEL DERECHO**
1956/11/13	2001/11/13

NOMBRE DEL SOLICITANTE
EJEMPLO TESIS
DOMICILIO DEL SOLICITANTE
CONOCIDO

DATOS DE LOS BENEFICIARIOS

NOMBRE(S)	PARENTESCO	SEXO	ESTADO DE ORFANDAD	FINIQUITO	FECHA DE NACIMIENTO	FECHA DE VENCIMIENTO
ESPOSA DE EDAD 43	ES	F			1958/11/13	0001/01/01
HIJO EQUIVALENTE EDAD 24	HI	M	N		1977/11/13	2002/11/13
Total : 2 beneficiarios						

DATOS DE CERTIFICACIÓN A LA FECHA DE VALUACIÓN

SELLO DE LA ASEGURADORA

SALARIO (DIARIO/PROMEDIO) RT/IV *	$60.00 / 60.00
PORCENTAJE DE VALUACIÓN	100.00%
PORCENTAJE DE AYUDA ASISTENCIAL	0.00%

DATOS AL ÚLTIMO FINIQUITO

CUANTÍA BÁSICA MENSUAL DE LA PENSIÓN	$1,351.37
IMPORTE MENSUAL DE LA PENSIÓN	$1,351.37
IMPORTE PENSIÓN MÍNIMA GARANTIZADA	$1,351.37

RESERVA MATEMÁTICA EXACTA

Información ajustada	$373,202.82
DIFERENCIAL DE PRIMA POR AJUSTE	$-1,578.24

NOMBRE Y FIRMA DEL FUNCIONARIO DE LA COMPAÑÍA

* Correspondiente a la fecha de inicio del derecho

Versión 3.3 Julio 30, 2001

SEGUROS DE PENSIONES DERIVADOS DE LA SEGURIDAD SOCIAL
CONDICIONES DE LA INFORMACIÓN ÚLTIMA

SEGURO DE INCAPACIDAD PERMANENTE TOTAL O PARCIAL POR RIESGOS DE TRABAJO Y SEGURO DE SOBREVIVENCIA

TIPO DE SEGURO	PENSIÓN SOLICITADA	FECHA DE VALUACIÓN
Riesgo de Trabajo	Incapacidad	2001/11/30

NOMBRE DEL ASEGURADO	SEXO
INCAPACITADO EDAD 45	M

NÚMERO DE SEGURIDAD SOCIAL	CLAVE ÚNICA DE REGISTRO POBLACIONAL
00000000000	TESIS-FC
FECHA DE NACIMIENTO	**FECHA DE INICIO DEL DERECHO**
1956/11/13	2001/11/13

NOMBRE DEL SOLICITANTE
EJEMPLO TESIS
DOMICILIO DEL SOLICITANTE
CONOCIDO

DATOS DE LOS BENEFICIARIOS

NOMBRE(S)	PARENTESCO	SEXO	ESTADO DE ORFANDAD	INVÁLIDO	FECHA DE NACIMIENTO	FECHA DE VENCIMIENTO
ESPOSA DE EDAD 43	ES	F			1958/11/13	0001/01/01
HIJO1 EDAD 15	HI	M	N		1986/11/13	2011/11/13
HIJO2 EDAD 17	HI	M	N		1984/11/13	2009/11/13
Total : 3 beneficiarios						

DATOS DE CERTIFICACIÓN A LA FECHA DE VALUACIÓN

SELLO DE LA ASEGURADORA

SALARIO (DIARIO/PROMEDIO) RT/IV *	$60.00 / 60.00
PORCENTAJE DE VALUACIÓN	100.00%
PORCENTAJE DE AYUDA ASISTENCIAL	0.00%

DATOS AL ÚLTIMO FIRMADO

CUANTÍA BÁSICA MENSUAL DE LA PENSIÓN	$1,351.37
IMPORTE MENSUAL DE LA PENSIÓN	$1,351.37
IMPORTE PENSIÓN MÍNIMA GARANTIZADA	$1,351.37

RESERVA MATEMÁTICA EXACTA

Información última	$374,735.10

NOMBRE Y FIRMA DEL FUNCIONARIO DE LA COMPAÑÍA

* Correspondiente a la fecha de inicio del derecho

Versión 3.3 Julio 30, 2001

RIESGOS DE TRABAJO
SEGURO DE INCAPACIDAD Y SEGURO DE SOBREVIVENCIA
Para la información ajustada

Datos Generales

Nombre del asegurado	INCAPACITADO EDAD 45
No de seguridad social	00000000000
Fecha del último aniversario	2001/11/13
Fecha de valuación	2001/11/30
Porcentaje de valuación	100.00%

	Diario	Inicio del derecho	Emisión de la póliza	A pagar en la fecha de proceso	Valuación
Salario pensionable RT	$60.00		$1,903.52		$1,910.38
Salario pensionable IV	$60.00		$1,903.52		$1,910.38
Pensión mínima garantizada		$1,351.37	$1,409.51	$1,351.37	$1,414.59
Cuantía básica RT		$1,351.37		$1,351.37	$1,414.59
Cuantía básica IV		$638.75		$638.75	$668.63
Cuantía básica IVS		-		-	-
Importe mensual de la pensión		$1,351.37		$1,351.37	
Aguinaldo		$675.68		$675.68	

	FAR	FAS	FA	FAV
Factores	1.0000000	1.0430238	1.0000000	1.0036029

Composición Familiar

Parentesco	No	Porcentaje de la cuantía básica según Ley	Porcentaje de la cuantía básica según distribución	Importe mensual de la pensión a pagar en la fecha de Inicio del derecho	Importe mensual de la pensión a pagar en la fecha de Proceso
Incapacitado	1.00	100.00%	100.00%	$1,351.37	$1,351.37
Inválido	-	-	-	-	-
Esposa	1.00	-	-	-	-
Hijos	1.00	-	-	-	-
Ascendientes	-	-	-	-	-
Total	3.00	100.00%	100.00%	$1,351.37	$1,351.37

Primas al Aniversario t

Seguro	Básica	Neta	Invalidez p/hijos	Finiquito
Vida	-	-	-	-
Incapacidad	$277,757.73	$277,757.73	-	-
Invalidez	-	-	-	-
Sobrevivencia	$95,607.71	$95,637.19	$16.08	$13.40

Primas al Aniversario t+1

Seguro	Básica	Neta	Invalidez p/hijos	Finiquito
Vida	-	-	-	-
Incapacidad	$273,914.75	$273,914.75	-	-
Invalidez	-	-	-	-
Sobrevivencia	$95,355.64	$95,355.64	-	-

Resultados

Reserva matemática exacta	$373,202.82
DIFERENCIAL DE PRIMA POR AJUSTE	$-1,578.24

RIESGOS DE TRABAJO
SEGURO DE INCAPACIDAD Y SEGURO DE SOBREVIVENCIA
Para la información última

Datos Generales

Nombre del asegurado	INCAPACITADO EDAD 45
No de seguridad social	00000000000
Fecha del último aniversario	2001/11/13
Fecha de valuación	2001/11/30
Porcentaje de valuación	100.00%

	Diario	Inicio del derecho	Emisión de la póliza	A pagar en la fecha de proceso	Valuación
Salario pensionable RT	$60.00		$1,903.52		$1,910.38
Salario pensionable IV	$60.00		$1,903.52		$1,910.38
Pensión mínima garantizada		$1,351.37	$1,409.51	$1,351.37	$1,414.59
Cuantía básica RT		$1,351.37		$1,351.37	$1,414.59
Cuantía básica IV		$638.75		$638.75	$668.63
Cuantía básica IVS		-		-	-
Importe mensual de la pensión		$1,351.37		$1,351.37	
Aguinaldo		$675.68		$675.68	

	FAR	FAS	FA	FAV
Factores	1.0000000	1.0430238	1.0000000	1.0036029

Composición Familiar

Parentesco	No	Porcentaje de la cuantía básica según Ley	Porcentaje de la cuantía básica según distribución	Importe mensual de la pensión a pagar en la fecha de Inicio del derecho	Importe mensual de la pensión a pagar en la fecha de Proceso
Incapacitado	1.00	100.00%	100.00%	$1,351.37	$1,351.37
Inválido	-	-	-	-	-
Esposa	1.00	-	-	-	-
Hijos	2.00	-	-	-	-
Ascendientes	-	-	-	-	-
Total	4.00	100.00%	100.00%	$1,351.37	$1,351.37

Primas al Aniversario t

Seguro	Básica	Neta	Invalidez p/hijos	Finiquito
Vida	-	-	-	-
Incapacidad	$277,757.73	$277,757.73	-	-
Invalidez	-	-	-	-
Sobrevivencia	$96,682.90	$97,177.52	$264.45	$230.18

Primas al Aniversario t+1

Seguro	Básica	Neta	Invalidez p/hijos	Finiquito
Vida	-	-	-	-
Incapacidad	$273,914.75	$273,914.75	-	-
Invalidez	-	-	-	-
Sobrevivencia	$96,256.25	$96,722.95	$250.00	$216.70

Resultados

Reserva matemática exacta	$374,735.10

Versión 3.3 Julio 30, 2001

BIBLIOGRAFIA

- JORDAN, W. C. (1982) Life Contingencies. p. 390
- GONZALEZ, G. J. (4a. ed.) Elementos de Calculo Actuarial. p. 287
- AMEZCUA, O. N. (1998, 1a. ed.) Nuevas Pensiones del IMSS. México: SICCO. p.195
- TRUEBA, L. J. (1997) Afores bajo la lupa. México: Times. p. 143
- operaciones de seguros clásicas y modernas
- FLORES, E. J. (1998) Análisis de la Reforma del la Ley del Seguro Social en los ramos de vejez, cesantía en edad avanzada, invalidez y muerte. México: UNAM. p.91
- THULLEN P. (1999) Técnicas Actuariales de la Seguridad Social. España: OIT. p..532

LEGISLACIÓN

- Circular S-22.1
- Circular S-22.3
- Circular S-22.5
- Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros
- Ley del Seguro Social

OTRAS FUENTES DE CONSULTA

HEMEROGRÁFICAS

- Revista Mexicana de Seguros, Fianzas y Finanzas. Tomo 51 No. 590, Mayo 1999, GEMA Editores, "Importancia del Seguro en la vida económica del País".
- Seguro de Pensiones derivado de la Seguridad Social. No. 8, Mayo 1999, AMIS.

INSTITUCIONALES

- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
- Instituciones de seguros autorizadas para operar los seguros de pensiones derivados de las leyes de seguridad social.