



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

F.E.S. "ZARAGOZA"

SOLUCION DE MATRICES TRIDIAGONALES POR
EL METODO ITERATIVO-REPRODUCTIVO
APLICADO A LA TRANSFERENCIA DE CALOR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO QUIMICO

PRESENTAN:

JAIME ARTURO PEREZ GARCIA/
EULOGIO ROBLEDO ENCISO

DIRECTOR: FIS. CARLOS JAVIER MARTINEZ GOMEZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A 14 DE ENERO DE 2002



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES ZARAGOZA**

**JEFATURA DE LA CARRERA
DE INGENIERIA QUIMICA**

OFICIO: FESZ/JCIQ/540/01

ASUNTO: Asignación de Jurado

ALUMNO: ROBLEDO ENCISO EULOGIO
P r e s e n t e.

En respuesta a su solicitud de asignación de jurado, la jefatura a mi cargo, ha propuesto a los siguientes sinodales:

Presidente:	I.Q. José Luis Macías Pérez
Vocal:	Fis. Carlos Javier Martínez Gómez
Secretario:	I.Q. Enrique Laguna Rodríguez
Suplente:	I.Q. Magín Enrique Juárez Villar
Suplente:	I.Q. Narciso Campero Garnica

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e
“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”
México, D. F., 29 de Noviembre del 2001.

EL JEFE DE LA CARRERA

I.Q. ARTURO E. MENDEZ GUTIERREZ

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

AGRADECIMIENTOS

ARTURO

A Dios por haberme iluminado y dado fuerzas para cumplir uno de mis objetivos.

A mi madre y mis hermanos quienes me apoyaron incondicionalmente.

Al Prof. Carlos Javier Martínez quien siempre me oriento y me brindo su ayuda a lo largo de la carrera.

A Eulogio del cual he aprendido demasiado y con quien he trabajado excelentemente.

A la familia de mi padre, porque siempre me dieron buenos consejos y estuvieron a mi lado.

A la familia Robledo Enciso quien con sus atenciones me impulsaron aun mas a cumplir con mi objetivo.

A todos mis amigos quienes me ayudaron a que esta etapa de mi vida fuera mas amena.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

AGRADECIMIENTOS

EULOGIO

A mis padres quienes con esfuerzos y sacrificios me dieron la posibilidad de poder estudiar una carrera profesional. Gracias a las atenciones y desvelos de mi madre, al trabajo y regaños de mi padre, he logrado terminar mi licenciatura.

A mis hermanas porque me apoyaron en todo, durante el tiempo que duraron mis estudios.

A mi compañero de tesis, Arturo Pérez, quien es una persona muy brillante y ha contribuido bastante en mi formación laboral.

A mi asesor, Fis. Carlos Javier Martínez Gómez, quien es un excelente profesor y apporto sus conocimientos para poder realizar un buen trabajo de tesis.

A la Sra. Maru y a Alex, por habernos apoyado en la realización de este trabajo.

Al Prof. Raymundo Rodríguez Tapia, que aunque nunca me dio clases, me enseñó las bases de la carrera que elegí, además de que fue la persona que me oriento para seguir estudiando.

A Judith, porque aunque ella no lo note, su apoyo ha sido muy importante para mi.

A todos aquellos familiares y amigos que de alguna u otra manera han contribuido con su granito de arena para poder terminar mis estudios profesionales.

Dedico especialmente este trabajo a mi mejor amigo, Luis, quien por desgracia tuvo que suspender sus estudios, pero que espero se decida a seguir estudiando y pueda terminar alguna licenciatura.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CONTENIDO

	Página
1. RESUMEN	1
2. INTRODUCCIÓN	3
2.1 Transferencia de calor	3
2.2 Diferentes métodos de solución	4
3. FUNDAMENTO TEÓRICO	6
3.1 Deducción de la ecuación de balance	7
3.2 Conductividad térmica	9
3.3 Superficies isotérmicas	11
3.4 Métodos de solución	12
3.4.1 Método analítico	12
3.4.1.1 Expansión de una función en series de Fourier	13
3.4.1.2 Principio de superposición	14
3.4.2 Método numérico de diferencias finitas	20
3.4.3 Método gráfico	22
3.4.4 Analogía eléctrica	23
4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	24
4.1 Metodología	25
4.1.1 Método analítico	25
4.1.2 Método numérico de diferencias finitas	26
4.1.3 Método iterativo-reproductivo	27
5. ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS PRINCIPALES MÉTODOS	30
5.1 Método analítico	30
5.2 Método numérico	32
5.2.1 Método de Gauss	32
5.2.2 Método L*U (método de Choleski)	34
5.2.3 Método numérico de diferencias finitas	36
5.2.3.1 Temperaturas equidistantes	37
5.2.3.2 Temperaturas no equidistantes	39
5.3 Método iterativo-reproductivo	40
6. OTRAS APLICACIONES	51
7. CONCLUSIONES	56
APÉNDICE A	58
APÉNDICE B	60
APÉNDICE C	62
APÉNDICE D	67
BIBLIOGRAFÍA	70

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. RESUMEN

Es conocido para los ingenieros químicos que en equipos o instalaciones de la industria química existen regiones con diversas temperaturas por lo que, en la mayoría de los procesos, debe existir un control eficiente y en ocasiones permanente de la evolución térmica de un sistema y así saber, por ejemplo, en que región la fatiga térmica hará que el material sufra una fisura y de esta manera, con el conocimiento de los parámetros del material utilizado, poder rediseñar para evitar el deterioro de los equipos. Para lograr esto, se tiene que elaborar un modelo que represente la situación real y solucionarlo con el método que proporcione los valores más apegados a la realidad.

Con lo anterior en mente, en el presente trabajo se obtienen las isotermas internas de un material rectangular, el cual está sometido a diferentes temperaturas en sus contornos. Para construir una isoterma, se debe conocer un gran número de temperaturas que permitan visualizar su localización, así como la extensión de éstas, por lo tanto, se determinará un método que permita obtener, en bases teóricas, la temperatura de una gran cantidad de puntos internos del material, alineados horizontal y verticalmente a distancias iguales, con el fin de representar las isotermas y que éste método proporcione soluciones aceptables para ser un método recomendable en ingeniería química.

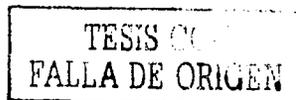
Podemos decir que los requisitos que cumplirá el método, dentro del amplísimo termino óptimo, son:

- a) de fácil empleo
- b) que se apegue a los datos reales
- c) que sea expedito

un método con las anteriores propiedades podrá sustituir a los previos para el mismo problema.

Los supuestos para el problema son:

1. Material isotrópico bidimensional
2. Fuentes térmicas invariables en el tiempo



Como parte del análisis, se desarrollan los métodos más comunes que se utilizan para la obtención de perfiles térmicos de un material isotrópico, los cuales servirán como parámetros de comparación, y dicho sea de paso, se mencionan las ventajas y desventajas de cada uno.

Por lo tanto, los métodos que se desarrollan son:

- A) Analítico: solución de Laplace en dos dimensiones
- B) Aproximación: métodos matriciales (Gauss, LU)

Contra estos métodos, se compara el propuesto en el presente trabajo el cual es denominado, **Iterativo-reproductivo** y que se sustenta principalmente en la "Forma discreta de la propiedad del valor medio" la cual dice que la temperatura en cada punto de encuentro interior es igual al promedio de las temperaturas de los cuatro puntos de encuentro circundantes ⁽¹⁾. Por lo tanto, el procedimiento a seguir es el siguiente:

RESUMEN

- Solucionar una línea horizontal de temperaturas a la vez.
- Solución de la línea central de temperaturas por el método de Laplace.
- Obtención matricial de las líneas de temperatura restantes con contornos cambiantes.
- Uso de un método matricial donde la matriz de incógnitas nunca cambia, solo cambia la posición de la variable que restringe (Lower-Upper).

Con el uso del método propuesto, se pueden tener las siguientes ventajas:

- Evita cargar matrices muy grandes.
- Se pueden calcular un gran número de puntos.
- La solución es muy cercana a la propuesta por Laplace salvo pequeñas fluctuaciones, quedando abierto el problema a un desarrollo posterior que permita evaluar el error del método.
- Se puede obtener la solución de un gran número de temperaturas internas, sin el uso de algún software específico.

2. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de nuevos procesos en la industria química tiende frecuentemente a ser más complejo y costoso debido a los requerimientos de calidad, distribución y tiempo. Si tanto la investigación requerida para la obtención de un producto como el desarrollo del proceso se realizan adecuadamente, se puede tener confianza en el diseño final y con ello se puede asegurar que la planta operará en los intervalos de funcionalidad.

La mayoría de los procesos y operaciones dentro de la Ingeniería Química, obedecen a modelos matemáticos cuya solución requiere el uso de alguna técnica analítica, numérica o gráfica, por ejemplo, los balances de materia y energía en procesos a régimen permanente conducen a sistemas de ecuaciones algebraicas lineales y no lineales; por otra parte, los balances de materia y energía a régimen transitorio, comunes en el arranque, control y paro de plantas industriales, conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales; el análisis de datos experimentales de laboratorio y planta producen, entre otros, problemas de ajuste de curvas, interpolación, integración y diferenciación numérica.

Entre los problemas más comunes que los ingenieros enfrentan, es resolver sistemas de ecuaciones lineales, las cuales son una etapa en la solución de las ecuaciones diferenciales que se presentan frecuentemente al analizar los problemas científicos y de ingeniería como torsión de barras, análisis de membranas y placas, vibración de cables y barras, problemas hidráulicos, transferencia de calor, etc. También se obtienen sistemas de ecuaciones lineales en los balances de materia y energía así como en la descripción matemática de procesos de etapas (columnas de destilación o series de unidades de extracción), de circuitos eléctricos repetitivos y de la solución de la formulación implícita de diferencias finitas de una ecuación diferencial. En este trabajo, se analiza la solución de un problema de conducción de calor en dos dimensiones, el cual está representado por la ecuación de Laplace y que conduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

2.1 TRANSFERENCIA DE CALOR.

La transferencia de calor es una de las áreas de mayor importancia dentro de la Ingeniería Química ya que generalmente se encuentra en cualquier proceso de fabricación de la industria.

Una medición adecuada y exacta, pero principalmente rápida, de la temperatura en equipos como hornos, reactores, incineradores, calderas de vapor, entre muchos otros, posibilita una mejor interpretación del comportamiento del sistema, para poder especificar y diseñar adecuadamente el equipo, conociendo como se comportará éste al ser sometido a diferentes cargas térmicas.

Para conocer la temperatura en dichos equipos, se tiene que plantear el modelo que describa la situación física y resolver las ecuaciones que resulten de éste, las cuales serán específicas para cada caso en especial, ya que se pueden encontrar diferentes condiciones como son régimen permanente o transitorio, con generación o consumo de energía [▲], en una, dos o tres dimensiones, etc. Una vez que se obtiene la ecuación que representa el problema, también se cuenta con diferentes métodos de solución

[▲] En este caso la generación y consumo de energía se refieren a procesos como el decaimiento radiactivo o frenado de neutrones.

los cuales se deben comparar para saber cuál es el más eficiente y utilizarlo en los posteriores problemas similares que se tengan.

2.2 DIFERENTES MÉTODOS DE SOLUCIÓN.

En cada campo de la ingeniería química podemos encontrar una diversidad de problemas que generalmente tienen más de un método de solución y dentro de esos métodos de solución hay varias formas de plantear el procedimiento para resolver el problema dado. En ingeniería, comúnmente se usan dos formas de resolver los problemas, los métodos analíticos y las aproximaciones en términos de los datos reales de operación. Con estas aproximaciones se intenta obtener una respuesta que vaya más allá del sentido común y la experiencia, la cual deberá ser soportada por una rutina analítica que le dé sustento de validez, de esta manera, han aparecido y han sido desarrollados los métodos numéricos en las diversas ingenierías.

En algunas ocasiones los métodos analíticos están limitados a geometrías y condiciones de frontera relativamente simples debido a la complejidad de sus soluciones analíticas y los problemas inherentes asociados con éstas. Sin embargo, cuando es posible obtener las soluciones analíticas, son sumamente útiles como situaciones límite para verificar los resultados de otro tipo de soluciones, como las numéricas.

Las soluciones analíticas son de utilidad limitada en el control de la exactitud de un modelo real, porque la mayor parte de los problemas que requieren de una solución por métodos numéricos, o bien no tienen ninguna solución analítica, o si existe una su cálculo puede resultar demasiado tedioso y complejo, con lo que se ven favorecidas las soluciones numéricas.

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Al tratar de encontrar un método numérico apropiado, se encuentran los siguientes problemas, métodos sencillos corregibles y que se ajustan por aproximaciones o métodos que consideran la mayor cantidad de información, con lo que comúnmente el método se complica y es poco flexible para la corrección. Es importante mencionar que en ocasiones los métodos sencillos corregibles también se complican.

Aunque hay muchos tipos de métodos numéricos, todos comparten una característica común: invariablemente los métodos numéricos llevan a cabo un gran número de cálculos numéricos y operaciones. Algunas de las razones que hacen atractivos los métodos numéricos para la solución de problemas, son los siguientes:

1. Los métodos numéricos son capaces de manejar sistemas de ecuaciones, no linealidades y geometrías complicadas que son comunes en la práctica de la ingeniería y que, a menudo, son imposibles de resolver analíticamente.
2. Los métodos numéricos ayudan a reforzar y confirmar la comprensión de las matemáticas ya que una de sus funciones es reducir las matemáticas avanzadas a operaciones aritméticas básicas.

INTRODUCCIÓN

3. El conocimiento de la teoría básica en la que se basan los métodos numéricos ayuda al ingeniero en el uso de software disponible comercialmente que contiene métodos numéricos o si es un adepto de la programación de computadoras, entonces tiene la capacidad de diseñar programas propios para resolver los problemas, sin tener que adquirir un software costoso.

Hoy en día las computadoras y los métodos numéricos proporcionan una alternativa para cálculos tan complicados. Al usar la computadora para obtener soluciones directamente, se pueden aproximar los cálculos sin tener que recurrir a suposiciones de simplificación o técnicas deficientes, aunque dichas suposiciones son aún extremadamente valiosas tanto para resolver problemas como para proporcionar una mayor comprensión, los métodos numéricos representan alternativas que amplían considerablemente la capacidad para confrontar y resolver los problemas; como resultado, se dispone de más tiempo para aprovechar las habilidades creativas personales.

Como la eficiencia de un método depende de su facilidad de implementación, la elección del método adecuado para aproximar la solución de un problema está influenciada significativamente por los cambios tecnológicos en las computadoras. El factor limitante en la actualidad es generalmente la capacidad de almacenamiento de la computadora, a pesar de que el costo asociado con los tiempos de cómputo, es desde luego también, un factor importante. Por tal razón, es necesario conocer y comparar los diferentes métodos que dan solución a un mismo problema y elegir aquél que permita obtener resultados satisfactorios en el menor tiempo y costo.

En el presente trabajo, el problema será obtener un gran número de temperaturas internas de un material isotrópico bidimensional a régimen permanente, sin generación de energía y con temperaturas diferentes en sus contornos, con el fin de determinar las isoterms que se forman en dicho material, por lo tanto, se realizará un balance con la finalidad de obtener un modelo el cual describa de forma matemática el problema. Una vez obtenido el modelo matemático representativo, se resolverá dicho modelo utilizando el método analítico, el método numérico de diferencias finitas y el método propuesto **iterativo-reproductivo**, con el fin de saber si es factible utilizar el método propuesto en la determinación de isoterms de un material bidimensional sometido a temperaturas diferentes en sus contornos.

3. FUNDAMENTO TEÓRICO

Las necesidades prioritarias de los ingenieros químicos, requieren en muchas ocasiones el monitoreo frecuente de algún proceso, con lo que están obligados a un seguimiento infinitesimal del proceso y/o fenómeno. Cuando se conoce la variable que más afecta al proceso se puede controlar, monitorear o medir la acción de la misma, dicha acción puede ser interpretada y comprendida a través de los puntos en que se haya dividido el intervalo de aplicación. Sin embargo, cuando se requiere un estudio puntual multidimensional (en nuestro caso bidimensional), los requisitos para el estudio serán tantos puntos como los requeridos para comprender cabalmente el problema, esto es, descargándolos dentro de una interpretación, aunque está sea heurística. Es fácil comprender que los puntos requeridos para la interpretación de estos fenómenos en espacios multidimensionales complican grandemente la interpretación y predicción, así como el trabajo requerido para su solución, además de que los niveles requeridos de matemáticas serán substancialmente más complicados.

Es también sabido, que la gran mayoría de los procesos obedecen condiciones específicas de operación y que las fluctuaciones en ellas deben ser en gran medida muy bien controladas, lo que es un gran predicamento debido a que conservan un sistema estable que depende no solo de las variables del proceso, sino también de su disposición temporal (deterioro del equipo), así como espacial, por lo que un pequeño cambio en éstas, repercutiría en las variables intrínsecas del proceso y con ello la eficiencia del mismo. Como estos cambios no pueden evitarse se debe recurrir al monitoreo para controlar dichas variables intrínsecas, que pueden ser concentración, presión, temperatura, pH, entre otras, y mantenerlas dentro del rango de operación para asegurar un funcionamiento óptimo del proceso.

Cada una de las variables mencionadas, comúnmente se estudian y controlan por especialistas, con lo que podemos considerar que forman parte de los problemas de frontera de la ingeniería química. En nuestro caso, la variable que se estudia es la temperatura, por su gran importancia en la mayoría de los procesos industriales, además de que abre la posibilidad a enfrentar un problema común de la matemática, la física teórica y la ingeniería química que es, la ecuación de Laplace.

El aumento y la disminución de la temperatura, generan un mecanismo de transferencia de calor que depende del movimiento de una partícula a un nivel de energía más alto o más bajo dependiendo el caso, dicho mecanismo es conocido como conducción de calor por interacción molecular. Este tipo de transferencia está presente en todos los casos en los cuales exista un gradiente de temperatura y en los que se encuentren presentes moléculas de sólidos, líquidos o gases. En el caso de los líquidos y gases esta transferencia es importante, siempre y cuando se tomen las precauciones debidas para eliminar las corrientes naturales de flujo que pueden presentarse como consecuencia de las diferencias de densidad que experimentan éstos. De aquí que la transferencia de calor por conducción, es de particular importancia en sólidos sujetos a una diferencia de temperaturas. Sin embargo, este no es el único mecanismo de transferencia de calor por conducción, existe un mecanismo llamado de electrones libres el cual es de gran importancia en sólidos puramente metálicos, variando en las aleaciones y disminuyendo considerablemente en los sólidos no metálicos.

Existen otras dos formas de transmisión del calor: la convección y la radiación. La primera se lleva a cabo como consecuencia del movimiento de un fluido (líquido o gas) y está íntimamente relacionado con el movimiento de éste. El fenómeno de transferencia de calor por convección usualmente se clasifica como convección forzada y convección libre o natural; y en la segunda el calor es transferido

directamente entre porciones distantes del cuerpo por radiación electromagnética. Tanto los mecanismo de transferencia de calor por conducción como por convección requieren un medio para la propagación de la energía, sin embargo, el calor puede también propagarse aún en el vacío absoluto mediante radiación.

En líquidos y gases la convección y la radiación son de suma importancia, pero en los sólidos la convección junto con la radiación usualmente son despreciables.

3.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE

Se deduce la relación para la temperatura T , como una función de las dos variables espaciales x e y , para la distribución de la temperatura de equilibrio de una placa plana. Considerando un elemento de la placa cuya área superficial es $dx dy$. Se supone que el calor fluye sólo en las direcciones x e y , y no en la dirección perpendicular. Si la placa es muy delgada o si la superficie superior e inferior están bien aisladas, la situación física estará de acuerdo con dicha suposición. Sea t el espesor de la placa y teniendo en cuenta que $t \rightarrow 0$ ⁽²⁾.

El calor fluye a una rapidez proporcional al área de sección transversal, el gradiente de temperatura $(\partial T/\partial x)$ o $(\partial T/\partial y)$, y a la conductividad térmica k la cual se supondrá constante en todos los puntos (material isotrópico). Por supuesto, de acuerdo a la ley cero de la termodinámica, el flujo de calor pasa desde la temperatura más alta a la más baja, significando que se opone a la dirección del gradiente que se incrementa. Por lo cual, se utiliza un signo menos en la ecuación para tomar en cuenta esto.

La rapidez de flujo calorífico dentro de un elemento en $x = x_0$, en la dirección x :

$$-k(t dy) \frac{\partial T}{\partial x} \quad 3.1$$

el gradiente en $x_0 + dx$ es el gradiente en x_0 más el incremento del gradiente en la distancia dx :

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \quad 3.2$$

rapidez de flujo calorífico saliendo del elemento en $x = x_0 + dx$

$$-k(t dy) \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \quad 3.3$$

rapidez neta de flujo calorífico al elemento en la dirección x :

$$-k(t dy) \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right) \right] = k t dx dy \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 3.4$$

De igual manera, en la dirección y , rapidez neta de flujo calorífico al elemento en la dirección y :

$$-k(t \, dx) \left[\frac{\partial T}{\partial y} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right) \right] = k \, t \, dx \, dy \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad 3.5$$

El flujo calorífico total en el volumen elemental por conducción es la suma de estos flujos netos en las direcciones x e y . Si hubiera calor generado dentro del elemento, éste sería adicionado al calor que entra por conducción. La suma debe ser igual a la rapidez de pérdida calorífica de otros mecanismos, o también habrá una acumulación dentro del elemento, haciendo que la temperatura se incremente con el tiempo. En este trabajo sólo se considerará el caso en donde las temperaturas del contorno no cambian con el tiempo, el caso del estado estable.

Si hay equilibrio en lo que respecta a la distribución de temperatura (es decir, estado estable), la rapidez total del flujo calorífico en el elemento más el calor generado debe ser cero. Por lo tanto:

$$-k \, t \, (dx)(dy) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \, t \, (dx)(dy) = 0 \quad 3.6$$

en donde Q es la rapidez de generación de calor por unidad de volumen. (Obviamente, si hay generación de calor debe haber flujo calorífico del elemento por conducción que equilibre a éste.) Q con frecuencia será una función de x e y .

Si $Q = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} -k \, t \, (dx)(dy) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \nabla^2 T = 0 \end{aligned} \quad 3.7$$

el operador

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

es llamado *laplaciano*, y por consiguiente la ecuación 3.7 es llamada *ecuación de Laplace*. Para problemas de flujo calorífico tridimensionales, se tendrá análogamente,

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T = 0 \quad 3.8$$

FUNDAMENTO TEÓRICO

La ecuación 3.7, la cual ha sido deducida con referencia al flujo calorífico, también se aplica a los problemas de difusión en estado estable (en donde T es ahora la concentración del material), y a la distribución del potencial eléctrico (en donde T es la fuerza electromotriz); de hecho la ecuación de Laplace se da para la distribución de estado estable del potencial de cualquier cantidad cuando la rapidez de flujo es proporcional al gradiente y en donde la constante de proporcionalidad no varía con la posición o con el valor de T .

La ecuación 3.7 es la ecuación para conducción de calor bidimensional con estados térmicos dependiendo de las variables x e y . En este trabajo, la parte de mayor interés es el considerar la aceptación del modelo bajo rotaciones y/o translaciones lo cual es demandado para el caso de medios isotrópicos y homogéneos. El operador diferencial de 2° orden implicado por esta *invariancia* es justamente el laplaciano. Para el caso de un medio anisotrópico, el laplaciano debe ser remplazado por la suma de todas las derivadas de 2° orden (inclusive términos cruzados, con los factores determinados por las constantes del cristal). Para el caso de un medio no homogéneo estos factores deben ser función de la posición.*

3.2 CONDUCTIVIDAD TÉRMICA.

La conductividad térmica K , puede ser determinada utilizando la ecuación de la *Ley de Fourier de la conducción de calor*,

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad 3.9$$

y un aparato de conducción como el que se muestra en la figura 3.1, en el cual se puede medir el flujo de calor y el gradiente de temperatura.

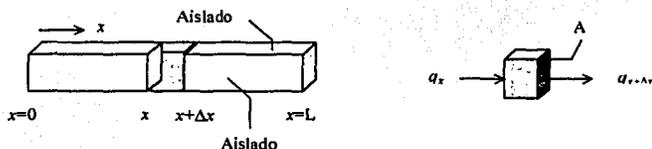


Figura 3.1 Conducción de calor en un cuerpo sólido

Se dice que un sólido es homogéneo e isotrópico cuando un punto dentro del material es calentado y el calor se propaga igualmente en todas las direcciones. Por lo contrario, en los sólidos cristalinos y

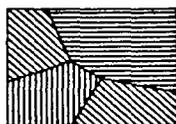
* En estos casos el vector del flux de calor esta considerado como una combinación lineal de los gradientes de temperatura de la siguiente forma: $q_x = - \left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$, quedando de forma similar para y y z . Donde k_{ij} son llamados los

coeficientes de conductividad, los cuales forman un tensor de segundo orden de la siguiente manera: $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$.

Como se puede ver si el sistema no es considerado isotrópico las matemáticas involucradas para dar solución a este tipo de problemas son bastante complejas.

anisotrópicos la conducción de calor se ve favorecida en ciertas direcciones. Existen también sólidos heterogéneos, en los cuales las condiciones de conducción varían de un punto a otro así como la dirección en cada punto.

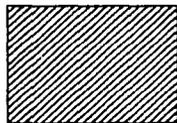
En la mayoría de los casos, la medición del valor de K , dependerá no solo del estado local termodinámico del material, como es su temperatura y su presión, sino también de la orientación del material respecto a la corriente de calor q y al punto específico donde se hará la medición de K . Este caso, es ilustrado mediante la figura 3.2 (a) en la cual el material es no-homogéneo y anisotrópico ⁽³⁾.



(a) No-homogéneo y anisotrópico



(b) No-homogéneo e isotrópico



(c) Homogéneo y anisotrópico



(d) Homogéneo e isotrópico

TESIS CON
FOLIA DE ORIGEN

Figura 3.2 Clasificación de los materiales en función de su isotropía y homogeneidad.

La figura 3.2 (b) muestra un material isotrópico y no-homogéneo en el cual el valor de la conductividad K depende del punto donde se haga la medición, pero no de cómo sea orientado el material respecto a la corriente de calor.

Los sólidos cristalinos, la carne y la madera, pueden ser descritos como materiales homogéneos y anisotrópicos, figura 3.2 (c). En estos casos, el valor de K depende de la orientación del material y de las propiedades termodinámicas, pero no del punto donde se haga la medición

Muchos de los valores de conductividad térmica que se reportan en los libros, se refieren a materiales isotrópicos y homogéneos en los cuales el valor de K es independiente de las propiedades termodinámicas, del punto donde se realice la medición y de la orientación del material con respecto a la corriente de calor, figura 3.2 (d).

Es importante notar que la temperatura puede tener un efecto considerable sobre el valor de K cuando se trabaja con el material en un rango amplio de temperatura.

Estrictamente hablando, la conductividad térmica K no es constante en todo el material, ya que depende de la temperatura. Sin embargo, cuando el rango de temperatura es limitado, el cambio en K puede ser despreciado, y en la teoría matemática ordinaria, se asume que la conductividad no varía con la temperatura.

3.3 SUPERFICIES ISOTÉRMICAS

Si consideramos un sólido con una distribución de temperatura en el tiempo t , dada por

$$T = f(x, y, z, t) \quad 3.10$$

se puede suponer una superficie en este sólido, tal que en cada punto sobre ésta, la temperatura T , sea la misma en el mismo instante. Tal superficie es llamada, la superficie isotérmica para la temperatura T , y ésta se puede considerar como la superficie que separa las partes del cuerpo que están más calientes que T , de las partes que están más frías que T . Entonces se pueden imaginar las isoterms dibujadas para diferentes grados y fracciones de grado. Estas superficies pueden ser formadas en un camino, pero dos isoterms no pueden cortarse entre sí, ya que ninguna parte del cuerpo, puede tener dos temperaturas al mismo tiempo, sin embargo, el tener diferentes temperaturas en los contornos conduce a encontrar diferentes zonas con la misma temperatura como resultado de la ley cero de la termodinámica. El sólido es mostrado como si fuera dividido en delgadas capas a causa de sus isoterms.

En este trabajo, la ecuación de Laplace fue aplicada en un sólido isotrópico homogéneo el cual, no restringe las magnitudes de los alrededores ni la deformación que éstos pueden generar en el material. De lo contrario, se tendrían que determinar las invariantes del problema, puesto que es sabido que es muy difícil someter un sólido a alta temperatura y que éste mantenga sus propiedades de sólido, es decir, el modelo que se propone no puede predecir los cambios de fase y éstos son los que delimitarán la validez del modelo para definir las temperaturas en el contorno. Suponiendo que existiera un cambio de fase la ecuación que interpretaría el modelo sería demasiado complicada por la deformación geométrica, de tal forma que el sólido sometido para nuestro estudio siempre cumplirá las mismas restricciones geométricas (forma y volumen) * y las temperaturas elegidas deberán de ser tomadas dentro de la región sólida del material. También, se consideran las fuentes de calor permanentes con lo cual, las soluciones serán en régimen estacionario de tal forma que las soluciones tendrán más sentido en términos de posición (x, y) y/o temperatura, sin considerar las soluciones transitorias temporales (variaciones de tiempo). Tomando en cuenta todas las consideraciones antes mencionadas, se obtiene un esquema basado en la propiedad del valor medio para el cálculo de la temperatura de un punto interno del material (Ver figura 3.3).

* En este caso particular las temperaturas a las cuales se somete el cuerpo están dentro de la región sólida del material y por lo tanto los cambios que sufra éste debido a la dilatación térmica, serán despreciados.

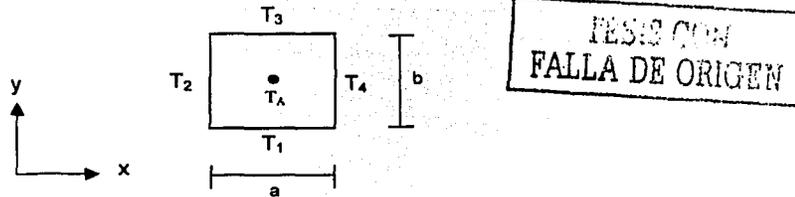


Figura 3.3 Vecinos cercanos del punto A

3.4 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

El principal objetivo de cualquier análisis de transferencia de calor es la determinación de la distribución de temperatura y el flujo de calor dentro y en la frontera de un cuerpo dado. La ecuación diferencial para conducción bidimensional, bajo condiciones de estado estacionario, en un material con conductividad constante y sin generación de energía esta dada por la ecuación 3.7, la solución a esta ecuación, dará la temperatura de un cuerpo bidimensional, en función de las dos coordenadas espaciales independientes x e y . Para obtener la solución de la ecuación se pueden usar técnicas analíticas, numéricas y gráficas. El procedimiento que se emplea depende de la complejidad relativa de la situación. Normalmente se emplean métodos analíticos y gráficos en los problemas más sencillos, los cuales pueden ser problemas con geometrías regulares y que sus variables se acoplen a la aplicación de alguna técnica analítica. Así mismo se usan técnicas numéricas en los problemas que no cumplan con las características anteriores.

Con el propósito de adelantar más en la interpretación del problema, se describen cada uno de los métodos antes mencionados.

3.4.1 Método Analítico

La ecuación de Laplace (ecuación 3.7), es una ecuación diferencial parcial que contiene las segundas derivadas parciales de la variable dependiente, T con respecto a x e y , por lo tanto, se deben tener cuatro condiciones a la frontera para poder determinar una solución del problema. Estas condiciones a la frontera deben especificar la temperatura o sus derivadas en dos valores de x e y , respectivamente.

La técnica analítica que generalmente se usa para resolver la ecuación de Laplace es la de separación de variables. Esta técnica se puede utilizar cuando se tienen tres condiciones a la frontera homogéneas (igual a cero) y una no homogénea (diferente de cero), este caso es el ejemplo que manejan la mayoría de los libros de transferencia de calor. En el problema que se planteará, las cuatro condiciones a la frontera son no-homogéneas, normalmente llamado problema de Dirichlet, por lo que el problema se divide en dos subproblemas, cada uno con dos condiciones homogéneas paralelas y dos no-homogéneas, y sumando las soluciones de los dos subproblemas se obtiene la solución del problema original (principio de superposición)⁽⁴⁾.

Antes de iniciar la solución analítica, es importante introducir el concepto de una expansión en series de Fourier de una función, digamos $f(x)$, y el principio de superposición.

3.4.1.1 Expansión de una función en series de Fourier.

Durante la solución de la ecuación de Laplace, hay un momento en la que aparecen términos seno y coseno en el lado derecho del signo de igualdad. En este punto es necesario expandir $f(x)$ en una serie de Fourier con el fin de determinar coeficientes desconocidos. La expansión en serie de Fourier puede ser cuando una función es par o impar. Una función par es aquella para la cual $f(-x) = f(+x)$. Una función impar es aquella para la cual $f(-x) = -f(x)$.

Por lo tanto, el $\text{sen } x$ es una función impar y el $\text{cos } x$ es una función par. De acuerdo a esto, cuando $f(x)$ es una función impar

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0 \quad 3.11$$

cuando $f(x)$ es una función par

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx \quad 3.12$$

si $f(x)$ es impar (expansión en serie de senos de Fourier) tenemos que

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ \text{por lo tanto} \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad 3.13$$

si $f(x)$ es par (expansión en serie de cosenos de Fourier) tenemos que

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ \text{por lo tanto} \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad 3.14$$

3.4.1.2 Principio de superposición.

Si u_1, u_2, \dots, u_k son soluciones de una ecuación en derivadas parciales lineal homogénea, la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k \quad 3.15$$

en que las $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ son constantes, también es una solución. Por lo tanto, supondremos que siempre que haya un conjunto infinito u_1, u_2, u_3, \dots de soluciones de una ecuación lineal homogénea, se puede construir otra solución, u , formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \quad 3.16$$

en que las $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ son constantes.

Una vez definidos estos dos conceptos, se aplicará la separación de variables al problema para obtener la ecuación con la cual se podrán encontrar las temperaturas internas del material. Como se mencionó anteriormente, el problema se va a dividir en dos, esto se muestra en la siguiente figura,

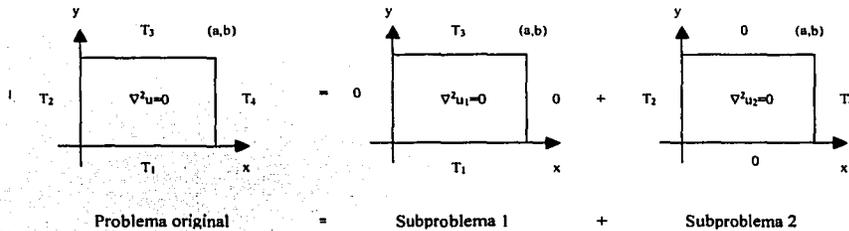


Figura 3.4 Subdivisión del problema original

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

en donde las ecuaciones y las condiciones a la frontera son las siguientes.

Problema original

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \dots 0 < x < a, 0 < y < b$$

Condiciones a la frontera

1. $u(0, y) = T_2$
2. $u(a, y) = T_4, \quad 0 < y < b$
3. $u(x, 0) = T_1$
4. $u(x, b) = T_3, \quad 0 < x < a$

subproblema 1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \dots 0 < x < a, 0 < y < b$$

Condiciones a la frontera

1. $u_1(0, y) = 0$
2. $u_1(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$
3. $u_1(x, 0) = T_1$
4. $u_1(x, b) = T_3, \quad 0 < x < a$

subproblema 2

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \dots 0 < x < a, 0 < y < b$$

Condiciones a la frontera

1. $u_2(0, y) = T_2$
2. $u_2(a, y) = T_4, \quad 0 < y < b$
3. $u_2(x, 0) = 0$
4. $u_2(x, b) = 0, \quad 0 < x < a$

Suponiendo que u_1 y u_2 son las soluciones de los subproblemas 1 y 2, respectivamente, entonces la solución del problema será $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$.

En el método de separación de variables, se busca una solución particular en forma de un producto de una función x por una función y , como

$$U(x, y) = X(x)Y(y) \tag{3.17}$$

a veces es posible convertir una ecuación en derivadas parciales lineal con dos variables, en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Para hacerlo notemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'' \tag{3.18}$$

donde la "prima" denota derivación ordinaria.

- Solución del subproblema 1.

La ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$, se puede escribir de la siguiente manera,

$$X''Y + XY'' = 0 \quad 3.19$$

dividiendo la ecuación 3.19 entre XY se tiene,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0, \text{ por lo tanto, } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad 3.20$$

Puesto que cada lado de la expresión puede variarse independientemente, la igualdad solamente será válida para todos los valores de x y de y si ambos lados son iguales a la misma constante. En la práctica se acostumbra escribir esta constante de separación real como λ^2 . La constante de separación puede tener tres valores, $\lambda^2 > 0$, $\lambda^2 = 0$ y $\lambda^2 < 0$. El valor que se utilice de la constante dependerá de que al evaluar las condiciones a la frontera no se obtengan soluciones triviales, esto es $X(x, y) = 0$.

En el subproblema 1 se escoge $\lambda^2 < 0$ esto es $-\lambda^2$, ya que en los otros dos casos se obtiene una solución trivial, por lo que la ecuación 3.20 queda de la siguiente manera,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad 3.21$$

y se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 & 3.22 \\ Y'' - \lambda^2 Y &= 0 & 3.23 \end{aligned}$$

la solución de la ecuación 3.22 es,

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad 3.24$$

y como $0 < y < b$, es intervalo finito, aplicamos la solución,

$$Y = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \operatorname{senh} \lambda y \quad 3.25$$

por lo tanto, la solución de la ecuación del subproblema 1 será,

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 \cosh \lambda y + c_4 \operatorname{senh} \lambda y) \quad 3.26$$

evaluando las dos primeras condiciones a la frontera en la ecuación 3.25 se obtiene,

C.F. I $0 = c_1 \cos \lambda(0) + c_2 \operatorname{sen} \lambda(0)$, para que se cumpla la igualdad, c_1 debe ser igual a cero.

C.F.2 $0 = c_2 \operatorname{sen} \lambda(a)$, como c_2 no puede ser cero ya que se tendría una solución trivial, $\operatorname{sen} \lambda(a)$ debe ser cero, para que esto se cumpla, $\lambda a = n\pi$, esto es $\lambda = n\pi/a$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$

Con lo anterior se ha determinado un conjunto infinito de valores discretos de λ para los cuales la ecuación 3.22 tiene una solución no trivial. Estos valores se conocen como los valores característicos de la ecuación y las funciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}; n=1, 2, \dots \quad 3.27$$

como las correspondiente funciones características, por lo tanto, la ecuación 3.26 se reduce a,

$$u_1(x, y) = (c_3 \cosh \lambda y + c_4 \operatorname{senh} \lambda y) (c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x) \quad 3.28$$

si se reemplaza $c_3 c_2 = A_n$ y $c_4 c_2 = B_n$, se obtiene,

$$u_1(x, y) = (A_n \cosh \lambda y + B_n \operatorname{senh} \lambda y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \quad 3.29$$

aplicando el principio de superposición a la ecuación 3.29,

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \quad 3.30$$

La ecuación 3.30 es la solución para el subproblema 1. Para obtener los valores de los coeficientes A_n y B_n , se evalúan las dos condiciones a la frontera no homogéneas en la ecuación 3.30, y se obtiene,

C.F.3 $T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x$, lo cual es un desarrollo de f en forma de serie de senos de Fourier, por lo que según la ecuación 3.13, se obtienen los valores para A_n con la siguiente ecuación,

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a T_1 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \quad 3.31$$

desarrollando la ecuación 3.31,

$$A_n = \frac{2T_1}{a} \int_0^a \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx = \frac{2T_1}{a} \left[\frac{1}{\frac{n\pi}{a}} \right] \left[-\cos \frac{n\pi}{a} x \right]_0^a = \frac{2T_1}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi}{a} a - \left(-\cos \frac{n\pi}{a} 0 \right) \right]$$

$$A_n = \frac{2T_1}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad A_n \text{ es igual a cero cuando } n \text{ es par, por lo tanto,}$$

$$A_n = \frac{4T_1}{n\pi} \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \quad 3.32$$

Para obtener los valores del coeficiente B_n , se evalúa la última condición a la frontera en la ecuación 3.30 y se obtiene,

$$T_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \quad 3.33$$

si se toma la expresión del paréntesis como un solo coeficiente, se obtiene un desarrollo de f en forma de serie de senos de Fourier, por lo tanto,

$$(A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b) = \frac{2}{a} \int_0^a T_3 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x dx \quad 3.34$$

despejando B_n de la ecuación 3.34 y desarrollando la integral la cual es la misma que se desarrolló para A_n , se obtiene,

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \left(\frac{4T_3}{n\pi} - A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \right) \quad 3.35$$

sustituyendo la ecuación 3.32 en 3.35,

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \left(\frac{4T_3}{n\pi} - \frac{4T_1}{n\pi} \cosh \frac{n\pi}{a} b \right) \quad \text{para } n = \text{impar} \quad 3.36$$

por lo tanto, la solución al subproblema 1, es la sumatoria de la ecuación 3.30; los límites de la sumatoria son de $n = \text{impar}$, hasta ∞ . Los coeficientes A_n y B_n están dados por las ecuaciones 3.32 y 3.36 respectivamente.

- Solución del subproblema 2.

En el subproblema dos se parte de la misma ecuación diferencial que en el subproblema 1, pero en este caso se escoge $\lambda^2 > 0$, ya que con los otros dos valores de λ^2 , se obtienen soluciones triviales, por lo tanto, las ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan son,

$$X = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \operatorname{senh} \lambda x \quad 3.37$$

$$Y = c_3 \cos \lambda y + c_4 \operatorname{sen} \lambda y \quad 3.38$$

que como se puede ver, son idénticas que las del subproblema 1, solo que en este caso, primero se evalúan las condiciones a la frontera homogéneas en Y , y posteriormente, se obtienen los coeficientes

FUNDAMENTO TEORICO

A_n y B_n evaluando las condiciones a la frontera no homogéneas en X , por lo tanto, para el subproblema 2 se obtiene,

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_n \cosh \frac{n\pi}{b} x + B_n \sinh \frac{n\pi}{b} x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 3.39$$

en donde

$$A_n = \frac{4T_2}{n\pi}, \text{ para } n = \text{impar} \quad 3.40$$

y

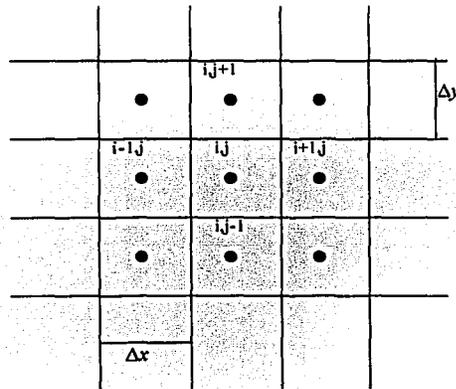
$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{n\pi}{b} a} \left(\frac{4T_1}{n\pi} - \frac{4T_2}{n\pi} \cosh \frac{n\pi}{b} a \right), \text{ para } n = \text{impar} \quad 3.41$$

Como se había mencionado, la solución de la ecuación de Laplace es la suma de las soluciones de los dos subproblemas. Con las ecuaciones obtenidas se pueden calcular temperaturas internas de un cuerpo rectangular, en donde a y b son las dimensiones del rectángulo y, x e y son las coordenadas de la temperatura interna que se quiera calcular.

3.4.2 Método numérico de diferencias finitas

Este método se basa en el análisis de diferencias finitas, el cual considera que el sistema en cuestión esta constituido por elementos de volumen muy pequeño pero finitos. Es decir, los elementos finitos empleados para obtener el modelo matemático son una aproximación de los elementos diferenciales usados en la formulación analítica.

Considérese un cuerpo bidimensional que se ha de dividir en incrementos iguales tanto en la dirección x como en la y , tal como se muestra en la figura 3.5. Los puntos nodales están designados como se muestran; las posiciones i indican el incremento x y las j indican el incremento y . Se desea establecer las temperaturas en cualquiera de estos puntos nodales dentro del cuerpo, utilizando la ecuación de Laplace como una condición dominante. Se usan diferencias finitas para aproximar incrementos diferenciales en las coordenadas de temperatura y espacio; y entre más pequeños se escojan estos incrementos finitos, más exacta será la aproximación de la verdadera distribución de temperatura ⁽⁵⁾.



ESTE CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 3.5 Nodos internos de un cuerpo bidimensional

El centro de cada volumen finito se conoce como nodo y se supone en el análisis que la temperatura de éste representa la temperatura de todo el elemento. Los gradientes de temperatura se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2, j} \approx \frac{T_{i+1, j} - T_{i, j}}{\Delta x} \quad 3.42$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2, j} \approx \frac{T_{i, j} - T_{i-1, j}}{\Delta x} \quad 3.43$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+1/2} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad 3.44$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-1/2} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \quad 3.45$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad 3.46$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+1/2} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-1/2}}{\Delta y} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} \quad 3.47$$

de este modo, la aproximación de diferencias finitas para la ecuación de Laplace se convierte en:

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad 3.48$$

si $\Delta x = \Delta y$, entonces:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad 3.49$$

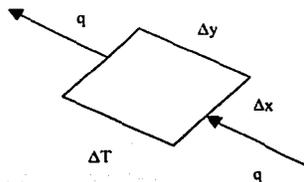
Como se está considerando el caso de conductividad térmica constante, todos los flujos de calor pueden ser expresados en términos de diferenciales de temperatura.

La ecuación 3.49, es la ecuación en diferencias finitas para todos los nodos interiores de un sistema con conducción bidimensional en estado estable y sin generación de calor. Si el sistema en cuestión está constituido por n nodos interiores cuyas temperaturas son desconocidas, n ecuaciones como la 3.49 especificarán la distribución de temperaturas. Para resolver estas n ecuaciones, se acomodan en un arreglo matricial para el cual existen diferentes métodos de solución como son el método de Gauss, LU, entre otros.

3.4.3. Método Gráfico

Este método consiste esencialmente en construir una red formada por líneas isotermas y líneas de flujo de calor constantes que se intersecten a ángulos rectos. Para construir esta red, se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. Siempre se dibujan las líneas de flujo de calor perpendiculares a las isotermas y a las fronteras isotermas, y bisectan el ángulo en una esquina donde dos fronteras isotermas se intersectan.
2. Las isotermas corren perpendiculares a superficies aisladas.
3. Las diagonales de un cuadrado curvilíneo se intersectan en ángulos rectos.
4. Todos los lados de un cuadrado curvilíneo tienen aproximadamente la misma longitud, aun cuando un cuadrado curvilíneo puede ser mayor o menor que otro.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 3.6 Método gráfico

Las líneas isotérmicas y de flujo de calor forman grupos de figuras curvilíneas como la figura 3.6, puesto que el flujo de calor en cualquier punto de un sistema es perpendicular a las líneas isotermas del sistema, el flujo de calor a través del elemento es,

$$q_{\text{elemento}} = -k\Delta x(1) \frac{\Delta T}{\Delta y} \quad 3.50$$

siendo este flujo el mismo a través de todo el ducto formado por las líneas de calor constante en donde se localiza el elemento. Si por construcción $\Delta x = \Delta y$, el flujo de calor es proporcional a la diferencia de temperaturas a través del elemento. Por lo tanto en términos de la diferencia total de temperaturas en el sistema,

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{N} \quad 3.51$$

donde N es el número de incrementos de temperatura entre las superficies isotermas interior y exterior del sistema. Si en la red existen M ductos por donde fluye el calor, entonces

$$q = -\frac{M}{N} k \Delta T_{total} = -\frac{M}{N} k (T_1 - T_2) \quad 3.52$$

La expresión anterior permite calcular el calor total transferido por unidad de profundidad entre las superficies isotermas T_1 y T_2 siempre y cuando el cociente M/N sea conocido. A este cociente se le denomina factor de forma de conducción que generalmente se representa con la letra S , y se pueden encontrar sus valores para diferentes geometrías reportados en los libros.

La exactitud de este método depende completamente de la red formada por las líneas isotermas y las de calor constante, cuidando que éstas se intersecten perpendicularmente y que $\Delta x \approx \Delta y$.

3.4.4. Analogía Eléctrica.

Si se considera, bajo condiciones de estado estacionario, la conducción de una corriente eléctrica a través de un material cuya conductividad eléctrica es constante, la ecuación diferencial que describe al potencial eléctrico como función de la posición es,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0 \quad 3.53$$

en donde E es el potencial eléctrico.

La ecuación 3.53 es similar a la ecuación 3.7, solo que en la ecuación 3.53 la variable dependiente es E y no T por lo tanto, cuando una configuración tiene una diferencia de voltaje que se imprime a través de él, las figuras geométricas resultantes para las líneas de voltaje constante serán análogas a las líneas de temperatura constante si más bien se imprimiera una diferencia de temperatura a través de la misma configuración. Esto viene a ser la base para la contribución de un análogo eléctrico.

Con el fin de construir un análogo, se corta una hoja de papel conductor de electricidad, con una alta resistencia, de forma bidimensional. Los lados, que se mantendrán a temperatura constante, se modelan tal que se les mantiene a un voltaje constante, mientras que una superficie aislada térmicamente corresponde al lado suave del papel. Cuando se opera, se aplican los voltajes apropiados a los lados, y se usa un voltímetro con una sonda para determinar líneas de voltaje constante. Una vez que dichas líneas se han marcado sobre el papel (líneas isotérmicas), se dibujan líneas de flujo de calor con el fin de formar una red de figuras cuadradas curvilíneas. En seguida, contando el número de sendas de flujo de calor y el número de incrementos de temperatura, se determina el factor de forma S y el flujo de calor⁽⁶⁾.

4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En muchas aplicaciones de la ingeniería, es importante conocer la forma de plantear y resolver los problemas que involucran conducción de calor en dos y tres dimensiones. Dichos tipos de conducción ocurren en el tratamiento térmico de varias partes metálicas, en la intersección de paredes de hornos y chimeneas, etc. En este capítulo, se plantean tres diferentes maneras de resolver un problema de conducción bidimensional a régimen permanente.

De acuerdo a la isotropía de los sólidos, se considera que la difusión térmica en un material sólido no tiene direcciones preferenciales y, tomando en cuenta lo anterior, se supone un cuerpo rectangular, sometido a cuatro temperaturas diferentes a régimen permanente y sin generación de energía, al cual se le quiere conocer su distribución de temperaturas con el fin de obtener isoterma internas del material.

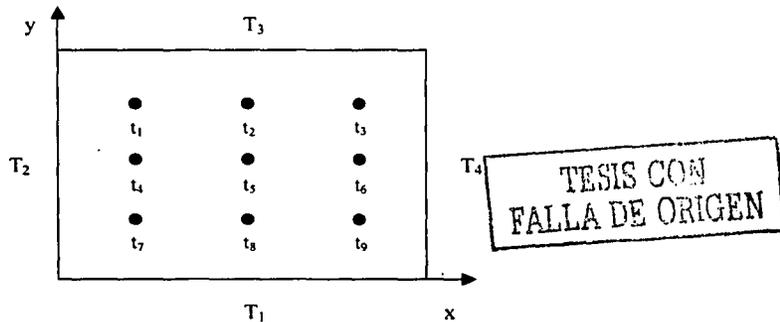


Figura 4.1 Nueve temperaturas internas

La relación de la temperatura T , como función de las dos variables espaciales x e y , da como resultado la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 4.1$$

la cual se puede resolver por diferentes métodos. Para resolver un sistema como el que se muestra en la figura 4.1, se utilizará el método analítico, el método numérico de diferencias finitas y el método **iterativo-reproductivo** el cual se propone como una alternativa de solución, con el fin de disminuir el número de operaciones y el tiempo de solución de problemas de conducción de calor bidimensional a régimen permanente y sin generación de energía.

4.1 METODOLOGÍA

Para mostrar la metodología de cada método, se resuelve un sistema como el de la figura 4.1, el cual consiste de nueve temperaturas incógnitas. Posteriormente, se resolverá un sistema de 120 temperaturas internas, con el fin de poder obtener las isothermas del material.

4.1.1 Método Analítico.

Para el método analítico, la figura 4.1 se puede mostrar de la siguiente manera,

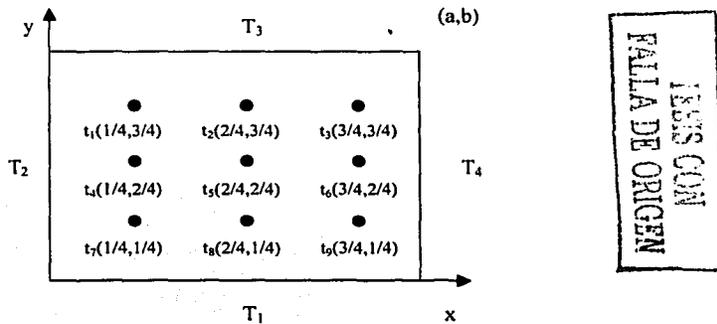


Figura 4.2 Coordenadas para el método analítico

como se puede observar, se definen las coordenadas (x, y) para cada nodo, de acuerdo a estas coordenadas los valores para (a, b) son $(1, 1)$. Una vez definidas las coordenadas (x, y) , los valores para (a, b) y las temperaturas de los contornos $(T_1, T_2, T_3$ y $T_4)$ las ecuaciones para encontrar los valores de las temperaturas incógnitas, son las siguientes,

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4T_1}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \left[\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \left(\frac{4T_3}{n\pi} - \frac{4T_1}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \right) \right] \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \right\} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad 4.2$$

y

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4T_2}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \left[\frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \left(\frac{4T_4}{n\pi} - \frac{4T_2}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \right) \right] \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad 4.3$$

por lo tanto,

$$t(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) \quad 4.4$$

4.1.2 Método Numérico de diferencias finitas

En el método numérico, se tiene que escribir la ecuación de diferencias finitas (ecuación 3.49) para cada temperatura de la figura 4.1 por lo tanto, para calcular t_1 se tiene,

$$t_2 + T_2 + T_3 + t_4 - 4t_1 = 0 \quad 4.5$$

despejando de la ecuación T_2 y T_3 , ya que las temperaturas a la frontera van a ser conocidas se obtiene,

$$4t_1 - t_2 - t_4 = T_2 + T_3 \quad 4.6$$

Similarmente para t_2 , se obtiene

$$4t_2 - t_1 - t_3 - t_5 = T_3 \quad 4.7$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones de diferencia para cada temperatura y se arreglan en una matriz de la forma $Ax = B$, la cual queda de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 + T_3 \\ T_3 \\ T_3 + T_4 \\ T_2 \\ 0 \\ T_4 \\ T_1 + T_2 \\ T_1 \\ T_1 + T_4 \end{bmatrix} \quad 4.8$$

Para resolver la matriz 4.8, existen diversos métodos entre los cuales se pueden mencionar Gauss, LU, etc. Con la solución de la matriz, se obtienen los valores de las temperaturas incógnitas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.1.3 Método iterativo-reproductivo

El método iterativo-reproductivo, consiste en bisectar una coordenada, dividir en "n" nodos la otra coordenada y obtener mediante el método analítico las temperaturas correspondientes a esos nodos, conocidas esas temperaturas (línea central de temperaturas), éstas cambiarán las temperaturas de los entornos para el cálculo de las demás líneas de temperaturas que estén por arriba y por debajo de la línea central de temperaturas, las cuales se obtendrán subdividiendo la coordenada bisectada, tantas veces como sea requerido. El cálculo de las líneas de temperatura que están por arriba y por debajo de la línea central de temperaturas, no es mediante el método analítico, para estas temperaturas se obtiene la ecuación que representa al nodo en cuestión utilizando la media aritmética que toma en cuenta los cuatro vecinos cercanos del nodo. Una vez que se tienen las ecuaciones para cada nodo, éstas se arreglan en una matriz y se resuelve mediante alguno de los métodos mencionados. La matriz que se obtiene para cada subdivisión es una matriz tridiagonal de la forma $Ax = B$ en donde para cada subdivisión, la matriz A es constante, lo único que cambia es el vector B .

Por lo tanto, para la figura 4.1,

1. Se bisecta el eje y y se divide en 3 nodos el eje x (figura 4.3). Estos tres nodos representan la línea central de temperaturas (t_4, t_5 y t_6) y se calculan mediante el método analítico utilizando las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4.

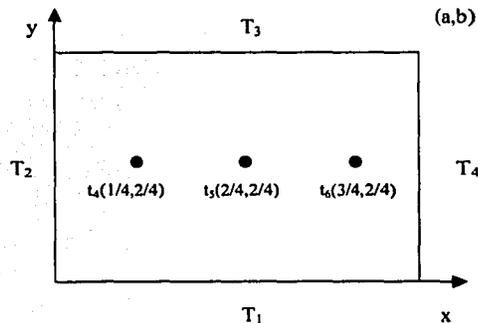


Figura 4.3 Coordenadas para la línea central de temperaturas

2. Una vez que se conocen las temperaturas de la línea central, se subdivide el eje y por arriba de la línea central y se obtiene la línea de temperaturas que representan t_1, t_2 y t_3 (figura 4.4). A éstas temperaturas se les aplica el método de vecinos cercanos para obtener el sistema de ecuaciones lineales que las representa.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

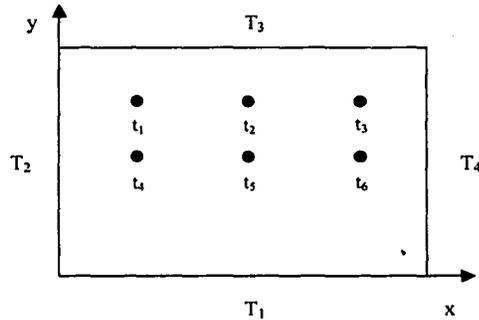


Figura 4.4 Cálculo de la línea superior de temperaturas

De la figura 4.4, se observa que los cuatro vecinos cercanos de t_1 son, T_2, T_3, t_2 y t_4 , por lo tanto, utilizando la media aritmética se tiene,

$$t_1 = \frac{T_2 + T_3 + t_2 + t_4}{4} \quad 4.9$$

despejando las temperaturas conocidas se obtiene,

$$4t_1 - t_2 = T_2 + T_3 + t_4 \quad 4.10$$

similarmente para t_2 ,

$$4t_2 - t_1 - t_3 = T_3 + t_5 \quad 4.11$$

y para t_3 ,

$$4t_3 - t_2 = T_3 + T_4 + t_6 \quad 4.12$$

arreglando estas ecuaciones en una matriz se obtiene,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 + T_3 + t_4 \\ T_3 + t_5 \\ T_3 + T_4 + t_6 \end{bmatrix} \quad 4.13$$

para la cual existen diferentes métodos de solución.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

3. Ahora, se subdivide el eje y por debajo de la línea central y se obtiene la línea de temperaturas que representan t_7, t_8 y t_9 (figura 4.5) y se obtiene la matriz que las representa, de igual manera que se hizo para la anterior línea de temperaturas.

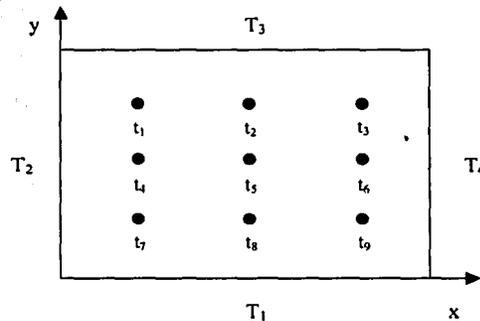


Figura 4.5 Cálculo de la línea inferior de temperaturas

Similarmemente como se hizo para la línea superior, se obtiene la siguiente matriz,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 + t_4 \\ T_1 + t_5 \\ T_1 + T_4 + t_6 \end{bmatrix} \quad 4.14$$

como se puede observar, la matriz de incógnitas A es constante para las dos iteraciones, lo único que cambio fue la posición de la variable que restringe, B , además de que la matriz es tridiagonal y por lo tanto más rápida de resolver. Como se menciono anteriormente, existen diversos métodos de solución de matrices, pero en este caso, teniendo en mente que hay una matriz de incógnitas fija y un vector cambiante, se usará el método LU (Lower-Upper) el cual es el más adecuado para estos casos, además de que, de acuerdo al apéndice A, los coeficientes de las matrices L y U se pueden calcular sin realizar muchas operaciones.

5. ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS PRINCIPALES MÉTODOS.

En este capítulo, se resolverá el ejemplo que se planteo en el capítulo anterior, además de otros casos, con el fin de poder establecer las bases de comparación entre los métodos: analítico, numérico e iterativo-reproductivo y ver, si éste último es una buena alternativa para la solución de éste tipo de problemas. Las temperaturas en los contornos serán, $T_1 = 100^\circ C$, $T_2 = 200^\circ C$, $T_3 = 300^\circ C$ y $T_4 = 400^\circ C$. También se calculará un gran número de temperaturas internas para poder mostrar gráficamente las isoterma que se forman en el material.

Debido a que en el método iterativo-reproductivo y numérico, se utilizan métodos de solución de matrices, se hará una breve descripción de los métodos de Gauss y LU, para mostrar cual de ellos es el más adecuado en la solución de las matrices resultantes en los sistemas a resolver.

5.1 MÉTODO ANALÍTICO

Se quieren obtener las temperaturas internas de la siguiente figura, las cuales estarán expresadas en grados centígrados ($^\circ C$).

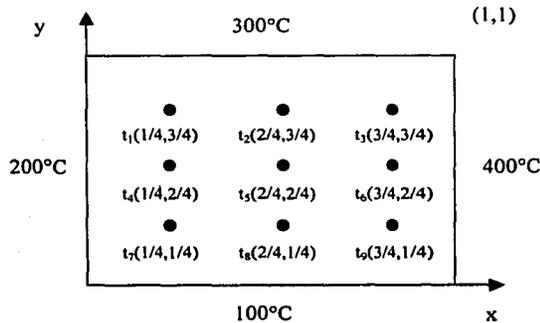


Figura 5.1 Coordenadas para el método analítico

Las ecuaciones del método analítico para obtener la temperatura en cualquier punto con $a = 1$ y $b = 1$, son:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4T_1}{n\pi} \cosh(n\pi y) + \left[\frac{1}{\sinh(n\pi)} \left(\frac{4T_3}{n\pi} - \frac{4T_1}{n\pi} \cosh(n\pi) \right) \right] \sinh(n\pi y) \right\} \sin(n\pi x) \quad 5.1$$

y

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4T_2}{n\pi} \cosh(n\pi x) + \left[\frac{1}{\sinh(n\pi)} \left(\frac{4T_4}{n\pi} - \frac{4T_2}{n\pi} \cosh(n\pi) \right) \right] \sinh(n\pi x) \right\} \sin(n\pi y) \quad 5.2$$

por lo tanto,

$$t(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) \quad 5.3$$

Como se puede ver, se tienen los valores de todas las incógnitas de las ecuaciones, por lo tanto, se procede a resolver para encontrar los valores de las nueve temperaturas internas de la figura 5.1.

Para t_1 :

$$u_1(1/4, 3/4) = \sum (129.0406 + 8.5585 - 1.0644 - 0.1583 + 0)$$

$$u_1(1/4, 3/4) = 136.3764$$

$$u_2(1/4, 3/4) = \sum (108.6003 + 5.79 - 0.7101 - 0.1053 + 1.7034E-2 + 2.8974E-3 - 5.09E-4)$$

$$u_2(1/4, 3/4) = 113.5943$$

$$t_1(1/4, 3/4) = 136.3764 + 113.5943$$

$$t_1 = 249.9707^\circ\text{C}$$

resolviendo las sumatorias para cada temperatura, se obtienen los siguientes valores:

$$t_1 = 249.97^\circ\text{C}, t_2 = 280.88^\circ\text{C}, t_3 = 322.81^\circ\text{C}, t_4 = 219.08^\circ\text{C}, t_5 = 250.00^\circ\text{C}, t_6 = 308.16^\circ\text{C},$$

$$t_7 = 177.18^\circ\text{C}, t_8 = 191.89^\circ\text{C}, t_9 = 250.03^\circ\text{C}$$

de estos valores, se observa que la temperatura central t_5 , tiene un valor de 250°C , lo que proporciona validez al método de los cuatro vecinos cercanos ya que el promedio de las temperaturas de los contornos del cuerpo es 250°C , por lo tanto, con los valores obtenidos para cada ejemplo que se realice, se obtendrá la temperatura promedio para observar que tanto se desvía de este valor.

$$t_{\text{promedio}} = \frac{249.97 + 280.88 + 322.81 + 219.08 + 250.00 + 308.16 + 177.18 + 191.89 + 250.03}{9}$$

$$t_{\text{promedio}} = 250^\circ\text{C}$$

En la figura 5.2, se muestran los valores redondeados para nueve temperaturas internas calculadas con el método analítico.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

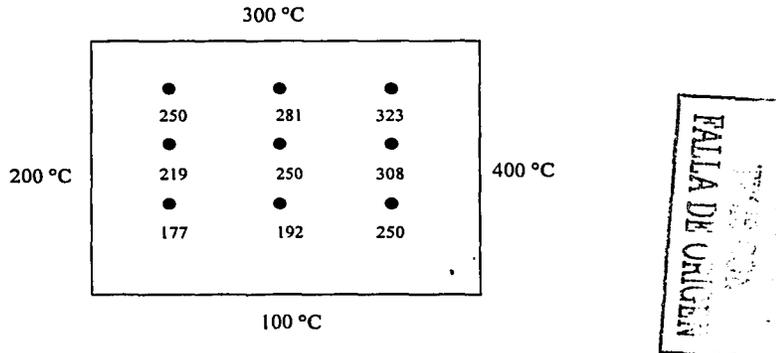


Figura 5.2 Solución de nueve temperaturas con el método analítico

5.2 METODO NUMÉRICO

Antes de comenzar con la solución mediante el método numérico de diferencias finitas, se explicarán brevemente tres métodos de solución de matrices, ya que se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales que se tienen que resolver para conocer los valores de las temperaturas internas del material. Los métodos que se utilizaran son Gauss y LU.

5.2.1 Método de Gauss

Este método se basa principalmente en el método ya conocido de eliminar una incógnita entre un par de ecuaciones simultáneas para poder formar un sistema triangular superior y con una sustitución retroactiva, encontrar los valores de las incógnitas. Para llevar a cabo esto, se permite multiplicar cualquier fila de la matriz de coeficientes aumentada por una constante, se puede sumar un múltiplo de una fila a un múltiplo de cualquier otra y se puede intercambiar el orden de cualesquiera de dos filas, de esta manera, es intuitivamente obvia la validez de estas operaciones fila si se piensa en ellas como aplicadas a un conjunto de ecuaciones lineales. La multiplicación de una ecuación por una constante, no cambia la validez de la igualdad. Por lo tanto, sumando cantidades iguales a ambos lados de una igualdad, resulta igualdad, y esto es el equivalente de la segunda transformación. Obviamente, el orden del conjunto es arbitrario.

Sin embargo en este método existe la posibilidad de que el conjunto de ecuaciones, no tenga solución o de que el procedimiento falle en encontrarla. Durante el paso de triangulación si se encuentra un cero en la diagonal, no se puede utilizar esa fila para eliminar los coeficientes que están abajo de ese elemento cero. Sin embargo, en este caso se continúa intercambiando filas y finalmente se logrará una matriz triangular superior de coeficientes. El tropiezo real es encontrar un cero en la diagonal después de que se ha triangulado. Si eso ocurre la sustitución retroactiva falla puesto que no se puede eliminar por cero.

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad 5.4$$

Para resolver el sistema anterior se deben seguir los siguientes pasos:

1. Aumente la matriz de coeficientes $n \times n$ con el vector del segundo miembro para que se forme una matriz $n \times (n + 1)$.
2. Intercambiar las filas si es necesario para hacer que el valor de a_{11} tenga la mayor magnitud de cualquier coeficiente en la primera columna.
3. Crear ceros en la segunda a través de n -ésima filas en la primera columna a_{i1}/a_{11} veces la primera fila de la i -ésima fila.
4. Repetir los pasos (2) y (3) para la segunda hasta la fila $(n - 1)$, poniendo el coeficiente de magnitud más grande sobre la diagonal por el intercambio de filas (considerando solo las filas j a n), y luego sustituyendo a_{ij}/a_{ii} veces la j -ésima fila de la i -ésima fila de manera que, se creen ceros en todas las posiciones de las i -ésima columna abajo de la diagonal. Al concluir este paso, el sistema queda como un sistema triangular superior.
5. Resolver para x_n desde la n -ésima ecuación por: $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$.
6. Resolver para $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ desde la fila $(n - 1)$ hasta la primera ecuación a su vez, por

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad 5.5$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.2.2 Método L*U (Método de Choleski)

Una modificación al método de descomposición es el método llamado L*U o método de Choleski o Crout. Este método es un método directo para solucionar sistemas de ecuaciones de matrices cuadradas, bajo la consideración que una matriz cuadrada se puede expresar como el producto de dos matrices triangulares, una superior y una inferior, y el procedimiento de solución para estos sistemas es el siguiente:

Considerando un sistema de ecuaciones como sigue:

$$[A]\bar{X} = \bar{b} \quad 5.6$$

escribiendo $[A]$ de la siguiente manera:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [L][U] \quad 5.7$$

donde

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = \text{matriz triangular inferior} \quad 5.8$$

y

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{matriz triangular superior} \quad 5.9$$

Por lo tanto los elementos de $[L]$ y $[U]$ satisfacen la factorización $[A] = [L][U]$. La fórmula general para obtener los elementos de L y U correspondientes a la matriz de coeficientes, para n ecuaciones simultaneas se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \geq j \\
 u_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad i < j \\
 u_{ii} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Una vez que la matriz de coeficientes ha sido transformada a su equivalente LU , se puede encontrar la solución del conjunto de ecuaciones. La matriz L es en realidad un registro de las operaciones requeridas para hacer que la matriz de coeficientes A se transforme en una matriz triangular superior U . Se aplican estas mismas transformaciones al vector b convirtiéndolo en un nuevo vector b' . Si se aumenta b' a U y se sustituye retroactivamente, aparece la solución.

La ecuación general para la reducción de b es:

$$\begin{aligned}
 b'_i &= b_i / l_{ii} \\
 b'_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b'_k}{l_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Las ecuaciones para la sustitución retroactiva son:

$$\begin{aligned}
 x_n &= b'_n \\
 x_j &= b'_j - \sum_{k=j+1}^n u_{jk} b'_k, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Debe considerarse que la mayor ventaja del método LU es cuando la matriz de coeficientes $[A]$ no cambia y lo único que cambia es el vector b .

Una vez que se han explicado los métodos de solución de matrices, se procede a resolver el ejemplo planteado en el capítulo anterior, por medio del método numérico de diferencias finitas.

5.2.3 MÉTODO NUMÉRICO DE DIFERENCIAS FINITAS.

Retomando la figura de nueve temperaturas internas,

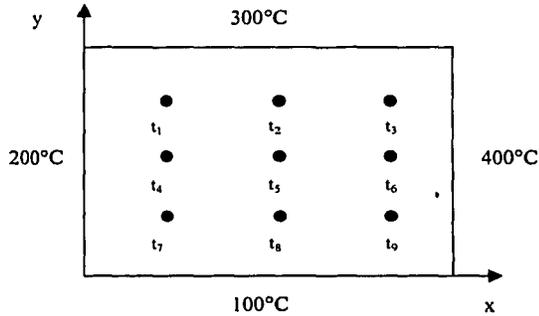


Figura 5.3 Nueve temperaturas internas

y aplicando la ecuación de diferencias finitas a cada nodo (ecuación 3.49), se obtiene la siguiente matriz que representa los nueve nodos que se quieren calcular,

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_1 \\
 t_2 \\
 t_3 \\
 t_4 \\
 t_5 \\
 t_6 \\
 t_7 \\
 t_8 \\
 t_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 500 \\
 300 \\
 700 \\
 200 \\
 0 \\
 400 \\
 300 \\
 100 \\
 500
 \end{bmatrix}$$

5.13

utilizando la eliminación Gaussiana, se obtiene la siguiente matriz triangular superior,

ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS PRINCIPALES MÉTODOS

$$\begin{bmatrix}
 1 & -1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 15/16 & -1/4 & -1/16 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 14/15 & -1/60 & -1/15 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.933 & -15/56 & -1/224 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8516 & -0.2691 & -15/209 & -1/4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.848 & -0.0238 & -0.079 & -1/4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9262 & -0.2732 & -0.007 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8386 & -0.2752 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8359 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 t_1 \\
 t_2 \\
 t_3 \\
 t_4 \\
 t_5 \\
 t_6 \\
 t_7 \\
 t_8 \\
 t_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 125 \\
 106.25 \\
 203.3333 \\
 91.9642 \\
 69.2583 \\
 176.7906 \\
 110.4538 \\
 94.3806 \\
 208.9304
 \end{bmatrix}$$

realizando la sustitución retroactiva, se obtienen las siguientes temperaturas,

$$t_1 = 249.99^\circ\text{C}, t_2 = 280.34^\circ\text{C}, t_3 = 321.41^\circ\text{C}, t_4 = 219.62^\circ\text{C}, t_5 = 249.96^\circ\text{C}, t_6 = 305.31^\circ\text{C}, \\
 t_7 = 178.54^\circ\text{C}, t_8 = 194.56^\circ\text{C}, t_9 = 249.94^\circ\text{C}$$

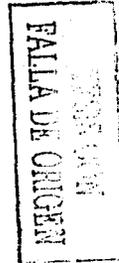
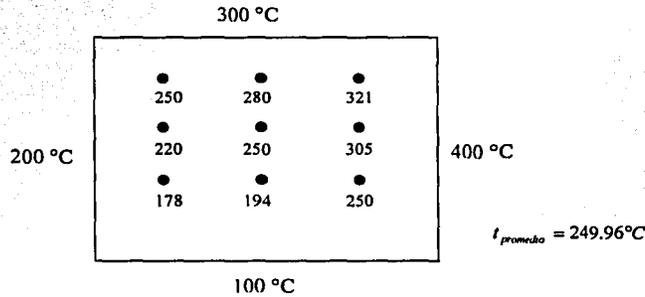


Figura 5.4 Solución numérica (9 temperaturas)

Como se puede ver en la figura 5.4, los valores de la solución del método numérico de diferencias finitas son idénticos a los de la figura 5.2 del método analítico. Esto generalmente se cumple cuando se resuelven *temperaturas equidistantes* esto es, cuando se tiene el mismo número de nodos tanto en el eje x como en el eje y , y la distancia entre los nodos es la misma, formando una figura cuadrada, de lo contrario, las soluciones numéricas difieren de las analíticas.

5.2.3.1 Temperaturas equidistantes

Para poder comparar el método numérico de diferencias finitas con el analítico, se muestran los siguientes ejemplos,

- 16 temperaturas (4 nodos en el eje x y en el eje y , matriz 16×16).

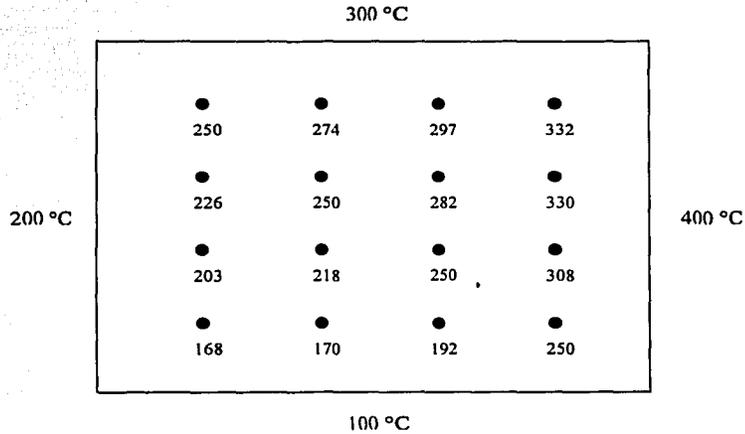


Figura 5.5 Solución numérica (16 temperaturas)

Las figuras 5.5 y 5.6 muestran los valores obtenidos numérica y analíticamente para 16 temperaturas internas. La solución numérica se obtuvo aplicando el método de Gauss, sin embargo, se resolvió el mismo sistema con el método LU, obteniéndose los mismos resultados.

Las temperaturas promedio que se obtuvieron para estos casos son,

$$t_{\text{promedio-numérica (figura 5.6)}} = 248.30^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\text{promedio-analítica (figura 5.7)}} = 249.90^{\circ}\text{C}$$

como se puede ver en las figuras 5.5 y 5.6, así como en los valores de las temperaturas promedio, el cálculo de temperaturas internas de un material cuadrado (temperaturas equidistantes) mediante el método numérico de diferencias finitas, proporciona resultados similares a los que se obtienen con el método analítico.

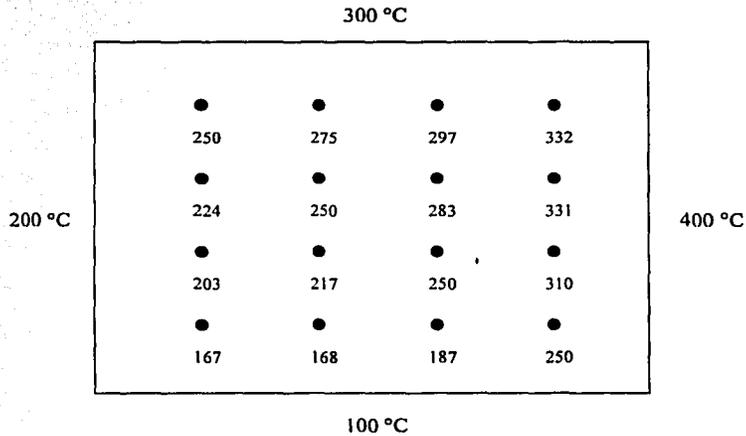
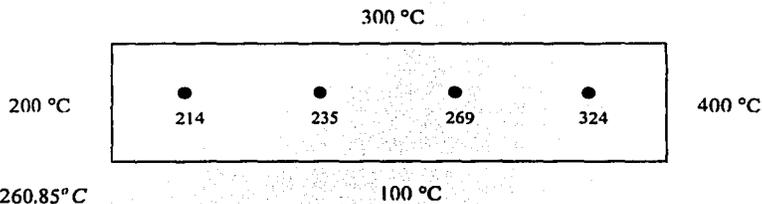


Figura 5.6 Solución analítica (16 temperaturas)

5.2.3.2 Temperaturas no equidistantes

Para mostrar este caso, se va a resolver una matriz de 1x4 esto es, se encontrarán los valores de cuatro temperaturas centrales de un cuerpo.

- Solución analítica.



$$t_{promedio} = 260.85^{\circ}C$$

100 °C

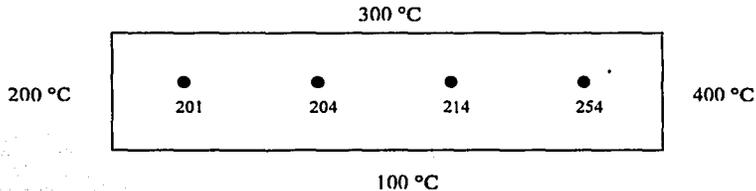
Figura 5.7 Solución analítica (4 temperaturas)

- Solución numérica.

Para la solución numérica, se tiene que resolver la siguiente matriz,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 400 \\ 800 \end{bmatrix} \quad 5.14$$

esta matriz es tridiagonal como las que se resuelven en el método iterativo-reproductivo. Esto se debe a que solo se va a resolver una sola línea de temperaturas. Las soluciones son:



$$t_{\text{promedio}} = 218.17^{\circ}C$$

Figura 5.8 Solución numérica (4 temperaturas)

en las figuras 5.7 y 5.8, se puede observar que el cálculo de temperaturas no equidistantes mediante el método numérico de diferencias finitas difiere considerablemente de los resultados analíticos.

5.3 MÉTODO ITERATIVO-REPRODUCTIVO

Como se mencionó anteriormente, el método iterativo-reproductivo consiste en resolver la línea central de temperaturas con el método analítico y posteriormente, aplicando el método de vecinos cercanos, resolver las matrices tridiagonales que resultan para cada línea de temperaturas. Cabe mencionar que originalmente no se obtenían las temperaturas centrales analíticamente sino mediante una matriz tridiagonal como la de 5.14, pero como se verá en el ejemplo de 120 nodos internos, debido a que esta matriz es una solución numérica para temperaturas no equidistantes, las temperaturas centrales diferían considerablemente de las analíticas y por lo tanto, alteraban el valor de las demás temperaturas, por lo que se optó por calcular las temperaturas centrales con el método analítico para obtener mejores resultados.

Otra cosa importante que hay que mencionar acerca del método iterativo-reproductivo es que el número de temperaturas que se pueden calcular no es libre, ya que depende del número de nodos que haya en el eje x , así como del número de subdivisiones del eje y . Para conocer el número de temperaturas que se pueden calcular, se utiliza la siguiente fórmula,

$$\# \text{ Temperaturas} = m(2^{n+1} - 1) \quad 5.15$$

donde,

m = número de temperaturas en cada subdivisión
 n = número de iteraciones

La matriz tridiagonal que resulte para cada subdivisión será del tamaño de $m \times m$ y se tendrá que resolver $(2^{n+1} - 2)$ veces. De esta manera, si tenemos 8 temperaturas en cada subdivisión con 4 iteraciones, podríamos calcular,

$$\begin{aligned} \# \text{Temperaturas} &= 8(2^{4+1} - 1) = 8(31) \\ \# \text{Temperaturas} &= 248 \end{aligned}$$

Éste número de temperaturas tomaría demasiado tiempo tanto con el método analítico como con el método numérico ya que se tendría que resolver una matriz de 248×248 o sea, una matriz de 61504 elementos. Con el método iterativo-reproductivo se tienen que calcular ocho temperaturas analíticamente y posteriormente resolver una matriz tridiagonal de 8×8 , 30 veces, con la ventaja de que la matriz A es la misma para todas las iteraciones, lo único que cambia es el vector b y, con un programa desarrollado y aplicando el método LU, esto se puede lograr en menor tiempo que los otros métodos y con buenos resultados.

Para el ejemplo de la figura 5.3, tenemos, $m = 3$ y $n = 1$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \# \text{Temperaturas} &= 3(2^{1+1} - 1) = 3(3) \\ \# \text{Temperaturas} &= 9 \end{aligned}$$

ahora, se resuelven las tres temperaturas centrales (t_4, t_5 y t_6) con el método analítico y se obtiene,

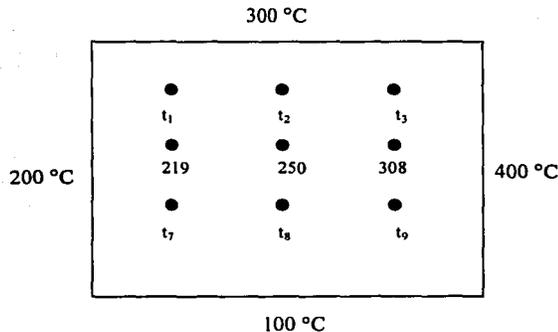


Figura 5.9 Solución de las temperaturas centrales con el método analítico

- Cálculo de la línea superior de temperaturas

Para obtener t_1, t_2 y t_3 , se tiene que resolver el siguiente sistema, $Ax = b$,

TESIS CON
 FALTA DE ORIGEN

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 719.08 \\ 550 \\ 1008.16 \end{bmatrix} \quad 5.16$$

utilizando el método LU se tiene que,

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 15/4 & 0 \\ 0 & -1 & 56/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -4/15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando a L los valores de 5.16,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 15/4 & 0 \\ 0 & -1 & 56/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 719.08 \\ 550 \\ 1008.16 \end{bmatrix} \quad 5.17$$

se obtiene, $t_1 = 179.77$, $t_2 = 194.053$ y $t_3 = 322.1721$. Aplicando estos valores a U ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -4/15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 179.77 \\ 194.6053 \\ 322.1721 \end{bmatrix} \quad 5.18$$

y se obtienen las soluciones,

$$t_1 = 249.89^\circ\text{C}, \quad t_2 = 280.49^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad t_3 = 322.17^\circ\text{C}$$

- Cálculo de la línea inferior de temperaturas.

Para calcular las temperaturas restantes, se tiene que resolver el siguiente sistema,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 519.08 \\ 350 \\ 808.16 \end{bmatrix} \quad 5.19$$

para el sistema 5.19, la matriz L y la matriz U son las mismas del sistema 5.16, por lo tanto, aplicando las mismas operaciones se obtienen las siguientes soluciones,

$$t_1 = 178.47^\circ\text{C}, \quad t_2 = 194.80^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad t_3 = 250.74^\circ\text{C}$$

de esta manera, se tienen todas las temperaturas de la figura 5.9

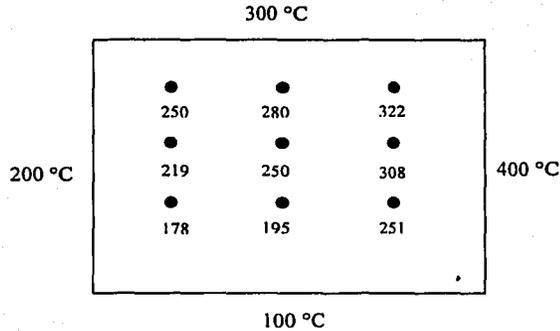


Figura 5.10 Solución de nueve temperaturas con el método iterativo-reproductivo

La temperatura promedio que se obtiene para la figura 5.10 es,

$$t_{\text{promedio}} = 250,42^{\circ}\text{C}$$

Comparando los resultados del método iterativo-reproductivo de la figura 5.10 con los del método analítico de la figura 5.2, se puede observar que se obtienen resultados similares entre ambos métodos. Para poder reflejar esto, mostraremos los resultados de un sistema con cuatro temperaturas en cada subdivisión y con dos iteraciones, esto es $m=4$ y $n=2$, por lo tanto,

$$\# \text{Temperaturas} = 4(2^{2+1} - 1) = 4(7)$$

$$\# \text{Temperaturas} = 28$$

Los valores de las 28 temperaturas del cuerpo mostrado en la figura 5.11, están expresados en °C. El primer valor corresponde al resultado del método analítico, el segundo valor es el resultado del método iterativo-reproductivo y el tercer valor es el resultado del método numérico de diferencias finitas (analítico, iterativo-reproductivo, numérico).

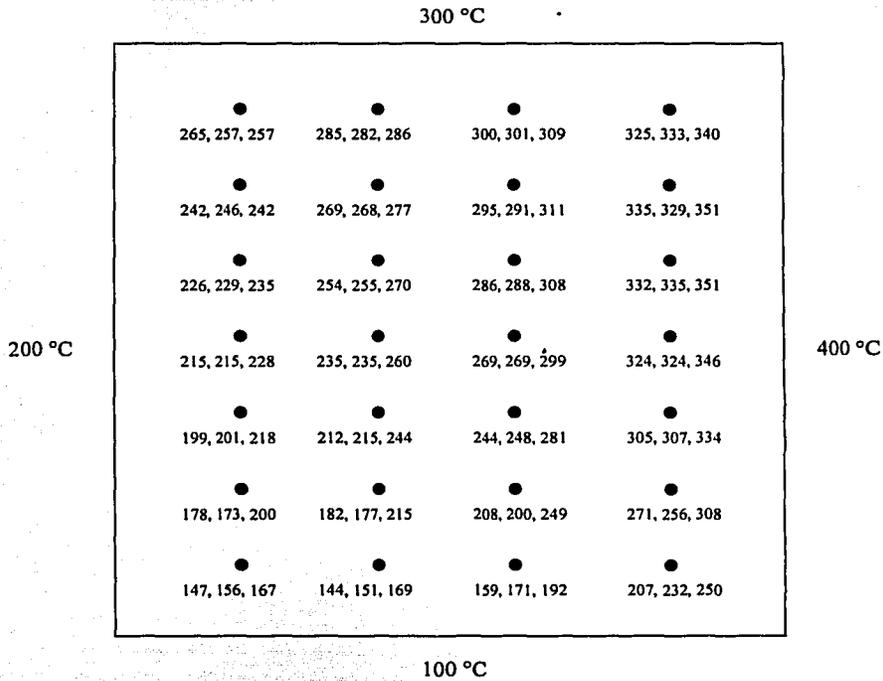


Figura 5.11 Solución Analítica, iterativa-reproductiva y numérica para 28 temperaturas

$$t_{\text{promedio método analítico}} = 247^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\text{promedio método iterativo-reproductivo}} = 248^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\text{promedio método numérico}} = 268^{\circ}\text{C}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

De la figura 5.11, se observa que los resultados del método iterativo-reproductivo son más cercanos a la solución analítica que los del método numérico de diferencias finitas.

El método de los vecinos cercanos proporciona solo una aproximación del valor de las temperaturas de los nodos, sin embargo, mientras menor sea la separación de la malla más cerca se estará del valor real, esto es, al tender a cero la separación de la malla, los valores tienden a coincidir con los valores reales de la distribución de temperatura en el material⁽¹⁾.

Para poder encontrar las isotermas que se forman debido a la distribución de temperaturas dentro del material, se resolverá un número de nodos mayor. Para hacerlo, se utilizan los programas que se encuentran en los apéndices B, C y D, los cuales son programas para el método analítico, método numérico de diferencias finitas y el método propuesto iterativo-reproductivo.

El número de temperaturas que se obtendrán con el método iterativo-reproductivo, es el siguiente,

$$\# \text{Temperaturas} = m(2^{n+1} - 1)$$

donde,

m = número de temperaturas en cada subdivisión

n = número de iteraciones

de esta manera, si se tienen 8 temperaturas en cada subdivisión con 3 iteraciones, se pueden calcular,

$$\begin{aligned} \# \text{Temperaturas} &= 8(2^{3+1} - 1) = 8(15) \\ \# \text{Temperaturas} &= 120 \end{aligned}$$

Para calcular este número de temperaturas con el método numérico de diferencias finitas, se tiene que resolver una matriz de 120 x 120 esto es, una matriz de 14400 elementos lo cual es una cantidad considerable.

En las figuras 5.12, 5.13 y 5.14, se muestran los resultados para 120 temperaturas del método analítico, iterativo-reproductivo y numérico, respectivamente. En cada figura se grafican las isotermas de 150 °C, 200 °C, 250 °C, 300 °C y 350 °C, y se da el valor de la temperatura promedio para cada método para poder comparar los resultados. Como se dijo anteriormente, también se calculan las 120 temperaturas con la primera propuesta del método iterativo-reproductivo, en el cual se calculaban todas las líneas de temperaturas por medio de matrices tridiagonales, con el fin de mostrar la discrepancia con los demás resultados.

Como se puede ver en las figuras, las isotermas que se acercan más a las del método analítico son las isotermas del método iterativo-reproductivo.

ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS PRINCIPALES MÉTODOS.

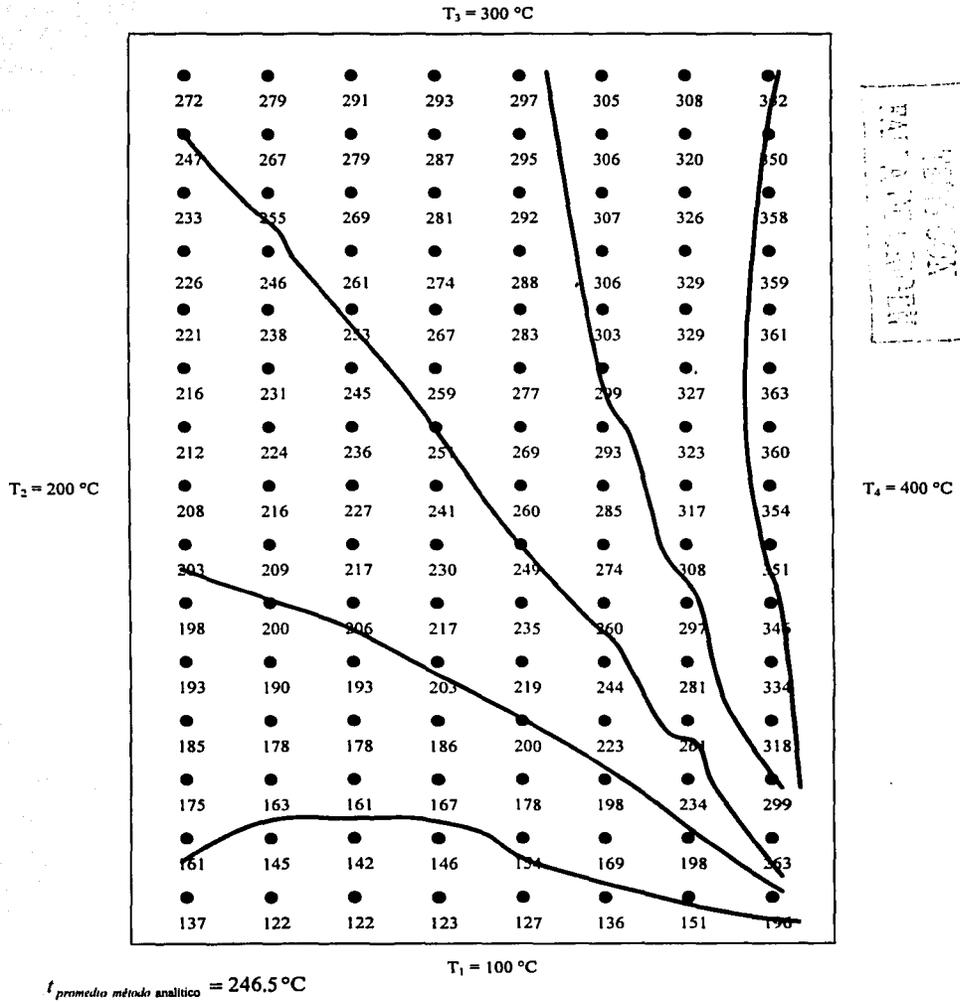


Figura 5.12 Solución analítica para 120 temperaturas internas

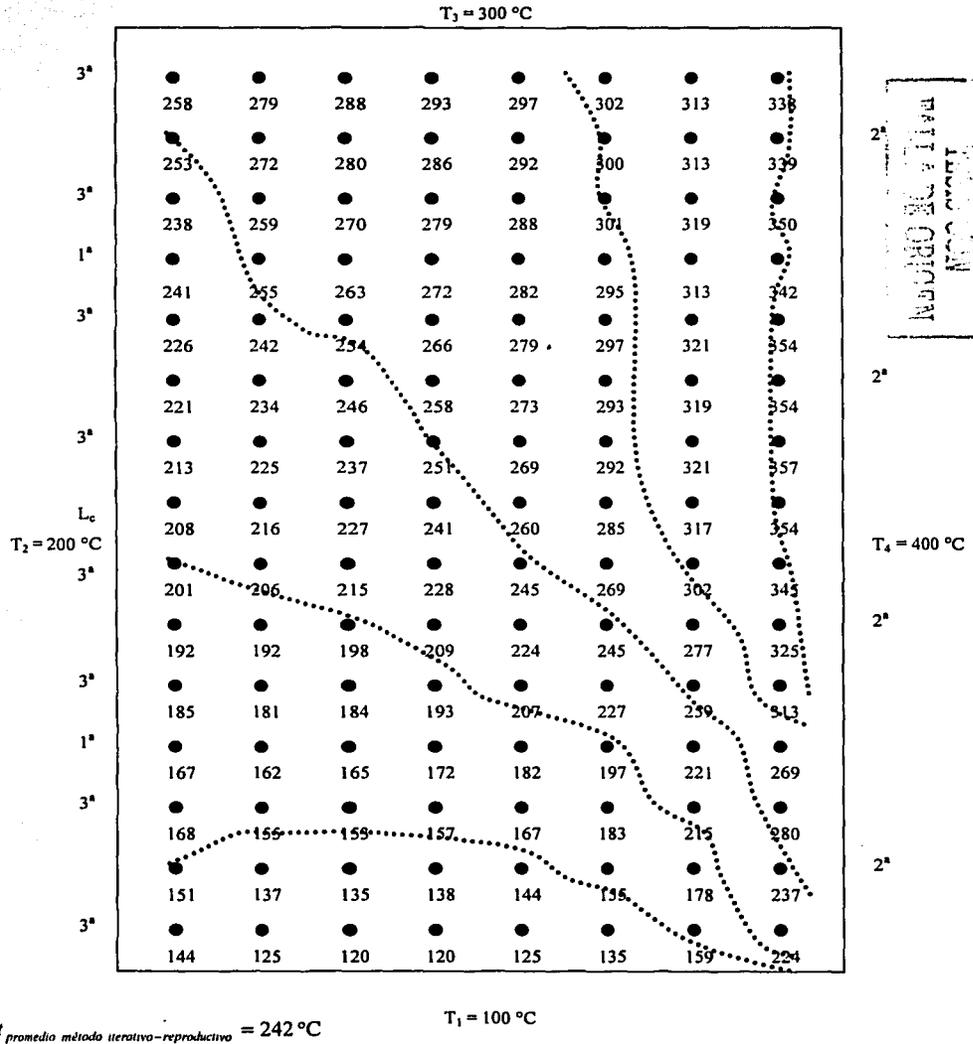


Figura 5.13 Solución iterativa-reproductiva para 120 temperaturas

ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS PRINCIPALES MÉTODOS.

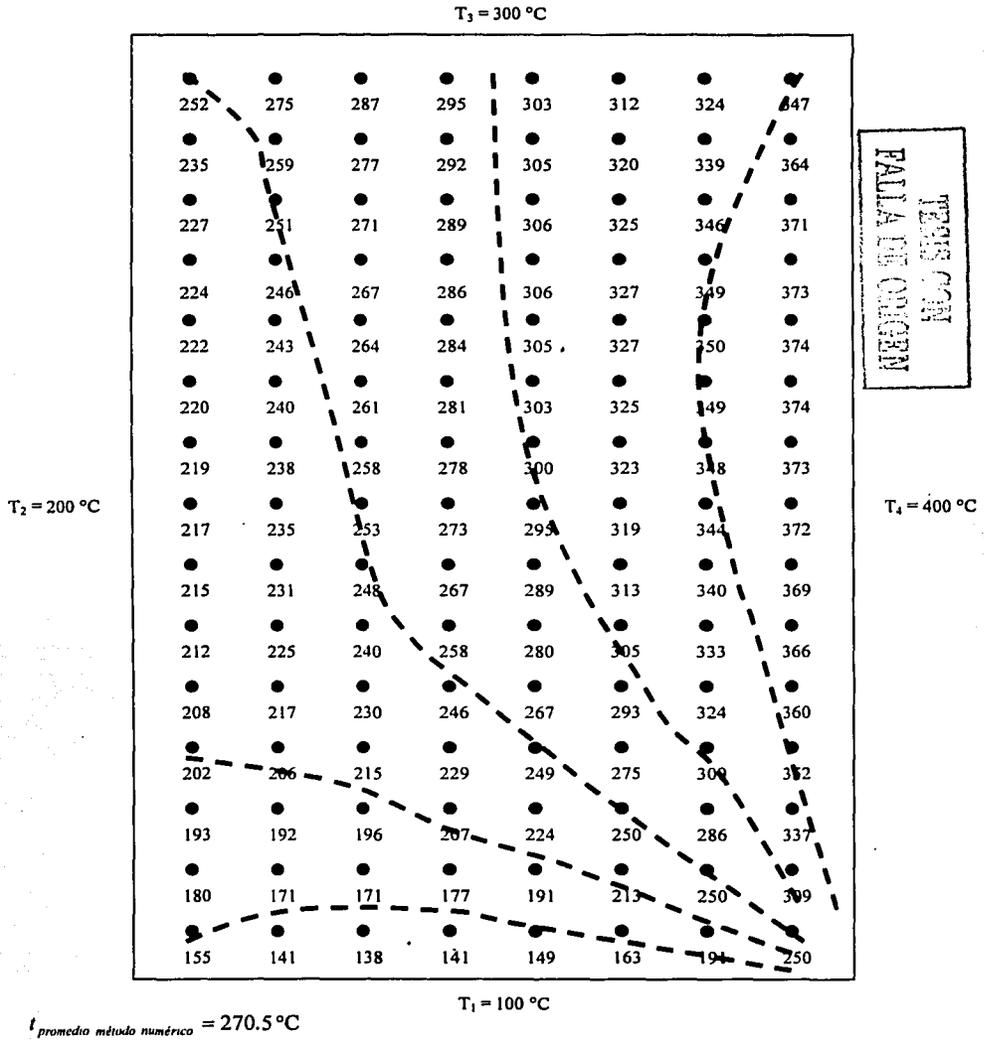
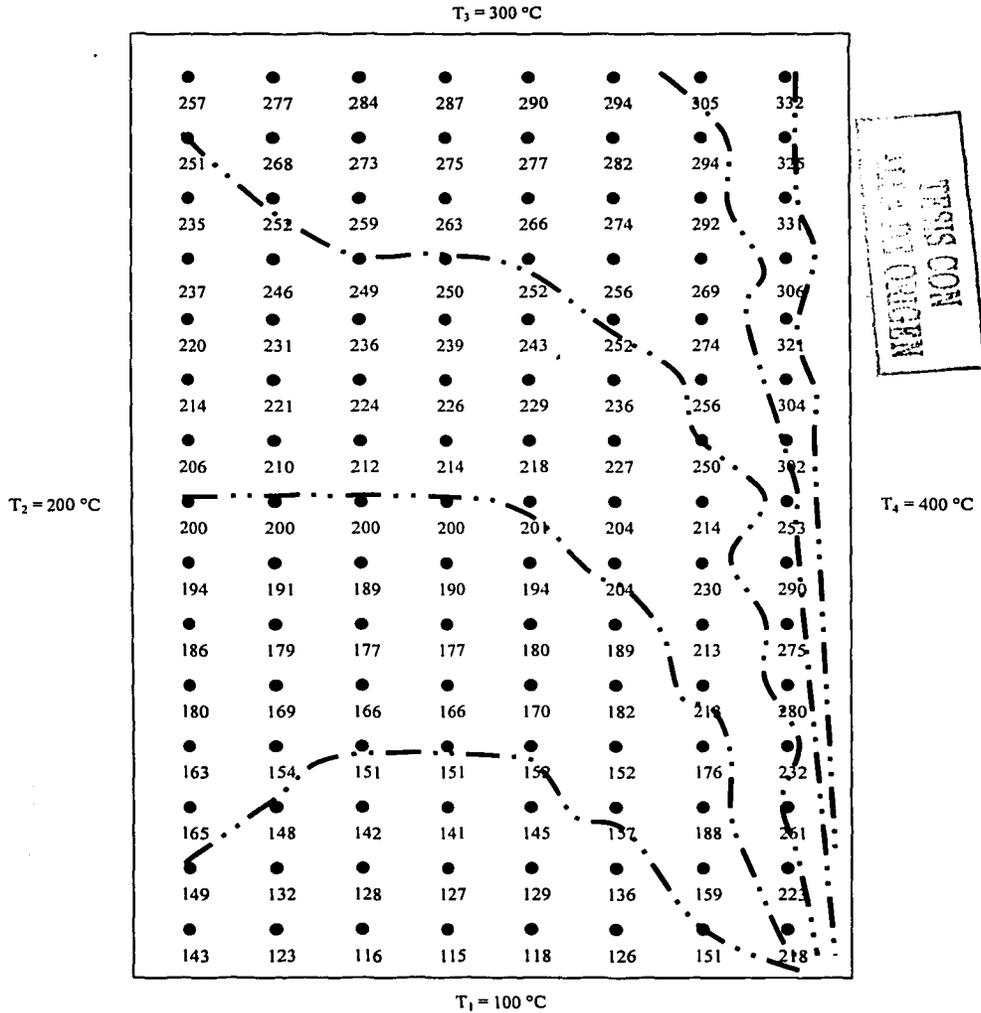


Figura 5.14 Solución numérica para 120 temperaturas internas



f_{promedio} de la primera propuesta del método iterativo-reproductivo = 216.82 °C

Figura 5.15 Solución para 120 temperaturas con la primera propuesta del método iterativo-reproductivo

En la figura 5.13, la cual muestra las isotermas que resultan con el método iterativo-reproductivo, se han colocado las identificaciones para cada línea de temperaturas para saber el orden en que se calcula cada una.

Si se imagina primero el material rectangular sin ninguna línea de temperaturas, posteriormente se divide éste material a la mitad, aparecerá la línea central de temperaturas la cual esta identificada por L_c , los valores de estas temperaturas se toman de la solución analítica. Por lo tanto se puede decir que ahora se tienen dos rectángulos más pequeños los cuales se vuelven a dividir a la mitad y aparecen las líneas de temperatura que representan la primera iteración y están identificadas con 1^a , estas líneas de temperatura se calculan con el método de vecinos cercanos por lo que para cada línea se tiene que resolver una matriz tridiagonal de 8×8 , posteriormente se lleva a cabo la segunda iteración la cual implica la subdivisión de los rectángulos que resultaron de la primera iteración y así se obtienen las líneas identificadas con 2^a , las cuales se calculan similarmente como las de la primera iteración. Para la tercera iteración se vuelven a subdividir los rectángulos pequeños que resulten de la segunda iteración y se obtienen las líneas que están representadas con 3^a .

El sistema que se resolvió para cada línea de temperaturas es de la forma $Ax = B$ donde la matriz A es tridiagonal y es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad 5.20$$

Esta matriz se puede resolver con varios métodos (Gauss, LU, etc), sin embargo el método LU tiene la ventaja de que la matriz L y la matriz U se pueden definir sin realizar muchas operaciones ya que en el apéndice A se muestra una relación con la cual se pueden calcular los coeficientes de la matriz L y de la matriz U .

En la figura 5.15 se muestran los resultados que se obtienen aplicando la primera propuesta del método iterativo-reproductivo en el cual la línea central de temperaturas no se obtiene con el método analítico, sino resolviendo una matriz como la mostrada en la ecuación 5.20, sin embargo, como se puede ver en la comparación de las graficas, las isotermas que resultan con este procedimiento se alejan totalmente de las isotermas de los otros métodos, por lo que se optó por hacer una variación al método y por esa razón, se calcula la línea central de temperaturas con el método analítico, con lo que se obtienen resultados mas cercanos a éste.

6. OTRAS APLICACIONES

En ingeniería química, las diversas operaciones unitarias se pueden clasificar en tres procesos fundamentales de transferencia, los cuales son transferencia de calor, de momento lineal y de masa. Debido a esto, los tres procesos de transferencia están regidos por la *ecuación general de transporte molecular*, la cual es

$$\text{velocidad de un proceso de transferencia} = \frac{\text{fuerza impulsora}}{\text{resistencia}} \quad 6.1$$

de esta manera, las ecuaciones para la difusión molecular de las propiedades de momento lineal, de calor y de masa, son análogas entre sí y por lo tanto, un método de solución a las ecuaciones de un proceso en particular se puede aplicar a los otros procesos de transferencia, siempre y cuando el modelo a resolver tenga las mismas características para cada proceso de transferencia.

Por ejemplo, la transferencia de masa puede considerarse de forma similar a la aplicación de la ley de conducción de Fourier a la transferencia de calor. De igual manera, la ecuación que rige la transferencia de calor bidimensional es análoga a la ecuación de transferencia de masa en dos dimensiones y por lo tanto, se aplica el método iterativo-reproductivo para encontrar las concentraciones internas de un cuerpo sólido sometido a concentraciones diferentes en sus fronteras.

En este caso, la transferencia de masa ocurre cuando el componente de una mezcla emigra en una misma fase o de una fase a otra, a causa de la diferencia de concentración entre dos puntos. La difusión molecular puede definirse como la transferencia (o desplazamiento) de moléculas individuales a través de un fluido por medio de los desplazamientos individuales y desordenados de las moléculas.

La ecuación que permite conocer la distribución o perfil de concentraciones dentro de un sistema unidimensional es la ecuación de la ley de Fick (ecuación 6.2). La ley de Fick relaciona el flux difusivo con el gradiente de concentración mediante el coeficiente de difusión.

$$J_{Az}^* = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad 6.2$$

La ecuación 6.2 es análoga a la ecuación de la ley de Fourier para la transferencia de calor, solo que en esta ecuación, la variable dependiente es la concentración y no la temperatura. Tomando en cuenta esto, la ecuación que representa la difusión de un soluto *A* en un material bidimensional *B* es,

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} = 0 \quad 6.3$$

esta ecuación representa la difusión de *A* en el material homogéneo *B* a régimen permanente y con coeficiente de difusividad (D_{AB}) constante. El esquema de la difusión bidimensional se muestra en la figura 6.1.

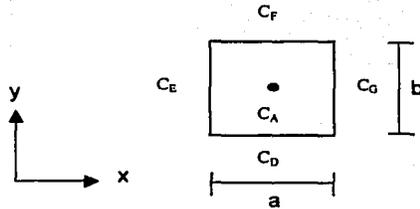


Figura 6.1 Concentración del punto A

Para calcular el valor de la concentración del punto A de la figura 6.1, se puede utilizar la técnica analítica, numérica y el método propuesto iterativo-reproductivo. Por analogía, la ecuación del método analítico para calcular la concentración del nodo interno de la figura 6.1, sería

$$w_1(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4c_D}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \left[\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \left(\frac{4c_F}{n\pi} - \frac{4c_D}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

y

$$w_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4c_E}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + \left[\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} \left(\frac{4c_G}{n\pi} - \frac{4c_E}{n\pi} \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) \right) \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \right] \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

por lo tanto,

$$c_A(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad 6.4$$

La ecuación de diferencias finitas para aplicar la solución numérica es la siguiente,

$$c_{i+1,j} + c_{i-1,j} + c_{i,j+1} + c_{i,j-1} - 4c_{i,j} = 0 \quad 6.5$$

En el método iterativo-reproductivo se procede de la misma manera que en la transferencia de calor esto es, obteniendo las concentraciones de la línea central y posteriormente usar estos datos como valores de contorno para obtener las concentraciones restantes a las cuales se les aplica el concepto de vecinos cercanos para obtener las ecuaciones representativas de cada nodo, las cuales se arreglan en una matriz tridiagonal y se resuelven por el método más adecuado.

APLICACIONES

Para mostrar las soluciones que resultan de cada método, se resolverá un sistema de nueve nodos internos y posteriormente se resolverá un sistema mayor con el método iterativo-reproductivo. Las concentraciones estarán expresadas en kg mol/m^3 .

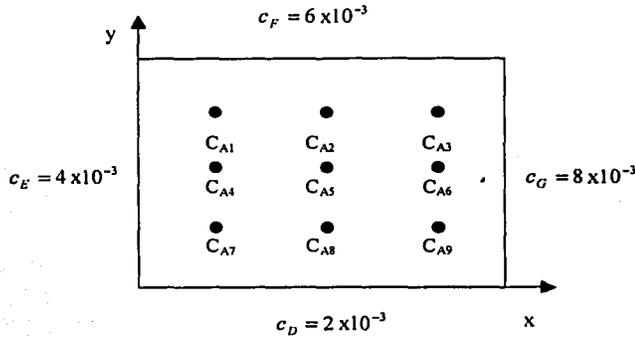


Figura 6.2 Nueve concentraciones internas

Las soluciones que se obtienen con los tres diferentes métodos (analítico, numérico e iterativo-reproductivo) son las mismas y se muestran en la siguiente figura,

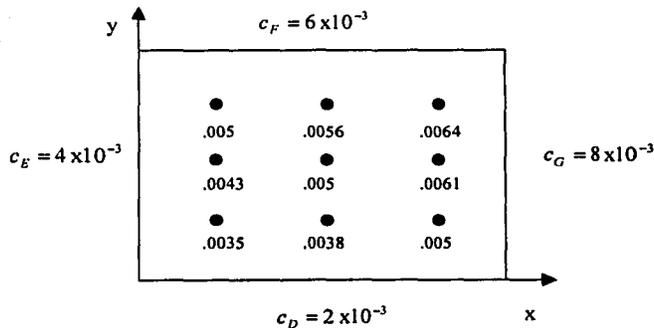


Figura 6.3 Valores de las concentraciones internas calculadas con los tres métodos

APLICACIONES

Al igual que en la transferencia de calor, entre menor sea la separación de los nodos, los valores de las concentraciones tienden hacia su valor real, por lo tanto, se aplicará el método iterativo-reproductivo para obtener 120 concentraciones internas de un cuerpo.

$$C_F = 6 \times 10^{-3} \text{ kgmol/m}^3$$

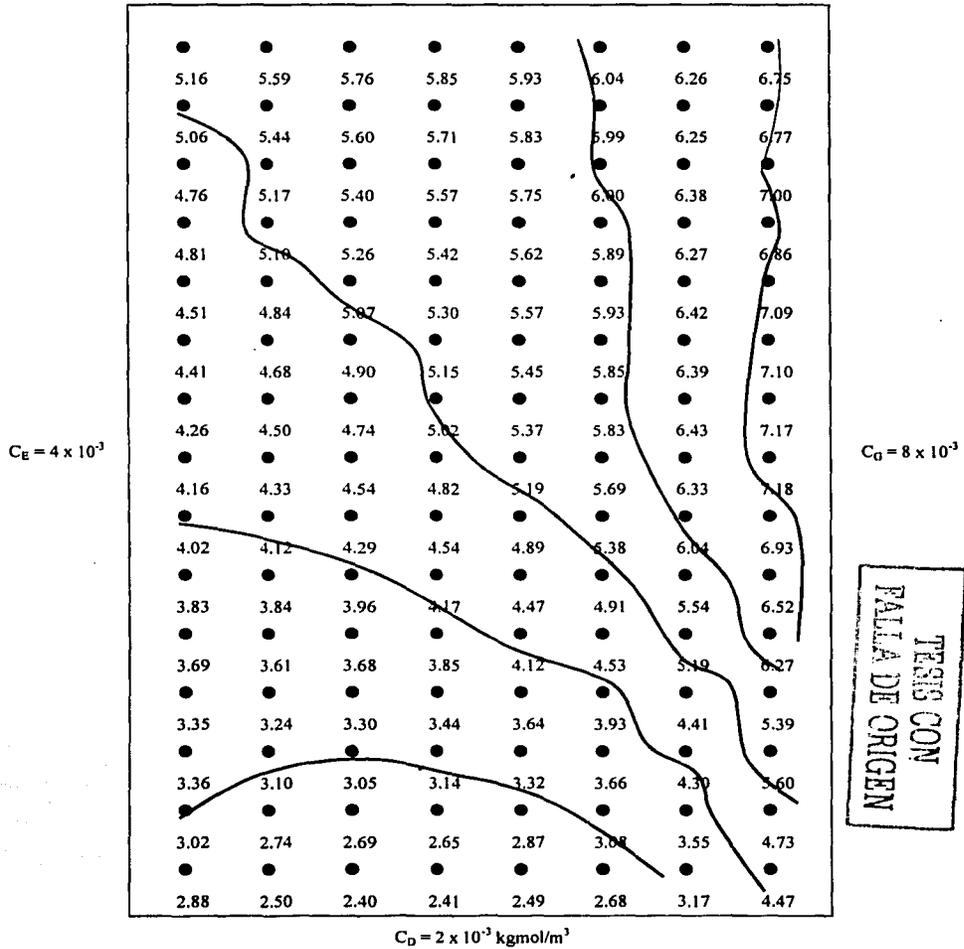


Figura 6.4 Resultados del método iterativo-reproductivo para 120 concentraciones

APLICACIONES

Las concentraciones de la figura 6.4 tienen el valor de $C_n \times 10^{-3}$ y las unidades de kgmol/m^3 . En esta figura se muestran las líneas de concentración constante de 3, 4, 5, 6 y $7 \times 10^{-3} \text{ kgmol/m}^3$ para observar el perfil de concentraciones del material.

En el presente trabajo se toma como ejemplo un material isotrópico sometido a cuatro temperaturas diferentes en sus fronteras, esto es debido a que los libros de transferencia de calor generalmente no desarrollan por completo este tema, ya que dichos libros manejan el ejemplo de dos temperaturas diferentes en sus fronteras para poder aplicar el método de separación de variables sin ninguna complicación, sin embargo, es importante mencionar que el método iterativo-reproductivo también puede ser aplicado a materiales que tengan dos, tres o cuatro temperaturas diferentes en sus fronteras ya que las bases para el desarrollo del modelo son las mismas.

Como se puede ver esta aplicación es simplemente una analogía entre dos ramas diferentes de la ingeniería. Sin embargo, el método iterativo-reproductivo, al igual que los métodos numéricos convencionales, es una herramienta que representa un nuevo enfoque de abordar los problemas en los cuales se presente un laplaciano y de esta manera, de acuerdo a las necesidades particulares ya sea escolares o industriales, se le dará la aplicación conveniente para cubrir dichas necesidades.

7. CONCLUSIONES

Una vez hecho el análisis y comparación entre los métodos utilizados en este trabajo, se puede concluir que el método iterativo-reproductivo es una buena alternativa para obtener las isoterms de un material con las siguientes características: cuerpo bidimensional isotrópico, a régimen permanente, sin generación de energía y considerando despreciables las deformaciones por la dilatación térmica. Esto se confirma superponiendo las gráficas donde se obtienen las isoterms con 120 nodos calculados. En dichas gráficas se puede observar que las isoterms del método iterativo-reproductivo son parecidas y muy cercanas a las del método analítico, contrario a las del método de diferencias finitas las cuales tienen una desviación considerable. La isoterma que describe claramente lo antes mencionado es la isoterma central del método analítico la cual representa el promedio de las temperaturas de los contornos del material y divide al cuerpo en dos partes iguales. Un comportamiento similar en estas gráficas se presenta en el método iterativo-reproductivo y se observa una desviación mayor en la gráfica del método de diferencias finitas.

Debido a que no se tienen valores reales de la distribución de temperatura en un material isotrópico sometido a las temperaturas de contorno utilizadas, los valores del método analítico se han tomado como punto de referencia para determinar que tan confiables son los resultados del método propuesto.

Aunado a la exactitud, el método iterativo-reproductivo tiene la gran ventaja de que se pueden calcular rápidamente, un gran número de nodos, sin tener que hacer uso de algún programa de computación, ya que solo la línea central de temperaturas se calcula utilizando el método analítico y posteriormente se resuelve una matriz tridiagonal pequeña, varias veces. Por ejemplo, en el cálculo de 120 temperaturas, la matriz que hay que resolver para el método de diferencias finitas es una matriz de 120×120 , lo que sin el uso de algún paquete de software, es casi imposible. Para el método analítico se tiene que resolver 120 veces la sumatoria para U_1 y 120 veces la sumatoria para U_2 lo cual tomaría demasiado tiempo. Por el contrario, en el método iterativo-reproductivo solo hay que resolver 8 veces la sumatoria para U_1 y para U_2 , y después resolver una matriz de 8×8 , 30 veces, lo cual parece demasiado, sin embargo no lo es, ya que la matriz a resolver es la misma para cada línea de temperaturas y utilizando el método LU, para el cual los coeficientes de las matrices L y U se pueden definir con referencia en el apéndice A, la solución se puede obtener fácilmente, en un tiempo relativamente corto.

También es importante mencionar que el método iterativo-reproductivo tiene una restricción, ya que el número de temperaturas a calcular no es libre, debido a que existe una fórmula en la cual se definen el número de temperaturas que habrá en cada línea y el número de iteraciones que se quiere hacer. Una vez definidos estos valores, se conocerá el número de temperaturas que se pueden calcular. Por el contrario, en el método analítico y en el método de diferencias finitas se pueden calcular el número de temperaturas que se requiera.

Aunque el objetivo fue aplicar un método propuesto (iterativo-reproductivo) para la obtención de isoterms en un cuerpo sometido a temperaturas diferentes en sus contornos, no se pueden dejar de mencionar algunas características de los otros dos métodos que se exponen en este trabajo, los cuales son el método de diferencias finitas y el método analítico.

El método analítico tiene la gran ventaja de que es el método más exacto teóricamente que se puede utilizar para la determinación de temperaturas internas en un material, ya que en las ecuaciones del método analítico, la temperatura está influenciada por las dimensiones del material (a, b) y por las

CONCLUSIONES

coordenadas (x, y) , a diferencia de los métodos numéricos los cuales solo consideran distancias iguales entre los nodos, sin considerar las dimensiones espaciales del material.

Como se observó en las figuras donde se muestran las isothermas que resultan con cada uno de los métodos, el método de diferencias finitas fue el que más se alejó de las isothermas del método analítico, sin embargo, cuando se resuelven sistemas de matrices que comprenden temperaturas equidistantes (materiales cuadrados), los resultados del método de diferencias finitas son idénticos a los del método analítico, sin importar el número de temperaturas equidistantes que se calculen. Cabe mencionar que de acuerdo a la restricción que tiene el método iterativo-reproductivo de que el número de temperaturas que se puede calcular no es libre, solo se tendrían tres casos factibles de temperaturas equidistantes, esto es, 3×3 (9 temperaturas), 7×7 (49 temperaturas) y 15×15 (225 temperaturas), ya que un mayor número de temperaturas equidistantes sería un tanto inusual. De acuerdo a esto, queda claro que el método propuesto tiene su mayor aplicación en el cálculo de isothermas para materiales con forma rectangular.

Con el desarrollo del método iterativo-reproductivo, queda manifiesto que aunque existe un sin fin de diferentes métodos que dan solución a determinados problemas, es posible encontrar una nueva alternativa de resolver dichos problemas y así poder aproximarse más a los valores reales del problema, en un menor tiempo y, por lo tanto, a un menor costo.

APÉNDICE A

Número malla.

Como se mencionó anteriormente, el método LU consiste en transformar la matriz de coeficientes A en el producto de dos matrices L y U , en donde, L es una matriz triangular inferior y U es una triangular superior.

En el método iterativo-reproductivo, se utiliza el método LU para la solución de las matrices que resultan de las iteraciones que se hacen para calcular las temperaturas internas del material, de esta manera, para el cálculo de dos temperaturas, tenemos la siguiente matriz de coeficientes A y sus respectivas matrices L y U .

$$A = L U \quad \text{A.1}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 15/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de tres temperaturas,

$$A = L U \quad \text{A.2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 15/4 & 0 \\ 0 & -1 & 56/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -4/15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para cuatro temperaturas,

$$A = L U \quad \text{A.3}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 15/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 56/15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 205/56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15/56 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como se puede observar, la diagonal principal de L tiene la característica de que el numerador del cociente de la fila 1 es el denominador en la fila 2 y el numerador de la fila 2 es el denominador en la fila 3; además, la diagonal principal en L es el inverso negativo en la diagonal adyacente a la principal en la matriz U , por lo tanto, esto hace suponer que existe una ecuación que pueda predecir los valores de la diagonal principal en la matriz L y con estos, obtener los de la matriz U .

Si se denomina a los elementos de la diagonal principal de L como α , y a los elementos de U como β , tenemos que,

$$\alpha_{11} = 4 \quad \text{y} \quad \beta_{12} = -1/\alpha_{11} = -1/4$$

$$\alpha_{22} = 15/4, \quad \beta_{23} = -4/15$$

$$\alpha_{33} = 56/15, \quad \beta_{34} = -15/56$$

por lo tanto,

$$\alpha_{i,i} = \alpha_{11} - \frac{1}{\alpha_{i-1,i-1}} \quad \text{A.4}$$

y,

$$\beta_{i,i+1} = -\frac{1}{\alpha_{i,i}} \quad \text{A.5}$$

de esta manera, para calcular el valor de α_{44} y β_{45} , tenemos,

$$\begin{aligned} \alpha_{44} &= 4 - 15/56 = 224/56 - 15/56 \\ \alpha_{44} &= 209/56, \text{ y} \\ \beta_{45} &= -56/209 \end{aligned}$$

por lo tanto, la matriz L y la matriz U se pueden predecir sin tener que hacer tantas operaciones de multiplicar renglón por columna como lo indica el método. Así, para una matriz de 10×10 tenemos,

$\alpha_{11} = 4$	$\beta_{12} = -1/4$
$\alpha_{22} = 15/4$	$\beta_{23} = -4/15$
$\alpha_{33} = 56/15$	$\beta_{34} = -15/56$
$\alpha_{44} = 209/56$	$\beta_{45} = -56/209$
$\alpha_{55} = 780/209$	$\beta_{56} = -209/780$
$\alpha_{66} = 2911/780$	$\beta_{67} = -780/2911$
$\alpha_{77} = 10864/2911$	$\beta_{78} = -2911/10864$
$\alpha_{88} = 40545/10864$	$\beta_{89} = -10864/40545$
$\alpha_{99} = 151316/40545$	$\beta_{910} = -40545/151316$
$\alpha_{55} = 564719/151316$	

y de aquí, se observa que α tiende hacia un valor, el cual es,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha = 3.73205 \quad \text{A.6}$$

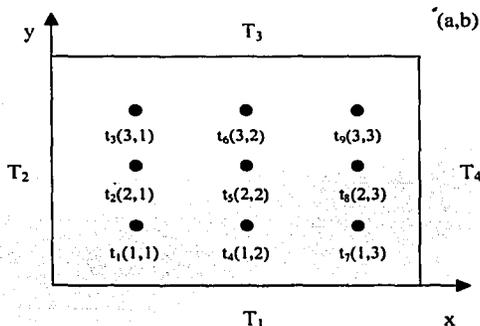
Hay que mencionar que esto aplica solo a las matrices cuadradas que resultan de las iteraciones para calcular las temperaturas internas de un cuerpo rectangular sometido a temperaturas diferentes en sus fronteras, a régimen permanente y sin generación de energía.

APÉNDICE B

La siguiente rutina es un programa en lenguaje Fortran 90 para encontrar las temperaturas internas que se generan en un material isotrópico bidimensional el cual tiene temperaturas diferentes en sus contornos. Para la solución se utiliza el método de separación de variables.

En este programa se deben definir las dimensiones del material (a,b), el número de nodos verticales y horizontales (NV, NH) y los valores para las temperaturas de las fronteras (T_1, T_2, T_3, T_4).

Los resultados serán mostrados en el siguiente orden:



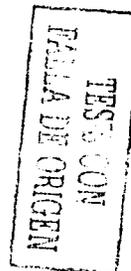
El primer valor pertenecerá a las coordenadas (1,1) posteriormente, el número de columna se mantiene constante, variándose el valor de la fila, por lo tanto el siguiente valor pertenecerá a la coordenada (2,1). Una vez que se tengan los valores de la primera columna, los siguientes valores pertenecerán a la segunda columna y así sucesivamente, hasta que se tengan todos los valores de los nodos.

PROGRAM SOLUCION_ANALITICA

- ```

.....
* METODO ANALITICO
* PROGRAMA PARA RESOLVER LA ECUACION DE LAPLACE PARA UNA PLACA PLANA
* RECTANGULAR DE MATERIAL ISOTROPICO Y CON TEMPERATURAS DIFERENTES EN
* SUS CONTORNOS. SOLUCION DE EL PROBLEMA POR EL METODO ANALITICO DE
* SEPARACION DE VARIABLES.
*
* NH - NUMERO DE NODOS HORIZONTALES DE LA MALLA
* NV - NUMERO DE NODOS VERTICALES DE LA MALLA
* NT - NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA MALLA
* T1 - TEMPERATURA DE LA PARED
* LA SOLUCION DEL SISTEMA ES t(x,y)=U1(x,y)+U2(x,y)
* t(x,y) - ES LA TEMPERATURA EN CADA UNO DE LOS PUNTOS SEGUN SUS COORDENADAS
* I - ES EL CONTADOR DE RENGLONES DE LA MATRIX
* J - ES EL CONTADOR DE COLUMNAS DE LA MATRIX
* a - LONGITUD DE LA PLACA
* b - ALTURA DE LA PLACA
.....

```

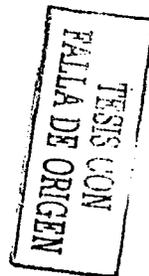


APÉNDICE B

```

IMPLICIT NONE
INTEGER: NT,NH,NV,I,J,a,b,N
REAL: T1,T2,T3,T4,Pi,Xprom,EU,EU2,UT1,UT2,UT3,UT4,UT5,UT6,UT7,UT8
&.UT9,UT10
 REAL X(:),Y(:),U1(:),U2(:)
 POINTER X,Y,I,U1,U2
 PARAMETER (Pi=3.14159)
 PRINT *, 'PROGRAMA PARA CALCULAR LAS TEMPERATURAS INTERNAS'
 PRINT *, 'UTILIZANDO EL METODO ANALITICO DE SEPARACION DE VARIABLES'
 PRINT *
 PRINT *, 'LARGO DE LA PLACA (a)'
 READ *, a
 PRINT *, 'ANCHO DE LA PLACA (b)'
 READ *, b
 PRINT *, 'NUMERO DE NODOS HORIZONTALES'
 READ *, NH
 PRINT *, 'NUMERO DE NODOS VERTICALES'
 READ *, NV
 NT=NV*NH
 PRINT *, 'TOTAL DE TEMPERATURAS INTERNAS CONSIDERADAS PARA'
 PRINT *, 'EL SISTEMA'
 PRINT *, NT
 PRINT *, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=0)'
 READ *, T1
 PRINT *, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=0,0<y<b)'
 READ *, T2
 PRINT *, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=b)'
 READ *, T3
 PRINT *, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=a,0<y<b)'
 READ *, T4
* IMPRESION DE RESULTADOS EN UN ARCHIVO ELECTRONICO
OPEN (UNIT=6, FILE = 'C:\msidoc-1\sol_analitica.XLS')
PRINT *, 'LOS VALORES DE LAS TEMPERATURAS INTERNAS OBTENIDAS '
PRINT *, 'CON EL METODO ANALITICO SON'
WRITE (6,88)
88 FORMAT (/)
103 FORMAT (13X,'T(,I3,,'I3,)',F14.4)
 ALLOCATE (X(NV),Y(NH),U(NV,NH),U1(NV,NH), U2(NV,NH))
* RESOLVIENDO EL SISTEMA POR EL METODO DE SEPARACION DE VARIABLES
DO 31 I=1,NH
DO 32 J=1,NV
DO 33 N=1,9,2
 EU=I
 EU2=J
 X(I)=(a*EU)/(NH+1)
 Y(J)=(b*EU2)/(NV+1)
 UT1=COSH(N*PI*Y(J)/a)
 UT2=SINH(N*PI*b/a)
 UT3=COSH(N*PI*b/a)
 UT4=SINH(N*PI*Y(J)/a)
 UT5=SIND(N*180*X(I)/a)
 UT6=COSH(N*PI*X(I)/b)
 UT7=SINH(N*PI*a/b)
 UT8=COSH(N*PI*a/b)
 UT9=SINH(N*PI*X(I)/b)
 UT10=SIND(N*180*Y(J)/b)
 U1(I,J)=(4*T1/(N*PI)*UT1+1/UT2*(4*T3/(N*PI)-4*T1/(N*PI))*
&UT3)*UT4*UT5
 U2(I,J)=(4*T2/(N*PI)*UT6+1/UT7*(4*T4/(N*PI)-4*T2/(N*PI))*UT8)*
&UT9)*UT10
 U(I,J)=U1(I,J)+U2(I,J)
33 CONTINUE
 Xprom=Xprom+U(I,J)
 WRITE (6,103)I,J,U(I,J)
32 CONTINUE
31 CONTINUE
Xprom=Xprom/(NH*NV)
PRINT *, 'TEMPERATURA PROMEDIO =',Xprom
STOP
END PROGRAM

```



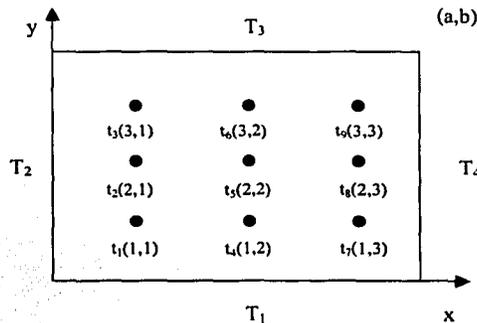
## APÉNDICE C

La siguiente rutina es un programa en lenguaje Fortran 90 para encontrar las temperaturas internas que se generan en un material isotrópico bidimensional el cual tiene temperaturas diferentes en sus contornos. Para la solución se utiliza el método iterativo-reproductivo.

Este programa esta hecho con un valor predeterminado de tres iteraciones, lo único que se puede variar es el número de temperaturas que habrá en cada línea.

En este programa se deben definir las dimensiones del material (a,b), el número de temperaturas en la línea central y los valores para las temperaturas de los contornos ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ).

Los resultados serán mostrados en el siguiente orden:



Aunque los valores se muestran en el mismo orden que el método analítico, el procedimiento de solución es diferente.

PROGRAM ITERATIVO\_REPRODUCTIVO  
USE NUMERICAL\_LIBRARIES

- .....
- PROGRAMA PARA RESOLVER LA ECUACION DE LAPLACE PARA UNA PLACA PLANA
  - RECTANGULAR DE MATERIAL ISOTROPICO Y CON TEMPERATURAS DIFERENTES EN SUS CONTORNOS.
  - PARA LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO SE UTILIZA LA
  - RUTINA 'LSARG' PARA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS
  - TENIENDO UNA MATRIX DE COEFICIENTE GENERAL REAL.
  - M - NUMERO DE NODOS CENTRALES DE LA MALLA
  - RE - NUMERO DE NODOS HORIZONTALES EN LA MALLA
  - TOT - NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA MALLA
  - T1 - TEMPERATURA DE LA PARED
  - EL SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO ES DEL TIPO  $AX=B$ . DONDE:
  - A - ES LA MATRIX DE  $NT \times NT$  QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
  - B - VECTOR DE LONGITUD  $NT$  CONTENIDO DEL LADO DERECHO DEL SISTEMA
  - X - ES EL VEXTOR DE LONGITUD  $NT$  QUE CONTIENE LA SOLUCION DEL SISTEMA
  - I - ES CONTADOR DE RENGLONES DE LA MATRIX
  - J - ES EL CONTADOR DE COLUMNAS DE LA MATRIX

TESIS CON  
 MALLA DE ORIGEN

APÉNDICE C

```

* Xprom - ES LA TEMPERATURA PROMEDIO DEL SISTEMA

IMPLICIT NONE
INTEGER:: TOT,IT,N,M,I,J,II,LDA,RE,LC,NV,NH,NC
REAL:: T1,T2,T3,T4,Xprom,aa,bb,YA,UT11,UT12
REAL:: PI,EU,EU2,EU3,UT1,UT2,UT3,UT4,UT5,UT6,UT7,UT8,UT9,UT10
REAL XA(:),(::),A1(:),A(:),B(:),X(:),U1(:),U2(:)
POINTER XA,YA,LA,A1,B,X,U1,U2
PARAMETER (PI=3.14159)

PRINT*, 'PROGRAMA PARA CALCULAR LAS TEMPERATURAS EN UNA PLACA'
PRINT*, 'CON DIMENSIONES (a,b). DONDE a ES EL LARGO DE LA PLACA'
PRINT*, 'Y b ES EL ANCHO'
PRINT*, 'LARGO DE LA PLACA (a)'
READ*, aa
PRINT*, 'ANCHO DE LA PLACA (b)'
READ*, bb
PRINT*, 'NUMERO DE TEMPERATURAS CENTRALES EN LA HORIZONTAL'
READ*, M
 IT=3
 RE=(2*(IT+1)-1)
 TOT=M*RE
 N=M
 LDA=M
PRINT*, 'TOTAL DE TEMPERATURAS CONSIDERADAS PARA EL SISTEMA'
PRINT*,TOT
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=0)'
READ*,T1
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=0,0<y<b)'
READ*,T2
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=b)'
READ*,T3
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=a,0<y<b)'
READ*,T4

ALLOCATE (A(M,M),A1(M,M),B(M),X(M))

* DIMENSIONANDO LA MATRIZ CARACTERISTICA DEL SISTEMA
DO 60 I=1,M !DIAGONAL CENTRAL
 J=I
 A1(I,J)=4
60 CONTINUE
DO 70 J=2,M !DIAGONAL SUPERIOR
 I=J-1
 A1(I,J)=-1
70 CONTINUE
DO 80 I=2,M !DIAGONAL INFERIOR
 J=I-1
 A1(I,J)=-1
80 CONTINUE

*SOLUCIONANDO LOS NODOS CENTRALES DEL SISTEMA POR EL METODO ANALITICO

ALLOCATE (XA(M),(TOT,TOT),U1(TOT,TOT),U2(TOT,TOT))
LC=((2*(IT+1))*0.5)
DO 51 II=1,M
DO 52 NC=1,9,2
 EU=II
 EU2=(aa*EU)/(M+1)
 XA(II)=EU2
 EU3=(bb*LC)/(RE+1)
 UT1=COSH(NC*PI*EU3/aa)
 UT2=SINH(NC*PI*bb/aa)
 UT3=COSH(NC*PI*bb/aa)
 UT4=SINH(NC*PI*EU3/aa)
 UT5=SIND(NC*1.80*XA(II)/bb)
 UT6=COSH(NC*PI*XA(II)/bb)
 UT7=SINH(NC*PI*aa/bb)
 UT8=COSI(NC*PI*aa/bb)
 UT9=SINH(NC*PI*XA(II)/bb)
 UT10=SIND(NC*1.80*EU3/bb)
 U1(II,LC)=(4*T1/(NC*PI)*UT1+1/UT2*(4*T3/(NC*PI)-4*T1/(NC*PI)*
 &UT3)*UT4)*UT5

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE C

```

U2(I,LC)=(4*T2/(NC*PI)*UT6+1/UT7*(4*T4/(NC*PI)-4*T2/(NC*PI)*UT8)*
&UT9)*UT10
I(I,LC)=I(I,LC)+U1(I,LC)+U2(I,LC)
52 CONTINUE
51 CONTINUE

```

\* PARA N=2 J=4,8,12

```

B(I)=(I,8)+T1+T2
B(M)=(M,8)+T4+T1
DO 10 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,8)+T1
10 CONTINUE
DO 100 J=1,M
DO 100 I=1,M
 A(I,J)=A(I,I,J)
100 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 11 I=1,M
 J=4
 I(I,J)=X(I)
11 CONTINUE
B(I)=(I,8)+T3+T2
B(M)=(M,8)+T4+T3
DO 12 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,8)+T3
12 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 13 I=1,M
 I(I,12)=X(I)
13 CONTINUE

```

\* PARA N=1 J=2,6,10,14

```

B(I)=(I,4)+T1+T2
B(M)=(M,4)+T4+T1
DO 14 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,4)+T1
14 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 15 I=1,M
 I(I,2)=X(I)
15 CONTINUE
B(I)=(I,4)+(I,8)+T2
B(M)=(M,4)+T4+(M,8)
DO 16 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,4)+T3
16 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 17 I=1,M
 I(I,6)=X(I)
17 CONTINUE
B(I)=(I,12)+(I,8)+T2
B(M)=(M,12)+T4+(M,8)
DO 18 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,12)+(I,8)
18 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 19 I=1,M
 I(I,10)=X(I)
19 CONTINUE
B(I)=(I,12)+(I,12)+T2
B(M)=(M,12)+T4+(M,12)
DO 20 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,12)+T3
20 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 21 I=1,M
 I(I,14)=X(I)
21 CONTINUE

```

\* PARA N=0 J=1,3,5,7,9,11,13,15  
B(I)=(I,2)+T1+T2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

APENDICE C

```

 B(M)=(M,2)+T4+T1
DO 22 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,2)+T1
22 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 23 I=1,M
 I(I,1)=X(I)
PRINT*,X(I)
23 CONTINUE
 B(I)=(I,2)+(I,4)+T2
 B(M)=(M,2)+T4+(M,4)
DO 24 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,2)+(I,4)
24 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 25 I=1,M
 I(I,3)=X(I)
25 CONTINUE
 B(I)=(I,4)+(I,6)+T2
 B(M)=(M,4)+T4+(M,6)
DO 26 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,4)+(I,6)
26 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 27 I=1,M
 I(I,5)=X(I)
27 CONTINUE
 B(I)=(I,6)+(I,8)+T2
 B(M)=(M,6)+T4+(M,8)
DO 28 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,6)+(I,8)
28 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 29 I=1,M
 I(I,7)=X(I)
29 CONTINUE
 B(I)=(I,8)+(I,10)+T2
 B(M)=(M,8)+T4+(M,10)
DO 30 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,8)+(I,10)
30 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 31 I=1,M
 I(I,9)=X(I)
31 CONTINUE
 B(I)=(I,10)+(I,12)+T2
 B(M)=(M,10)+T4+(M,12)
DO 32 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,10)+(I,12)
32 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 34 I=1,M
 I(I,11)=X(I)
34 CONTINUE
 B(I)=(I,12)+(I,14)+T2
 B(M)=(M,12)+T4+(M,14)
DO 35 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,12)+(I,14)
35 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 36 I=1,M
 I(I,13)=X(I)
36 CONTINUE
 B(I)=(I,14)+T3+T2
 B(M)=(M,14)+T4+T3
DO 37 I=2,(M-1),1
 B(I)=(I,14)+T3
37 CONTINUE
CALL LSARG(N,A,LDA,B,I,X)
DO 38 I=1,M
 I(I,15)=X(I)
38 CONTINUE

```



APÉNDICE C

---

\*IMPRESION DE RESULTADOS EN UN ARCHIVO ELECTRONICO

OPEN (UNIT=6, FILE = 'C:\msidoc-1\so1\_iter.XLS')

PRINT \*, 'EL VECTOR SOLUCION ES'

PRINT \*, 'METODO ITERATIVO-REPRODUCTIVO'

WRITE (6,88)

88 FORMAT (/)

103 FORMAT (13X,T('I3,',I3,')',F14.4)

\* IMPRESION DE RESULTADOS

DO 40 I=1,M

DO 40 J=1,RE

    Xprom=Xprom+(1,J)

WRITE (6,103)I,J,(1,J)

40 CONTINUE

    Xprom=Xprom/(RE\*M)

PRINT \*, 'Temperatura promedio =',Xprom

STOP

END PROGRAM

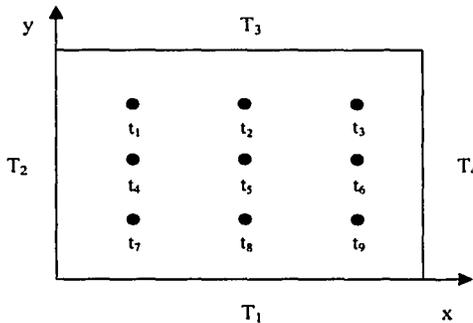
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## APÉNDICE D

El siguiente programa encuentra las temperaturas internas de un cuerpo isotrópico bidimensional sometido a temperaturas diferentes en sus contornos. Éste programa utiliza el método numérico de diferencia finitas en el cual se genera un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve con la subrutina 'LSARG' utilizando el método de Gauss para la solución de sistemas lineales.

En este programa se deben definir el número de temperaturas horizontales y verticales (NH, NV) y las temperaturas de las fronteras del material ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ).

Los valores de las temperaturas de los nodos tendrán el siguiente orden,



PROGRAM PROGRAMA\_NUMERICO\_DE\_DIFERENCIAS\_FINITAS  
USE NUMERICAL\_LIBRARIES

```

.....
* METODO NUMERICO DE DIFERENCIAS FINITAS
* PROGRAMA PARA RESOLVER LA ECUACION DE LAPLACE PARA UN MATERIAL
* ISOTROPICO CON TEMPERATURAS DIFERENTES EN SUS FRONTERAS.
* PARA LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO, SE UTILIZA LA
* RUTINA 'LSARG' PARA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS
* TENIENDO UNA MATRIX DE COEFICIENTE GENERAL REAL.
*
* NV - NUMERO DE NODOS VERTICALES EN LA MALLA
* NH - NUMERO DE NODOS HORIZONTALES EN LA MALLA
* NT - NUMERO TOTAL DE NODOS DE LA MALLA O NUMERO DE ECUACIONES
* T1 - TEMPERATURA DE LA PARED
* EL SISTEMA DE ECUACIONES GENERADO ES DEL TIPO AX=B, DONDE:
* A - ES LA MATRIX DE NT X NT QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
* B - VECTOR DE LONGITUD NT CONTENIDO DEL LADO DERECHO DEL SISTEMA
* X - ES EL VECTOR DE LONGITUD NT QUE CONTIENE LA SOLUCION DEL SISTEMA
* I - ES CONTADOR DE RENGLONES DE LA MATRIX
* J - ES EL CONTADOR DE COLUMNAS DE LA MATRIX
* Xprom - ES LA TEMPERATURA PROMEDIO DEL SISTEMA
.....

```

IMPLICIT NONE

INTEGER:: NT,NV,NH,I,J,LDA  
REAL:: T1,T2,T3,T4,Xprom  
REAL A(:,),B(:),X(:)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE D

POINTER A, B, X

```

PRINT*, 'PROGRAMA PARA CALCULAR LAS TEMPERATURAS EN UNA PLACA'
PRINT*, 'CON DIMENSIONES (a,b). DONDE a ES EL LARGO DE LA PLACA'
PRINT*, 'Y b ES EL ANCHO'
PRINT*, 'NUMERO DE TEMPERATURAS HORIZONTALES'
READ*, NH
PRINT*, 'NUMERO DE TEMPERATURAS VERTICALES'
READ*, NV
NT=NH*NV
LDA=NT
PRINT*, 'TOTAL DE TEMPERATURAS CONSIDERADAS PARA EL SISTEMA'
PRINT*, NT
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=0)'
READ*, T1
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=0,0<y<b)'
READ*, T2
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (0<x<a,y=b)'
READ*, T3
PRINT*, 'TEMPERATURA DE LA PARED CON COORDENAS (x=a,0<y<b)'
READ*, T4

```

ALLOCATE (A(NT,NT),B(NT),X(NT))

\* GENERACION DE LA MATRIZ CARACTERISTICA DEL SISTEMA AX=B

\* GENERANDO LA SECCION B DE LA MATRIZ

```

B(1)=T2+T3
B(NH)=T3+T4
B(NT)=T4+T1
B(NT-NH+1)=T2+T1
DO 10 I=2,(NH-1)
 B(I)=T3

```

```

10 CONTINUE
DO 20 I=(NT-NH+2),(NT-1)
 B(I)=T1

```

```

20 CONTINUE
DO 30 I=(NH+1),(NT-2*NH+1),NH
 B(I)=T2

```

```

30 CONTINUE
DO 40 I=2*NH,(NT-NH),NH
 B(I)=T4

```

40,CONTINUE

\*GENERACION DE LA SECCION A DE LA MATRIZ

DO 60 I=1,NT !DIAGONAL CENTRAL

```

J=I
A(I,J)=4

```

60 CONTINUE  
DO 70 J=2,NT !DIAGONAL SUPERIOR

```

I=J-1
A(I,J)=-1

```

70 CONTINUE  
DO 75 I=NH,NT-NH,NH !GENERACION DE CEROS EN LA DIAGONAL SUPERIOR

```

J=I+1
A(I,J)=0

```

75 END DO  
DO 80 I=2,NT !DIAGONAL INFERIOR

```

J=I-1
A(I,J)=-1

```

80 CONTINUE  
DO 85 I=NH+1,NT-NH+1,NH !GENERACION DE CEROS EN LA DIAGONAL INFERIOR

```

J=I-1
A(I,J)=0

```

85 CONTINUE  
DO 90 I=1,(NT-NH+1)

```

J=I+NH
A(I,J)=-1

```

90 CONTINUE  
DO 95 J=1,(NT-NH)

```

I=J+NH
A(I,J)=-1

```

95 CONTINUE

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE D

---

\* IMPRESION DE RESULTADOS EN UN ARCHIVO ELECTRONICO

```
OPEN (UNIT=6, FILE = 'C:\msdoc-1\program_1.XLS')
CALL LSARG(NT,A,LDA,B,I,X)
 Xprom=0.0
DO 112 I=1,NT
112 Xprom=(Xprom+X(I))
 Xprom=Xprom/NT
PRINT *, 'METODO DE GAUSS PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES'
PRINT *, 'EL VECTOR SOLUCION ES'
WRITE (6,88)
88 FORMAT (/)
PRINT *, 'TEMPERATURA PROMEDIO'
PRINT *, Xprom

DO 109 I=1,NT
109 WRITE (6,103),X(I)
103 FORMAT (10X,T(13,')=,F14.4)

STOP
 END PROGRAM
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## 8. BIBLIOGRAFÍA

### REFERENCIAS.

1. Chris Rorres, Howard Antón, "Aplicaciones de álgebra lineal" editorial Limusa S. A., México D.F., 1979.
2. Gerald Curtis F., "Análisis numérico", Alfaomega, México D.F., 1991.
3. Adrián Bejan, "Heat transfer", John Wiley & Sons Inc, USA, 1993.
4. Denis G. Zill, "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado" 6ª edición, International Thomson Publishing, México D.F., 1997.
5. J. P. Holman, "Transferencia de calor" 2ª edición, Mc Graw Hill, México D.F., 1995.
6. B. V. Karlekar, "Transferencia de calor", 2ª edición, Mc Graw Hill, México D.F., 1985.

### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.

- Ozisik, M. Necati; "Heat Conduction", 2ª. John Wiley & Sons, USA: 1999.
- Carslaw H. S. & Jaeger J. C., "Conducción of Heat in Solid", 2ª. Oxford at the Clarendon Press, Great Britain, 1978.
- Chapra, Esteven C., "Métodos Numéricos para Ingenieros", Mc Graw Hill, México. 1991.
- Gastinel, Noel, "Análisis Numérico Lineal", Reverte, España, 1975.
- Revista de Información Científica y Tecnológica en Zaragoza de la A. Q. Y E. "Determinación de frentes térmicos por el método de mallas", No. 3, Vol. 1, Año 3, 1999.
- Donald W. Trim, "Applied partial differential equations", International Thomson Publishing, USA, 1990.
- Ruel V. Churchill, James Ward Brown, "Fourier series and boundary value problems", 3ª edición, Mc Graw Hill, USA, 1978.
- T.M.R. Ellis, Ivor R. Philips, Thomas M. Lahey, "Fortran 90 Programming", Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1994.

