

01173  
5



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

Análisis por Elemento Finito en una Biela de  
Motor de Combustión Interna.

PRESENTADA POR:

Ing. Horacio León Camacho

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

Mecánica

DIRIGIDA POR:

Dr Marcelo López Parra

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por la Beca proporcionada para la realización de mi Maestría.

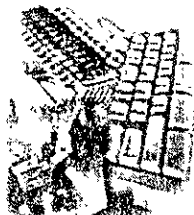
A mis profesores de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería ,UNAM, por sus comentarios y sus valiosas aportaciones.

Al Doctor Marcelo López Parra, por asesorar este trabajo de investigación.

# Índice

## CONTENIDO:

### 1.- Importancia del Diseño Mecánico



Diseño Asistido por Computadora CAD	6
Manufactura Asistida por Computadora CAM	8
Ingeniería Asistida por Computadora CAE	14
Funcionamiento de un Motor de Combustión Interna	16

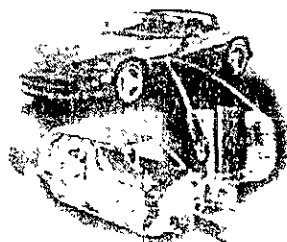
### Capítulo 2.- Metodología.



Introducción	19
Ubicación del Elemento Finito	22
Descripción General del Método	24
Fundamentos del FEM en 3D	29

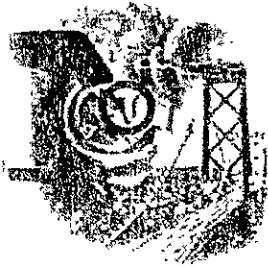
### Capítulo 3.- Análisis Mecánico.

#### Parte 1



Introducción	40
Descripción de la Biela	41
Análisis de Falla	43
Análisis Cinemático	54
Análisis Cinetostático	68

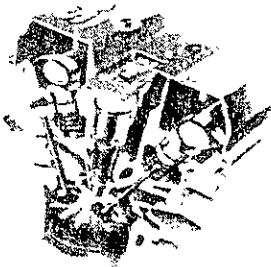
## Capitulo 4.- Análisis Mecánico



### Parte 2.

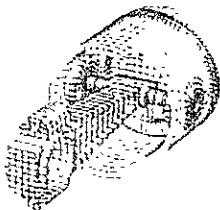
Introducción	91
Discretización	92
Análisis	96
Esfuerzos Principales	103

## Capitulo 5.- Resultados y Conclusiones.



Resultados Finales	110
--------------------	-----

## Anexos y Bibliografía.



Comportamiento Mecánico de Materiales	113
Análisis de Esfuerzos	120
Deformaciones Unitarias	126
Bibliografía	135

# Introducción



**E**l Método de Elementos Finitos (FEA) constituye una de las técnicas más ampliamente utilizadas para el análisis de características de carga mecánica de modernos componentes de Ingeniería. Las técnicas de análisis tradicionales, aunque teóricamente válidas, solamente se pueden aplicar satisfactoriamente a una gama de formas de componentes convencionales y en condiciones de carga específicas.

Desgraciadamente, la mayoría de las situaciones de carga en ingeniería no son tan simples ni claras. Por lo cual, las técnicas tradicionales necesitan modificarse y comprometerse a seguir situaciones para las que no han sido probadas.

La incertidumbre creada conduce al diseñador a aplicar factores de alta seguridad excesivos en las cargas mecánicas y realizar componentes "Sobrediseñados" que especifican ya sea secciones transversales o materiales de alta calidad innecesarios.

Inevitablemente, se afecta negativamente al coste del producto. FEA permite al diseñador efectuar análisis de componentes complejos descomponiendo una forma en otras más pequeñas, en simples elementos finitos.

Los principios fundamentales del FEA se conocen desde el siglo XIX, pero la técnica no se ha empleado con amplitud hasta hace pocos años, debido a las prohibitivas matemáticas que la involucran, como el álgebra de matrices altamente complejo y repetitivo que pueden consumir un elevado tiempo y tener una clara propensión al error cuando se realizan con medios convencionales.

En este estudio, el objetivo consiste en analizar los esfuerzos debidos a la Dinámica dentro de un motor de combustión interna, enfocados principalmente en el análisis de la biela, por medio de elemento finito; dicho estudio, permite tener

una idea más amplia del proceso de desarrollo de nuevos productos en los motores de combustión interna, el problema principal se encuentra en la resistencia del elemento que soporta las cargas excesivas en el pistón debido a las fuerzas de gas.

Vale la pena mencionar que la literatura y las investigaciones realizadas en este campo se encuentran restringidas debido a que son secretos industriales y a pesar de que se han realizado muchos estudios en este tema, no se encontró ninguna documentación que describa a fondo un análisis como el que se persigue en este trabajo.

Aunado a lo Anterior, los materiales, sus propiedades mecánicas, y su comportamiento son factores importantes en un análisis de esta categoría. Esto implica la restricción de algunas variables, como son los factores de fricción y desgaste en la cámara de combustión que actúan sobre el pistón, así como el descentramiento de la biela unida al perno del pistón, y la unión de la biela al cigüeñal (Manivela), así también el efecto del cigüeñal en tal análisis, y sin olvidar claro, los efectos térmicos.

Para el desarrollo adecuado de esta investigación ha sido necesario, realizar una revisión minuciosa del concepto del Diseño Mecánico y la importancia que tiene para efectos de este análisis, en el capítulo 1, "**Importancia del Diseño Mecánico**", se describen las herramientas fundamentales del diseño, CAD, CAM y CAE dentro de la ingeniería como elementos de apoyo que simplifican y aseguran el diseño de un producto, también se incluye una breve descripción del funcionamiento de un motor de combustión interna, lo cuál nos permitirá un mayor conocimiento del tema.

El capítulo 2, "**Metodología**", nos permite entender los principios fundamentales que gobiernan la técnica del elemento finito con miras hacia la aplicación en un caso práctico, así mismo se describe brevemente el proceso de aplicación en un modelo tridimensional.

El capítulo 3, "**Análisis Mecánico, parte I**", describe el análisis de falla de la biela, el análisis cinemático, y el análisis Cinetostático, los cuales son de gran importancia para conocer las fuerzas y aceleraciones que se desarrollan en los principales componentes del mecanismo manivela, biela, perno y pistón, a diferentes regimenes de velocidad del motor.

En el capítulo 4, "**Análisis Mecánico, parte II**", se realizó el análisis por elemento finito de la biela, con la ayuda del paquete "Cosmos/m", y con el paquete "SolidsWorks", los cuales son de vital importancia para poder realizar el análisis en 3 dimensiones.

En este capítulo se describe paso a paso como se desarrolla el FEM para la Biela.

Por último se mostraran en el capítulo 5, los "**Resultados**", de este proceso de investigación, así como las conclusiones finales arrojadas por nuestro análisis.



El capítulo 3, "**Análisis Mecánico, parte I**", describe el análisis de falla de la biela, el análisis cinemático, y el análisis Cinetostático, los cuales son de gran importancia para conocer las fuerzas y aceleraciones que se desarrollan en los principales componentes del mecanismo manivela, biela, perno y pistón, a diferentes regimenes de velocidad del motor.

En el capítulo 4, "**Análisis Mecánico, parte II**", se realizó el análisis por elemento finito de la biela, con la ayuda del paquete "Cosmos/m", y con el paquete "SolidsWorks", los cuales son de vital importancia para poder realizar el análisis en 3 dimensiones.

En este capítulo se describe paso a paso como se desarrolla el FEM para la Biela.

Por último se mostraran en el capítulo 5, los "**Resultados**", de este proceso de investigación, así como las conclusiones finales arrojadas por nuestro análisis.

Contenido 4



# *importancia del Diseño Mecánico*



# C pítulo I

## Importancia del Diseño Mecánico

Contenido:	
1.1 Diseño Asistido por Computadora CAD	6
1.2 Manufactura Asistida por Computadora CAM	8
1.3 Ingeniería Asistida por Computadora CAE	14
1.4 Funcionamiento del Motor de Combustión	16

### 1.1 Diseño Asistido por Computadora (CAD)

El diseño de Ingeniería es necesario para garantizar que la parte de un mecanismo funciona correctamente y por mucho tiempo. Las Consideraciones funcionales durante el diseño involucran, entre otras cosas, el peso, deformación, propiedades térmicas, cinemáticas y dinámicas.

El diseño no debe apartarse de las consideraciones económicas, esto implica que la parte final debe ser diseñada tan cercana a las especificaciones como sea posible. Los factores Económicos Incluyen materiales, costo de procesamiento, y detalles del mercadeo.

Aproximadamente, el 70% de los costos de producción o de las partes manufacturadas está determinado por el proceso de diseño ingenieril, donde se definen los materiales, tolerancias, acabado superficial, y otros parámetros. Unicamente el 30% de costos de las partes est  sujeto a los esfuerzos del ahorro de dinero durante la etapa de planeación de manufactura. Es por esto, que se



Puede observar que la ayuda de las computadoras al diseño permite tener mayor ahorro e impacto en los productos producidos, lo cual se refleja en el aumento de productividad en la realización de nuevos diseños.

El CAD es la creación y optimización de los diseños usando las computadoras como una herramienta útil de productividad. Los componentes del CAD incluyen a la computadora misma con su respectivo software, un usuario interfase, el análisis, y el modelado geométrico.

La palabra diseño, significa el proceso de crear una especificación para la construcción de una pieza. El proceso involucra síntesis, análisis y optimización, geometría, topología, tolerancias, materiales y otros parámetros necesarios para la manufactura de las piezas.

Es muy importante entender el proceso del Diseño por que, las técnicas computacionales no son más importantes que la teoría en la cual se basan.

Shigley<sup>1</sup>, define el proceso del diseño como un procedimiento iterativo que consiste de seis fases:

1. Reconocimiento de Necesidades.
2. Definición del Problema.
3. Síntesis.
4. Análisis y Optimización
5. Evaluación
6. Presentación.

La mayor ventaja de usar la computadora para el diseño es la gran cantidad de tiempo ahorrado durante el análisis y rediseño de las etapas de procesamiento de nuevos productos. Los módulos del CAD pueden ser divididos en cuatro categorías<sup>2</sup>:

1. Modelado Geométrico.
2. Análisis de Ingeniería.
3. Revisión del Diseño
4. Evaluación y Automatización de documentación y planos.

---

<sup>1</sup> Shigley, J.E., and L.D. Mitchell: Mechanical Engineering Design, Mc Graw Hill, New York, 1983.

<sup>2</sup> Groover, M.P., and E. Zimmers: Computer Aided Design and Manufacturing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.



## Ventajas que ofrece el CAD

- Mayor precisión de los Dibujos.
- Evitar la Repetición de todo el Dibujo.
- Técnicas especiales para realizar el Dibujo.
- Análisis y Cálculos de diseños más Rápidos.
- Integración del diseño con otras disciplinas.
- Definición de modelos geométricos
- Manipulación de modelos
- Manejo de bases de datos.
- Integración con CAM, CAQ, CAE, etc.

### 1.2 Manufactura Asistida Por Computadora (CAM).

Intimamente relacionados con las aplicaciones CAD se encuentran las aplicaciones CAM (Computer Aided Manufacturing), empleadas para modelar un proceso de manufactura y generar los largos y complejos programas NC (Numerical Control) necesarios para mecanizar con maquinas herramienta de control numérico, productos o el herramental para su producción.

Su Origen data de los desarrollos de maquinas controladas numéricamente (NC) del final de los años 40 y principios de los 50. Se adoptó el termino CNC (Control Numérico por Computadora) durante los años 60. CNC, encierra ahora procesos de fabricación automática muy diferentes que incluyen Fresado, Torneado, Oxicorte, Corte con Láser, troquelado, Soldadura eléctrica, Electroerosion, etc.

La posibilidad de gobernar los movimientos de la herramienta mediante un control computarizado ha dado una nueva dimensión a estas maquinas, que ganaron muchísimo en capacidad, tanto que ahora pueden realizar, con gran precisión y capacidad de repetición movimientos complejos en 3D.



ganaron muchísimo en capacidad, tanto que ahora pueden realizar, con gran precisión y capacidad de repetición movimientos complejos en 3D.

Básicamente un centro de mecanizado CNC no difiere con su análogo NO CNC, en cuanto a la cinemática de sus movimientos. La Diferencia principal radica en el gobierno de los movimientos mediante un controlador que interpreta las ordenes de posición y velocidad introducidas en forma de programa NC y las traduce en movimientos mediante el control de los servomotores que efectúan los movimientos. La posición del banco y del cabezal es registrada constantemente mediante encoders ópticos lineales o rotativos que envían esa información al controlador que la compara con la realmente deseada en ese momento e introduce las correcciones en los movimientos que efectúan los servomotores.

El sistema constituye lo que se denomina un lazo de control, y las correcciones introducidas a los movimientos reales censados a fin de alcanzar los ideales obedecen a algoritmos PID (Proporcional, Derivativo, Integral).

Las formas complejas de las superficies diseñadas con CAD, especialmente en moldes, exigen gran flexibilidad de la maquina-herramienta en cuanto a las trayectorias que debe realizar la herramienta de corte y elevada precisión de posicionamiento.

Estos requerimientos convierten a la fresadora y al centro de mecanizado CNC en herramientas ideales para la resolución de estos problemas.

El modelado de un proceso de mecanizado es, conceptualmente, un proceso interactivo e iterativo, realizado en un entorno gráfico en el cual el operador del sistema, ingresa una serie de información y condiciones iniciales, y a partir de allí se realizan procesos basados en esa información mediante opciones provistas por el sistema y seleccionadas convenientemente por el operador, que dan un resultado en forma de camino de herramienta, el cual es simulado y evaluado, y es una medida de aproximación al objetivo realmente deseado, por lo



que en función de él se modifican esos parámetros iniciales y se recalcula sucesivamente hasta obtener el resultado óptimo.

El modelado del proceso comienza con la introducción de información necesaria. En líneas generales, en cualquier proceso de mecanizado hay que definir información geométrica, información específica del proceso y configuraciones generales.

La información geométrica necesaria se encuentra definida gráficamente mediante modelos CAD, generalmente superficies o sólidos 3D, tanto para la geometría de la parte a mecanizar y del bloque de material inicial, como para los elementos auxiliares presentes en el proceso.

La geometría de las herramientas a emplear generalmente son opciones propias del sistema, o incluso se pueden importar las geometrías, las cuales deben estar perfectamente definidas. Esto puede hacerse normalmente dentro del propio sistema CAD/CAM en caso de ser una solución integrada o bien puede importarse.

Entre las facilidades que poseen los sistemas CAM actuales, se encuentra la posibilidad de incorporar al modelo de manufactura las geometrías auxiliares que puedan existir en el área de mecanizado. Estas son, principalmente, tornillos de fijación, morsa, clamps, entrechapas, etc., y permiten observar y prevenir una colisión entre las herramientas o portaherramientas y tales elementos. De no contar con ellos durante el proceso de modelado, podría generarse alguna colisión. Para tratar de evitar esto, se vuelve necesario tomar una altura de seguridad mucho mayor para la retracción de las herramientas durante los movimientos rápidos, lo que incrementa notablemente el tiempo total del mecanizado si en este hay múltiples retracciones e ingresos.

Una vez definidos los elementos geométricos, la posición y orientación correcta, es necesario seleccionar las operaciones que se realizarán, en función de la morfología de la pieza, del bloque de material inicial, del tipo de material, de

las condiciones de la maquina-herramienta, calidad y precisión deseadas de las superficies.



Ya pensadas las operaciones, se procede a seleccionar y configurar las herramientas para cada operación y asignarles parámetros de mecanizado apropiados, los cuales son básicamente, la velocidad del avance y las RPM, así como la velocidad de contacto con el material. También es necesario definir el plano de seguridad y la forma de ingreso de la herramienta al material.

Los CAM actuales poseen simuladores que posibilitan observar el proceso de mecanizado y su resultado de distintas maneras y permiten tener una estimación del tiempo que tarda cada proceso, a fin de seleccionar entre varias opciones él más conveniente, balanceando el resultado obtenido y tiempo empleado.

Una vez terminado el modelado del proceso de manufactura, el resultado final es el archivo del programa que ejecutara la maquina – herramienta. Para ello, es necesario realizar el Postprocesador (traductor que toma el archivo de texto ASCII y convierte las ordenes en el código apropiado) del archivo neutro generado durante el proceso o bien realizarlo desde la base de datos propia del modelo de manufactura.

El archivo NC obtenido constara, básicamente, de un encabezamiento con declaraciones y funciones preparatorias para la maquina, un cuerpo principal y un final con declaraciones de cierre. Entre las declaraciones de comienzo se incluyen el plano de trabajo, la iniciación de giro del husillo e indicación de sentido de giro, la posición del cero de pieza respecto al cero de maquina, la compensación para las herramientas, la apertura del circuito de fluido de corte, etcétera.

En caso de haberse generado el programa de mecanizado en un lugar físico distinto o sin vinculación vía red con la maquina – herramienta, el archivo puede ser transportado en un medio magnético común, mediante una cinta ZIP, drive, discos o mediante vía e-mail.





Esta última posibilidad permite alta flexibilidad de trabajo, incluso con múltiples proveedores de servicios de programación ubicados en forma remota, ya que pueden resolver problemas y enviar los archivos prácticamente en tiempo real.

Una vez en su destino, el archivo es enviado a la máquina- herramienta mediante DNC (Control Numérico Directo) o cargado directamente en ella si su capacidad de memoria se lo permite.

Una conexión DNC es necesaria en el caso en que se quieran ejecutar rutinas de mecanizado que por su tamaño no es posible guardar en la memoria del controlador y este no disponga de un dispositivo de almacenamiento como un disco rígido. Mediante este tipo de conexión se envía el programa en lotes secuenciales de tamaño aceptable para el controlador, que a medida que los ejecuta, los elimina de su memoria y recibe el lote siguiente.


Esto es importante, ya que un archivo de código NC generado por CAM para la pasada final sobre las superficies de un molde pequeño puede alcanzar fácilmente un tamaño de varios megabytes.

Los elementos más importantes de un CAM son:

- Técnicas de Programación y Fabricación CNC.
- Fabricación y Ensamblaje mediante Robots controlados por ordenador.
- Sistemas de fabricación Flexible.
- Técnicas de inspección asistidas por ordenador (CAI).
- Técnicas de Ensayo asistidas por ordenador (CAT).

### **Ventajas del CAM**

- Niveles de producción más altos con menor esfuerzo laboral.

- 
- Menor Posibilidad de error humano y de las consecuencias de su falta de fiabilidad.
  - Mayor versatilidad de los objetos fabricados.
  - Generar Mecanizados de Superficies Complejas.
  - Ahorro de costes por incremento de la eficiencia de fabricación e incremento de eficiencia en el almacenamiento y ensamblaje.
  - Repetitividad de los procesos de fabricación a través del almacenamiento de los datos.
  - Productos de mayor Calidad.
  - Simulación del mecanizado.

La Utilización adecuada de los sistemas CAD/CAM ha dado beneficios substanciales, en la reducción de los costos de diseños, en el incremento de la productividad, así como mejorar la calidad de los productos e implica realizar mejores diseños de los mismos, a través de análisis complejos, uno de ellos, el método de los elementos finitos.

El Cad/Cam permite, tener una visión global de todo el proceso a través de:

- Las Capacidades Funcionales.
- Análisis de Costos
- Manufacturabilidad.
- Impacto Ambiental.
- Seguridad.
- Uso eficiente de Energéticos.
- Precios bajos.
- Garantía de productos.
- Competitividad.
- Equipo y Maquinaria adecuados.
- Mano de obra Calificada.
- Disponibilidad de materiales.

- Confiabilidad.
- Investigación.



### 1.3 Ingeniería Asistida por Computadora (CAE).

La Ingeniería es la actividad clave en un sistema de manufactura, determina la función y el diseño del producto, y tiene la mayor influencia en el proceso de manufactura. Un importante recurso de conocimiento de la ingeniería es, el mercadeo, el control de calidad y el servicio a clientes. Estas actividades deben ser constantemente monitoreadas para retroalimentar el diseño de nuevos productos.

Podemos decir, por tanto, que el CAE es un proceso integrado que incluye todas las funciones de la ingeniería que van desde el diseño propiamente dicho hasta la fabricación.

Esto supone, en la practica, el empleo de sistemas gráficos interactivos combinados con técnicas de modelado geométrico, análisis de estructuras, diseño y dibujo de detalle de piezas, simulación, análisis por elementos finitos, y evaluación del comportamiento de los elementos diseñados.

El modelo geométrico de un producto es sin duda el elemento central dentro del concepto CAE, y consiste en la representación del mismo en la memoria de la computadora. Todos los demás elementos del CAE utilizan esta descripción geométrica como punto de partida.

Dependiendo del sistema CAD/CAM que se emplee, el modelo geométrico puede representarse en la memoria en dos o tres dimensiones.

Es frecuente, en la representación en tres dimensiones, el diseño tipo "croquis", que es él más sencillo, pero que presenta el inconveniente de ofrecer poca información acerca de las superficies de la pieza y no distingue entre su interior y su exterior. Su desventaja estriba pues en las dificultades de interpretación cuando se trata de estructuras complejas.



Las ambigüedades que surgen empleando la técnica anterior, se pueden evitar mediante el sombreado de las superficies del modelo, con lo que se consigue un mayor realismo. En este caso, los modelos definen con gran precisión, la geometría de la superficie de la pieza, y por ello son más útiles para aplicaciones como la del control numérico.

Sin embargo, esta técnica de modelado de superficies presenta el inconveniente de que, al no “Contener materia”, impide el cálculo de magnitudes como el volumen, peso, momentos de inercia, etc.

Cuando la técnica de sombreado de superficies es completada con información acerca de la solidez de la pieza, tenemos lo que se conoce como modelo matemático sólido, y en este caso el modelo puede ser empleado para realizar análisis complejo.

El método de los elementos finitos (MEF) es considerado actualmente como la técnica más generalizada para el análisis de una estructura o modelo. Como se verá en el siguiente capítulo, podremos entender con mayor claridad la metodología y las bases en las cuales se fundamenta el MEF.

El empleo de la simulación en un sistema CAE permite evaluar el comportamiento de un elemento constituido por diversas piezas. Los datos de dichas piezas y su comportamiento son empleados en conjunto para predecir el funcionamiento del producto final.

Como el postre de toda ingeniería es el objeto construido, el proceso no se detiene en el análisis estructural sino que se requiere que los resultados del diseño se utilicen directamente en la manufactura de partes o matrices. En este caso el posprocesador es un software que genere un archivo para una máquina de control numérico computarizado (CNC) o tal vez un archivo de Esterolitografía.



Las simulaciones se llevan a cabo empleando diseños previos y datos conocidos. Cuando se desean nuevos productos, las simulaciones se efectúan a través de un dialogo interactivo, en el que se solicitan datos acerca de parámetros cuyos valores son ajustados de forma iterativa por el diseñador. Un aspecto de especial interés se centra alrededor de la mejora de la productividad de los sistemas de CAE existentes.

#### 1.4 Funcionamiento del Motor de Combustión Interna

Uno de los mayores problemas y que más preocupa en el ámbito mundial es la conservación del medio ambiente. Todos los gobiernos sin excepción invierten en la medida de sus posibilidades grandes sumas de dinero para motivar a las compañías y a la sociedad a desechar o a usar lo menos posible objetos contaminantes o que dañan el medio ambiente.

Y prueba de ello, es en nuestra ciudad de México el programa del hoy No circula, con el objetivo de concientizar a la población de que el ambiente se tiene que cuidar y se debe crear una educación ecológica en beneficio de las futuras generaciones. De ahí la importancia del estudio e investigación constante en la creación y modificación de los componentes del motor de combustión interna.

El motor de combustión interna es el corazón del automóvil y el que proporciona el movimiento del auto. Se basa en la expansión de los gases, causada precisamente por la combustión de una mezcla de carburantes dentro de la cámara de un cilindro.

El funcionamiento del motor se basa en el principio de un "Ciclo de cuatro tiempos" (También conocido como ciclo Otto).

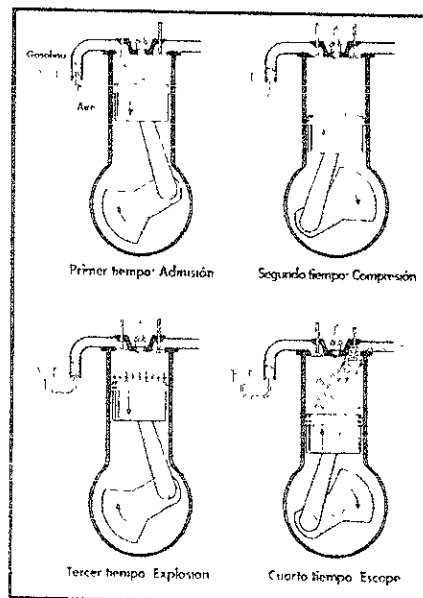
El funcionamiento de un motor con ciclo de 4 tiempos se realiza de la siguiente forma; hallándose el émbolo en el punto muerto superior (PMS, donde el pistón alcanza el máximo de su carrera ascendente) y abierta la válvula por la cuál se introduce la mezcla de combustible y aire (válvula de admisión), el émbolo se



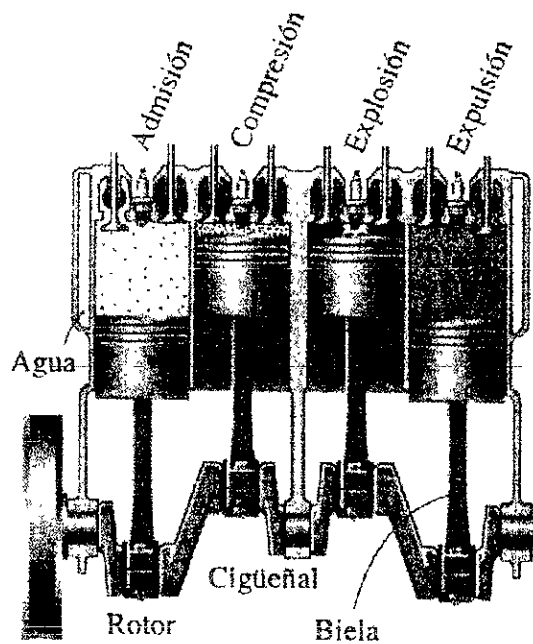
mueve arrastrado por el cigüeñal hacia el punto muerto inferior (PMI, donde el pistón llega al punto mínimo de la carrera descendente), llenándose el cilindro con la mezcla; a esta carrera se le denomina **tiempo de Admisión**.

Estando el émbolo en el PMI y el cilindro lleno de mezcla combustible-aire, se cierra la válvula de admisión y manteniendo también cerrada la otra, el émbolo sube hasta el PMS empujado por el cigüeñal, comprimiendo la mezcla; a esta segunda carrera se le denomina **Segundo Tiempo o Tiempo de Compresión**.

Estando el émbolo en la parte superior y hallándose la mezcla comprimida en el espacio que queda entre la cara superior del émbolo y fondo del cilindro, espacio al cuál se le da el nombre de cámara de combustión, se inicia la combustión que se produce de forma explosiva y el émbolo es empujado hacia abajo por la fuerza de la expansión de los gases quemados, empujando al cigüeñal y produciendo así el movimiento. A esta tercera carrera se le llama **Tercer tiempo o Tiempo de Explosión**.



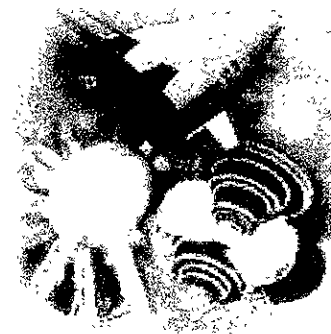
Al finalizar el tercer tiempo, el émbolo se halla en el PMI y el cilindro está lleno de gases quemados, se abre la válvula de escape y el émbolo, empujado por el cigüeñal, expulsa del cilindro los gases quemados, enviándolos a la atmósfera; a este tiempo se le llama **tiempo de escape** y, al finalizar con la llegada del émbolo a su PMS, se cierra la válvula de escape, se abre la de admisión y queda el motor en las mismas condiciones que al principio, para comenzar un nuevo ciclo.



En la práctica, y cuando un motor se ve obligado a girar a la velocidad de rotación de 5000 r.p.m., las cosas se complican bastante porque el tiempo de que se dispone para realizar cada uno de los tiempos de que consta el ciclo, se ha de realizar en escasas centésimas de segundo, lo que exige una extraordinaria precisión de todos los mecanismos.

En el siguiente capítulo veremos los fundamentos del Método del Elemento Finito, así como el procedimiento de solución que vamos a aplicar.

Capítulo 2



# Metodología





# Capítulo 2

## Metodología

Contenido:	
Introducción	19
Ubicación del Elemento Finito	22
Descripción General del Método	24
Fundamentos del FEM en 3D	29

### 1.1 Introducción

Es importante señalar que la técnica del elemento finito ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Surge con base en la necesidad de hacer diseño seguro, eficiente, barato, ya sea en la Industria Automotriz, Aeronáutica, Petrolera, etc.

Sus aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios, estructuras de puentes, análisis de campos de flujo de calor, fluidos, magnetismo, equipos de comunicación, biomedicina, robotica, industria naval, etc.<sup>5</sup>

Esta metodología es bastante compleja, y requiere para su aplicación el conocimiento de elementos matemáticos como son el algebra de matrices, las ecuaciones diferenciales, el cálculo diferencial e integral, así como cálculo

---

<sup>5</sup> [www.cadsystems.com/news](http://www.cadsystems.com/news)

vectorial, también el uso de métodos numéricos, para aproximarnos a la solución de un sistema determinado, cuando la complejidad y la laboriosidad no nos permiten resolver el problema por los medios tradicionales. Y claro sin dejar de lado la programación, esta última, un factor importante, ya que como veremos más adelante, un sistema puede ser analizado desde 3 perspectivas diferentes, llamense dimensiones.

Podemos hacer análisis en 1D, es el caso más sencillo; en 2D, en este tenemos que manejar 2 grados de libertad por nodo (X-Y); y por último en 3D, en el cuál, los grados de libertad por nodo se expanden a 3 (X-Y-Z).

Además de esto es necesario considerar la importancia de la teoría de elasticidad, la mecánica de sólidos, la termodinámica, mecánica de fluidos, etc, según sea el caso. Cómo puede notarse, la complejidad aumenta en medida que el sistema es discretizado, y con ello el sistema y su solución se complican.

Es por esto que el empleo de herramientas de Diseño asistido por Computadora (CAD) permite realizar un bosquejo de nuestro producto o modelo, y con la ayuda de la Ingeniería asistida por Computadora (CAE), trasladar ese bosquejo realizado en una, dos, tres dimensiones a un software de análisis de esfuerzos, temperaturas y deformaciones, (FEM), el cuál nos va a dar una idea muy cercana a la realidad del comportamiento de ese elemento mecánico sometido a esfuerzos y deformaciones.

Un programa de elementos finitos puede caracterizarse por los diferentes problemas mecánicos que es capaz de resolver y por las diferentes geometrías que son susceptibles de análisis, además de la rapidez de respuesta.

El empleo de la simulación en un sistema CAE permite evaluar el comportamiento de un elemento constituido por diversas piezas. Los datos de



dichas piezas y su comportamiento son empleados en conjunto para predecir el funcionamiento del producto final.

Las simulaciones se llevan a cabo empleando diseños previos y datos conocidos. Cuando se desean nuevos productos, las simulaciones se efectúan a través de un dialogo interactivo, en el que se solicitan datos acerca de parámetros cuyos valores son ajustados de forma iterativa por el diseñador. Un aspecto de especial interés se centra alrededor de la mejora de la productividad de los sistemas CAE existentes.

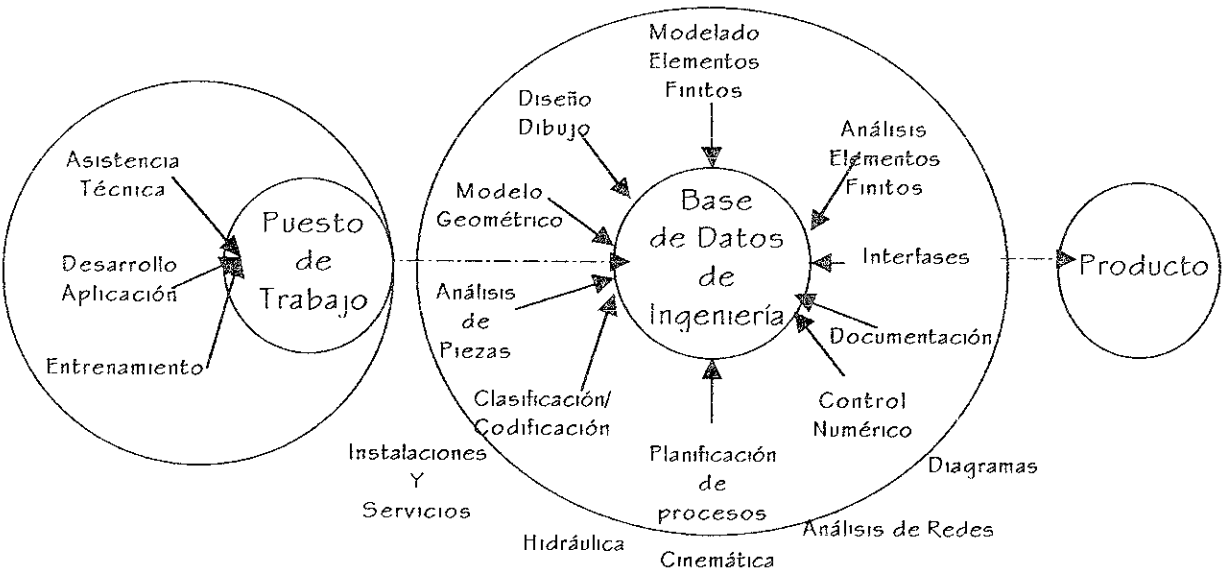


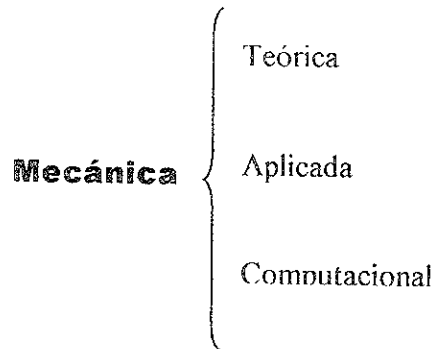
Figura 3. Integración mediante Computadora de la Ingeniería de Fabricación 3

3 Mompin poblet José "Sistemas CAD/CAM/CAE, Diseño y Fabricación por Computadora Marcombo 1989



## 1.2 Ubicación del Elemento Finito en la Mecánica

Desde el punto de vista de los grandes investigadores en este tema, el campo de la mecánica puede ser subdividido dentro de 3 áreas<sup>4</sup>:

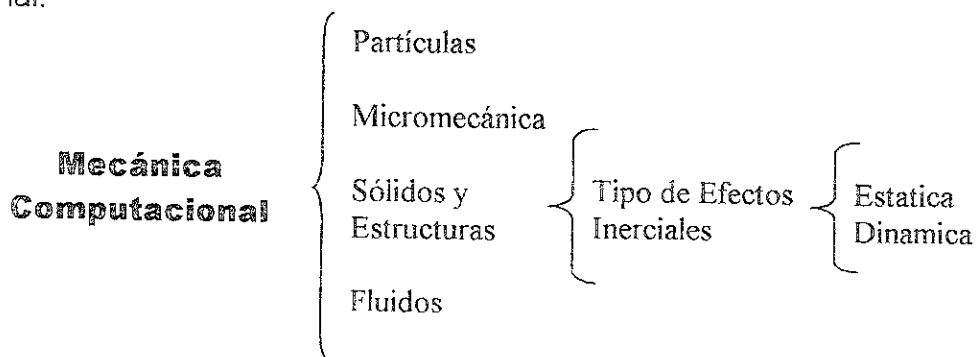


**La Mecánica Teórica.**- Trata con los fundamentos de las leyes y principios de la Mecánica.

**La Mecánica Aplicada.**- transfiere el conocimiento teórico al científico e Ingenieril, enfocado especialmente a las aplicaciones, como la construcción de modelos matemáticos de fenómenos físicos

**La Mecánica Computacional.**- Resuelve problemas específicos a través de métodos numéricos implementados en computo digital.

Pero a su vez cada una de estas divisiones tiene sus correspondientes subdivisiones, en este caso, y para nuestro interés, hablaremos de la mecánica computacional.



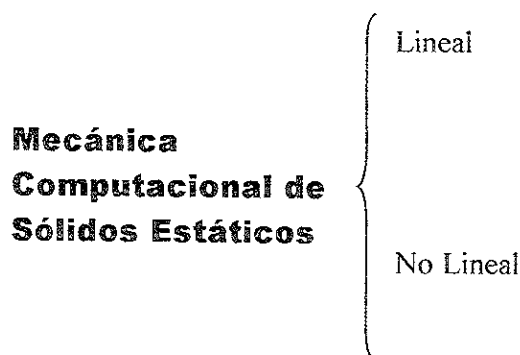
<sup>4</sup> Apuntes de Introducción al Método del Elemento Finito, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Colorado, E.U, 1986.



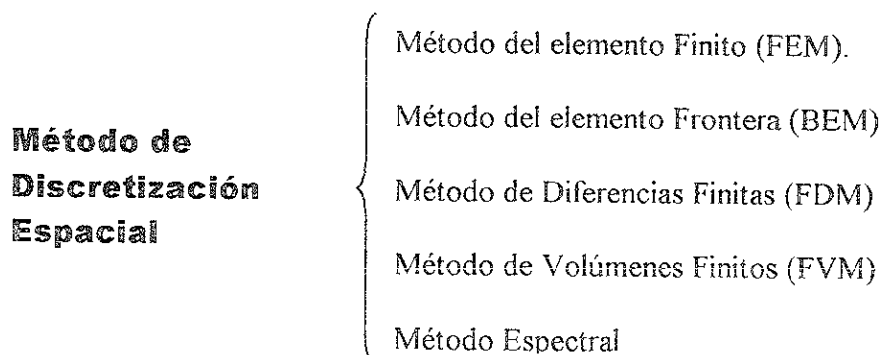
Aquí nos ocuparemos de la mecánica computacional de los sólidos y Estructuras, en los cuáles se enfatiza en la simulación de cuerpos sólidos en el nivel macroscópico, usando modelos matemáticos, y enfatizar en la ciencia aplicada en la mecánica del medio continuo.

La mecánica computacional de sólidos y Estructuras puede a su vez ser subdividida de acuerdo a los efectos Inerciales en Estática y Dinámica, como se observó en la página anterior.

Para nuestro estudio es importante mencionar que la mecánica computacional de Sólidos Estáticos se divide en:



Por último, una clasificación Final de la mecánica computacional de análisis estático, está basado en el método de Discretización, para el cuál el modelo matemático continuo es discretizado en el espacio, y convertido a un modelo discreto de un número finito de grados de libertad.





Esta última clasificación permite ubicar el lugar de la metodología del elemento finito, en la cuál el ser humano es capaz de tener un raciocinio fundamental sobre las cosas, cuando éstas no están a su alcance, ya que es capaz de investigar, profundizar, y conseguir un acercamiento a aquello que no logra entender o captar en primera instancia.

Una forma natural del proceder de los investigadores, es separar los sistemas en elementos constitutivos, en los cuales se determinen sus características y su comportamiento generalizado, con lo cuál, le permita entender el comportamiento de un sistema global en estudio.

Cuando utilizamos un número finito de componentes bien definidos, para describir un sistema, nos referiremos a un sistema discreto. A diferencia, de cuando la subdivisión es indefinida, se denominara sistema continuo.

### 1.3 Descripción General del Método

El análisis por elementos finitos implica tres etapas de actividad: Preprocesamiento, Procesamiento y Posprocesamiento<sup>5</sup>.

**ETAPA 1.-** El Preprocesamiento implica la preparación de datos, como las coordenadas nodales, la conectividad, las condiciones de frontera y la información sobre cargas y material

En esta etapa nos encontramos con el proceso de Discretización.

1.- **Discretización.-** Dos de las tareas principales que tenemos que ser capaces de resolver mediante el análisis ingenieril son los principios físicos básicos que gobiernan el comportamiento de un sistema y trasladarlo a un modelo matemático

---

<sup>5</sup> Chandrupantla, Elemento Finito en Ingeniería, Capítulo 12, Editorial Prentice Hall, 1999.



que involucre ecuaciones que resuelvan adecuadamente, el comportamiento Cuantitativo y Cualitativo del sistema.

Los Modelos Discretos son aproximaciones que corresponden a modelos continuos, es decir: El proceso de convertir un modelo continuo dentro de modelos discretos se denomina **discretización**.

Cuando una región compleja es definida como un continuo, y se discretiza dentro de sub-formas geométricas, las cuales han sido previamente seleccionadas, esto permite la elección de puntos que se pueden definir de manera ordenada; A estos puntos se les llaman **NODOS**, los cuales constituyen las mallas del elemento, y son la parte principal de nuestro sistema o continuo en análisis, ya que ellos nos van a determinar el número de uniones, el tamaño de nuestra ecuación, los desplazamientos nodales, las fuerzas, etc, y la exactitud de nuestro análisis, es decir, entre más nodos se analicen, más exacto es nuestro resultado, y más complejo e iterativo se vuelve.

Los Nodos frecuentemente se eligen de manera que su distancia sea equitativa, facilitando su cálculo.

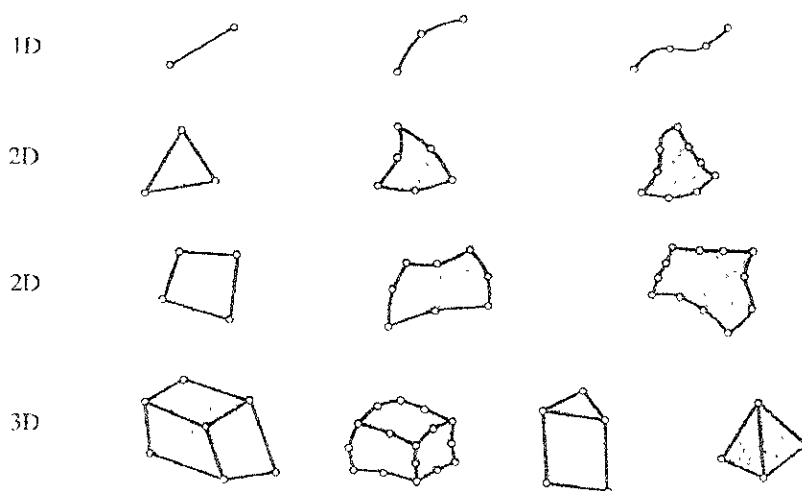


Figura 4. Geometrias típicas de Elemento Finito desde 1D hasta 3D

Como se puede observar en la figura, tenemos diferentes configuraciones desde líneas rectas, curvas, triángulos rectos, curvos, hasta formas



tridimensionales, y en sí las formas que el diseñador crea que son convenientes para el análisis que valla a realizar, esto obviamente depende de la forma de la pieza que se valla a analizar, y también del grado de precisión que se requiera, aunado con el nivel de dimensionamiento en que se trabaje.

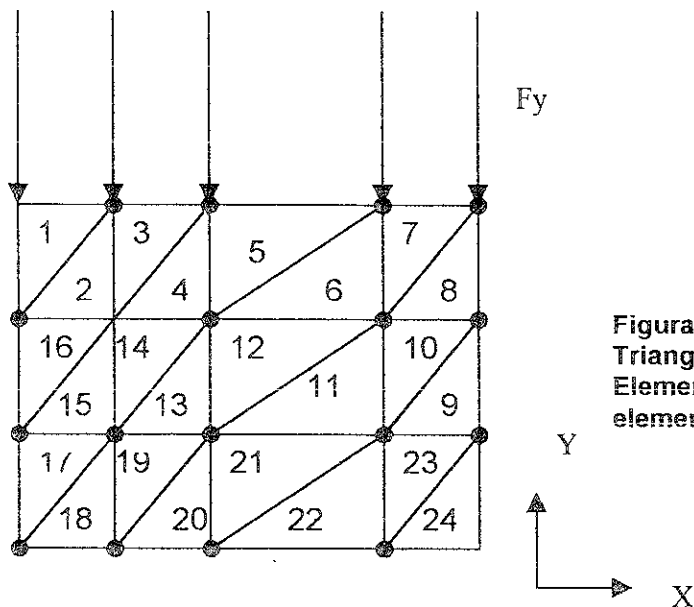


Figura 5. Elemento Triangular con 24 Elementos, y 3 Nodos por elemento,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$

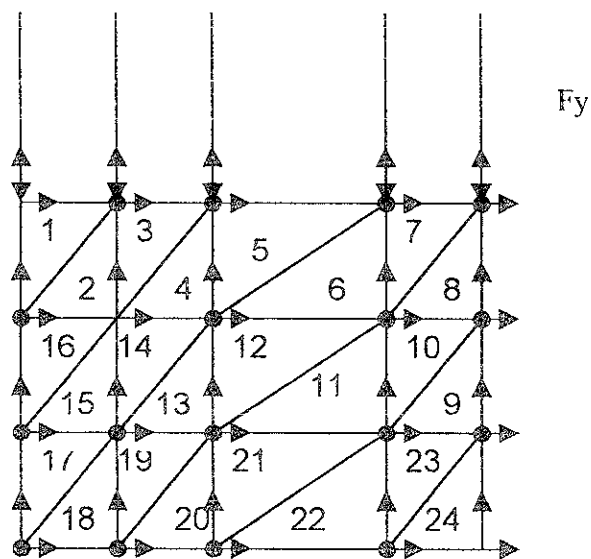


Figura 6. Elemento Triangular con 24 Elementos, y la representación de los desplazamientos en cada nodo





**ETAPA 2.-** El Procesamiento implica la generación y la modificación de la rigidez, así como las condiciones de frontera que resultan en la evaluación de las variables nodales, lo cual puede resumirse en la formulación, restricciones del problema y solución.

**2.- Formulación Elemental y Ensamble.-** La formulación elemental es la parte del proceso que transfiere la física básica contenida en las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera dentro de las matrices elementales de rigidez y de carga.

$$\begin{pmatrix} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \end{pmatrix}$$

Ecuación 1. F es una componente matricial de  $n \times n$ , de acuerdo a la matriz de rigidez K del material y de acuerdo a los desplazamientos (q) en x,y o z.

El ensamble de nuestra matriz de rigidez, así como nuestros vectores de desplazamiento y de fuerzas, están determinados por el número de nodos, y de la dimensión en la cuál estemos trabajando; obviamente hacer un análisis en 3 dimensiones es mucho más complejo que un análisis en una dimensión.

El ensamble consiste en posicionar las matrices locales de cada elemento en lugar apropiado dentro de la matriz global.

Esto matemáticamente está gobernado por 2 reglas de la mecánica estructural.

a.- **Compatibilidad de Deformaciones:** Los desplazamientos nodales de todos los elementos juntos en un nodo son los mismos.

b.- **Equilibrio de Fuerzas.-** La sumatoria de fuerzas ejercidas por todos los miembros que se unen o juntan en un nodo, balancean a la fuerza externa aplicada a ese nodo.

**3.- Restricciones.-** Las Condiciones de frontera (Boundary Conditions), permiten que el modelo sea resuelto, a través de una serie de restricciones planteadas en



nuestro análisis, ya sean impuestas por la naturaleza misma del sistema o, sean propuestas como una alternativa subjetiva de solución.

Esto quiere decir que podemos conocer algunas fuerzas y desplazamientos en alguno de los nodos que estamos estudiando. Para el caso donde las condiciones de frontera y las matrices de  $n+1$  por  $n+1$ , para la ecuación generalizada de la ley de Hooke  $F=Kx$ , se resuelven los valores nodales desconocidos (Ver ecuación 1).

4.- **Solución.**- involucra, la aplicación de las condiciones de frontera de los desplazamientos analizados y la solución para los desplazamientos nodales desconocidos dentro de una serie de ecuaciones, dada por la ecuación global de la matriz de rigideces. Estas ecuaciones que han sido modificadas se someten a un "Solver" de "Ecuaciones Lineales", el cuál nos da los desplazamientos nodales desconocidos.

En esta etapa el investigador o ingeniero que este utilizando esta metodología debe ser bastante cuidadoso en la selección de la herramienta que le permita resolver su sistema, ya sea a través de un software (Problema Complejo) o a través de un Ordenador (Problema básico). Así mismo en la generación del código que le permita obtener la solución más aproximada a su problema.

Esto quiere decir, que al final nosotros vamos a resolver un sistema de ecuaciones de "n" grados de libertad, con una computadora y un programa especial, que nos va a dar la solución; Pero esta solución, o matriz global de resultados de fuerzas o desplazamientos, va a traer consigo un grado de error.

En el análisis por elemento finito, el proceso de reducir errores locales usando pequeños elementos que puedan aproximarse más y más a un punto de forma compleja es llamado "**Convergencia**". La Convergencia implica que después de haber obtenido nuestros resultados, y estos no son 100% confiables, va a ser necesario, realizar un mallado más denso de nuestro sistema y volver a resolver y plantear nuestro modelo matemático, con el fin de minimizar el error. Es aquí donde los métodos Numéricos juegan un papel importantísimo en la solución de cualquier FEM.



**ETAPA 3.-** El Posprocesamiento trata de la presentación de resultados. En general, en esta etapa se calculan y muestran la configuración deformada, las formas modales, la temperatura y la distribución de esfuerzos. Un análisis completo por elemento finito es una iteración lógica de las tres etapas.

La preparación de los datos y su posprocesamiento necesitan de un esfuerzo considerable si todos los datos van a ser manejados manualmente.

Lo tedioso del manejo de los datos y la posibilidad de incurrir en errores al incrementarse el número de elementos son factores desalentadores para el analista de elemento finito.

#### 1.4 Fundamentos del FEM en 3D

En lo que respecta al método del elemento finito, se requieren solamente las especificaciones de ingeniería:

- Geometría de la pieza.
- Materiales.
- Cargas o fuerzas.
- Apoyos.
- seleccionar un modelo tipo

En este análisis, ya contamos con los 4 puntos anteriores, y la biela va a ser analizada como una columna larga, apoyada en los cojinetes del bulón y de la manivela del cigüeñal, con cargas aplicadas en estos.

Antes de continuar es necesario remarcar que la utilidad del elemento finito, tiene un rango de cero panacea y es función total de la modelación elegida.



La teoría de la elasticidad lineal es aplicada en el análisis de esfuerzos y deformaciones dentro de su rango elástico, y con 2 restricciones que nosotros también vamos a aplicar:

1. El material debe ser isotrópico y homogéneo, requiriéndose únicamente las constantes físicas del módulo elástico y la de poisson.
2. Las deformaciones deberán ser infinitesimales.

En la figura 7 se muestra un cuerpo tridimensional que ocupa un volumen  $V$  y tiene una superficie  $S$ . Los puntos en el cuerpo están identificados por las coordenadas  $x,y,z$ . La frontera del cuerpo se restringe a la región donde se especifica el desplazamiento. Sobre una parte de la frontera se aplica una fuerza distribuida por unidad de área  $T$ , llamada también tracción. Debido a la acción de la fuerza se deforma el cuerpo. La deformación en un punto  $x(=(x,y,z)^T)$  está dada por las tres componentes de su desplazamiento, mostradas en la ecuación 2.

$$U = \begin{bmatrix} u, v, w \end{bmatrix}^T \quad \text{Ecuación 2.}$$

Donde  $u,v,w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x,y,z$ , respectivamente.

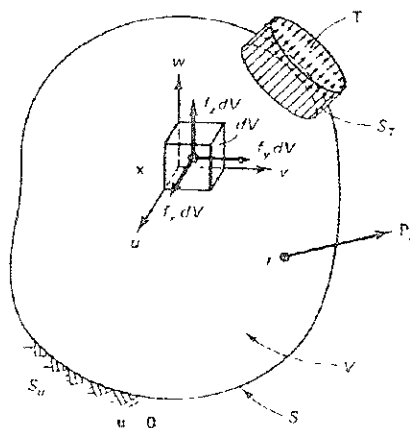


Figura 7



Los esfuerzos y las deformaciones unitarias están dados por las ecuaciones 3 y 4:

$$\sigma = \left[ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy} \right]^T \quad \text{Ecuación 3}$$

Los Tres primeros términos son los esfuerzos normales, mientras que los últimos son los esfuerzos cortantes

$$\varepsilon = \left[ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy} \right]^T \quad \text{Ecuación 4}$$

Al igual que en el anterior, los tres primeros términos son las deformaciones unitarias normales, y los tres restantes las deformaciones angulares unitarias cortantes.

La relación entre estas dos expresiones está dada por las propiedades del material, lo cuál también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\sigma = D^* \varepsilon \quad \text{Ecuación 5}$$

Donde D, es una matriz simétrica de (6 x 6) para materiales isotrópicos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{pmatrix}$$

Ecuación 6

Mientras que la relación entre la deformación unitaria, y el desplazamiento está dada por:



$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix}$$

**Ecuación 7**

Además de que debemos considerar los vectores de fuerza de cuerpo y tracción dados por:

$$F=(F_x,F_y,F_z), \text{ y } T=(T_x,T_y,T_z)^6$$

**Ecuación 8**

La Formulación del elemento finito en tres dimensiones es y sigue los mismos pasos que el planteamiento en dos dimensiones, sólo que aumentan el número de desplazamientos y con esto el número de fuerzas, reacciones, así como la matriz de rigidez.

A pesar de seguir los mismos lineamientos que el FEM en 2D, su manejo es más difícil, ya que al momento de programar o de realizar el planteamiento manual este se puede perder dentro de la percepción del diseñador, por lo cual se hace necesario en este caso utilizar algún paquete de software creado especialmente para este tipo de aplicaciones.

A continuación se mostrarán algunas de las ecuaciones que se requieren para el planteamiento y solución de un elemento tridimensional por elemento finito:

<sup>6</sup> Para mayor referencia pueden consultarse los anexos al final de esta investigación.

Considerando un elemento tetraedrico de cuatro nodos, en el cuál a cada nodo se le asigna un número con coordenadas x,y,z.

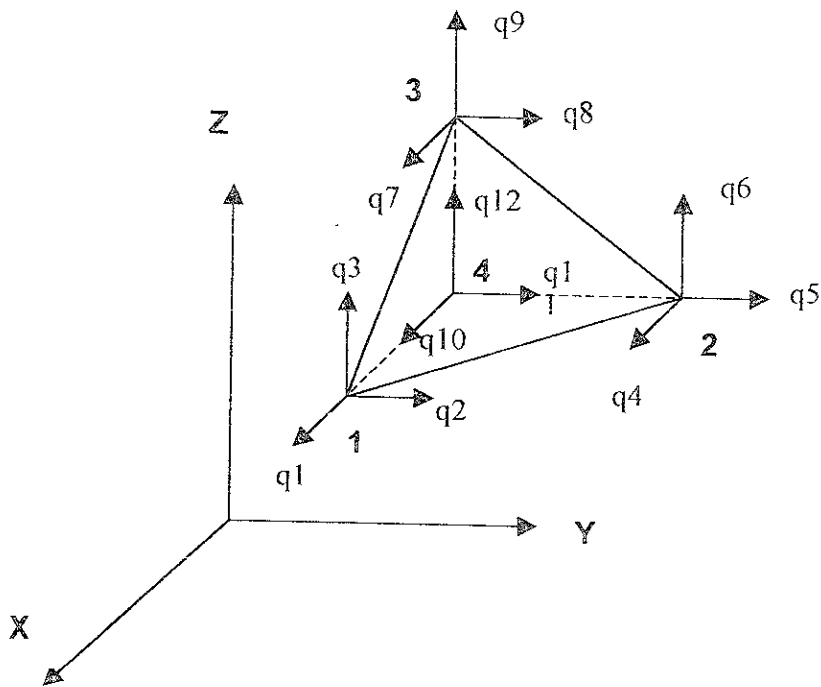


Figura 8

Realizando la Conectividad de elementos y Nodos, se puede expresar de la siguiente forma, cada elemento constitutivo del tetraedro de la figura 8, esta individualizado, con el fin de observar las conexiones nodales para un entendimiento más sencillo del problema en 3D.

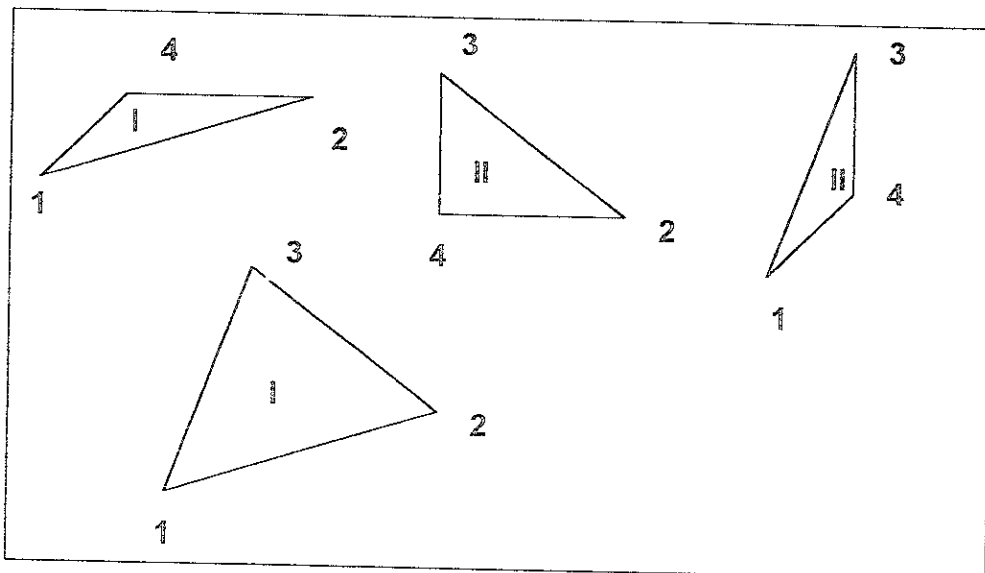


Figura 9



Tabla 1

CONECTIVIDAD		
Elemento No	Nodos	Descripción Nodal
I	1,2,4	I
II	2,3,4	J
III	1,3,4	K
IV	1,2,3	L

Por lo tanto, los vectores de desplazamiento del elemento de la figura 8 son:

$$q = \left[ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12} \right]^T \quad \text{Ecuación 9}$$

de donde deducimos que los grados de libertad por nodo son 3 (x,y,z).

Un Volumén finito está constituido por 4 elementos, el número total de nodos en el volumen finito es de 12 nodos. Por lo tanto, tenemos 4 desplazamientos en x, 4 desplazamientos en Y, y cuatro desplazamientos en Z.

Tabla 2

No Volúmenes	No Elementos	No Nodos	dX	dY	dZ
1	4	12	4	4	4
2	8	24	8	8	8
3	12	36	12	12	12
4	16	48	16	16	16
5	20	60	20	20	20

La tabla 2 nos indica que a mayor número de elementos , mayor es el número de nodos, y por lo tanto el sistema de ecuaciones se va incrementando exponencialmente.

Ahora debemos realizar la formulación del vector de desplazamientos del elemento u, para lo cuál tenemos que recurrir a la formulación isoparamétrica, en donde a partir de las funciones de forma del elemento podemos definir las coordenadas del mismo





Los desplazamientos  $u,v,w$  en  $X$  pueden escribirse en términos de los valores nodales desconocidos como:

$$u=Nq \dots\dots \text{Ecuación 10}$$

donde

$$N= \begin{pmatrix} N1 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 & N3 & 0 & 0 & N4 & 0 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 & N3 & 0 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & 0 & N1 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 & N3 & 0 & 0 & N4 \end{pmatrix}$$

Ecuación 11

Observamos que, al realizar la multiplicación matricial de  $N$  y  $q$ , esta se vuelve demasiado grande, por lo que, con el fin de reducir esta operación, realizamos una transformación entre las funciones de forma y las coordenadas  $x,y,z$ :

$$X=N1X1+N2X2+N3X3+N4X4 \dots\dots \text{Ecuación 12}$$

$$Y=N1Y1+N2Y2+N3Y3+N4Y4 \dots\dots \text{Ecuación 13}$$

$$Z=N1Z1+N2Z2+N3Z3+N4Z4 \dots\dots \text{Ecuación 14}$$

Donde  $N1=\xi$ ,  $N2=\eta$ ,  $N3=\zeta$ ,  $N4=1-\xi-\eta-\zeta$

Observando que  $u,v,w$  son funciones de:

$$u=u(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)) \dots\dots \text{Ecuación 15}$$

$$v=v(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)) \dots\dots \text{Ecuación 16}$$

$$w=w(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)) \dots\dots \text{Ecuación 17}$$

Y usando la regla de la cadena para derivadas parciales de  $u$ , tenemos:

$$\begin{pmatrix} \partial u / \partial \xi \\ \partial u / \partial \eta \\ \partial u / \partial \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi & \partial Z / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta & \partial Z / \partial \eta \\ \partial X / \partial \zeta & \partial Y / \partial \zeta & \partial Z / \partial \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial u / \partial X \\ \partial u / \partial Y \\ \partial u / \partial Z \end{pmatrix}$$

Ecuación 18



De aquí se observa que el primer término de la multiplicación matricial, es el Jacobiano, el cuál también se puede expresar como:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{14} & Y_{14} & Z_{14} \\ X_{24} & Y_{24} & Z_{24} \\ X_{34} & Y_{34} & Z_{34} \end{pmatrix}$$

**Ecuación 19**

Con esta expresión (Ecuación 19) podemos determinar el volumen del elemento, siempre y cuando el determinante de J sea constante:

$$V_e = 0.16 * |\det J| \dots\dots\dots \text{Ecuación 20}$$

Además del volúmen, es necesario conocer el área de una de las caras del elemento tridimensional mostrado anteriormente; esto fácilmente se aprecia si:

$$A = J^{-1} \dots\dots\dots \text{Ecuación 21}$$

Utilizando las relaciones deformación unitaria y desplazamientos, así como la relación para el volúmen del elemento (Expresión Matricial), y el campo supuesto de desplazamientos  $u = Nq$ , obtenemos:

$$\varepsilon = Bq \dots\dots\dots \text{Ecuación 22}$$

donde B es una matriz de (6 x 12), que nos relaciona a los desplazamientos nodales del elemento, con él área de cada una de las superficies que constituyen el volúmen.



$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\bar{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\bar{A}_3 & -\bar{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\bar{A}_3 & 0 & -\bar{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\bar{A}_2 & -\bar{A}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 23

Ahora lo que procede es la obtención de la matriz de rigidez del elemento,  $K_e$ .

$$K_e = V_e \cdot B^T \cdot D \cdot B \dots\dots\dots \text{Ecuación 24}$$

La fuerza de cuerpo del elemento, está dada por:

$$F_e = (V_e/4) \cdot \left[ F_x, F_y, F_z, F_x, F_y, F_z, F_x, F_y, F_z, F_x, F_y, F_z \right]^T \dots\dots\dots \text{Ecuación 25}$$

Debe notarse que,  $V_e F_x$ , es la componente X de la fuerza de cuerpo que se distribuye a los grados de libertad  $q_1, q_4, q_7$  y  $q_{10}$ .

$V_e F_y$ , es la componente Y de la fuerza que se distribuye a los grados de libertad,  $q_2, q_5, q_8, q_{11}$ .

Y,  $V_e F_z$ , es la componente Z de la fuerza de cuerpo que se distribuye a los grados de libertad,  $q_3, q_6, q_9$  y  $q_{12}$ .

Ya que se han obtenido las ecuaciones anteriores, se pueden obtener los desplazamientos  $q$  nodales del elemento.

Los esfuerzos del elemento están dados por:



$$\sigma = DBq \dots\dots\dots \text{Ecuación 26}$$

Los tres esfuerzos principales pueden calcularse usando las relaciones siguientes:

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau^2_{xy} - \tau^2_{yz} - \tau^2_{zx})\sigma - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau^2_{yz} - \sigma_{yy}\tau^2_{zx} - \sigma_{zz}\tau^2_{xy} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0 \dots\dots\dots \text{Ecuación 27}$$

al resolver esta ecuación, nos encontramos con 3 soluciones, que pueden ser iguales, diferentes entre sí, o dos de ellas ser iguales, pero diferentes a la tercera.

La ecuación cúbica anterior también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \dots\dots\dots \text{Ecuación 28}$$

Donde  $I_1, I_2, I_3$ , representan las invariables de esfuerzos.

Las raíces de la ecuación cúbica que representan los esfuerzos principales son características que dependen del estado de esfuerzos en el punto y no de la posición de los ejes coordenados.

Esto no sería posible si los coeficientes de la ecuación si variarían al cambiar los ejes, concluimos que necesariamente, también los coeficientes  $I_1, I_2, I_3$  son invariantes con respecto a tales cambios, es por eso que se llaman respectivamente primer, segundo, y tercer invariante de esfuerzos

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \dots\dots\dots \text{Ecuación 29}$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau^2_{xy} - \tau^2_{yz} - \tau^2_{zx} \dots\dots\dots \text{Ecuación 30}$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau^2_{yz} - \sigma_y\tau^2_{zx} - \sigma_z\tau^2_{xy} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \dots\dots\dots \text{Ecuación 31}$$



Esfuerzo de Von Mises.

Este se usa como criterio para determinar la aparición de una falla en materiales dúctiles. El criterio de falla establece que el esfuerzo de Von Mises debe ser menor que el esfuerzo de fluencia del material.

El esfuerzo de Von Mises  $\sigma_{VM}$  está dado por:

$$\sigma_{VM} = (I_1^2 - 3I_2)^{0.5} \dots \dots \dots \text{Ecuación 32}$$

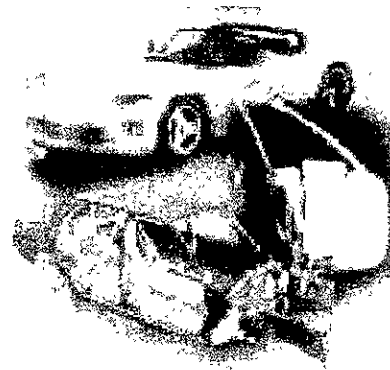
En el análisis tridimensional por elemento finito, en ocasiones es necesario recurrir a otro tipo de elementos de orden superior, dependiendo de la forma del objeto de estudio y de la precisión requerida.

Para resolver un problema, el primer paso es formular un modelo burdo. Los datos necesarios serán las coordenadas nodales, la conectividad nodal entre los elementos, las propiedades del material, las condiciones de restricción y las cargas nodales.

La consideración de las condiciones de frontera nos lleva a limitar el movimiento en un plano, de acuerdo a las necesidades del diseñador.

Esta parte del análisis es fundamental y de vital importancia para poder realizar un análisis tridimensional correcto.

En el capítulo 4, vamos a detallar el proceso de análisis de la Biela, por medio de Cosmos Works.



Capítulo 3

Análisis

Mecánico

Parte 1



# Capítulo 3

## Análisis Mecánico

	Contenido	
3.1	Introducción	40
3.2	Descripción de la Biela	41
3.3	Análisis de Falla	43
3.4	Análisis Cinemático	54
3.5	Análisis Cinetostático	68

### 3.1 Introducción

Los elementos principales del motor de combustión Interna, son los Pistones, pero estos, no serían tan importantes sin tener en cuenta el uso fundamental de las bielas (connecting rods), elementos mecánicos que unidos al pistón, y al cigüeñal permiten generar el movimiento, provocado como ya se mencionó en el capítulo 1, por una mezcla de gases y su respectiva ignición. Por lo tanto están sujetos a grandes esfuerzos en varias direcciones.

Estos esfuerzos pueden cambiar la estructura interna de la Biela, a través de esfuerzos de compresión y de tensión, y provocar una deformación en el material, esto implica que la biela debe ser lo bastante resistente para soportar los esfuerzos, y sin embargo debe ser lo más ligera posible, además de ser buen resistente a altas temperaturas y a efectos de vibración, ya que de lo contrario podemos disminuir su resistencia al pandeo y aumentar el peso del motor, con lo que se vería afectada la potencia del vehículo, así como el tamaño del mismo, por lo consiguiente el consumo de combustible, y los efectos al medio ambiente.



### 3.2 Descripción de la Biela

La biela tiene por misión transmitir la potencia generada por las fuerzas de gas sobre el pistón a través de las distancias del movimiento rectilíneo sufridas por el mismo y modificándose a movimientos angulares por la biela, la cuál transmite esta potencia al cigüeñal. No obstante la biela está sometida a otros esfuerzos mecánicos, y debe ser capaz de resistirlos sin deterioro ni deformación. Los esfuerzos que actúan sobre la biela son:

- Esfuerzos debidos a la Combustión de los gases.
- Esfuerzos de las fuerzas de Inercia Alternativas.
- Esfuerzos de las fuerzas Centrífugas.
- Esfuerzos de las Fuerzas de Inercia Angulares.

El Diseño de una biela debe centrarse en conseguir la máxima rigidez con la mínima masa, para de esta forma disminuir las fuerzas de inercia.

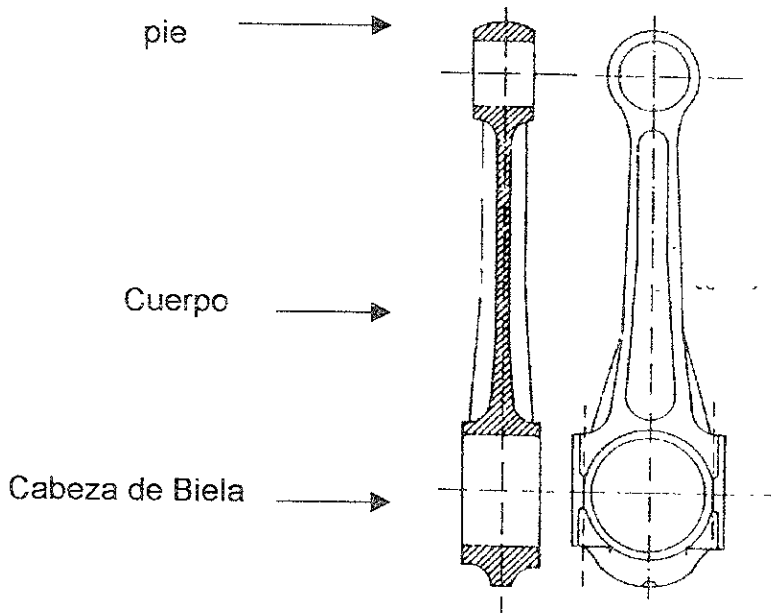
Al realizar el análisis del comportamiento mecánico de la biela, necesitamos conocer como está constituida y que partes la conforman, las cuales son las siguientes:

- Cabeza de Biela. Es la parte de la biela unida al cigüeñal.
- Pie de Biela. Es la parte de la biela unida al pistón a través del bulón.
- Cuerpo de la Biela, que une la cabeza y el pie.

Las dimensiones características de una biela son las siguientes:

- La distancia entre los ejes de cabeza y pie de Biela, que se conoce como longitud de la biela.
- El Diámetro del Pie.
- La Anchura y el espesor del Pie.
- El Diámetro, anchura y espesor de la Cabeza





**Figura 10**

Por razones muy obvias de espacio, no vamos a realizar una descripción detallada de los diferentes tipos de bielas existentes en el mercado, así también sólo mencionaremos que el proceso de fabricación es por Forja y en algunos casos por inyección.

Vale la pena mencionar que en la selección de bielas se requiere considerar los siguientes aspectos:

- Potencia
- Presión media
- Par
- Consumo



### 3.3 Análisis de Falla

Siempre que se diseña un elemento mecánico, es necesario que se satisfagan requisitos específicos de resistencia, deflexión y estabilidad. Algunos de ellos pueden someterse a cargas de compresión, y si estos elementos son largos y esbeltos la carga puede ser suficientemente grande como para provocar que se deflexionen lateralmente.

Para ser específicos, los miembros largos sujetos a una fuerza de compresión axial se llaman columnas, y la deflexión lateral que sufren se llama Pandeo. Con suma frecuencia el pandeo de una columna puede conducir a una repentina y dramática falla de una estructura o mecanismo y, por tanto, debe prestarse una especial atención al diseño de columnas, de modo que sean capaces de soportar sus cargas sin pandearse<sup>7</sup>

La Inestabilidad Elástica es aquella condición de falla en la que la forma de la columna no es lo suficiente rígida para mantenerla recta bajo la acción de carga. En el punto que se genera el pandeo, se genera en forma súbita una deflexión drástica del eje de la columna. En consecuencia, si la carga no se reduce, la columna se colapsará. Es evidente que este tipo de falla catastrófica debe evitarse en estructuras y elementos de maquinaria

Mott (referencia 7) explica el fenómeno del pandeo idealizando una estructura articulada en su extremo inferior y sustentada por su parte superior por medio de un resorte con rigidez  $b$ , Fig (11.a), esta barra esta soportando una fuerza  $F$  la cual se encuentra perfectamente alineada con el eje de la estructura, lo cuál no proporciona ninguna fuerza al resorte, el autor dice que si de alguna manera se logra rotar un pequeño ángulo a la estructura  $AB$  con respecto al punto "A", Fig(11.b). y si esta fuerza  $F$  es pequeña, es posible que el resorte pueda vencer la componente perpendicular de la fuerza y regrese a su estado original la estructura  $AB$ , lo cuál significa que el sistema es estable.

7. Mott, Robert, Diseño de Elementos de Maquinas, Capítulo 6, Segunda Edición.

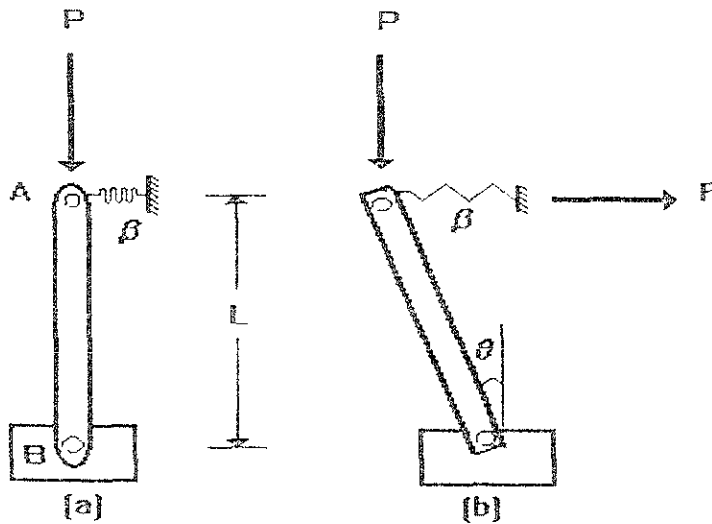


Figura 11

El otro caso es cuando la fuerza  $F$  es muy grande. Para esta ocasión el resorte no puede vencer la fuerza ortogonal y por lo tanto, el sistema no regresa a su estado original, entonces el sistema es inestable, lo cual es indeseable ya que la estructura  $AB$  se pandearía sin remedio.

Russell C Hibbeler en el libro de Mecánica de materiales, cita un caso extra, en el cual se equilibran las fuerzas reconstitutivas del resorte y la componente ortogonal de  $F$  consiguiendo de esta manera una estabilidad que no esta en función de los desplazamientos del ángulo por lo tanto será capaz de mantener su estabilidad para pequeños incrementos de la fuerza  $F$ . A esta carga se le conoce como “Carga Crítica” y expresa la fuerza en la cual inicia el pandeo y consecuentemente falla

Orthwein aplica la ley de Hooke para resortes, lo cual es una explicación matemática del comportamiento descrito anteriormente, dichos casos son los siguientes<sup>8</sup>:

<sup>8</sup> Orthwein, C, William, “Diseño de Componentes de Maquinas” Editorial CECSA



$$P < \frac{kL}{4} \text{ Equilibrio estable} \dots \dots \text{Ecuación 33}$$

Esta es una condición de equilibrio estable, puesto que la fuerza desarrollada por el resorte sería adecuada para llevar a las barras de nuevo a su posición vertical. K, es una constante que depende de la fijación de los extremos de la columna, y L, es la longitud real de la columna. El siguiente caso es:

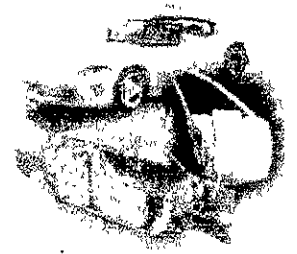
$$P > \frac{kL}{4} \text{ Equilibrio inestable} \dots \dots \text{Ecuación 34}$$

Entonces el mecanismo estaría en equilibrio inestable. En otras palabras si se aplica esta carga P, y se presenta un ligero desplazamiento de A, el mecanismo tenderá a desequilibrarse y a no recuperar su posición original.

El valor intermedio de P, definido de la igualación de la fuerza constitutiva del resorte y la componente perpendicular de P se conoce como "Carga Crítica", en este caso:

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \text{ Equilibrio neutro} \dots \dots \text{Ecuación 35}$$

Esta carga representa un caso del mecanismo en equilibrio neutro. Como  $P_{cr}$ , (Carga Crítica), es independiente del desplazamiento de las barras, cualquier perturbación ligera del mecanismo no lo hará perder el equilibrio, no lo llevará a su posición original, sino que las barras permanecerán en su posición deflexionada.



## Propiedades de la sección transversal de una columna.

La tendencia de una columna a pandearse depende de la forma y las dimensiones de su sección transversal, junto con su longitud y la manera en que se une a piezas o soportes adyacentes. Las propiedades de la sección transversal importantes son.

1. El área de la sección transversal.
2. El momento de Inercia de la sección transversal,  $I$ , con respecto al eje alrededor del cual es mínimo el valor de  $I$ .
3. El valor mínimo del radio de giro de la sección transversal,  $r$
4. El radio de giro se calcula a partir de,

$$R = (I/a)^{0.5} \quad \text{.....Ecuación 36}$$

Una columna tiende a pandearse alrededor del eje para el cual el radio de giro, al igual que el momento de inercia, son mínimos. En la figura siguiente se muestra un boceto de la columna que tiene una sección transversal rectangular. El eje esperado de pandeo es Y-Y porque tanto  $I$  como  $r$  son mucho más pequeños para ese eje que para el eje X-X.

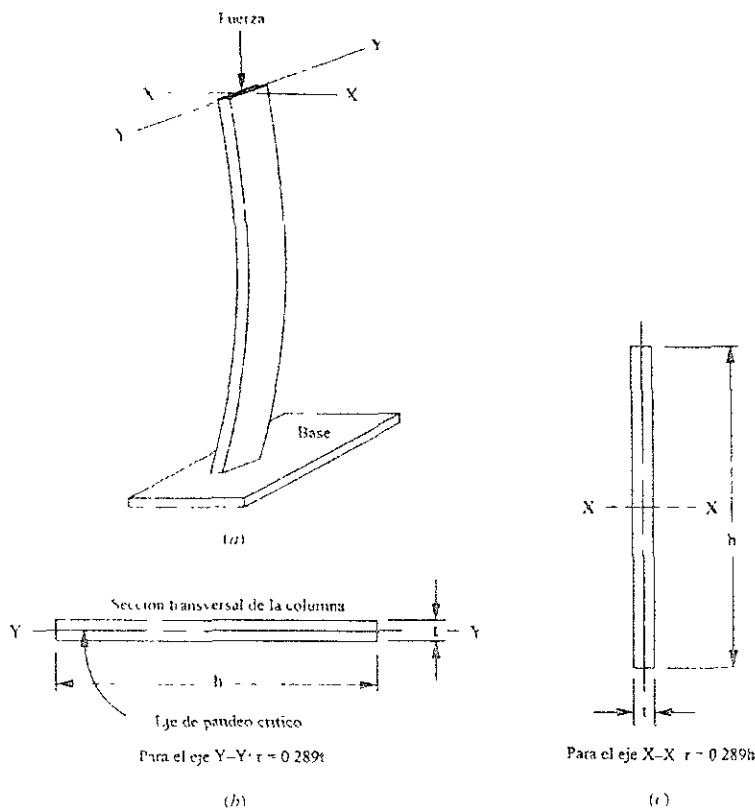


Figura 12



## Empotramiento o Fijación en un extremo y longitud efectiva.

El empotramiento indica la manera en que se apoyan los extremos de la columna. La variable más importante es la cantidad de sujeción que se presenta en los extremos de la columna en contra de la tendencia a girar. Las formas de sujeción en los extremos son atornillada, fija o libre.

Una columna con extremo atornillado se guía de manera que el extremo no pueda balancearse de un lado a otro, pero no ofrezca resistencia al giro del extremo.

Un extremo fijo es uno que se afianza en su soporte para que no gire.

El extremo libre puede visualizarse mediante el ejemplo de un mástil. El extremo superior de un mástil no está sujeto y carece de guía, este es el peor caso para carga en columnas.

La manera en que se apoyan o sustentan ambos extremos de la columna afecta la longitud efectiva de la columna, que se define como:

$$L_e = KL \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación 37}$$

Donde L es la longitud real de la columna entre los soportes y K es una constante que depende de la fijación de los extremos, como se ilustra en la figura 13:

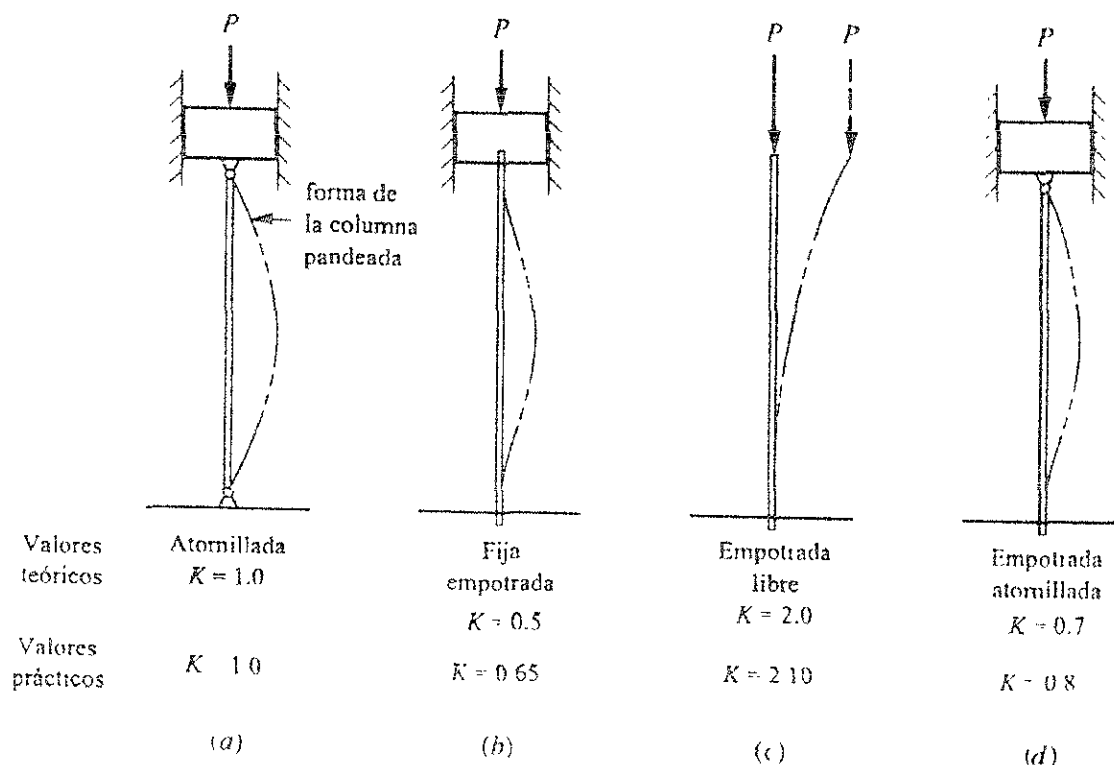


Figura 13



Los primeros valores que se proporcionan para K son valores teóricos con base en la forma de la columna en deflexión. Los valores a que se hace mención en segundo lugar consideran la fijación esperada de los extremos de la columna en estructuras reales, prácticas. Resulta en particular difícil lograr una columna real con los extremos fijos debido a la falta de rigidez completa en el soporte o los medios con que se une. Por tanto, es recomendable disponer de un valor máximo de K.

### Razón de Delgadez.

La razón de delgadez es la relación de la longitud efectiva de la columna con su radio de giro mínimo. Esto es,

$$\text{Razón de delgadez} = \frac{L_e}{r_{min}} = \frac{KL}{r_{min}} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación 38}$$

### Razón de Transición de Delgadez.

Este valor nos permitirá realizar una elección entre dos métodos que permiten analizar columnas rectas y delgadas que se cargan en el centro (Fórmula de Euler), y el método para analizar columnas cortas (Fórmula de Johnson). Que se define como:

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{S_y}} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación 39}$$

Donde E es el modulo de elasticidad del material y Sy es la resistencia a punto cedente del material.

Para saber que tipo de método emplear, se deben comparar los valores obtenidos en la relación de delgadez, con los de la constante de columna, los resultados deberán interpretarse de la siguiente manera:



$\frac{KL}{r_{min}} > C_c$  Columna Larga. Aplicar EULER. ....Ecuación 40

$\frac{KL}{r_{min}} < C_c$  Columna Corta. Aplicar JOHNSON .....Ecuación 41

El valor de la constante de columna o razón de transición, depende de las propiedades del material en cuanto a módulo de elasticidad (E) y resistencia a punto cedente (Sy). Las gráficas siguientes muestran los valores resultantes para acero, para el rango de resistencias a punto cedente que se espera respecto a cada material.

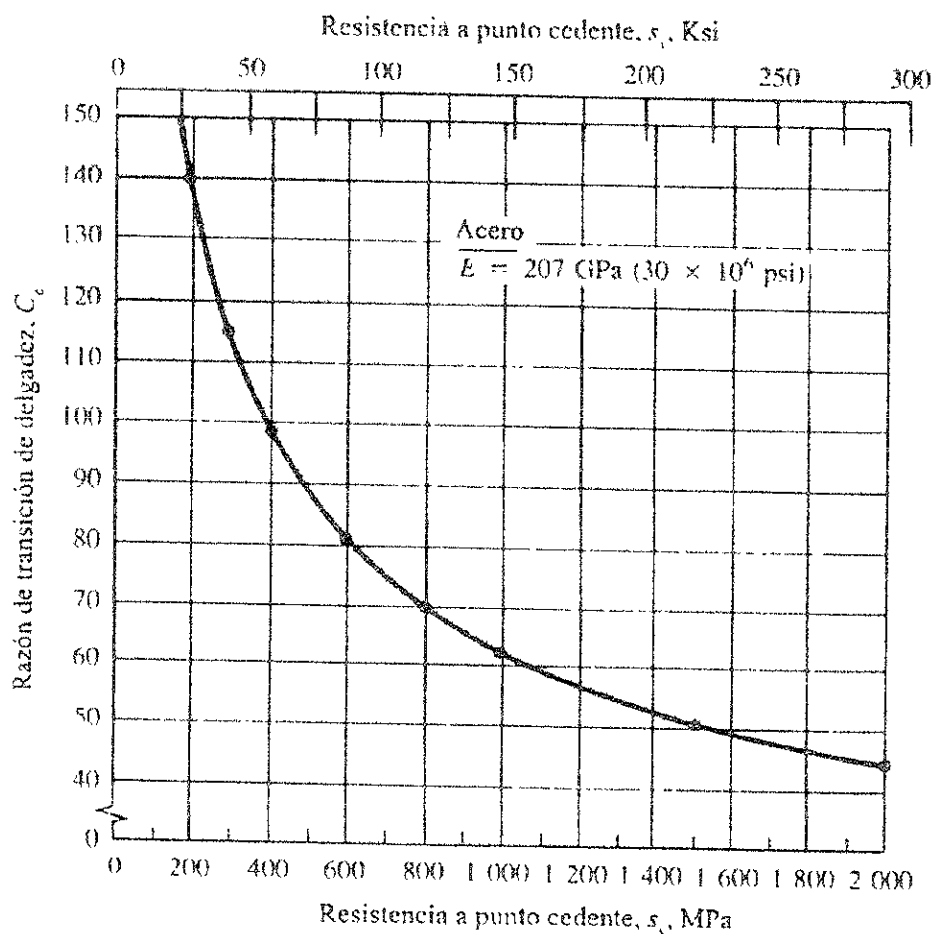


Figura 14. Razón de transición de delgadez  $C_c$  contra resistencia a punto cedente para acero.





El paso siguiente es determinar la carga crítica que soporta el material, considerando el tipo de columna más adecuado para este análisis, como se mencionó anteriormente, es preciso aclarar que este dato que obtengamos nos va a servir como referencia ya que aún falta determinar las cargas debidas a todas las componentes generadas por las fuerzas de gas.

#### Determinación del Tipo de Columna y Carga Crítica.

Para la determinación de la carga crítica necesitamos seguir los siguientes pasos:

1.-Especificar la columna y los empotramientos en los extremos.

De la figura 13 de la página 47, observamos los diversos tipos de fijación en los extremos que tienen las columnas, para nuestro caso, utilizaremos el empotramiento atornillado en los 2 extremos, figura 13.a, con valor de  $K=1$ .

2.-Calcular las longitudes efectivas.

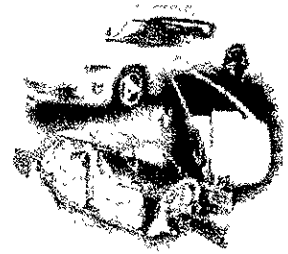
La Longitud efectiva de la biela está dada por la ecuación:

$Le=K*L$ ,<sup>9</sup> tenemos los siguientes datos.

Empotramientos	Atornillado
valor Real de K	1
Longitud de Biela	14.1 cm
Long.Efectiva de Biela(cm)= KL	14.1 cm

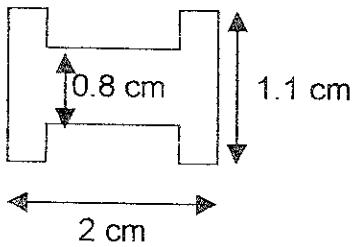
La longitud de la biela es tomada directamente de la pieza.

<sup>9</sup> Ecuación 37, ubicada en la página 47.



### 3. Cálculo del Radio de Giro.

El radio de giro debe calcularse alrededor del eje que da el valor menor



$$r = B / (12)^{0.5} \dots\dots\dots \text{Ecuación 42}$$

$$r = (I / A)^{0.5}$$

r = Radio de Giro (cm)

I = Momento de Inercia (cm<sup>4</sup>)

A = Área (cm<sup>2</sup>)

Sustituyendo:

$$I = 0.126 \text{ cm}^4$$

$$A = 0.89 \text{ cm}^2$$

Obtenemos el radio de giro :

$$r = 0.3766 \text{ cm}$$

Considerando que la sección transversal es Rectangular

### 4. Cálculo de la Razón de Delgadez.

Ahora necesitamos realizar una pequeña división de la longitud efectiva entre el radio de giro, para obtener la razón de delgadez

$$\text{Razón de delgadez} = \frac{L_e}{r_{min}} = \frac{KL}{r_{min}}$$

$$KL/r = (14.1 \text{ cm} / 0.37 \text{ cm}) = 37.44$$

Empotramientos	Atornillado
valor Real de K	1
Long.Efectiva de Biela(cm)	14.1 cm
Razón de Delgadez	37.44

### 5.- Especificación de Materiales.

Por recomendación del fabricante utilizaremos un AISI 1018 (Mahle Pistons).

Material	Clasificación	E (Gpa)	Sy (Mpa)	Densidad
Acero	AISI 1018	207	220	7850 Kg/m <sup>3</sup>



## 6. Cálculo de la Constante de Columna.

Para realizar este cálculo necesitamos usar la siguiente ecuación, mencionada anteriormente

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{S_y}}$$

E = Módulo de Elasticidad (Gpa)

Sy = Esfuerzo de Cedencia (Mpa)

Cc = Constante de Columna

A continuación mostramos los resultados obtenidos, para el Acero:

Material	Clasificación	E (Gpa)	Sy (Mpa)	Constante de Columna Cc
Acero	AISI 1018	207	220	136.2823828

## 7 Determinación del Tipo de Columna.

A continuación se muestran los valores de la constante de columna, contra la razón de delgadez, en la cuál podemos ver qué, para el acero, el análisis que va a proceder es por el método de Johnson, pero debido a comentarios de fabricantes el método adecuado para analizar la biela es por el método de Euler, esto por las variaciones de temperatura que provocan un cambio de longitud, con lo cual lo que pretendemos encontrar es la carga crítica y la carga permisible que puede soportar la biela

Material	Clasificación	Constante de Columna Cc	Razón de Delgadez
Acero	AISI 1018	136.2823828	Atornillado



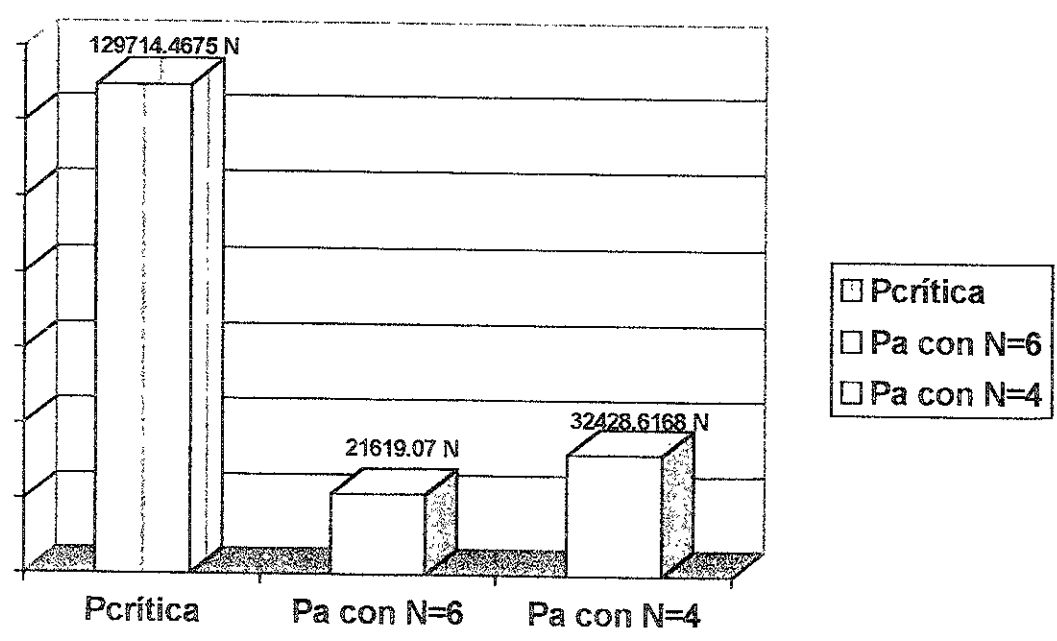
### 8.- Cálculo de la Carga Crítica y la Carga Permisible.

La fórmula utilizada para el cálculo de la carga crítica es la siguiente, de acuerdo a Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{(K \cdot L/r)^2} \dots\dots\dots \text{Ecuación 43}$$

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Material	Carga Crítica	Factor de Seguridad N	Carga Permisible Pa=Pcr/N con N=6	Carga Permisible Pa=Pcr/N con N=4
Acero	129714.4675 N	6 y 4	21619.07 N	32428.6168 N

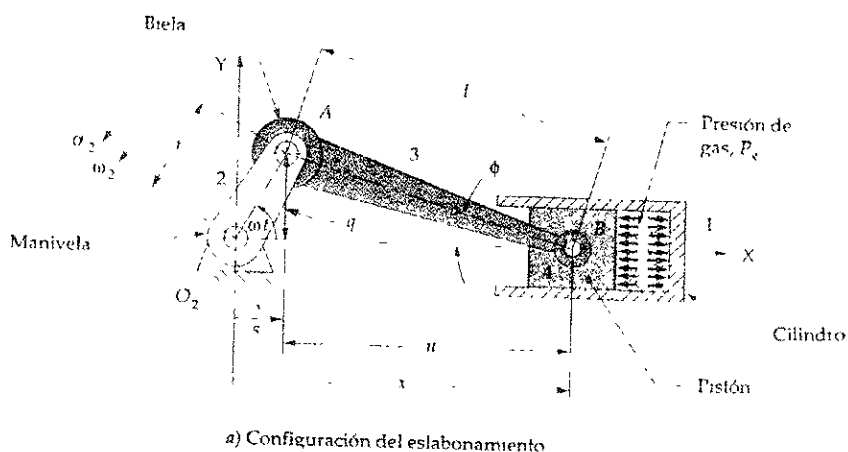


Los resultados obtenidos, son válidos para cargas críticas y permisibles de la biela de acuerdo a la forma y el tipo de material, en estado estático, ya que aún no realizamos el análisis cinemático, ni dinámico, en el cuál las fuerzas de compresión y expansión provocadas por la cámara de combustión dentro del cilindro, afectan significativamente la resistencia de la biela, que en este caso es el principal transmisor de movimiento



### 3.4 Análisis Cinemático.

De acuerdo a la teoría de Dinámica de Maquinaria<sup>10</sup>, y recordando el funcionamiento básico del motor de combustión interna descrito en el capítulo 1, tenemos que considerar los elementos matemáticos involucrados en la siguiente figura:



**Figura 15**

Donde:

R = radio de la Manivela

L = longitud de la Biela

U = ángulo de la Manivela

F = ángulo que forma la Biela con el eje X

V = velocidad angular constante de la manivela

U = Vt, para cualquier velocidad angular constante

X = posición instantánea del pistón.

De donde, las siguientes relaciones trigonométricas nos servirán de base para nuestro análisis:

<sup>10</sup> Norton, Robert., Diseño de Maquinaria, 1995, Capítulos 14 y 15, Mc Graw Hill

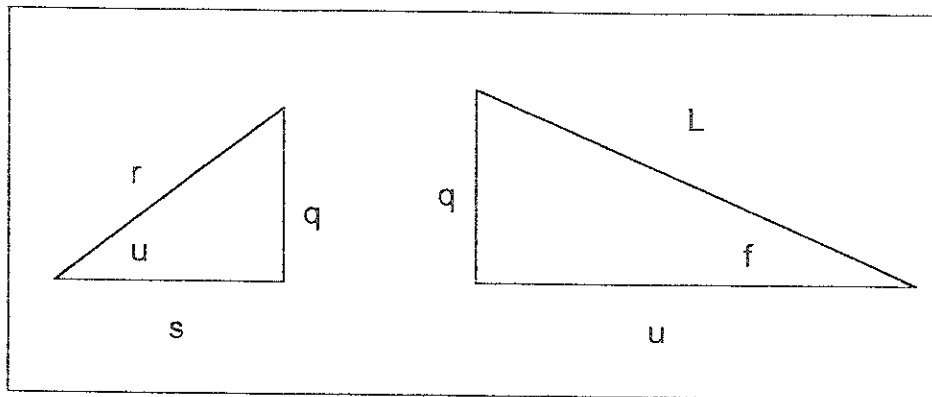
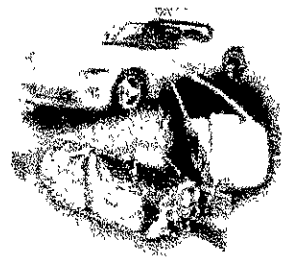


Figura 16

Donde:

$$q = r \cdot \text{Sen } u = L \cdot \text{Sen } f \dots\dots\dots \text{Ecuación 44}$$

$u = Vt$ , por lo tanto

$$\text{Sen } f = q/L = (r \cdot \text{Sen } u)/L = (r/L) \cdot \text{Sen } Vt \dots\dots\dots \text{Ecuación 45}$$

$$S = r \cdot \text{Cos } vt$$

$$U = L \cdot \text{Cos } f$$

$$X = S + U = r \cdot \text{Cos } vt + L \cdot \text{Cos } f$$

$$\text{Cos } f = \sqrt{1 - \text{Sen}^2 \phi} = \sqrt{1 - \left[ (r/L) \cdot \text{Sen } wt \right]^2} \dots\dots\dots \text{Ecuación 46}$$

En la expresión anterior  $\phi$ , es el ángulo de la Biela, y  $wt$ , la velocidad angular de la manivela, de lo cuál se desprende qué:

La ecuación para Obtener la posición del Pistón es la siguiente.

$$x \cong l - \frac{r^2}{4l} + r \left( \cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2 \omega t \right) \dots\dots\dots \text{Ecuación 47}$$

Donde X indica la posición del pistón, la razón  $r/l$ , se refiere a la relación manivela, biela, y  $w$ , es el ángulo de desplazamiento o carrera del pistón.



Si observamos la ecuación, ésta se encuentra en función de la velocidad angular de la manivela, y este es un dato que no conocemos, por lo que va a ser necesario replantear la expresión, de la siguiente manera:

La relación entre los desplazamientos lineales X del pistón y los angulares a de la manivela son:

$$X=r*(1-\text{Cos } a) + L*(1-\text{Cos } b) \text{ ----- (Ecuación 48.1)}$$

Expresando sólo en función de a, tenemos:

$$r*\text{Sen } a=L*\text{Sen } b$$

$$\text{Sen } b=(r*\text{Sen } a)/L$$

Haciendo  $L=r/L$ , tenemos:

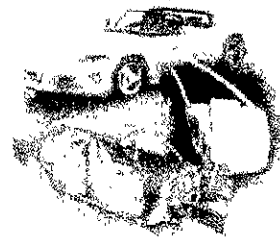
$$\text{Sen } b=L*\text{Sen } a \text{ ----- (Ecuación 48.2)}$$

Sustituyendo (48.2) en (48.1), obtenemos la expresión del desplazamiento del pistón, de acuerdo a la ecuación de posición

$$X=r*(1-\text{Cos } a)+L*\left(1-\sqrt{1-L^2*\text{Sen }^2 a}\right) \text{ ..... Ecuación 49}$$

La ecuación anterior es más fácil de calcular debido a que está en función del ángulo de la manivela, el cuál es un dato que se puede manipular desde cero hasta 360 grados.

Ahora, para proceder a utilizar está ecuación es necesario conocer una serie de datos:



Diámetro exterior del pistón  $\Phi = B$  (Bore)

Carrera=S (Stroke), desde el PMI hasta el PMI

$S=2*r$ , donde  $r$ = radio de la manivela

Desplazamiento volumétrico o Cilindrada=  $(\pi*B^2/4)*S$

Observación:

Si  $r/L \geq 1$  La manivela no da una revolución completa

Si  $r/L=0.5$  El ángulo sería muy pequeño y el eslabonamiento no opera bien

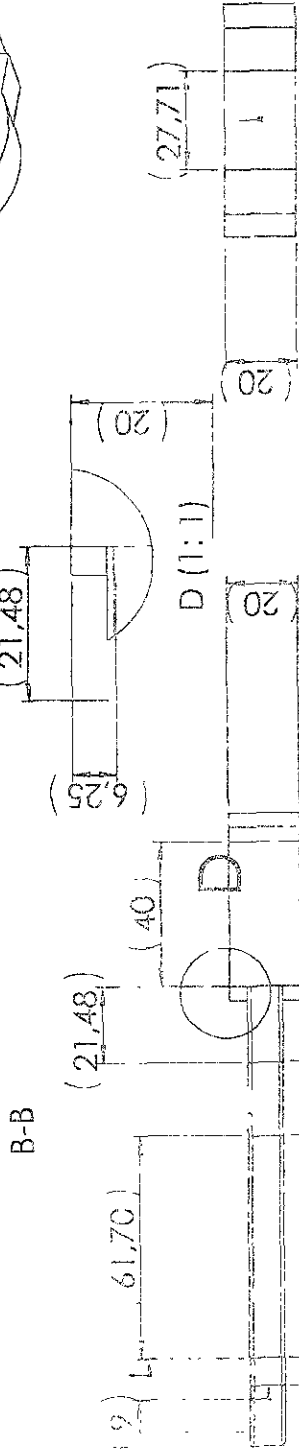
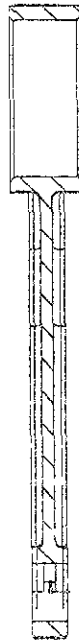
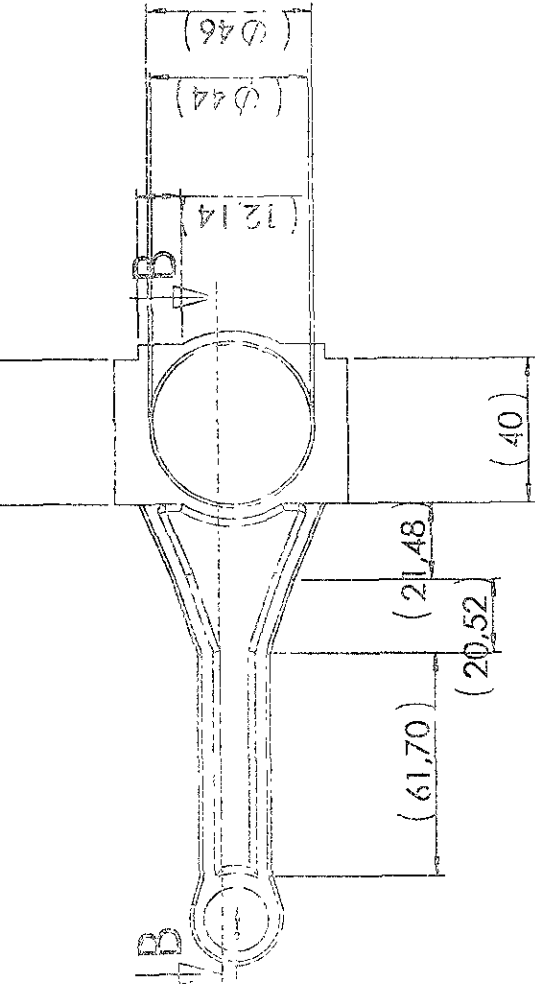
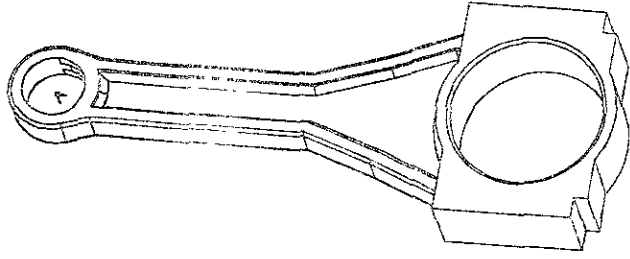
$(1/3) \leq r/L \leq (1/5)$  Operación regular

Teniendo en cuenta estas observaciones, se deduce que pueden existir 2 casos, en los cuales, en el primero tengamos un calibre grande, con una carrera pequeña, lo cuál va a implicar altas fuerzas de gas que afecten al perno, y en segundo caso, contar con una carrera grande, pero con un calibre pequeño, lo cuál nos induce altas fuerzas de inercia que también afecten al perno.

Nombre	Valor
Cilindrada	2Litros/4 Cilindros= $500 \text{ E}+03 \text{ mm}^3$
Bore	76 mm
Stroke	94 mm
Radio Manivela	47 mm
Longitud Biela	14.1 cm
B/S	0.808

Los datos arriba mencionados son necesarios para nuestro análisis cinemático, y se obtienen directamente de las dimensiones físicas del pistón, así como de la biela, y de las características propias del motor.





REV. NO.	PART OR IDENTIFYING NO. 1	OR DESCRIPTION	MATERIAL
		PARTS LIST	ACERO
UNLESS OTHERWISE SPECIFIED			
TOLERANCES ARE:		CAD GENERATED DRAWING. DO NOT MANUALLY UPDATE.	
FRACTIONS	DECIMALS	ANGLES	DATE
+XXX+XX+1	+XX+XX+1		7009/00
MATERIAL		REVISION	7503/00
ACERO		RESP. ENG.	
FINISH		MFG. ENG.	
SEMIFINO		QUALENG.	
DO NOT SCALE DRAWING			

NEXT ASSY	USED ON
APPLICATION	

20.71

Licencia educacional de SolidWorks  
Sólo para uso de instrucción

< CENTRO DE DISEÑO MECANICO CDM DEPT UNAM >	
< BIELA DE MOTOR DE C.1 >	
SILL. DWGS NO.	REV.
A	1
SCAFF	2
CAD RE	OF

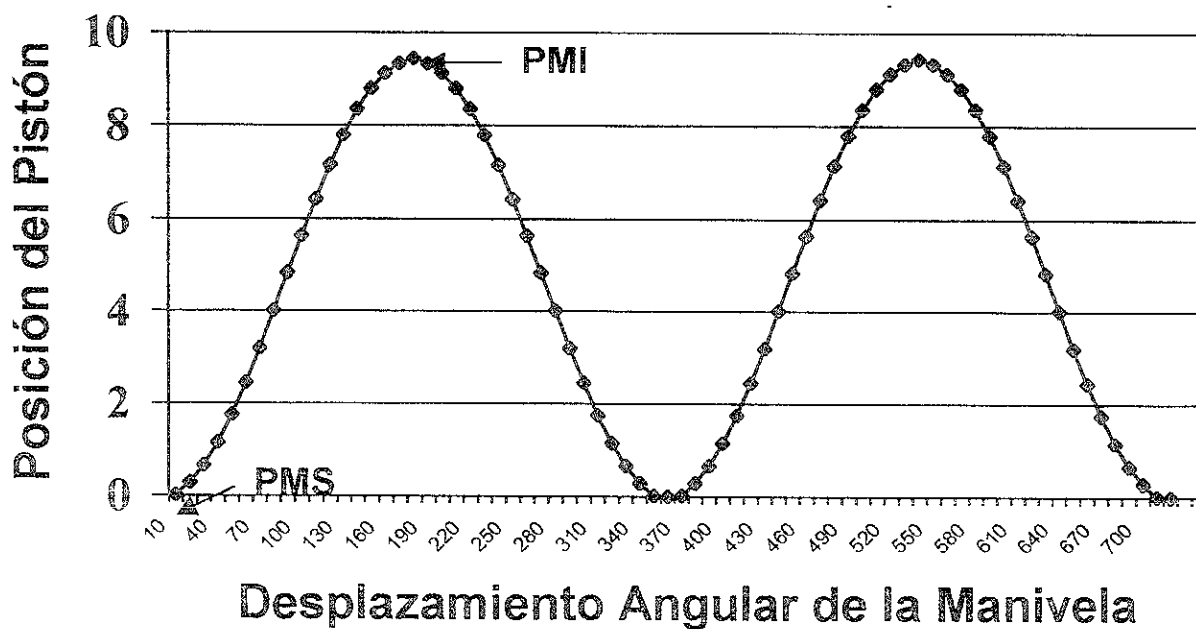


De acuerdo con las dimensiones del plano anterior, procedemos a realizar el cálculo de la posición del pistón, con respecto a la Manivela, y posteriormente realizaremos el cálculo para la posición de la Biela, que en este caso es el que nos interesa.

Manivela (°)	Pistón (cm)	Manivela (°)	Pistón (cm)	Manivela (°)	Pistón (cm)	Manivela (°)	Pistón (cm)
10	0.0075	100	5.65	190	9.33	280	4.02
20	0.29	110	6.43	200	9.13	290	3.21
30	0.66	120	7.155	210	8.8	300	2.45
40	1.15	130	7.8	220	8.35	310	1.76
50	1.76	140	8.35	230	7.8	320	1.15
60	2.45	150	8.8	240	7.155	330	0.66
70	3.21	160	9.1329	250	6.43	340	0.29
80	4.02	170	9.33	260	5.65	350	0.0075
90	4.84	180	9.44	270	4.84	360	0

Tabla 1. Desplazamiento angular de manivela y posición del pistón.

## Desplazamiento del Pistón



Grafica 1



El movimiento de la Biela es un movimiento bastante complejo que se compone de un movimiento de traslación y de otro de giro pendular alrededor del eje del bulón que la une al pistón.

De las relaciones angulares que se observan, podemos Definir la posición angular de la Biela para cada Desplazamiento angular de la manivela, y considerando Una velocidad angular constante en este caso, 6000 rpm

Teniendo en cuenta que  $\text{Sen } \beta = (r/L) \text{ Sen } \alpha$   
El desplazamiento angular de la Biela, será:

$$\beta = \text{arc Sen } ( (r/L) * \text{Sen } \alpha ) \dots\dots\dots \text{Ecuación 50}$$

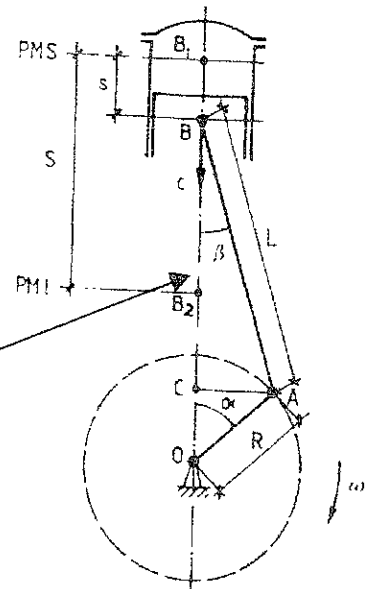


Figura 17

Para poder obtener la velocidad y aceleración angular de La Biela, es necesario realizar un desarrollo en series de Potencias de senos, para lo cuál

$$\beta = r/L \text{ Sen } \alpha + 1/6(r/L)^3 \text{ Sen}^3 \alpha + 3/40 (r/L)^5 \text{ Sen}^5 \alpha + \dots\dots$$

Y realizando transformaciones trigonométricas es posible desarrollar las potencias de la forma

$$\beta = b_1 * \text{Sen } \alpha + b_3 * \text{Sen} 3\alpha + b_5 * \text{Sen} 5\alpha + \dots\dots$$

En donde

$$b_1 = r/L + 1/8(r/L)^3 + 3/64(r/L)^5$$

$$b_3 = -(1/24)(r/L)^3 - (3/128)(r/L)^5 - \dots\dots$$

$$b_5 = 3/640(r/L)^5 + \dots\dots$$

Con lo cuál procedemos a mostrar los desplazamientos angulares de la Biela



Tabla de Desplazamiento angular de la Manivela y Desplazamiento angular de la Biela

Desplazamientos Angular Manivela (°)	Desplazamientos Angular Biela (°)	Coordenadas/Biela	
		X	Y
0	0	0	4.7
10	3.31	0.8161	4.62
20	6.54	1.607	4.41
30	9.59	2.35	4.07
40	12.37	3.02	3.6
50	14.79	3.6	3.02
60	16.77	4.07	2.35
70	18.25	4.41	1.607
80	19.163	4.62	0.816
90	19.47	4.7	0
100	19.163	4.62	0.816
110	18.25	4.41	1.607
120	16.77	4.07	2.35
130	14.79	3.6	3.02
140	12.37	3.02	3.6
150	9.59	2.35	4.07
160	6.54	1.607	4.41
170	3.31	0.8161	4.62
180	0	0	4.7
190	3.31	0.8161	4.62
200	6.54	1.607	4.41
210	9.59	2.35	4.07
220	12.37	3.02	3.6
230	14.79	3.6	3.02
240	16.77	4.07	2.35
250	18.25	4.41	1.607
260	19.163	4.62	0.816
270	19.47	4.7	0
280	19.163	4.62	0.816
290	18.25	4.41	1.607
300	16.77	4.07	2.35
310	14.79	3.6	3.02
320	12.37	3.02	3.6
330	9.59	2.35	4.07
340	6.54	1.607	4.41
350	3.31	0.8161	4.62
360	0	0	4.7

Tabla 2. determinación de la ubicación en X-Y de la Biela, para cada desplazamiento angular



De la ecuación de posición para el pistón obtenida en la ecuación 49 de la página 56, vamos a derivarla para poder obtener la ecuación de velocidad del pistón

$$X=r*(1-\text{Cos } a)+L*\left(1-\sqrt{1-L^2*\text{Sen }^2a}\right)$$

Tomando en cuenta que  $L=r/l$ , como sigue:

$$X=r*\left((1-\text{Cos } a)+(1/L)*\left(1-\sqrt{1-L^2*\text{Sen }^2a}\right)\right)$$

Aplicando la regla de la cadena<sup>11</sup>, obtenemos la derivada de la posición<sup>12</sup>:

$$V=(dx/da)*(da/dt)=r*\text{Sen } a*\left((1/L)*\left(\frac{L^2*2*\text{Sen } a * \text{Cos } a}{2 * \sqrt{1-L^2*\text{Sen }^2a}}\right)*w\right)$$

Donde  $w=da/dt$ , lo cuál es la velocidad angular del motor expresada en radianes por segundo.

Aprovechando el uso de las identidades trigonométricas, reducimos la ecuación anterior a lo siguiente:

$$V = w*r*(\text{Sen } a +L*\text{Sen } a*\text{Cos } a) \dots\dots\dots \text{Ecuación 51}$$

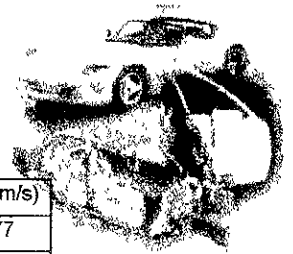
Empleando de nuevo identidades trigonométricas, tenemos:

$$V= w*r*(\text{Sen } a +(L/2)*\text{Sen } 2a ) \dots\dots\dots \text{Ecuación 52}$$

De donde la velocidad angular media es  $w=2*\pi*n/60$ , para el caso del análisis de velocidad consideraremos la velocidad del motor más alta, 6000 rpm.

<sup>11</sup> Stewart James. Cálculo, conceptos y contextos, capítulo 3, página 228, Editorial International Thomson, 1999.

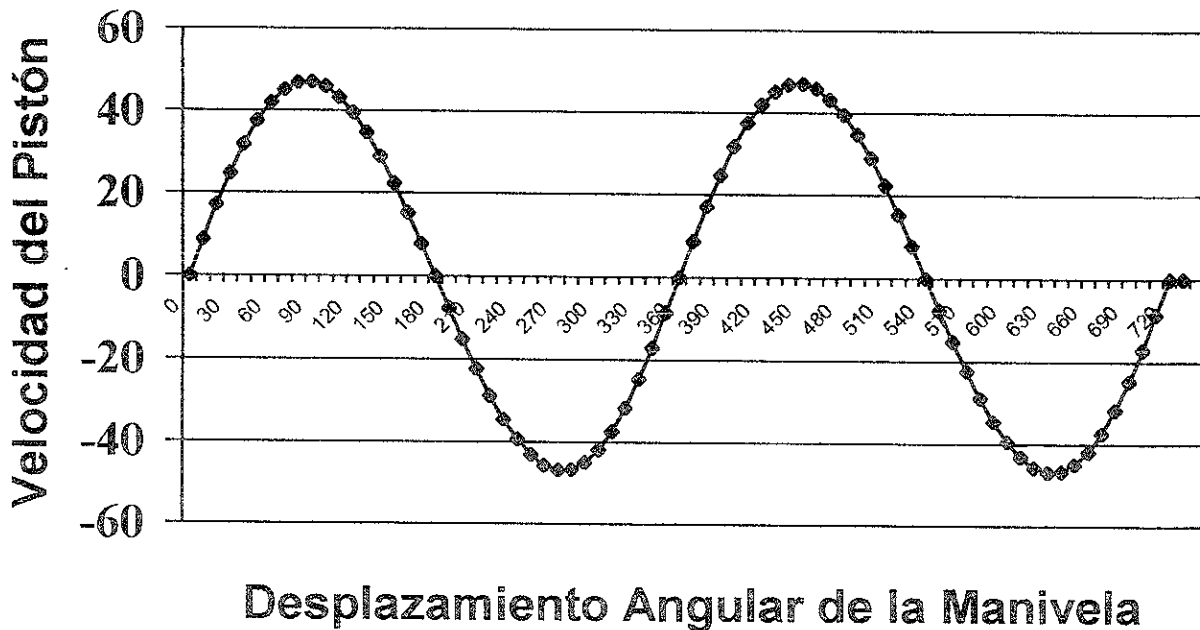
<sup>12</sup> Recuerde que  $dy/dx=(dy/du)*(du/dx)$ , siempre que  $du$  y  $dy$  sean diferenciables



Manivela (°)	Pistón (m/s)	Manivela (°)	Pistón (m/s)	Manivela (°)	Pistón (m/s)	Manivela (°)	Pistón (m/s)
10	8.6409	100	45.801	190	-7.6819	280	-46.77
20	16.97	110	43.256	200	-15.1729	290	-45.0745
30	24.716	120	39.4802	210	-22.28314	300	-41.9261
40	31.597	130	34.6156	220	-28.8249	310	-37.3925
50	37.3925	140	28.8249	230	-34.61564	320	-31.597
60	41.9261	150	22.28314	240	-39.4802	330	-24.71685
70	45.0745	160	15.17295	250	-43.2566	340	-16.976
80	46.77	170	7.6819	260	-45.80189	350	-8.64098
90	47	180	0	270	-47	360	0

Tabla 3. Velocidad del Pistón respecto al desplazamiento angular de manivela

## Velocidad del Pistón



Grafica 2



La velocidad media del pistón es un índice de las condiciones del funcionamiento del motor. Por cada vuelta de la manivela, el pistón recorre una distancia igual a dos veces la de la carrera; si  $n$  representa las revoluciones por minuto del motor, el valor de la velocidad media del pistón está dado por:

$$U = \text{Stroke} * n / (30,000) \dots\dots \dots \text{Ecuación 53}$$

Para $n=6000$ rpm	$U=18.8$ m/s
Para $n=3000$ rpm	$U=9.4$ m/s
Para $n=800$ rpm	$U=2.50$ m/s

Ahora procedemos a derivar la ecuación de velocidad, para obtener la ecuación de aceleración, la cuál es la siguiente:

$$a = V^2 * r * (\text{Cos } \omega t + (r/L) * \text{Cos} 2(\omega t)) \dots\dots\dots \text{Ecuación 54}$$

De donde:

$a$  = Aceleración

$v$  = Velocidad del motor, considerando, 6000 rpm, 3000 rpm, 800 rpm

$\omega t$  = Ángulo de la manivela, Variable, desde 0 hasta 720 grados

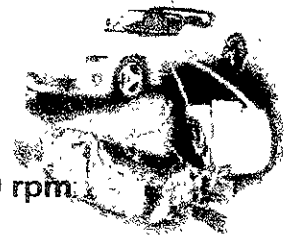
$r$  = Radio de la manivela, para este caso, su valor es de 4.7 cm

$L$  = Longitud de la Biela, su valor es de 14.1 cm

El dato de la aceleración, es uno de los más importantes, ya que nos va a permitir más adelante poder obtener las fuerzas del pistón, por eso es tan importante llegar a obtener sus resultados.

Los resultados de la aceleración se dan en  $\text{cm}/\text{min}^2$ , por lo que se realiza la conversión a  $\text{m}/\text{s}^2$

Los resultados se muestran a continuación.



**Tabla 4. Resultados de Aceleración para Velocidad del motor @ 6000 rpm**

Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )
0	36660						
10	35721.37	100	-12846.67	190	-19821.77	280	-3052.92
20	32980.06	110	-16125.704	200	-20018.59	290	3164.23
30	28651.91	120	-18330	210	-20191	300	9870
40	23071.51	130	-19595.67	220	-20133.38	310	16657.54
50	16657.54	140	-20133.38	230	-19595.67	320	23071.51
60	9870	150	-20191	240	-18330	330	28651.91
70	3164.23	160	-20018.59	250	-16125.704	340	32980.06
80	-3052.92	170	-19821.77	260	-12846.67	350	35721.37
90	-8460	180	-19740	270	-8460	360	36660

**Tabla 5. Resultados de Aceleración Para Velocidad del Motor @ 3000 rpm.**

Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )
0	9165						
10	8930.3425	100	-3211.6675	190	-4955.4425	280	-763.23
20	8245.015	110	-4031.426	200	-5004.6475	290	791.0575
30	7162.9775	120	-4582.5	210	-5047.75	300	2467.5
40	5767.8775	130	-4898.9175	220	-5033.345	310	4164.385
50	4164.385	140	-5033.345	230	-4898.9175	320	5767.8775
60	2467.5	150	-5047.75	240	-4582.5	330	7162.9775
70	791.0575	160	-5004.6475	250	-4031.426	340	8245.015
80	-763.23	170	-4955.4425	260	-3211.6675	350	8930.3425
90	-2115	180	-4935	270	-2115	360	9165

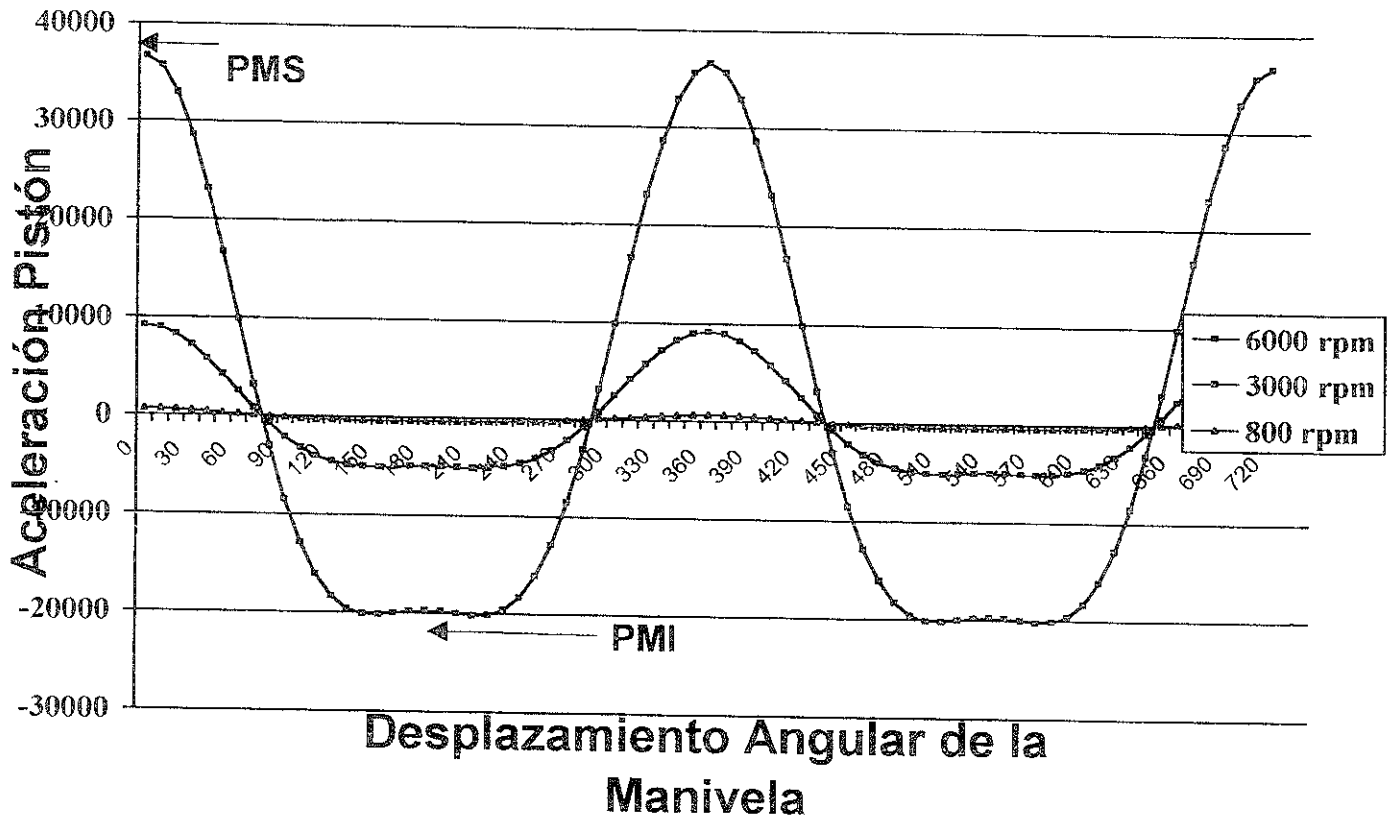
**Tabla 6. Resultados de Aceleración para Velocidad del Motor @ 800 rpm**

Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Manivela (°)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )
0	651.733						
10	635.0467	100	-228.385	190	-352.38	280	-54.27
20	586.312	110	-286.67	200	-355.88	290	56.253
30	509.3674	120	-325.86	210	-358.967	300	175.46
40	410.16	130	-348.36	220	-357.92	310	296.13
50	296.13	140	-357.92	230	-348.36	320	410.16
60	175.46	150	-358.967	240	-325.86	330	509.3674
70	56.253	160	-355.88	250	-286.67	340	586.312
80	-54.27	170	-352.38	260	-228.385	350	635.0467
90	-150.4	180	-350.93	270	-150.4	360	651.733



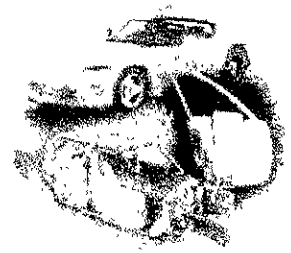


## Aceleración del Pistón



Como hemos observado anteriormente, la obtención de posición del pistón, su velocidad y aceleración a diferentes rangos de velocidad angular del motor, nos van a permitir realizar un análisis minucioso de las fuerzas ejercidas en cada elemento, principalmente, biela y pistón.

El Análisis utilizado, se basa en los casos especiales de No corrimiento de Eslabonamiento. Así mismo, si se desea comparar con otros elementos de diferente tamaño, sólo es cuestión de manejar el cambio de variables.



### 3.5 Análisis Cinetostático

Se puede diferenciar entre dos subclases de problemas de dinámica, lo que depende de cuáles cantidades se conocen y cuáles se han de determinar. El “Problema Directo de la Dinámica” es aquél en el que se conoce todo acerca de las fuerzas y/o los momentos de fuerza que se ejercen sobre el sistema, y se desea determinar las aceleraciones, velocidades y desplazamientos que resultan de la aplicación de dichas fuerzas y momentos.

El otro caso, “Cinetostática”, es aquel en el cuál se conocen las aceleraciones, velocidades y desplazamientos (que se desean) que ha de experimentar un sistema, y se requiere evaluar las magnitudes y direcciones de las fuerzas y momentos de fuerza que son necesarios para producir los movimientos deseados, y los que resultan de tales entidades mecánicas.

En todas las maquinas reciprocantes la expansión de los gases dentro del cilindro actúan en la parte alta del pistón y además transmiten la fuerza hacia la biela y el cigüeñal.

El pistón debe ajustar perfectamente en el cilindro sobre un amplio rango de temperaturas, y al mismo tiempo operar bajo las más adversas condiciones. Debe tener una expectativa de vida razonable, lo cuál quiere decir que la tasa de desgaste debe ser extremadamente baja y además, la lubricación adecuada del cilindro es esencial <sup>13</sup>.

Con el fin de reducir las fuerzas de desbalanceo, tanto el pistón, como la biela deben ser lo más ligeras posibles, capaces de soportar la falla por flexión o fractura. La parte diametral más pequeña de la biela, (Ensamble con Manivela) debe permitir un buen movimiento sin generar ruido en él cojinete, mientras que el diámetro mayor de la biela (Ensamble con perno), debe ser lo suficientemente rígido para proveer un adecuado soporte a los cojinetes bajo todas las condiciones de carga.

El paso siguiente consiste en la obtención de fuerzas y momentos ejercidos en el pistón, y al cuál le provocan un nivel de aceleramiento, causado por la presión de los gases, la presión y fricción en las paredes del cilindro, aunado a fuerzas

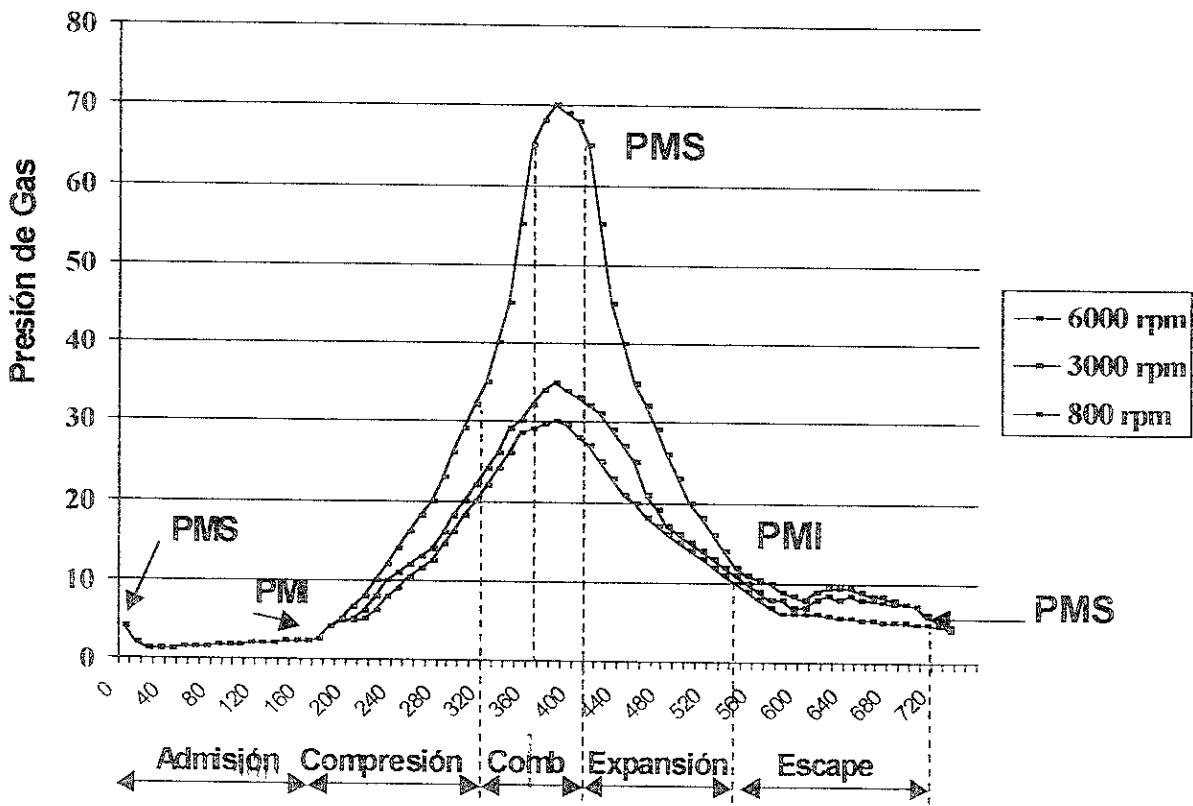
<sup>13</sup> [www.ricardosoftware.com](http://www.ricardosoftware.com)



térmicas ocasionadas por el nivel de compresión, expansión y combustión. Habrá algunos datos que se ignorarán debido a la complejidad en su obtención, tal es el caso del efecto de fricción en las paredes del cilindro, así como en la falda del pistón.

Para obtener la presión de los gases que inciden en el pistón es necesario contar con los datos directos de las simulaciones realizadas en la cámara de combustión, por lo cuál fue necesario recurrir a pruebas de laboratorio con ayuda de un fabricante de pistones, ubicado en México, (Omitimos su nombre, por razones técnicas, y a solicitud de los mismos) , o en su caso recurrir a modelos matemáticos por medio del teorema de Green.

## Presión de Gas en el Pistón



Gráfica 4. Desplazamiento Angular de la Manivela



## Cálculo de las Fuerzas de Gas

Para Obtener la Fuerza de Gas, es necesario contar con los valores de la presión del gas y el área del pistón:

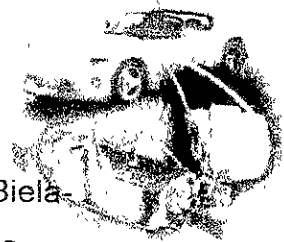
**Tabla 7. Resultados de Fuerza de Gas para diferentes regimenes de motor**

6000 RPM			3000 RPM			800 rpm		
° Manivela	P Gas	F Gas	° Manivela	P Gas	F Gas	° Manivela	P Gas	F Gas
°	Bars	Newtons	°	Bars	Newtons	°	Bars	Newtons
0	4.1	2437.04	0	4.1	2437.04	0	4.1	2437.04
10	2	1188.8	10	2	1188.8	10	2	1188.8
20	1.16	689.504	20	1.16	689.504	20	1.16	689.504
30	1.25	743	30	1.25	743	30	1.25	743
40	1.33	790.552	40	1.33	790.552	40	1.33	790.552
50	1.42	844.048	50	1.42	844.048	50	1.42	844.048
60	1.51	897.544	60	1.51	897.544	60	1.51	897.544
70	1.6	951.04	70	1.6	951.04	70	1.6	951.04
80	1.69	1004.536	80	1.69	1004.536	80	1.69	1004.536
90	1.77	1052.088	90	1.77	1052.088	90	1.77	1052.088
100	1.86	1105.584	100	1.86	1105.584	100	1.86	1105.584
110	1.95	1159.08	110	1.95	1159.08	110	1.95	1159.08
120	2.09	1242.296	120	2.09	1242.296	120	2.09	1242.296
130	2.13	1266.072	130	2.13	1266.072	130	2.13	1266.072
140	2.22	1319.568	140	2.22	1319.568	140	2.22	1319.568
150	2.3	1367.12	150	2.3	1367.12	150	2.3	1367.12
160	2.39	1420.616	160	2.39	1420.616	160	2.4	1426.56
170	2.47	1468.168	170	2.47	1468.168	170	2.5	1486
180	4	2377.6	180	4	2377.6	180	4	2377.6
190	5	2972	190	5	2972	190	4.9	2912.56
200	6.5	3863.6	200	5	2972	200	4.9	2912.56
210	8	4755.2	210	6	3566.4	210	5.2	3090.88
220	10	5944	220	8	4755.2	220	6	3566.4
230	12	7132.8	230	10	5944	230	8	4755.2
240	14	8321.6	240	11	6538.4	240	9	5349.6
250	16	9510.4	250	12	7132.8	250	10.5	6241.2
260	18	10699.2	260	13	7727.2	260	11.5	6835.6
270	20	11888	270	14	8321.6	270	12.5	7430
280	23	13671.2	280	16	9510.4	280	14.5	8618.8
290	26	15454.4	290	18	10699.2	290	16	9510.4
300	29	17237.6	300	20	11888	300	18	10699.2
310	32	19020.8	310	22	13076.8	310	20	11888
320	35	20804	320	24	14265.6	320	22	13076.8
330	40	23776	330	26	15454.4	330	24	14265.6
340	45	26748	340	29	17237.6	340	26	15454.4
350	55	32692	350	30	17832	350	28.5	16940.4



360	65	38636	360	32	19020.8	360	29	17237.6
370	68	40419.2	370	34	20209.6	370	29.5	17534.8
380	70	<b>41608</b>	380	35	<b>20804</b>	380	30	<b>17832</b>
390	69	41013.6	390	34	20209.6	390	29.5	17534.8
400	68	40419.2	400	33	19615.2	400	28	16643.2
410	65	38636	410	32	19020.8	410	27	16048.8
420	55	32692	420	31	18426.4	420	25	14860
430	45	26748	430	29	17237.6	430	23	13671.2
440	40	23776	440	27	16048.8	440	21	12482.4
450	35	20804	450	25	14860	450	20	11888
460	32	19020.8	460	21	12482.4	460	18	10699.2
470	29	17237.6	470	19	11293.6	470	17	10104.8
480	26	15454.4	480	17	10104.8	480	16	9510.4
490	23	13671.2	490	16	9510.4	490	15	8916
500	20	11888	500	15	8916	500	14	8321.6
510	18	10699.2	510	14	8321.6	510	13	7727.2
520	16	9510.4	520	13	7727.2	520	12	7132.8
530	14	8321.6	530	12	7132.8	530	11	6538.4
540	12	7132.8	540	11	6538.4	540	10	5944
550	11	6538.4	550	10	5944	550	9	5349.6
560	11	6538.4	560	9	5349.6	560	8	4755.2
570	10	5944	570	8	4755.2	570	7	4160.8
580	9	5349.6	580	8	4755.2	580	6	3566.4
590	8.5	5052.4	590	7	4160.8	590	6	3566.4
600	8	4755.2	600	7	4160.8	600	6	3566.4
610	9	5349.6	610	8	4755.2	610	6	3566.4
620	9.5	5646.8	620	8.5	5052.4	620	5.85	3477.24
630	9.5	5646.8	630	8	4755.2	630	5.65	3358.36
640	9.5	5646.8	640	8.5	5052.4	640	5.55	3298.92
650	9	5349.6	650	8	4755.2	650	5.4	3209.76
660	8.5	5052.4	660	8	4755.2	660	5.3	3150.32
670	8.5	5052.4	670	7.75	4606.6	670	5.2	3090.88
680	8	4755.2	680	7.5	4458	680	5.1	3031.44
690	7.5	4458	690	7.5	4458	690	5	2972
700	7.25	4309.4	700	7.15	4249.96	700	4.85	2882.84
710	6	3566.4	710	6	3566.4	710	4.75	2823.4
720	5.25	3120.6	720	5.25	3120.6	720	4.5	2674.8
730	4.1	2437.04	730	4.5	2674.8	730	4.5	2674.8

Estas fuerzas son el resultado de las fuerzas de gas que inciden directamente sobre el pistón en la cámara de combustión, las gráficas de fuerza de gas son muy parecidas a las de la presión de los gases, sólo cambia un factor multiplicativo, el área



La Fuerza total, que actúa sobre el eje del bulón del pie de Biela (Unión Biela - Pistón) en la dirección BO, es la suma algebraica de las fuerzas de inercia alternativas y de las fuerzas de presión de los gases.

Para poder realizar esto, será necesario considerar lo siguiente:

### Reducción de las Masas del Mecanismo.

En los motores que giran a elevado régimen, las fuerzas de inercia son, por mucho, las más importantes, superando a las de los gases, y a las de fricción. En general, las fuerzas de fricción se desprecian por ser comparativamente mucho más pequeñas que las otras.

El mecanismo Pistón – Biela - Manivela, es un mecanismo plano y puede reducirse a una serie de masas puntuales unidas entre sí por barras rígidas sin masa.

Distinguiendo entre tres tipos de masas:

- a) Masa de la Biela
- b) Masas con movimiento de Rotación.
- c) Masas con movimiento alternativo

Para poder reducir las masas es necesario considerar la equivalencia estática, y la equivalencia dinámica<sup>14</sup>.

Donde:

$M_T =$  Masa total de la Biela  $= \sum m_i$

El centro de gravedad de  $m_i$  debe coincidir con el de la pieza

$$\sum m_i r_i = 0 \qquad \sum m_i r_i^2 = I_g$$

donde  $r_i$  son las distancias de las masas al centro de gravedad, y

$I_g$  es el momento de inercia de la pieza real respecto al centro de gravedad

<sup>14</sup> Norton, Robert L., Diseño de Maquinaria, Capítulo 14, Mc Graw Hill, 1995

**a) Reducción de la Masa de la Biela**

$m_a + m_b + m_g = 0.785 \text{ Kg}$  ..... Ecuación 55.1

$m_a r_a - m_b (L - r_a) = 0$

donde  $r_a = 6.4 \text{ cm}$

y  $L = 14.1 \text{ cm}$ , por lo tanto:

$6.4 m_a - m_b (14.1 - 6.4) = 0$  ..... Ecuación 55.2

$6.4^2 m_a + m_b (14.1 - 6.4)^2 = I_{biela}$  .. Ecuación 55.3

despejando  $m_a$  y  $m_b$ , obtenemos

$m_a = I_{biela} / r_a L$  ..... Ecuación 56

$m_b = I_{biela} / (L^2 - r_a L)$  ..... Ecuación 57

Sustituyendo,  $I_{biela} = 3.868 \text{ E-03 Kg} \cdot \text{m}^2$ ,

respecto a su centro de gravedad.

Por lo tanto

$m_a = I_{biela} / r_a L = 428.687 \text{ E-03 Kg}$  ..... Ecuación 58

$m_b = I_{biela} / (L^2 - r_a L) = 356.312 \text{ E-03 Kg}$  ..... Ecuación 59

**b) Reducción de las Masas Giratorias**

Debe observarse que además de la masa puntual  $m_a$ , que pertenece a una parte de la masa de la biela, situada sobre el eje de la muñequilla del cigüeñal, existen las siguientes masas con movimiento giratorio.

- masa de los brazos
- masa de los Apoyos
- Masa de la muñequilla del cigüeñal

Y las reducimos a dos situadas en los apoyos, puntos o y A, respectivamente

Masa no equilibrada de Manivela = Masa biela en el origen + Masa biela en la unión biela-manivela ... Ec. 60

$m_{br} = m_{bro} + m_{bra}$

$m_{bro} = m_{bra} (R - r_o) / r_o$

$m_{bra} = m_a = 0.428 \text{ Kg}$

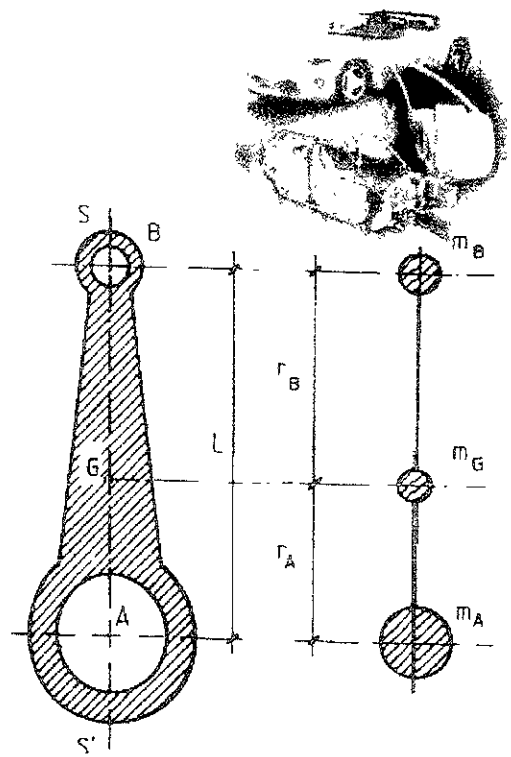


Figura 18

donde  $r_o=33\%$  de  $R$ , lo cuál implica que

$$r_o=1.55 \text{ cm} = 0.0155 \text{ m}$$

por lo tanto

$$m_{bro} = 0.428 \text{ Kg} * (0.047 \text{ m} - 0.0155 \text{ m}) / 0.0155 \text{ m}$$

$$m_{bro} = 0.869 \text{ Kg}$$

De esta manera:

$$m_{br} = 0.869 \text{ kg} + 0.428 \text{ kg} = 1.297 \text{ kg}$$

reduciendo

$$\text{Masa en el punto O} = m_{ro} = m_o + m_{bro} * 2$$

$$m_{ro} = m_o + 1.738$$

$$\text{Masas en el Punto A} = m_{ra} + 2m_{bra} + m_m$$

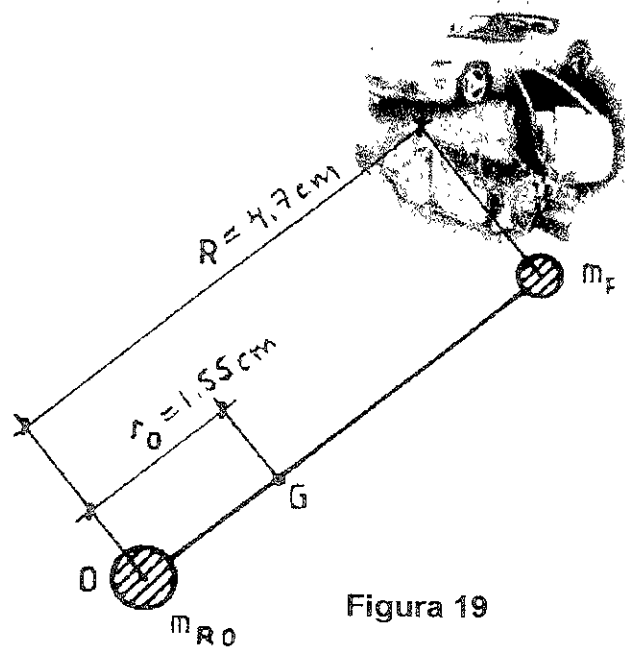


Figura 19

### c) Reducción de las masas con Movimiento Alternativo.

Consideramos la parte de masa de la biela reducida al punto B,  $m_B$ , y la masa del pistón  $m_p$ , incluyéndose en está última los segmentos, el bulón y los anillos.

El movimiento rotativo que pueda tener el bulón se desprecia ó también puede sumarse a la masa de la biela.

$$\text{Masas con movimiento alternativo} = m_{RB} = m_B + m_p \dots \dots \dots \text{Ecuación 61}$$

Estos son datos que ya conocemos, por lo tanto:

$$m_B = 0.356 \text{ Kg}$$

$$m_p = 1.3345 \text{ kg}$$

$$m_{RB} = 1.690 \text{ Kg}$$





## Fuerzas de Inercia.

Las fuerzas de Inercia son las que se generan a causa de la aceleración de las masas en movimiento.

- a) Fuerzas de Inercia de masas con movimiento giratorio.
- b) Fuerzas de Inercia de masas con movimiento rectilineo
- c) Fuerzas de Inercia de masas debido a la aceleración angular de la Biela.

### a) Fuerzas de Inercia de masas con movimiento giratorio.

Se debe a la aceleración centrípeta de las masas reducidas al punto A,  $m_{RA}$

$$F_c = m_{RA} \cdot R \cdot \omega^2 \dots \text{Ecuación 62}$$

$$m_{RA} = 0.428 \text{ kg}$$

$$R = 4.7 \text{ cm, longitud Manivela}$$

$$\omega = \text{rpm (rev por min)}$$

Para 6000 rpm:  $F_c = 201.16 \text{ N}$  constante

Para 3000 rpm:  $F_c = 50.29 \text{ N}$  constante

Para 800 rpm:  $F_c = 3.5761 \text{ N}$  constante

### b) Fuerzas de Inercia de masas con movimiento rectilineo

Se debe a la aceleración lineal que sufren las masas animadas de dicho movimiento al funcionar el motor.

$$F_a = -m_{RB} \cdot a_B, \text{ de donde, } m_{RB} = 1.690 \text{ kg, } a_B = \text{Aceleración del pistón.}$$

El signo menos indica que la fuerza es positiva cuando su sentido es hacia el cigüeñal y negativo en sentido contrario.

Se observa, que debemos realizar la sustitución en la fórmula anterior para la aceleración del pistón



**Tabla 8. Fuerzas de Inercia con movimiento alternativo @ 6000 rpm**

Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Fa (N)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Fa (N)	Pistón (m/s <sup>2</sup> )	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)
36660	61955.4						
35721.37	60369.1153	-12846.67	-21710.8723	-19821.77	-33498.7913	-3052.92	-5159.4348
32980.06	55736.3014	-16125.704	-27252.43976	-20018.59	-33831.4171	3164.23	5347.5487
28651.91	48421.7279	-18330	-30977.7	-20191	-34122.79	9870	16680.3
23071.51	38990.8519	-19595.67	-33116.6823	-20133.38	-34025.4122	16657.54	28151.2426
16657.54	28151.2426	-20133.38	-34025.4122	-19595.67	-33116.6823	23071.51	38990.8519
9870	16680.3	-20191	-34122.79	-18330	-30977.7	28651.91	48421.7279
3164.23	5347.5487	-20018.59	-33831.4171	-16125.704	-27252.43976	32980.06	55736.3014
-3052.92	-5159.4348	-19821.77	-33498.7913	-12846.67	-21710.8723	35721.37	60369.1153
-8460	-14297.4	-19740	-33360.6	-8460	-14297.4	36660	61955.4

**Tabla 9. Fuerzas de Inercia con movimiento alternativo @ 3000 rpm**

Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)
9165	15488.85						
8930.3425	15092.27883	-3211.6675	-5427.718075	-4955.4425	-8374.697825	-763.23	-1289.8587
8245.015	13934.07535	-4031.426	-6813.10994	-5004.6475	-8457.854275	791.0575	1336.887175
7162.9775	12105.43198	-4582.5	-7744.425	-5047.75	-8530.6975	2467.5	4170.075
5767.8775	9747.712975	-4898.9175	-8279.170675	-5033.345	-8506.35305	4164.385	7037.81065
4164.385	7037.81065	-5033.345	-8506.35305	-4898.9175	-8279.170675	5767.8775	9747.712975
2467.5	4170.075	-5047.75	-8530.6975	-4582.5	-7744.425	7162.9775	12105.43198
791.0575	1336.887175	-5004.6475	-8457.854275	-4031.426	-6813.10994	8245.015	13934.07535
-763.23	-1289.8587	-4955.4425	-8374.697825	-3211.6675	-5427.718075	8930.3425	15092.27883
-2115	-3574.35	-4935	-8340.15	-2115	-3574.35	9165	15488.85

**Tabla 10. Fuerzas de Inercia con movimiento alternativo @ 800 rpm**

Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)	Pistón (m/s)	Fa (N)
651.733	1101.42877						
635.0467	1073.228923	-228.385	-385.97065	-352.38	-595.5222	-54.27	-91.7163
586.312	990.86728	-286.67	-484.4723	-355.88	-601.4372	56.253	95.06757
509.3674	860.830906	-325.86	-550.7034	-358.967	-606.65423	175.46	296.5274
410.16	693.1704	-348.36	-588.7284	-357.92	-604.8848	296.13	500.4597
296.13	500.4597	-357.92	-604.8848	-348.36	-588.7284	410.16	693.1704
175.46	296.5274	-358.967	-606.65423	-325.86	-550.7034	509.3674	860.830906
56.253	95.06757	-355.88	-601.4372	-286.67	-484.4723	586.312	990.86728
-54.27	-91.7163	-352.38	-595.5222	-228.385	-385.97065	635.0467	1073.228923
-150.4	-254.176	-350.93	-593.0717	-150.4	-254.176	651.733	1101.42877



## Fuerza debido a la aceleración angular de la Biela.

De datos anteriores obtuvimos la posición angular de la biela<sup>15</sup>, para cualquier desplazamiento angular de la manivela, provocado por el cigüeñal, partiendo de que la  $dv/dt$ , es la aceleración, podemos considerar entonces, qué:

$$A_{\text{Biela}} = -\omega^2 (b_1 \text{Sen } \alpha + 9b_3 \text{Sen} 3\alpha + 25b_5 \text{Sen} 5\alpha)$$

Donde:

$$b_1 = (r/L) + (1/8) * (r/L)^3 + (3/64) * (r/L)^5$$

$$b_3 = -1/24 * (r/L)^3 - (3/128) * (r/L)^5$$

$$b_5 = 3/640 * (r/L)^5$$

Fórmulas para el desplazamiento angular de la biela

de estos valores sabemos que la relación manivela-Biela es igual a 0.3333, por lo tanto:

$$b_1 = 0.338155$$

$$b_3 = -1.6345 \text{ E-}03$$

$$b_5 = 19.19 \text{ E-}06$$

En la página siguiente observamos los valores de la aceleración angular para 6000, 3000, y 800 rpm

<sup>15</sup> Este dato se obtuvo de la página 62

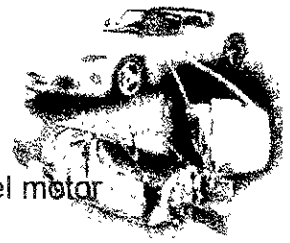
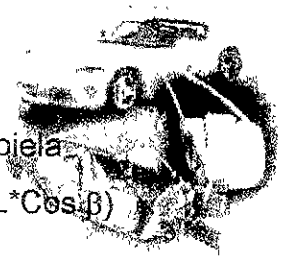


Tabla 11. Aceleración angular para diferentes regimenes de velocidad del motor

@6000 rpm		@3000 rpm		@800 rpm	
° Manivela	Aceleración Biela	° Manivela	Aceleración Biela	° Manivela	Aceleración Biela
°	°/s <sup>2</sup>	°	°/s <sup>2</sup>	°	°/s <sup>2</sup>
0	0	0	0	0	0
10	-517.32	10	-129.33	10	-9.19
20	-1033.88	20	-258.47	20	-18.38
30	-1546.06	30	-386.517	30	-27.48
40	-2044.58	40	-511.14	40	-36.34
50	-2512.35	50	-628.08	50	-44.66
60	-2924.35	60	-731.08	60	-51.98
70	-3250.33	70	-812.58	70	-57.78
80	-3460.65	80	-865.16	80	-61.52
90	-3533.45	90	-883.36	90	-62.81
100	-3460.65	100	-865.16	100	-61.52
110	-3250.33	110	-812.58	110	-57.78
120	-2924.35	120	-731.08	120	-51.98
130	-2512.35	130	-628.08	130	-44.66
140	-2044.58	140	-511.14	140	-36.34
150	-1546.06	150	-386.517	150	-27.48
160	-1033.88	160	-258.47	160	-18.38
170	-517.32	170	-129.33	170	-9.19
180	0	180	0	180	0
190	517.32	190	129.33	190	9.19
200	1033.88	200	258.47	200	18.38
210	1546.06	210	386.517	210	27.48
220	2044.58	220	511.14	220	36.34
230	2512.35	230	628.08	230	44.66
240	2924.35	240	731.08	240	51.98
250	3250.33	250	812.58	250	57.78
260	3460.65	260	865.16	260	61.52
270	3533.45	270	883.36	270	62.81
280	3460.65	280	865.16	280	61.52
290	3250.33	290	812.58	290	57.78
300	2924.35	300	731.08	300	51.98
310	2512.35	310	628.08	310	44.66
320	2044.58	320	511.14	320	36.34
330	1546.06	330	386.517	330	27.48
340	1033.88	340	258.47	340	18.38
350	517.32	350	129.33	350	9.19
360	0	360	0	360	0



De lo anterior calculamos la fuerza debido a la aceleración angular de la biela

$$f(m, a, l), a(L, \beta) \quad f=ma \quad \text{-----} \quad f=(I_{biela} * a_{biela})/a(L, \beta) \quad f=(I_{biela} * a_{biela})/(L * \cos \beta)$$

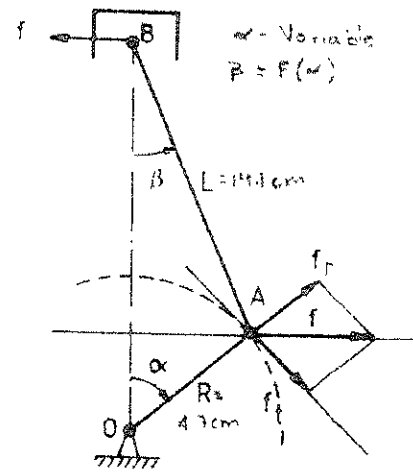
De la reducción de masas de la biela :  $m_a + m_b = m_{biela}$

$$I_{biela} = 0.003868 \text{ Kg} * \text{m}^2$$

$$f = (0.003868 \text{ kg} * \text{m}^2 * a_{biela}) / (0.141 \text{ m} * \cos \beta)$$

**Tabla 12. Fuerzas para cualquier desplazamiento angular de biela**

Desplazamientos		6000 rpm	3000 rpm	800 rpm
° Manivela	° Biela	Fuerza	Fuerza	Fuerza
		N	N	N
0	0	0	0	0
10	3.31	-14.21	-3.55	-0.2525
20	6.54	-28.54	-7.13	-0.507
30	9.59	-43.01	-10.75	-0.7645
40	12.37	-57.42	-14.35	-1.02
50	14.79	-71.28	-17.82	-1.267
60	16.77	-83.78	-20.94	-1.48
70	18.25	-93.88	-23.47	-1.669
80	19.163	-100.503	-25.12	-1.7866
90	19.47	-102.81	-25.702	-1.8217
100	19.163	-100.503	-25.12	-1.7866
110	18.15	-93.88	-23.47	-1.669
120	16.77	-83.78	-20.94	-1.48
130	14.79	-71.28	-17.82	-1.267
140	12.37	-57.42	-14.35	-1.02
150	9.59	-43.01	-10.75	-0.7645
160	6.54	-28.54	-7.13	-0.507
170	3.31	-14.21	-3.55	-0.2525
180	0	0	0	0
190	3.31	14.21	3.55	0.2525
200	6.54	28.54	7.13	0.507
210	9.59	43.01	10.75	0.7645
220	12.37	57.42	14.35	1.02
230	14.79	71.28	17.82	1.267
240	16.77	83.78	20.94	1.48
250	18.25	93.88	23.47	1.669
260	19.163	100.503	25.12	1.7866
270	19.47	102.81	25.702	1.8217
280	19.163	100.503	25.12	1.7866
290	18.25	93.88	23.47	1.669
300	16.77	83.78	20.94	1.48
310	14.79	71.28	17.82	1.267
320	12.37	57.42	14.35	1.02
330	9.59	43.01	10.75	0.7645
340	6.54	28.54	7.13	0.507
350	3.31	14.21	3.55	0.2525
360	0	0	0	0



**Figura 20**

DESARROLLO DE LA TERCERA LEY DE NEWTON  
 LA FUERZA QUE EJERCE UN CUERPO SOBRE OTRO  
 ES IGUAL EN MAGNITUD Y OPUESTA EN DIRECCION A LA FUERZA QUE EJERCE EL OTRO CUERPO SOBRE EL PRIMERO.



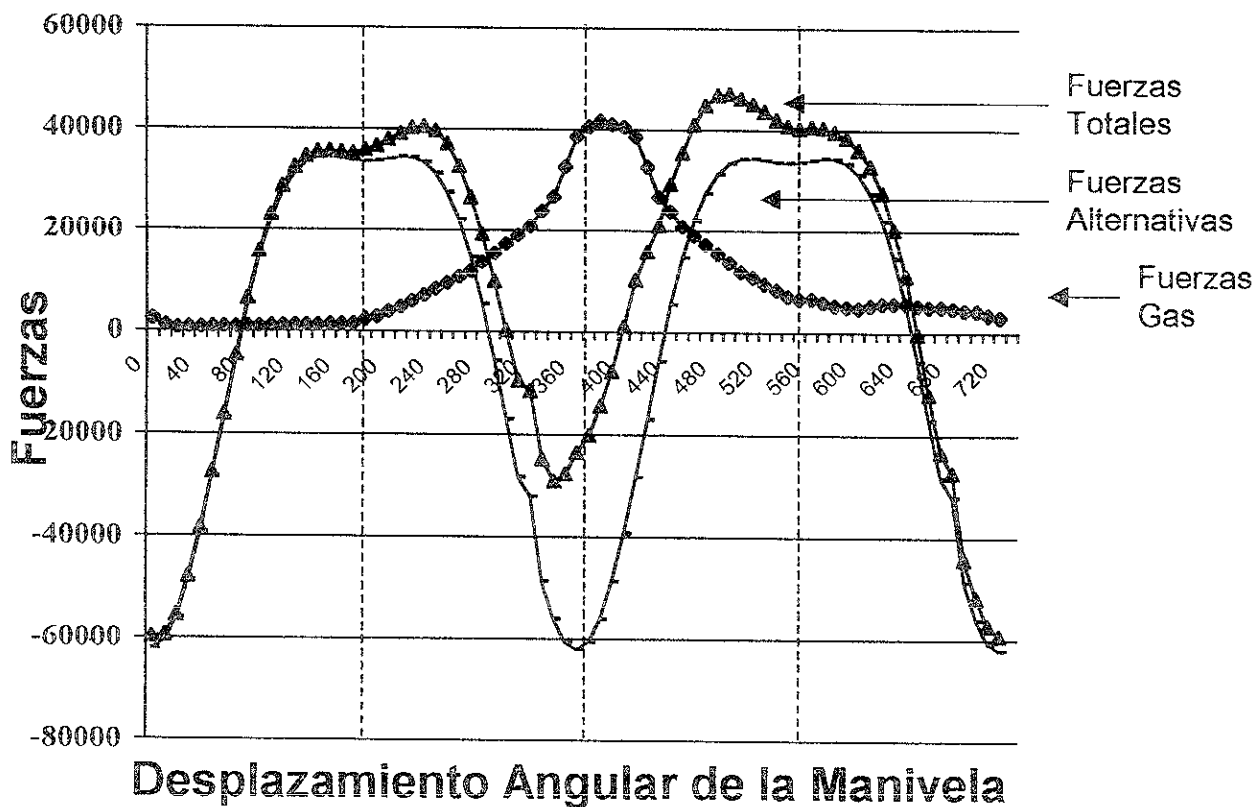
## Fuerzas Resultantes que actúan sobre el mecanismo Biela-Pistón.

Sobre el eje del bulón del pie de Biela, actúa una fuerza  $F$  en la dirección del pistón hacia el cigüeñal, que es la suma algebraica de las fuerzas de inercia alternativas y de la fuerza de presión de los gases

Matemáticamente lo podemos expresar como la suma de las matrices siguientes:

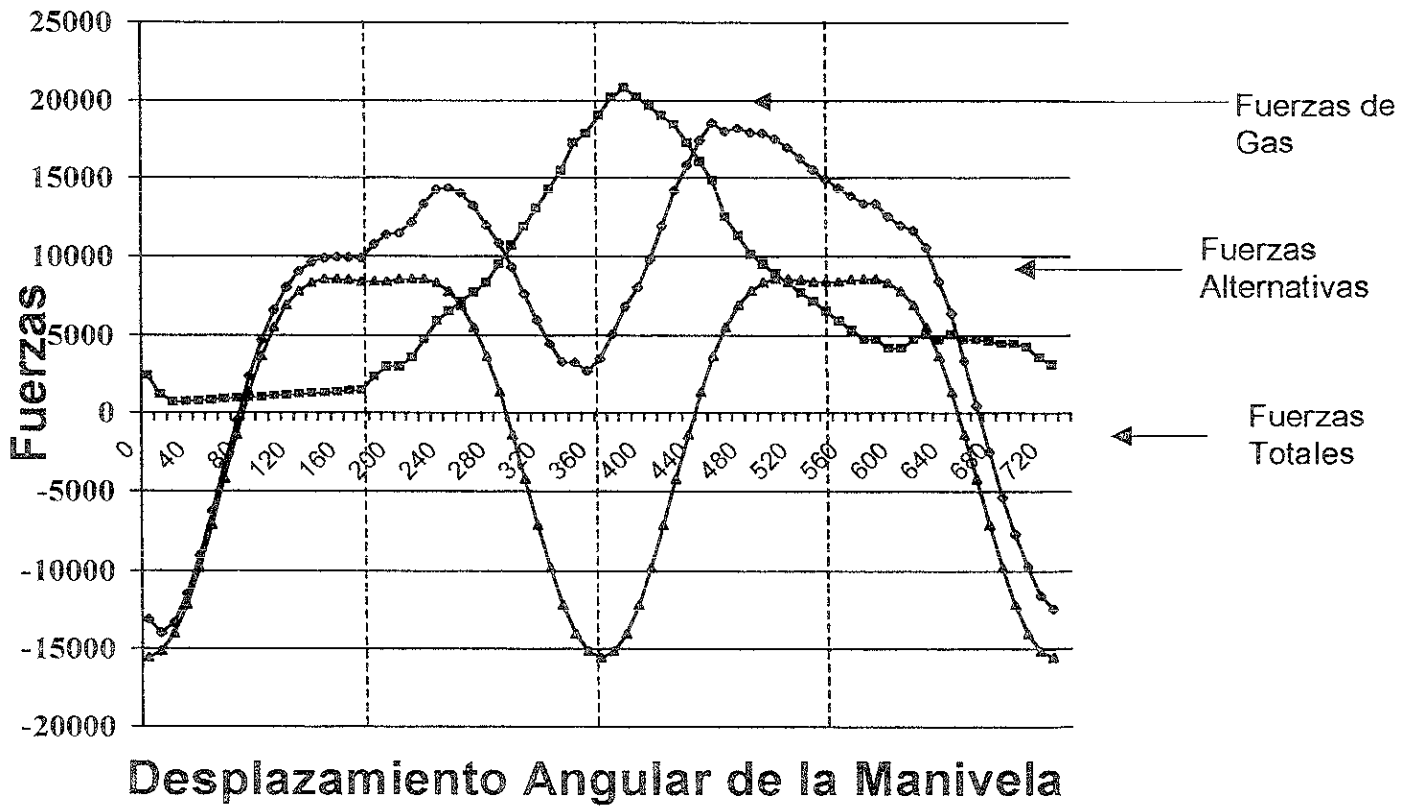
$$\begin{pmatrix} \text{F I con mov giratorio} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{F I Rectilíneas} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{F.I angulares de la Biela} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Fuerzas Totales} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

## Fuerzas Resultantes a 6000 rpm



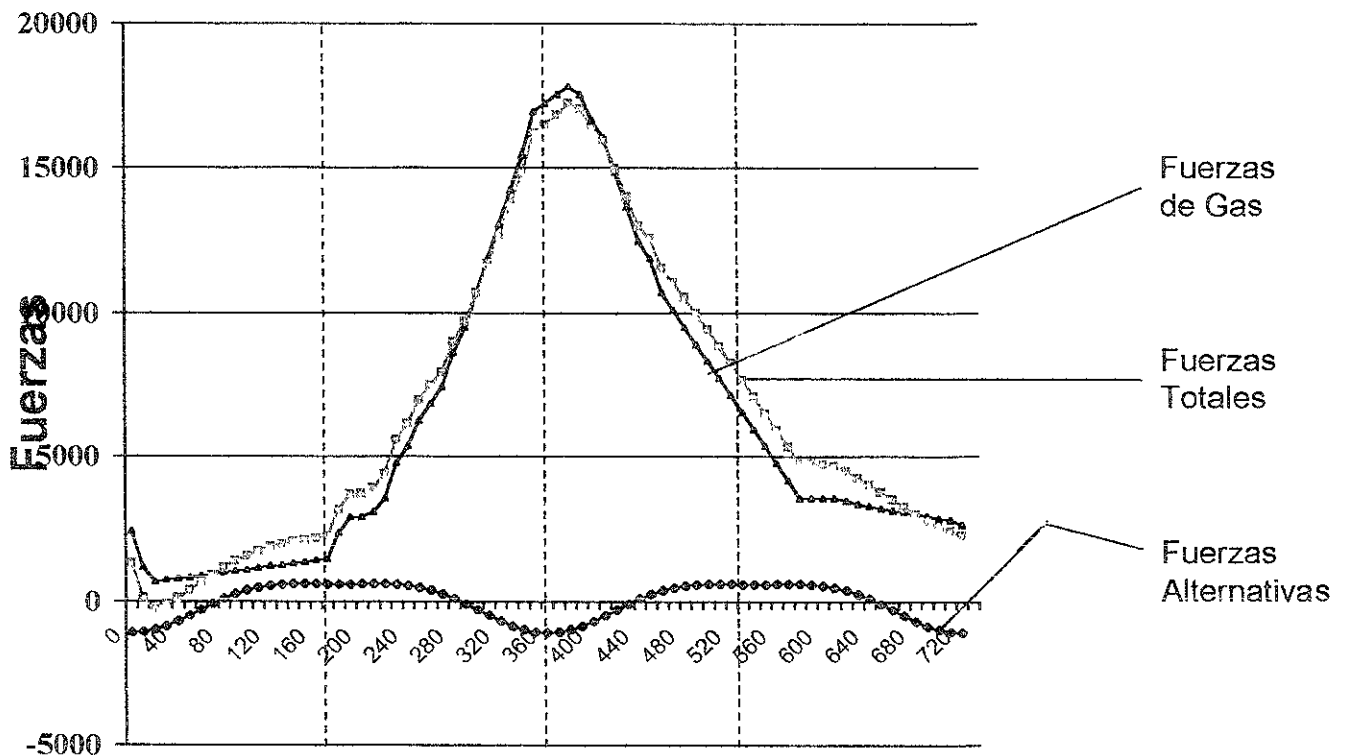


## Fuerzas resultantes a 3000 rpm





## Fuerzas Resultantes a 800 rpm

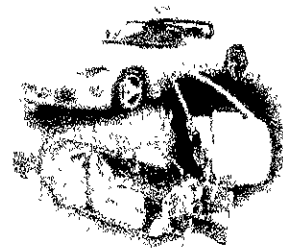


### Desplazamiento Angular de la Manivela

Las fuerzas totales son las que importan para nuestro análisis, ya que son las que están actuando directamente en la biela, por lo cuál la variación de 0 a 720 °, permite tener una aproximación de fuerzas respecto a cada giro de la manivela.

Aunado a esto , las Fuerzas totales se pueden descomponer en las componentes normales al cilindro,  $F_n$ , y otra componente según el eje de la biela,  $F_{bb}$ .





De donde  $F_n = F \cdot \tan \beta$ , y  $F_{bb} = F \cdot \sec \beta$

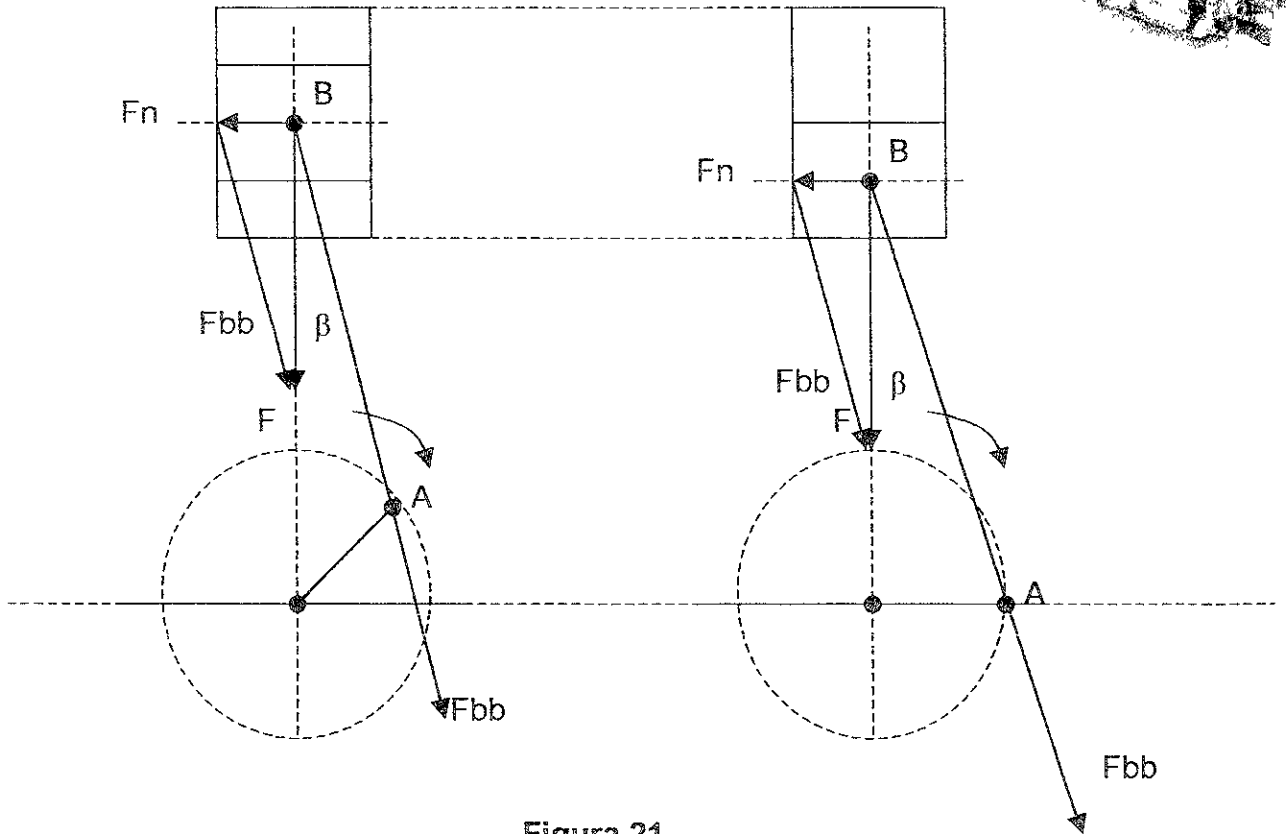


Figura 21

Donde:

$$F_n = (m_{RA} \cdot R \cdot W^2 + (-m_{RB} \cdot V^2 \cdot r \cdot (\cos wt + (r/L) \cdot \cos 2(wt))) + (-w^2(b_1 \sin \alpha + 9b_3 \sin 3\alpha + 25b_5 \sin 5\alpha) + (-Pg \cdot Ap)) \cdot (\tan(\arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha))) \dots \text{Ec. 64}$$

$$\left[ F_{n_{0^\circ-720^\circ}} \right] = \left[ F_{0^\circ-720^\circ} \right] \cdot \left[ \tan \beta_{0^\circ-720^\circ} \right]$$

$$F_{bb} = (m_{RA} \cdot R \cdot W^2 + (-m_{RB} \cdot V^2 \cdot r \cdot (\cos wt + (r/L) \cdot \cos 2(wt))) + (-w^2(b_1 \sin \alpha + 9b_3 \sin 3\alpha + 25b_5 \sin 5\alpha) + (-Pg \cdot Ap)) \cdot (\sec(\arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha))) \dots \text{Ec. 65}$$

$$\left[ F_{bb_{0^\circ-720^\circ}} \right] = \left[ F_{0^\circ-720^\circ} \right] \cdot \left[ \sec \beta_{0^\circ-720^\circ} \right]$$



**Tabla 13. Fuerzas Evaluadas a 6000 rpm**

Desplazamientos Angular Manivela (°)	Desplazamientos Angular Biela (°)	Fzas Resultantes (N)	Fuerza Normal a la Pared del Cilindro	Fuerza Según Eje de Biela
0	19.47	-59719.52	-21112.66087	55863.01657
10	19.126	-59395.68	-20597.83981	55709.74599
20	18.25	-55276.496	-18227.50045	52184.76059
30	16.77	-47922.89	-14441.434	45695.16791
40	14.79	-38458.878	-10154.11813	37094.19337
50	12.37	-27579.632	-6048.652972	26908.17531
60	9.59	-16067.396	-2714.718656	15836.39848
70	6.54	-4691.54	-537.8528277	4660.607461
80	3.31	6465.536	373.9335485	6454.71374
<b>90</b>	<b>0</b>	<b>15653.088</b>	<b>0</b>	<b>15653.088</b>
100	-3.31	23117.584	-1337.002875	23078.88891
110	-6.54	28706.08	-3290.954846	28516.81338
120	-9.59	32505.236	-5492.026872	32037.91517
130	-12.37	34655.512	-7600.50626	33811.78517
140	-14.79	35603.148	-9400.133057	34339.79683
150	-16.77	35734.08	-10768.36889	34072.96149
160	-18.25	35481.726	-11700.14786	33497.1554
170	-19.163	35182.328	-12226.34448	32989.58478
<b>180</b>	<b>-19.47</b>	<b>35939.36</b>	<b>-12705.65336</b>	<b>33618.50636</b>
190	-19.163	36686.16	-12748.94685	34399.69026
200	-18.25	37924.3	-12505.58999	35803.11089
210	-16.77	39121.37	-11789.11962	37302.79144
220	-14.79	40227.58	-10621.10026	38800.1343
230	-12.37	40521.24	-8886.953922	39534.70553
240	-9.59	39583.54	-6687.964529	39014.4559
250	-6.54	37057.87	-4248.430188	36813.53786
260	-3.31	32710.86	-1891.828915	32656.10732
<b>270</b>	<b>0</b>	<b>26488.97</b>	<b>0</b>	<b>26488.97</b>
280	3.31	19132.293	1106.514017	19100.26864
290	6.54	9811.82	1124.857751	9747.128128
300	9.59	272.36	46.01746128	268.4443385
310	12.37	-9402.88	-2062.201485	9173.956471
320	14.79	-11444.58	-3021.659062	11038.47761
330	16.77	-24889.89	-7500.501401	23732.86967
340	18.25	-29218	-9634.675616	27583.77331
350	19.163	-27892.48	-9693.0217	26154.07752
<b>360</b>	<b>19.47</b>	<b>-23520.56</b>	<b>-8315.231048</b>	<b>22001.67438</b>
370	19.163	-20165.28	-7007.713069	18908.47627
380	18.25	-14358	-4734.570213	13554.92563
390	16.77	-7652.29	-2305.997008	7296.56906
400	14.79	1169.77	308.8489155	1128.261583
410	12.37	10212.32	2239.724581	9963.689758
420	9.59	15727.06	2657.216091	15500.95542
430	6.54	21105.42	2419.591398	20966.2665
440	3.31	29237	1690.918612	29188.062
<b>450</b>	<b>0</b>	<b>35405</b>	<b>0</b>	<b>35405</b>

460	-3.31	41032.8	-2373 12738	40964 11774
470	-6.54	44784 6	-5134 246696	44489 32353
480	-9.59	46717 34	-7893 278692	46045.69478
490	-12.37	47060 64	-10321 14859	45914 89659
500	-14.79	46171 58	-12190 46685	44533 21589
510	-16.77	45066 16	-13580.56609	42971.23458
520	-18.25	43571 51	-14367.76525	41134 46007
530	-19.163	42035 76	-14608.00667	39415 87573
<b>540</b>	<b>-19.47</b>	<b>40694.56</b>	<b>-14386.76072</b>	<b>38066.63013</b>
550	-19.163	40252.56	-13988 32006	37743.81391
560	-18.25	40599 1	-13387.60897	38328 30347
570	-16.77	40310.17	-12147 3613	38436.32941
580	-14.79	39633 18	-10464 1636	38226 82614
590	-12.37	38440 84	-8430 689036	37504 95517
600	-9.59	36017 14	-6085 391927	35499 32927
610	-6.54	32897 07	-3771.423055	32680 17109
620	-3.31	27658 46	-1599.623928	27612 16422
<b>630</b>	<b>0</b>	<b>20247.77</b>	<b>0</b>	<b>20247.77</b>
640	3.31	11107 893	642 4237443	11089.30019
650	6.54	-292.98	-33 58814407	291.0483069
660	9.59	-11912 84	-2012 772262	11741 57164
670	12.37	-23371.28	-5125 694289	22802 2803
680	14.79	-27493 38	-7258 948849	26517 7979
690	16.77	-44207.89	-13321 92874	42152 86174
700	18.25	-51656 6	-17033.83477	48767.33329
710	19.163	-57018.08	-19814.56962	53464 42067
<b>720</b>	<b>19.47</b>	<b>-59035.96</b>	<b>-20871.00169</b>	<b>55223.59877</b>

**Tabla 14. Fuerzas Evaluadas a 3000 rpm**

Desplazamientos Angular Manivela (°)	Desplazamientos Angular Biela (°)	Fzas Resultantes (N)	Fuerza Normal a la Pared del Cilindro	Fuerza Según Eje de Biela
<b>0</b>	<b>19.47</b>	-13102.1	-4631.989575	12256 00657
10	19.126	-13957.31883	-4840 261403	13091.16567
20	18.25	-13301.99135	-4386 349911	12557.98186
30	16.77	-11423 47198	-3442 432553	10892 44556
40	14.79	-9021.800975	-2381.98402	8701 669091
50	12.37	-6261.87265	-1373 328499	6109 420424
60	9.59	-3343 761	-564 9559125	3295.688463
70	6.54	-459 6	-52 68998231	456.5697381
80	3.31	2369.8047	137 0573887	2365.838031
<b>90</b>	<b>0</b>	<b>4702 43</b>	<b>0</b>	<b>4702 43</b>
100	-3.31	6608 712075	-382 2141207	6597 650162
110	-6.54	8045 94994	-922 4128807	7992.900907
120	-9.59	9057.951	-1530 415294	8927.726774
130	-12.37	9613.352575	-2108 361476	9379.304858
140	-14.79	9890.56105	-2611 358689	9539.601862
150	-16.77	9958 8575	-3001.07492	9495.914492



160	-18.25	9935.890275	-3276.37346	9380.154184
170	-19.163	9896.705825	-3439.241843	9279.692334
<b>180</b>	<b>-19.47</b>	10768.04	-3806.828601	10072.679
190	-19.163	11400.53783	-3961.844217	10689.99781
200	-18.25	11487.27428	-3787.944466	10844.76589
210	-16.77	12158.1375	-3663.822032	11592.95974
220	-14.79	13326.19305	-3518.452577	12853.32302
230	-12.37	14291.28058	-3134.305663	13943.34352
240	-9.59	14354.055	-2425.235608	14147.68982
250	-6.54	14019.66994	-1607.258836	13927.23462
260	-3.31	13230.32808	-765.1745388	13208.18265
<b>270</b>	<b>0</b>	11971.942	0	11971.942
280	3.31	10875.6687	628.993078	10857.46459
290	6.54	9288.56	1064.869587	9227.318117
300	9.59	7646.695	1291.97199	7536.7601
310	12.37	5970.87935	1309.509029	5825.511678
320	14.79	4453.247025	1175.770035	4295.226873
330	16.77	3287.92802	990.8082647	3135.086864
340	18.25	3246.10465	1070.407465	3064.542912
350	19.163	2685.88117	933.3807702	2518.483273
<b>360</b>	<b>19.47</b>	3481.66	1230.872366	3256.825076
370	19.163	5063.48117	1759.62958	4747.899041
380	18.25	6812.50465	2246.432762	6431.466353
390	16.77	8043.12802	2423.774994	7669.238758
400	14.79	9802.847025	2588.199964	9455.000304
410	12.37	11914.87935	2613.122988	11624.79841
420	9.59	14185.095	2396.688427	13981.15892
430	6.54	15826.96	1814.452224	15722.60875
440	3.31	17414.0687	1007.140708	17384.92037
<b>450</b>	<b>0</b>	18510.342	0	18510.342
460	-3.31	17985.52808	-1040.190997	17955.42322
470	-6.54	18180.46994	-2084.265969	18060.60139
480	-9.59	17920.455	-3027.80821	17662.81645
490	-12.37	17857.68058	-3916.474038	17422.91557
500	-14.79	17486.99305	-4617.009188	16866.48013
510	-16.77	16913.3375	-5096.788761	16127.11164
520	-18.25	16242.47428	-5355.978194	15333.99714
530	-19.163	15561.33783	-5407.779633	14591.47541
<b>540</b>	<b>-19.47</b>	14928.84	-5277.797547	13964.7813
550	-19.163	14372.53783	-4994.655229	13476.76752
560	-18.25	13864.87428	-4571.96133	13089.38151
570	-16.77	13346.9375	-4022.063714	12726.49772
580	-14.79	13326.19305	-3518.452577	12853.32302
590	-12.37	12508.08058	-2743.221475	12203.5575
600	-9.59	11976.455	-2023.52054	11804.27207
610	-6.54	11642.06994	-1334.683331	11565.31076
620	-3.31	10555.52808	-610.4777812	10537.85984
<b>630</b>	<b>0</b>	8405.542	0	8405.542
640	3.31	6417.6687	371.1651486	6406.926562



650	6.54	3344.56	383.4308251	3322.508449
660	9.59	513.895	86.82678537	506.508414
670	12.37	-2499.32065	-548.1408627	2438.47192
680	14.79	-5354.352975	-1413.684835	5164.35775
690	16.77	-7708.47198	-2322.927296	7350.139389
700	18.25	-9741.53535	-3212.284657	9196.669955
710	19.163	-11579.71883	-4024.112087	10858.01133
<b>720</b>	<b>19.47</b>	<b>-12418.54</b>	<b>-4390.330391</b>	<b>11616.58878</b>

**Tabla 15. Fuerzas Evaluadas a 800 rpm**

Desplazamientos Angular Manivela (°)	Desplazamientos Angular Biela (°)	Fzas Resultantes (N)	Fuerza Normal a la Pared del Cilindro	Fuerza Según Eje de Biela
0	19.47	1332.03513	470.9148026	1246.016387
10	19.126	121.742477	42.21909807	114.1874707
20	18.25	-285.44638	-94.12633572	269.4807392
30	16.77	-92.1706	-27.77536238	87.88599859
40	14.79	132.7855	35.05873604	128.0737055
50	12.37	388.7452	85.25801974	379.2807675
60	9.59	655.9605	110.8299196	646.529896
70	6.54	920.72733	105.5550625	914.6567362
80	3.31	1181.615	68.33857083	1179.637168
<b>90</b>	<b>0</b>	<b>1401.6618</b>	<b>0</b>	<b>1401.6618</b>
100	-3.31	1596.91735	-92.35753561	1594.244369
110	-6.54	1758.7974	-201.634038	1747.201193
120	-9.59	1918.0555	-324.0712465	1890.480026
130	-12.37	1989.6435	-436.3605384	1941.203425
140	-14.79	2069.0489	-546.2813278	1995.630242
150	-16.77	2128.11483	-641.3016797	2029.188233
160	-18.25	2192.0803	-722.8414886	2069.472451
170	-19.163	2255.3508	-783.7655255	2114.785765
<b>180</b>	<b>-19.47</b>	<b>3154.2478</b>	<b>-1115.122227</b>	<b>2950.556152</b>
190	-19.163	3701.9108	-1286.465087	3471.188723
200	-18.25	3718.0803	-1226.042084	3510.11993
210	-16.77	3911.87483	-1178.832958	3730.029161
220	-14.79	4395.8809	-1160.623925	4239.896342
230	-12.37	5578.7715	-1223.513527	5442.950128
240	-9.59	6145.3595	-1038.309013	6057.008979
250	-6.54	6980.9174	-800.3142173	6934.890403
260	-3.31	7486.93335	-433.0059495	7474.401437
<b>270</b>	<b>0</b>	<b>7959.5738</b>	<b>0</b>	<b>7959.5738</b>
280	3.31	8995.879	520.2756518	8980.821356
290	6.54	9700.08733	1112.048368	9636.132141
300	9.59	10697.6165	1807.450261	10543.81915
310	12.37	11692.6972	2564.394901	11408.02553
320	14.79	12699.0335	3352.866567	12248.41776
330	16.77	13730.4294	4137.627967	13092.16278

340	18.25	14799.44962	4880.138831	13971.68401
350	19.163	16213.34248	5634.360246	15202.84378
<b>360</b>	<b>19.47</b>	16492.59513	5830.632395	15427.55392
370	19.163	16827.74248	5847.872725	15778.95122
380	18.25	17217.04962	5677.345751	16254.06235
390	16.77	17059.6294	5140.873431	16266.60308
400	14.79	16345.4335	4315.608546	15765.42797
410	12.37	15953.4972	3498.856267	15565.09164
420	9.59	14978.4165	2530.726617	14763.07501
430	6.54	14000.88733	1605.105539	13908.57585
440	3.31	13019.479	752.9801059	12997.6865
<b>450</b>	<b>0</b>	12597.5738	0	12597.5738
460	-3.31	11550.53335	-668.0237992	11531.19963
470	-6.54	11064.5174	-1268.470901	10991.56617
480	-9.59	10546.1595	-1781.860355	10394.53962
490	-12.37	9999.5715	-2193.065443	9756.120855
500	-14.79	9431.0809	-2490.044289	9096.426023
510	-16.77	8848.19483	-2666.379712	8436.881591
520	-18.25	8258.3203	-2723.192457	7796.414369
530	-19.163	7667.7508	-2664.649213	7189.857224
<b>540</b>	<b>-19.47</b>	7080.6478	-2503.223666	6623.401282
550	-19.163	6498.9508	-2258.475085	6093.902837
560	-18.25	5920.7203	-1952.365648	5589.561454
570	-16.77	5341.79483	-1609.735503	5093.478538
580	-14.79	4755.8809	-1255.673045	4587.12201
590	-12.37	4749.9715	-1041.744474	4634.328182
600	-9.59	4722.1595	-797.847672	4654.270022
610	-6.54	4666.1174	-534.9383012	4635.352479
620	-3.31	4488.57335	-259.5961356	4481.060205
<b>630</b>	<b>0</b>	4247.9338	0	4247.9338
640	3.31	4035.999	233.4215489	4029.243392
650	6.54	3759.44733	430.994807	3734.66032
660	9.59	3508.7365	592.8298797	3458.292145
670	12.37	3255.5772	713.9999804	3176.316567
680	14.79	3013.6735	795.6861537	2906.735542
690	16.77	2796.8294	842.8170166	2666.817236
700	18.25	2587.88962	853.3601553	2443.143289
710	19.163	2456.342477	853.6129068	2303.250609
<b>720</b>	<b>19.47</b>	2289.79513	809.5119996	2141.927184



La Fuerza  $F_{bb}$  es trasladada ahora a lo largo del eje de la biela y se ejerce sobre la muñequilla del cigüeñal. La cuál se puede descomponer en otras dos fuerzas, a saber,  $F_r$  y  $F_t$ , la primera en la dirección de la manivela, y la segunda, tangente a la trayectoria del punto A, normal a la manivela, sus expresiones son:

$$F_r = F_{bb} \cdot \cos(\alpha + \beta) \dots \dots \dots \text{Ecuación 66}$$

$$F_r = (m_{RA} \cdot R \cdot W^2 + (-m_{RB} \cdot V^2 \cdot r \cdot (\cos wt + (r/L) \cdot \cos 2(wt))) + (-w^2(b_1 \sin \alpha + 9b_3 \sin 3\alpha + 25b_5 \sin 5\alpha) + (-Pg \cdot Ap)) \cdot (\sec(\arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha))) \cdot \cos(\alpha + \arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha)) \dots \dots \dots \text{Ecuación 67}$$

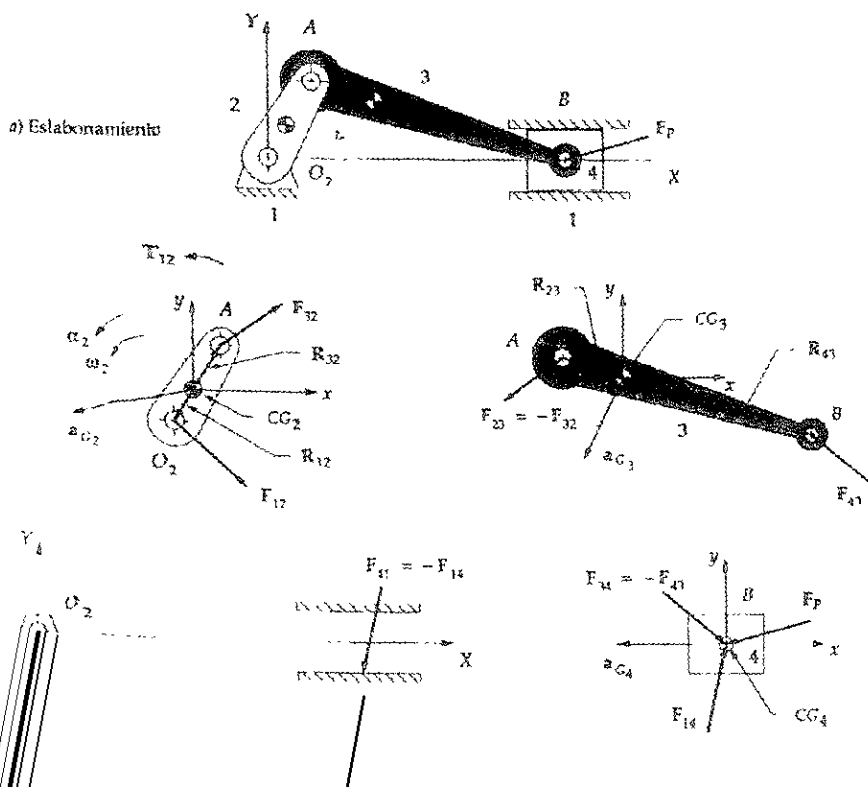
Y

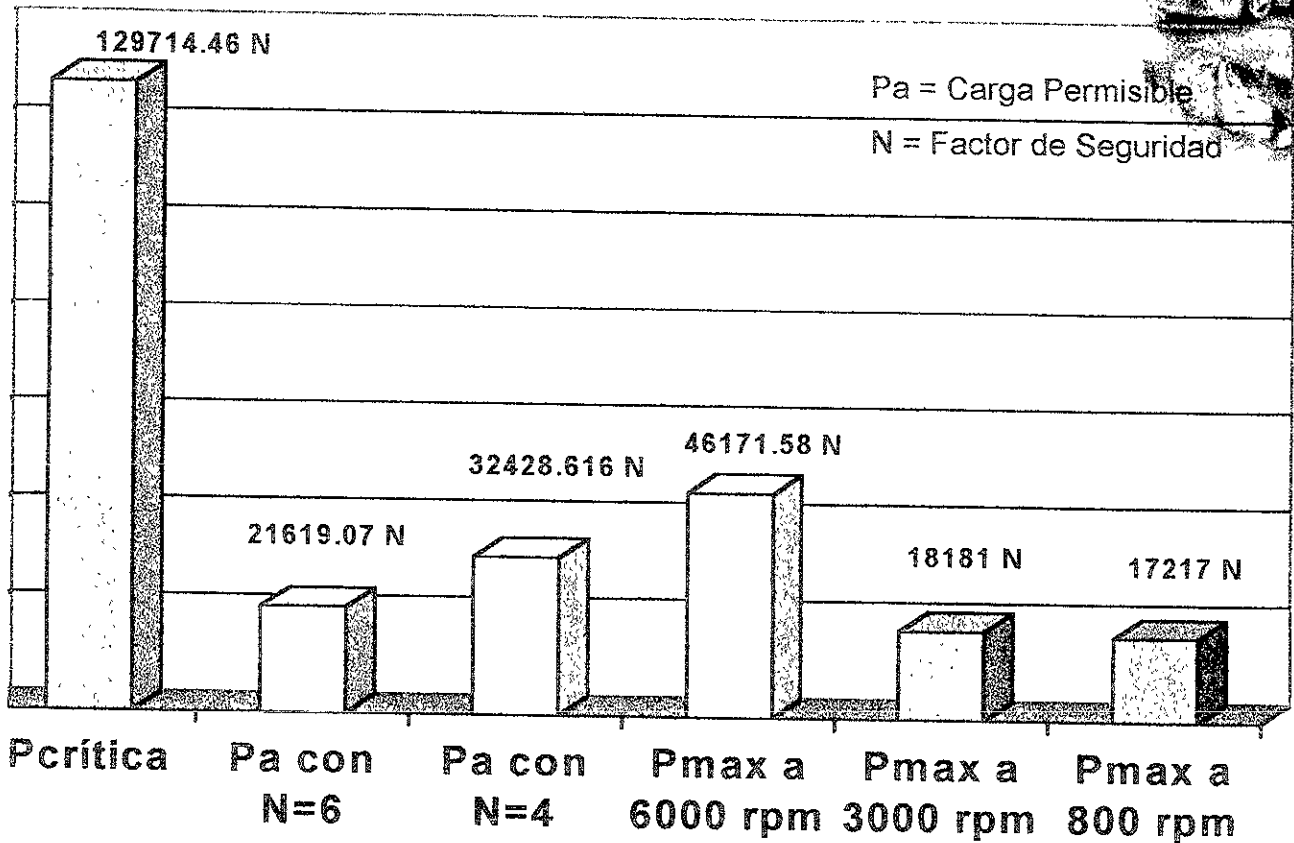
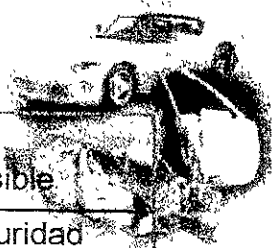
$$F_t = F_{bb} \cdot \sin(\alpha + \beta) \dots \dots \dots \text{Ecuación 68}$$

$$F_t = (m_{RA} \cdot R \cdot W^2 + (-m_{RB} \cdot V^2 \cdot r \cdot (\cos wt + (r/L) \cdot \cos 2(wt))) + (-w^2(b_1 \sin \alpha + 9b_3 \sin 3\alpha + 25b_5 \sin 5\alpha) + (-Pg \cdot Ap)) \cdot (\sec(\arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha))) \cdot \sin(\alpha + \arcsin((r/L) \cdot \sin \alpha)) \dots \dots \dots \text{Ecuación 69}$$

Es importante considerar que  $F_t$ , genera el par motor.

Con todos los datos cinemáticos y dinámicos obtenidos anteriormente, y retomando el análisis de falla por el método de Euler, podemos resumir lo siguiente:





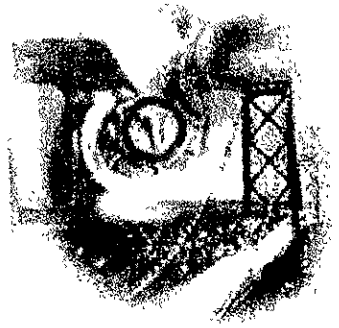
Grafica 8

Se aprecia de la página 53, que la carga crítica fue calculada de acuerdo a la forma y tipo de material. También se puede observar que las cargas permisibles con factores de seguridad 6 y 4, son menores respecto a la carga máxima evaluada a 6000 rpm<sup>16</sup>, esto se debe a los factores de fuerza de gas incidentes en la cabeza del pistón y obviamente transmitidos a la biela (connecting Rod), que ya fueron obtenidos en el análisis cinetostático. Por lo tanto, podemos asegurar que los resultados aquí mostrados son un buen indicador del avance en mi análisis, debido a que no se ha rebasado la carga crítica que soporta el material.

<sup>16</sup> En las páginas 85, 86 y 87 se encuentran los valores máximos de las fuerzas resultantes a 6000, 3000 y 800 rpm



Copyright ©

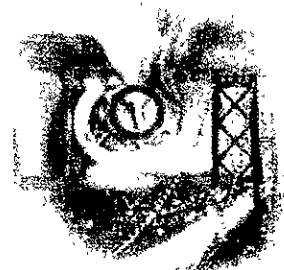


Amalita

Amalita

Amalita

# Capítulo 4



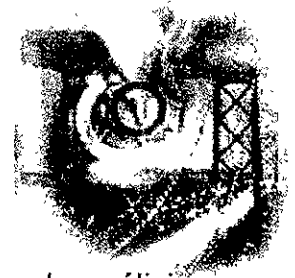
## Análisis Mecánico Parte 2

Contenido:	
Introducción	91
Discretización	92
Análisis	96
Esfuerzos Principales	103

### 4.1 Introducción

El análisis por FEM de un producto o pieza, requiere de un proceso numérico bastante largo, por lo que se requiere el apoyo de herramientas poderosas que nos auxilién a resolver nuestro problema

El planteamiento que se realiza en este capítulo consiste en un análisis por elemento finito de la Biela, con el paquete SolidsWorks , debido a que es un paquete amigable para el diseño de sólidos, y además que viene integrado con una aplicación de FEM, Cosmos. Vale la pena preguntar que tan bueno es el Cosmos para realizar un análisis de este tipo, esa pregunta se va a responder en las conclusiones, ya que tengamos un resultado global de nuestro objeto en estudio.



## 4.2 Análisis por Elemento Finito (Discretización).

En primera instancia con Cosmos se pueden realizar diferentes tipos de análisis como son:

- Análisis Estático.
- Análisis por Vibración.
- Análisis por Pandeo
- Análisis Térmico
- Optimización

Antes de realizar el análisis tenemos que introducir el tipo de material, ya sea acero, aluminio, magnesio, cobre, u otros metales, con sus respectivas aleaciones, polimeros y algunos no metales.

La ventaja del programa es que facilita su uso mediante librerías que manejan las propiedades de cada material, para análisis estructural, térmico o ambos, así como la rapidez de respuesta.

El material seleccionado fue el acero, sus propiedades se resumen enseguida:

Propiedades	Descripción	Valor	Unidades
EX	Modulo Elástico	207 GPa	N/m <sup>2</sup>
NUXY	Poisson	0.28	
GXY	Modulo de Corte	7.9 E 10	N/m <sup>2</sup>
ALPX	Coef. Expansión Térmica	1.3 E -5	/Kelvin
DENS	Densidad de Masa	7700	Kgm/m <sup>3</sup>
KX	Conductividad Térmica	50	W/m/K
C	Calor Especifico	460	J/Kgm/K
SIGXT	Resistencia a Tensión	7.2382 E 8	N/m <sup>2</sup>
SIGYLD		6.204 E 8	N/m <sup>2</sup>



Lo siguiente es insertar la restricciones. Para el caso de nuestro análisis las restricciones se encuentran en el alojamiento de la manivela, y consideraremos el alojamiento del perno, como un elemento sometido a compresión. Cabe hacer la aclaración de que los esfuerzos generados en esta sección del elemento, se van a ver reducidos debido a la utilización del perno, el cual a parte de ser un elemento que nos ayuda en la transmisión del movimiento, también actúa como un elemento de sacrificio, para evitar daño a la biela.

Los datos de cargas aplicadas son necesarios, y estos datos ya han sido obtenidos en el capítulo anterior<sup>17</sup>. Por razones de simplificación solamente vamos a utilizar los valores críticos, que son los siguientes:

**Tabla 17**

<b>Fuerzas Evaluadas a 6000 rpm</b>				
Desp. Manivela	Desp. Biela	Fzas Resultantes	Fza Normal	Fza Biela
490°	-12.37°	47060.64	10321.14	45914.89
<b>Fuerzas Evaluadas a 3000 rpm</b>				
Desp. Manivela	Desp. Biela	Fzas Resultantes	Fza Normal	Fza Biela
460°	-3.31°	17985.52	1040.19	17955.42
<b>Fuerzas Evaluadas a 800 rpm</b>				
Desp. Manivela	Desp. Biela	Fzas Resultantes	Fza Normal	Fza Biela
380°	18.25°	17217.04	5677.34	16254.06

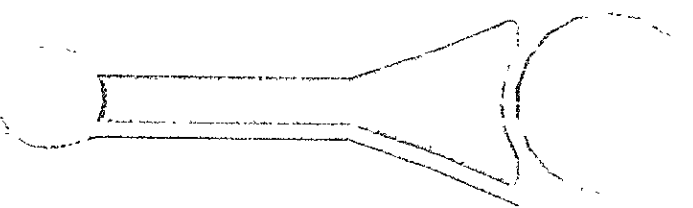
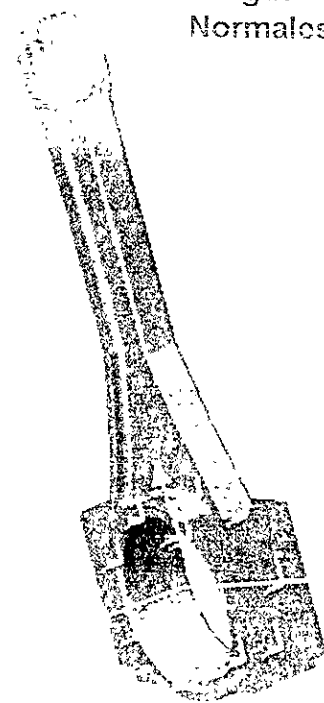

Se puede observar una variación en los ángulos de la manivela, esto debido a que en estas posiciones angulares se localizaron los valores más grandes para las fuerzas resultantes

<sup>17</sup> Ver páginas 84,85,86



En la siguiente ilustración se observa que las restricciones van a ser colocadas en el alojamiento de la manivela, que es donde se va a transmitir la potencia y el alojamiento del bulon es nuestro elemento sujeto a compresión, tanto en X,Y,Z

## Selección de Restricciones y Aplicación de Cargas

<p><b>Cargas</b></p> <p style="text-align: right;"><b>restricciones</b></p> 	<p><b>Cargas Normales</b></p> 
<p><b>Cargas sobre eje de Biela</b></p> 	<p>Centro de Diseño Mecánico CDM-DEPFI-UNAM</p>
<p>Restricción y Aplicación de Cargas</p>	<p>León Camacho Horacio</p>

Biela de Motor de Combustión Interna  
Análisis en Solids Works/Cosmos

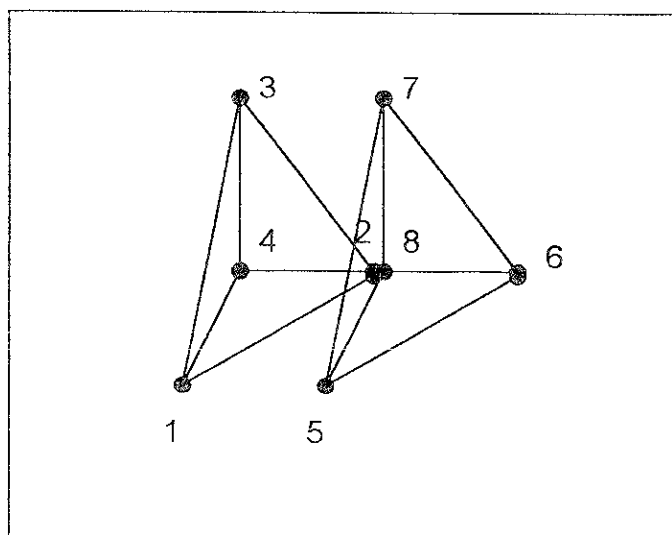


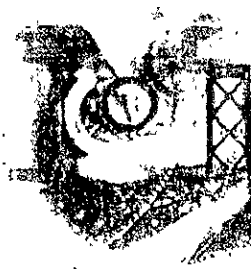
El paso que sigue es la selección del tipo de malla, la cual depende del grado de exactitud que deseemos obtener, para esto, el FEM, realiza un madoo fino, donde se evalúan la geometría, se procesan las fronteras y se crea la malla de acuerdo a nuestras necesidades.

Cabe aclarar que entre más fino sea el mallado, la solución del sistema de ecuaciones lineales va a ser más tardado, y seguramente los errores aumenten, debido a la velocidad de respuesta del sistema de computo e incluso de la forma en como el software calcula las matrices de rigidez, aunado con el tipo de elemento que se utilice.

Mediante el programa podemos seleccionar el tamaño global del mallado, el cuál para nuestro análisis, es de 0.36005 cm, que corresponde a un mallado alto.

El número de Nodos es de 21495, con un número de elementos de 12616, lo cuál el sistema Cosmos lo da por default de acuerdo al tipo de Mallado seleccionado, el cuál es standard (Triangular), con Jacobiano para 4 puntos nodales por elemento. Cabe decir que el programa puede realizar análisis con otro tipo de elemento como el cuadrado y con más de 29 puntos nodales por elemento.

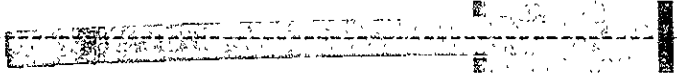
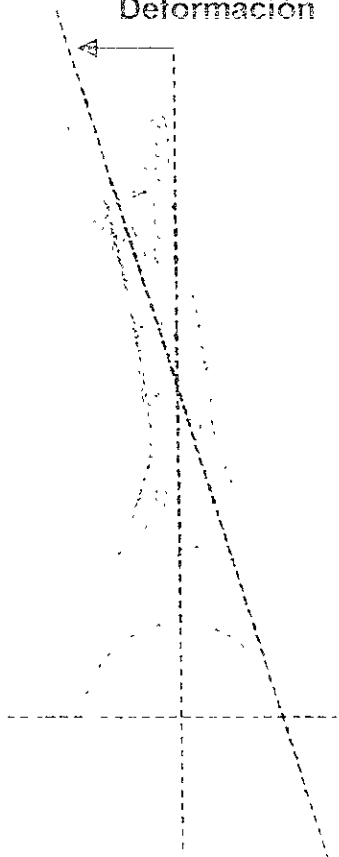
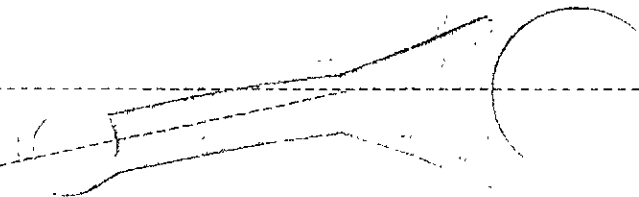




### 4.3 Análisis por FEM (Análisis)

Con todos los datos proporcionados anteriormente, el análisis es realizado, en el cuál se realiza el planteamiento de la matriz de rigidez, el ancho de banda, la simetria de la matriz de rigidez, así como el calculo de desplazamientos, esfuerzos, etc. En la siguiente ilustración podemos observar la deformación de la biela, la cuál es exagerada por el mismo programa, así como el mallado.

### Deformación de la Biela y su respectivo Mallado

<p><b>Cargas</b></p>  <p><b>restricciones</b></p>	<p><b>Deformación</b></p> 
<p><b>Cargas sobre eje de Biela</b></p> 	<p>Centro de Diseño Mecánico CDM-DEPFI-UNAM</p>
<p>Restricción y Aplicación de Cargas</p>	<p>León Camacho Horacio</p>
<p>Biela de Motor de Combustión Interna Análisis en Solids Works/Cosmos</p>	



## Notación de Elemento Finito (Cosmos Works)

Tabla 18. Análisis de Desplazamientos:

Descripción	Nombre	Unidades
UX	Desplazamiento en la dirección X	mm
UY	Desplazamiento en la dirección Y	mm
UZ	Desplazamiento en la dirección Z	mm
URES	Desplazamientos Resultantes (Prom)	mm
RFX	Fuerzas de Reacción dirección X	N
RFY	Fuerzas de Reacción dirección Y	N
RFZ	Fuerzas de Reacción dirección Z	N
RFRES	Fuerzas de Reacción Resultantes	N

Tabla 19. Análisis de esfuerzos:

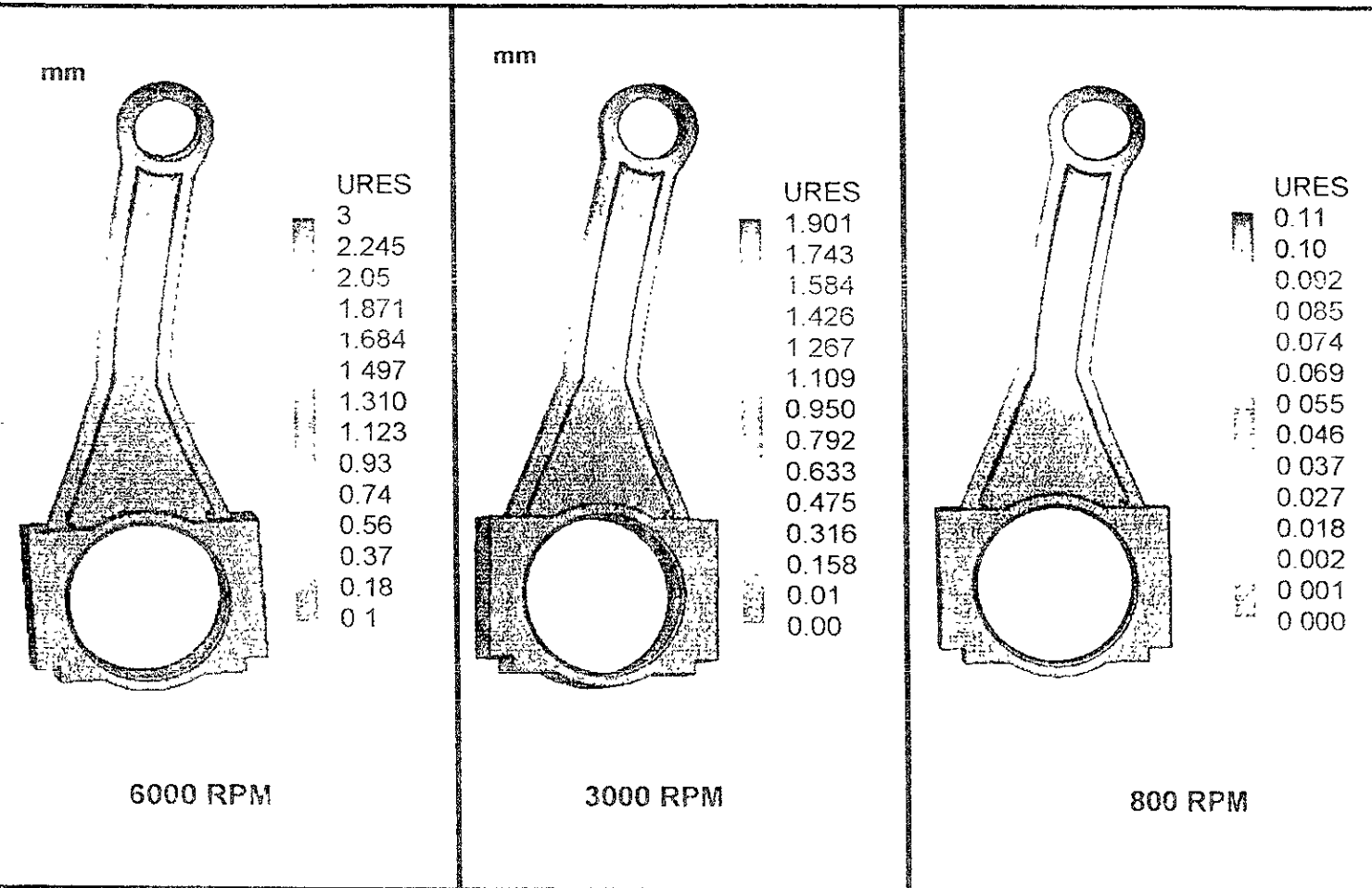
Descripción	Nombre	Unidades
SX	Esfuerzo Normal en X	N/m <sup>2</sup>
SY	Esfuerzo Normal en Y	N/m <sup>2</sup>
SZ	Esfuerzo Normal en Z	N/m <sup>2</sup>
TXY	Esfuerzo Cortante XY	N/m <sup>2</sup>
TXZ	Esfuerzo Cortante XZ	N/m <sup>2</sup>
TYZ	Esfuerzo Cortante YZ	N/m <sup>2</sup>
P1	Esfuerzo Normal Principal (1)	N/m <sup>2</sup>
P2	Esfuerzo Normal Principal (2)	N/m <sup>2</sup>
P3	Esfuerzo Normal Principal (3)	N/m <sup>2</sup>
VON	Esfuerzos de Von Misses	N/m <sup>2</sup>
INT	Intensidad de Esfuerzos	N/m <sup>2</sup>





La gráfica 9, es el resultado que nos muestra Cosmos, después de haber Introducido las cargas máximas, estos desplazamientos están dados en mm, y nos indican el máximo desplazamiento ocurrido

### Gráfica 9. Desplazamientos Resultantes debido a las fuerzas de Gas e Inerciales en la Biela



Desplazamientos Resultantes

Centro de Diseño  
CDM-DEPFI-UNAM

Biela de Motor de Combustión Interna.  
Análisis en Solids Works/Cosmos

León Camacho Horacio



Se observa de la gráfica 9, que los desplazamientos resultantes debido a las fuerzas de gas e inerciales de la biela evaluadas a 6000 rpm, se localizan cuando los desplazamientos angulares de la biela se encuentran a  $-12.37$  grados, con lo cual los desplazamientos angulares de la manivela están en 490 grados, en estas ubicaciones la aceleración del pistón es de  $19595.67 \text{ m/s}^2$ .

Así mismo, los desplazamientos resultantes debido a las fuerzas de gas e inerciales de la biela evaluadas a 3000 rpm, se localizan cuando los desplazamientos angulares de la biela se encuentran a  $-3.31$  grados, con lo cual los desplazamientos angulares de la manivela están en 460 grados, en estas ubicaciones la aceleración del pistón es de  $3211.6675 \text{ m/s}^2$ .

Por último, los desplazamientos resultantes debido a las fuerzas de gas e inerciales de la biela evaluadas a 800 rpm, se localizan cuando los desplazamientos angulares de la biela se encuentran a  $18.25$  grados, con lo cual los desplazamientos angulares de la manivela están en 380 grados, en estas ubicaciones la aceleración del pistón es de  $586.312 \text{ m/s}^2$ .

Los datos anteriores se obtuvieron de la página 94, tabla 17, en donde se muestran las fuerzas evaluadas a 6000, 3000 y 800 rpm.

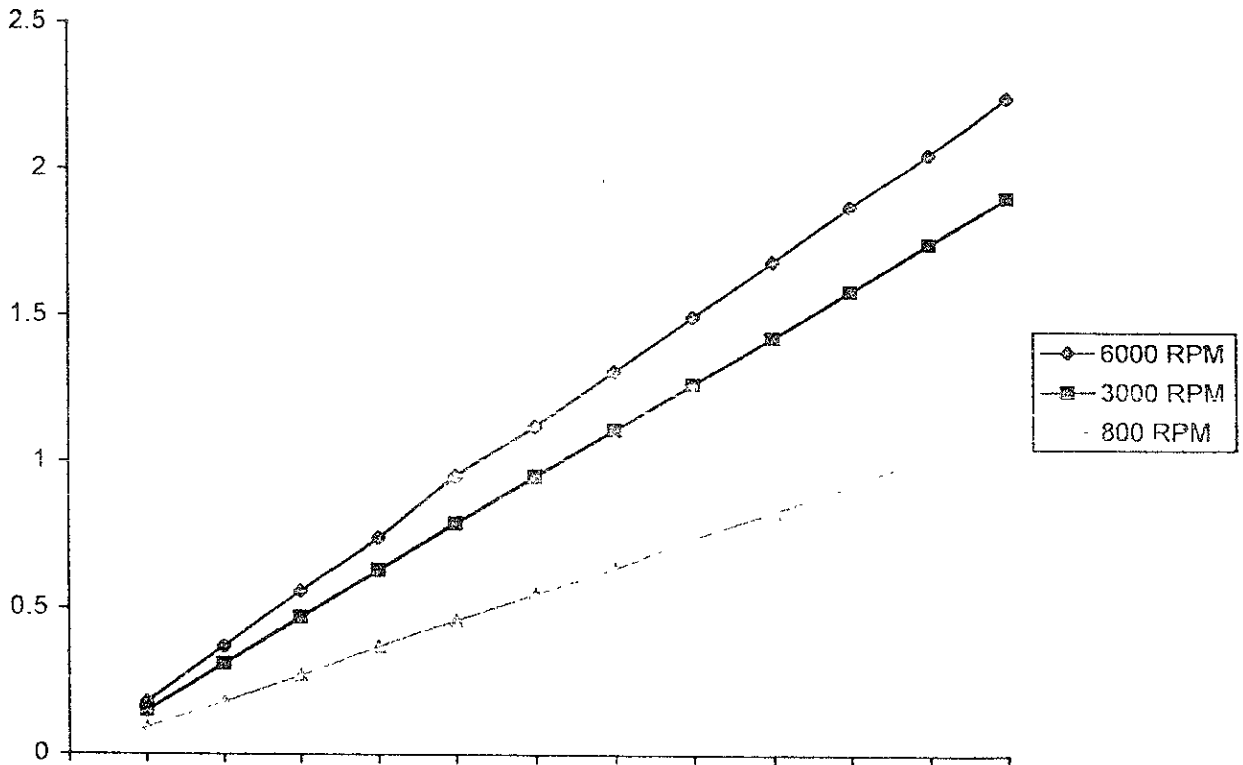
A continuación se muestran los datos anteriores en la tabla 20.

rpm del motor	°Manivela	°Biela	Aceleración del Pistón ( $\text{m/s}^2$ )	Fuerza biela (N)
6000 rpm	490	12.37	19595.67	45914.89
3000 rpm	460	3.31	3211.6675	17955.42
800 rpm	380	18.25	586.312	16254.06

Tabla 20



La gráfica 10, sólo nos muestra la variación de los desplazamientos en x, y, considerando las diferentes rpm del motor, y en la cuál se aprecia que los desplazamientos, efectivamente son mayores conforme se incrementan las rpm .



**Grafica 10. Desplazamientos Resultantes en la Biela sometida a cargas axiales y normales, para diferentes velocidades del motor**

Esto quiere decir, que la máxima carga y desplazamiento se da cuando la biela y el pistón se encuentran en el tercer tiempo, llamado Explosión



Lo siguiente es la obtención de los esfuerzos principales, Cosmos se basa en que para cualquier combinación particular de esfuerzos aplicados, alrededor de cualquier punto que se analice habrá una distribución continua del campo de esfuerzos. Los esfuerzos normales y cortantes en el punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja, y siempre habrá planos sobre los cuales las componentes de esfuerzo cortante sean iguales a cero (Esfuerzos normales actuantes sobre esos planos = esfuerzos principales).

Debido a que lo que más importante en la realización de nuestro diseño es evitar la falla, es necesario determinar los esfuerzos de mayor dimensión que ocurren en cualquier parte dentro del continuo del material que forma nuestra pieza. Siempre y cuando estemos considerando elementos isotrópicos, es decir con propiedades de resistencia uniformes en todas direcciones.

En los anexos al final de este trabajo, se menciona brevemente la obtención de los esfuerzos principales.

Las siguientes gráficas nos muestran los esfuerzos principales, 1, 2 y 3, evaluando a la máxima carga del motor, que es de 6000 rpm.

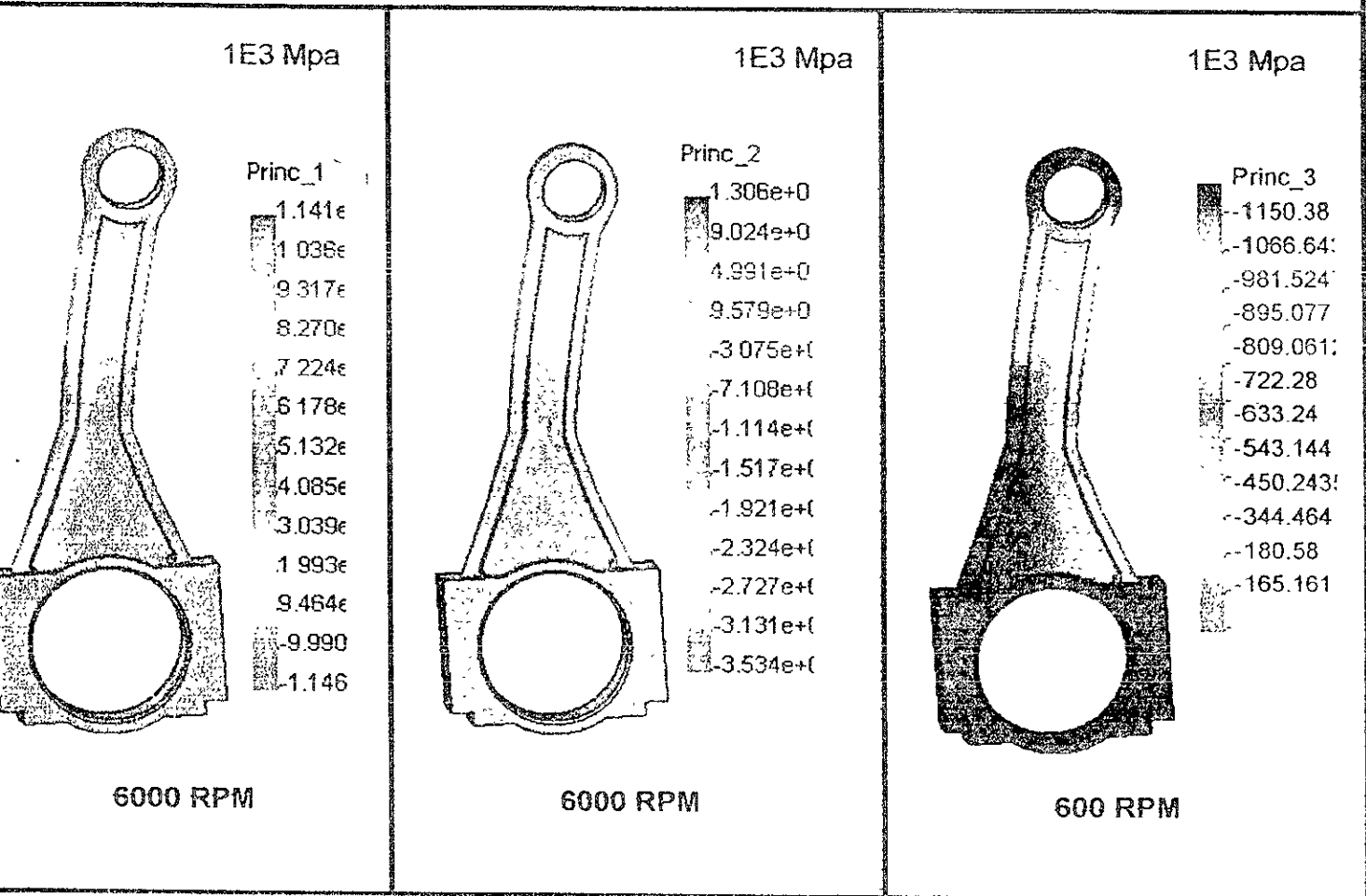
Estos esfuerzos nos van a permitir obtener los esfuerzos de Von Mises, para falla de materiales dúctiles bajo carga estática.

El procedimiento para su obtención se basa en la siguiente ecuación

$$\sigma_{\text{von}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \quad \text{Ecuación 70}$$



Gráfica 11. Esfuerzos Principales @ 6000 rpm



Esfuerzos Principales

Centro de Diseño  
CDM-DEPFI-UNAM

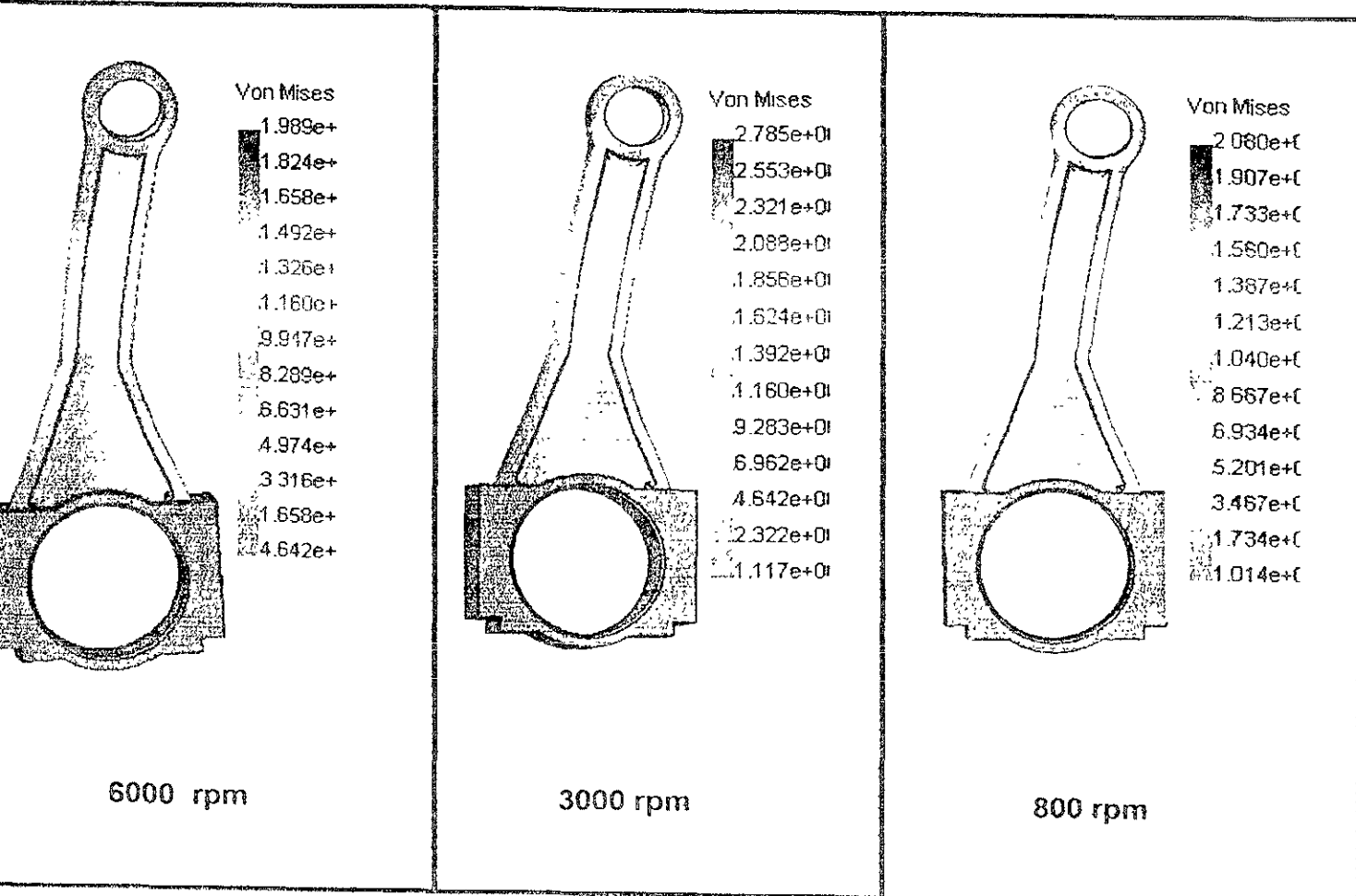
Biela de Motor de Combustión Interna  
Análisis en Solids Works/Cosmos

León Camacho Horacio



Los datos obtenidos para los esfuerzos principales, deben ser validos para la ecuación 70, de la página 102, y deben coincidir con los resultados mostrados por Cosmos, para los esfuerzos de Von Misses

**Gráfica 12. Esfuerzos de Von Misses**



Esfuerzos de Von Misses

Centro de Diseño  
CDM-DEPFI-UNAM

Biela de Motor de Combustión Interna  
Análisis en Solids Works/Cosmos

León Camacho Horacio



Aplicando la ecuación 70, comprobamos que los resultados para los esfuerzos principales, evaluados a 6000 rpm son los siguientes.

Tabla 21.

Mpa	Mpa	Mpa	Mpa
Esfuerzo Principal 1	Esfuerzo Principal 2	Esfuerzo Principal 3	Esfuerzo de Von Misses
1141	130.6	-1150.38	<b>1988.999777</b>
1036	90.24	-1066.643638	<b>1824</b>
931	49.91	-981.5247	<b>1657.999978</b>
827	9.57	-895.077	<b>1491.999865</b>
722	-30.7	-809.0612	<b>1325.999971</b>
617	-71.08	-722.28	<b>1159.997079</b>
513	-111.4	-633.24	<b>993.9966004</b>
408	-151.7	-543.144	<b>827.99982</b>
303	-192.1	-450.2435	<b>662.9999423</b>
199	-232.4	-344.464	<b>496.9997079</b>
94.6	-272.7	-180.58	<b>330.9980489</b>
-9.9	-313.1	-165.161	262.6044229
-114.6	-353.4	-2061	-234.000096

De lo cuál se deduce, que hasta aquí el análisis es correcto

La consecuencia de estos resultados que Cosmos ofrece, son precisamente los factores de seguridad sobre cada región de la pieza en estudio, los cuales deben ser mayores a 1<sup>18</sup>, y se muestran en el siguiente capítulo.

<sup>18</sup> Orthwein C, William. Diseño de Componentes de Máquinas, Capítulo 4, pag 180, Editorial CECSA, 1996

# Conclusiones





# Capítulo 5

## Resultados y Conclusiones

Contenido:	
Resultados Finales	107

### 5.1 resultados Finales

En el capítulo anterior, se mostraron los resultados para los esfuerzos de von misses, a su vez se comprobó que los resultados fueron correctos.

Como conclusiones vamos a mostrar en la tabla 22, la distribución de los esfuerzos de von misses, en función de los factores de seguridad, en la gráfica 13.

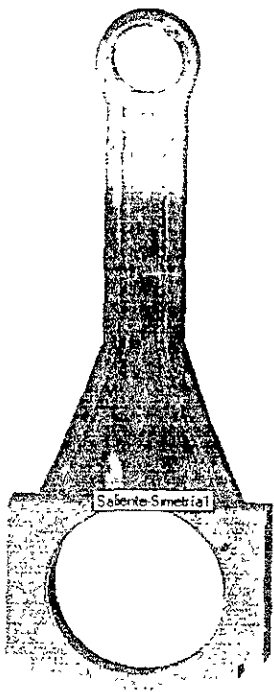
Tabla 22. Factores de Seguridad @ 6000 rpm.

Mpa	N (factor Seguridad)
Esfuerzo de Von Misses	con 620.4 E6
1988.999777	0.31191557
1824	0.340131579
1657.999978	0.374185771
1491.999865	0.415817732
1325.999971	0.467873313
1159.997079	0.534828933
993.9966004	0.624147004
827.99982	0.749275525
662.9999423	0.935746688
496.9997079	1.248290472
330.9980489	1.87433129
262.6044229	2.36248877
-234.000096	-2.651280964

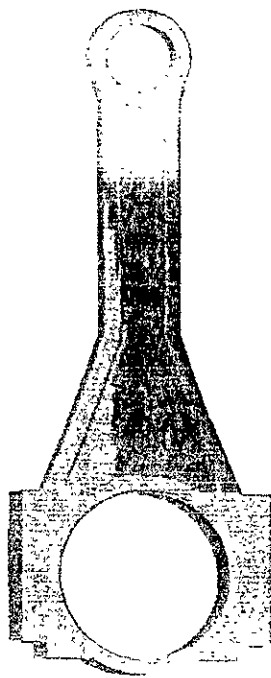


Estos resultados, son buenos si consideramos que la carga aplicada fue máxima, y al régimen más alto de velocidad del motor, en donde la mayor deformación causada fue de apenas 3mm.

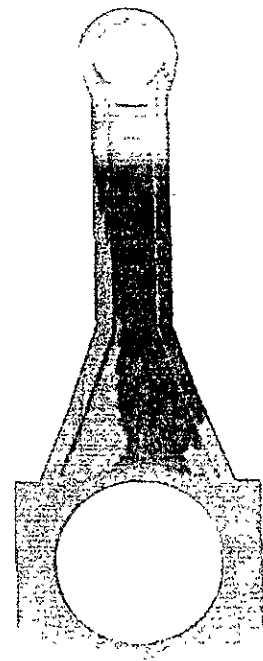
**Grafica 13. Distribución de los máximos esfuerzos de Von Mises Rojo<FS=1>Azúl**



6000 RPM



3000 RPM



800 RPM

Esfuerzos Máximos de Von Mises

Centro de Diseño  
CDM-DEPFI-UNAM

Bielá de Motor de Combustión Interna  
Análisis en Solids Works/Cosmos

León Camacho Horacio

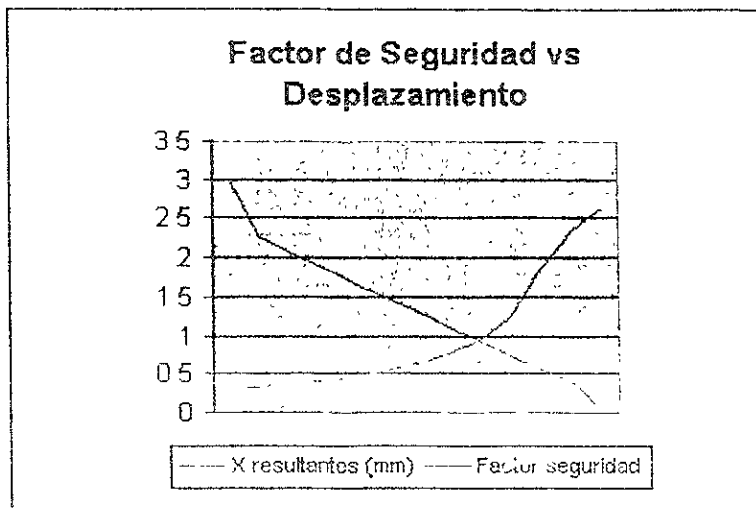


Lo anterior puede expresarse en función de los máximos desplazamientos  
Existentes en la tabla 23, y gráfica 14:

**Tabla 23**

Riesgo <1> Estable	
X resultantes (mm)	Factor seguridad
3	0.31191557
2.245	0.340131579
2.05	0.374185771
1.871	0.415817732
1.684	0.467873313
1.497	0.534828933
1.31	0.624147004
1.123	0.749275525
0.93	0.935746688
0.74	1.248290472
0.56	1.87433129
0.37	2.36248877
0.01	2.65

**Gráfica 14**



Los datos anteriores también son un resultado razonable, ya que a medida que los desplazamientos máximos se van reduciendo, el factor de seguridad se va incrementando, lo que nos indica que el análisis es correcto, de acuerdo a la ley de Hook,  $F=Kx$ .

El análisis anterior nos indica, que el acero utilizado con un esfuerzo de fluencia de 620.4 Mpa es adecuado, así mismo, podemos considerar la utilización de otro material, tal como el AISI 1020, esto obviamente implica considerar que al ir aumentando la resistencia a la tensión y la resistencia a la fluencia, la elongación del material se puede incrementar debido al contenido de carbono.

Realizar la modificación del o de los materiales, ya no es una tarea difícil, pues a partir de que se obtienen las cargas máximas a las que va a estar sometida la biela, podemos obtener los resultados de von Mises y con estos datos considerar la factibilidad económica de realizar modificaciones, esto depende de los factores



de peso, dimensiones, consumo de combustible, velocidad del motor, tiempo de aceleramiento de 0 Km/hr, hasta 100 Km/hr, ya que esto es una medición del factor de potencia de un vehículo, y de lo rápido que este sea. Teniendo esto en cuenta sólo haría falta considerar los costos de la manufactura y comenzar a realizar prototipos para la fabricación final.

Cabe mencionar que la realización de este análisis involucró una variedad de incógnitas y por los métodos tradicionales no se hubiese resuelto. Lo cuál confirma que Fem es una herramienta valiosa para la obtención de la distribución de esfuerzos en cualquier objeto, con cualquier característica ya sea de materiales o dimensiones

El análisis realizado fue utilizando un mallado para 12616 elementos con 21495 nodos, y con un Jacobiano de 4 puntos nodales con elemento triangular standard tridimensional.

Actualmente las industrias manufactureras como Mahle y Moresa, principales fabricantes y diseñadores en México, E.U, y Europa, están bajo una presión constante para reducir los tiempos de desarrollo y costos, lo cuál lo logran a través de un adecuado sistema de diseño, y costosas herramientas de simulación. Estas industrias utilizan computadoras altamente sofisticadas con una gran capacidad de almacenaje y una velocidad de respuesta casi inmediata, lo cuál les permite reducir los tiempos de análisis computacional, por consiguiente abre las puertas para la realización de mallados complejos con un gran número de elementos y generarlos automáticamente. Aunado a lo anterior, el tiempo de respuesta del análisis de la biela, tardó 2.5 horas, siendo que se utilizó el elemento triangular más sencillo, y con un jacobiano de 4 nodos

Este trabajo, es importante ya que la literatura existente no profundiza tanto en el desarrollo del análisis mecánico, y en algunos casos sólo se mencionan resultados y no sabemos a ciencia cierta como se obtuvieron. En cuanto a la información electrónica (Internet) la información se encuentra restringida y es necesario



efectuar pagos o tarifas para la obtención de artículos que a final de cuentas no muestran la información completa, debido a que la industria guarda celosamente su información, información valiosa y que cuesta mucho dinero.

Algo que es notable en la literatura de los motores de combustión interna, es que en los libros de prestigiados autores no se menciona el análisis del comportamiento mecánico del perno, esto debido a la complejidad de los factores térmicos inducidos y a la vibración generada por las fuerzas del gas. Así mismo no se encontró algún tipo de ecuación que englobará todos los factores para la determinación de las fuerzas de gas.

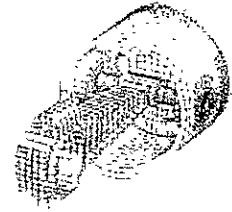
Hoy en día se fabrican bielas con cromo molibdeno, aleación 4340, níquel, vanadio, aluminio y titanio excelentes para resistir falla por fatiga, y someterlos a velocidades de hasta 9000 rpm.

Por último deseo mencionar, que el uso del método de los elementos finitos es una herramienta compleja, que involucra el conocimiento de una gran cantidad de conceptos matemáticos, así como de mecánica de sólidos, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, y programación avanzada entre otras ciencias, dependiendo de la aplicación.



1. The first part of the document is a list of names and titles, including the names of the authors and the titles of the papers presented at the conference.

# Anexos



Contenido:	
Comportamiento Mecánico de Materiales	113
Análisis de Esfuerzos	120
Deformaciones Unitarias	126

## Comportamiento Mecánico de los Materiales.

### ❖ Introducción.

La eficiencia del diseño se confía en la capacidad para predecir las circunstancias bajo la cual la falla de un material es probable que ocurra. Las variables que importan en la falla estructural incluyen la naturaleza estructural del material, como son:

- La configuración de carga
- El valor de la carga
- La forma, superficie y temperatura del cuerpo
- Condiciones ambientales

En términos generales, la falla se refiere a cualquier acción que conduce a una incapacidad por parte del la estructura o máquina para funcionar en la manera que se destinó. Seguida de la deformación permanente, fractura o deflexión excesiva lineal elástica.

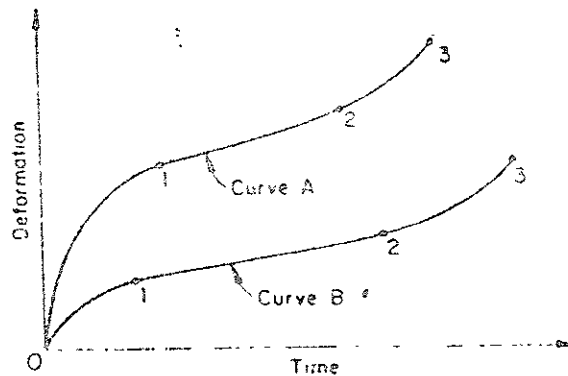
Uno de los factores más importantes que influyen en la falla es el valor de la carga aplicada. La carga dinámica conduce a una variedad de fenómenos adversos asociada con la vibración y aceleración de impacto, con niveles altos acompañados de esfuerzo y deformación así como también inversión rápida de esfuerzos.



## ❖ Fallas por Cedencia y Fractura.

### Cedencia.

A causa de una carga en un material no homogéneo o no uniforme, las regiones de alto esfuerzo pueden estar presentes, en la cual ocurre la cedencia localizada. Como la carga aumenta, la acción inelástica llega a ser más generalizada, resultando eventualmente en un estado de general de cedencia. La rapidez con que la transición de cedencia localizada ocurre es dependiente de las condiciones de servicio así como también de la distribución de esfuerzos y las propiedades de los materiales.



El movimiento relativo o deslizamiento entre dos planos de átomos (y el desplazamiento relativo de dos secciones de un cristal) representa el mecanismo más común de cedencia. El deslizamiento ocurre más fácilmente a lo largo de planos cristalográficos llamados planos de deslizamiento o cortante. Los planos a lo largo de los cuáles el deslizamiento tiene lugar, fácilmente son aquellos que contienen el número más grande de átomos por unidad de área. La energía de cedencia es claramente una cantidad estadística, como son las otras propiedades de los materiales tal como el módulo de elasticidad. Si un metal falla por cedencia, uno puede, con base en las consideraciones anteriores, esperar que el esfuerzo de corte juegue un papel importante.

### Fractura.

Es la separación de un cuerpo sujeto a un esfuerzo, en dos o más partes la fractura se clasifica en frágil o dúctil. La fractura frágil generalmente comprende la rápida propagación de una grieta, con el mínimo de absorción de energía y de deformación plástica. En los monocristales, la fractura frágil ocurre por clivaje a lo largo de un plano cristalográfico. En los materiales policristalinos, la superficie de fractura frágil muestra una apariencia granular debida a los cambios en la orientación de los planos de clivaje de un grano a otro.





Al igual que con la deformación plástica, la diferencia entre la resistencia a la fractura teórica y la resistencia a la fractura real se debe a irregularidades estructurales.

La fractura dúctil ocurre después de una considerable deformación plástica previa a la falla. La falla de la mayoría de los metales dúctiles policristalinos ocurre con una fractura copa y cono, asociada con la formación de un cuello en una probeta tensil.

❖ Teoría de las fallas por cedencia.

Consideremos un elemento sujeto a un estado general de esfuerzos, donde  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . El estado de esfuerzo cargado uniaxialmente es descrito por  $\sigma_1$ , el cual es igual a la fuerza normal dividida por su área transversal y  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Correspondientes al comienzo de la cedencia en una prueba de tensión simple son las cantidades de esfuerzo, deformación y energía de deformación mostradas en la segunda columna de la tabla siguiente. Notese que los miembros de esta columna se expresan en términos de la cedencia uniaxial en el punto de esfuerzos  $\sigma_{yp}$ , teniendo un significado especial en la predicción de fallas que involucran estados multiaxiales de esfuerzo.

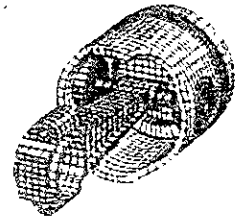
Cantidad	Prueba de tensión	Prueba de torsión
Máximo esfuerzo Principal	$\sigma_{yp}$	$\sigma_{yp} = \tau_{yp}$
Máximo esfuerzo Cortante	$\tau_{yp} = \sigma_{yp}/2$	$\tau_{yp}$
Máxima deformación principal	$\epsilon_{yp} = \sigma_{yp}/E$	$\epsilon_{yp} = \tau_{yp}(1+\nu)/E$
Máxima Energía de la Distorsión	$U_{oct} = ((1+\nu)/3)EJ\sigma_{yp}^2$	$U_{oct} = \tau_{yp}^2(1+\nu)/E$
Máximo Esfuerzo Cortante Octahédrico	$\tau_{oct} = ((\sqrt{3}/3)\sigma_{yp})$	$\tau_{oct} = ((\sqrt{3}/3)\tau_{yp})$

En el caso de un material en torsión simple, el estado de esfuerzos está dado por  $\tau = \sigma_1 = -\sigma_3$  y  $\sigma_2 = 0$ , aquí  $\tau$  es calculado usando la fórmula común de torsión.

Las propiedades de los materiales sujetos a esfuerzos normales uniaxiales o esfuerzos cortantes puros son fácilmente presentados en los diagramas esfuerzo deformación.

❖ La teoría de los esfuerzos principales máximos.

Según la teoría del esfuerzo principal máximo, un material falla por fluencia cuando el esfuerzo principal máximo excede a la energía de cedencia tensil, o cuando el esfuerzo principal mínimo excede la energía de compresión de fluencia.

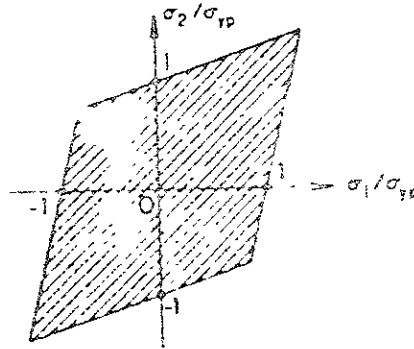


Estas pueden ser también dadas por  $\sigma_{yp}' = \sigma_{yp}'' = \sigma_{yp}$ :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}} - \nu \frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}} = \pm 1$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}} - \nu \frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}} = \pm 1$$

En la expresión anterior, para  $\nu=0.3$ , se grafica en la figura siguiente, donde nuevamente la región fuera de la frontera representa el estado para el cual, acordándonos de la teoría, la fluencia puede ser esperada.



❖ La teoría de la energía de distorsión máxima. 

En esta teoría, la falla por fluencia ocurre cuando, en cualquier punto del cuerpo, la energía de distorsión por unidad de volumen en un estado de esfuerzos combinados, llega a ser igual que la asociada con la fluencia en una prueba de tensión simple.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_{yp}^2$$

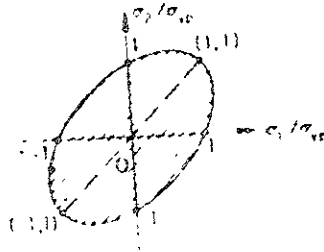
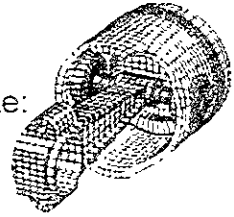
o en términos del esfuerzo principal,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{yp}^2$$

o alternativamente,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right)^2 = 1$$

La expresión anterior define la elipse mostrada en la figura siguiente:



La teoría de la energía de distorsión máxima o falla encuentra apoyo experimental en situaciones que involucran materiales dúctiles y esfuerzos planos. Por esta razón, es comúnmente usada en el diseño.

❖ **Comparación de las teorías de cedencia.**

Dos enfoques, pueden ser empleados con el objeto de comparar las teorías de cedencia hasta ahora discutidas, para un material con  $\sigma'_{yp} = \sigma''_{yp}$ . La primera comparación es hecha al igualar para cada teoría los valores críticos que corresponden a carga uniaxial y torsión para la relación de Poisson  $\nu=0.3$ . Referido a la tabla que mostramos al inicio de este capítulo, tenemos:

La teoría de los esfuerzos principales máximos:

$$\tau_{py} = \sigma_{py}$$

La teoría de los esfuerzos cortantes máximos:

$$\tau_{py} = 0.50 \sigma_{py}$$

La teoría de deformación principal máxima.

$$\tau_{py} = 0.77 \sigma_{py}$$

La teoría de energía de distorsión máxima:

$$\tau_{py} = 0.577 \sigma_{py}$$

Se observa que las diferencias entre las diversas teorías son considerables.

❖ **Teoría de la fractura.**

Las anteriores teorías representan intentos de predecir la falla debido a la cedencia. Los materiales quebradizos, incluyendo una variedad de metales y plástico, muestran poca cedencia, y no un esfuerzo de cedencia, en términos prácticos, existe la falla en tales materiales quebradizos y se predice sobre la resistencia última, por suponer que los esfuerzos último y de fractura son iguales. Estas teorías de falla por cedencia las cuales no involucran la ley de Hooke, pueden convertirse para aplicarse en la fractura por simplemente reemplazo de los esfuerzos  $\sigma'_{yp}$ ,  $\sigma''_{yp}$ , y  $\tau_{yp}$  con los esfuerzos uniaxiales últimos  $\sigma'_{u}$ ,  $\sigma''_{u}$ , y  $\tau_u$  respectivamente. El esfuerzo principal máximo, el máximo esfuerzo cortante,



esfuerzo octaédrico cortante, Mohr, y las teorías Coulomb-Mohr de pueden ser analizadas.

#### ❖ Criterio de Falla para Fatiga de Metales.

Un tipo común de fatiga consiste en las cargas sinusoidales de esfuerzos sobre un esfuerzo uniforme; tales variaciones de esfuerzo con el tiempo ocurren en los casos de vibración de un miembro estructural, que transmite una carga constante, y lo podemos definir de la siguiente manera:

$$\sigma_m = 0.5((\sigma_{\max} + \sigma_{\min}))$$

$$\sigma_a = 0.5((\sigma_{\max} - \sigma_{\min}))$$

que se definen como los esfuerzos medios o promedios del esfuerzo de fatiga.

La componente de los esfuerzos alternativos es el factor más importante que determina el número de ciclos de carga que un material puede soportar sin fracturarse.

Para entender con mayor detenimiento este tipo de fatiga, existen las ecuaciones de Goodman, Soderberg, Gerber, de las cuales las más acertadas son las dos primeras.

# Análisis de Esfuerzos.



Existen dos tipos básicos de fuerzas que actúan en un cuerpo para producir esfuerzos, las primeras denominadas fuerzas de superficie, y las segundas fuerzas de cuerpo, como pueden ser la fuerza centrífuga, la fuerza gravitacional, etc.

En el tema de elasticidad analizaremos cuerpos que son:

- Continuos.
- Lineales.
- Elásticos.
- Homogéneos.
- Isotropos.

Entendiendo por **Continuidad**, a aquellos materiales que al ser estudiados pueden idealizarse, olvidando su estructura molecular, como si estuviesen contruidos por una masa continua, sin huecos ni separaciones en su interior.

La **Linealidad**, se refiere a que al someterse un cuerpo bajo la carga de esfuerzos, éstos son proporcionales a la deformación de acuerdo a las gráficas de esfuerzo contra deformación de cada material.

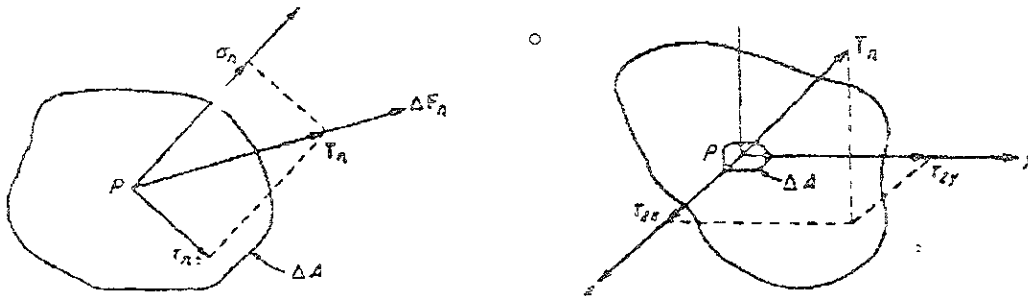
Se dice que un material se comporta **elásticamente** cuando sus deformaciones son proporcionales a los esfuerzos locales. El material tiende a deformarse un cierto incremento en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , bajo la acción de una fuerza exterior y tiende a recuperar su forma original siempre y cuando no rebase su límite de fluencia en las gráficas de esfuerzo deformación, propias de cada material.

La **Homogeneidad** se da cuando los materiales conservan sus propiedades, las cuales no cambian en su estructura.

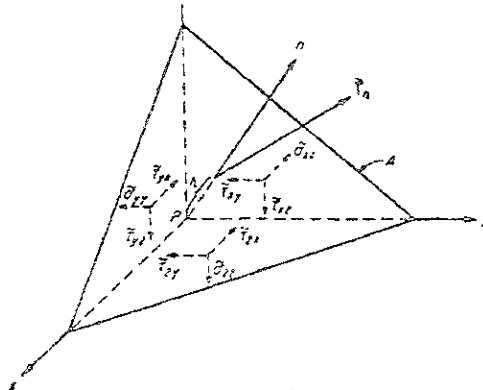
Al hablar de **Isotropía** suponemos que la microestructura del material consiste de elementos orientados al azar y excluimos por consiguiente la existencia de direcciones preferenciales para sus propiedades mecánicas. También la isotropía implica que el efecto de deformación producido en el material por determinado sistema de fuerzas no depende de la orientación del material mismo.

## ❖ Estado de Esfuerzos en un Punto.

En un punto de interés dado, dentro de un cuerpo, la magnitud y dirección del esfuerzo resultante  $T_n$ , depende de la orientación del plano que pasa a través del punto. Así un número infinito de vectores esfuerzo resultante pueden ser usados para representar el esfuerzo resultante en cada punto desde un número infinito de planos que pueden pasar a través de cada punto.



La magnitud y dirección de cada vector esfuerzo resultante, puede ser especificado en términos de 9 componentes cartesianas de esfuerzo actuando en el punto. Esto puede observarse por medio del equilibrio elemental del Tetrahedro



En esta figura, el esfuerzo actúa sobre las cuatro caras del Tetrahedro, las cuales son representadas por sus valores promedio, así, para que el tetrahedro se encuentre en equilibrio se debe considerar la condición de equilibrio en la dirección X.

$$\hat{T}_{nx} A - \hat{\sigma}_{xx} A \cos(n, x) - \hat{\tau}_{yx} A \cos(n, y) - \hat{\tau}_{zx} A \cos(n, z) + \hat{F}_x \frac{1}{3} hA = 0$$

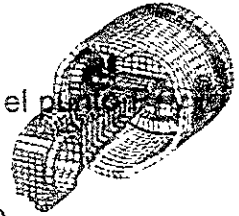
Donde h= Altitud del Tetrahedro.

A= Área de la base del tetrahedro.

$F_x$ = Fuerza de cuerpo promedio en la dirección X.

$T_{nx}$ = Componente de esfuerzo resultante en la dirección X.

Y  $A \cos(n, x)$ ,  $A \cos(n, y)$ ,  $A \cos(n, z)$  son las proyecciones del área A en los planos yz, xz, xy, respectivamente. Después de considerar que  $h \rightarrow 0$ , y eliminando



el factor A, se observa que los esfuerzos promedio son exactos en el punto A. La expresión se convierte a:

$$T_{nx} = \sigma_{xx} \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z)$$

De esta misma manera, considerando el equilibrio en las direcciones y, z, respectivamente, obtenemos, las expresiones siguientes, similares a la anterior.

$$T_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_{yy} \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z)$$

$$T_{nz} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_{zz} \cos(n, z)$$

Calculando la magnitud y dirección del esfuerzo resultante total tenemos lo siguiente:

$$|T_n| = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2}$$

Los 3 Cosenos directores, definen la línea de acción del esfuerzo resultante:

$$\cos(T_n, x) = \frac{T_{nx}}{|T_n|} \quad \cos(T_n, y) = \frac{T_{ny}}{|T_n|} \quad \cos(T_n, z) = \frac{T_{nz}}{|T_n|}$$

El esfuerzo normal y el esfuerzo cortante pueden ser determinados con las siguientes expresiones:

$$\sigma_n = T_{nx} \cos(n, x) + T_{ny} \cos(n, y) + T_{nz} \cos(n, z)$$

$$\tau_n = \sqrt{T_n^2 - \sigma_n^2}$$

### ❖ Ecuaciones de Equilibrio.

En un cuerpo sujeto a un sistema general de fuerzas de cuerpo y superficie, los esfuerzos de magnitud y dirección variable se producen a través del cuerpo. La distribución de estos esfuerzos debe mantener el equilibrio en todo el cuerpo, además del equilibrio en cada elemento del cuerpo. En el elemento que se muestra en la siguiente figura, las componentes de esfuerzo y fuerzas de cuerpo, actúan en la dirección X, así como en las direcciones Y, Z. Los valores de esfuerzo mostrados son esfuerzos promedios sobre las caras de un elemento el cual se asume que es muy pequeño. Una sumatoria de fuerzas en las direcciones X, Y, Z, y realizando las simplificaciones adecuadas tenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$



Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de equilibrio. En la obtención de estas ecuaciones, tres de las seis condiciones de equilibrio han sido empleadas, las tres condiciones restantes pueden ser utilizadas para establecer relaciones adicionales entre los esfuerzos.

Considerando el elemento mostrado en la siguiente figura, en la cuál solamente las componentes de esfuerzo que producen un momento cerca del eje Y se muestran; el sistema coordenado ha sido seleccionado con su origen en el centroide del elemento, las componentes de esfuerzo normal y las fuerzas de cuerpo no producen ningún momento.

La sumatoria de momentos da la siguiente expresión:

$$\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy \frac{dz}{2} + \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy \frac{dz}{2} - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz \frac{dx}{2} = 0$$

Las dos condiciones de equilibrio restantes se obtienen de la misma forma, y también se establece que:

$$\tau_{xx} dx dy dz - \tau_{xx} dx dy dz = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Las igualdades anteriores se reducen a 9 componentes de esfuerzo para seis componentes independientes. las cuáles se describen el siguiente arreglo matricial denominado, Tensor de esfuerzos.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

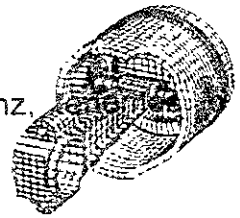
### ❖ Leyes de Transformación de Esfuerzos.

Como anteriormente se mostró que el vector esfuerzo resultante  $T_n$ , actúa en un plano arbitrario definido por una normal  $n$ , que puede ser determinada por la sustitución de seis componentes cartesianas independientes de esfuerzo. Partiendo de lo anterior y sabiendo que estas componentes se refieren a un sistema coordenado  $Oxyz$ , y es deseable hacer otra transformación a otro sistema  $O'x'y'z'$ , es necesario utilizar las leyes de transformación de esfuerzos.

Considerando un elemento como el mostrado en la siguiente figura, en la cuál dos direcciones mutuamente perpendiculares  $n'$  y  $n''$  pueden ser denotadas en el plano de la cara inclinada. La magnitud del vector esfuerzo resultante actuando en la cara inclinada puede ser resuelto con las componentes a través de las direcciones



$n, n'$  y  $n''$ . Utilizando las componentes cartesianas  $T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}$ , siguiente:



$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= T_{nx} \cos(n,x) + T_{ny} \cos(n,y) + T_{nz} \cos(n,z) \\ \tau_{nn'} &= T_{nx} \cos(n',x) + T_{ny} \cos(n',y) + T_{nz} \cos(n',z) \\ \tau_{nn''} &= T_{nx} \cos(n'',x) + T_{ny} \cos(n'',y) + T_{nz} \cos(n'',z)\end{aligned}$$

Si los resultados de las ecuaciones,  $T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}$  y  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , se sustituyen dentro de las ecuaciones anteriores, obtenemos la siguiente expresión:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} \cos^2(n,x) + \sigma_{yy} \cos^2(n,y) + \sigma_{zz} \cos^2(n,z) + 2\tau_{xy} \cos(n,x) \cos(n,y) + 2\tau_{yz} \cos(n,y) \cos(n,z) + 2\tau_{zx} \cos(n,z) \cos(n,x)$$

$$\begin{aligned}\tau_{nn'} &= \sigma_{xx} \cos(n,x) \cos(n',x) + \sigma_{yy} \cos(n,y) \cos(n',y) + \sigma_{zz} \cos(n,z) \cos(n',z) \\ &+ \tau_{xy} (\cos(n,x) \cos(n',y) + \cos(n,y) \cos(n',x)) + \tau_{yz} (\cos(n,y) \cos(n',z) + \cos(n,z) \cos(n',y)) \\ &+ \tau_{zx} (\cos(n,z) \cos(n',x) + \cos(n',z) \cos(n,x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nn''} &= \sigma_{xx} \cos(n,x) \cos(n'',x) + \sigma_{yy} \cos(n,y) \cos(n'',y) + \sigma_{zz} \cos(n,z) \cos(n'',z) \\ &+ \tau_{xy} (\cos(n,x) \cos(n'',y) + \cos(n,y) \cos(n'',x)) + \tau_{yz} (\cos(n,y) \cos(n'',z) + \cos(n,z) \cos(n'',y)) \\ &+ \tau_{zx} (\cos(n,z) \cos(n'',x) + \cos(n'',z) \cos(n,x))\end{aligned}$$

Estas ecuaciones proveen los medios para determinar las componentes de los esfuerzos normales y cortantes en un punto asociado con cualquier eje cartesiano al que se refiera, de acuerdo a los esfuerzos que se conocen en uno de los ejes cartesianos

Para determinar los  $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'y'}, \sigma_{z'z'}$ , apoyandonos de las ecuaciones anteriores, seleccionamos un plano que coincida con  $x''$  por lo cual un  $T_n$  está asociado a  $T_{n''}$  en este plano, sustituyendo  $x'$  por  $n$ ,  $y'$  por  $n$ , y  $z'$  por  $n$  en sus ecuaciones homologas obtenemos las expresiones, para las ecuaciones de transformación de esfuerzos.

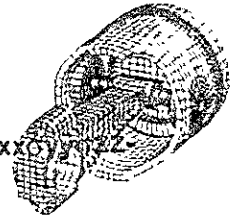
#### ❖ Esfuerzos Principales.

Si por un punto P de un medio continuo, tomamos una dirección  $n$ , el esfuerzo  $T_n$  correspondiente, tendrá por lo general una dirección diferente de  $n$ ; ahora si  $T_n$  coincide con la normal  $n$ , está claro que el esfuerzo cortante desaparece y  $T_n$   $\sigma_n$ , y  $n$  coinciden.

Si  $n$  es seleccionada tal que coincida con  $T_n$ , entonces el plano definido por  $n$  es conocido como plano principal. La dirección dada por  $n$  es una dirección principal y el esfuerzo normal que actúa en este plano particular es un esfuerzo principal

Las raíces de la ecuación cúbica siguiente son los esfuerzos principales:

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau^2_{xy} - \tau^2_{yz} - \tau^2_{zx})\sigma - (\sigma_{xx}\tau^2_{yz} - \sigma_{yy}\tau^2_{zx} - \sigma_{zz}\tau^2_{xy} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0$$



al resolver esta ecuación, nos encontramos con 3 soluciones, que pueden ser iguales, diferentes entre sí, o dos de ellas ser iguales, pero diferentes a la tercera.

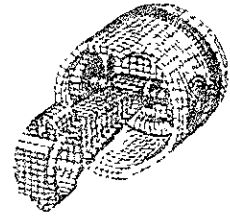
La ecuación cúbica anterior también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0$$

Donde  $I_1, I_2, I_3$ , representan las invariantes de esfuerzos.

Las raíces de la ecuación cúbica que representan los esfuerzos principales son características que dependen del estado de esfuerzos en el punto y no de la posición de los ejes coordenados. Esto no sería posible si los coeficientes de la ecuación si variarían al cambiar los ejes, concluimos que necesariamente, también los coeficientes  $I_1, I_2, I_3$  son invariantes con respecto a tales cambios, es por eso que se llaman respectivamente primer, segundo, y tercer invariante de esfuerzos.

# Deformaciones Unitarias y Relaciones de Esfuerzo/Deformación.



## ❖ Introducción.

el estado de esfuerzos se desarrolla en un punto arbitrario dentro de un cuerpo como resultado de las fuerzas de cuerpo o de superficie. Las relaciones obtenidas se basaron en las condiciones de equilibrio y no se asumió que fuese hecho con relación a las deformaciones del cuerpo ó las propiedades físicas del material, del cuál el cuerpo está constituido, los resultados son validos para cualquier material y para cualquier cantidad de deformación en él cuerpo. Puesto que la deformación es una cantidad puramente geométrica, no se requieren restricciones, como sea, para obtener las ecuaciones lineales que describen el desplazamiento de las deformaciones, las restricciones mencionadas deben ser localizadas sobre las deformaciones permitidas. Más adelante, al desarrollar las relaciones de esfuerzo/deformación, las constantes elásticas del cuerpo deben ser consideradas.

Si varios puntos de un cuerpo bajo diferentes movimientos, y cada uno de ellos puede ser representado por un único vector de desplazamiento, cada vector se puede resolver con componentes paralelas a los ejes cartesianos, tales como  $u, v, w$  en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

El movimiento de un cuerpo puede ser considerado como la suma de dos partes:

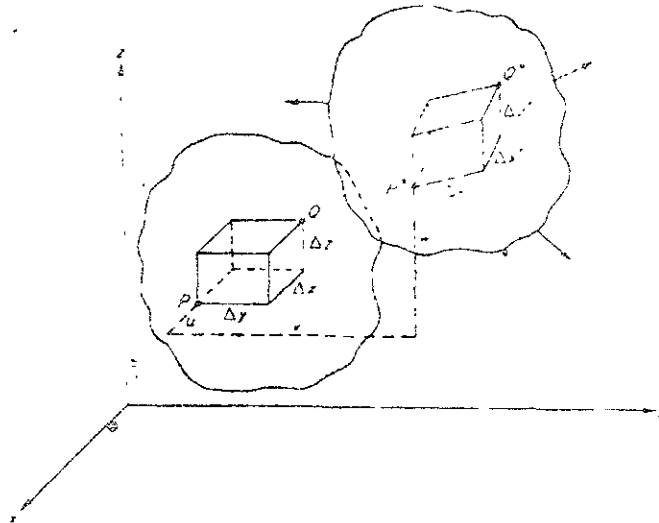
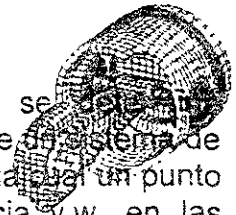
1. Una traslación y Rotación del cuerpo.
2. El movimiento de los puntos del cuerpo respecto a otro cuerpo.

La traslación ó rotación de un cuerpo es conocida como movimiento del cuerpo rígido. El movimiento de los puntos del cuerpo respecto a otro es conocido como Deformación.

Una deformación Lineal es definida como el cambio en la longitud de un segmento de línea entre dos puntos. Es decir, La longitud final, menos la longitud inicial, entre la longitud inicial.

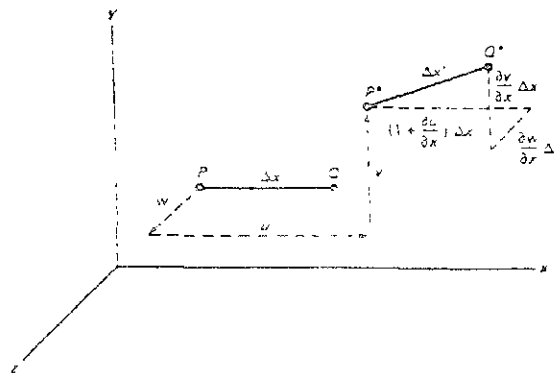
Una deformación angular es el cambio entre el ángulo de dos rectas inicialmente ortogonales, cuando es aplicado un sistema de fuerzas.

La relación entre las deformaciones y los desplazamientos se puede apreciar considerando la deformación de un cubo en un cuerpo por medio de un sistema de cargas aplicadas. Esto puede apreciarse en la siguiente figura, en la cual un punto "p" se mueve una distancia  $u$ , en la dirección  $x$ , una distancia  $v, w$ , en las



direcciones  $y, z$ , respectivamente.

Considerando la línea PQ, la cuál es paralela al eje X, como se muestra en la figura;  $y, z$  son constantes a través de PQ, para las cuales obtenemos las siguientes ecuaciones de desplazamiento:



$$U^* = u + (\partial u / \partial x) \Delta x \quad v^* = v + (\partial v / \partial x) \Delta x \quad w^* = w + (\partial w / \partial x) \Delta x$$

Aplicando la fórmula de deformación longitudinal, tenemos las siguientes expresiones:

$$\epsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1$$

$$\epsilon_{yy} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1$$

$$\epsilon_{zz} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} - 1$$



Debemos enfatizar, que dentro de los problemas de ingeniería existen una gran variedad de casos, en los cuáles podemos analizar deformación longitudinal, angular, etc, también debemos considerar que los desplazamientos y deformaciones son muy pequeños. Bajo estas condiciones, las ecuaciones de desplazamiento deformación frecuentemente encontradas en la teoría de la elasticidad son las siguientes:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

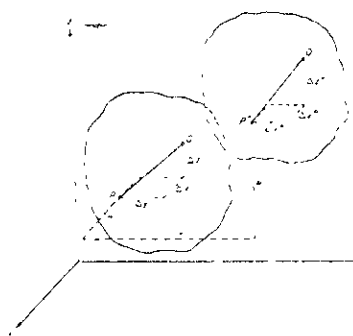
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

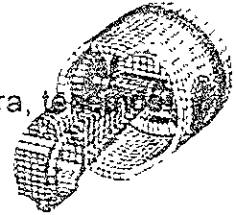
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

❖ Ecuaciones de Transformación.

Ahora, que las deformaciones normal y cortante han sido determinadas, consideremos la deformación normal en una dirección arbitraria. Y considerando la deformación longitudinal, tenemos:

$$\epsilon_{PQ} = \frac{P^*Q^* - PQ}{PQ} \dots \dots \dots (a)$$





Partiendo de las consideraciones geométricas mostradas en la figura, tenemos:

$$(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \dots\dots\dots (b)$$

$$(P^*Q^*)^2 = (\Delta x^*)^2 + (\Delta y^*)^2 + (\Delta z^*)^2 \dots\dots\dots (c)$$

$$\Delta x^* = (1 + \frac{\partial u}{\partial x})\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

$$\Delta y^* = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + (1 + \frac{\partial v}{\partial y})\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z \dots\dots\dots (d)$$

$$\Delta z^* = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + (1 + \frac{\partial w}{\partial z})\Delta z$$

Si las ecuaciones (d) se sustituyen dentro de (c), la longitud de la línea deformada  $P^*Q^*$ , puede ser encontrada, así, tenemos:

$$\begin{aligned} (P^*Q^*)^2 = & \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)(\Delta x)^2 + \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y}\right)(\Delta y)^2 \\ & + \left(1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z}\right)(\Delta z)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y \\ & + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \Delta y \Delta z + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Delta z \Delta x \end{aligned} \quad (e)$$

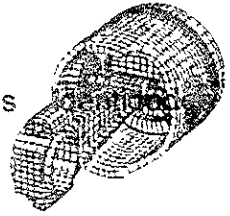
La ecuación a puede ser arreglada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{PQ} &= \frac{P^*Q^*}{PQ} - 1 \\ (\epsilon_{PQ} + 1)^2 &= \left(\frac{P^*Q^*}{PQ}\right)^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, si las ecuaciones b y e se sustituyen dentro del arreglo anterior se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{PQ} + 1)^2 = & \cos^2(x, PQ) + \cos^2(y, PQ) + \cos^2(z, PQ) \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, PQ) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, PQ) + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, PQ) \\ & + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cos(x, PQ) \cos(y, PQ) \\ & + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cos(y, PQ) \cos(z, PQ) \\ & + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos(z, PQ) \cos(x, PQ) \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación anterior, haciendo uso de las trigonométricas, donde:



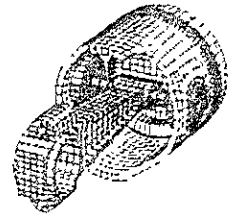
$$\cos^2(x, PQ) + \cos^2(y, PQ) + \cos^2(z, PQ) = 1$$

Lo cuál implica que la ecuación anterior se modifique a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{PQ} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2(x, PQ) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2(y, PQ) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2(z, PQ) \\ &+ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(x, PQ) \cos(y, PQ) \\ &+ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(y, PQ) \cos(z, PQ) \\ &+ \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(z, PQ) \cos(x, PQ) \end{aligned}$$

Por medio de esta ecuación y las relaciones generales de desplazamiento, podemos determinar  $\epsilon_{xx}$  seleccionando la dirección de PQ paralela al eje  $x', y', z'$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'x'} &= \epsilon_{xx} \cos^2(x, x') + \epsilon_{yy} \cos^2(y, x') \\ &+ \epsilon_{zz} \cos^2(z, x') + \gamma_{xy} \cos(x, x') \cos(y, x') \\ &+ \gamma_{yz} \cos(y, x') \cos(z, x') \\ &+ \gamma_{zx} \cos(z, x') \cos(x, x') \\ \epsilon_{y'y'} &= \epsilon_{yy} \cos^2(y, y') + \epsilon_{zz} \cos^2(z, y') \\ &+ \epsilon_{xx} \cos^2(x, y') + \gamma_{yz} \cos(y, y') \cos(z, y') \\ &+ \gamma_{zx} \cos(z, y') \cos(x, y') \\ &+ \gamma_{xy} \cos(x, y') \cos(y, y') \\ \epsilon_{z'z'} &= \epsilon_{zz} \cos^2(z, z') + \epsilon_{xx} \cos^2(x, z') \\ &+ \epsilon_{yy} \cos^2(y, z') + \gamma_{zx} \cos(z, z') \cos(x, z') \\ &+ \gamma_{xy} \cos(x, z') \cos(y, z') \\ &+ \gamma_{yz} \cos(y, z') \cos(z, z') \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} = & 2\epsilon_{xx} \cos(x, x') \cos(x, y') \\ & + 2\epsilon_{yy} \cos(y, x') \cos(y, y') \\ & + 2\epsilon_{zz} \cos(z, x') \cos(z, y') \\ & + \gamma_{xy} [\cos(x, x') \cos(y, y') + \cos(x, y') \cos(y, x')] \\ & + \gamma_{yz} [\cos(y, x') \cos(z, y') + \cos(y, y') \cos(z, x')] \\ & + \gamma_{zx} [\cos(z, x') \cos(x, y') + \cos(z, y') \cos(x, x')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{y'z'} = & 2\epsilon_{yy} \cos(y, y') \cos(y, z') \\ & + 2\epsilon_{zz} \cos(z, y') \cos(z, z') \\ & + 2\epsilon_{xx} \cos(x, y') \cos(x, z') \\ & + \gamma_{yz} [\cos(y, y') \cos(z, z') + \cos(y, z') \cos(z, y')] \\ & + \gamma_{zx} [\cos(z, y') \cos(x, z') + \cos(z, z') \cos(x, y')] \\ & + \gamma_{xy} [\cos(x, y') \cos(y, z') + \cos(x, z') \cos(y, y')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{z'x'} = & 2\epsilon_{zz} \cos(z, z') \cos(z, x') \\ & + 2\epsilon_{xx} \cos(x, z') \cos(x, x') \\ & + 2\epsilon_{yy} \cos(y, z') \cos(y, x') \\ & + \gamma_{zx} [\cos(z, z') \cos(x, x') + \cos(z, x') \cos(x, z')] \\ & + \gamma_{xy} [\cos(x, z') \cos(y, x') + \cos(x, x') \cos(y, z')] \\ & + \gamma_{yz} [\cos(y, z') \cos(z, x') + \cos(y, x') \cos(z, z')] \end{aligned}$$

Estas seis ecuaciones son las ecuaciones de transformación y pueden ser usadas para transformar las seis componentes cartesianas de deformación/desplazamiento en un sistema  $Oxyz$  a otro sistema  $O'x'y'z'$ .

### ❖ Deformaciones Principales.

Ya que existe una similitud entre las leyes de transformación de esfuerzos y deformaciones, se concluye que existen al menos tres diferentes deformaciones desplazamiento principales, con sus direcciones principales asociadas, y realizando las sustituciones adecuadas, llegamos a una ecuación cúbica similar a la del capítulo 1.

$$\epsilon_n^3 - (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})\epsilon_n^2 + (\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} - (1/4)\gamma_{xy}^2 - (1/4)\gamma_{yz}^2 - (1/4)\gamma_{zx}^2)\epsilon_n - (\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}(1/4)\gamma_{yz}^2 - \epsilon_{yy}(1/4)\gamma_{zx}^2 - \epsilon_{zz}(1/4)\gamma_{xy}^2 + (1/4)\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}) = 0$$

Para lo cual existen tres únicas soluciones, y sus significados son similares a los expuestos en el capítulo 1.



Similarmente, existen 3 invariantes de desplazamientos que son análogos a los 3 invariantes de esfuerzos, y se denominan por medio de J1, J2 y J3.



### ❖ Ecuaciones de Compatibilidad.

Dado un campo de desplazamientos, tres ecuaciones que expresan a  $u, v, w$  como funciones de las direcciones  $x, y, z$ , y un único campo de deformaciones puede ser obtenido por medio de las ecuaciones generales de deformación. De cualquier manera un campo arbitrario de deformaciones no puede ser un campo de desplazamientos. Esto tiene que ver con las incógnitas que tenemos en un sistema, ya que contamos con un sistema de seis ecuaciones, y podemos tener 3 posibles soluciones, entonces tenemos un problema sobredeterminado, y es necesario evaluar por medio de las ecuaciones de compatibilidad, cuál es la posible solución del sistema.

Estas ecuaciones de compatibilidad se muestran a continuación:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2}$$

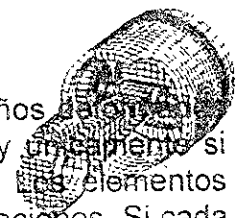
$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Para entender mejor las relaciones de compatibilidad, consideremos un cuerpo bidimensional, hecho de un gran número de elementos cuadráticos. Cuando el cuerpo se somete a carga, los elementos se deforman. Midiendo los cambios de longitud y angulares de cada elemento, este procedimiento se logra por medio de la diferenciación del campo de desplazamientos. Ahora consideremos el problema



inverso, en el cuál tenemos un gran número de elementos pequeños, los cuales van a formar un cuerpo libre de discontinuidades. Si y únicamente si cada elemento está deformado el cuerpo puede reensamblarse. Los elementos deformados corresponden al caso descrito en el campo de deformaciones. Si cada elemento garantiza satisfactoriamente el campo de desplazamientos, entonces las relaciones de compatibilidad se satisfacen.

#### ❖ Relaciones de Esfuerzo - Deformación.

En esta sección el esfuerzo va a ser descrito en términos de la deformación, en relación lineal, lo cuál nos permite escribir las siguientes expresiones generales de esfuerzo- deformación.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= K_{11}\epsilon_{xx} + K_{12}\epsilon_{yy} + K_{13}\epsilon_{zz} + K_{14}\gamma_{xy} + K_{15}\gamma_{yz} + K_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_{yy} &= K_{21}\epsilon_{xx} + K_{22}\epsilon_{yy} + K_{23}\epsilon_{zz} + K_{24}\gamma_{xy} + K_{25}\gamma_{yz} + K_{26}\gamma_{zx} \\ \sigma_{zz} &= K_{31}\epsilon_{xx} + K_{32}\epsilon_{yy} + K_{33}\epsilon_{zz} + K_{34}\gamma_{xy} + K_{35}\gamma_{yz} + K_{36}\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= K_{41}\epsilon_{xx} + K_{42}\epsilon_{yy} + K_{43}\epsilon_{zz} + K_{44}\gamma_{xy} + K_{45}\gamma_{yz} + K_{46}\gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= K_{51}\epsilon_{xx} + K_{52}\epsilon_{yy} + K_{53}\epsilon_{zz} + K_{54}\gamma_{xy} + K_{55}\gamma_{yz} + K_{56}\gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= K_{61}\epsilon_{xx} + K_{62}\epsilon_{yy} + K_{63}\epsilon_{zz} + K_{64}\gamma_{xy} + K_{65}\gamma_{yz} + K_{66}\gamma_{zx} \end{aligned}$$

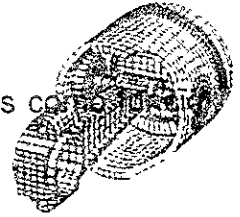
Donde  $K_{11}$  hasta  $K_{66}$  son los coeficientes de elasticidad del material y son independientes de la magnitud tanto del esfuerzo, como de la deformación, siempre y cuando el límite elástico del material no sea excedido, ya que si este es el caso, las ecuaciones anteriores no son válidas.

Son 36 coeficientes de elasticidad, y no todas son independientes. Por medio de la teoría de la energía de deformación el número de coeficientes independientes puede ser reducido a 21 constantes. Asumiendo que el material es isotrópico, que las constantes elásticas son las mismas en todas las direcciones e independientes de la selección del sistema de coordenadas, las 21 constantes se reducen a 2.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda J_1 + 2\mu \epsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda J_1 + 2\mu \epsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda J_1 + 2\mu \epsilon_{zz} \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} \end{aligned}$$

Donde  $J_1$  es la primer invariante de desplazamientos.  
 $\lambda$  es la constante de Lamé's  
 $\mu$  es el modulo de corte

Estas ecuaciones pueden ser resueltas para dar las deformaciones como función de los esfuerzos.



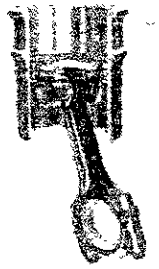
$$\epsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{\mu} \tau_{zx}$$

# **Bibliografía**



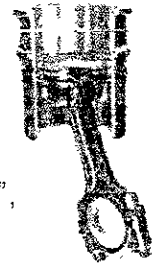
*Bibliografía*



## **Bibliografía**

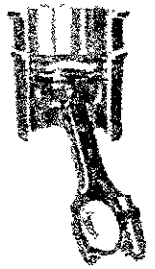
- Fenner T Roger, “**Finite Element Methods for Engineers**”, Imperial College Press, 1996
- William B. Bickford. “**A First Course in the Finite element Method**”. Second Edition. 1994.
- Harold C. Martin. “**Introduction to Finite Element Analysis Theory and Application**”. Mc Graw Hill. 1975.
- **Apuntes de Introducción al Método del Elemento Finito**, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Colorado, E.U, 1986.
- Adams and Askenazi. “**Finite Element Analysis**” OnWord Press. 1999.
- Bathe Jurgen Klaus and Wilson. “**Numerical Methods in Finite element analysis**”, 1985, Edit Prentice Hall.
- Buchanan R, George. “**Finite Element Analysis**”, Schaum’s, 1999.
- Oden, Carey, and Becker. “**Finite element an Introduction**”. Prentice Hall, 1981.
- Chandrupatla, Belegundu. “**Introducción al estudio del elemento finito en Ingeniería**”, Segunda Edición, 1999, Prentice Hall.
- Gerald Curtis F. “**Análisis Numérico**”. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México 1987.
- Burden L.R Faires, J.D. “**Análisis Numérico**”. Grupo Editorial Iberoamérica, México 1985.
- Stewart James. “**Cálculo, Conceptos y Contexto**”. Thomson Editores, 1999.
- Godínez Héctor, “**Algebra Lineal, Teoría y Ejercicios**”, Facultad de Ingeniería, UNAM
- Zill, Dennis, “**Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones**”, Segunda Edición. Editorial Iberoamérica 1986
- Chapra and Canale. “**Métodos Numéricos para Ingenieros**” Mc Graw Hill 1988

# **Bibliografía**



- Rembold and Nnaji, "**Computer Integrated Manufacturing and Engineering**", Addison-Wesley, 1997
- Mott, **Diseño de Elementos de Maquinas**, editorial Prentice may, 1995
- Mompin Poblet José, "**Sistemas CAD/CAM/CAE, diseño y fabricación por Computadora**", Marcombo, 1989.
- Shigley, J.E, and L.D, Mitchell, "**Mechanical Engineering Design**", Mc Graw Hill, New York, 1983.
- Groover, M.P, and E, Zimmers, "**Computer Aided Design and Manufacturing**", Prentice Hall.
- Norton, Robert, "**Diseño de Maquinaria**", Mc Graw Hill 1990.
- Heywood John, "**Internal Combustion Engine Fundamentals**", Mc Graw Hill, SAE, 1989
- Taylor Charles, "**The Internal Combustion Engine in Theory and Practice**", MIT, USA., SAE, 1985
- M. Muñoz, y Payri "**Motores de Combustión Interna Alternativos**", Sección de Publicaciones de España UPM
- Stone Richard, "**Introduction to Internal Combustión Engines**", 2nd Edition. SAE and Mcmillan Press, 1993.
- Orthwein, C. William, "**Diseño de Componentes de Maquinas**" Editorial CECSA
- Beer and Johnston Jr, "**Mecánica de Materiales**", Editorial Mc Graw Hill
- Popov, Egor, "**Mecánica de Sólidos**", Editorial Limusa, 1992.
- Beer, Ferdinand, "**Mecánica de Materiales**", Segunda Edición, Mc Graw Hill, 1993.
- Church.H Austin, "**Cinematica de las Maquinas**", 5° Edición, Guillet. 1967

# **Bibliografía**



## **Páginas Consultadas en Internet :**

[www.femur.wpi.edu](http://www.femur.wpi.edu)  
[www.cosmosm.com](http://www.cosmosm.com)  
[www.cadsystems.com/news](http://www.cadsystems.com/news)  
[www.algor.com](http://www.algor.com)  
[www.colorado.edu/mbs](http://www.colorado.edu/mbs)  
[www.technalithics.com/engineer.html](http://www.technalithics.com/engineer.html)  
[www.nmt.edu](http://www.nmt.edu)  
[www.itl.nist.gov](http://www.itl.nist.gov)  
[www.freebyte.com/cad/fea.htm](http://www.freebyte.com/cad/fea.htm)  
[www.members.dencity.com/thefemsite/index.html](http://www.members.dencity.com/thefemsite/index.html)  
[www.msc.com](http://www.msc.com)  
[www.marc.com](http://www.marc.com)  
[www.farndon.com](http://www.farndon.com)  
[www.automóvil.com](http://www.automóvil.com)  
[www.crower.com](http://www.crower.com)  
[www.oliver.com](http://www.oliver.com)  
[www.carrilloind.com](http://www.carrilloind.com)  
[www.topperformance.com](http://www.topperformance.com)  
[www.mahle.com](http://www.mahle.com)  
[www.mahle.com.mx](http://www.mahle.com.mx)  
[www.unik.com](http://www.unik.com)  
[www.fl.com](http://www.fl.com)  
[www.sae.com](http://www.sae.com)

## **Artículos Especiales :**

- Ramos, Elias. “Desarrollo del Diseño de Piston usando simulación Numérica y Pruebas de Maquinaria.” Pistones Moresa and Ricardo Software. Detroit
- Ramos, Elias , “From Concept to Practice”, Pistones Moresa and Ricardo Software. Detroit, March, 1999.
- Engine Component Technology, paper No 1317, SAE 1998
- Engine Modelling, from the 1997 SAE International Congress and exposition, paper No 1255, SAE, 1997