



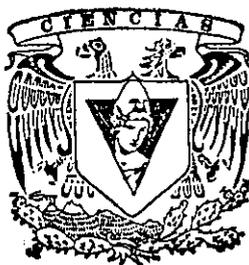
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

JUGANDO CON EL TRIANGULO
HIPERBOLICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
LEOBARDO FERNANDEZ ROMAN



DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"JUGANDO CON EL TRIANGULO HIPERBOLICO"

realizado por LEOBARDO FERNANDEZ ROMAN

con número de cuenta 9653468-7, quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

Propietario

DR. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO SIENRA LOERA

Propietario

M. EN C. FRANCISCO DE JESUS STRUCK CHAVEZ

Suplente

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

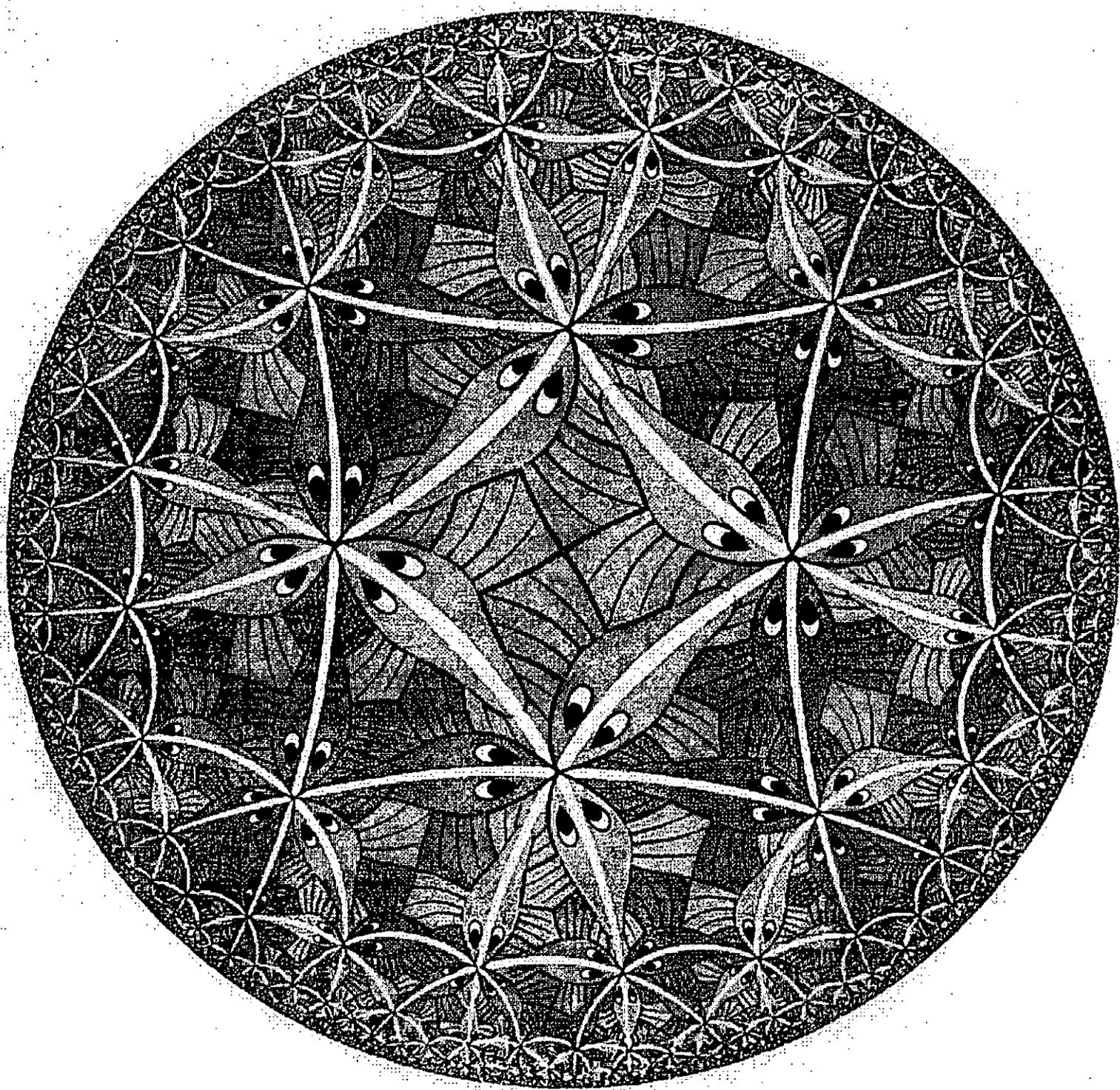
Suplente

DR. JAVIER BRACHO CARPIZO

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Jugando con el Triángulo Hiperbólico



to my brother, my mother
and my friends

Why are you so sure parallel lines exist ?

Gutama Buddah

Índice general

Introducción.....	x
1. El triángulo Euclidiano.....	1
1.1 Los cinco postulados.....	1
1.2 El triángulo Euclidiano.....	2
1.3 Segmentos dirigidos y Teoremas de Ceva y Menelao.....	9
2. Herramientas euclidianas para geometría hiperbólica.....	13
2.1 Líneas antiparalelas y cuadriláteros cíclicos.....	13
2.2 Potencia de un punto.....	16
2.3 Eje radical.....	17
2.4 Circunferencias ortogonales.....	18
2.5 Circunferencias coaxiales.....	19
2.6 Sistemas de circunferencias ortogonales.....	20
2.7 Inversión.....	21
2.8 Razón cruzada.....	27
3. Quinto postulado.....	31
3.1 Intentos de demostraciones del quinto postulado.....	31
3.2 Teorema de Saccheri-Lambert.....	39
3.3 El descubrimiento de las geometrías no euclidianas.....	43
4. Modelos de Geometría Hiperbólica.....	49
4.1 Negaciones al quinto postulado.....	49
4.2 Los axiomas de Geometría Hiperbólica.....	50
4.3 Modelos de la Geometría Hiperbólica.....	50
4.4 Equivalencias entre modelos.....	52
4.5 Distancia en el modelo del semiplano.....	54
5. Trigonometría.....	61
5.1 Las funciones hiperbólicas.....	61
6. Jugando con el Triángulo Hiperbólico.....	68
6.1 Segmentos dirigidos y teoremas de Ceva y Menelao.....	68
6.2 El triángulo Hiperbólico.....	73

Apéndice 1.....	86
Apéndice 2.....	88
Apéndice 3.....	92
Bibliografía.....	93

Introducción

Aproximadamente trescientos años antes de nuestra era, Euclides escribió su famoso libro "*Elementos de Geometría*", y desde entonces se generó una gran controversia con respecto a que si el quinto postulado (el de las paralelas) era independiente de los otros cuatro. Hoy en día sabemos que es independiente pero, durante más de dos mil años, muchos matemáticos intentaron probarlo como una consecuencia de los primeros cuatro postulados; y no fue sino hasta mediados del siglo XIX cuando por fin se pone en claro que el quinto postulado es independiente de los cuatro anteriores y que, modificando este último, es posible concebir dos nuevas geometrías; la geometría hiperbólica y la geometría elíptica.

Ahora surge la pregunta; ¿Qué tan diferentes son estas geometrías? En este trabajo haremos una comparación entre los triángulos en el plano euclidiano y los triángulos en el plano hiperbólico.

En el primer capítulo estudiaremos el comportamiento de las líneas más notables de un triángulo en el plano euclidiano (medianas, mediatrices, bisectrices, alturas), además veremos que para estos triángulos existe la llamada circunferencia de los

nueve puntos, su línea de Euler y que en este caso son válidos los teoremas de Ceva y Menelao.

En el capítulo 2 veremos algunos resultados de geometría sintética avanzada (geometría moderna) que nos servirán en capítulos posteriores cuando definamos los modelos de geometría hiperbólica en términos de un modelo de geometría que conocemos, el modelo de geometría euclidiana. Estos dos primeros capítulos se pueden obviar si se tienen los conceptos de los cursos de Geometría Moderna I y Geometría Moderna II.

En el capítulo 3 veremos algunos de los intentos que se hicieron por probar el quinto postulado, y cómo estos sentaron las bases para posteriormente desarrollar las nuevas geometrías; también veremos algunos de los resultados de geometría neutra y por último veremos cómo se desarrollaron las geometrías no euclidianas, quienes fueron sus principales creadores y algunos de los nombres propuestos para éstas.

En el capítulo 4 veremos los axiomas de la geometría hiperbólica, tres de los modelos que describen esta geometría a partir del modelo de geometría euclidiana, las equivalencias entre estos tres modelos y definiremos una distancia (métrica) en el modelo del semiplano superior, consistente con los axiomas de geometría hiperbólica.

En el capítulo 5 estudiaremos las *funciones hiperbólicas*, esto es, definiremos los conceptos de *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica*, que, al igual que en geometría euclidiana, nos servirán para relacionar los lados con los ángulos de un triángulo; veremos también algunos teoremas conocidos en geometría euclidiana, como la *ley de senos*, la *ley de cosenos* y el *teorema de Pitágoras*.

Finalmente en el capítulo 6 veremos la versión hiperbólica de los teoremas de Ceva y Menelao. Estudiaremos también la concurrencia de las líneas importantes en el triángulo hiperbólico y veremos que las medianas y las bisectrices siempre concurren, que las mediatrices no siempre concurren (aunque veremos bajo qué condiciones sí lo hacen); además, estudiaremos el comportamiento de las alturas y por último veremos que pasa con la circunferencia de los nueve puntos y con la línea de Euler de un triángulo hiperbólico.

Para darnos una idea del comportamiento de las líneas importantes en un triángulo hiperbólico, utilizamos el programa "*NonEuclid*" desarrollado en la Universidad de Rice (Houston, Texas) por Joel Castellanos (joel@cs.unm.edu), el cual está en un dominio público de internet en la página:

<http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/>

Capítulo 1

El triángulo euclidiano.

En este primer capítulo veremos algunos resultados importantes de geometría euclidiana avanzada tales como la concurrencia de medianas, mediatrices, bisectrices y alturas, así como la existencia de la circunferencia de los nueve puntos y la línea de Euler. También veremos los teoremas de Ceva y Menelao, que nos servirán para el estudio del triángulo euclidiano (i.e, del triángulo en el plano euclidiano),

1.1 Los Cinco Postulados de Euclides

Aunque no se sabe exactamente la fecha de nacimiento de Euclides, nació en Grecia alrededor del año 300 a.c. y se dio la tarea de reunir el conocimiento matemático que había desarrollado hasta ese momento y es así como aparecen los *Elementos de Geometría* que es una obra que consta de trece libros con un total de cuatrocientas sesenta y cinco proposiciones. Para dar forma a los elementos, Euclides introduce veintitres definiciones, nueve nociones comunes y cinco postulados (apéndice 1) enunciados de la siguiente manera:

1.1.1 Los cinco postulados de Euclides.

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3. Para cada centro y radio es posible describir su círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una línea recta intersecta a dos líneas rectas y forma ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, si son prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.

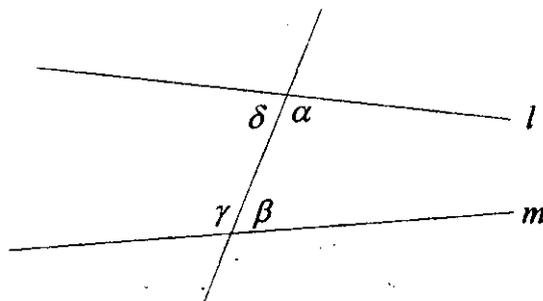


Fig. 1.1 Como $\alpha + \beta < 180^\circ$, las rectas l y m se cortan a la derecha.

Como la redacción de este postulado no es tan sencilla como la de los otros cuatro vamos a utilizar una de las muchas equivalencias de él (apéndice 2) conocida como el **axioma de Playfair** que es mucho más fácil de entender.

1.1.2 Axioma de Playfair. Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada.

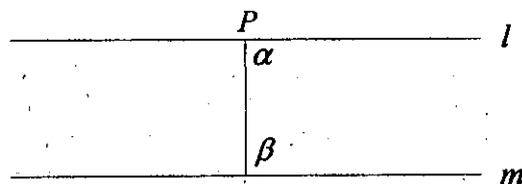


Fig. 1.2 l es la única paralela a m por P .

1.2 El Triángulo Euclidiano.

Primero hay que dar algunas definiciones que caracterizan líneas y puntos importantes en un triángulo.

1.2.1 Mediatriz. Dado un segmento AB , el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de A y B es la mediatriz del segmento AB .

1.2.2 Teorema. La mediatriz de un segmento AB es una línea recta perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de AB .

Demostración

Sea M el punto medio del segmento AB (Fig. 1.3). Directamente de la definición tenemos que M está en la mediatriz de AB . Sea PM perpendicular a AB por M , entonces los triángulos ΔPMA y ΔPMB son congruentes ya que PM es común y $AM = MB$, por lo tanto, $PA = PB$ y entonces P está en la mediatriz de AB . Ahora, si existe un punto Q tal que $QA = QB$ trazamos la línea QM y los triángulos ΔQAM y ΔQBM son congruentes, en particular $\angle QMA = \angle QMB$, pero como $\angle QMA + \angle QMB = 180^\circ$ entonces $\angle QMA = \angle QMB = 90^\circ$ por lo que Q está en la línea perpendicular a AB por M .

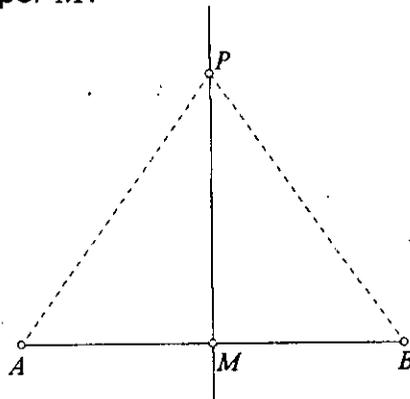


Fig. 1.3 PM mediatriz del segmento AB .

1.2.3 Bisectriz. Si dos líneas l y m se cortan en O formando los ángulos α , la bisectriz del ángulo α es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de l y m .

1.2.4 Teorema. Si dos líneas l y m se cortan en O formando los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de l y m son dos líneas rectas perpendiculares, una de las cuales divide al ángulo $\angle AOB$ en exactamente dos ángulos iguales y la otra divide al ángulo $\angle BOC$ en exactamente dos ángulos iguales.

Demostración.

Sean l y m dos líneas que se cortan en O formando los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ (Fig. 1.4). Sea P un punto en su bisectriz y sean PD y PE las perpendiculares desde P a l y m respectivamente. Como en los triángulos ΔDOP y ΔEOP , OP es común, $PD = PE$, ya que P está en la bisectriz interior del ángulo $\angle AOB$, y los ángulos $\angle ODP$ y $\angle OEP$ son ángulos rectos entonces los triángulos ΔDOP y ΔEOP son congruentes (proposición 26 de Euclides) por lo tanto los ángulos $\angle AOP$ y $\angle BOP$ son iguales, es decir, OP divide el ángulo $\angle AOB$ en exactamente dos ángulos iguales. La demostración es análoga si tomamos un punto Q para el cual OQ divide al ángulo $\angle BOC$ en exactamente dos ángulos iguales. Ahora,

como $\angle AOP = \angle POB$, $\angle BOQ = \angle QOC$ y $\angle AOP + \angle POB + \angle BOQ + \angle QOC = 180^\circ$, entonces $\angle POB + \angle BOQ = 90^\circ$, es decir, p y q son perpendiculares.

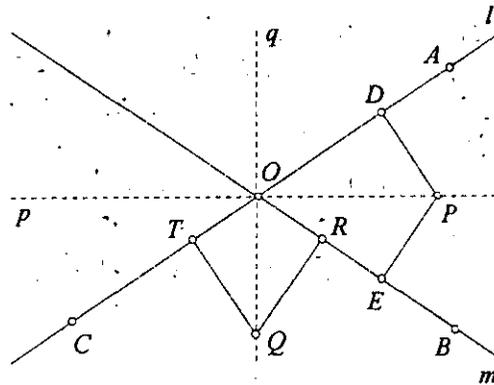


Fig. 1.4 OP es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

En este caso diremos que p es la bisectriz interior del ángulo $\angle AOB$ y q su bisectriz exterior, análogamente diremos que q es la bisectriz interior del ángulo $\angle BOC$ y p su bisectriz exterior.

Hasta el momento sólo hemos visto las definiciones de mediatriz de un segmento dado y bisectriz de un ángulo dado. Vamos ahora a definir lo que son las mediatrices y las bisectrices de un triángulo dado y veremos además dos nuevas definiciones de líneas importantes en un triángulo.

1.2.5 Mediatrices. Las mediatrices de un triángulo ΔABC son las mediatrices de cada uno de los lados del triángulo. El punto de intersección de las mediatrices se llama *circuncentro* y lo denotaremos por O .

1.2.6 Bisectrices interiores. Las bisectrices interiores de un triángulo ΔABC son las bisectrices interiores de cada uno de los ángulos del triángulo. El punto de intersección de las bisectrices se llama *incentro* y lo denotaremos por I .

1.2.7 Alturas. Las alturas de un triángulo ΔABC son las líneas perpendiculares desde cada vértice al lado opuesto. El punto de concurrencia de las alturas se llama *ortocentro* y lo denotaremos por H .

1.2.8 Medianas. Las medianas de un triángulo ΔABC son las líneas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas se llama *gravicentro* o *punto mediano* y lo denotaremos por G .

Ya hemos definido los puntos de intersección de estas líneas en un triángulo pero no hemos demostrado su concurrencia. Los siguientes teoremas nos aseguran que, en geometría euclidiana, estas líneas concurren. También veremos que las demostraciones de algunos de estos teoremas no hacen uso del quinto postulado;

es decir, estos teoremas serán válidos en geometría absoluta* y, por ende, en geometría hiperbólica.

1.2.9 Teorema. *Las mediatrices de un triángulo ΔABC son concurrentes.*

Demostración.

Sea O la intersección de las mediatrices l y m (Fig. 1.5) entonces, por definición de mediatriz, O está a la misma distancia de B que de C por estar en l y O está a la misma distancia de C que de A por estar en m , por lo tanto, O está a la misma distancia de A que de B y por lo tanto esta en la mediatriz de AB .

Nótese que en esta demostración pareciera que no se utiliza el quinto postulado, pero una de las equivalencias al mismo es que dados tres puntos cualesquiera no colineales existe una circunferencia que pasa por ellos (ver apéndice 2).

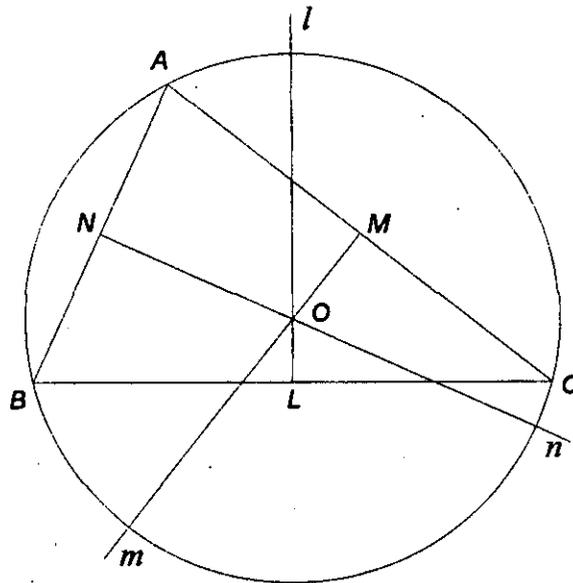


Fig. 1.5 Concurrencia de mediatrices.

1.2.10 Teorema. *Las bisectrices interiores de un triángulo ΔABC son concurrentes.*

* la geometría absoluta (también conocida como geometría neutra) es la geometría que se genera a partir de los primeros cuatro postulados de Euclides. Para un estudio más detallado ver [9]

Demostración.

Sean l la bisectriz del ángulo en A , m la bisectriz del ángulo en B y n la bisectriz del ángulo en C (Fig.1.6). Sea I la intersección de l y m . Por la definición 1.2.3, I está a la misma distancia de AB que de AC por estar en l e I está a la misma distancia de AB que de BC por estar en m , por lo tanto, I está a la misma distancia de AC que de BC y por lo tanto está en la bisectriz del ángulo en C .

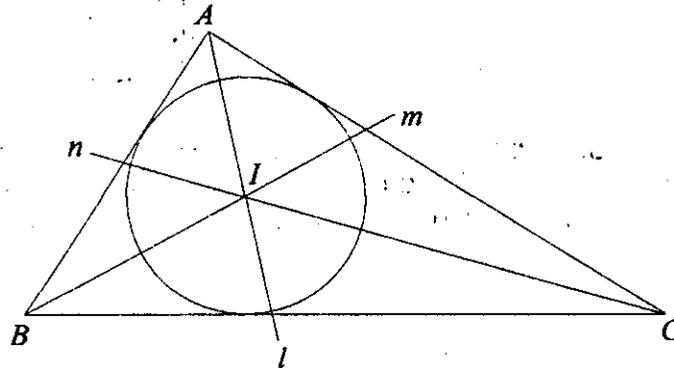


Fig. 1.6 Concurrencia de bisectrices.

Nótese que para la demostración de este último teorema lo único que utilizamos es la definición 1.2.3, es decir, no utilizamos el quinto postulado, por lo que este teorema es válido en geometría neutra.

1.2.11 Teorema. *Las alturas de un triángulo ΔABC concurren.*

Demostración.

Sean AD , BE y CF las alturas de un triángulo ΔABC (Fig. 1.7). Trazamos **la paralela** a BC por A , **la paralela** a AC por B y **la paralela** a AB por C que se intersectan por pares en R , P y Q respectivamente. Ahora, como $ABCQ$ es un paralelogramo lo mismo que $RBCA$ y como ambos paralelogramos tienen en común a BC entonces $RA=AQ$, es decir, A es punto medio de RQ . Análogamente B es punto medio de RP y C es punto medio de PQ , y como AD es perpendicular a BC entonces lo es a RQ , es decir, AD es mediatriz de RQ , análogamente BE es mediatriz de PR y CF es mediatriz de PQ y por el teorema 1.2.9 tenemos que AD , BE y CF concurren.

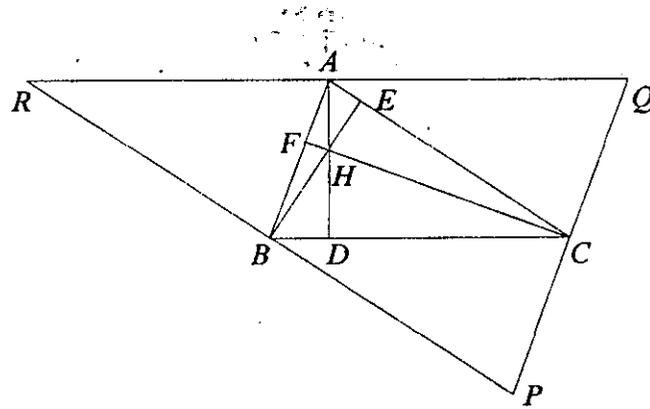


Fig. 1.7 Concurrencia de alturas.

En esta demostración, a diferencia de la anterior, utilizamos el quinto postulado en el momento en que construimos **la paralela** (ver apéndice 2) a ciertas líneas, por lo que esta demostración **no** es válida en geometría neutra.

1.2.12 Teorema. Las medianas de un triángulo ΔABC concurren.

Demostración.

En el triángulo ΔABC sean L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente (Fig.1.8). Sea G la intersección de las medianas AL y BM , entonces los triángulos ΔABG y ΔLMG son **semejantes** y están en razón 2 a 1 ya que $LM = \frac{1}{2} AB$, lo que implica que:

$$\frac{AG}{GL} = 2$$

Ahora, sea G^* la intersección de las medianas AL y CN , entonces los triángulos ΔCAG^* y ΔNLG^* son **semejantes** y están en razón 2 a 1 ya que $NL = \frac{1}{2} CA$, lo que implica que:

$$\frac{AG^*}{G^*L} = 2$$

pero esto quiere decir que $G = G^*$, es decir, las medianas de un triángulo son concurrentes.

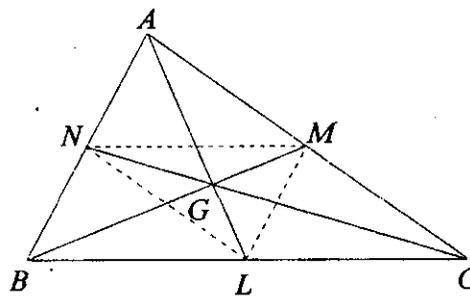


Fig. 1.8 Concurrencia de medianas.

1.2.13 Teorema. (Circunferencia de los nueve puntos) *Los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro de cualquier triángulo están en una circunferencia.*

Demostración.

Sean L , M y N los puntos medio de los lados BC , CA y AB respectivamente (Fig. 1.9), D , E y F los pies de las alturas y P , Q y R los puntos medio de los segmentos que unen los vértices al ortocentro H del triángulo ΔABC . Como los triángulos ΔLMN y ΔDMN son congruentes, entonces los ángulos $\angle NLM$ y $\angle NDM$ son iguales y por lo tanto la circunferencia \mathcal{C} que inscribe al triángulo ΔLMN pasa por D . Análogamente para E y F que son los otros dos pies de las alturas.

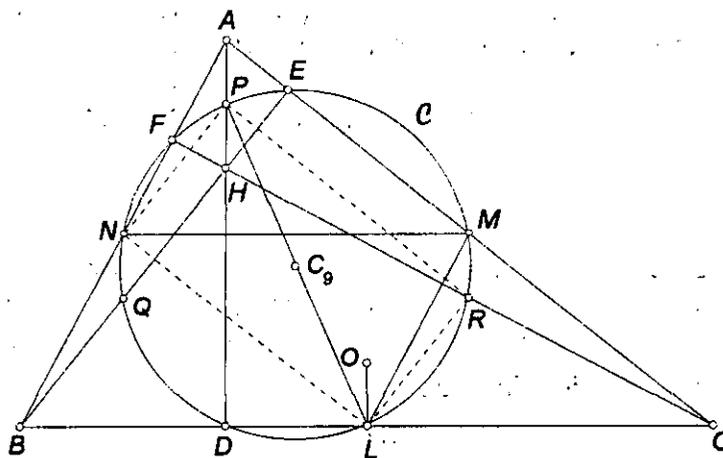


Fig. 1.9 Circunferencia de los nueve puntos del triángulo ΔABC .

Ahora, por ser L punto medio de BC y R punto medio de HC se tiene que las líneas LR y BH son paralelas y lo mismo pasa con las líneas NP y BH . Con un razonamiento análogo las líneas PR y LN son paralelas a EC . Ahora como el ángulo $\angle BEC = 90^\circ$ tenemos que $PNLR$ es un rectángulo, y por lo tanto tenemos que $\angle PNL = \angle PDL = 90^\circ$ por lo que el punto P está en \mathcal{C} . De una forma análoga se tiene que los puntos Q y R están en \mathcal{C} .

1.2.14 Teorema. (Línea de Euler) *El centro de la circunferencia de los nueve puntos C_9 , el ortocentro H , el circuncentro O y el punto mediano G de un triángulo ΔABC son colineales.*

Demostración.

Trazamos la línea HC_9 que corta a la mediatriz de BC en O^* (Fig.1.10). Como AD y LO^* son paralelas tenemos que los triángulos ΔPC_9H y ΔLC_9O^* son

congruentes ya que $PC_9 = C_9L$, por lo que $PH = LO^*$ pero $PH = LO$ por lo tanto $O = O^*$.

Ahora, sea G^* donde AL intersecta a HO , entonces los triángulos ΔAHG^* y ΔLOG^* son semejantes y como $AH = 2LO$ entonces $AG^* = 2LG^*$ por lo que $G = G^*$, por lo que H, C_9, G, O son colineales.

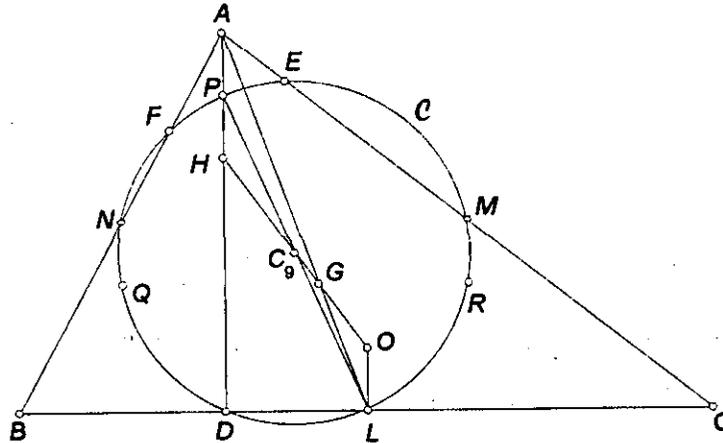


Fig. 1.10 La línea de Euler.

1.3 Segmentos dirigidos y Teoremas de Ceva y Menelao.

Si en una línea recta tomamos dos puntos distintos A y B ellos determinan un segmento de recta AB . Ahora vamos a asociar la idea de dirección al concepto de segmento, es decir, si tomamos el segmento AB recorrido de A a B diremos que es el *segmento dirigido* AB , mientras que si lo vemos dirigido de B a A diremos que es el *segmento dirigido* BA en donde estos segmentos están relacionados así:

$$AB = -BA$$



Fig. 1.11 Los segmentos AB , BC y AC tienen el mismo signo.

En magnitud, los segmentos AB y BA son iguales, lo que ahora estamos considerando es la dirección que tiene cada uno de ellos. Además, para cualesquiera tres puntos colineales A , B y C (Fig. 1.11) se tiene que $AB = AC + CB$. Los segmentos dirigidos nos van a ser de mucha utilidad para probar los teoremas de Ceva y Menelao. Estos dos teoremas, aunque tienen mucho que ver (de hecho el teorema de la división interna y externa es una combinación de estos dos teoremas), uno fue probado por Menelao de Alejandría aproximadamente en el año 100 a.c. y el otro fue publicado, junto con el teorema de Menelao, por Giovanni Ceva en 1678.

1.3.1 Teorema de Ceva. Si tres líneas AO , BO y CO , trazadas por los vértices de un triángulo ΔABC y un punto O de su plano, cortan a los lados opuestos en L , M y N respectivamente (donde ninguno de L , M y N son vértices del triángulo ΔABC), entonces

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = 1$$

y recíprocamente, si L , M y N son puntos en los lados BC , CA y AB del triángulo ΔABC para los cuales se cumple la relación anterior, entonces AL , BM y CN son concurrentes.

Demostración.

Supongamos que las líneas AL , BM y CN concurren en O (Fig. 1.12). Sean R y S las intersecciones de BM y CN con la paralela a BC por A , entonces, tenemos las siguientes parejas de triángulos semejantes:

$$\Delta ASN \approx \Delta BCN \text{ que implica } \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{BC} \quad (1)$$

$$\Delta BLO \approx \Delta RAO \text{ que implica } \frac{BL}{RA} = \frac{LO}{AO} \quad (2)$$

$$\Delta ASO \approx \Delta LCO \text{ que implica } \frac{LC}{AS} = \frac{LO}{AO} \quad (3)$$

$$\Delta MRA \approx \Delta MBC \text{ que implica } \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AR} \quad (4)$$

pero las ecuaciones 2 y 3 implican que $\frac{BL}{LC} = \frac{AR}{SA}$ (5)

multiplicando las ecuaciones (1), (5) y (4) obtenemos

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = 1$$

Ahora, para probar el recíproco, sea O el punto de intersección de las líneas BM y CN , y supongamos que AO corta a BC en L^* , entonces, por la primera parte del teorema tenemos que

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL^*}{L^*C} \frac{CM}{MA} = 1$$

pero también

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = 1$$

lo que implica que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL^*}{L^*C}$$

por lo tanto L coincide con L^* , es decir, AL pasa por O y así las líneas AL , BM y CN son concurrentes.

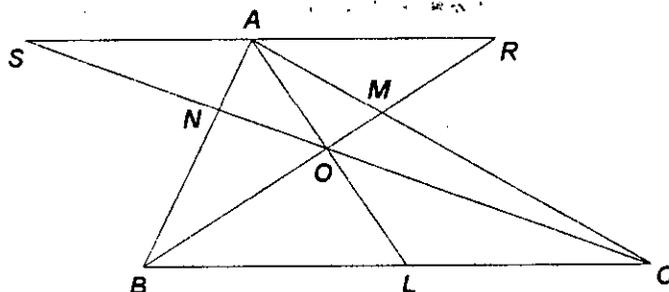


Fig. 1.12 Teorema de Ceva.

Las concurrencias de las medianas, de las bisectrices y de las alturas se pueden probar por medio del teorema de Ceva. Ahora veamos lo que dice el teorema de Menelao.

1.3.2 Teorema de Menelao. Si una línea recta interseca los lados BC , CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos L, M y N respectivamente, entonces

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = -1$$

y recíprocamente, si L, M y N son puntos de los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ para los cuales vale la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Demostración

Sean AP , BQ y CR (Fig. 1.13) las perpendiculares de A , B y C respectivamente a la línea LMN , entonces, tenemos las siguientes parejas de **triángulos semejantes**:

$$\triangle ANP \approx \triangle BNQ \text{ que implica } \frac{AN}{NB} = \frac{AP}{QB} \quad (6)$$

$$\triangle BLQ \approx \triangle CLR \text{ que implica } \frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR} \quad (7)$$

$$\triangle CMR \approx \triangle AMP \text{ que implica } \frac{CM}{MA} = \frac{CR}{PA} \quad (8)$$

y multiplicando las ecuaciones (6), (7) y (8) obtenemos

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = -1$$

Ahora, para probar el recíproco, sea L^* la intersección de MN con BC , entonces, por la primera parte del teorema tenemos

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL^*}{L^*C} \frac{CM}{MA} = -1$$

pero también

$$\frac{AN}{NB} \frac{BL}{LC} \frac{CM}{MA} = -1$$

lo que implica que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL^*}{L^*C}$$

por lo tanto L coincide con L^* , es decir L , M y N son colineales.

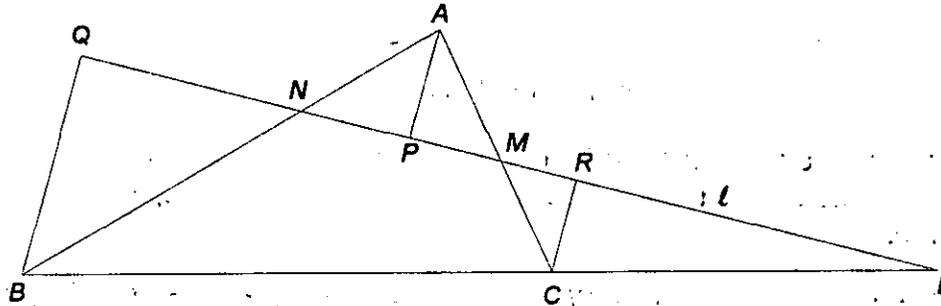


Fig. 1.13 Teorema de Menelao.

Nótese el uso del quinto postulado en la prueba de estos dos teoremas. Para la prueba del teorema de Ceva utilizamos *la paralela* y en ambas demostraciones utilizamos los **triángulos semejantes**, esto quiere decir que sólo son válidas en geometría euclidiana, aunque, como veremos, hay una versión de estos teoremas para geometría hiperbólica.

Capítulo 2

Herramientas euclidianas para geometría hiperbólica.

En este capítulo veremos algunos de los resultados de geometría moderna sintética, que nos serán de gran utilidad para capítulos posteriores. Necesitamos los conceptos de familia de circunferencias coaxiales, eje radical de una familia de circunferencias coaxiales, familia de circunferencias ortogonales a una familia de circunferencias coaxiales, inversión con respecto a una circunferencia y razón cruzada y, además, necesitamos conocer el comportamiento de la razón cruzada bajo inversiones con respecto a circunferencias, pero para esto último necesitaremos otros conceptos que son los de líneas antiparalelas y cuadriláteros cíclicos.

2.1 Líneas antiparalelas y cuadriláteros cíclicos.

Primero veamos la definición de líneas antiparalelas y probemos algunas de sus propiedades.

2.1.1 Definición. Si dos pares de líneas están en tal forma que la bisectriz interior del ángulo formado por el primer par es transversal al segundo par y los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, las líneas del segundo par son antiparalelas la una a la otra con respecto a las líneas del primer par.

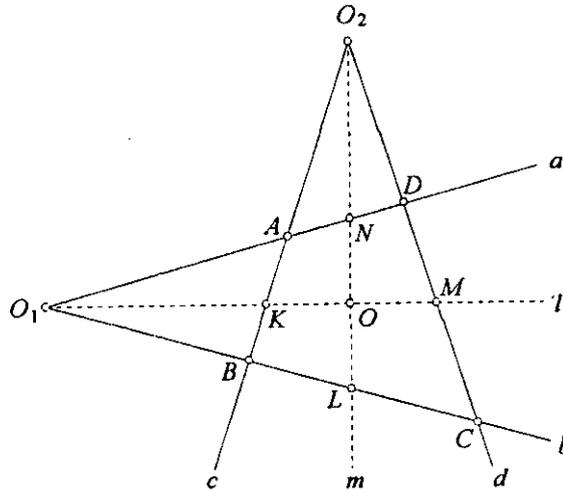


Fig. 2.1 Líneas antiparalelas.

Así, en la figura 2.1, las líneas c y d son antiparalelas con respecto a a y b , ya que la bisectriz m de c y d forma los ángulos iguales $\angle O_1NO$ y $\angle O_1LO$ y por lo tanto el triángulo ΔO_1NL es isósceles, es decir la bisectriz l de a y b es perpendicular a m , por lo que el triángulo ΔO_2KM también es isósceles.

Ahora como una consecuencia inmediata de esto tenemos.

2.1.2 Teorema. Si dos pares de líneas están colocadas de tal forma que las líneas del primer par son antiparalelas con respecto a las líneas del segundo par, entonces las líneas del segundo par son antiparalelas con respecto a las líneas del primer par.

2.1.3 Proposición. Si, con respecto a un par de líneas, dos líneas son antiparalelas a una misma tercera línea, ellas son paralelas.

2.1.4 Definición. A un conjunto de puntos que estén todos en una misma circunferencia se les llama puntos concíclicos. Un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos le llamamos cuadrilátero cíclico.

Una propiedad importante de los cuadriláteros cíclicos es que la suma de los ángulos opuestos es 180° . Supongamos que el centro de la circunferencia está dentro del cuadrilátero (Fig. 2.2); en este caso vemos que los triángulos ΔOAB , ΔOBC , ΔOCD y ΔODA son isósceles y la suma de los ángulos del cuadrilátero es $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$, de donde obtenemos $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$.

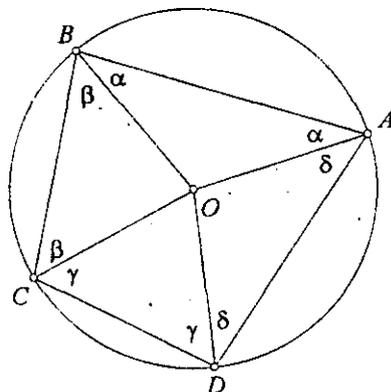


Fig. 2.2 La suma de los ángulos opuestos es 180° .

Existen otros dos casos, uno es cuando el centro de la circunferencia está sobre uno de los lados del cuadrilátero y el otro caso es cuando el centro de la circunferencia esta fuera del cuadrilátero. La demostración de estos dos casos es similar a la que dimos para el primer caso por lo que no la presentaremos.

2.1.5 Teorema. *Si dos líneas que son antiparalelas con respecto a otras dos, cortan a éstas últimas en cuatro puntos distintos, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico; e inversamente, cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico es antiparalelo con respecto al otro par.*

Demostración.

Bastará probar que la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero determinado por dos pares de líneas antiparalelas suman 180° . Para ello vemos que la suma de los ángulos del cuadrilátero $NOMD$ (Fig. 2.3) es $90^\circ + \alpha + \delta + (180^\circ - \beta) = 360^\circ$,

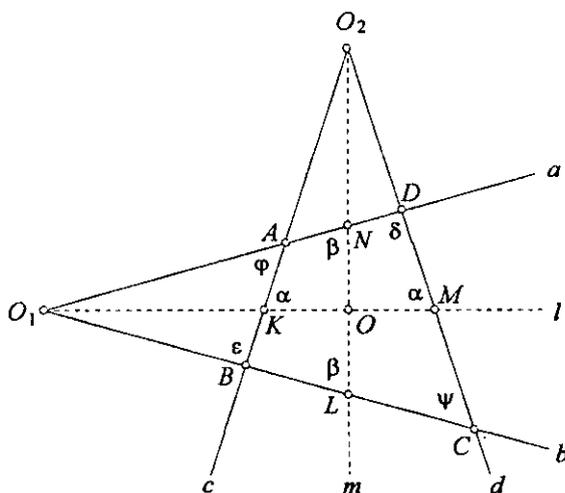


Fig. 2.3 a y b son antiparalelas con respecto a c y d .

de donde obtenemos que $\delta = \beta - \alpha + 90^\circ$. Ahora, como la suma de los ángulos del cuadrilátero $KBLO$ es $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \varepsilon) + \beta + 90^\circ = 360^\circ$ de donde obtenemos que $\varepsilon = \beta - \alpha + 90^\circ$, por lo que $\delta = \varepsilon$ y por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Una propiedad importante que utilizaremos más adelante y de la cual no hicimos mención en la demostración es que, como tenemos la igualdad de ángulos (Fig. 2.3) $\varepsilon = \delta$ y $\varphi = \psi$, entonces los triángulos ΔO_1AB y ΔO_1CD son inversamente semejantes, ya que ambos triángulos comparten el ángulo en O_1 .

2.2 Potencia de un punto.

Vamos ahora a definir la potencia de un punto con respecto a una circunferencia y así poder hablar de lo que es el eje radical de un par de circunferencias, y en general, del eje radical de una familia de circunferencias.

2.2.1 Definición. La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia \mathcal{C} es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él y la denotamos $Pot_{\mathcal{C}}P$.

Es fácil verificar que este producto es constante ya que (Fig.2.4) como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, los ángulos $\angle PAC$ y $\angle PDB$ son iguales así como los ángulos $\angle PCA$ y $\angle PBD$ también son iguales, lo que implica que

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

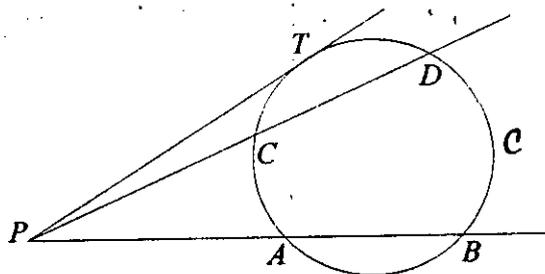


Fig.2.4 La potencia de P con respecto a \mathcal{C}

También es fácil verificar que la potencia de un punto que está fuera de la circunferencia \mathcal{C} es \overline{PT}^2 ya que los ángulos $\angle PTA$ y $\angle PBT$ son iguales, lo que implica que

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}$$

y por lo tanto

$$\overline{PT}^2 = PA \cdot PB$$

de donde se sigue, por el teorema de Pitágoras, que la potencia de P con respecto a una circunferencia con centro en O y radio r está dada por $\overline{PO}^2 - r^2$.

2.3 Eje radical.

2.3.1 Definición. *El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual.*

Para probar que el lugar geométrico definido anteriormente es una línea recta veamos los siguientes dos teoremas.

2.3.2 Teorema. *El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos dados es constante, es una línea recta perpendicular a la línea determinada por los puntos dados.*

Demostración.

Sean A, B los puntos dados y sea M un punto tal que $AM^2 - BM^2 = d^2$ donde d está dado. Si MC es la perpendicular desde M a AB (Fig. 2.5), entonces tenemos

$$AM^2 - AC^2 = MC^2 = MB^2 - BC^2$$

que implica

$$AM^2 - MB^2 = AC^2 - BC^2 = d^2$$

es decir

$$(AC - BC)(AC + BC) = d^2$$

por lo tanto, denotando a $AC + BC = AB$ por a tenemos

$$AC - BC = \frac{d^2}{a}$$

esta igualdad da la diferencia de los segmentos AC y BC donde la suma de esos segmentos es a , y así esos segmentos pueden ser construidos y podemos localizar el punto C en AB . Por lo tanto C , que es el pie de la perpendicular desde cualquier punto M que esté en el lugar geométrico, es un punto fijo de AB , por lo que el lugar geométrico de los puntos M es la perpendicular a AB por C . Recíprocamente, cualquier punto de esta perpendicular pertenece al lugar geométrico.

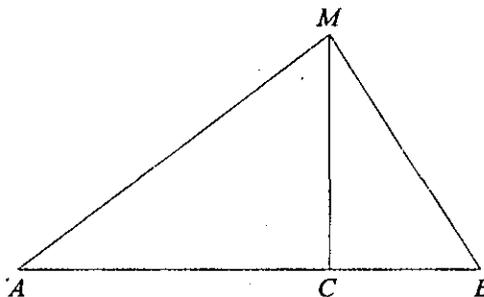


Fig. 2.5 Lugar geométrico de los puntos M .

2.3.3 Teorema. *El eje radical de dos circunferencias es una línea recta que es perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias.*

Demostración.

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias con centros en O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente (Fig. 2.6) y sea P un punto que tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias, es decir, tal que

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$$

pero esto es

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = d^2$$

Por el teorema 2.3.2, el lugar geométrico de los puntos P es una línea recta perpendicular a O_1O_2 .

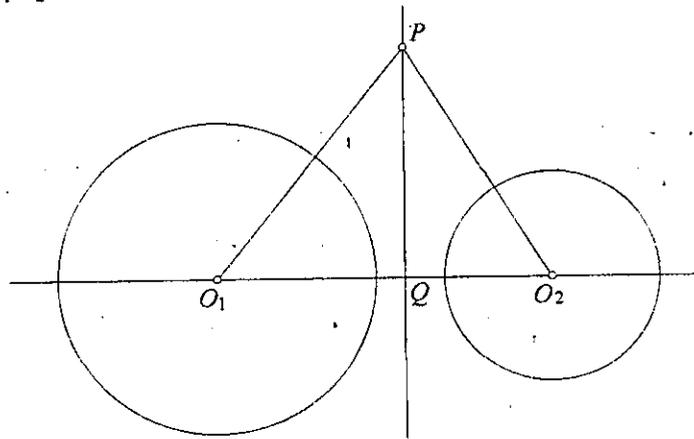


Fig. 2.6 El eje radical de C_1 y C_2 es la línea PQ .

2.4 Circunferencias ortogonales.

2.4.1 Definición. *Se dice que dos circunferencias C_1 y C_2 son ortogonales si un radio de C_1 es tangente a C_2 y viceversa.*

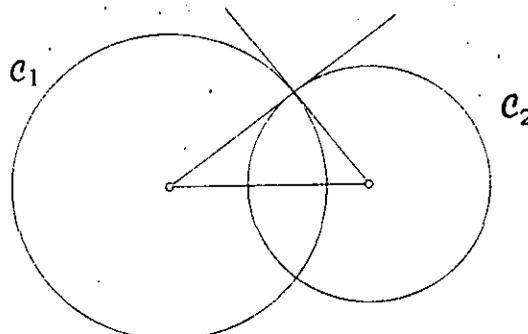


Fig. 2.7 Circunferencias ortogonales.

El siguiente teorema es un resultado importante acerca de las circunferencias que son ortogonales a un dos circunferencias dadas.

2.4.2 Teorema. *El centro de una circunferencia que corta ortogonalmente a dos circunferencias está en el eje radical de las circunferencias, y si una circunferencia cuyo centro está en el eje radical de dos circunferencias es ortogonal a una de ellas, es también ortogonal a la otra.*

Demostración.

Si P es el centro de una circunferencia que es ortogonal a las circunferencias C y C^* (Fig. 2.8), entonces, de los triángulos rectángulos $\triangle PAO$ y $\triangle PO^*A^*P$ tenemos que:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2, \quad \overline{PA}^{*2} = \overline{PO}^{*2} - \overline{O^*A^*}^2$$

por lo tanto P tiene la misma potencia con respecto a las circunferencias C y C^* , lo que implica que P está en el eje radical de dichas circunferencias. (Fig.2.8).

Ahora, sea P un punto en el eje radical de C y C^* y tracemos la circunferencia C_1 con centro en P y ortogonal a la circunferencia C . Como P tiene la misma potencia con respecto a C y C^* y como el ángulo $\angle OAP$ es recto se sigue que el ángulo $\angle PA^*O^*$ también es recto y por lo tanto C_1 es ortogonal a C^* .

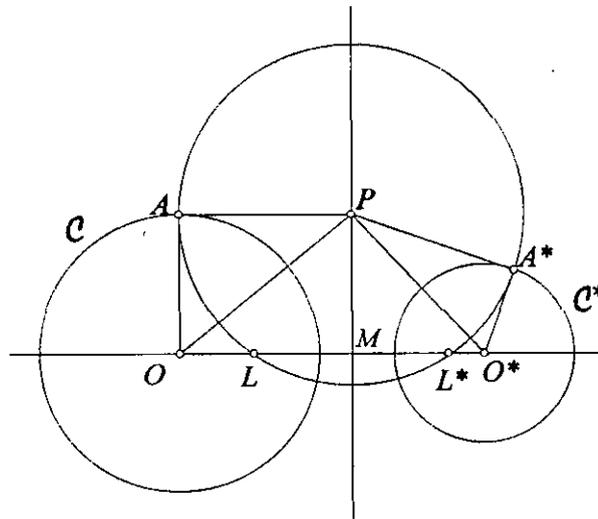


Fig. 2.8 C_1 es ortogonal a C y C^* .

2.5 Circunferencias coaxiales.

Si una familia de circunferencias comparte un mismo eje radical por pares se dice que las circunferencias son coaxiales. Es fácil ver que existen tres tipos diferentes de circunferencias coaxiales, las que se cortan en dos puntos, las que se cortan en un solo punto y las que no se cortan.

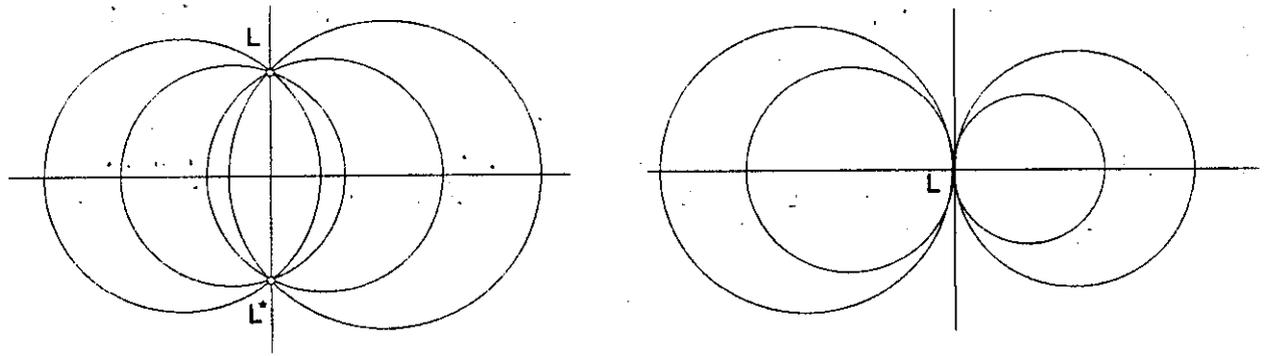


Fig. 2.9 Familia de circunferencias que se cortan en dos puntos (izq.) y familia de circunferencias que se cortan en un solo punto (der.).

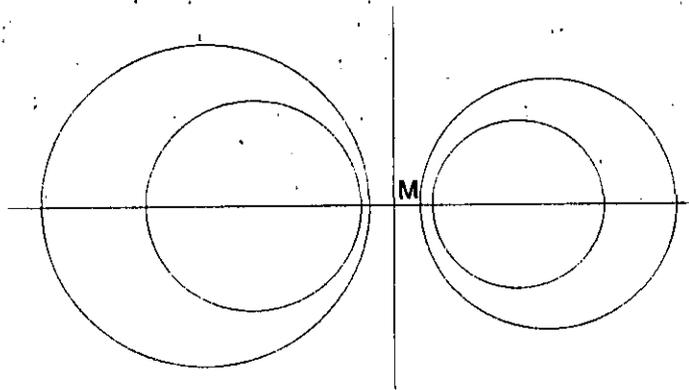


Fig. 2.10 Familia de circunferencias que no se cortan.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 2.4.2 por lo que lo enunciaremos sin demostración.

2.5.1 Teorema. *Todas las circunferencias que son ortogonales a dos circunferencias que no se cortan pertenecen a una familia de circunferencias coaxiales que se cortan cuya línea de los centros es el eje radical de las dos circunferencias.*

2.6 Sistemas de circunferencias ortogonales.

Del teorema anterior se concluye que una circunferencia que corta ortogonalmente a cada una de las circunferencias de una familia coaxial cuyos elementos son circunferencias que no se cortan pertenece a una familia de circunferencias coaxiales que se cortan cuya línea de los centros es el eje radical de la primera familia.

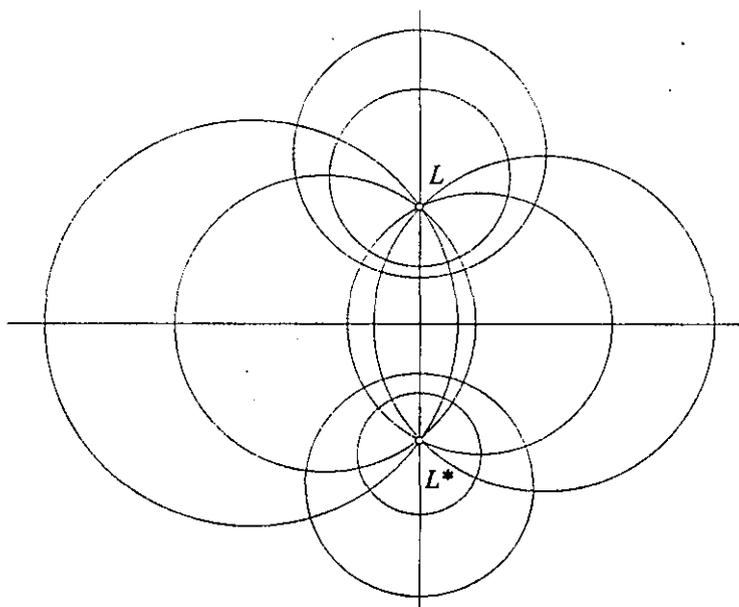


Fig. 2.11 Sistema de circunferencias ortogonales.

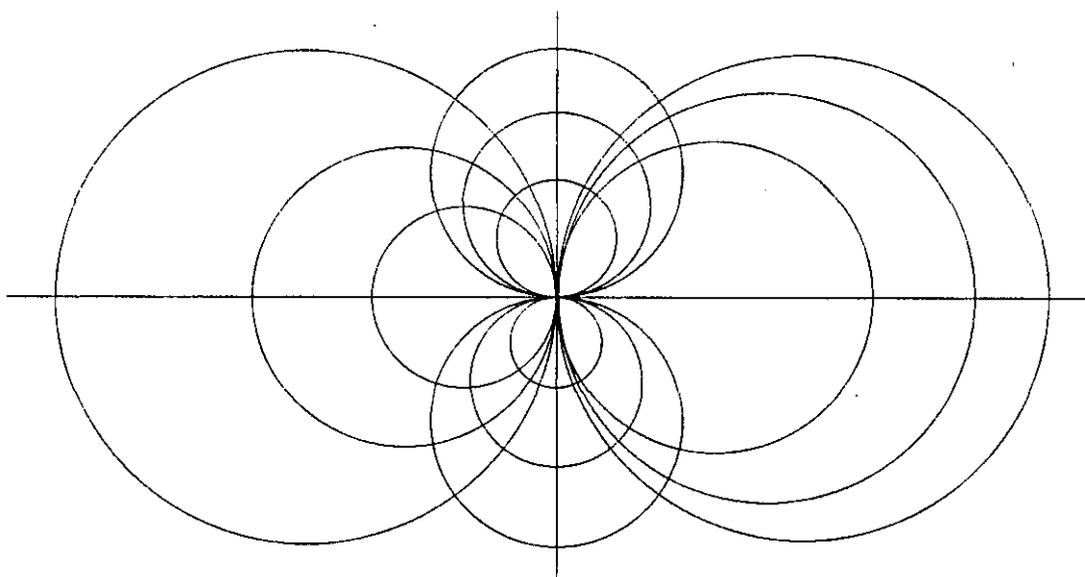


Fig. 2.12 Sistema de circunferencias ortogonales que se cortan en un sólo punto.

2.7 Inversión.

2.7.1 Definición. Si P y P^* son puntos colineales con el centro O de una circunferencia C (Fig. 2.13), cuyo radio es $r > 0$ de tal forma que $\overline{OP} \cdot \overline{OP^*} = r^2$, cada uno de los puntos P y P^* es inverso del otro con respecto a la circunferencia C . El punto O es el centro de inversión, la circunferencia C es la circunferencia de inversión y r es el radio de inversión.

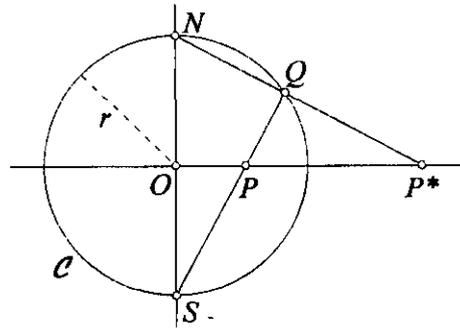


Fig. 2.13 P y P^* son puntos inversos con respecto a C .

Dados un punto P y una circunferencia C es posible construir el inverso del punto P con respecto a la circunferencia C .

2.7.2 Construcción de un punto inverso. Sean C una circunferencia dada y P un punto dado

1. Trazamos la línea que une O con P y prolongamos.
2. Trazamos la perpendicular a \overline{OP} por O , sean N y S las intersecciones de esta perpendicular con C .
3. Trazamos la línea \overline{SP} que intersecta a C en Q .
4. Trazamos \overline{NQ} que intersecta a \overline{OP} en P^* .

Con esta construcción, P^* es el inverso de P con respecto a C .

Demostración.

Veamos que los triángulos ΔPQP^* y ΔPOS (Fig. 2.13) son semejantes y por lo tanto lo son el ΔPOS y el ΔNOP^* , de donde se sigue que

$$\frac{ON}{OP} = \frac{OP^*}{OS}$$

y como $ON = OS = r$ tenemos que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP^*} = r^2.$$

2.7.3 Definición. Si P y P^* son puntos inversos con respecto a C y si P describe una curva, entonces P^* también describe una curva y se dice que las curvas son mutuamente inversas o se dice simplemente que estas curvas son inversas.

Inmediatamente de esta definición y de la definición de puntos inversos tenemos que una línea que pasa por el centro de inversión se invierte en ella misma, además, las circunferencias concéntricas con la circunferencia de inversión se invierten en circunferencias concéntricas con la circunferencia de inversión; lo que más nos va a interesar es cómo se invierten circunferencias ortogonales a la

circunferencia de inversión, las líneas rectas que no pasan por el centro de inversión, las circunferencias que no pasan por el centro de inversión y por último veremos que la inversión preserva ángulos.

2.7.4 Teorema. *Cualquier circunferencia que pasa por dos puntos inversos distintos, es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión, recíprocamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.*

Demostración.

Sean P y Q puntos inversos distintos con respecto a la circunferencia \mathcal{C} , y sea \mathcal{C}^* una circunferencia que pasa por P y Q . Como $OP \cdot OQ = r^2$, ya que P y Q puntos inversos y como $Pot_{\mathcal{C}}O = OP \cdot OQ = OP \cdot OQ = r^2$, entonces P' y Q' también son puntos inversos con respecto a \mathcal{C} (Fig. 2.14), es decir, \mathcal{C}^* es su propia inversa con respecto a \mathcal{C} . Ahora, sea OT la tangente desde O a \mathcal{C}^* , donde T está en \mathcal{C}^* , entonces $\angle OTO^* = 90^\circ$ y por la definición 2.2.1, $Pot_{\mathcal{C}}O = OT^2 = r^2$, lo que implica que $OT = r$, es decir T está en \mathcal{C} y por lo tanto \mathcal{C} y \mathcal{C}^* son ortogonales.

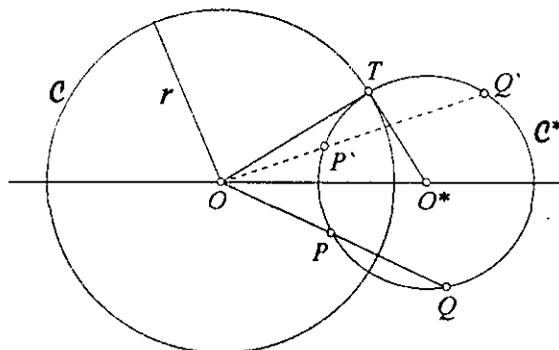


Fig. 2.14 Circunferencias ortogonales.

Recíprocamente, sean \mathcal{C} y \mathcal{C}^* circunferencias ortogonales en T (Fig. 2.14) y r radio de \mathcal{C} . Si P y Q son puntos en \mathcal{C}^* que son colineales con O , como $Pot_{\mathcal{C}}O = OP \cdot OQ = OT^2 = r^2$, por lo tanto P y Q son puntos inversos con respecto a \mathcal{C} , es decir, cada punto de \mathcal{C}^* se invierte en un punto de \mathcal{C} , es decir, \mathcal{C}^* se invierte en ella misma.

2.7.5 Teorema. *El inverso de una línea recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión y el inverso de una circunferencia (de radio finito) que pasa por el centro de inversión es una línea recta que no pasa por el centro de inversión.*

Demostración.

Sea A el pie de la perpendicular desde O a una línea recta dada y A^* el inverso de A con respecto a \mathcal{C} (Fig. 2.15). Tracemos la circunferencia \mathcal{C}^* de diámetro OA^* , ahora, para cualquier punto P en la línea trazamos la línea \overline{OP} que corta a \mathcal{C}^* en P^* . Como los triángulos $\triangle OPA$ y $\triangle OA^*P^*$, son semejantes por AAA, tenemos que

$$\frac{OA}{OP^*} = \frac{OP}{OA^*};$$

por lo tanto, P^* es el inverso de P . Como P^* está en \mathcal{C}^* , se tiene que el inverso de la línea recta m es la circunferencia de diámetro OA^* .

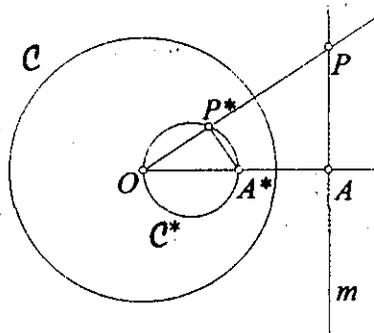


Fig. 2.15 El inverso de una línea que no pasa por O .

2.7.6 Teorema. *El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión.*

Demostración.

Sea \mathcal{C}_1 una circunferencia dada y \mathcal{C} la circunferencia con respecto a la cual vamos a invertir (Fig. 2.16). Desde O trazamos un rayo que corte a \mathcal{C}_1 en P y Q y otro rayo que corte a \mathcal{C}_1 en R y S . Como el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico entonces las líneas PS y QR son antiparalelas con respecto a las líneas OP y OS . Sea ξ la circunferencia que pasa por P, P' y S . Como ξ pasa por puntos inversos entonces es ortogonal a \mathcal{C} y como pasa por S entonces pasa por S' . De aquí se sigue que PS y $P'S'$ son antiparalelas con respecto a OP y OS , es decir, $P'S'$ y QR son paralelas. De una forma análoga podemos ver que PS y $Q'R'$ son paralelas, es decir, el cuadrilátero $P'Q'R'S'$ es un cuadrilátero cíclico.

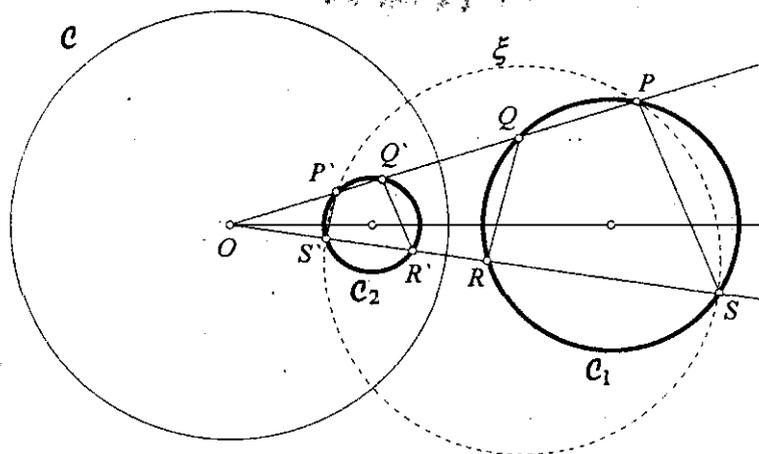


Fig. 2.16 El inverso de una circunferencia.

2.7.7 Teorema. *La inversión preserva ángulos.*

Como el ángulo entre circunferencias (y en general entre curvas) está dado por el ángulo que forman sus tangentes en el punto de intersección, basta probar que la inversión preserva ángulos entre líneas rectas, más aún, basta probar que la inversión preserva ángulos entre cualquier línea que pase por un punto dado P y el rayo OP , donde O es el centro de inversión, ya que si los ángulos $\angle QPB$ y $\angle QPA$ (Fig. 2.17) se preservan bajo inversión, entonces también se preserva su diferencia, es decir, el ángulo $\angle APB$.

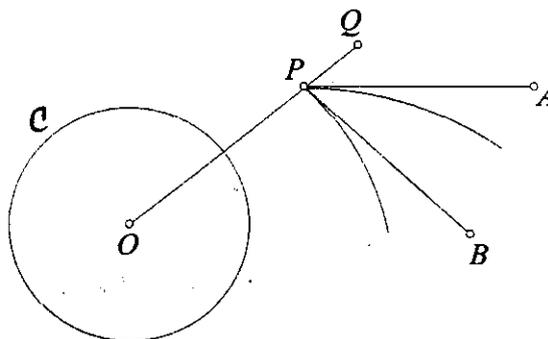


Fig. 2.17 Los ángulos se conservan bajo la inversión.

Hay que considerar dos casos para esta demostración, el primero es cuando las curvas se intersecten dentro de la circunferencia de inversión y el segundo caso es cuando las curvas se intersecten fuera de la circunferencia.

Demostración.

Consideramos primero el caso en que P está dentro de \mathcal{C} (Fig.2.18). Sea m una línea que pasa por P y que intersecta a \mathcal{C} en A y B . Como ya hemos visto, el inverso de m es una circunferencia que pasa por O y además A y B se invierten en ellos mismos, es decir, el inverso de m (m^*) está completamente determinado por A , B y O y el centro de m^* (O^*) está en la mediatriz del segmento AB . Por lo tanto, la línea perpendicular a OO^* (n) por O es paralela a AB y es tangente a m^* . Además, los ángulos $\angle QPB$ y $\angle POR$ son iguales, donde Q es el inverso de P , pero los ángulos $\angle QOR$ y $\angle OQN$ son iguales, ya que son los ángulos que forman las tangentes a una circunferencia con los extremos de la cuerda OQ . Por lo tanto, los ángulos $\angle QPB$ y $\angle PQN$ son iguales.

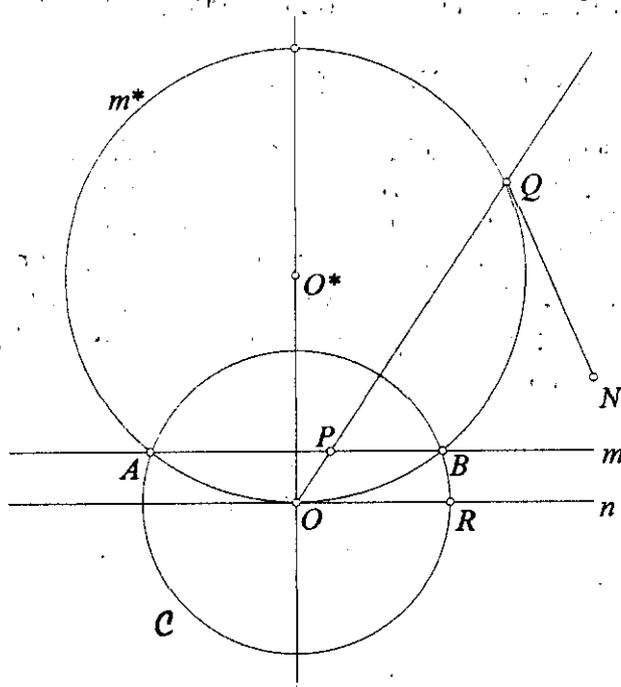


Fig. 2.18 La inversión preserva ángulos.

Ahora vamos a suponer que el punto P está fuera de \mathcal{C} (Fig. 2.19) y que m no intersecta a \mathcal{C} . Sea R el pie de la perpendicular desde O a m y sea AB paralela a m por O , entonces AB es tangente al inverso de m (m^*) y los ángulos $\angle TPS$ y $\angle POA$ son iguales, y por el mismo argumento que en el caso anterior, los ángulos $\angle NQO$ y $\angle AOQ$ son iguales; por lo tanto, los ángulos $\angle TPS$ y $\angle OQN$ también son iguales.

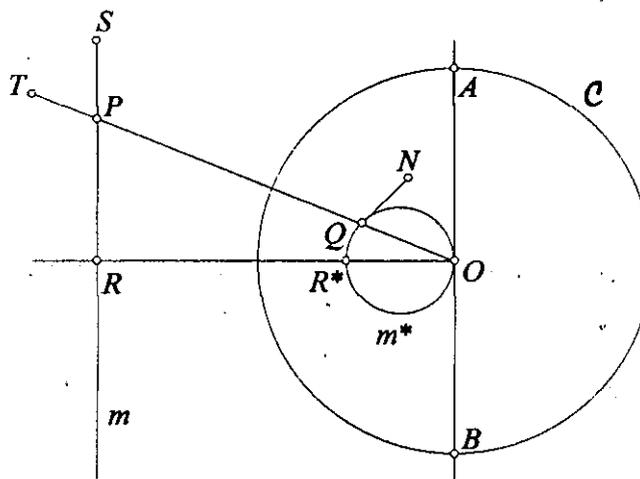


Fig. 2.19 La inversión preserva ángulos.

2.8 Razón Cruzada.

También conocida como *razón doble* o *razón anarmónica*, la *razón cruzada* es un cociente de cocientes que es invariante bajo proyecciones y también bajo inversiones con respecto a cualquier centro de inversión.

2.8.1 Definición. La *razón cruzada* de cuatro puntos A , B , C y D en el plano se define como el cociente:

$$\delta = \{ABCD\} = \frac{AC}{CB} \bigg/ \frac{AD}{DB}$$

Como hay veinticuatro permutaciones de las letras A , B , C y D debería de haber veinticuatro valores de la razón cruzada, pero estas veinticuatro permutaciones no nos dan siempre valores distintos de la razón cruzada; de hecho, solamente hay seis valores de la razón cruzada dados por

$$\delta, \frac{1}{\delta}, 1-\delta, \frac{1}{1-\delta}, \frac{\delta-1}{\delta} \text{ y } \frac{\delta}{\delta-1}.$$

Inmediatamente de la definición de razón cruzada vemos que:

$$\delta = \{ABCD\} = \{BADC\} = \{CDAB\} = \{DCBA\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\delta} = \{ABDC\} = \{BACD\} = \{CDBA\} = \{DCAB\} \quad (2)$$

Los demás valores de la razón cruzada se pueden calcular a partir de la definición y utilizando el teorema de Euler* pero a nosotros solamente nos interesan estos dos valores.

Tres valores particulares de la razón cruzada que también nos van a interesar, los cuales se pueden calcular directamente de la definición, son los siguientes:

$$\{AACD\} = 1, \quad \{ABAD\} = 0, \quad \{ABCA\} = \infty. \quad (3)$$

La demostración del siguiente teorema es inmediata de la definición de razón cruzada por lo que no la presentaremos.

2.8.2 Teorema. Para cinco puntos A, B, C, U, V en el plano se cumple

$$\{ACUV\} = \{ABUV\} \cdot \{BCUV\}$$

Ahora vamos a probar los siguientes dos teoremas que nos serán de gran utilidad cuando definamos el concepto de distancia en geometría hiperbólica.

2.8.3 Teorema. La razón cruzada de cuatro puntos colineales es igual a la razón cruzada de sus inversos con respecto a cualquier centro de inversión.

Demostración.

Sean A, B, C, D cuatro puntos dados sobre la línea l , y sea \mathcal{C} una circunferencia con respecto a la cual vamos a invertir (Fig. 2.20). Sean A', B', C', D' los inversos de los puntos A, B, C, D respectivamente. Tenemos las siguientes semejanzas de triángulos:

$$\triangle OAC \approx \triangle OC'A' \text{ que implica } AC = \frac{OA}{OC'} C'A' \quad (4)$$

$$\triangle OBC \approx \triangle OC'B' \text{ que implica } CB = \frac{OB}{OC'} B'C' \quad (5)$$

$$\triangle OAD \approx \triangle OD'A' \text{ que implica } AD = \frac{OA}{OD'} D'A' \quad (6)$$

$$\triangle OBD \approx \triangle OD'B' \text{ que implica } DB = \frac{OB}{OD'} B'D' \quad (7)$$

dividiendo las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) tenemos:

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} \cdot \frac{A'D'}{D'B'}$$

ya que todos los términos con O se cancelan, por lo que la razón cruzada de cuatro puntos colineales se conserva bajo inversiones. Cabe mencionar que si el centro de inversión es colineal con los puntos A, B, C, D , la demostración es diferente.

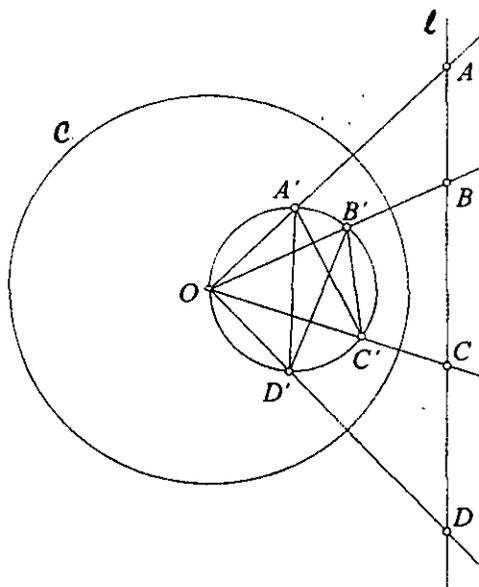


Fig. 2.20 La razón cruzada se preserva.

Si consideramos a una línea recta como una circunferencia de radio infinito, podemos decir que este teorema es un caso particular del siguiente teorema que afirma que la razón cruzada de cuatro puntos concíclicos se preserva bajo inversiones.

2.8.4 Teorema. *La razón cruzada de cuatro puntos concíclicos es igual a la razón cruzada de sus inversos con respecto a cualquier centro de inversión.*

Demostración.

La demostración para cuando los puntos son concíclicos es análoga a la demostración de cuando los puntos eran colineales, lo único que tenemos que ver es que tenemos las mismas semejanzas de triángulos que en el caso anterior. Para ello veamos que si tomamos la circunferencia ζ que pase por los puntos A, A' y C (Fig. 2.21) entonces ésta pasará por C' , pues, al pasar por A y A' es ortogonal a la circunferencia de inversión c , y como pasa por C entonces tiene que pasar por C' , por lo tanto tenemos que los triángulos ΔOAC y $\Delta OC'A'$ son semejantes (teoremas 2.1.5 y 2.7.4). De una forma similar obtenemos las demás semejanzas de la demostración del teorema 2.8.3. Por lo tanto la razón cruzada de los puntos concíclicos A, B, C, D se preserva bajo la inversión con respecto a cualquier centro de inversión.

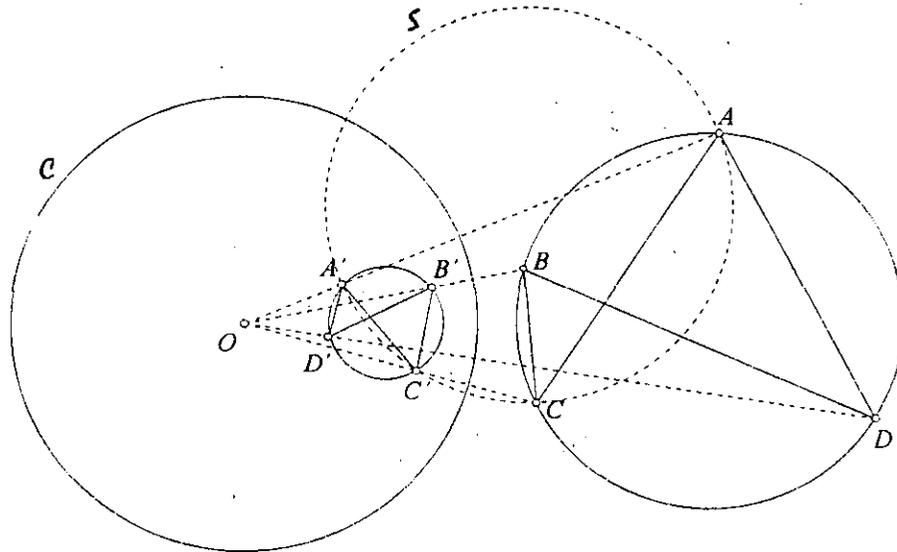


Fig. 2.20 La razón cruzada se preserva bajo inversiones.

Capítulo 3

Quinto postulado.

En este capítulo veremos algunos de los intentos que muchos matemáticos hicieron durante casi dos mil años por probar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro. Cómo a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX por fin se crean lo que hoy en día conocemos como geometrías no euclidianas (geometría elíptica y geometría hiperbólica).

3.1 Intentos de demostraciones del quinto postulado.

En los *Elementos* de Euclides, el quinto postulado está escrito de una forma muy diferente a los otros cuatro. La primera vez que Euclides lo utiliza es en la proposición veintinueve; más aún, la proposición veintiocho es el *recíproco* del quinto postulado, es por esto que muchos matemáticos intentaron probar el quinto postulado como si fuera una proposición, es decir, demostrarlo utilizando

únicamente los primeros cuatro postulados. Aquí veremos algunos de estos intentos.

3.1.1 Ptolomeo.

Uno de los primeros intentos conocidos por probar el quinto postulado lo hace el astrónomo y geógrafo griego Claudio Ptolomeo (85–165) y su razonamiento fue de la siguiente manera.

Sean g y h líneas paralelas que son cortadas por una transversal. Supongamos que $a+b <$ dos ángulos rectos, pero, como g y h son paralelas tanto en un lado de la transversal como en el otro, entonces *la suma de los ángulos interiores en un lado es igual a la suma de los ángulos interiores en el otro lado*. Por lo tanto $c+d <$ dos ángulos rectos. Por lo tanto $a+b+c+d <$ cuatro ángulos rectos, pero esto es imposible ya que la proposición 13 asegura que $a+b+c+d$ es igual a cuatro ángulos rectos. Análogamente si suponemos que $a+b >$ dos ángulos rectos llegamos a una contradicción.

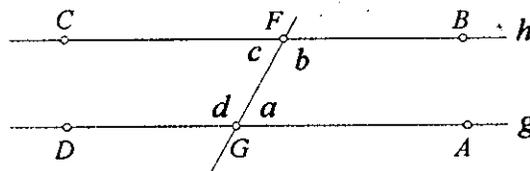


Fig. 3.1 Prueba de Ptolomeo.

En esta prueba Ptolomeo utiliza una demostración que él mismo hace de la proposición 29 y a partir de ésta intenta demostrar el quinto postulado, pero es en esta última prueba en la cual utiliza el hecho de que por un punto fuera de una línea pasa una y sólo una paralela (axioma de Playfair).

La proposición 29 dice lo siguiente:

Una línea que corta a dos líneas rectas paralelas hace que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea igual a 180° .

La prueba que hace Ptolomeo es:

Sean AD y BC paralelas y sea FG una transversal que las intersecta. Si los ángulos $\angle CFG$ y $\angle DGF$ sumaran más de 180° entonces los ángulos $\angle BFG$ y $\angle AGF$ sumarían menos de 180° , pero estos dos ángulos suman también más de 180° , porque CF y DG no son más paralelas que FB y GA ; esto es, si los ángulos $\angle CFG$ y $\angle DGF$ sumaran más de 180° entonces los ángulos $\angle BFG$ y $\angle AGF$ sumarían más de 180° .

3.1.2 Proclo.

Proclo (411–485) intenta probar el quinto postulado de la siguiente forma:

Dadas dos líneas paralelas l y m , supongamos que la línea $n \neq l$ corta a m en P , entonces n intersecta a l también.

Sea Q el pie de la perpendicular de P a l . Si n coincide con PQ , entonces n intersecta a l en Q , pero si $n \neq PQ$, entonces existe un rayo PY en n que está entre PQ y un rayo PX en m , donde X es el pie de la perpendicular desde Y a m (Fig.3.2). Ahora, como el punto Y se aleja indefinidamente de P en n , el segmento XY aumenta indefinidamente de tamaño por lo que eventualmente se vuelve más grande que PQ . Por lo tanto Y debe cruzar al otro lado de l , por lo que n y l se intersectan.

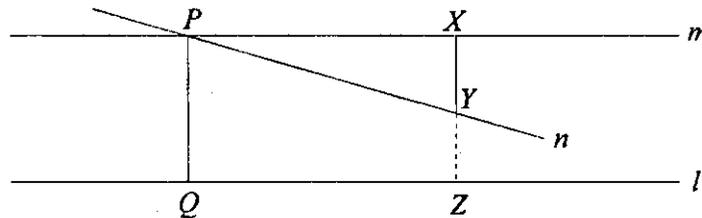


Fig. 3.2 Demostración de Proclo.

En esta demostración que hace Proclo todos los argumentos son correctos el problema es que utiliza el hecho de que si tenemos dos paralelas, éstas están siempre a la misma distancia; pero ésta es, de nuevo, una equivalencia del quinto postulado.

3.1.3 Nasiraddin.

Otro intento importante por probar el quinto postulado fue dado por el astrónomo y matemático persa Nasiraddin (1201–1274).

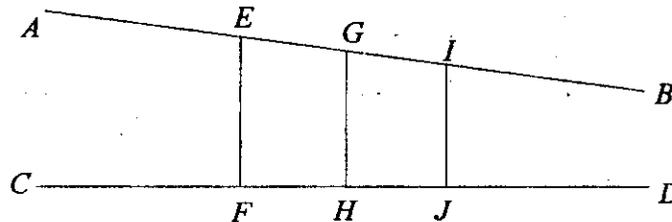


Fig. 3.3 La hipótesis de Nasiraddin.

Nasiraddin afirma, sin demostración, que si dos líneas rectas AB y CD (Fig.3.3) son intersectadas por una sucesión de perpendiculares (EF, GH, IJ , etc.) a CD

desde los puntos E, G, I , etc. de AB , siempre formando ángulos iguales con AB , que son siempre ángulos agudos del lado de B , y en consecuencia son siempre ángulos obtusos del lado de A , entonces las líneas AB y CD continuamente se separan en la dirección de A y C por lo que nunca se intersectan y las perpendiculares continuamente crecen en esta dirección, por el contrario, continuamente se acercan en la dirección de B y D y las perpendiculares continuamente decrecen en esta dirección. Recíprocamente, si las perpendiculares continuamente crecen en la dirección de A y C y decrecen en la dirección de B y D , las líneas divergen en la primera dirección y convergen en la segunda dirección, además las perpendiculares formaran ángulos iguales con AB , los ángulos obtusos estarán todos del lado de A y C , y los ángulos agudos estarán todos del lado de B y D .

Nasiraddin tomó un segmento AB y dibujó dos perpendiculares iguales AD y BC del mismo lado, luego unió C con D .

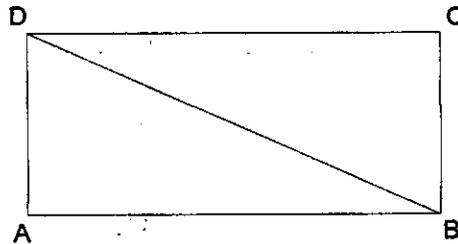


Fig. 3.4 La construcción de Nasiraddin.

Para probar que los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DCB$ son ángulos rectos recurre a la reducción al absurdo, utilizando la suposición antes descrita. Así, si el ángulo $\angle DCB$ fuera agudo, AD sería menor que BC , pero eso no puede ser ya que por construcción $AD = BC$, por lo tanto, $\angle DCB$ no es agudo y por un razonamiento análogo tampoco es obtuso. Nasiraddin tácitamente supone que cuando el ángulo $\angle DCB$ es agudo, entonces el ángulo $\angle CDA$ debe ser obtuso. Sus argumentos nos dicen que los cuatro ángulos del cuadrilátero son ángulos rectos. Entonces, si se dibuja BD , los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle CDB$ son congruentes y la suma de los ángulos de cada uno es igual a dos ángulos rectos.

En esta demostración encontramos que la suposición hecha al principio no es más aceptable sin prueba que el mismo quinto postulado. También, si suponemos que el ángulo $\angle DCB$ es agudo esto no implica que el ángulo $\angle CDA$ sea obtuso, de serlo tenemos, otra vez, una equivalencia al quinto postulado.

3.1.4 Wallis

John Wallis (1616–1703), matemático inglés, ofrece una nueva demostración al quinto postulado en 1663, pero él, al igual que Proclo y Nasiraddin, utiliza una afirmación equivalente al quinto postulado, que es el hecho de que existen triángulos semejantes que no son congruentes.

Postulado de Wallis. Dado cualquier triángulo $\triangle ABC$ y cualquier segmento DE , existe un triángulo $\triangle DEF$ (teniendo a DE como uno de sus lados) que es semejante al triángulo $\triangle ABC$ (denotado por $\triangle ABC \approx \triangle DEF$).

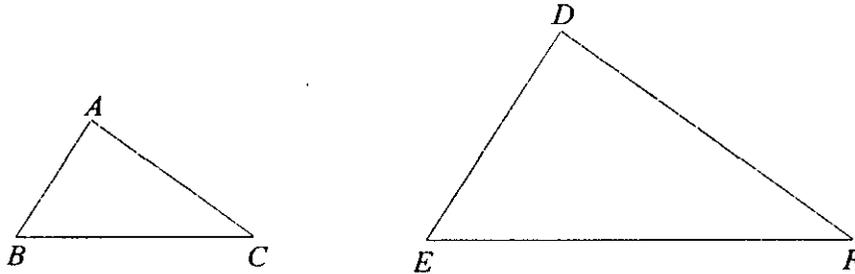


Fig. 3.5 Triángulos semejantes, postulado de Wallis.

Con este postulado Wallis prueba el quinto postulado como sigue.

Dadas dos líneas AB y CD (Fig. 3.6) que son cortados por una transversal EF en los puntos G y H respectivamente, donde la suma de los ángulos $\angle BGH$ y $\angle DHG$ es menor que dos ángulos rectos. Hay que probar que AB y CD concurren. Es fácil ver que $\angle EGB > \angle GHD$, entonces, si el segmento HG se mueve a lo largo de EF , con HD pegado a él, hasta que H coincida con la posición original de G , HD toma la posición GI , y queda enteramente por encima de GB . Por lo tanto, durante este "movimiento" HD debe haber cortado a GB , por ejemplo, cuando HD coincide con JK corta a GB en L . Ahora si construimos un triángulo con base GH semejante al triángulo $\triangle GJL$ (lo cual es posible por hipótesis), entonces es evidente que HD debe cortar a GB .

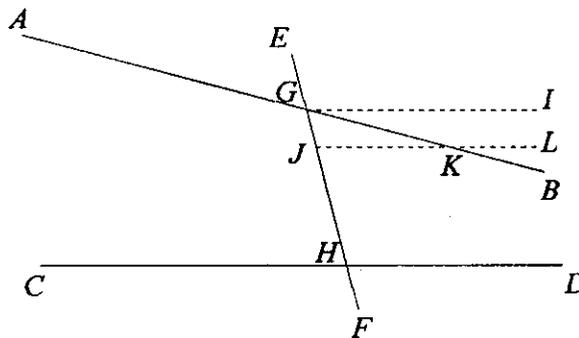


Fig. 3.6 Prueba dada por Wallis.

3.1.5 Saccheri.

Girolamo Saccheri (1667–1733), matemático italiano, intenta probar el quinto postulado de una forma diferente: al igual que Nasiraddin, recurre a la reducción al absurdo, pero además utiliza un cuadrilátero $ABCD$ (que posteriormente utilizaremos y llamaremos *cuadrilátero de Saccheri*) en el que $AD = BC$ y además, los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CBA$ son rectos.

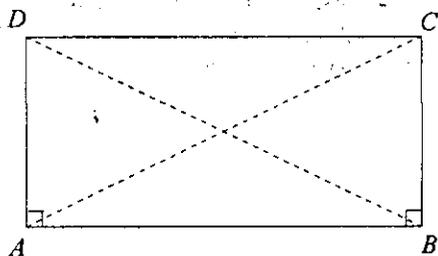


Fig. 3.7 Cuadrilátero de Saccheri.

Primero, Saccheri prueba que los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BCD$ (ángulos de la *cima*) son iguales y lo hace sin necesidad de utilizar el quinto postulado, para ello prueba la congruencia de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ (LAL), ya que $AD = BC$, pero esta congruencia implica la congruencia de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ (LLL), por lo que $\angle ADC = \angle BCD$.

Saccheri ahora tenía tres posibles hipótesis para los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BCD$

- a) La hipótesis del ángulo recto ($\angle ADC = 90$ y $\angle BCD = 90$).
- b) La hipótesis del ángulo obtuso ($\angle ADC > 90$ y $\angle BCD > 90$).
- c) La hipótesis del ángulo agudo ($\angle ADC < 90$ y $\angle BCD < 90$).

Claramente, si al suponer (b) o (c) encontraba una contradicción, esto implicaba que la hipótesis que vale es la (a) y así quedaría probado el quinto postulado. Con la hipótesis del ángulo obtuso llegó a una contradicción al postulado 2 y las proposiciones 16, 17 y 18 de Euclides. Con la hipótesis del ángulo agudo encontró muchos resultados importantes pero nunca pudo llegar a una contradicción, por lo que escribió:

"la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque es repugnante a la naturaleza de la línea recta".

3.1.6 Lambert.

Johann Heinrich Lambert (1728–1777), matemático suizo, realizó un trabajo muy parecido al de Saccheri en el que propone un cuadrilátero (*cuadrilátero de Lambert*) el cual equivale a la mitad de un cuadrilátero de Saccheri y consiste de un cuadrilátero con tres ángulos rectos

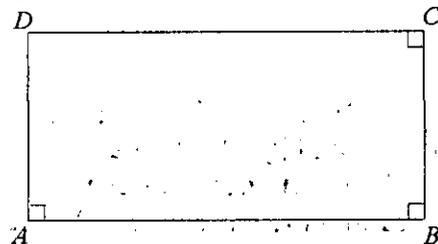


Fig. 3.8 Cuadrilátero de Lambert.

Lambert propone, al igual que Saccheri, tres hipótesis para el ángulo en D , que son equivalentes a las hipótesis de Saccheri; es decir, el ángulo en D puede ser recto, obtuso o agudo y encuentra resultados equivalentes a los que encontró Saccheri.

Un resultado importante que se deduce de las aportaciones tanto de Saccheri como de Lambert es el siguiente teorema que enunciaremos en este momento aunque daremos su demostración en la sección 3.2.

Teorema (Saccheri–Lambert): *La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es menor o igual que 180° .*

De este teorema podemos definir el *defecto* de un triángulo como la diferencia entre 180° y la suma de los ángulos interiores del triángulo, es decir, $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$, donde α, β y γ son los ángulos del triángulo y δ el defecto.

Lambert prueba que la hipótesis del ángulo agudo implica que el área de un triángulo es proporcional al *defecto* del mismo, es decir, el área de un triángulo esta dada por $A = k(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma))$.

3.1.7 Legendre.

Probablemente el más notable de los últimos intentos por probar el quinto postulado fue el del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Sus investigaciones al respecto se dieron a conocer en una publicación en 1833.

Legendre intentó probar el quinto postulado utilizando reducción al absurdo, analizó la suma de los ángulos interiores de un triángulo y, al igual que Saccheri y Lambert, tenía tres posibles hipótesis:

- a) Igual a dos ángulos rectos.
- b) Mayor a dos ángulos rectos.
- c) Menor a dos ángulos rectos.

Al suponer que la suma era mayor que dos ángulos rectos encontró una contradicción, pero al suponer que la suma era menor que dos ángulos rectos el procedió como sigue:

Supongamos que en el triángulo $\triangle ABC$ la suma de los ángulos interiores es menor que dos ángulos rectos, entonces podemos decir que la suma de los ángulos del triángulo es $180^\circ - \alpha$, donde α es el defecto del triángulo. Construimos el triángulo $\triangle BCD$ (Fig. 3.9) de forma tal que los ángulos $\angle BCD$ y $\angle ABC$ sean iguales, además, los segmentos CD y AB también sean iguales y unimos B con D . Así los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son congruentes y para ambos, la suma de los ángulos interiores es $180^\circ - \alpha$.

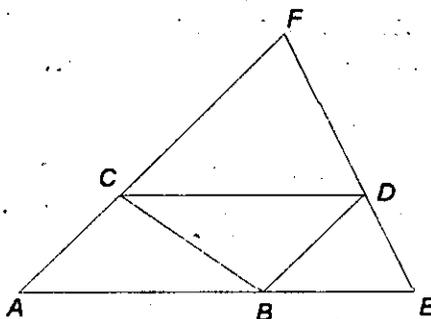


Fig. 3.9 Prueba de Legendre.

Trazamos una línea por D que intersecte las líneas AB y AC en E y F respectivamente formando los triángulos $\triangle BDE$ y $\triangle CDF$. Ahora, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es mayor que 180° , se tiene que la suma de los ángulos de los cuatro triángulos no es mayor que $720^\circ - 2\alpha$, pero como la suma de los ángulos en B es 180° , lo mismo pasa con los ángulos en C y en D , se tiene que la suma de los ángulos en el triángulo $\triangle AEF$ no es mayor que $180^\circ - 2\alpha$ entonces el defecto del triángulo $\triangle AEF$ es por lo menos 2α mientras que el defecto del triángulo original $\triangle ABC$ es α y así tenemos una construcción que nos permite, por lo menos, duplicar el defecto de un triángulo.

Aplicando esta construcción al triángulo $\triangle AEF$ podemos encontrar un triángulo cuyo defecto sea, por lo menos 4α y repitiendo esta construcción un número suficiente de veces podemos encontrar un triángulo cuyo defecto sea arbitrariamente grande, pero por la propia naturaleza del defecto, éste debe ser menor que 180° , por lo que se había encontrado una contradicción en suponer que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180° (dos ángulos rectos).

Todos los argumentos en esta demostración son correctos pero Legendre supuso que siempre es posible trazar la línea por D que intersecta a las líneas AB y AC pero ésta es, nuevamente, una equivalencia del quinto postulado.

3.1.8 Farkas Bolyai.

El último intento por demostrar el quinto postulado que veremos fue dado por el matemático rumano Farkas Wolfgang Bolyai (1775–1856) quien intenta probar el quinto postulado de la siguiente forma:

Dado un punto P que no está en una línea l , sea PQ (Fig. 3.10) la perpendicular a l por P y Q el pie de dicha perpendicular y sea m perpendicular a PQ en P . Sea n cualquier línea que pasa por P distinta de m y de PQ . Hay que probar que n intersecta a l . Sea A cualquier punto entre P y Q . Sea B el único punto

en la línea PQ tal que $AQ = QB$. Sea R el pie de la perpendicular desde A a n y sea C el único punto en la línea AR tal que $AR = RC$. Entonces A , B y C son tres puntos no colineales, por lo tanto hay una única circunferencia \mathcal{C} que pasa por ellos. Ahora, como l es la mediatriz del segmento AB y n es la mediatriz del segmento BC , entonces las líneas l y n se cortan en el centro de la circunferencia \mathcal{C} .

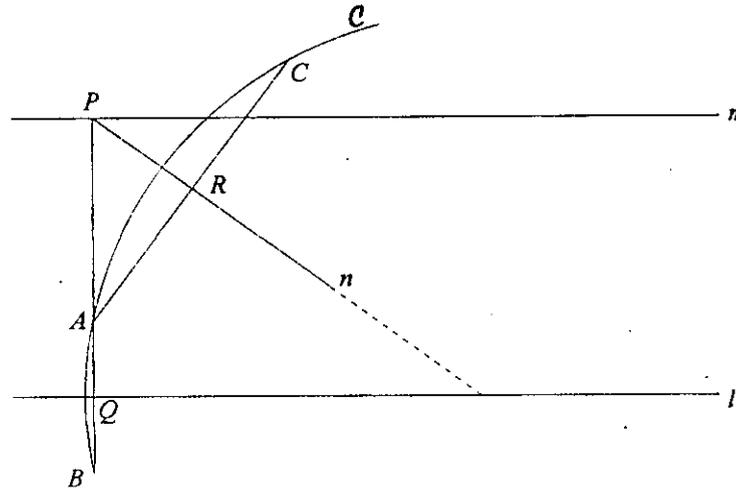


Fig. 3.10 Demostración de Farkas Bolyai.

En esta última demostración Farkas Bolyai utiliza el hecho de que por cualesquiera tres puntos no colineales existe una circunferencia que pasa por ellos, que es una afirmación equivalente al quinto postulado.

3.2 Demostración del Teorema de Saccheri-Lambert

Antes de probar el teorema de Saccheri-Lambert necesitamos ver los siguientes teoremas, que nos afirman algunas propiedades importantes de triángulos en geometría neutra que necesitaremos para su prueba.

3.2.1 Teorema. *Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos interiores remotos.*

Demostración.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y D un punto en la extensión de BC por C (Fig. 3.11). Queremos probar que $\angle ACD > \angle BAC$ y que $\angle ACD > \angle ABC$. Sea E el punto medio de AC , trazamos BE y la prolongamos hasta encontrar F tal que $BE = EF$. Ahora, como $AE = EC$, $BE = EF$ y $\angle AEB = \angle CEF$, entonces los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle CEF$ son congruentes (LAL) por lo que $\angle BAE = \angle FCE$. Finalmente, como $\angle ACD > \angle FCE$ entonces $\angle ACD > \angle BAE$. Para ver que $\angle ACD > \angle ABC$, como los ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCH$ son iguales, hacemos la

construcción que hicimos antes; tomamos el punto medio M del segmento BC , trazamos AM y lo prolongamos, etcétera. Por lo tanto $\angle ACD > \angle ABC$.

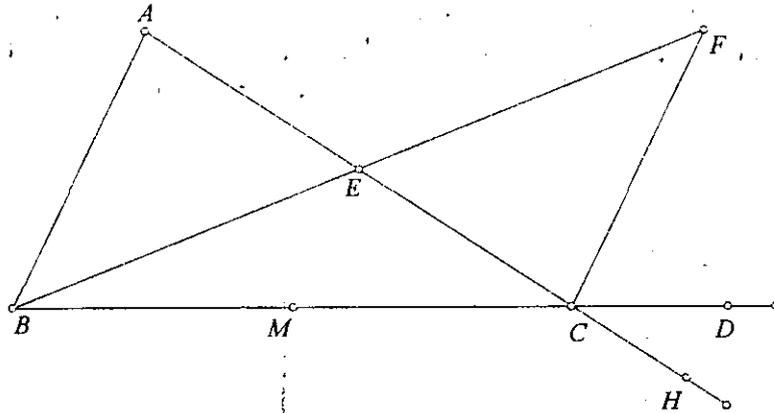


Fig. 3.11 $\angle ACD > \angle BAC$ y $\angle ACD > \angle ABC$.

3.2.2 Teorema. Si dos líneas son cortadas por una transversal y con ésta forman ángulos alternos internos iguales, entonces las líneas son paralelas.

Demostración.

Sea PQ una transversal que corta a las líneas λ y μ que forma los ángulos iguales $\angle APQ$ y $\angle PQC$ (Fig. 3.12) y supongamos que las líneas λ y μ se intersecan en un punto O formando el triángulo ΔOPQ . Pero si esto ocurre, tenemos que un ángulo exterior del triángulo ΔOPQ es igual a uno de los ángulos remotos interiores ($\angle APQ = \angle PQC$) y esto contradice el teorema 3.2.1. Por lo tanto las líneas λ y μ son paralelas.

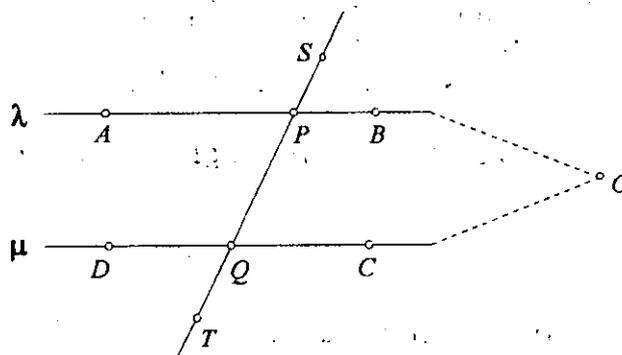


Fig. 3.12 Las líneas λ y μ son paralelas.

3.2.3 Corolario. Dos líneas perpendiculares a una misma línea son paralelas.

La demostración del corolario 3.2.3 es inmediata del teorema 3.2.2.

3.2.4 Corolario. *Existe una única perpendicular a una línea dada que pase por un punto dado.*

Demostración.

Sean l una línea dada y P un punto fuera de ella. Si PQ y PR son perpendiculares a l desde P , entonces en el triángulo ΔPQR tenemos que $\angle PQS = \angle PRS$, pero esto contradice el teorema 3.2.1.

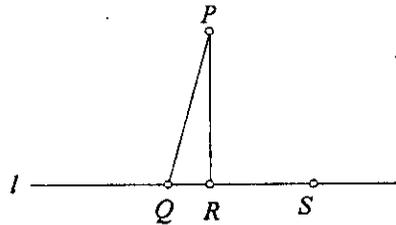


Fig. 3.13 Existe una única perpendicular a l que pasa por P .

3.2.5 Corolario. *Para un punto P que no está en la línea λ existe por lo menos una línea paralela a λ que pasa por P .*

Demostración.

Trazamos la perpendicular desde P a λ que corta a λ en Q y ahora levantamos la perpendicular μ a PQ por P , entonces λ y μ son paralelas por el corolario 3.2.3.

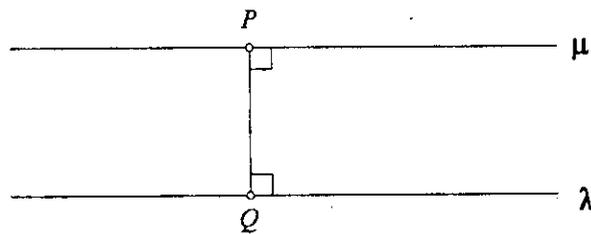


Fig. 3.14 λ y μ son paralelas.

3.2.6 Teorema. *La suma de dos ángulos de un triángulo es menor que 180° .*

Demostración.

Para un triángulo ΔABC queremos mostrar que $\angle CAB + \angle ABC < 180^\circ$. Sea D un punto en la extensión de BC por B (Fig. 3.15). Entonces $\angle ABD$ es un ángulo exterior del triángulo ΔABC que, por el teorema 3.2.1, cumple que $\angle ABD > \angle CAB$. Pero como $\angle ABD = 180^\circ - \angle ABC$, entonces $180^\circ - \angle ABC > \angle CAB$, es decir, $\angle CAB + \angle ABC < 180^\circ$.

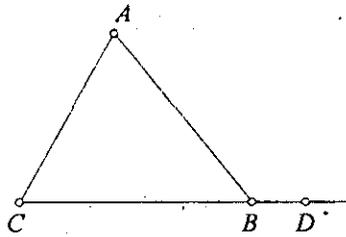


Fig. 3.15 $\angle CAB + \angle ABC < 180^\circ$.

3.2.7 Lema. Dado un triángulo ΔABC y el ángulo $\angle BAC$. Existe un triángulo $\Delta A_1B_1C_1$ tal que $\Delta A_1B_1C_1$ tiene la misma suma de ángulos que el triángulo ΔABC y $\angle B_1A_1C_1 \leq \frac{1}{2} \angle BAC$.

Demostración.

Sea E el punto medio de BC , trazamos AE y lo prolongamos hasta encontrar un punto F tal que $AE = EF$ (Fig. 3.16). Entonces los triángulos ΔABE y ΔFCE son congruentes, por lo que sus ángulos correspondientes son iguales. Ahora, si nos fijamos en el triángulo ΔAFC , vemos que tiene la misma suma de ángulos que el triángulo ΔABC , ya que:

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \angle CAF + \angle AFC + \angle FCA$$

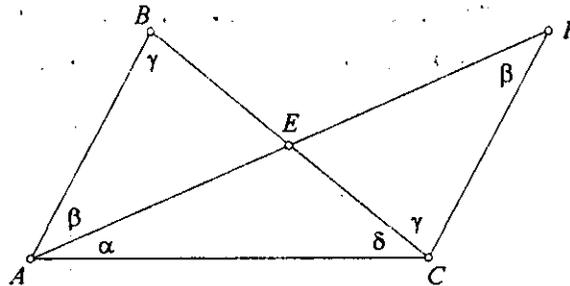


Fig. 3.16 Los triángulos ΔABC y ΔACF tienen la misma suma angular.

y ahora, como $\angle CAB = \alpha + \beta$, entonces $\alpha \leq \frac{1}{2} \angle CAB$ o $\beta \leq \frac{1}{2} \angle CAB$, en cualquier caso renombramos el triángulo ΔAFC como $\Delta A_1B_1C_1$ de forma tal que $\angle B_1A_1C_1 \leq \frac{1}{2} \angle BAC$.

3.2.8 Teorema (Saccheri–Lambert): La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es menor o igual que 180° .

Demostración.

Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que existe un triángulo ΔABC para el cual su suma de ángulos es $(180 + p)^\circ$, donde p es un número positivo. Por el lema 3.2.7 existe un triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ con la misma suma de ángulos que el triángulo ΔABC y tal que:

$$\angle B_1 A_1 C_1 \leq \frac{1}{2} \angle BAC$$

Aplicando el lema 3.2.7 al $\Delta A_1 B_1 C_1$ existe un triángulo $\Delta A_2 B_2 C_2$ con la misma suma de ángulos que el triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ y tal que:

$$\angle B_2 A_2 C_2 \leq \frac{1}{2} \angle B_1 A_1 C_1 \leq \frac{1}{4} \angle BAC$$

Podemos entonces encontrar la sucesión de triángulos

$$\Delta A_1 B_1 C_1, \Delta A_2 B_2 C_2, \Delta A_3 B_3 C_3, \dots,$$

tal que cada uno de ellos tenga suma de ángulos $180^\circ + p^\circ$, y para cada entero positivo n se tiene que:

$$\angle B_n A_n C_n \leq \frac{1}{2^n} \angle BAC$$

Podemos escoger una n suficientemente grande tal que:

$$\angle B_n A_n C_n \leq p^\circ$$

pero como $\angle B_n A_n C_n + \angle A_n C_n B_n + \angle C_n B_n A_n = 180^\circ + p^\circ$ se sigue que:

$$\angle A_n C_n B_n + \angle C_n B_n A_n \geq 180^\circ$$

pero esto contradice al teorema 3.2.6. Por lo tanto no existe ningún triángulo tal que su suma de ángulos sea mayor que 180° .

3.3 El descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

Una de las partes más emotivas en la historia del quinto postulado es cuando, en el siglo XIX, después de los muchos intentos por probar el quinto postulado, se propone que podría existir otra geometría en la cual el quinto postulado no se cumpliera. Sus principales creadores fueron el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss, el matemático rumano János Bolyai y el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky, aunque también figuraron matemáticos como Friedrich Ludwig Wachter, Ferdinand Karl Schweikart y Franz Adolf Taurinus. Algunos de los nombres que se le dieron a esta nueva geometría fueron *geometría anti-euclidiana*, *geometría astral*, *geometría imaginaria* y *geometría no euclidiana*, siendo este último el nombre que se utiliza hasta nuestros días.

3.3.1 Wachter

Friedrich Ludwig Wachter (1792–1817) profesor de matemáticas en Dantzig y alumno de Gauss en Göttingen en 1809, intentó probar el quinto postulado. En una publicación en 1817 trató de probar que a través de cuatro puntos no coplanares en el espacio se puede construir una esfera que los contenga. Esta

idea fue motivada por el hecho de que era factible probar el quinto postulado si por tres puntos no colineales se puede trazar una circunferencia que los contenga. Así, Wachter llegó a concebir una geometría no-euclidiana. Gauss comenta en una carta después de estudiar el trabajo de Wachter:

"cerca estoy de la convicción de que no es posible demostrar la verdad necesaria de nuestra geometría, al menos por la inteligencia humana para la inteligencia humana. Quizá en otra vida lleguemos a otras percepciones de la naturaleza del espacio que no podemos alcanzar ahora. Mientras tanto debemos poner nuestra geometría en igualdad de condiciones, no con la aritmética, que tiene un fundamento a priori, sino con la mecánica."

3.3.2 Schweikart.

Ferdinand Karl Schweikart (1780–1859), quien de 1796 a 1798 fue estudiante de leyes en Marburg, siempre estuvo interesado en matemáticas. Estando en la universidad, tuvo la oportunidad de tomar clase con J.K.F. Hauff, quien era una autoridad en la teoría de las paralelas. En 1818 entregó a su amigo Gerling, alumno de Gauss y profesor de astronomía en Marburg, un manuscrito de sus ideas acerca de la existencia de una nueva geometría en la cual el postulado de las paralelas fuera negado, pidiéndole enviarlo a Gauss para que lo estudie. En ese manuscrito asegura la existencia de dos geometrías, la geometría euclidiana y la geometría astral. Además aseguraba que en la geometría astral la suma de los ángulos interiores de triángulo es menor que dos ángulos rectos; que mientras es menor la suma de los ángulos de un triángulo mayor es su área; que la altura de un triángulo rectángulo e isósceles crece al crecer los lados pero nunca es más grande que cierta longitud a la que llamo *la constante* y que si esta constante es infinita se tiene la geometría euclidiana. La respuesta de Gauss a este manuscrito fue:

"Exprésele mi sincero reconocimiento, casi podría haberlo escrito yo mismo"

Schweikart nunca publicó los resultados de sus investigaciones pero motivó a su sobrino Franz Adolf Taurinus a tomar parte en el estudio de las paralelas.

3.3.3 Taurinus.

Después de estudiar jurisprudencia por un corto tiempo, Franz Adolf Taurinus (1794–1847) decide abordar el problema de las paralelas en 1824. Al principio no estaba de acuerdo con su tío Schweikart e intentó probar el quinto postulado. Finalmente, en 1826, publicó una obra en cuyo apéndice trabajó con fórmulas ordinarias de trigonometría esférica, reemplazando el radio de la esfera por un radio imaginario. Así obtuvo la geometría que se desarrolla bajo la hipótesis del ángulo agudo. Consciente de la importancia teórica de sus resultados, los publica, pero recibe poco reconocimiento. Esta decepción hace que Taurinus caiga en la desesperación y quemé todos los ejemplares que encontró de sus libros.

A pesar de que sus investigaciones no trascendieron por falta de divulgación, Taurinus fue uno de los primeros en obtener una visión de la geometría no euclidiana.

3.3.4 Gauss.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) en un principio, al igual que todos los matemáticos contemporáneos a él, intentó probar el quinto postulado como consecuencia de los primeros cuatro pero, en una carta que envió a Taurinus en 1829, se ve que Gauss está convencido de la independencia del quinto postulado:

“respecto a su intento, no tengo nada (o no mucho) que decir, excepto que es incompleto. Es cierto que a su demostración de que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede ser mayor que 180° , le falta algo de rigor geométrico... que puede remediarse fácilmente. Pero la situación es diferente en la segunda parte, en lo referente a que la suma de los ángulos no puede ser menor que 180° ; éste es el punto crítico, el risco donde todo se estrella... Lo he meditado por más de treinta años y no creo que alguien lo haya pensado más que yo, aunque nunca he publicado nada al respecto. Al suponer que la suma de los ángulos es menor que 180° , se llega a una geometría curiosa, bastante distinta de la nuestra (la euclidiana), y sin embargo consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción y puedo resolver cualquier problema excepto la determinación de una constante que no puede designarse a priori. Mientras mayor es esa constante, más parecido hay con la geometría euclidiana, y cuando su valor es infinito, ambas coinciden. Los teoremas de esta geometría suenan paradójicos al no iniciado, pero una reflexión cuidadosa revela que no contienen algo imposible. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo se hacen tan pequeños como uno quiera si se hacen los lados lo suficientemente grandes. La única cosa opuesta a nuestra concepción es que debería existir en el espacio una magnitud lineal determinada por sí misma. Pero me parece, pese a lo que digan los metafísicos, que sabemos muy poco, o casi nada, sobre la verdadera naturaleza del espacio como para considerar absolutamente imposible lo que nos parece antinatural. A veces he expresado el deseo de que la geometría euclidiana no fuera válida, porque tendríamos una medida canónica a priori.

No temo que una persona con conocimientos matemáticos mal entienda lo antes dicho, pero en cualquier caso considere lo anterior una comunicación privada de la que no puede hacerse uso público, ni divulgarse en forma alguna. Tal vez en un futuro, si llego a disponer de más tiempo que ahora, haga públicas mis investigaciones.”

Es claro que con esto Gauss es uno de los primeros en entender que podía existir una geometría no euclidiana pero, aun siendo el matemático más prominente de su época, no se atreve a publicar estas ideas por temor a la crítica.

Sus resultados de lo que él mismo denominó “Geometrías No-euclidianas” fueron publicados en 1855 después de su muerte.

3.3.5 Bolyai.

János Bolyai (1802–1860) fue hijo del matemático Wolfgang Farkas Bolyai, quien había estado trabajando en el problema de las paralelas. Como Farkas no quería que su hijo tomara el problema, le manda una carta a su hijo János en la que dice:

“es increíble que esta obscura terquedad, este eclipse eterno, este defecto en geometría, esta nube eterna en una verdad virgen pueda ser eterna”

pero al ver que su hijo está atraído por el problema de las paralelas le envía otra carta en 1820 en la que le dice:

“no debes acercarte al problema de las paralelas, conozco este camino hasta su final. He atravesado esta noche insondable, que extinguió toda la luz y alegría de mi vida. Te suplico que dejes la ciencia de las paralelas aparte... Pensé que me podía sacrificar para obtener la verdad. Estaba listo para convertirme en un mártir que pudiera resolver el defecto de la geometría y regresarlo purificado a la humanidad. Realice monstruosas, enormes labores; mis creaciones están mucho mejor que éstas de otros y todavía no he conseguido completarlas satisfactoriamente. Para esto es cierto que “si paullum a summo discessit, vergit ad imum”. Di vuelta atrás cuando vi que ningún hombre puede alcanzar el fondo de esta noche. Di vuelta atrás desconsolado, compadeciéndome a mi mismo y a toda la humanidad.”

En noviembre de 1823 János Bolyai le comunica a su padre los resultados a los que ha llegado y su emoción:

“quiero publicar un trabajo acerca de paralelas tan pronto como pueda ponerlo en orden, completarlo y se presente la oportunidad de hacerlo... No he hecho todavía el descubrimiento pero la ruta que he seguido es casi seguro que me llevará al resultado, si es que es posible. No lo tengo todavía completo pero he encontrado cosas tan magníficas que estoy asombrado, y sería muy mala suerte que estas cosas se perdieran. Cuando usted, mi querido padre, las vea, las entenderá. Todo lo que puedo decir ahora es que he creado un nuevo y diferente mundo de la nada. Todo lo que le he enviado antes es como una casa de cartas comparada con una torre. Estoy tan convencido de que esto me traerá un gran reconocimiento, como lo estoy de que voy a completar el trabajo”

Su padre le aconsejó que publicara sus resultados tan pronto como pudiera:

“si estás realmente convencido de haber conseguido algo, deberías hacer una publicación rápidamente por dos razones. Una es que la idea puede pasarse fácilmente a alguien más que la pueda publicar. Otra razón es que cuando es el tiempo de ciertas cosas, estas cosas aparecen en diferentes lugares como violetas en la primavera.”

János Bolyai publicó sus resultados en 1831 en un apéndice de un libro de su padre.

3.3.6 Lobachevsky.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792–1856) matemático ruso de la Universidad de Kasan intenta probar el quinto postulado desde 1815 y no fue sino hasta 1823 cuando cambió su punto de vista ante el problema. En 1823 terminó un manuscrito de un libro de geometría elemental, que nunca se publicó, en el cual afirmaba que no se había descubierto ninguna demostración del quinto postulado y que las pruebas que se habían sugerido eran simplemente explicaciones y no pruebas matemáticas.

Se sabe que en 1826, en la Universidad de Kasan, Lobachevsky expuso un artículo en el cual sugería una nueva geometría en la que se puede trazar más de una paralela por un punto dado a una línea dada y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a 180° . Desafortunadamente, este artículo nunca se publicó y el manuscrito no ha sido encontrado.

En 1829 hace su primera publicación en el "*Kasan Bulletin*" referente a geometrías no euclidianas, pero esta publicación llamó muy poco la atención dentro de su país y, como estaba impreso en ruso, prácticamente no llamó la atención fuera de él.

Ahí proponía nuevos conceptos que son; *dirección de paralelismo*, *ángulo de paralelismo* y *horociclo* y obtuvo el ángulo de paralelismo en función de la distancia del punto a la recta.

Lobachevsky hace tres publicaciones importantes; "*Sobre los principios de la Geometría*", "*Geometría imaginaria*", "*Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas*". Después de que Gauss estudió esta última le escribe a Schumacher:

"he tenido la oportunidad de volver a ver el pequeño libro de Lobachevsky ("Investigaciones Geométricas Sobre la Teoría de las Paralelas"). Contiene los elementos de esa geometría que debe ser válida, y puede con estricta consistencia ser válida, si la geometría euclidiana no fuera válida... No he encontrado nada nuevo en el trabajo de Lobachevsky, pero el desarrollo está hecho de una forma diferente a la que yo he seguido y ciertamente Lobachevsky hábilmente siguió un camino con espíritu puramente geométrico. Siento la necesidad de llamar a usted la atención sobre este libro que seguramente le proporcionara un intenso placer."

En 1848, Wolfgang Bolyai había escuchado acerca de las investigaciones de Lobachevsky y en enero de ese año le escribe a Gauss, preguntando por el nombre del libro del matemático ruso. Gauss le recomendó ese *admirable trabajo* "*Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas*", que contiene una

exposición adecuada de la teoría y es fácil de obtener. Fue así como Wolfgang, y a través de él, János; se enteraron de la geometría de Lobachevsky.

János comenta acerca del trabajo de Lobachevski:

"aunque este notable trabajo, ocasionalmente sigue diferentes métodos, el espíritu y los resultados son tan parecidos a los del apéndice de Thetamen matheseos que apareció en el año 1832, que uno no puede verlo sin asombro. Si Gauss quedó, como él dice, extremadamente sorprendido, primero por el apéndice y más adelante por el acuerdo de los matemáticos húngaros y rusos, ciertamente yo no lo estoy."

"La naturaleza de verdad verdadera por supuesto no deja de ser una y la misma en Maros-Vásárhely, en Kamschatka, en la Luna, o, para ser breve, dondequiera en el mundo; y que un ser sensato descubre puede también posiblemente ser descubierto por otro."

Pero, más allá de estas reflexiones, Bolyai tuvo por algún tiempo la sospecha que Lobachevski había conocido de alguna manera sus descubrimientos, posiblemente a través de Gauss, y, después de revisados, los había publicado. Su actitud mejoró con el tiempo. De hecho, no parece haber evidencia de que Lobachevski hubiese oído hablar de Bolyai.

3.3.7 Riemann.

George Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) fue alumno de Gauss y fue sobresaliente a lo largo de su carrera. Después fue a Berlín a estudiar con Dirichlet, Jacobi, Steiner y otros, pero regresó a Göttingen en 1850 para estudiar física y graduarse al año siguiente.

En 1854 Riemann da una conferencia en la Universidad de Göttingen. *"Über die Hypothesen welche die Geometrie zu grunde liegen"* en la cual precisó que el espacio no necesita ser infinito, aunque sea considerado ilimitado. Así sugirió una geometría en la cual no hubiese líneas paralelas y en la que la suma de los ángulos interiores de un triángulo fuese mayor a dos ángulos rectos. Hay que mencionar que, en la hipótesis del ángulo obtuso de investigaciones anteriores se había supuesto que las líneas eran infinitas. En esa misma plática se establecieron las bases para la segunda etapa del estudio de las geometrías no euclidianas al proponer un enfoque desde el punto de vista de la geometría diferencial, en contraste a los métodos sintéticos previos.

Capítulo 4

Modelos de Geometría Hiperbólica.

En este capítulo veremos que negando el quinto postulado de geometría euclidiana aparecen nuevas geometrías, los axiomas de geometría hiperbólica y también algunos de los modelos que hay para describir la geometría hiperbólica a partir del modelo que conocemos de geometría euclidiana, veremos que estos modelos son equivalentes y definiremos una distancia en uno de ellos.

4.1 Negaciones del quinto postulado.

Como vimos en el capítulo anterior, los intentos de demostración del quinto postulado utilizaban alguna de las proposiciones equivalentes al mismo.

Ahora vamos a tomar una de estas proposiciones equivalentes al quinto postulado, conocida como el axioma de Playfair.

4.1.1 Axioma de Playfair. Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada.

Esta proposición tiene dos posibles negaciones:

4.1.2 Negaciones del axioma de Playfair. Por un punto exterior a una recta:

- a) No se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada; o bien
- b) Se puede trazar más de una recta paralela a la recta dada.

Haciendo uso de la negación (a) obtenemos una nueva geometría que se conoce como Geometría Elíptica de la cual no haremos mención en este trabajo, y, haciendo uso de la negación (b) obtenemos otra nueva geometría, la Geometría Hiperbólica, que es la geometría que estudiaremos de ahora en adelante.

Primero que nada hay que presentar los nuevos axiomas y después los posibles modelos con los que trabajaremos.

4.2 Los axiomas de la Geometría Hiperbólica.

Los axiomas de la Geometría Hiperbólica constan de los primeros cuatro axiomas de la Geometría Euclidiana, que por ellos mismos generan lo que se conoce como Geometría Absoluta, y la segunda de las negaciones del quinto postulado.

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una línea recta finita continuamente en una línea recta.
3. Es posible construir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales uno a otro.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a la recta dada.

4.3 Modelos de la Geometría Hiperbólica.

4.3.1 Modelo de Klein.

Uno de los modelos más sencillos de la geometría hiperbólica fue propuesto por Arthur Cayley (1821 - 1895) y Felix Klein (1849 - 1929), aunque es más conocido como el modelo de Klein. Los puntos de este modelo son los puntos de \mathbb{R}^2 que están en el interior de un disco que tiene por frontera a una circunferencia euclidiana \mathcal{C} , es decir, los puntos en este modelo están dados por $P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1\}$ y las líneas rectas están dadas por las cuerdas del círculo \mathcal{C} sin sus extremos. Así, en la Fig. 4.1, los puntos U y V no están en las líneas PU y PV respectivamente, por lo que son paralelas a \mathcal{C} . A estas paralelas les llamaremos *paralelas límite*.

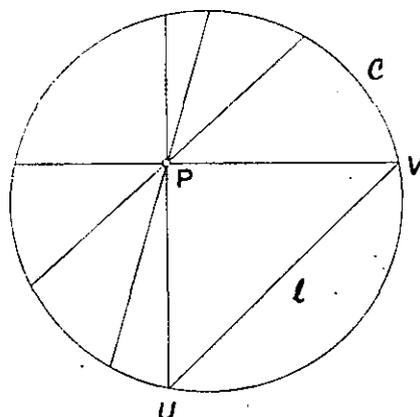


Fig. 4.1 Algunas rectas del modelo de Klein.

Aquí no probaremos que este modelo cumple los axiomas de la geometría hiperbólica, lo que haremos es, definir primero los otros dos modelos que presentaremos, ver que son equivalentes y por último probar que el último de los modelos cumple los axiomas.

4.3.2 Modelo de Poincaré.

Este modelo fue propuesto por el matemático francés Henri Poincaré (1854 – 1912). A este modelo también se le conoce como el modelo del disco de Poincaré. En este modelo, los puntos son los mismos que en el modelo de Klein, es decir, los puntos están dados por $P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathfrak{R}, x^2 + y^2 < 1\}$; pero esta vez, las líneas rectas son diámetros de la circunferencia \mathcal{C} , es decir, cuerdas de \mathcal{C} que pasan por el centro de la misma y, además, hay otro tipo de líneas que son los arcos de circunferencias euclidianas ortogonales a \mathcal{C} que quedan dentro de \mathcal{C} . Así, en la Fig. 4.2 las líneas rectas son l , m y n , donde l y n son diámetros de \mathcal{C} , mientras que m es la parte que se queda dentro de \mathcal{C} de la circunferencia \mathcal{C}_1 que es ortogonal a \mathcal{C} , es decir, el ángulo $\angle OVO_1$ es ángulo recto.

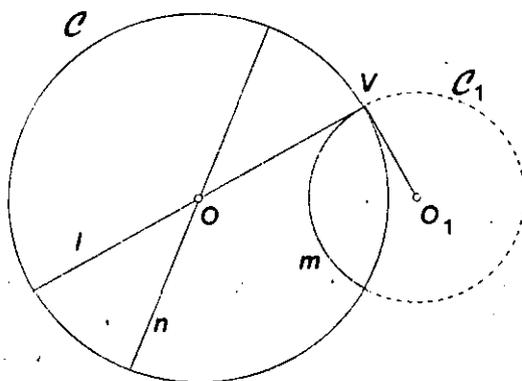


Fig. 4.2 Algunas rectas del modelo de Poincaré.

4.3.3 El modelo del semiplano superior.

Ahora presentaremos el modelo del semiplano superior que, al igual que el modelo del disco, fue propuesto por Henri Poincaré, por lo que también se conoce como el modelo del semiplano de Poincaré. En este nuevo modelo, los puntos están dados por $P = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$; es decir, estamos tomando únicamente la parte superior de \mathbb{R}^2 . Las líneas rectas están dadas por los rayos perpendiculares al eje x y los arcos de circunferencias que tienen centro en el eje x . Así en la Fig. 4.3 las líneas l , m y n son paralelas a h por P . Además la línea g es un rayo euclidiano pero también es una línea hiperbólica paralela a las otras cuatro.

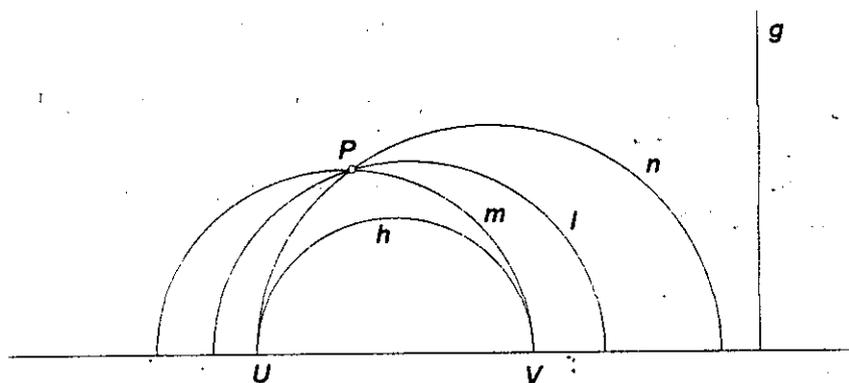


Fig. 4.3 El modelo del semiplano superior

Con este último modelo trabajaremos de aquí en adelante, por lo que será necesario distinguir los conceptos que teníamos acerca de geometría euclidiana y los nuevos conceptos que ahora tenemos de geometría hiperbólica; por ejemplo, en la Fig. 4.3 h representa una circunferencia (en realidad h representa una semicircunferencia pero, por comodidad, diremos simplemente que h representa una circunferencia) euclidiana pero al mismo tiempo representa una línea recta hiperbólica, y para distinguirlas diremos que h es una e-circunferencia o también diremos que h es una h-línea.

4.4 Equivalencias entre los modelos.

Veamos primero que estos tres modelos son equivalentes. Para ver la equivalencia que hay entre los modelos de Poincaré vamos a hacer uso de la inversión (capítulo 2) para geometría euclidiana.

Sea Π el e-semiplano superior que representa al modelo del semiplano de Poincaré y x la línea que lo delimita. Ahora sea \mathcal{C} una e-circunferencia tangente a x con e-centro en O ("abajo" de la línea x) y radio R . Al momento de invertir con respecto a \mathcal{C} tenemos que x se invierte en \mathcal{C}_1 , la parte superior de x se invierte en la parte interior de \mathcal{C}_1 y las h-líneas g , h y k del modelo del semiplano se invierten en las h-líneas g' , h' y k' del modelo del disco.

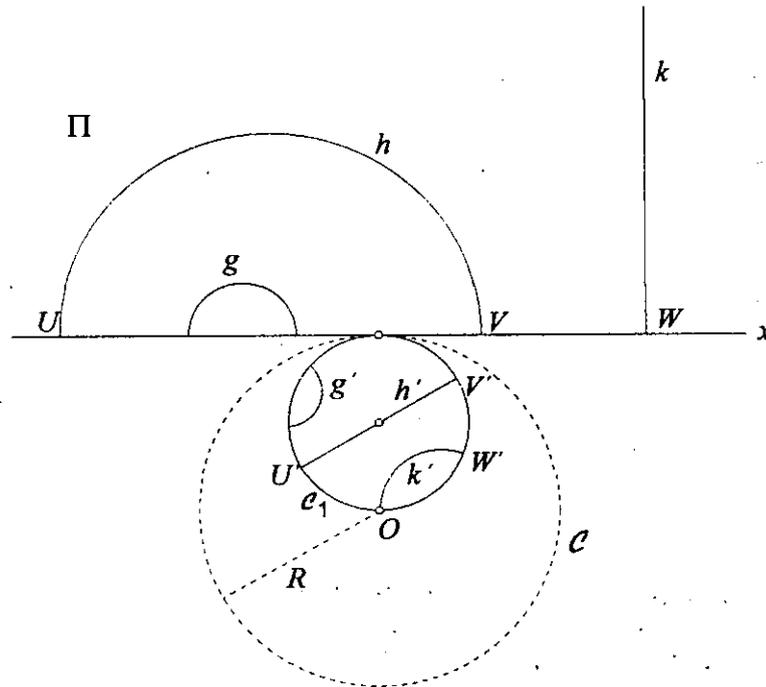


Fig. 4.4 El modelo del disco y el modelo del semiplano son equivalentes.

Como las h-líneas en el modelo del semiplano son rayos que emanan del eje x o circunferencias con centro en el eje x , es decir, las h-líneas g, h y k son ortogonales al eje x y como sabemos que la inversión preserva ángulos, entonces las h-líneas g', h' y k' son ortogonales a C_1 , que es el inverso del eje x . Así, esta inversión transforma el modelo del semiplano en el modelo del disco. Ahora, como los inversos de C_1, g', h' y k' son x, g, h y k respectivamente, entonces, esta misma inversión transforma el modelo del disco C_1 en el modelo del semiplano Π , por lo que ambos modelos son equivalentes.

Ahora veamos la equivalencia que existe entre el modelo del disco de Poincaré y el modelo de Klein, para ello proyectaremos el modelo de Klein en una esfera E tangente al plano xy , en donde colocaremos los modelos de Poincaré y de Klein como sigue (Fig. 4.5).

Supongamos que los puntos en el modelo de Klein están dados por

$$P_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

los puntos en el modelo de Poincaré están dados por

$$P_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$$

los puntos de la esfera E , en la que proyectaremos el modelo de Klein, están dados por

$$P_E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

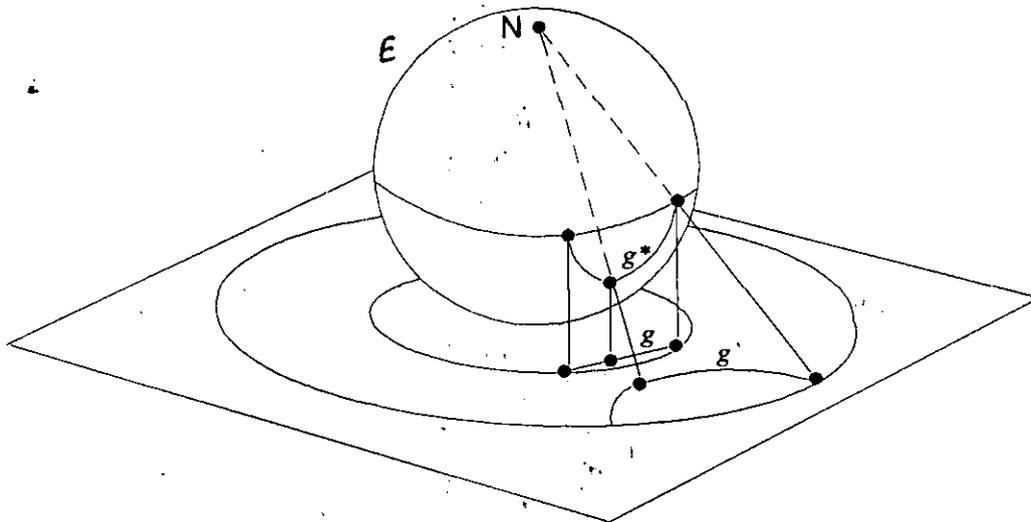


Fig. 4.5 El modelo de Poincaré y el modelo de Klein son equivalentes.

Sea g una línea recta en el modelo de Klein y sea π el plano que contiene a g y es ortogonal al plano xy . El plano π intersecciona al hemisferio sur de E en la curva g^* que es una semicircunferencia y que, además, es ortogonal al ecuador de E . Ahora, si invertimos con respecto a una esfera A , cuyos puntos están dados por

$$P_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4\},$$

es decir, la esfera A tiene centro en N y es tangente al plano xy (la esfera A no aparece en la figura 4.5), la esfera E se invierte en el plano xy , el ecuador de E se invierte en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y π se invierte en una esfera que intersecciona al plano xy en una circunferencia g' . Como g^* y el ecuador de E eran curvas ortogonales, entonces $x^2 + y^2 = 2$ y g' son curvas ortogonales en el plano xy por lo que g' es una línea en el modelo de Poincaré, por lo que el modelo de Klein se transforma en el modelo de Poincaré. Invertiendo los pasos anteriores vemos que el modelo de Poincaré se transforma en el modelo de Klein. Por lo tanto, los modelos de Klein y Poincaré son equivalentes.

4.5 Distancia en el modelo del semiplano.

Para poder hablar de figuras congruentes necesitamos definir una *distancia* en nuestro modelo, y necesitamos medir ángulos. Mediremos los ángulos como en el sentido euclidiano; es decir, el ángulo formado entre dos h-líneas es el ángulo formado por las e-tangentes a las e-circunferencias en el e-punto (o h-punto, que en este caso coinciden) de intersección.

Queremos definir una h-distancia que sea invariante bajo cualquier traslación o reflexión en el plano hiperbólico. Como nuestro modelo utiliza e-circunferencias y

como vimos en el capítulo 2 que la razón cruzada se preserva bajo inversiones con respecto a circunferencias, entonces podemos definir la distancia en términos de la razón cruzada.

4.5.1 Definición: Sea AB un h -segmento en una e -circunferencia que intersecta al eje x en los e -puntos U y V . Definimos la distancia hiperbólica, h -distancia, del segmento AB como

$$d(A, B) = \left| \ln \left\{ \frac{ABUV}{AVUB} \right\} \right| \quad (1)$$

si el segmento A_1B_1 está en un e -rayo que intersecta al eje x en V_1 , entonces su h -distancia se define como

$$d(A_1, B_1) = \left| \ln \frac{B_1V_1}{A_1V_1} \right| \quad (2)$$

Decimos que dos h -segmentos son congruentes si sus h -distancias son iguales.

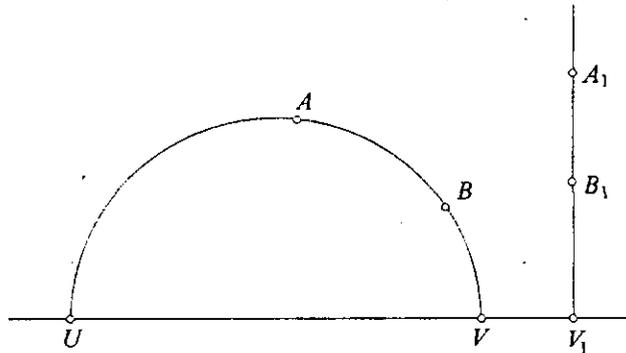


Fig. 4.6 La h -distancia del segmento AB .

Tenemos que ver que la h -distancia así definida satisface las propiedades de una distancia:

- $d(A, B) \geq 0$; $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$; $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ si A, B, C son colineales y C está entre A y B .

De la definición de distancia tenemos inmediatamente que $d(A, B) \geq 0$. Ahora, si $d(A, B) = 0$ entonces

$$\frac{AU}{UB} \frac{VB}{AV} = \frac{AU}{BU} \frac{BV}{AV} = 1 \quad (3)$$

y como siempre tenemos que $U \neq V$, entonces la única manera de que se cumpla (3) es que $A = B$. Recíprocamente, si $A = B$ entonces se satisface (3) por lo que $d(A, B) = 0$, es decir, se satisface (a).

Ahora, vemos que, si $\{ABUV\} = \delta$, entonces $\{BAUV\} = \frac{1}{\delta}$ (fórmulas (1) y (2) capítulo 2), lo que implica que

$$d(A, B) = |\ln\{ABUV\}| = |\ln(\delta)| = \left| \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) \right| = |\ln\{BAUV\}| = d(B, A)$$

por lo que se satisface (b).

Para ver que la condición (c) se satisface necesitamos ver algunos resultados previos.

En el capítulo 2 vimos que una circunferencia que pasa por el centro de inversión se invierte en una línea recta que no pasa por el centro de inversión y también vimos que la inversión preserva razón cruzada, con ambos resultados podemos ver que, si invertimos con U como centro de inversión (Fig. 4.7), la h-línea que contiene al segmento AB se invierte en el e-rayo que contiene al segmento A_1B_1 , V se invierte en V_1 y U se invierte en el punto al infinito U^* . De esto tenemos que:

$$\frac{AU \cdot VB}{AV \cdot UB} = \frac{A_1U^* \cdot V_1B_1}{A_1V_1 \cdot U^*B_1} = -\frac{V_1B_1}{A_1V_1} = \frac{B_1V_1}{A_1V_1}$$

por lo que

$$d(A, B) = d(A_1, B_1)$$

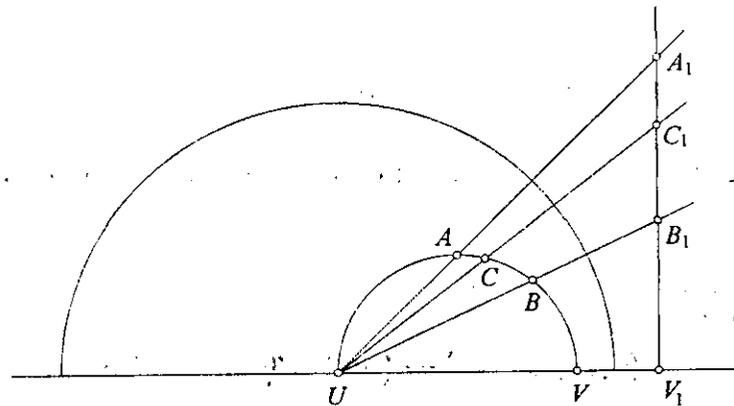


Fig. 4.7 $d(A, B) = d(A_1, B_1)$

Además, vemos que cuando A se mueve hacia U , por fórmula (3) capítulo 2, $\{ABUV\}$ se acerca a cero, es decir, $\lim_{A \rightarrow U} \{ABUV\} = 0$, por lo que $\lim_{A \rightarrow U} d(A, B) = \infty$.

Análogamente, cuando A se mueve hacia V $\lim_{A \rightarrow V} \{ABUV\} = \infty$, por lo que $\lim_{A \rightarrow V} d(A, B) = \infty$.

Ahora, si tenemos tres puntos A, B, C colineales tales que C está entre A y B (Fig. 4.7), por lo anterior tenemos que

$$d(A,B) = d(A_1, B_1), \quad d(A,C) = d(A_1, C_1) \text{ y } d(B,C) = d(B_1, C_1) \quad (4)$$

además, como $B_1V_1 < A_1V_1$, $C_1V_1 < A_1V_1$ y $B_1V_1 < C_1V_1$, entonces

$$\frac{B_1V_1}{A_1V_1} < 1, \quad \frac{C_1V_1}{A_1V_1} < 1 \text{ y } \frac{B_1V_1}{C_1V_1} < 1,$$

es decir,

$$\ln\left(\frac{B_1V_1}{A_1V_1}\right) < 0, \quad \ln\left(\frac{C_1V_1}{A_1V_1}\right) < 0 \text{ y } \ln\left(\frac{B_1V_1}{C_1V_1}\right) < 0,$$

lo que implica que

$$\left| \ln\left(\frac{B_1V_1}{A_1V_1}\right) \right| = \left| \ln\left(\frac{C_1V_1}{A_1V_1}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{B_1V_1}{C_1V_1}\right) \right|,$$

es decir,

$$d(A_1, B_1) = d(A_1, C_1) + d(C_1, B_1)$$

y por (4) tenemos que

$$d(A, B) = d(AC) + d(C, B).$$

y esto se cumple para cualesquiera tres puntos colineales, por lo que una parte de (c) queda probada, hay que ver el caso cuando los puntos A, B, C no son colineales, pero primero necesitamos ver el siguiente teorema que se refiere a circunferencias en el plano hiperbólico.

4.5.2 Teorema. *El lugar geométrico de los puntos que equidistan (con la definición de distancia 4.5.1) de un punto fijo O es una e-circunferencia, pero su h-centro no coincide con su e-centro.*

Demostración.

Si tomamos un sistema de circunferencias ortogonales como el de la figura 2.11, pero únicamente nos fijamos en el semiplano superior (Fig. 4.8) esto está en el modelo de Poincaré, es decir, las e-circunferencias g y h son h-líneas. Ahora, si tomamos los h-segmentos OA y OB y tomamos la bisectriz interior OP del ángulo $\angle AOB$ (que está dada con las tangentes en O) vemos que, si invertimos con respecto a \mathcal{C} , \mathcal{C} queda invariante, h se invierte en g ya que tanto g como h pasan por O y además la inversión preserva ángulos, es decir, como \mathcal{C} queda invariante y los ángulos $\angle AOP$ y $\angle BOP$ son iguales, entonces A y B son inversos con respecto a \mathcal{C} . Por último, como la inversión preserva la razón cruzada (teorema 2.8.4), entonces $\{AOU_1V_1\} = \{BOU_2V_2\}$, es decir, $d(O, A) = d(O, B)$.

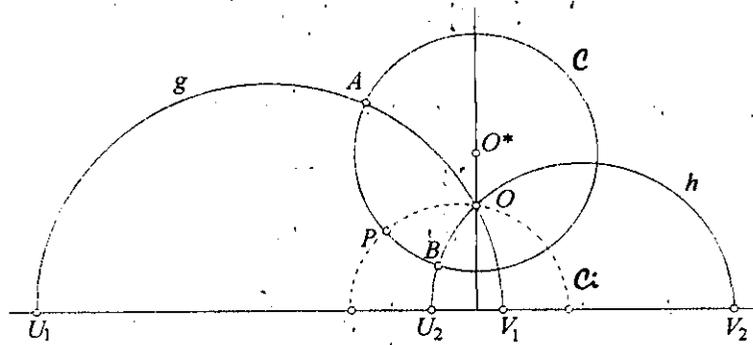


Fig. 4.8 \mathcal{C} es tanto una e-circunferencia como una h-circunferencia.

Claramente vemos que el e-centro, O^* y el h-centro O no coinciden, más aún, el h-centro de \mathcal{C} es el punto de intersección de la familia de e-circunferencias con centro en el eje x que son ortogonales a \mathcal{C} .

Ahora, sean A, B, C tres puntos no colineales (Fig. 4.9) y sean \mathcal{C}_1 la h-circunferencia con h-centro en A y h-radio AC y \mathcal{C}_2 la h-circunferencia con h-centro en B y h-radio BC . Sean P el punto donde \mathcal{C}_1 intersecta al segmento AB en dirección de A hacia B y Q el punto donde \mathcal{C}_2 intersecta al segmento AB en dirección de B hacia A . El primer caso que tenemos sería que P coincida con B o que esté fuera del segmento AB , entonces, como $d(A, C) = d(A, P)$ y los puntos A, B y P son colineales, $d(A, P) = d(A, B) + d(B, P)$ por lo que, por (a), $d(A, B) \leq d(A, P)$, pero esto implica que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. De una forma análoga se demuestra el caso en que Q coincida con A o que esté fuera del segmento AB .

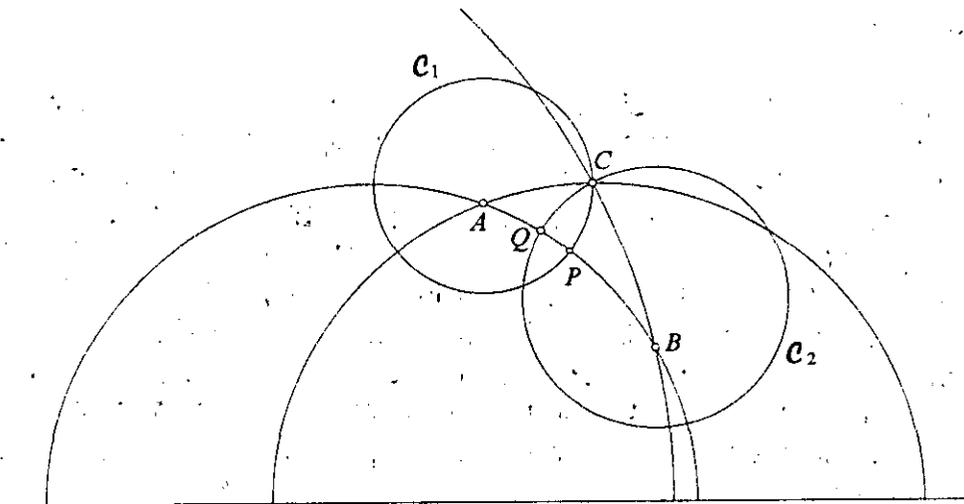


Fig. 4.9 Desigualdad del triángulo $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Ahora, si P y Q están dentro del segmento AB , como A, B, P y Q son colineales tenemos

$$\begin{aligned}
 d(A,B) &= d(A,Q) + d(Q,P) + d(P,B) \\
 &\leq d(A,Q) + d(Q,P) + d(Q,P) + d(P,B) \\
 &= d(A,P) + d(Q,B) \\
 &= d(A,C) + d(C,B)
 \end{aligned}$$

por lo que tenemos que $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, y (c) se satisface.

Ahora veamos dos resultados que nos servirán para el capítulo 6.

4.5.3 Construcción de la mediatriz de un segmento AB .

Dado un h-segmento AB (Fig. 4.10). Trazamos la e-línea AB que intersecta al eje x en O . Desde O trazamos la e-tangente a la e-circunferencia que contiene al h-segmento AB y sea R el punto de tangencia. La h-línea h (e-circunferencia con centro en O y radio OR) es la mediatriz del segmento AB , ya que, h es perpendicular a AB y, además, A y B son inversos con respecto a h , es más, R es el punto medio de AB .

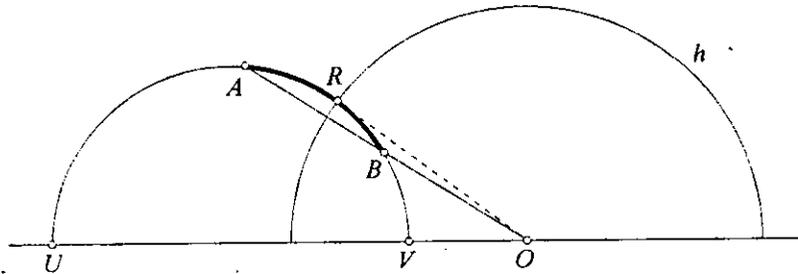


Fig. 4.10 h es la mediatriz del segmento AB .

4.5.4 Teorema. Sea g una h-línea con puntos límite U y V . El lugar geométrico de los puntos que equidistan de g es un arco de e-circunferencia que pasa por los puntos U y V .

Demostración.

Sea g^* un arco de e-circunferencia que pasa por los puntos límite U y V , sean Q y Q_1 dos puntos en g^* y sean QP y Q_1P_1 las perpendiculares a g desde Q y Q_1 respectivamente. Por la construcción 4.5.3 podemos trazar la mediatriz h del segmento PP_1 . Visto esto como e-circunferencias coaxiales, h tiene centro en el eje radical de g y g^* y, por construcción, h es ortogonal a g , entonces h es ortogonal a g^* . Ahora, si invertimos con respecto a h , g y g^* quedan invariantes (teorema 2.7.4), además P y P_1 son inversos con respecto a h y lo mismo pasa para Q y Q_1 . De esto se sigue que PQ y P_1Q_1 son inversos con respecto a h , es decir, PQ y P_1Q_1 son congruentes y por lo tanto Q y Q_1 están a la misma distancia de g .

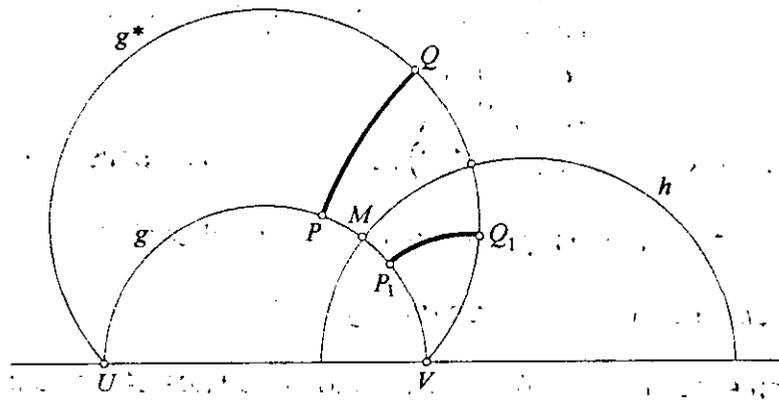


Fig. 4.11 PQ y P_1Q_1 son congruentes.

Capítulo 5

Trigonometría.

Una forma de relacionar los ángulos con los lados de un triángulo euclidiano es por medio de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Ahora vamos a introducir unas nuevas funciones que nos van a permitir relacionar los ángulos con los lados de un triángulo hiperbólico, a las que denominaremos *funciones hiperbólicas*.

5.1 Las funciones hiperbólicas.

Vamos a definir las funciones hiperbólicas en una forma analítica.

5.1.1 Definición

$$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (1)$$

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

Directamente de la definición de $\sinh(t)$ y $\cosh(t)$ obtenemos la relación

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad (2)$$

Denotemos por BC a la h-distancia del segmento a (Fig. 5.1).

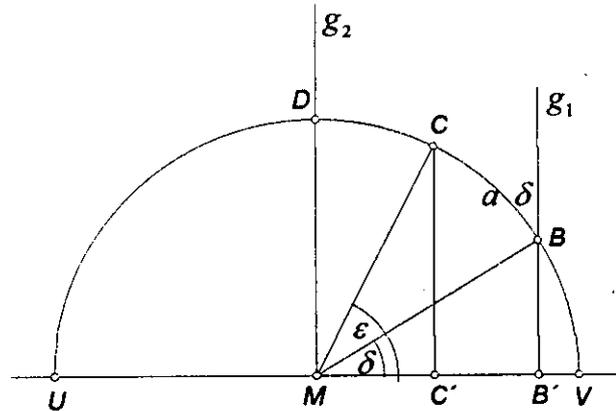


Fig. 5.1 Distancia del segmento BC .

De la definición de h-distancia tenemos que:

$$BC = L_B^C = \frac{1}{2} \log\{B'C'UV\} = \frac{1}{2} \log \frac{(1 - \cos \varepsilon)(1 + \cos \delta)}{(1 + \cos \varepsilon)(1 - \cos \delta)}$$

ya que, en la figura 5.1 tenemos que

$$B'U = r(1 + \cos \delta), \quad VC' = r(1 - \cos \varepsilon), \quad B'V = r(1 - \cos \delta) \quad \text{y} \quad UC' = r(1 + \cos \varepsilon)$$

donde $\varepsilon = \angle CMV$ y $\delta = \angle BMV$, por lo que

$$e^{2BC} = \frac{(1 - \cos \varepsilon)(1 + \cos \delta)}{(1 + \cos \varepsilon)(1 - \cos \delta)}$$

y por la fórmula de $\tanh(t)$ tenemos que

$$\tanh BC = \frac{e^{2BC} - 1}{e^{2BC} + 1} = \frac{\cos \delta - \cos \varepsilon}{1 - \cos \delta \cos \varepsilon} \quad (3)$$

en particular, si $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, entonces $C = D$ y $\tanh BC = \cos \delta$.

Ahora, como queremos encontrar relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, necesitamos colocar el triángulo en una posición más sencilla desde el punto de vista euclidiano, esto es, dado cualquier triángulo (en particular un triángulo rectángulo) lo podemos llevar, por medio de reflexiones, a un triángulo congruente con el triángulo dado pero colocado en una posición más sencilla (*posición especial*).

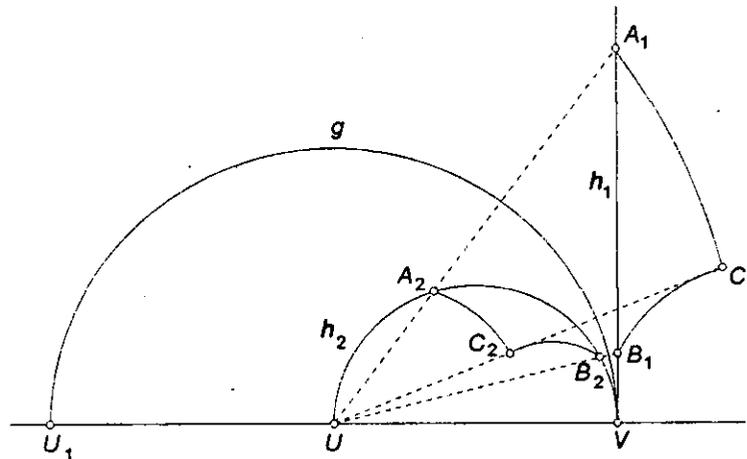


Fig. 5.2 El triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ está colocado en posición especial.

Dado el triángulo $\Delta A_2 B_2 C_2$ (Fig. 5.2) con ángulo recto en C_2 . Sean U y V los puntos límite del segmento $A_2 B_2$ y sea g la h-línea con puntos límite U_1 y V donde $U_1 U = UV$ (en el sentido euclidiano). Ahora, si invertimos con respecto a la e-circunferencia g , la e-circunferencia h_2 se invierte en el e-rayo h_1 y así, la hipotenusa del triángulo $\Delta A_1 B_1 C_1$ está en un e-rayo euclidiano y como vimos que la inversión preserva ángulos y h-distancias (capítulos 2 y 4) entonces los triángulos $\Delta A_1 B_1 C_1$ y $\Delta A_2 B_2 C_2$ son congruentes.

Esta posición especial nos puede servir no únicamente para los lados de un triángulo, sino que también podemos colocar en posición especial cualquier línea importante del triángulo de forma tal que esta h-línea sea un e-rayo.

Aplicando este método las veces que sea necesario podemos colocar un triángulo ΔABC en posición especial de tal forma la hipotenusa esté en el eje y y que el vértice B esté en el punto de coordenadas $(0,1)$. Sean $(0,\eta)$ las coordenadas de A (Fig. 5.3); así podemos deducir relaciones entre los lados y los ángulos del triángulo ΔABC .

Podemos ver que, en la figura 5.3, los ángulos α y $\angle AEO$ son iguales ya que, como los ángulos $\angle AEO$ y $\angle EAO$ suman 90° (en el sentido euclidiano) y como el ángulo α está dado por el ángulo que forma la tangente del e-círculo que contiene al lado AB con el e-rayo OA entonces los ángulos α y $\angle AEO$ son iguales. Ahora, los ángulos β y $\angle BDO$ también son iguales ya que los ángulos β y $\angle OBD$ suman 90° pero además los ángulos $\angle OBD$ y $\angle BDO$ también suman 90° por lo que los ángulos β y $\angle BDO$ son iguales. Con estas igualdades de ángulos tenemos

$$\cot \alpha = \frac{\xi}{\eta}, \quad \cot \beta = \frac{\zeta}{\eta} \quad (4)$$

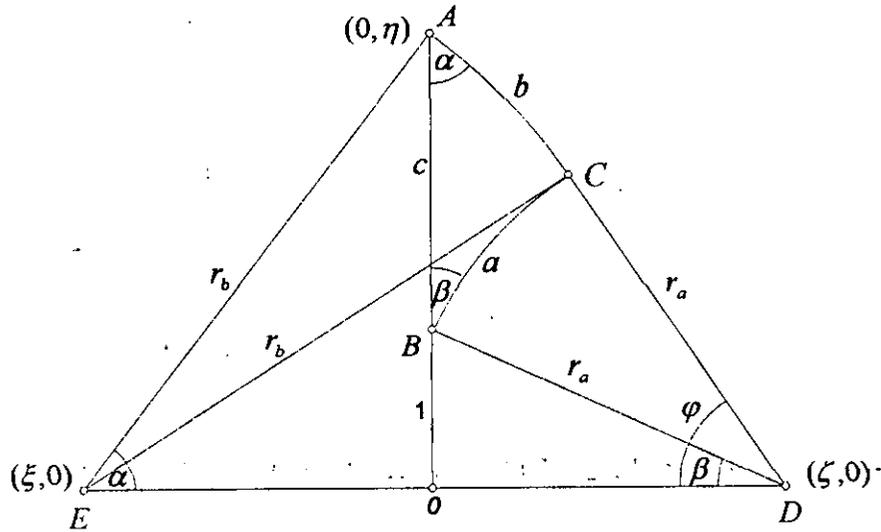


Fig. 5.3 El $\triangle ABC$ en posición especial.

Sean r_a y r_b los radios (euclidianos) de los e-círculos que contienen a los lados $a = BC$, $b = AC$ y sean $D = (\zeta, 0)$, $E = (\xi, 0)$ sus centros. Como $r_b^2 = \xi^2 + \eta^2$ y $r_a^2 = \zeta^2 + 1$, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle ECD$ tenemos que

$$\xi^2 + \eta^2 = (\zeta + \xi)^2 - (\zeta^2 + 1)$$

que equivale a

$$\eta^2 + 1 = 2\xi\zeta \tag{5}$$

y por la definición que tenemos para distancia de AB que es la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$ tenemos que

$$AB = \log \frac{\eta}{1} = \log \eta$$

por lo tanto

$$\cosh AB = \frac{e^{AB} + e^{-AB}}{2} = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta}$$

por lo que, por (4) y (5), tenemos que

$$\cosh AB = \cot \alpha \cot \beta. \tag{6}$$

Esta es ya una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Para obtener otra relación escribimos $\tanh AB$ y usamos (5)

$$\tanh AB = \frac{e^{2AB} - 1}{e^{2AB} + 1} = \frac{\eta^2 + 1 - 2}{\eta^2 + 1} = \frac{\xi\zeta - 1}{\xi\zeta} \tag{7}$$

y por la ecuación (3)

$$\tanh AB = \frac{\cos(\pi - \varphi) - \cos(\pi - \beta)}{1 - \cos(\pi - \varphi)\cos(\pi - \beta)} = \frac{\cos \beta - \cos \varphi}{1 - \cos \beta \cos \varphi}$$

por otro lado

$$\cos \beta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\xi+\zeta}$$

así

$$\tanh BC = \frac{\xi\zeta - 1}{\xi\sqrt{1+\zeta^2}}$$

y por (7) tenemos que

$$\tanh BC = \tanh AB \cos \beta \quad (8)$$

ahora, si intercambiamos BC por AC y α por β tenemos

$$\tanh AC = \tanh AB \cos \alpha \quad (9)$$

Las fórmulas (6) y (8) implican

$$\cosh^2 AB = \frac{\cot^2 \alpha}{\tan^2 \beta} = \frac{\cot^2 \alpha \cdot \tanh^2 BC}{\tanh^2 AB - \tanh^2 BC}$$

y por lo tanto

$$\sinh^2 AB - \cosh^2 AB \cdot \tanh^2 BC = \cot^2 \alpha \cdot \tanh^2 BC$$

y por (2) tenemos

$$\sinh^2 AB - \tanh^2 BC - \tanh^2 BC \cdot \sinh^2 AB = \cot^2 \alpha \cdot \tanh^2 BC.$$

de esta relación podemos calcular $\sin^2 \alpha = 1/(\cot^2 \alpha + 1)$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tanh^2 BC}{\sinh^2 AB - \tanh^2 BC \cdot \sinh^2 AB} = \frac{\tanh^2 BC}{\sinh^2 AB(1 - \tanh^2 BC)} = \frac{\sinh^2 BC}{\sinh^2 AB}$$

es decir

$$\sin \alpha = \frac{\sinh BC}{\sinh AB} \quad (10)$$

e intercambiando α por β y BC por AC obtenemos

$$\sin \beta = \frac{\sinh AC}{\sinh AB} \quad (11)$$

Ahora, de las ecuaciones (9) y (10) tenemos que

$$\tanh^2 AC = \tanh^2 AB(1 - \sin^2 \alpha) = \tanh^2 AB \left(\frac{\sinh^2 AB - \sinh^2 BC}{\sinh^2 AB} \right)$$

y utilizando la ecuación (2) tenemos

$$\tanh^2 AC = \frac{\sinh^2 AB}{\cosh^2 AB} \left(\frac{\cosh^2 AB - \cosh^2 BC}{\sinh^2 AB} \right)$$

es decir

$$\cosh^2 AB(1 - \tanh^2 AC) = \cosh^2 BC$$

y como

$$1 - \tanh^2 AC = \frac{\cosh^2 AC - \sinh^2 AC}{\cosh^2 AC} = \frac{1}{\cosh^2 AC}$$

entonces tenemos que

$$\cosh AB = \cosh BC \cdot \cosh AC \quad (12)$$

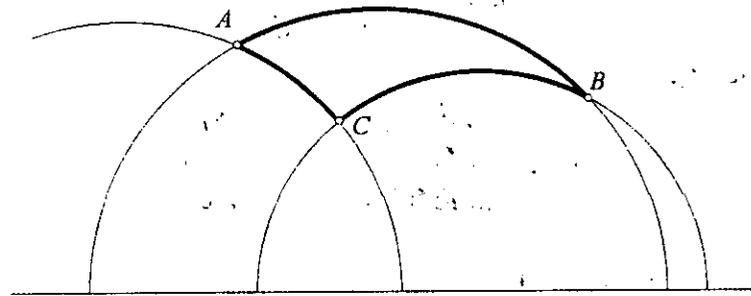


Fig. 5.4 El ΔABC es triángulo rectángulo.

A esta última ecuación se le conoce como el teorema de Pitágoras para geometría hiperbólica, así en la figura 5.4 el triángulo ΔABC es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en C , por lo que satisface la ecuación (12)

Ahora podemos utilizar estas ecuaciones y obtener las ecuaciones correspondientes en un triángulo arbitrario. Por ejemplo, en la figura 5.5 basta trazar la perpendicular a AB por C .

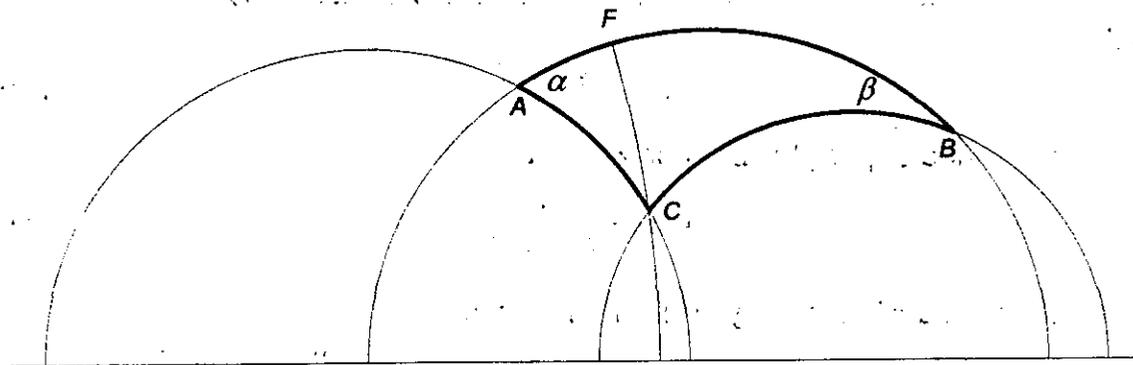


Fig. 5.5 CF altura por C en el triángulo ΔABC .

Así, en la figura 5.5, los triángulos ΔACF y ΔBCF son triángulos rectángulos, por lo que valen las ecuaciones (10) y (11), por lo tanto tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{senh} CF}{\operatorname{senh} AC}, \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{senh} CF}{\operatorname{senh} BC}$$

es decir, vale la ley de senos en geometría hiperbólica. La forma hiperbólica de la ley de senos es:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{senh} BC} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{senh} AC} \quad (13)$$

Ahora, sean AF y BF las longitudes de los segmentos en que la altura CF divide al lado AB . Entonces la fórmula (12) se puede aplicar a los triángulos rectángulos $\triangle CAF$ y $\triangle CBF$ de lo que obtenemos

$$\cosh BC = \cosh CF \cdot \cosh BF \quad (14)$$

$$\cosh AC = \cosh CF \cdot \cosh(AB - BF) \quad (15)$$

es decir (ver apéndice 3)

$$\cosh AC = \cosh CF \cdot (\cosh AB \cdot \cosh BF - \sinh AB \cdot \sinh BF)$$

y dividiendo entre la ecuación (14) tenemos

$$\frac{\cosh AC}{\cosh BC} = \cosh AB - \sinh AB \cdot \tanh BF.$$

y ahora, por la ecuación (8) tenemos que

$$\tanh BF = \tanh BC \cdot \cos \beta$$

por lo tanto

$$\cosh AC = \cosh BC \cdot \cosh AB - \sinh BC \cdot \sinh AB \cdot \cos \beta \quad (16)$$

que es lo que conocemos como la ley de cosenos de geometría hiperbólica. Ahora, si hacemos una permutación entre los lados AB , BC y AC y entre los ángulos α , β y γ obtenemos

$$\cosh AB = \cosh BC \cdot \cosh AC - \sinh BC \cdot \sinh AC \cdot \cos \gamma$$

$$\cosh BC = \cosh AC \cdot \cosh AB - \sinh AC \cdot \sinh AB \cdot \cos \alpha$$

Capítulo 6

Jugando con el triángulo hiperbólico

En este último capítulo estudiaremos el triángulo hiperbólico, es decir, trabajaremos con triángulos en el modelo del semiplano superior y veremos qué ocurre con resultados de geometría euclidiana tales como el teorema de Ceva, el teorema de Menelao y, además, el comportamiento que tienen las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas. También veremos qué ocurre con la circunferencia de los nueve puntos y con la línea de Euler en un triángulo hiperbólico.

6.1 Segmentos dirigidos y los Teoremas de Ceva y Menelao.

Antes de analizar los segmentos dirigidos (que definiremos de una manera similar al caso del capítulo tres) vamos a demostrar los siguientes dos teoremas que nos facilitarán las demostraciones de los teoremas de Ceva y Menelao.

6.1.1 Teorema (versión preliminar del teorema de Menelao) *Supongamos que D, E y F son puntos en los lados BC, AC y AB respectivamente del ΔABC . Si D, E y F son colineales entonces*

$$\frac{\text{senh } AF}{\text{senh } FB} \cdot \frac{\text{senh } BD}{\text{senh } DC} \cdot \frac{\text{senh } CE}{\text{senh } EA} = 1$$

Demostración

Supongamos que D, E y F están en la línea l (Fig. 6.1). Sean A', B' y C' los pies de las perpendiculares a l desde A, B y C respectivamente. Por la ecuación (10) del capítulo 5 tenemos que

$$\frac{\text{senh } A'A}{\text{senh } AF} = \frac{\text{senh } B'B}{\text{senh } BF}, \quad \frac{\text{senh } C'C}{\text{senh } CD} = \frac{\text{senh } B'B}{\text{senh } BD}, \quad \frac{\text{senh } A'A}{\text{senh } AE} = \frac{\text{senh } C'C}{\text{senh } CE}$$

y multiplicando miembro a miembro cada una de estas ecuaciones tenemos

$$\frac{\text{senh } AF}{\text{senh } FB} \cdot \frac{\text{senh } BD}{\text{senh } DC} \cdot \frac{\text{senh } CE}{\text{senh } EA} = 1$$

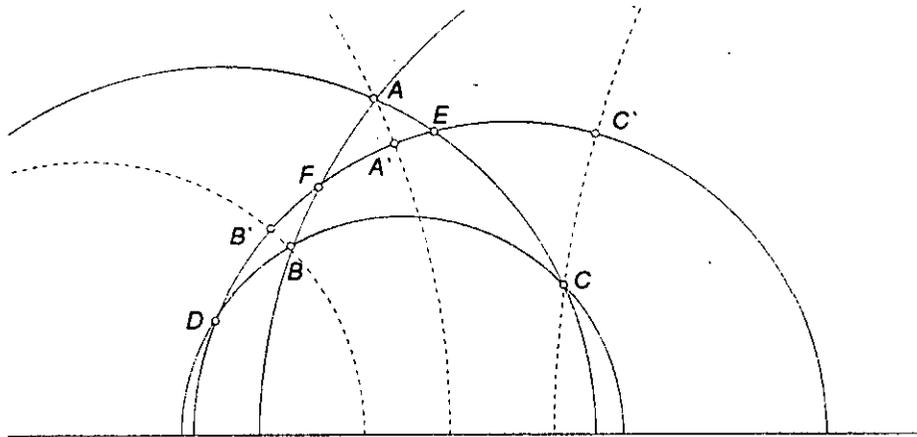


Fig. 6.1 Versión preliminar del teorema de Menelao.

6.1.2 Teorema (versión preliminar del teorema de Ceva) *Supongamos que D, E y F son puntos en los lados BC, AC y AB respectivamente del ΔABC . Si AD, BE y CF son concurrentes entonces*

$$\frac{\text{senh } AF}{\text{senh } FB} \cdot \frac{\text{senh } BD}{\text{senh } DC} \cdot \frac{\text{senh } CE}{\text{senh } EA} = 1$$

Demostración

Supongamos que las líneas AD, BE y CF concurren en P (Fig. 6.2). Ahora, en el triángulo ΔABD , los puntos C, P y F satisfacen las hipótesis del teorema anterior y en el triángulo ΔDCA los puntos E, P y B también satisfacen las hipótesis del teorema anterior por lo que tenemos

$$\frac{\sinh AP}{\sinh PD} \cdot \frac{\sinh DC}{\sinh CB} \cdot \frac{\sinh BF}{\sinh FA} = 1, \quad \frac{\sinh DP}{\sinh PA} \cdot \frac{\sinh AE}{\sinh EC} \cdot \frac{\sinh CB}{\sinh BD} = 1$$

y multiplicando tenemos

$$\frac{\sinh BF}{\sinh FA} \cdot \frac{\sinh CD}{\sinh DB} \cdot \frac{\sinh AE}{\sinh EC} = 1$$

pero esto es precisamente

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = 1$$

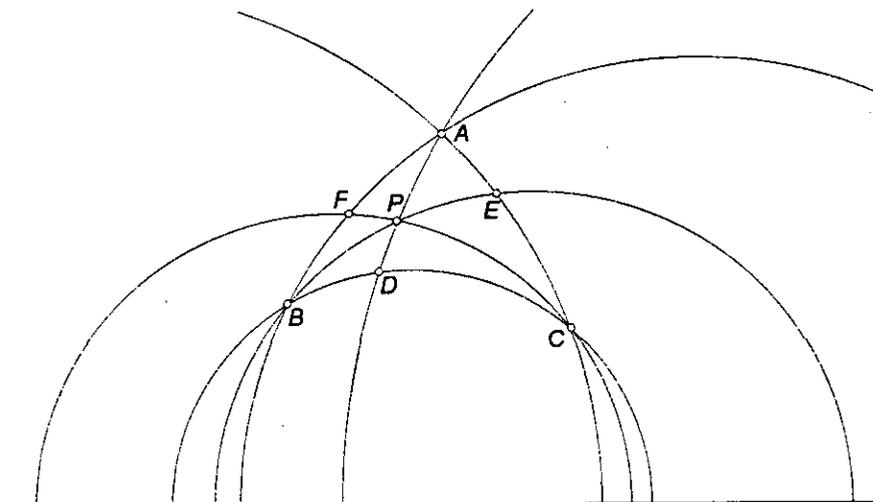


Fig. 6.2 Versión preliminar del teorema de Ceva.

Nótese que hablar de h-líneas concurrentes equivale a hablar de e-circunferencias coaxiales, es decir, diremos indistintamente h-líneas concurrentes o e-circunferencias coaxiales.

Podría decirse, como ya hemos mencionado, que éstas son unas versiones preliminares de los teoremas de Ceva y Menelao ya que hasta el momento no hemos definido el concepto de segmentos dirigidos, pero, al igual que en geometría euclidiana, podemos asociar la idea de dirección a un segmento, es decir, si tomamos el segmento AB recorrido de A a B diremos que es el *segmento dirigido* \mathbf{AB} , mientras que si lo vemos dirigido de B a A diremos que es el *segmento dirigido* \mathbf{BA} , en donde estos segmentos están relacionados por la ecuación:

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$$

y de ahora en adelante denotaremos los segmentos dirigidos por negritas.

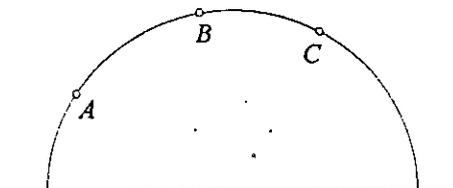


Fig. 6.3 Los segmentos \mathbf{AB} , \mathbf{BC} y \mathbf{AC} tienen la misma dirección.

6.1.3 Teorema. Si los puntos P , Q y R son colineales entonces $(\text{senh } PQ)/(\text{senh } QR)$ es positivo si y sólo si Q está entre P y R .

Demostración

Primero supongamos que $(\text{senh } PQ)/(\text{senh } QR)$ es positivo, entonces $\text{senh } PQ$ y $\text{senh } QR$ son ambos positivos o $\text{senh } PQ$ y $\text{senh } QR$ son ambos negativos, en cualquiera de los casos, como la función $\text{senh}(t)$ es impar (Fig. 6.4) se tiene que PQ y QR tienen el mismo signo y por la definición de segmentos dirigidos se tiene que Q está entre P y R . Recíprocamente, si Q está entre P y R , se tiene que PQ y QR tienen el mismo signo, por lo que $\text{senh } PQ$ y $\text{senh } QR$ tienen el mismo signo y por lo tanto $(\text{senh } PQ)/(\text{senh } QR)$ es positivo.

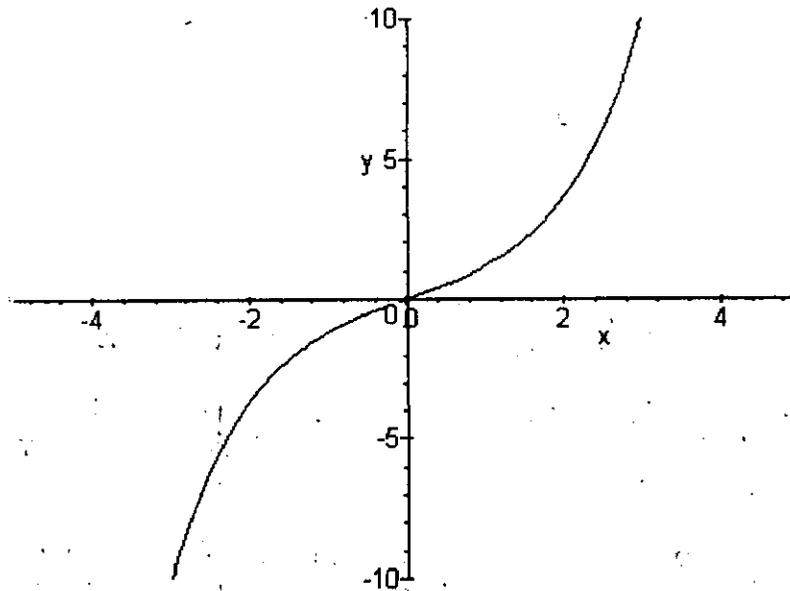


Fig. 6.4 Gráfica de $\text{senh}(x)$

6.1.4 Axioma de Pasch. Si una línea entra a un triángulo por uno de sus vértices, entonces la línea intersecta al lado opuesto del triángulo.

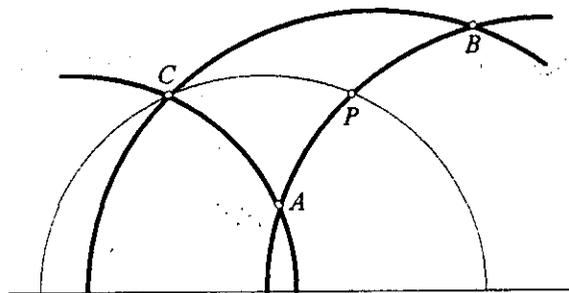


Fig. 6.5 Axioma de Pasch.

Así, en la figura 6.5, la línea CP , que entra al triángulo ΔABC en el vértice C , interseca al lado AB en P (ver apéndice 2).

6.1.5 Teorema de Menelao. *Supongamos que D, E y F son puntos en los lados BC, AC y AB respectivamente del ΔABC entonces D, E y F son colineales si y sólo si*

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = -1$$

Demostración

Supongamos que D, E y F están en la línea ℓ (Fig. 6.1). Entonces por el teorema 6.1.1 el lado izquierdo de la ecuación es igual a $+1$ ó -1 . Como ℓ interseca a los tres lados del ΔABC entonces, por el axioma de Pasch, sólo uno de los tres términos de la ecuación es negativo, o bien los tres son negativos, por lo que el producto es igual a -1 .

Recíprocamente, supongamos que la ecuación se satisface. Como exactamente uno o cada uno de los tres términos de la ecuación es negativo, entonces exactamente dos o ninguno de los puntos D, E, F están en el ΔABC . En cualquier caso se sigue que por lo menos una de las líneas DE, EF o DF interseca a cada una de las líneas que contienen a los lados del ΔABC . Por simetría y sin pérdida de generalidad supongamos que DE interseca a AB en F' . Por la primera parte del teorema, tenemos que se satisface

$$\frac{\sinh AF'}{\sinh F'B} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = -1$$

pero esto necesariamente implica que

$$\frac{\sinh AF'}{\sinh F'B} = \frac{\sinh AF}{\sinh FB}$$

por lo que $F = F'$, es decir, F está en la línea DE .

6.1.6 Teorema de Ceva. *Supongamos que D, E y F son puntos en los lados BC, AC y AB respectivamente del ΔABC entonces AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si cada par se interseca y*

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = +1$$

Demostración.

Supongamos que las líneas AD, BE y CF concurren en P (Fig. 6.2). Ahora, en el triángulo ΔABD , los puntos C, P y F satisfacen las hipótesis del teorema anterior y en el triángulo ΔDCA los puntos E, P y B también satisfacen las hipótesis del teorema anterior por lo que tenemos

$$\frac{\sinh AP}{\sinh PD} \cdot \frac{\sinh DC}{\sinh CB} \cdot \frac{\sinh BF}{\sinh FA} = -1, \quad \frac{\sinh DP}{\sinh PA} \cdot \frac{\sinh AE}{\sinh EC} \cdot \frac{\sinh CB}{\sinh BD} = -1$$

y multiplicando tenemos

$$\frac{\sinh BF}{\sinh FA} \cdot \frac{\sinh CD}{\sinh DB} \cdot \frac{\sinh AE}{\sinh EC} = 1$$

pero esto es precisamente

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = 1$$

Recíprocamente, supongamos que la ecuación se satisface, entonces todos los términos de la ecuación son positivos o exactamente uno es positivo, entonces los puntos D , E y F están en los lados del triángulo ΔABC o exactamente uno de D , E o F está en el triángulo ΔABC . Por simetría y sin pérdida de generalidad supongamos que D está en el triángulo ΔABC . Supongamos que BE intersecta a CF en P . Ya que tanto E como F están ambos en el triángulo ΔABC o están ambos fuera del triángulo ΔABC , se sigue que P está en el interior del ángulo $\angle BAC$ o que está en el interior del ángulo opuesto por el vértice al ángulo $\angle BAC$. En cualquier caso AP intersecta al lado BC en un punto D' . Entonces D' , E y F son puntos en los lados del triángulo ΔABC tales que AD' , BE y CF son concurrentes; entonces, por la primera parte del teorema, tenemos que

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD'}{\sinh D'C} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = 1$$

pero esto implica que

$$\frac{\sinh BD'}{\sinh D'C} = \frac{\sinh BD}{\sinh DC}$$

es decir, $D = D'$, por lo tanto AD , BE y CF concurrentes y concurren en P .

6.2 El Triángulo Hiperbólico.

Las definiciones de medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en un triángulo hiperbólico son las mismas que las que vimos en el capítulo 1 para un triángulo euclidiano, por lo que no las presentaremos nuevamente. Lo que estudiaremos son los teoremas de concurrencia de estas líneas.

6.2.1 Teorema. Las medianas de un triángulo ΔABC concurren.

Demostración.

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata utilizando el teorema de Ceva. Sean L , M y N los puntos medios de los lados BC , CA y AB respectivamente (Fig. 6.6) del triángulo ΔABC , entonces, como los puntos medios de los lados satisfacen

$$\frac{\sinh AN}{\sinh NB} \cdot \frac{\sinh BL}{\sinh LC} \cdot \frac{\sinh CM}{\sinh MA} = +1$$

y además, por el axioma de Pasch, las medianas en un triángulo se intersectan por pares entonces las medianas del ΔABC concurren. Nótese que las medianas de cualquier triángulo hiperbólico concurren ya que son líneas que siempre se intersectan por pares dentro del triángulo.

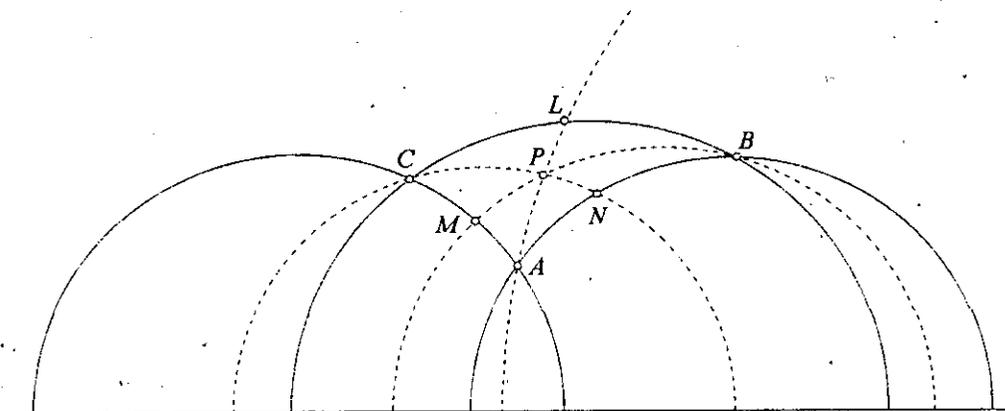


Fig. 6.6 Las medianas del triángulo ΔABC concurren.

De una forma similar podemos ver que las bisectrices interiores de un triángulo ΔABC son concurrentes, más aún, veremos que el punto de intersección de dichas bisectrices es el h-centro de la h-circunferencia inscrita del triángulo al igual que en geometría euclidiana.

6.2.2 Teorema. *Las bisectrices interiores de un triángulo ΔABC son concurrentes.*

Demostración

Sean D, E y F los puntos donde las bisectrices interiores por A, B y C intersectan al lado opuesto. Aplicando la ley de los senos a los triángulos ΔABD y ΔADC (Fig. 6.7) se tiene que

$$\frac{\sinh BD}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\sinh AD}{\sin \beta} \qquad \frac{\sin(\alpha/2)}{\sinh DC} = \frac{\sin \gamma}{\sinh AD}$$

Análogamente para los triángulos ΔBCE y ΔBEA tenemos que

$$\frac{\sinh CE}{\sin(\beta/2)} = \frac{\sinh BE}{\sin \gamma} \qquad \frac{\sin(\beta/2)}{\sinh EA} = \frac{\sin \alpha}{\sinh BE}$$

y por último para los triángulos ΔCAF y ΔCFB

$$\frac{\sinh AF}{\sin(\gamma/2)} = \frac{\sinh CF}{\sin \alpha} \qquad \frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh FB} = \frac{\sin \beta}{\sinh CF}$$

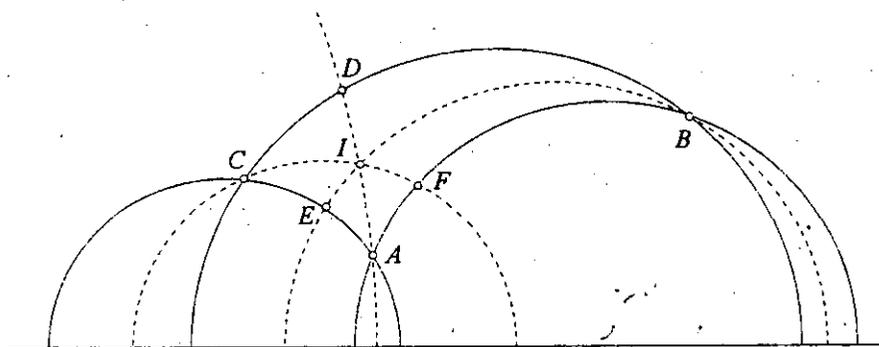


Fig. 6.7 Las bisectrices de un triángulo son concurrentes.

donde α, β y γ son los ángulos en A, B y C respectivamente. Ahora, multiplicando miembro a miembro estas seis ecuaciones obtenemos:

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = \pm 1$$

pero el producto no puede ser -1 porque, en tal caso, D, E y F serían colineales por el teorema de Menelao, por lo tanto tenemos que:

$$\frac{\sinh AF}{\sinh FB} \cdot \frac{\sinh BD}{\sinh DC} \cdot \frac{\sinh CE}{\sinh EA} = +1$$

y como el axioma de Pasch implica que las bisectrices de un triángulo se intersectan por pares, el teorema de Ceva implica que las bisectrices de cualquier triángulo concurren.

Del teorema 6.2.2 y de la definición 1.2.3 se sigue que el h-centro de la h-circunferencia (teorema 4.5.2) inscrita de un triángulo ΔABC es el punto donde concurren las bisectrices.

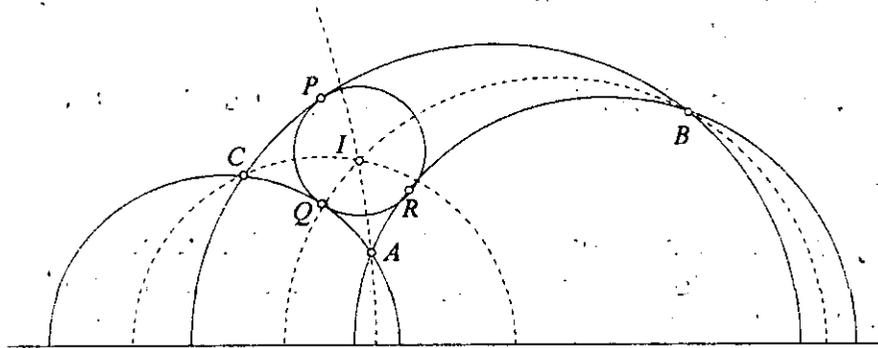


Fig. 6.8 La circunferencia inscrita del triángulo ΔABC .

Ahora estudiaremos el comportamiento de las mediatrices de un triángulo ΔABC y veremos que tenemos varios casos; en unos casos concurren y en otros no y además veremos las condiciones que se necesitan para dicha concurrencia.

Las proposiciones 6.2.3 y 6.2.4 así como la consecuencia de estas dos son los resultados más importantes en este trabajo, es decir, probar que al igual que las medianas y las bisectrices de un triángulo, las mediatrices también son una familia coaxial de e-circunferencias y ver las condiciones que un triángulo hiperbólico necesita cumplir para que sus mediatrices concurren o no.

Vamos a colocar en posición especial un segmento BC de forma tal que su mediatriz l sea un e-rayo. Podemos ver que para un triángulo tal que BC es uno de sus lados pueden ocurrir dos cosas; 1) la e-circunferencia que lo inscribe es una h-circunferencia ó 2) la e-circunferencia que lo inscribe no es una h-circunferencia, en cuyo caso, por el teorema 4.5.4, existe una h-línea que equidista de los vértices de dicho triángulo.

En el primer caso \mathcal{C} es tanto una e-circunferencia como una h-circunferencia (Fig. 6.9), por lo que para este triángulo las mediatrices concurren y concurren en O que es el centro hiperbólico de la circunferencia \mathcal{C} .

6.2.3 Proposición. *Si la circunferencia euclidiana que inscribe al triángulo ΔABC es una circunferencia hiperbólica entonces las mediatrices del triángulo ΔABC concurren y lo hacen en el centro hiperbólico de dicha circunferencia.*

Demostración.

Sean \mathcal{C} la e-circunferencia que inscribe al triángulo ΔABC (Fig. 6.9), l , m y n las mediatrices del los lados BC , CA y AB respectivamente del triángulo ΔABC . Sea P la intersección de la e-línea AC con el eje x . Como P está en el eje radical de las e-circunferencias \mathcal{C} y b (donde b representa al lado AC del triángulo ΔABC) y además m es ortogonal a b , entonces, por el teorema 2.4.2, m es ortogonal a \mathcal{C} y por lo tanto m es un h-diámetro de \mathcal{C} . De una forma análoga se tiene que n es un h-diámetro de \mathcal{C} . Sea O la intersección de m y l . O está a la misma distancia de B que de C (por estar en l) y además O está a la misma distancia de A que de C (por estar en m), por lo tanto, O está en n que es la mediatriz de AB , y por lo tanto O es el h-centro de \mathcal{C} .

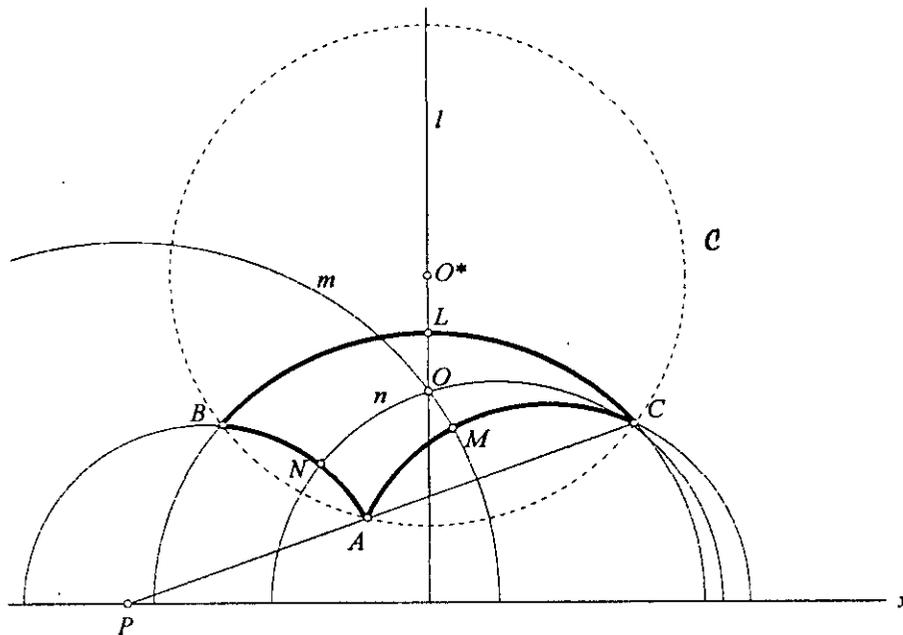


Fig. 6.9 \mathcal{C} es una h-circunferencia.

En esta demostración utilizamos el concepto de eje radical que vimos en el capítulo 2 para probar que las e-circunferencias \mathcal{C} y m son ortogonales. Ahora, si nos fijamos en las e-circunferencias m y n , que son e-circunferencias coaxiales con eje radical l , y si tomamos un triángulo ΔABC en posición general pero de

forma tal que su e-circunferencia circunscrita sea una h-circunferencia se va a cumplir que las mediatrices l, m y n son una familia de e-circunferencias coaxiales donde el punto límite de esta familia que está por arriba del eje x es el h-circuncentro del triángulo ΔABC .

En el segundo caso \mathcal{C} es una e-circunferencia pero no una h-circunferencia por lo que las mediatrices del triángulo ΔABC no concuerren.

6.2.4 Proposición. Si la circunferencia euclidiana que inscribe al triángulo ΔABC no es una circunferencia hiperbólica entonces las mediatrices del triángulo ΔABC no concuerren.

Demostración

De una forma análoga a como se probó la proposición 6.2.3, se tiene que las mediatrices l, m y n son e-circunferencias ortogonales a \mathcal{C} ; pero esta vez, como \mathcal{C} intersecta la línea de los centros de l, m y n en U y U^* (Fig. 6.10), y por el teorema 2.4.2 se tiene que l, m y n no se intersectan, es decir l, m y n son una familia de circunferencias de las que no se cortan (Fig. 2.10).

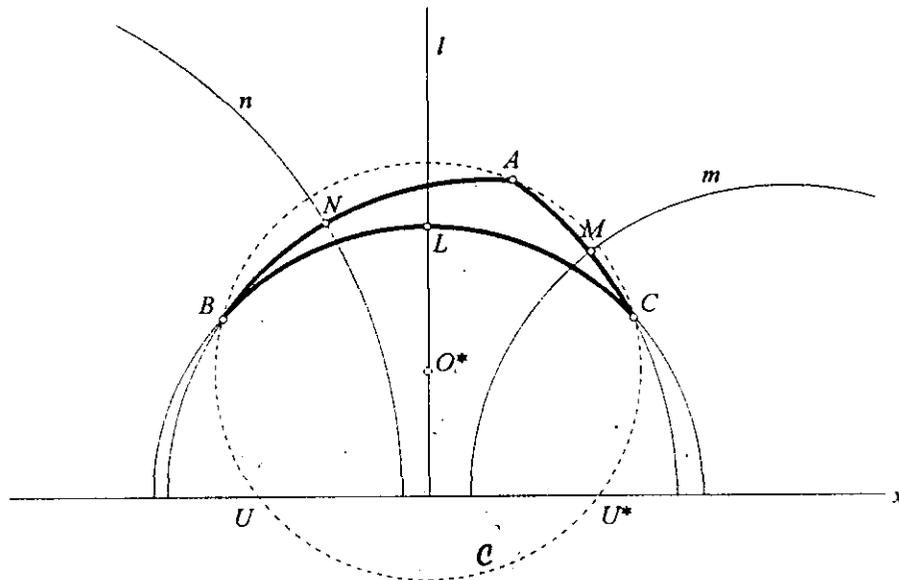


Fig. 6.10 \mathcal{C} no es una h-circunferencia.

Sea ζ la e-circunferencia que pasa por los puntos B y C y además que sea tangente al eje x y a la e-semicircunferencia que contiene al h-segmento BC (Fig. 6.11), entonces, como consecuencia de las proposiciones 6.2.3 y 6.2.4 y de la definición de ζ podemos concluir que, dado el segmento BC colocado en posición especial, el lugar geométrico de los puntos A para los cuales las mediatrices del triángulo ΔABC concuerren es el área delimitada por la parte

inferior de la e-línea q y el interior de la e-circunferencia S ; además, el inverso de esta región con respecto a a y, el lugar geométrico de los puntos A para los cuales las mediatrices del triángulo ΔABC no concurren es el área delimitada por el interior de a y la parte superior de la e-línea q junto con la región delimitada por el interior de a y la parte exterior de la e-circunferencia S que es el inverso de esta región con respecto a a .

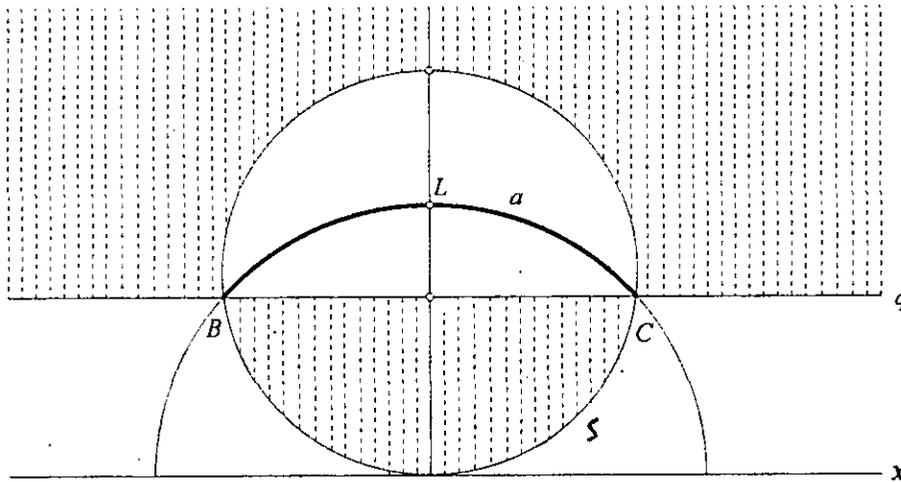


Fig. 6.11 Región de concurrencia de mediatrices.

Es posible encontrar la región de concurrencia de las mediatrices para un segmento dado en posición general, es decir, si en la figura 6.11 invertimos con respecto a cualquier circunferencia de inversión \mathcal{C} : (Fig. 6.12), el inverso del segmento BC es B^*C^* , el inverso de la e-línea q es la e-circunferencia q^* y el inverso de la e-circunferencia S es la e-circunferencia S^* , por lo que el lugar geométrico de los puntos A^* para los cuales las mediatrices del triángulo $\Delta A^*B^*C^*$ concurren es la región delimitada por el interior de q^* y el exterior de S^* junto con la región delimitada por el interior de S^* y el exterior de q^* , por lo que el problema de encontrar la región de concurrencia de las mediatrices para el triángulo $\Delta A^*B^*C^*$ se reduce a encontrar dos e-circunferencias tangentes al eje x de la familia de e-circunferencias coaxiales que tienen como eje radical la e-línea determinada por B^* y C^* .

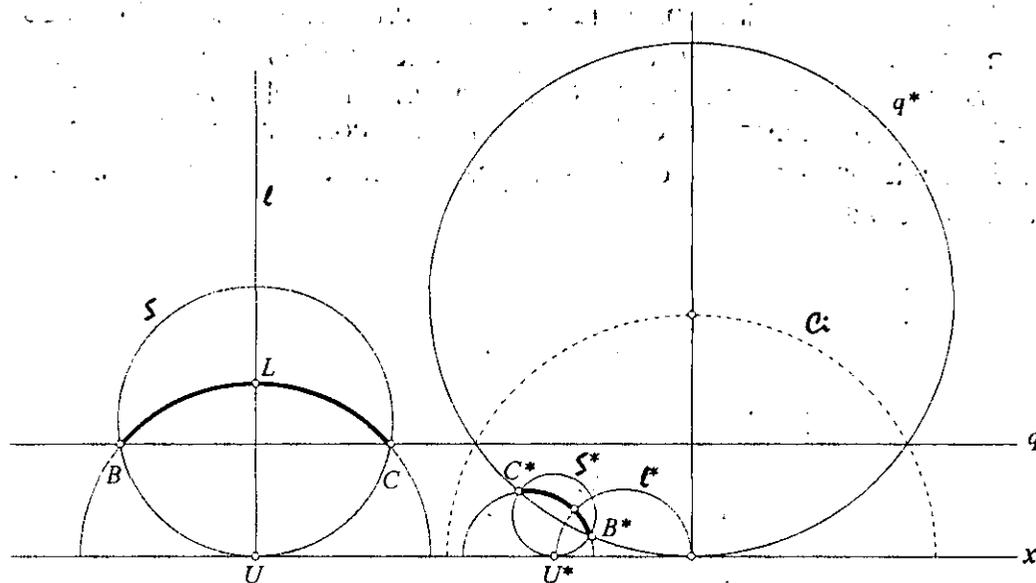


Fig. 6.12 El segmento B^*C^* está en posición general.

De una forma parecida queremos estudiar el comportamiento de las alturas de un triángulo ΔABC .

6.2.5 Conjetura. *Las alturas de un triángulo ΔABC son e-circunferencias coaxiales o e-circunferencias concéntricas.*

Camino a la Demostración.

Un posible camino para probar que las alturas hiperbólicas del triángulo ΔABC son una familia coaxial es, a partir de dos de las alturas construimos su eje radical, y ver que la tercera altura es una e-circunferencia de la misma familia, es decir, sean AD, BE y CF las alturas del ΔABC (Fig. 6.13) y sea H la intersección de las alturas BE y CF . Queremos ver que la altura AD es coaxial con ellas. Sea l el eje radical de las e-circunferencias BE y CF y sea O un punto cualquiera en l . Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O ortogonal a BE y CF y sean P y Q las intersecciones de \mathcal{C} con a . Si W es la intersección de la e-tangente a a en D con el eje x hay que probar que los puntos P, Q y W son colineales en el sentido euclidiano, porque de ser así, como la e-línea PQ es el eje radical de las circunferencias \mathcal{C} y a y como AD es ortogonal a a , entonces AD sería ortogonal a \mathcal{C} que es lo que queremos probar.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

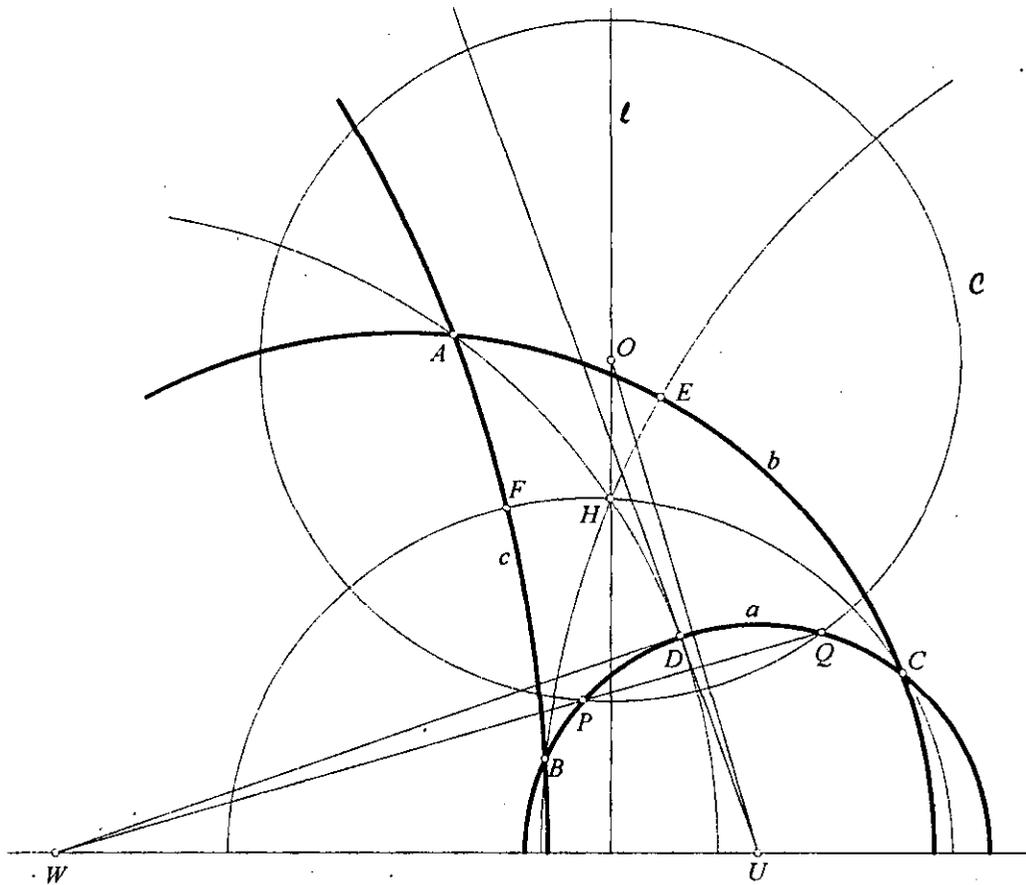


Fig. 6.13 ¿Son colineales P, Q y W ?

La figura 6.13 muestra el caso en que las alturas "concurren", pero para el caso en que las alturas "no concurren" la idea es muy parecida: se toma el eje radical de dos de las alturas y hay que probar que la tercera altura pertenece a la misma familia que las otras dos alturas (Fig. 6.15), y por último, para el caso cuando las alturas son e-circunferencias concéntricas resulta que el eje radical es la línea al infinito (Fig. 6.14).

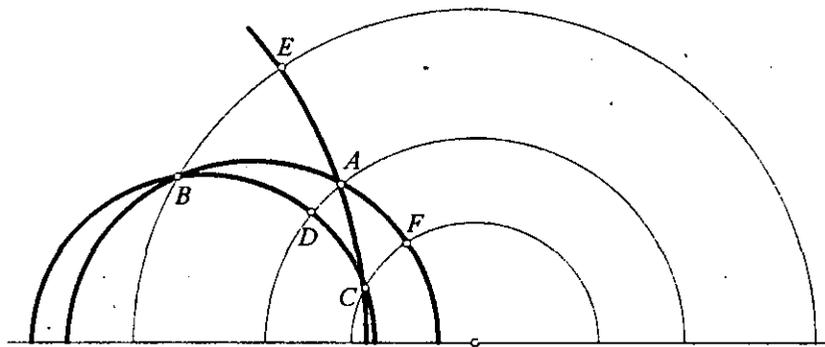


Fig. 6.14 Las alturas son e-circunferencias concéntricas.

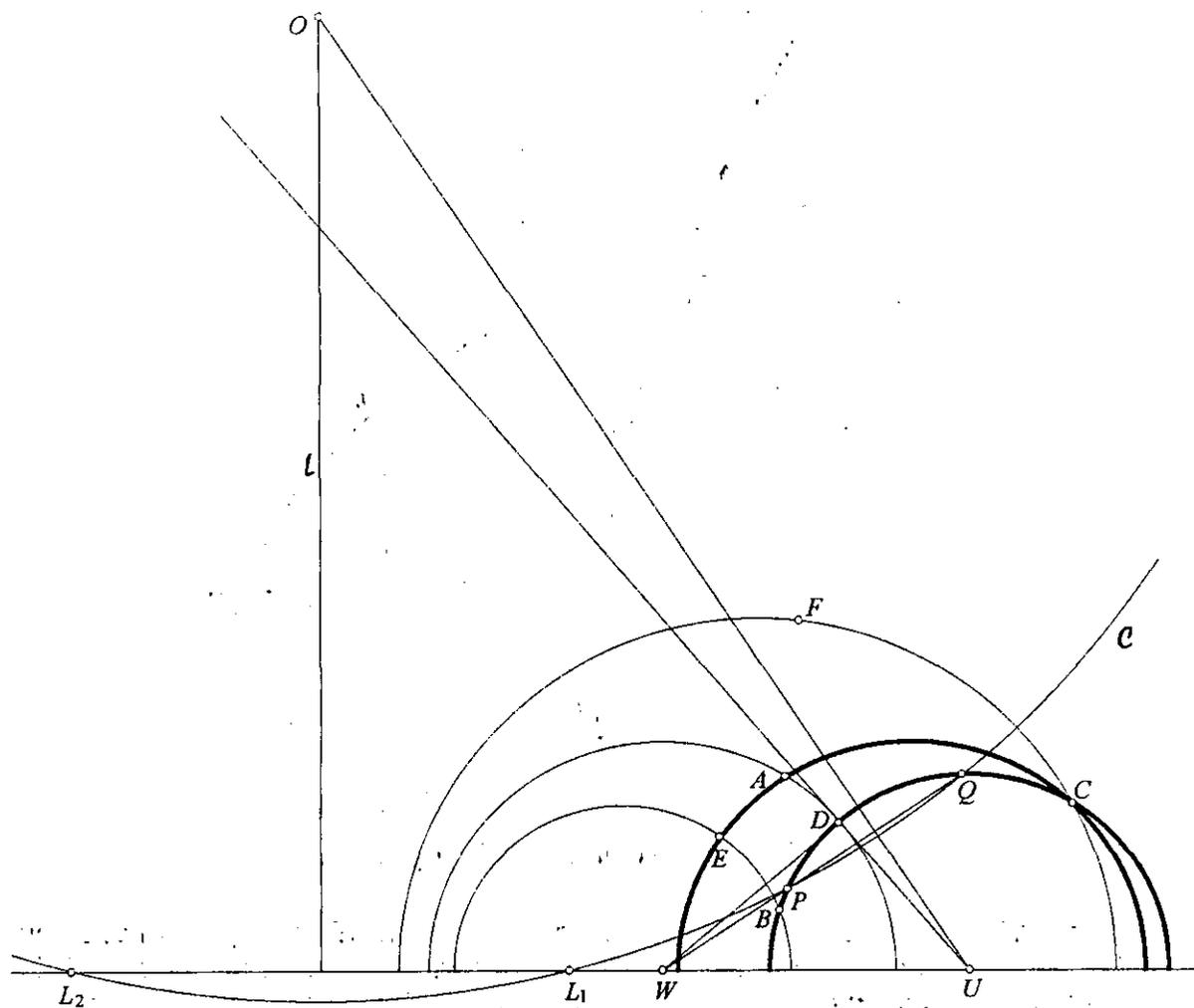


Fig. 6.15 Las alturas son e-circunferencias coaxiales de las que no se cortan

6.2.6 Conjetura. *Nunca existe la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo hiperbólico, es más, si existe un triángulo para el cual exista su circunferencia de los nueve puntos entonces ese triángulo está en el plano euclidiano.*

Para ver esto tomemos casos particulares, es decir, primero veamos que pasa para un triángulo hiperbólico equilátero. Así, en la figura 6.16 vemos que en el triángulo equilátero ΔABC , L, M, N son los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente y P, Q, R que son los puntos medios del ortocentro a los vértices, entonces la circunferencia (hiperbólica) que circunscribe al triángulo ΔLMN , que debería de ser la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ΔABC , no pasa por los puntos P, Q, R , por lo que no existe la circunferencia de los nueve puntos del triángulo equilátero ΔABC .

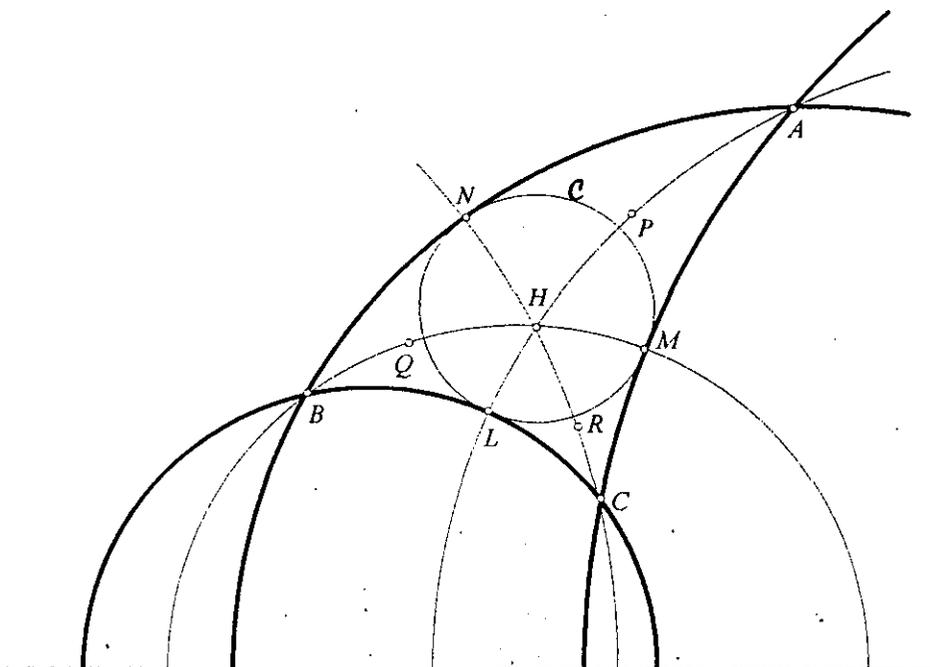


Fig. 6.16 La circunferencia \mathcal{C} no contiene a los puntos P, Q, R .

Ahora veamos el triángulo isósceles $\triangle ABC$ donde los lados AB y AC son iguales (Fig. 6.17), L, M, N son los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente y D, E, F son los pies de las alturas por los vértices A, B, C respectivamente, entonces la circunferencia (hiperbólica) que circunscribe al triángulo $\triangle LMN$ no pasa por E y F , por lo que para este triángulo tampoco existe su circunferencia de los nueve puntos.

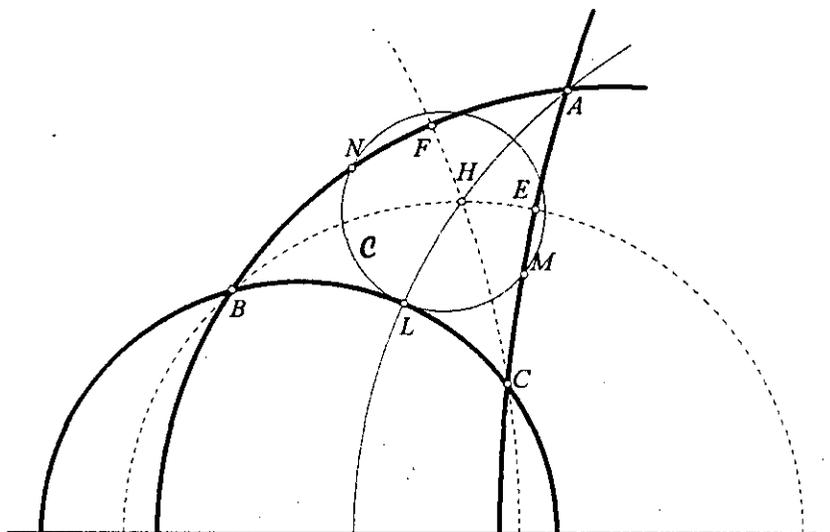


Fig. 6.17 La circunferencia \mathcal{C} no contiene a E y F .

Para el caso de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C (Fig. 6.18), si L, M, N son los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente, la circunferencia (hiperbólica) que circunscribe al triángulo $\triangle LMN$ no contiene al punto C que es el pie de la altura por A y también el pie de la altura por B .

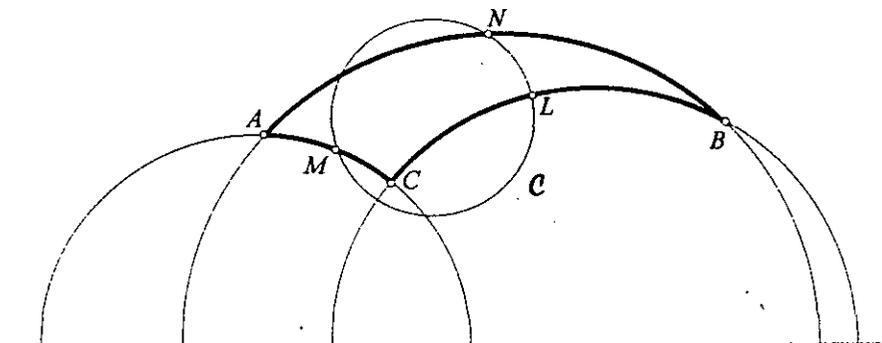


Fig. 6.18 La circunferencia \mathcal{C} no pasa por C .

Por último, veamos que pasa para un triángulo arbitrario $\triangle ABC$. Sean L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB y D, E, F los pies de las alturas que pasan por A, B, C respectivamente (Fig. 6.19); entonces la circunferencia que circunscribe al triángulo $\triangle LMN$ no pasa por los puntos D, E, F , por lo que no existe la circunferencia de los nueve puntos para este triángulo.

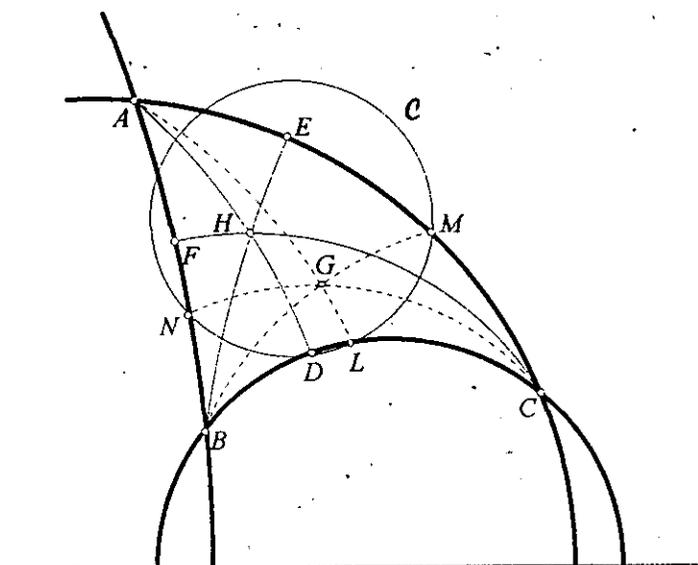


Fig. 6.19 La circunferencia \mathcal{C} no pasa por los puntos D, E, F .

Claramente al no existir la circunferencia de los nueve puntos no podemos hablar de la línea de Euler tal como la vimos para el triángulo euclidiano, lo que si podemos ver es el comportamiento de los otros tres puntos que figuran en la línea de Euler, es decir, el ortocentro, el circuncentro y el gravicentro; lo llamaremos la "línea de Euler".

6.2.7 Proposición. La "línea de Euler" de un triángulo isósceles es la altura por el ángulo desigual.

Demostración.

Primero veamos que, en un triángulo isósceles, la altura, la mediana, la bisectriz y la mediatriz coinciden en el ángulo desigual. Así, en el triángulo ΔABC (Fig. 6.20) sean $AB = AC$ y sea AL la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$, entonces los triángulos ΔABL y ΔACL son congruentes (LAL) y esto implica que L es el punto medio del lado BC , además $\angle ALB = \angle ALC$ y como $\angle ALB + \angle ALC = 180^\circ$, entonces $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$ pero esto implica que AL es la altura por A y mediatriz del lado BC . Ahora, si existe el circuncentro O del triángulo ΔABC éste está sobre AL (por ser AL mediatriz), si existe el ortocentro H del triángulo ΔABC éste está también en AL (por ser AL altura) y por último, como siempre existe el gravicentro del ΔABC éste está sobre AL (por ser AL mediana), por lo tanto para un triángulo isósceles para el cual existen el circuncentro y el ortocentro sí existe la "línea de Euler".

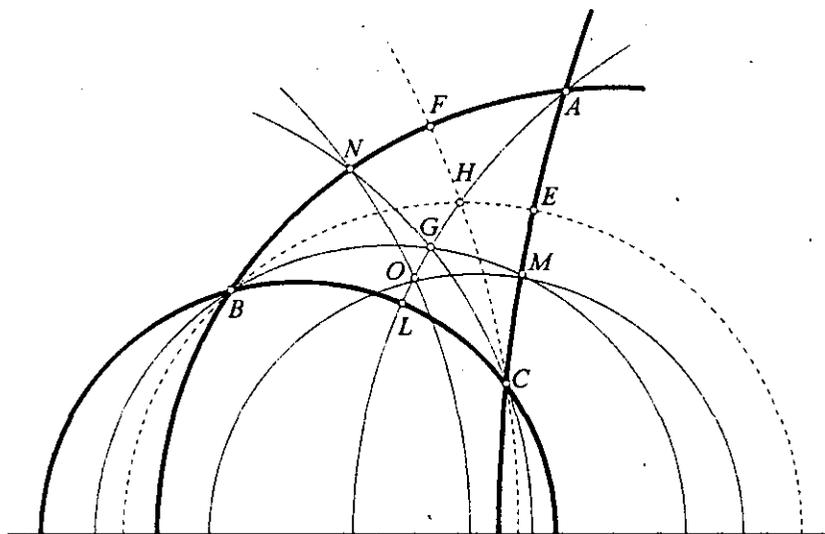


Fig. 6.20 AL es la línea de Euler del triángulo ΔABC .

6.2.8 Conjetura. La "línea de Euler" no existe en un triángulo rectángulo ni en un triángulo arbitrario.

Veamos primero para un triángulo rectángulo para el cual sus mediatrices concurren. Así, en el triángulo ΔABC (Fig. 6.21), que tiene ángulo recto en C , de existir la "línea de Euler" sería la mediana CN que pasa por C , ya que, como C es el ortocentro del triángulo y el gravicentro G está en CN solamente faltaría que el h-circuncentro O esté en CN , pero vemos que eso no sucede, por lo que para un triángulo rectángulo no existe la "línea de Euler".

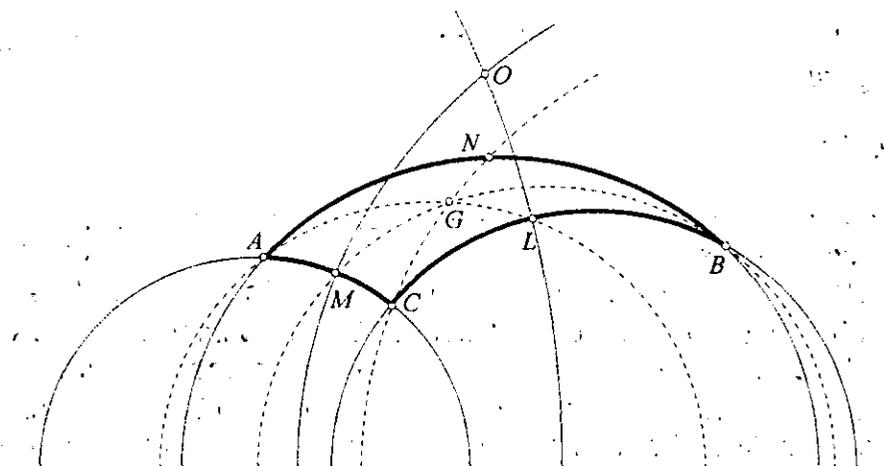


Fig. 6.21 No existe la línea de Euler en un triángulo rectángulo.

Ahora veamos lo que pasa con un triángulo arbitrario. Para ver que en un triángulo arbitrario no existe la "línea de Euler" tracemos la e-circunferencia que pasa por los puntos H, G y O que son el ortocentro, el gravicentro y el circuncentro del triángulo ΔABC respectivamente (Fig. 6.22) y vemos que esta e-circunferencia no es una h-línea, por lo que no existe la "línea de Euler" de este triángulo.

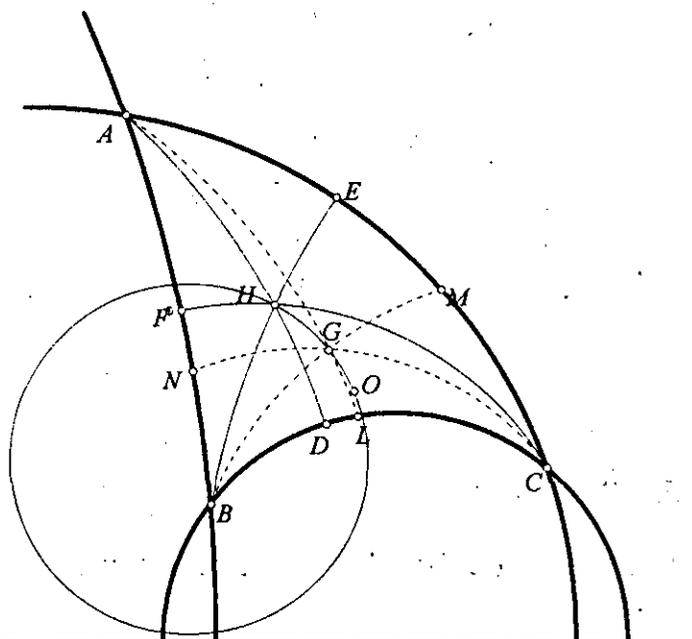


Fig. 6.22 No existe la "línea de Euler" de este triángulo.

Por último, cabe mencionar que no estudiamos el caso para un triángulo equilátero ya que, al igual que en geometría euclidiana, los tres puntos en cuestión H, G y O coinciden.

APENDICE 1

Los elementos de Euclides

Las veintitrés definiciones, nueve nociones comunes y cinco postulados que Euclides enuncia en su libro "*Elementos de Geometría*" son:

Definiciones

- 1) Un punto es aquello que no tiene partes.
- 2) Una línea es un largo sin ancho.
- 3) Los extremos de una línea son dos puntos.
- 4) Una línea recta es una línea que yace en forma pareja sobre sus puntos.
- 5) Una superficie es aquella que sólo tiene largo y ancho.
- 6) Los extremos de una superficie son líneas.
- 7) Una superficie plana es una superficie que yace en forma pareja a las líneas rectas que están sobre sí misma.
- 8) Un ángulo plano es la inclinación de una a otra de dos líneas en un plano las cuales se encuentran una con otra y no están en una línea recta.
- 9) Cuando las líneas que contienen al ángulo son rectas, el ángulo es llamado rectilíneo.
- 10) Cuando una línea recta levantada sobre una línea recta forma los ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la línea recta que se levanta sobre la otra es llamada una perpendicular a aquella sobre la cual se levanta.
- 11) Un ángulo obtuso es un ángulo mayor a un ángulo recto.
- 12) Un ángulo agudo es un ángulo menor a un ángulo recto.
- 13) Un límite es aquello que es un extremo de algo.
- 14) Una figura es aquello que está contenido por cualquier límite o límites.
- 15) Un círculo es una figura plana contenida por una línea de tal modo que todas las líneas rectas que caen sobre ella desde un punto entre aquellas que están dentro de la figura son iguales entre sí.
- 16) El punto es llamado el centro del círculo.
- 17) Un diámetro del círculo es cualquier línea recta trazada a través del centro y terminada en ambas direcciones por la circunferencia del círculo. Tal línea recta bisecta al círculo.
- 18) Un semicírculo es la figura contenida por el diámetro y la circunferencia que éste corta. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
- 19) Las figuras rectilíneas son aquellas contenidas por líneas rectas, los triángulos son aquellas figuras contenidas por tres líneas, los cuadriláteros son aquellas contenidas por cuatro líneas y multiláteros aquellas contenidas por más de cuatro líneas rectas.
- 20) Entre las figuras triángulas, un triángulo equilátero es aquel cuyos tres lados son iguales; un triángulo isósceles es aquel que tiene solamente dos de sus

lados iguales y un triángulo escaleno es aquel que tiene sus tres lados desiguales.

- 21) Aún más, de las figuras triláteras, un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, un triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso, un triángulo acutángulo es aquel que tiene sus tres ángulos agudos.
- 22) Sobre las figuras cuadrilaterales, un cuadrado es aquel que es equilátero y de ángulos rectos; un oblongo es aquel que tiene ángulos rectos pero no es equilátero; un rombo es aquel que es equilátero pero no tiene sus ángulos rectos; un romboide es aquel que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales entre sí pero no es equilátero ni tiene sus ángulos rectos. Los cuadriláteros distintos a estos son trapecios.
- 23) Líneas rectas paralelas son líneas rectas que, estando en el mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambas direcciones no se encuentran en ninguna dirección:

Nociones Comunes

- 1) Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí.
- 2) Si a cosas iguales se añaden otras iguales, las totales son iguales.
- 3) Si de cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales.
- 4) Si a cosas desiguales se añaden otras iguales, las totales son desiguales.
- 5) Las cosas dobles a una misma cosa, son iguales entre sí.
- 6) Las cosas mitades de una misma cosa, son iguales entre sí.
- 7) Las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí.
- 8) El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
- 9) Dos líneas rectas no circundan región.

Postulados

- 1) Es posible trazar la línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
- 2) Es posible prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada.
- 3) Para cada centro y radio es posible describir su círculo.
- 4) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- 5) Si una recta que corta a otras dos forma, del mismo lado, ángulos interiores que suman menos de dos ángulos rectos, al prolongar indefinidamente las dos rectas, estas se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.

APENDICE 2

Equivalencias al quinto postulado.

Mencionaremos algunas de las afirmaciones equivalentes al quinto postulado, algunas de las cuales fueron utilizadas al intentar probarlo.

Equivalencias

- A. Si A y D son puntos en el mismo lado de BC tales que $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$, entonces BA intersecta a CD (quinto postulado de Euclides).
- B. Si A y D son puntos en el mismo lado de BC y $BA \parallel CD$, entonces $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ (proposición 29 de Euclides).
- C. Para líneas rectas l, m, n . Si $l \parallel m$ y $m \parallel n$, entonces $l \parallel n$ (proposición 30 de Euclides.)
- D. Si una tercera línea intersecta a una de dos líneas paralelas entonces intersecta a la otra (contrapositivo de la proposición 30 de Euclides).
- E. Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada (axioma de Playfair).
- F. Una línea perpendicular a una de dos líneas paralelas es perpendicular a la otra.
- G. Si $l \parallel m$, $r \perp l$ y $s \perp m$, entonces $r \parallel s$ para l, m, r, s líneas.
- H. Las mediatrices de cualquier triángulo son concurrentes.
- I. Existe una circunferencia que pasa por cualesquiera tres puntos no colineales.
- J. Existe un punto que equidista de cualesquiera tres puntos no colineales.
- K. Una línea que intersecta perpendicularmente a un rayo de un ángulo agudo intersecta al otro rayo.
- L. A través de cualquier punto en el interior de un ángulo existe una línea que intersecta a ambos rayos del ángulo que no pasa por el vértice del ángulo.
- M. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180° . Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él (proposición 32 de Euclides).
- N. Si el punto C está fuera de AB pero en la circunferencia de diámetro AB , entonces el ángulo $\angle ACB$ es recto.
- O. Si el ángulo $\angle ACB$ es recto, entonces C está en la circunferencia de diámetro AB .
- P. Las mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se intersectan en la hipotenusa del mismo.
- Q. Si $l \perp r$, $r \perp s$ y $s \perp m$ entonces l intersecta a m para l, m, r, s líneas.
- R. Existe un ángulo acutángulo tal que cualquier línea que intersecta y es perpendicular a uno de los rayos de el ángulo intersecta al otro rayo del ángulo.
- S. Existe un ángulo acutángulo tal que cualquier punto en el interior del ángulo está en una línea que intersecta a ambos rayos del ángulo y tal que no pasa por el vértice del ángulo.
- T. Existe un triángulo tal que la suma de sus ángulos es 180° .

- U. Existe un triángulo con defecto cero.
- V. Existe un rectángulo (Hipótesis del ángulo recto de Saccheri).
- W. Existen dos líneas l y m tales que l es equidistante de m .
- X. Si tres de los cuatro ángulos de un cuadrilátero son rectos entonces el cuarto ángulo también es recto.
- Y. Existe una línea l y un punto P que no está en l tal que hay una única línea que pasa por P y es paralela a l .
- Z. Existe un par de triángulos semejantes que no son congruentes.

Una prueba de estas equivalencias se encuentra en: "The Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane" George E. Martin.

Veamos la prueba de la equivalencia entre el quinto postulado de Euclides y el axioma de Playfair.

Proposición. Son equivalentes:

- a) Si una línea recta intersecta a dos líneas rectas y forma ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, si son prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.
- b) Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Dada una línea b y un punto P que no está en b (Fig. A2.1). Por el corolario 3.2.5 sabemos que se puede construir una paralela a la línea b que pase por P . Desde P trazamos la perpendicular a la línea b , que corta a ésta en Q , y trazamos la perpendicular (a) a PQ en P . Entonces a y b son paralelas.

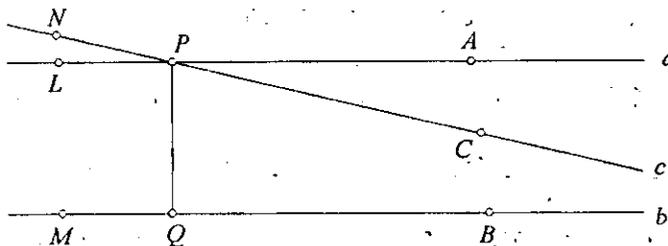


Fig. A2.1 La única paralela a b por P es a .

Ahora, sea c cualquier línea que pase por P que no sea a . De aquí se sigue que ni $\angle NPQ$ ni $\angle QPC$ son ángulos rectos, ya que de ser así a y c coincidirían. Así,

podemos suponer que $\angle QPC$ es menor que un ángulo recto. Así, las líneas b y c son cortadas por la transversal PQ y como $\angle QPC + \angle PQB < 180^\circ$, entonces, por el quinto postulado, PC y QB se intersectan, por lo que la única paralela a b que pasa por P es a .

$(b) \Rightarrow (a)$

Sean a y b líneas cortadas por una transversal en los puntos P y Q respectivamente formando los ángulos $\angle APQ$ y $\angle BQP$ (Fig. A2.2) tales que

$$\angle APQ + \angle BQP < 180^\circ \quad (1)$$

además tenemos que

$$\angle BQP + \angle PQT = 180^\circ \quad (2)$$

y de las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$\angle APQ < \angle PQT \quad (3)$$

Por P construimos $\angle QPR = \angle PQT$, entonces $\angle QPA < \angle QPR$, y así PR es distinta de la línea a . Ahora, por el teorema 3.2.2 RP es paralela a b , entonces por el axioma de Playfair a no es paralela a b , por lo tanto a y b se intersectan.

Supongamos que no se intersectan del lado de A y B , es decir, supongamos que a y b se intersectan en E , entonces $\angle APQ$ es un ángulo exterior del triángulo $\triangle PQE$ por lo que $\angle APQ > \angle PQT$, pero esto contradice (3). Por lo tanto a y b se intersectan y lo hace del lado de A y B .

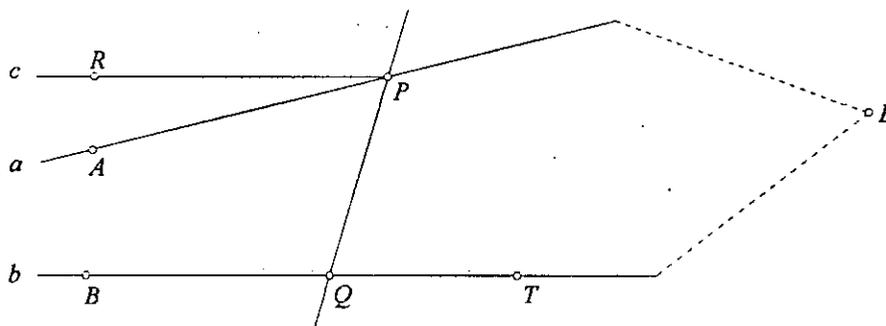


Fig. A2.2 a y b se intersectan.

Axioma de Pasch.

Hay dos versiones del axioma de Pasch. Probaremos aquí que estas dos versiones son equivalentes.

Proposición. Son equivalentes:

- a) Si una línea entra a un triángulo por uno de sus lados no en un vértice, entonces la línea intersecta a otro lado del triángulo.

b) Si una línea entra a un triángulo por uno de sus vértices, entonces la línea interseca al lado opuesto del triángulo.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Sea l una línea que entra al triángulo ΔAB_1C por el vértice B_1 (Fig. A2.3). Si prolongamos el lado AB_1 hasta B de forma tal que B_1 esté entre A y B , entonces, aplicando (a) al triángulo ΔABC , la línea l interseca a otro de los lados del ΔABC y como l entra al ΔAB_1C no puede ser que l interseque al lado BC , es decir, l interseca al lado AC que es el lado opuesto al vértice B_1 en el triángulo ΔAB_1C .

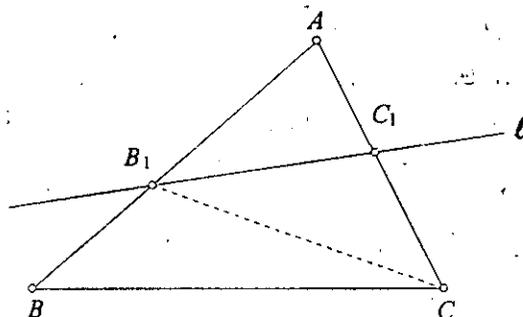


Fig. A2.3 Axioma de Pasch.

(b) \Rightarrow (a)

Sea l una línea que entra al triángulo ΔABC por B_1 en el lado AB (Fig. A2.3). Si l pasa por el vértice C del triángulo ΔABC , entonces l interseca al lado AC . Si no, trazamos la línea B_1C , entonces la línea l entra al triángulo ΔAB_1C por el vértice B_1 y, por (b), la línea l interseca a AC , es decir, l interseca a otro lado del triángulo ΔABC .

APENDICE 3

Identidades Trigonométricas

Estas identidades trigonométricas se obtienen por medio de una simple sustitución en la definición 5.1.1, únicamente para las fórmulas 1, 3, 5 y 7 hay que utilizar las identidades $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ y $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

$$1) \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$2) 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$3) \cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

$$4) \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

$$5) \sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$6) \sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$

$$7) \cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

$$8) \cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$$

$$9) \tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$

$$10) \sinh(x) + \sinh(y) = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$11) \sinh(x) - \sinh(y) = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$12) \cosh(x) + \cosh(y) = 2 \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$13) \cosh(x) - \cosh(y) = 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$14) \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$$

$$15) \cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$$

$$16) \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{\cosh(x)+1}} = \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)+1}$$

$$17) e^{-x} = \frac{\operatorname{sech}(x)}{1 + \tanh(x)} = \frac{1 - \tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)}$$

$$18) \operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$19) \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$$

$$20) \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$$

Bibliografía

- [1] Altshiller C., Nathan, *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Barnes & Noble Inc., Nueva York, 1965.
- [2] Gans, David, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Academic Press, Inc., Nueva York, 1973.
- [3] García C., Montserrat, *Geometría Hiperbólica para Principiantes*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, Director Francisco Struck Chávez, 2001.
- [4] Greenberg, Marvin J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
- [5] Heath, Thomas, *The thirteen books of euclid's elements*, Dover, Nueva York, 1956.
- [6] Lundsgaard H. Vagn, *Shadows of the Circle*, World Scientific Publishing Co., Singapur, 1998.
- [7] Martin, George E., *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Intext Educational Publishers, Nueva York, 1975.
- [8] Meschkowski, Herbert, *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, New York, 1972.
- [9] Prenowitz, Walter, *Basic Concepts of Geometry*, Xerox, Massachusetts, 1965.
- [10] Ramírez G., Ana I, Sierra L., Guillermo, *Invitación a las Geometrías no Euclidianas*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2000.
- [11] Shively, Levi S., *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1953.
- [12] Wolfe, Harold E., *Non-Euclidean Geometry*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1945.