UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONTINUOS 2-EQUIVALENTES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

I S L A S   M O R E N O   C A R L O S

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA ISABEL PUGA ESPINOSA

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTÓNOMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"CONTINUOS 2-EQUIVALENTES"

realizado por ISLAS MORENO CARLOS

con número de cuenta 9009331-7 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. María Isabel Puga Espinosa

Propietario Dr. Alejandro Illanes Mejía

Propietario Dr. Raúl Escobedo Conde

Suplente Dr. Gerardo Acosta García

Suplente M. en C. Félix Capulín Pérez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Índice General

Dedicatoria

Dedicada a la mujer que me dio la vida, a quien quiero mucho: Mi mamá, sra. Ma. Martha Moreno Samperio.

A mis hermanos, quienes están casi siempre a mi lado para apoyarme en todo: Esteban Islas Moreno y Fernando Islas Moreno.

A la memoria de mi padre.

Agradecimientos

A todos aquellos que han hecho posible la presente tesis y todo lo que ella significa.

A DIOS, gracias por todo.

A la mujer más importante en mi vida, que me comprende, me quiere y me ha soportado por muchos años, a quien le debo tanto, mi madre. GRACIAS MAMÁ.

A la UNAM.

A la mujer más importante en mi vida académica: Dra. Isabel Puga Espinosa, por su amistad, por sus consejos, por su tiempo, por creer en mi, por ser más que mi tutora y por todo el apoyo que me ha brindado. GRACIAS BETY.

Al Dr. Alejandro Illanes, por todo el apoyo que me ha brindado, por la oportunidad de ser becario en un proyecto de PAPIIT, también por la oportunidad de ser becario en el IMATE, por el apoyo en algunos congresos y en especial por su valiosa aportación en esta tesis. Gracias Alejandro.

A mis sinodales: Dra. Isabel Puga Espinosa, Dr. Alejandro Illanes Mejía, Dr. Raúl Escobedo Conde, Dr. Gerardo Acosta García y M. en C. Félix Capulín Pérez.

A mis dos mejores amigos, mis hermanos Esteban y Fernando, por estar siempre que los necesito y apoyarme en todo. También a mis cuñadas Mary y Alma, gracias Mary por el apoyo académico.

A mis dos tías, quienes han sido más que tías para mi. Gracias tía Andrea y tía Juana.

A mis dos primos Raúl y Alfredo. A mi prima Clementina por la fe que tiene en mi (no se porqué, pues me conoce desde hace muchos años) y a mi prima Gloria por el ánimo que provoca.

A esos profesores que hicieron más que ser mis maestros, ser mis amigos y una inspiración para esta carrera: Bertha, Hugo, Flor, Alejandro, Bodek y por supuesto Bety.

A mis amigos, compañeros y aquellos que han hecho que esta vida académica pueda ser y que valga la pena. Araceli, Miriam (gracias por todo Miriam), Susanita, Félix, Ivonne, Leopoldo, Aide, Victor, Ramces, Adrian, Daniel, Malú, Fernando, Letty, Edgar, Erik, Marlenne, Paula, Jessica, María de Jesús, Anel, Mitzi, Marynes, Rafael, Enrique, Sandra, Paty, Claudia, Gina, Lorena, It-zel, Mara, Mariana, Luz María, Juan Manuel, Juan Antonio, Gris, Angélica, Oli, Gabi, Maribel, Marthita, Paco, Maritza, Rocio y Elvia. GRACIAS.

Introducción

El cubo de Hilbert es un continuo que contiene a todos los tipos de continuos existentes. En otras palabras, dado un continuo (espacio métrico, compacto y conexo) existe una inmersion de éste en el cubo de Hilbert. Los matemáticos se han preguntado desde hace muchos años ¿cuáles continuos se encuentran en el extremo opuesto? Es decir cuáles continuos contienen solamente un número finito n de continuos no degenerados y no homeomorfos entre sí. A estos continuos los llamaremos *n-equivalentes*. Durante mucho tiempo se pensó que el intervalo $[0,1]$ era el único continuo 1-equivalente. En 1948, Moise y Bing construyeron el *pseudoarco*, un continuo *indescomponible* (es decir que no es la unión de dos subcontinuos propios) cuyos subcontinuos no degenerados son todos ellos pseudoarcos. Sin embargo fue hasta 1960 que G.W. Henderson demostró que el único continuo descomponible y 1-equivalente es un arco. Aún no se sabe si hay más o no hay más continuos 1-equivalentes indescomponibles además del pseudoarco.

Recientemente (1999) apareció un artículo de W.S. Mahavier en el cual se estudian los continuos 2-equivalentes. La presente tesis está basada en este artículo. El problema de clasificar a los continuos n-equivalentes se complica conforme crece la n.

En el artículo de Mahavier se llega a las siguientes conclusiones:

1) Los únicos continuos localmente conexos que son 2-equivalentes son un triodo simple y una circunferencia, de hecho estos dos continuos son los únicos continuos 2-equivalentes y arco-conexos

2) Si un continuo M no es arco-conexo, es 2-equivalente y uno de sus tipos de subcontinuos es un arco, entonces M debe ser irreducible.

3) Sea M un continuo con las mismas propiedades que en 2) y que además es descomponible Entonces M es encadenable. Más aún, es la cerradura de un rayo topológico. Nótese que en este caso el continuo M es hereditariamente

descomponible.

En el artículo de Mahavier se construyen además dos ejemplos de continuos 2-equivalentes. Uno de ellos es la cerradura de un rayo topológico cuyo residuo es homeomorfo al continuo total y el otro es un continuo encadenable que no contiene arcos y cuyos dos tipos subcontinuos son descomponibles, es decir que se trata también de un continuo hereditariamente descomponible.

En esta tesis exponemos los resultados 1) y 2) en el capítulo 3, nuestro capítulo 4 está dedicado al resultado 3) y el 5 a los ejemplos.

Los continuos hereditariamente descomponibles e irreducibles tienen una estructura que ha sido ampliamente estudiada y que es la herramienta que se utiliza para demostrar el resultado 3). En el capítulo 2 exponemos los Lemas A y B que nos describen esta estructura: "Todo continuo hereditariamente descomponible e irreducible admite una descomposición monótona y semicontinua superiormente. El espacio cociente correspondiente es homeomorfo a un arco". Por la importancia que tiene este resultado, quisimos demostrar los dos lemas con todo detalle.

Solamente dejamos sin demostrar un teorema relacionado con estos mismos continuos hereditariamente descomponibles e irreducibles (Teorema 0.6). Su demostración se encuentra en [*Mahavier*].

En el capítulo 1 exponemos los resultados y conceptos que nos parecen básicos para el desarrollo de esta tesis. Algunos de ellos serán enunciados sin demostración ya que ésta se encuentra en todos los casos, en el libro de Nadler [*Nadler*].

A continuación enunciaremos los teoremas que utilizaremos sin demostrar, en el orden en el cual los utilizamos en esta tesis.

Teorema 0.1 [*Nadler, Teorema 5.6, pág. 74*] *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es compacto.*

Teorema 0.2 (*Comportamiento en la frontera*) [*Nadler, Teorema 4.13, pág. 59*]. *Sean X un continuo, E un subconjunto propio de X y K una componente de E. Entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$. (Equivalentemente, como $\overline{K} \subset \overline{E}$, $\overline{K} \cap \overline{(X \setminus E)} \neq \emptyset$.)*

Más aún, si E es abierto en X, entonces $\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. (Es decir, $\overline{K} \setminus E \neq \emptyset$).

Teorema 0.3 [*Nadler, Proposición 3.7, pág. 39*]. *Sean* (S, τ) *un espacio topológico* $\mathbb{D}$ *una descomposición semicontinua superiormente de* S *y* $\pi : S \to D$ *la función natural. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathbb{D}$ *es una descomposición semicontinua superiormente;*

(2) π *es una función cerrada;*

(3) *si siempre que* $D \in \mathbb{D}$, $U \in \tau$ *y* $D \subset U$, *existe* $V \in \tau$ *con* $D \subset V$ *tal que si* $A \in \mathbb{D}$ *y* $A \cap V \neq \emptyset$, *entonces* $A \subset U$.

Teorema 0.4 [*Nadler, Teorema de Sorgenfrey, Teorema 11.34, pág. 216*]. *Todo continuo no degenerado, unicoherente y que no es un triodo, es irreducible.*

Teorema 0.5 [*Nadler, Teorema, 3.10, pág. 40*]. *El espacio cociente de cualquier descomposición semicontinua superiormente de un continuo es un continuo.*

Teorema 0.6 [*Mahavier 2, Teorema 1, pág. 53*]. *Si* M *es un continuo métrico compacto, encadenable y hereditariamente descomponible,* p' *y* q' *son puntos de* M *y* $\varepsilon > 0$, *entonces hay un subcontinuo* K *de* M *tal que* K *es irreducible de* p *a* q *con* $d(p, p') < \varepsilon$ *y* $d(q, q') < \varepsilon$ *y* K *no es irreducible de* p *a ningún punto, excepto* q.

Teorema 0.7 [*Bing, Teorema 11, pág. 660*]. *Un continuo hereditariamente descomponible es encadenable si y solo si es atriódico y hereditariamente unicoherente.*

Teorema 0.8 [*Nadler, Lema 26, pág. 20*]. *Sean* $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$ *una sucesión de espacios métricos. Sea* $M = \varprojlim (X_i, f_i)$. *Para cada* n, *sea* $\pi_n : M \to X_n$ *la función proyección. Sea* A *un subconjunto compacto de* M. *Entonces* $\varprojlim \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)\right] \cap M$.

Desde luego el problema de clasificar a los continuos 2-equivalentes no se agota con el trabajo de Mahavier. Hasta ahora no han aparecido resultados nuevos. Sin embargo podemos mencionar a los solenoides. Continuos indescomponibles cuyos subcontinuos son todos arcos. La misma propiedad tiene el conocido continuo indescomponible de Knaster. Si consideramos la unión de dos pseudo-arcos e identificamos un punto de uno de ellos con un punto del otro, obtenemos un continuo descomponible cuyos subcontinuos son o bien pseudoarcos o bien homeomorfos al total. Este es otro ejemplo. Así que en este tema como en el de los continuos 1-equivalentes aún queda mucho por investigar.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Continuos irreducibles alrededor de un conjunto

La finalidad de esta sección es demostrar el Teorema 1.12 sin utilizar el Lema de Zorn.

Para ello, trabajaremos con hiperespacios y con funciones de Whitney.

Dado un conjunto X, denotaremos por $\mathbb{P}(X)$ a la familia de subconjuntos de X. Si X es un espacio topológico, entonces un *hiperespacio* de X es una familia de $\mathbb{P}(X)$ con alguna topología.

Estamos particularmente interesados en los hiperespacios de un continuo (X,d), dados por

$$2^X = \{A \in \mathbb{P}(X) : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y en

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},$$

ambos con la topología inducida por la siguiente métrica.

Denotamos por $N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}$ y definimos la métrica: $H_d : 2^X \to [0,\infty)$ como:

$$H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N_d(\varepsilon, A)\}.$$

Demostraremos que H_d es una métrica. Es claro que $H_d(A,B) \geq 0$ pues es el ínfimo de números positivos. Es claro que $H_d(A,B) = H_d(B,A)$. Para demostrar la desigualdad del triángulo, notamos que

(1) si K, $L \in 2^X$ y $x \in K$, entonces existe $y \in L$ tal que $d(x,y) \leq H_d(K,L)$.

Tomemos ahora un punto $a \in A$. Entonces, por (1), existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$. Ahora, para dicho elemento $b \in B$, aplicando (1) de nuevo, existe $c \in C$ tal que $d(b,c) \leq H_d(B,C)$. De este modo, usando la desigualdad del triángulo para d, tenemos que $d(a,c) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$. Por lo tanto, como $a \in A$ fue arbitario, hemos probado que

$$A \subset N_d(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta, C)$$

para cualquier $\delta > 0$. Un argumento similar muestra que

$$C \subset N_d(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta, A)$$

para cada $\delta > 0$. Por tanto $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$.

Esto muestra la desigualdad del triángulo. Además, si se tiene que $H_d(A,B) = 0$. Para cada $a \in A$, por (1) existe $b \in B$ tal que $d(a,b) = 0$, lo cual quiere decir que $a = b$, esto es, cada elemento de A se puede ver como un elemento de B, así $A \subseteq B$. Análogamente, por (1) tenemos que $B \subseteq A$. Por ello, si $H_d(A,B) = 0$, se tiene que $A = B$. Además, si $A = B$ es claro que $H_d(A,B) = 0$.

Esto prueba que H_d es una métrica.

A esta métrica se le conoce como *métrica de Hausdorff*.

Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X, definimos el *límite inferior* de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$\liminf F_n = \{x \in X : \text{ para cada abierto } U, \text{ tal que } x \in U, U \cap F_n \neq \emptyset, \text{ para todos, salvo un número finito de números } n\}.$$

El *límite superior* de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$\limsup F_n = \{x \in X : \text{ para cada abierto } U, \text{ tal que } x \in U, U \cap F_n \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de números } n\}.$$

Si $F \subset X$. Decimos que $\lim F_n = F$ si $\liminf F_n = F = \limsup F_n$. Por definición es claro que $\liminf F_n \subseteq \limsup F_n$.

Teorema 1.1 *Si X es un continuo y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$. Entonces $\liminf F_n$ y $\limsup F_n$ son ambos compactos.*

Demostración. Sean $F = \liminf F_n$ y $x \in X$ tales que $x \in \overline{F}$ (donde $\overline{F}$ denota la cerradura del conjunto F) y sea U un abierto tal que $x \in U$. Como $x \in \overline{F}$, entonces $U \cap F \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in U \cap F$. Como U es un abierto, tal que $x_0 \in U$, $U \cap F_n \neq \emptyset$ para toda salvo un número finito de números n. Entonces $x \in F = \liminf F_n$. Así F es cerrado, además, por ser X compacto, F es compacto.

La demostración de que $\limsup F_n$ es compacto es análoga. ■

Corolario 1.2 *Si X es un continuo y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ es tal que* $\lim F_n = F$. *Entonces* $\lim F_n$ *es compacto.*

Teorema 1.3 *Sea X un continuo y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ donde F_n es conexo para toda n y* $\liminf F_n \neq \emptyset$. *Entonces* $\limsup F_n$ *es conexo.*

Demostración. Supongamos que $F = \limsup F_n$ no es conexo. Entonces existen cerrados, ajenos y no vacíos G y $H \subseteq X$ tales que $F = G \cup H$. Como X es normal, existen subconjuntos abiertos y ajenos U y V, tales que $G \subset U$ y $H \subset V$. Como $\liminf F_n \neq \emptyset$, existe $a \in \liminf F_n \subseteq \limsup F_n$, entonces $a \in U$ o $a \in V$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in U$. Entonces existe j_0 tal que $U \cap F_j \neq \emptyset$, para toda $j \geq j_0$. Además $H \neq \varnothing$, entonces existe un conjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, j_0 - 1\}$, tal que $U \cap F_j \neq \emptyset \neq V \cap F_j$, para toda $j \in J$. Dada $j \in J$, como F_j es conexo para toda j, entonces $F_j \cap [X \setminus (U \cup V)] \neq \emptyset$, pues en otro caso F_j sería disconexo. Para cada $j \in J$, sea $x_j \in F_j \cap [X \setminus (U \cup V)]$ y como $X \setminus (U \cup V)$ es compacto, para la sucesión $\{x_j\}_{j \in J}$ existe una subsucesión convergente $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Es claro que $x = \lim_{k \to \infty} x_{j_k}$ debe ser un elemento de F, pero $x_{j_k} \in X \setminus (U \cup V)$ para toda k, así $x \notin (U \cup V) \supseteq (G \cup H) = F$. De esta contradicción, tenemos que F es conexo. ■

Teorema 1.4 *El hiperespacio $C(X)$ es cerrado en 2^X.*

Demostración. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{C}(X)$ tal que $\lim F_n = F$, entonces por el Teorema 0.1, $F \in 2^X$. Así por el Teorema 1.3, F es conexo. Es decir $F \in \mathrm{C}(X)$. Así $\mathrm{C}(X)$ es cerrado. ■

De este teorema y del Teorema 0.1 se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 1.5 *$C(X)$ es compacto.*

Para trabajar con hiperespacios usaremos el siguiente resultado:

Teorema 1.6 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en 2^X, entonces $\lim A_i = A$ (respecto a la métrica de Hausdorff) si y sólo si $\limsup A_i = A = \liminf A_i$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sean $x \in A$ y U abierto tales que $x \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \subset U$, así que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N_0$, existe $x_i \in A_i$ tal que $d(x, x_i) \leq H(A, A_i) < \varepsilon$, entonces $x_i \in \mathbb{B}_\varepsilon(x) \subset U$, de aquí que $A_i \cap U \neq \varnothing$ para toda $i \geq N_0$

Por lo tanto $x \in \liminf A_i$.

Ahora veamos que $\limsup A_i \subset A$. Supongamos que existe $x \in \limsup A_i$ tal que $x \notin A$. Como A es cerrado, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ y como $x \in \limsup A_i$, entonces $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ para una infinidad de números i. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N_0$, $H(A_i, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $A_i \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_i)$ para toda $i \geq N_0$, así que podemos encontrar un $n > N_0$ tal que $\mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n \neq \varnothing$.

Sea $z \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n$, entonces $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $z \in A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pero $d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, por lo que $a \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ y $\mathbb{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow]$ Sea $\varepsilon > 0$. Veamos primero que $A \subset N(\varepsilon, A_i)$ a partir de alguna i.

Para toda $a \in A$, existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N_a$. Por otra parte $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, como A es compacto, existen $a_1, a_2, \cdots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)$. Sea $N_1 = \max\{N_{a_k} : k = 1, 2, \cdots, m\}$. Entonces tenemos que para cada $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ y cada $i \geq N_1$ existen $a_i^k \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i^k) \cap A_i$, de aquí que $a_k \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i^k) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_i\right)$ para toda $i \geq N_1$. Ahora, si $a \in A$, $a \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)$ para alguna $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, entonces $d\left(a, a_i^k\right) \leq d(a, a_k) + d\left(a_k, a_i^k\right) < \varepsilon$. Así que $a \in \mathbb{B}_\varepsilon\left(a_i^k\right) \subset N(\varepsilon, A_i)$, entonces $A \subset N(\varepsilon, A_i)$ para toda $i \geq N_1$.

Demostraremos que existe N_2 tal que $A_i \subset N(A, \varepsilon)$ para toda $i \geq N_2$.

Supongamos que no es así, entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n > n$ tal que $A_{i_n} \not\subset N(A, \varepsilon)$, lo cual indica que existe $x_n \in A_{i_n}$ tal que $x_n \notin N(A, \varepsilon)$. Como X es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Supongamos que $\lim x_{n_k} = x$. Para toda vecindad abierta U de x, $x_{n_k} \in U$ a partir de algún $k_U \in \mathbb{N}$ y $x_{n_k} \in A_{i_{n_k}}$, con lo que $x \in \limsup A_i$, pero $\limsup A_i = A$, entonces $x \in A$. Ahora $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ para $k \geq k_\varepsilon$ y $B_\varepsilon(x) \subset N(\varepsilon, A)$. Así tenemos $x_{n_k} \in N(\varepsilon, A)$ para $k \geq k_\varepsilon$, esto contradice el hecho de que $x_n \notin N(\varepsilon, A)$.

Por lo que existe $N_2 \in N$ tal que $A_i \subset N(\varepsilon, A)$ para toda $i \geq N_2$.

Sea $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Concluimos que $H(A, A_i) < \varepsilon$ para $i \geq N_0$. ■

Un espacio topológico X es *separable* si existe $G \subset X$ tal que G es denso en X y G es numerable.

Lema 1.7 *Todo espacio métrico y compacto es separable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\right\}$ es una cubierta de X, existe un conjunto finito E_n de elementos de X, tal que $\bigcup\limits_{x \in E_n} \mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(x) = X$. Entonces el conjunto $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ es numerable. Para ver que es denso, sean U un abierto no vacío de X y $u \in U$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(u) \subseteq U$. Por otra parte $u \in \mathbb{B}_{\frac{1}{2n}}(x) \subseteq \mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(u) \subseteq U$ para alguna $x \in E_{2n}$. Por lo tanto $x \in \mathbb{B}_{\frac{1}{n}}(u) \subseteq U$. Con lo cual tenemos que E es denso en X. ■

Lema 1.8 *Todo espacio métrico (X, ρ) es homeomorfo a un espacio métrico (X, d) con $d(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in X \times X$.*

Demostración. Definimos $d(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$. Dejamos al lector, verificar que d es una métrica acotada por 1.

Observemos que: si $0 < \varepsilon < 1$ entonces, para toda $x \in X$, $B_\varepsilon^\rho(x) = B_\varepsilon^d(x)$.

De aquí se sigue que los abiertos de X con respecto a ρ son los mismos que los abiertos de X con respecto a d. ■

Una *función* de *Whitney* para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) para cualesquiera $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, $\mu(A) < \mu(B)$;

(ii) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.

Teorema 1.9 *Si (X, ρ) es un espacio métrico compacto, entonces hay una función de Whitney para 2^X.*

Demostración. Debido a que X es un espacio métrico compacto, entonces por el Lema 1.7, X es separable. Sea $D = \{x_k : k = 1, 2, ...\}$ un subconjunto denso de X. Por el Lema 1.8, podemos suponer que $\rho(x, y) \leq 1$ para cada $x, y \in X$. Para cada k, sea $f_k : X \to [0, 1]$ definida como:

$f_k(x) = \rho(x_k, x)$ para cada $x \in X$.

Sea $\mu_k : 2^X \to [0, 1]$ definida por:

$\mu_k(A) = diam(f_k(A))$, el diámetro de $f_k(A)$, para cada $A \in 2^X$.

Así definimos $\mu : 2^X \to [0, 1]$ por:

$\mu(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mu_k(A)}{2^k}$, para cada $A \in 2^X$.

Notemos que f_k es continua para cada k. Veamos ahora que la función diámetro también es continua. Para esto sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ tal que $\lim A_n = A$, para alguna $A \in 2^X$. Si $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{4}$ para $n > N$, entonces por definición $A \subseteq N_d\left(\frac{\varepsilon}{4}, A_n\right)$ y $A_n \subseteq N_d\left(\frac{\varepsilon}{4}, A\right)$, para $n > N$. Recordemos que $N_d\left(\frac{\varepsilon}{4}, A\right) = \left\{x \in X : d(x, a) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ para alguna } a \in A\right\}$. Sea $n > N$. Dadas $x, y \in A_n$, existen $a, b \in A$ tales que $d(x, a)$, $d(y, b) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b)$. Además $d(a, b) \leq diam(A)$, así que $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b) \leq diam(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Como esto ocurre para cualesquiera $x, y \in A_n$, se sigue que $diam(A_n) \leq diam(A) + \frac{\varepsilon}{2}$, es decir $diam(A_n) - diam(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de igual forma para cualesquiera $x, y \in A$, se tiene que $d(x, y) \leq diam(A_n) + \frac{\varepsilon}{2}$, así $diam(A) \leq diam(A_n) + \frac{\varepsilon}{2}$, es decir $diam(A) - diam(A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, así $|diam(A) - diam(A_n)| < \varepsilon$. Entonces $diam(A_n) \to diam(A)$. Por lo tanto la función diámetro es una función continua y μ_k es una función continua para cada k. Por otra parte como, $\frac{\mu_k(A)}{2^k} < \frac{1}{2^k}$ para toda k y para toda $A \in 2^X$, entonces $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mu_k(A)}{2^k}$ converge uniformemente. De aquí se sigue que μ es una función continua (El lector puede verificar fácilmente que si una sucesión de funciones continuas con valores reales y definidas en un espacio métrico converge uniformemente, la función límite es continua, ver [*Bartle*, Teorema 24.2, pág. 193]). Ahora, como el diámetro de un punto es cero, entonces $\mu_n(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$, y para toda n, entonces $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, entonces $f_n(A) \subseteq f_n(B)$ y por lo tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_n(A)}{2^n} \leq \sum_{n \in N} \frac{\mu_n(B)}{2^n} = \mu(B)$. Como $A \neq B$, existe $x \in B \setminus A$. Sea $r = d(x, A)$ y $x_k \in \mathbb{B}_{r/4}(x)$, $x_k \in D$. Veremos que $f_k(A) \neq f_k(B)$. Nótese que $d(x_k, x) < r/4$. Por otra parte $d(x_k, a) > r/2$ para toda $a \in A$. Se sigue de aquí que: $f_k(x) < \frac{r}{4} < \frac{r}{2} < f_k(a)$ para toda $a \in A$, y por lo tanto $f_k(A) \subsetneq f_k(B)$. Así que $diam[f_k(B)] > diam[f_k(A)]$, de donde $\mu_k(A) < \mu_k(B)$. Luego como $\mu_j(A) \leq \mu_j(B)$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $\mu(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mu_j(A)}{2^j} < \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mu_j(B)}{2^j} = \mu(B)$.

Con ello tenemos una función de Whitney para 2^X. ■

Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Un elemento *minimal* de $\mathcal{C}$ es un $E \in \mathcal{C}$ tal que no hay elementos de $\mathcal{C}$ contenidos propiamente en E. Un elemento *maximal* de $\mathcal{C}$ es un $F \in \mathcal{C}$ tal que no hay elementos de $\mathcal{C}$ que contengan propiamente a F.
Usando la compacidad del hiperespacio y la existencia de una función de Whitney demostraremos el siguiente resultado.

Lema 1.10 *(del Máximo-Mínimo). Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X , entonces hay un elemento maximal de $\mathcal{C}$ y hay un elemento minimal de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.9 existe una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0,1]$. Como $\mathcal{C}$ es cerrado y por el Teorema 0.1, 2^X es compacto, entonces $\mathcal{C}$ es compacto. Por la continuidad de μ, $\mu(\mathcal{C})$ alcanza su mínimo. Sea $m = \min(\mu(\mathcal{C}))$. Entonces existe $H \in \mathcal{C}$ tal que $\mu(H) = m$. Si existiera $E \in \mathcal{C}$ tal que E está contenido propiamente en H, entonces $\mu(E) < \mu(H) = m$. De esta contradicción se sigue que H es un elemento minimal de $\mathcal{C}$.

Análogamente se muestra que existe un elemento maximal. ■

Lema 1.11 *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Si $\mathcal{C} = \{F \in C(X) \mid A \subsetneq F\}$, entonces $\mathcal{C}$ es cerrado.*

Demostración. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ una sucesión convergente a un $F \in C(X)$. Sean $x \in A$ y V un conjunto abierto tales que $x \in V$. Como $A \subset F_n$ para toda n, entonces $V \cap F_n \neq \emptyset$ para toda n. Por lo tanto $A \subset \liminf F_n = F$. ■

Un continuo X es *irreducible con respecto a un subconjunto* A si no hay subcontinuos propios de X que contienen a A.

Teorema 1.12 *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces existe un continuo irreducible con respecto a A.*

Demostración. Por el Lema 1.11, $\mathcal{C} = \{F \in C(X) : A \subsetneq F\}$ es cerrado en 2^X. Por el Lema 1.10, existe un elemento minimal de $\mathcal{C}$. Es decir, existe $H \in \mathcal{C}$ tal que no hay elementos de $\mathcal{C}$ que estén contenidos propiamente en H. El conjunto H es un continuo irreducible con respecto a A. ■

1.2 Composantes

Recordemos que un continuo X es *irreducible con respecto a un subconjunto* A, si no hay subcontinuos propios de X que contengan a A.

Un continuo es *irreducible* si es irreducible respecto a un subconjunto que contiene exactamente dos puntos.

En este caso diremos también que X *es irreducible entre* r *y* s. Si R y S son subconjuntos de X, diremos que un subcontinuo Y de X *es irreducible de* R *a* S si existen $r \in R$ y $s \in S$ tales que Y es irreducible entre r y s (observemos que, implícitamente estamos pidiendo que $r, s \in Y$).

Diremos que p *es un punto de irreducibilidad de* X, si X es irreducible entre p y algún otro punto q de X.

Definición. Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. La *composante de* p en X, denotada por $K(p)$, se define por:

$$K(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in A\}$$

Notamos que para un continuo no degenerado X y un punto $p \in X$, la composante de p en X es un subconjunto conexo de X, pues es la unión de subconjuntos conexos, los cuales contienen a p.
Además $K(p) = \{x \in X : X \text{ no es irreducible entre } p \text{ y } x\}$.
Con ello tenemos que $X \setminus K(p) = \{x \in X : X \text{ es irreducible entre } p \text{ y } x\}$.

Teorema 1.13 *Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, entonces p es un punto de irreducibilidad de X si y sólo si $K(p) \neq X$.*

Demostración. Notemos que p es un punto de irreducibilidad de X si y sólo si X es irrreducible entre p y q, para algún $q \in X$. Esta última condición equivale a decir que no existe subcontinuo propio de X que contenga a $\{p, q\}$ o, en otras palabras, $q \notin K(p)$ y con ello tenemos que $X \neq K(p)$. ■

Corolario 1.14 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) un continuo no degenerado X es irreducible,
ii) alguna composante de X es un subconjunto propio de X,
iii) existe un punto p de irreducibilidad de X,
iv) $X \neq K(p)$, para algún punto p de X.

Para los siguientes resultados usaremos el "teorema de comportamiento en la frontera" (Teorema 0.2).

Sean S un espacio topológico y H un subconjunto conexo de S.

Recordamos que la *componente* de S que contiene a H es el subconjunto conexo maximal que contiene a H. Notamos que cualquier componente de S es un subconjunto cerrado de S (pues la cerradura de un conexo es conexa).

Y también recordamos que la *Frontera* de H (denotada por $Fr_s(H)$ o sólo $Fr(H)$) está definida como $Fr(H) = \overline{H} \cap \overline{S \setminus H}$.

Teorema 1.15 [*Nadler, Teorema 6.3, pág. 88*]. *Sean (S, τ) un espacio topológico conexo y C un subconjunto conexo de S tales que $S \setminus C = A \cup B$, con A, B subconjuntos separados en S. Entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Además, si S y C son continuos, $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.*

Demostración. Supongamos que $A \cup C = K \cup L$, con K y L subconjuntos separados y no vacíos, es decir, $\overline{K} \cap L = \emptyset = \overline{L} \cap K$. Entonces, como C es conexo, $C \subseteq K$ ó $C \subseteq L$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $C \subseteq K$. Entonces, $L \subseteq A$, por ello $\overline{L} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap L = \emptyset$. Así $L \cap \overline{(B \cup K)} = L \cap (\overline{B} \cup \overline{K}) = (L \cap \overline{B}) \cup (L \cap \overline{K}) = \emptyset$ y $\overline{L} \cap (B \cup K) = (\overline{L} \cap B) \cup (\overline{L} \cap K) = \emptyset$ es decir, L y $(B \cup K)$ están separados, mientras que $S = L \cup (B \cup K)$. Contradiciendo la conexidad de S. De esta contradicción se sigue que $A \cup C$ es conexo. De forma análoga tenemos que $B \cup C$ es conexo. Ahora si S y C son continuos, tenemos que $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados, pues si $x \in \overline{A} \cup C$, $x \in S = (A \cup C) \cup B$, pero $B \subseteq X \setminus C$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset$ así $x \in A \cup C$ con lo cual se tiene que $\overline{A} \cup C \subseteq A \cup C$ por lo tanto $A \cup C$ es cerrado. De manera semejante $B \cup C$ es cerrado. Pero además $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos, por lo tanto son continuos. ■

Recordamos que un espacio topológico X es *normal*, si dados cerrados y ajenos $F, G \subset X$, existen abiertos ajenos U y V, tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. El espacio X es *completamente normal* si dados subconjuntos separados $F, G \subseteq X$, entonces existe un abierto U en X, tal que $F \subseteq U$ y $\overline{U} \cap G = \emptyset$. Un espacio topológico X es *hereditariamente normal* si cada subespacio de X es normal.

Dados F y G cerrados ajenos y no vacíos en un espacio métrico X, definimos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ como $\varphi(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,G)+d(x,F)}$. El lector puede comprobar fácilmente que φ es continua y que está bien definida, pues F y G son cerrados y ajenos. Además $\varphi(F) = \{0\}$ y $\varphi(G) = \{1\}$, así que $U = \varphi^{-1}\left([0, \frac{1}{4})\right)$ y $V = \varphi^{-1}\left((\frac{3}{4}, 1]\right)$ son abiertos ajenos, tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Así que cada espacio métrico es normal.

Como cada subespacio de un espacio métrico es métrico, entonces un espacio métrico es hereditariamente normal.

Teorema 1.16 *Todo espacio hereditariamente normal es completamente normal. Es decir, si X es un espacio hereditariamente normal y $F, G \subseteq X$ son subconjuntos separados. Entonces existe un abierto U en X, tal que $F \subseteq U$ y $\overline{U} \cap G = \emptyset$.*

Demostración. Sea $E = X \setminus \overline{F} \cap \overline{G}$, entonces $\overline{F} \setminus \overline{G}$ y $\overline{G} \setminus \overline{F}$ son cerrados ajenos en E. Como el espacio X es hereditariamente normal, entonces hay un abierto U en E (y en X) tal que $\overline{F} \setminus \overline{G} \subseteq U$ y $\overline{U} \cap E \cap (\overline{G} \setminus \overline{F}) = \emptyset$. Ahora $F \cap \overline{G} = \emptyset$, $F \subseteq \overline{F} \setminus \overline{G} \subseteq U$. Como $G \cap \overline{F} = \emptyset$, tenemos $\overline{U} \cap G \subseteq \overline{U} \cap \overline{G} \setminus \overline{F} \subseteq \overline{U} \cap E \cap \overline{G} \setminus \overline{F} = \emptyset$. ■

Teorema 1.17 *Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, entonces $X \setminus K(p)$ es conexo.*

Demostración. Si $K(p) = X$, entonces $X \setminus K(p) = \emptyset$ y con ello es conexo. Si no, por el Corolario 1.14, p es un punto de irreducibilidad y X es irreducible entre p y algún otro punto q de X. Supongamos que $X \setminus K(p)$ no es conexo. Entonces $X \setminus K(p) = M \cup N$, donde los conjuntos M y N están mutuamente separados y son no vacíos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $q \in M$. Como X es un espacio métrico, entonces X es hereditariamente normal, entonces por el Teorema 1.16, existe un abierto U de X tal que $M \subseteq U$ y $\overline{U} \cap N = \emptyset$, así $(\overline{U} \setminus U) \cap (M \cup N) = \emptyset$. Sea Q la componente de U que contiene a q, notamos que $U \neq X$ ya que $\overline{U} \cap N = \emptyset$. Entonces por el Teorema 0.2, tenemos que $\overline{Q} \setminus U \neq \emptyset$. Sea $r \in \overline{Q} \setminus U$. Entonces como $\overline{Q} \subseteq \overline{U}$, $r \in \overline{U} \setminus U$. Como $X \setminus K(p) = M \cup N$ y $(\overline{U} \setminus U) \cap (M \cup N) = \emptyset$, $r \in K(p)$. Por lo tanto existe un subcontinuo propio A de X, tal que $p, r \in A$. Como $r \in \overline{Q}$ que es un continuo, $A \cup \overline{Q}$ es un continuo; por lo tanto p y q son elementos de $A \cup \overline{Q}$, y como X es irreducible entre p y q, $A \cup \overline{Q} = X$. Ahora, $\overline{Q} \cap N = \emptyset$ ya que $\overline{U} \cap N = \emptyset$ y $\overline{Q} \subseteq \overline{U}$. Como $A \cup \overline{Q} = X$, entonces $N \subseteq A$. Notamos que $A \subseteq K(p)$, entonces $N = \emptyset$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $X \setminus K(p)$ es conexo. ■

Teorema 1.18 *Sea X un continuo irreducible entre a y b y sea C un subcontinuo tal que $a \in C$ entonces $X \setminus C$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus C$ no es conexo; entonces existen dos abiertos P y Q, tales que $X \setminus C = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$ y $P \neq \emptyset \neq Q$. Así, por el Teorema 1.15, $\overline{P} \cup C$ y $\overline{Q} \cup C$ son subcontinuos propios de X. Pero $b \in P$ o $b \in Q$, en ambos casos se contradice la irreducibilidad de X. Así tenemos que $X \setminus C$ es conexo. ■

Teorema 1.19 [*Kuratowski 2, Teorema 4, pág. 193*]. *Sea X un continuo irreducible entre a y b, y sean A y B dos subcontinuos que contienen a a y a b, respectivamente, entonces el conjunto $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $A \cap B = \emptyset$, pues de lo contrario $X = A \cup B$. Sea $C = X \setminus A$, que por el teorema anterior debe ser conexo. Si suponemos que $X \setminus (A \cup B)$ no es conexo, entonces $C \setminus B = U \cup V$, con $U \cap V = \emptyset$ y U y V abiertos y no vacíos. (Mostraremos que $V = \emptyset$ ó $U = \emptyset$). Por el Teorema 1.15 $B \cup U$ y $B \cup V$ son conexos. Como $X = A \cup B \cup \overline{X \setminus (A \cup B)}$ y $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $A \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} \neq \emptyset$, es decir $A \cap \overline{U \cup V} \neq \emptyset$. Entonces $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$ ó $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Supongamos que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Entonces $A \cup \overline{U} \cup B$ es conexo y contiene a a y a b, por ello $A \cup \overline{U} \cup B = X$, y $X \setminus (A \cup B) \subset \overline{U}$. Como $V \subset C \setminus B = \overline{X \setminus (A \cup B)}$, entonces $V \subset \overline{U}$. Pero $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto $V = \emptyset$. De aquí se sigue que $X \setminus (A \cup B)$ es conexo. ■

Teorema 1.20 *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $K(p)$ de p en X es un conjunto denso en X.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío en X, Veremos que $U \cap K(p) \neq \emptyset$. Por regularidad, existe un abierto no vacío V en X tal que $\overline{V} \subseteq U$. Si $p \in \overline{V}$, entonces $p \in U \cap K(p)$. Ahora, supongamos que $p \notin \overline{V}$. Denotamos $E = X \setminus \overline{V}$. Sea C la componente de E que contiene a p. Como, por el Teorema 0.2, $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y $\overline{C}$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p, $\overline{C} \subseteq K(p)$. Entonces $K(p) \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

Como $\overline{V} \subseteq U$, se concluye que $K(p) \cap U \neq \emptyset$. ■

1.3 Triodos, unicoherencia e irreducibilidad.

Un *triodo* es un continuo X que contiene un subcontinuo H tal que $X \setminus H$ es la unión de tres conjuntos no vacíos y mutuamente separados en X.
Un *triodo simple* es la unión de tres arcos que tienen un punto final en común p y son mutuamente ajenos excepto en p.
Un continuo M es *unicoherente* si $H \cap K$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos H y K de M tales que $H \cup K = M$.
Un continuo M es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios H y K de M tales que $H \cup K = M$.
M es *indescomponible* si no existen tales subcontinuos.

Teorema 1.21 *Sea X un continuo hereditariamente irreducible. Supóngase que $X = P \cup Q$, donde P y Q son subcontinuos de X y que $P \cap Q = U \cup V$, con U y V subconjuntos mutuamente separados y no vacíos. Entonces P y Q contienen continuos indescomponibles cuya intersección es la unión de dos subconjuntos mutuamente separados contenidos en U y V, respectivamente.*

Demostración. Los continuos P y Q contienen continuos P' y Q', respectivamente, tales que P' es irreducible de U a V y Q' es irreducible de $P' \cap U$ a $P' \cap V$. Entonces $P' \cap Q'$ es la unión de dos conjuntos mutuamente separados U' y V' contenidos en U y V, respectivamente, y P' y Q' son cada uno irreducibles de U' a V'. Supongamos ahora que P' es la unión de dos subcontinuos propios W y Z . Uno de ellos, digamos W, no contiene puntos de V' y el otro no contiene puntos de U'. Por lo tanto $W \cap Z$ no contiene puntos de Q'. De aquí que $W \cap Q'$, $Z \cap Q'$ y $W \cap Z$ son conjuntos cerrados ajenos dos a dos, y ninguno de los continuos W, Z y Q' es un subconjunto de la unión de los otros dos. Entonces el continuo $P' \cup Q'$ no es irreducible, pues dados $x, y \in P' \cup Q' = W \cup Z \cup Q'$, si ambos puntos x, y están en un subcontinuo P' o Q', $P' \cup Q'$ no es irreducible entre x y y. Así uno de ellos digamos x está en P' y el otro en Q', entonces $x \in W$ o $x \in Z$, si $x \in W$ entonces $W \cup Q'$ es un subcontinuo propio de $P' \cup Q'$ que contiene a x y a y, si $x \in Z$, entonces $Z \cup Q'$ es un subcontinuo propio de $P' \cup Q'$ que contiene a x y a y. Por ello $P' \cup Q'$ no puede ser irreducible. Contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto P' y Q' son indescomponibles. ■

Así, si un continuo es hereditariamente irreducible y no es unicoherente, entonces no es hereditariamente descomponible.

Para el último resultado importante de esta sección usaremos los siguientes teoremas:

Teorema 1.22 [*Miller, Teorema 1.2. pág. 180*]. *Un continuo M es atriódico y hereditariamente unicoherente si y sólo si M es hereditariamente irreducible y si a, b son dos puntos de M entonces hay un único continuo irreducible que los contiene.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Se sigue del Teorema 0.4 (Teorema de Sorgenfrey), que M es hereditariamente irreducible. Sean $a, b \in M$ y supongamos que H y K son subcontinuos irreducibles entre a y b. Como M es hereditariamente unicoherente. Entonces $H \cap K$ es conexo. La irreducibilidad de H y K implica que $H \cap K = H = K$.

$\Leftarrow]$ Es claro que un triodo no es irreducible, pues si T es un triodo, entonces existe un subcontinuo P de T tal que $T \backslash P = Q \cup (R \cup S)$ con Q, R, S no vacíos y mutuamente separados. Además por el Teorema 1.15 $P \cup Q$ y $P \cup (R \cup S)$ son subcontinuos, pero también $P \cup S$ y $P \cup (Q \cup R)$, $P \cup R$ y $P \cup (Q \cup S)$ son subcontinuos y cada uno de ellos es propio. Ahora veamos que T no es irreducible observando que ningún $x \in T$ es punto de irreducibilidad. Sea $x \in T = P \cup Q \cup R \cup S$. Si $x \in P$, entonces $P \cup Q \subset K(x)$ ($K(x)$ la composante de x), $P \cup (R \cup S) \subset K(x)$, así $T = (P \cup Q) \cup (P \cup (R \cup S)) \subseteq K(x)$ y por el Teorema 1.13 x no es un punto de irreducibilidad. Ahora si $x \in Q$, como $P \cup Q$, $P \cup (Q \cup R)$ y $P \cup (Q \cup S)$ están contenidos en la composante de x, entonces $T = (P \cup Q) \cup (P \cup (Q \cup R)) \cup (P \cup (Q \cup S)) \subseteq K(x)$ y también por el Teorema 1.13 x no es un punto de irreducibilidad. Análogamente, si $x \in R$ o si $x \in S$, se tiene que no es punto de irreducibilidad. Así T no tiene puntos de irreducibilidad.

Así M no contiene triodos. Supongamos que M contiene un continuo H que no es unicoherente. Entonces $H = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de H cuya intersección no es conexa. Sean a y b puntos en diferentes componentes de $A \cap B$. Entonces existen continuos $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ tales que A_1 y B_1 son irreducibles entre a y b. Notemos que $A_1 \neq B_1$ ya que por ser conexo, A_1 debe contener puntos de A que no están en B (y viceversa). ■

Corolario 1.23 [*Miller, Corolario, pág. 180*]. *Sea X un continuo hereditariamente descomponible, entonces X es hereditariamente irreducible si y sólo si es atriódico y hereditariamente unicoherente.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea X un continuo hereditariamente descomponible y hereditariamente irreducible, por el Teorema 1.21 tenemos que X es hereditariamente unicoherente. Por el Teorema 1.22 sólo bastará demostrar que dados dos puntos p y q de X, hay un único subcontinuo irreducible que los contiene. Supongamos que existen dos subcontinuos distintos P y Q de X que son irreducibles de p a q. Ahora bien, como X es hereditariamente unicoherente, $P \cap Q$ es conexo. Luego $P \cap Q$ es un subcontinuo de X tal que $p, q \in P \cap Q$. Como $P \cap Q \subset P$ y P es irreducible de p a q, resulta que $P \cap Q = P$. De manera similar, obtenemos que $P \cap Q = Q$. Luego $P = Q$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow]$ Se sigue del Teorema 1.22. ■

Capítulo 2

DESCOMPOSICIÓN DE CONTINUOS

Definición: Sean (S,τ) un espacio topológico y $\mathbb{D}$ una colección de subconjuntos no vacíos de S, mutuamente ajenos y tales que $\bigcup_{D\in\mathbb{D}} D = S$. ($\mathbb{D}$ es llamada una *partición* de S). Sea $T(\mathbb{D}) = \left\{\mathcal{U} \subset \mathbb{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \tau\right\}$.

Notamos que $T(\mathbb{D})$ es una topología para $\mathbb{D}$. Más aún, si $\pi : S \to \mathbb{D}$ denota la función natural definida en cada $x \in S$ por:

$\pi(x) =$ el único $D \in \mathbb{D}$ tal que $x \in D$, entonces

por definición de $T(\mathbb{D})$, esta topología de $\mathbb{D}$ hace que π sea continua.

El espacio $(\mathbb{D}, T(\mathbb{D}))$ es llamado un *espacio de descomposición* de S, o más simplemente una *descomposición* de S.

Definición. Sea (S,τ) un espacio topológico. Una partición $\mathbb{D}$ de S es llamada *semicontinua superiormente* si siempre que $D \in \mathbb{D}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathbb{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset V$.

Además, el abierto V se puede ver como $\bigcup\{D : D \in \mathbb{D},\ D \cap V \neq \emptyset\}$.

Usaremos los siguientes resultados sobre las descomposiciones.

Teorema 2.1 [*Nadler, Proposición 3.9, pág. 40*]. *Cualquier descomposición semicontinua superiormente de un espacio métrico compacto es Hausdorff.*

Demostración. Sean (S,τ) un espacio métrico compacto, $\mathbb{D}$ una descomposición semicontinua superiormente de S y $\pi : S \to D$ la función natural. Para probar que $(\mathbb{D}, T(\mathbb{D}))$ es Hausdorff, sean $D_1, D_2 \in \mathbb{D}$, tales que $D_1 \neq D_2$. Como D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados disjuntos de S y S es normal, existen $U_1, U_2 \in \tau$, ajenos, tales que $D_i \subset U_i$ para cada $i = 1, 2$. Como $\mathbb{D}$ es semicontinua superiormente, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $D_i \subset V_i \subset U_i$. Como $\pi^{-1}(\pi(V_i)) = V_i$, $\pi(V_i)$ es abierto en $\mathbb{D}$ y además $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$, por lo tanto $(\mathbb{D}, T(\mathbb{D}))$ es Hausdorff. ∎

Teorema 2.2 *Sean (S, τ) un continuo y $\mathbb{D}$ una descomposición de S tales que cada $D \in \mathbb{D}$ es un cerrado de S. Entonces $\mathbb{D}$ es semicontinua superiormente si y sólo si dadas dos sucesiones de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidas en S tales que:*

(1) *$a_n \to a$ y $b_n \to b$, $a, b \in S$ y*

(2) *para cada $n \in N$, existe un elemento G_n de $\mathbb{D}$ que contiene tanto a a_n como a b_n.*

Entonces a y b pertenecen al mismo elemento de $\mathbb{D}$.

Demostración. Sea $\pi : S \to \mathbb{D}$ la función natural.

$\Rightarrow]$ Tomemos dos sucesiones de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen (1) y (2). Sean $\pi(a) = G_a$ y $\pi(b) = G_b$. Usando la continuidad de π, $\lim_{n\to\infty} G_n = G_b$ y $\lim_{n\to\infty} G_n = G_a$. Por el Teorema 2.1, como $\mathbb{D}$ es semicontinua superiormente, el espacio $(\mathbb{D}, T(\mathbb{D}))$ es Hausdorff así tenemos que $G_a = G_b$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\mathbb{D}$ no es una descomposición semicontinua superiormente. Entonces usando (3) del Teorema 0.3, existen $G \in \mathbb{D}$ y V abierto en S tales que $G \subsetneq V$ y, para cada abierto U que satisface $G \subsetneq U \subsetneq V$, existe $G_U \in \mathbb{D}$ con las siguientes propiedades:

i) $G_U \cap U \neq \emptyset$ y

ii) $G_U \cap (S \setminus V) \neq \emptyset$.

Nótese que G no es abierto en S (si lo fuera, $G = U$ no satisface *(ii)*).

Sea $U_n = N_d\left(\frac{1}{n}, G\right)$.

Existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $U_n \subsetneq V$, y es claro que $G \subsetneq U_n$. Así que para cada U_n, $n \geq N$ existe $G_n \in \mathbb{D}$ con las propiedades *i)* y *ii)*. Como $G_n \cap (S \setminus V) \neq \emptyset$, $G_n \neq G$.

Por la condición *i)*, $G_n \cap U_n \neq \emptyset$.

Sea $a_n \in G_n \cap U_n$ y $b_n \in G_n \cap (S \setminus V)$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a a y b, respectivamente. Es claro que $a \in G$, y ya que $b \in S \setminus V \subsetneq S \setminus G$, $b \notin G$. Contradiciendo que a y b pertenecen al mismo elemento de $\mathbb{D}$. Por lo tanto $\mathbb{D}$ es semicontinua superiormente. ∎

Teorema 2.3 [*Moore, Teorema 40, (1, Capítulo V)*]. *Sea $\mathbb{G}$ una colección de continuos ajenos dos a dos cuya unión es un continuo M. Supongamos que cada dos elementos de $\mathbb{G}$ se puede separar en M por algún otro elemento de $\mathbb{G}$. Entonces $\mathbb{G}$ es una colección semicontinua superiormente.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{G}$ no es semicontinua superiormente. Entonces por el Teorema 2.2, existen dos sucesiones de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidas en M tales que:

(1) $a_n \to a$ y $b_n \to b$, $a, b \in M$;

(2) para cada $n \in N$, existe un elemento G_n de $\mathbb{G}$ que contiene tanto a a_n como a b_n;

(3) a y b no pertenecen al mismo elemento de $\mathbb{G}$.

Sean G_a y G_b los elementos de $\mathbb{G}$ que contienen a y b, respectivamente. Como $G_a \neq G_b$, por hipótesis existe un elemento G de la colección $\mathbb{G}$ tal que $M \setminus G$ es la unión de dos conjuntos mutuamente separados M_a y M_b que contienen a G_a y a G_b, respectivamente. Cada continuo de la sucesión G_1, G_2, $\cdots$ es un subconjunto de M_a o de M_b. Por lo tanto existe una sucesión infinita de números distintos $n_1, n_2, n_3, \cdots$ tal que o todos los continuos $G_{n_1}, G_{n_2}, G_{n_3}, \cdots$ son subconjuntos de M_a o todos ellos son subconjuntos de M_b. En el primer caso, puesto que el punto b es el punto límite de la sucesión de puntos $b_{n_1}, b_{n_2}, b_{n_3}, \cdots$ los cuales están en M_a, se tiene que $b \in \overline{M_a}$, pero $b \in G_b \in M_b$ y $\overline{M_a} \cap M_b = \emptyset$. El segundo caso es análogo. En ambos casos se obtiene una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{G}$ es una colección semicontinua superiormente. ■

Los lemas que se demuestran a continuación tienen como finalidad describir la estructura de los continuos hereditariamente descomponibles que son irreducibles.

Lema A. *Sea M un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Entonces M contiene dos y únicamente dos subcontinuos ajenos H y K con las siguientes propiedades:*

1.- M es irreducible entre dos puntos si, y sólo si, uno de ellos pertenece a H y el otro a K.

2.- $M \setminus H$ y $M \setminus (H \cup K)$ son conexos.

3.- Si un subcontinuo N de M intersecta a H y a $M \setminus H$, entonces $H \subseteq N$.

4.- Si N es un subcontinuo propio de M y N intersecta tanto a H como a $M \setminus H$, entonces cada subcontinuo L de M que intersecta a N y a K

contiene a $\overline{M \setminus N}$, además $\overline{M \setminus N}$ es un continuo irreducible de N a K.

Demostración. Supongamos que M es irreducible de a a b. Sean $H = \{x \in M : M \text{ es irreducible de } b \text{ a } x\}$ y $K = \{x \in M : M \text{ es irreducible de } a \text{ a } x\}$. Es claro que $H = M \backslash K(b)$ y $K = M \backslash K(a)$ ($K(x)$ denota la composante de x en X). Así por el Teorema 1.17, H y K son conexos. Veamos que H y K son ce-rrados. Supongamos que hay un punto $x \in M \setminus H$, el cual es un punto límite de H. Sea L un subcontinuo propio de M que contiene a b y a x. Por ser un subcontinuo propio tenemos que $H \cap L = \emptyset$. Sea N un subcontinuo de M irreducible entre a y x. Entonces $N \cup L = M$ y como $H \cap L = \emptyset$ entonces $H \subseteq N$ y por lo tanto $\overline{H} \subseteq N$. Como N es descomponible $N = N_x \cup N_a$, donde $x \in N_x$ y $a \in N_a$. Afirmamos que N_x contiene un punto $z \in H$, ya que $M \setminus N_a$ es un abierto que contiene a $x \in \overline{H}$ y por lo tanto $(M \setminus N_a) \cap H \neq \emptyset$. Si $z \in (M \setminus N_a) \cap H$, entonces $z \in N_x \cap H$. Pero entonces $L \cup N_x$ sería un subcontinuo propio de M que contiene a b y a $z \in H$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que H contiene todos sus puntos límite. Por lo tanto tenemos que H es cerrado. De manera análoga se tiene que K es cerrado. Nótese que $a \in H$ y $b \in K$. Si $x \in H$, M es irreducible entre b y x, pero M no es irreducible entre a y x, ya que $\{a, x\} \subseteq H$ que es un subcontinuo propio, entonces $x \notin K$, así H y K son ajenos.

1) $\Rightarrow$] Supongamos que M es irreducible entre p y q y supongamos primero que $p \in H$ y que $q \notin K$. Entonces $q \in K(a)$, es decir existe $Q \in C(M)$ tal que $Q \neq M$ y $a, q \in Q$. Entonces $b \notin Q$. Como $a \in H \cap Q$, $H \cup Q \in C(M)$, y $b \notin H \cup Q$, por lo tanto $H \cup Q$ es un subcontinuo propio que contiene a p y a q. Contradiciendo que M sea irreducible entre p y q. Esto demuestra que si $p \in H$, entonces $q \in K$. Análogamente, si $p \in K$, entonces $q \in H$. Supongamos ahora que $p \notin H \cup K$. Entonces $q \notin H \cup K$. Sea $A \in C(M)$ tal que $A \neq M$ y $a, p \in A$. Entonces $b \notin A$. Sea C un subcontinuo propio de M tal que a y $q \in C$. Entonces $b \notin C$ y por lo tanto $A \cup C$ es un subcontinuo propio de M que contiene a p y a q. Entonces M no es irreducible entre p y q. Por lo tanto si M es irreducible entre dos puntos, uno de ellos está en H y el otro en K.

$\Leftarrow$] Sean $p \in H$ y $q \in K$. Entonces $b \notin K(p)$ y $a \notin K(q)$. Por el Teorema 1.13, p y q son puntos de irreducibilidad.

Ahora, sea J un subcontinuo que contiene a p y a q. Supongamos que existe $x \in M \setminus J$. Como H y K son ajenos, entonces $x \notin H$ o $x \notin K$, si $x \notin K$, entonces $x \notin J \cup K$, pero, $J \cup K$ contiene a p y a b, contradiciendo que M es irreducible entre p y b, ahora si $x \notin H$, entonces $x \notin J \cup K$, pero,

$J \cup K$ contiene a q y a a, contradiciendo que M es irreducible entre q y a. Por lo tanto, no existen puntos en $M \setminus J$, entonces $J = M$ y M es irreducible entre p y q.

2) Sean $a \in H$ y $b \in K$. Por ser composantes, $K(a)$ y $K(b)$ son conexos. Como $M \setminus H = K(b)$ y $M \setminus K = K(a)$. Entonces $M \setminus H$ y $M \setminus K$ son conexos y, por el Teorema 1.19, $M \setminus (H \cup K)$ es conexo.

3) Sea N un subcontinuo de M el cual intersecta tanto a H como a $M \setminus H$. Sean $h \in N \cap H$ y $g \in N \cap (M \setminus H)$. Entonces existe $B \in C(M)$, tal que $B \neq M$ y B contiene a g y a b. Es claro que $B \cap H = \emptyset$. Como B y N son continuos y $B \cap N \neq \emptyset$, $B \cup N$ es un subcontinuo que contiene a b y a h, es decir $B \cup N = M$. Pero $B \cap H = \emptyset$, por lo tanto H es un subconjunto de N.

4) Sea N un subcontinuo propio de M el cual intersecta tanto a $M \setminus H$ como a H. Supongamos que L es un subcontinuo de M, el cual intersecta a N y a K. Entonces $N \cup L$ es un subcontinuo de M que intersecta a H y a K, por lo tanto $N \cup L = M$ y L contiene a $M \setminus N$. Así que $\overline{M \setminus N} \subseteq \overline{L} = L$. Mostraremos que $M \setminus N$ es conexo. Por 3) $H \subseteq N$ y, por el Teorema 1.18, $M \setminus N$ es conexo. Así $\overline{M \setminus N}$ es un continuo. Para la última parte, supongamos que existe un subcontinuo propio J de M que intersecta a N y a K, pero que no contiene a $M \setminus N$. Entonces $N \cup J$ es un subcontinuo propio de M que intersecta a H y a K, lo cual contradice la irreducibilidad de M. Con ello tenemos que $\overline{M \setminus N}$ es un continuo irreducible de N a K. ■

Definición. A los subcontinuos H y K descritos en el lema anterior se les llama *subcontinuos finales* de M.

Lema B. *Sea M un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Sean H y K los subcontinuos finales de M descritos en el Lema A y p un punto de $M \setminus (H \cup K)$. Entonces existe un subcontinuo T contenido en $M \setminus (H \cup K)$, que contiene a p y tal que $M \setminus T$ es la unión de dos subconjuntos conexos mutuamente separados U y V que contienen a H y a K, respectivamente, y con las siguientes propiedades:*

1.- $M = \overline{U} \cup \overline{V}$.

2.- $\overline{U}$ es irreducible de H a $\overline{V}$; y $\overline{V}$ es irreducible de K a $\overline{U}$.

3.- Los subcontinuos finales de $\overline{U}$ son H y $T \cap \overline{U}$
Los subcontinuos finales de $\overline{V}$ son K y $T \cap \overline{V}$, y

4.- Cada subcontinuo de M el cual intersecta a H y a $T \cup V$, contiene a $\overline{U}$.

Demostración. Si H y K son los subcontinuos finales de M descritos en el Lema $\mathbb{A}$ y p es un punto de $M \setminus (H \cup K)$, entonces existe un subcontinuo N de M, irreducible de H a p. Por la condición 3 del Lema $\mathbb{A}$, $H \subseteq N$. Sea $Z = M \setminus N$. Por la condición 4 del Lema $\mathbb{A}$, $\overline{Z}$ es un subcontinuo propio irreducible de N a K. Sea $W = M \setminus \overline{Z}$. Aplicando nuevamente la condición 4 del Lema $\mathbb{A}$, $\overline{W}$ es un subcontinuo propio irreducible de H a $\overline{Z}$, $\overline{Z}$ es irreducible de $\overline{W}$ a K, y $M = \overline{Z} \cup \overline{W}$ y por lo tanto $\overline{Z} \cap \overline{W} \neq \emptyset$. Entonces H es un subcontinuo final de $\overline{W}$, sea K' el otro. Por otra parte K es un subcontinuo final de $\overline{Z}$, sea H' el otro. Ya que $\overline{W} \cap \overline{Z} \subseteq H'$ y $\overline{W} \cap \overline{Z} \subseteq K'$, entonces $H' \cup K'$ es un subcontinuo. Sea $T = H' \cup K'$. Como $M = \overline{W} \cup \overline{Z}$, $p \in \overline{W} \cup \overline{Z}$. Si $p \in \overline{W}$, como $\overline{W} \subseteq N$ y N es irreducible de H a p, entonces $p \in K'$. Si $p \in \overline{Z}$, dado que $\overline{Z}$ es irreducible de K a N, $p \in H'$. En cualquier caso p está en T y $T \subseteq M \setminus (H \cup K)$.

Sea $U = \overline{W} \setminus K'$ y $V = \overline{Z} \setminus H'$. Entonces U y V son composantes en $\overline{W}$ y $\overline{Z}$, respectivamente. Por tanto son conexos que contienen a H y K, respectivamente. Además $\overline{U} = \overline{W}$, y $\overline{V} = \overline{Z}$, pues por el Teorema 1.20, las composantes son densas. Así tenemos que:

1.- $M = \overline{W} \cup \overline{Z} = \overline{U} \cup \overline{V}$.

2.- $\overline{U} = \overline{W}$ es irreducible de H a $\overline{Z} = \overline{V}$; y $\overline{V}$ es irreducible de K a $\overline{U}$.

3.- Los subcontinuos finales de $\overline{U} = \overline{W}$ son H y $K' = T \cap \overline{U}$

Los subcontinuos finales de $\overline{V} = \overline{Z}$ son K y $H' = T \cap \overline{V}$, y

4.- Si L es un subcontinuo de M el cual intersecta a H y a $T \cup V$, entonces, como L intersecta a $T \cup \overline{V}$, por el Lema $\mathbb{A}$, L contiene a $\overline{U}$. ■

A cada uno de los subcontinuos T descritos en el Lema anterior lo llamaremos *c-subcontinuo* de M.

Lema $\mathbb{C}$. *Los c-subcontinuos de un continuo hereditariamente descomponible e irreducible M, son ajenos dos a dos.*

Demostración. Supongamos que los c-subcontinuos T y T' de M tienen un punto en común p y que T' contiene un punto q que no está en T. Sean H y K los subcontinuos finales de M. Entonces el conjunto $M \setminus T$ es la unión de dos subconjuntos conexos, mutuamente separados U y V, que contienen a H y K, respectivamente. Análogamente $M \setminus T'$ es la unión de dos subconjuntos conexos, mutuamente separados U' y V' que contienen a H y K, respectivamente. U o V contiene a q, supongamos sin pérdida de generalidad que $q \in U$. Por el Lema $\mathbb{A}$, U contiene un continuo que intersecta a H y contiene a q y por el inciso 4 del Lema $\mathbb{B}$, U contiene a $\overline{U'}$. El continuo $T \cup V$ contiene a p y además por el Lema $\mathbb{B}$, éste contiene a $\overline{V'}$. Pero U y $T \cup V$

son ajenos, mientras $\overline{U'}$ y $\overline{V'}$ se intersectan. De esta contradicción resulta el lema. ∎

Teorema 2.4 *Sea M un continuo hereditariamente descomponible e irreducible de un punto p a un punto q. Sean H y K los subcontinuos finales de M, que contienen p y q, respectivamente, y $\mathbb{G}$ la colección que consiste de H, K y todos los c-subcontinuos de M, entonces $\mathbb{G}$ es una colección semicontinua superiormente de continuos ajenos dos a dos cuya unión es M. Además $(\mathbb{G}, T(\mathbb{G}))$ es un arco de H a K.*

Demostración. De los Lemas $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ se sigue que $\mathbb{G}$ es una colección de continuos ajenos dos a dos, cuya unión es M. Para aplicar el Teorema 2.3, demostraremos que cualesquiera dos elementos de $\mathbb{G}$, están separados por un tercer elemento de $\mathbb{G}$. Sea T un elemento de $\mathbb{G}$ distinto de H y K. Por el Lema $\mathbb{B}$, $M \setminus T$ es la unión de dos conjuntos conexos mutuamente separados U y V que contienen a H y K, respectivamente. Entonces T separa a H de K en M. Sea x un punto de $U \setminus H$, y sea P el elemento de $\mathbb{G}$ que contiene a x. Como P es un subconjunto conexo de $M \setminus T$, entonces P es un subconjunto de U. Por el Lema $\mathbb{B}$, $M \setminus P$ es la unión de dos conjuntos conexos mutuamente separados U' y V', que contienen a H y K, respectivamente. El conjunto $T \cup V$ es un subconjunto conexo de $M \setminus P$, por lo tanto es un subconjunto de V'. Entonces P separa a T de H en M. Similarmente hay un elemento de $\mathbb{G}$, el cual separa a T de K en M. Sean G y G' dos elementos distintos de $\mathbb{G}$, y distintos de H y K. $M \setminus G$ es la unión de dos conjuntos conexos mutuamente separados W y S, que contienen a H y K, respectivamente, y $M \setminus G'$ es la unión de dos conjuntos conexos mutuamente separados W' y S', que contienen a H y K, respectivamente. El continuo G es un subconjunto de W' o de S'. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $G \subset W'$. Entonces $G' \cup S'$, es un subconjunto conexo de $M \setminus G$ y por lo tanto es un subconjunto de S. Como S contiene un punto que no está en $G' \cup S'$, entonces $S \cap W' \neq \emptyset$. Sea $y \in W' \cap S$ y sea Q el elemento de $\mathbb{G}$ que contiene a y. El conjunto Q es un subconjunto conexo de $W' \cap S$. El conjunto $M \setminus Q$ es la unión de dos conjuntos conexos mutuamente separados E y F que contienen H y K, respectivamente. Como $G \cup W$ es un subconjunto conexo de $M \setminus Q$, éste es un subconjunto de E; similarmente, $G' \cup S'$ es un subconjunto de F. Así Q separa a G de G' en M. De esta forma, cualesquiera dos elementos distintos de $\mathbb{G}$ están separados por algún elemento de $\mathbb{G}$ en M. Así por el Teorema 2.3, $\mathbb{G}$ es una colección semicontinua superiormente. Tenemos una descomposición semicontinua superior de un continuo, por el Teorema 0.5, $\mathbb{G}$ es un continuo. Por otra parte, cada elemento del continuo $\mathbb{G}$ distinto de H y K es de corte, por [*Nadler*, Teorema 6.17, pag.96] (Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos que no son de corte), $(\mathbb{G}, T(\mathbb{G}))$ es un arco de H a K. ∎

Para X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua, decimos que f es *monótona* si $f^{-1}(K)$ es un continuo, para cada K subcontinuo de Y.

Sean M y $(\mathbb{G}, T(\mathbb{G}))$ como los descritos en el Teorema 2.4 y sea $\pi : M \to \mathbb{G}$ la función natural, dada por:

$\pi(g) = G$, tal que G es el único elemento de $\mathbb{G}$ que contiene a g.

Entonces es claro que π es una función monótona.

Capítulo 3

LOCALMENTE CONEXOS

En este capítulo clasificaremos a los continuos localmente conexos, 2-equivalentes. De hecho, demostraremos que sólo existen dos de ellos, la curva cerrada simple y el triodo simple.

Teorema 3.1 *Sea M un continuo 2-equivalente que contiene un arco. Entonces M es una curva cerrada simple, un triodo simple o un continuo irreducible.*

Demostración. Asumimos que M es un continuo 2-equivalente el cual contiene un arco. Supongamos que M no es irreducible. Sean p, $q \in M$, y $R = \{p, q\}$, luego R es cerrado. Por el Teorema 1.12, existe un subcontinuo B de M, irreducible con respecto a R. Como M no es irreducible, es 2-equivalente, contiene un arco y B es irreducible, entonces B tiene que ser un arco. Así, para cada dos puntos existe un arco que los contiene, por lo tanto M es arco-conexo. Más aún, M es hereditariamente arco-conexo.

Consideremos ahora dos casos:

Caso 1. M no es unicoherente.

Entonces M es la unión de dos subcontinuos A y B tales que $A \cap B = C$, donde C es disconexo. Sean P y Q dos componentes distintas de C y p y q dos puntos en P y Q, respectivamente. Como p, $q \in A$, existe un arco contenido en A de p a q, y también existe un arco de p a q contenido en B. La unión de estos dos arcos contiene una curva cerrada simple.
Se sigue de aquí, que M contiene una curva cerrada simple y por consiguiente M es una curva cerrada simple.

Caso 2. M es unicoherente.

Entonces aplicando el Teorema 0.4, aquí tenemos un continuo que contiene un arco y que es unicoherente, si no fuera un triodo sería irreducible, por lo tanto es un triodo; sólo hay que demostrar que el triodo contiene un triodo simple.

Por ser M un triodo, M contiene un subcontinuo N tal que $M \setminus N$ es la unión de tres subconjuntos mutuamente separados. Sean A, B y C tres componentes distintas de $M \setminus N$, entonces $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C} \in C(M)$ y, $\overline{A} \cup N$, $\overline{B} \cup N$ y $\overline{C} \cup N \in C(M)$, sean $a \in A \setminus N$, $b \in B \setminus N$, $c \in C \setminus N$ y $m \in N$. Como M es hereditariamente arco-conexo, existen:
un arco A' de a a m,
un arco B' de b a m y
un arco C' de c a m

Si el arco A' y el arco B' sólo se intersectan en m entonces $A' \cup B'$ será un arco que une a a con b.

Sea c'' el primer punto de intersección del arco C' (yendo de c a m) con el arco $A' \cup B'$, sea C'' el arco formado de c'' a c, $C'' \subseteq C \cup N$; entonces los arcos A'' de a a c'', B'' de c'' a b y el arco C'' forman un triodo simple; así M contiene un triodo simple y por lo tanto es un triodo simple.

Si no se da el caso anterior, llamamos n al primer punto de A', yendo de a a m, en el arco B'. Llamamos A'' al arco de a a n y B'' al arco de n a b, entonces $A'' \cup B''$ será ahora un arco de a a b, sea c'' el primer punto de intersección del arco C' con el arco $A'' \cup B''$, yendo de c a m, sea C'' el subarco de C' que va de c'' a c y $C'' \subseteq C \cup N$; entonces los arcos A''' de a a c''en A'', B''' de c'' a b en B'' y el arco C'' forman un triodo simple; así M contiene un triodo simple y por lo tanto es un triodo simple. ∎

Observación: Como un arco no es 2-equivalente, el siguiente resultado es un corolario del teorema anterior:

Teorema 3.2 *Sea M un continuo 2-equivalente y arco-conexo. Entonces M es una curva cerrada simple o un triodo simple.*

Demostración. Basta demostrar que M no es irreducible. Si lo fuera, por ser M arco-conexo, sería un arco. Pero un arco no es 2-equivalente. ∎

Puesto que los continuos localmente conexos son arco-conexos, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *Sea M un continuo 2-equivalente y localmente conexo. Entonces M es una curva cerrada simple o un triodo simple.*

Capítulo 4

DESCOMPONIBLES NO LOCALMENTE CONEXOS

Aquí demostraremos que todos los continuos descomponibles, 2-equivalentes, que contienen arcos y no son localmente conexos, son la cerradura de un rayo topológico (donde un rayo topológico es un espacio homeomorfo a $[0,\infty)$).

Recordemos que un continuo M es *encadenable* si para cada número positivo ε, existe una cantidad finita de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ de diámetro menor que ε, tales que $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = M$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$.

Teorema 4.1 *Sea M un continuo 2-equivalente, descomponible, el cual contiene un arco y no es localmente conexo. Entonces M es irreducible y tiene un subcontinuo final no degenerado. Además M es encadenable.*

Demostración. Sea M un continuo 2-equivalente el cual contiene un arco y no es localmente conexo. Se sigue del Teorema 3.1 que M es irreducible. Como M es 2-equivalente, sus subcontinuos son homeomorfos a M o a un arco, por lo tanto M es hereditariamente irreducible y hereditariamente descomponible. Por lo tanto se satisfacen las condiciones del Lema $\mathbb{A}$, el Lema $\mathbb{B}$ y el Teorema 2.4 del capítulo 2. Si $\mathbb{G}$ es la colección de los subcontinuos finales y los c-subcontinuos, entonces $\mathbb{G}$ es una colección semicontinua superiormente de M y $(\mathbb{G}, T(\mathbb{G}))$ es un arco. Si cada elemento de $\mathbb{G}$ fuera degenerado, entonces M sería un arco. Pero esto contradice que M es 2-equivalente. Así que $\mathbb{G}$ tiene por lo menos un elemento no degenerado T.

Supongamos que ambos subcontinuos finales de M son degenerados, $H = \{p\}$ y $K = \{q\}$ con p, $q \in M$. Se sigue del Lema $\mathbb{B}$, que $T = (\overline{U} \cap T) \cup (\overline{V} \cap T)$. Como T tiene más de un punto y es un continuo, entonces T tiene una infinidad de puntos y por lo tanto o bien $\overline{U} \cap T$ es infinito o bien $\overline{V} \cap T$ es infinito. Digamos $\overline{V} \cap T$ es infinito. Entonces $\overline{V}$ es un subcontinuo irreducible de M cuyos subcontinuos finales son K y $\overline{V} \cap T$. Como M es 2-equivalente y contiene un arco, entonces $\overline{V}$ debe ser homeomorfo a un arco o a M; pero esto no pasa pues $\overline{V}$ contiene un subcontinuo final no degenerado, a diferencia de un arco y de M, contradiciendo nuevamente que M es 2-equivalente. Por lo tanto M contiene un subcontinuo final no degenerado. Además, por ser M hereditariamente irreducible y hereditariamente descomponible, por el Corolario 1.23, M es atriódico y hereditariamente unicoherente. Y por el Teorema 0.7, M es encadenable. ■

Teorema 4.2 *Sea M un continuo 2-equivalente y descomponible el cual contiene un arco y no es localmente conexo y sea H un subcontinuo final de M. Entonces M contiene un subcontinuo propio L que tiene a H como un subcontinuo final y para el cual el otro subcontinuo final es degenerado.*

Demostración. Notemos primero que M es hereditariamente descomponible y hereditariamente irreducible. Sea $\mathbb{G}$ la descomposición semicontinua superiormente descrita en el Teorema 2.4. Entonces $(\mathbb{G}, T(\mathbb{G}))$ es un arco. Sean H y K los subcontinuos finales de M, T un elemento no final de $\mathbb{G}$. Por el Lema $\mathbb{B}$, $T = (\overline{U} \cap T) \cup (\overline{V} \cap T)$. Con $H \subseteq U$ o $H \subseteq V$, U y V abiertos en M. Sean $p' \in U \setminus H$ y $q' \in V \setminus K$, entonces existen ε_1 y ε_2 reales positivos, tales que $\mathbb{B}_{\varepsilon_1}(p') \subseteq U$ y $\mathbb{B}_{\varepsilon_2}(q') \subseteq V \setminus K$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Se sigue del Teorema 0.6, que hay un subcontinuo J de M irreducible de p a q con $d(p, p') < \varepsilon$ y $d(q, q') < \varepsilon$ y J no es irreducible de p a ningún punto, excepto q. Es decir J es un subcontinuo irreducible de M con un subcontinuo final degenerado $\{q\}$ y J es irreducible de p a q. Además p y q están en diferentes elementos G_p y G_q de $\mathbb{G}$, pues como $p \in \mathbb{B}_{\varepsilon}(p') \subseteq U$, G_p está en el subarco (H, T) de $\mathbb{G}$ y como $q \in \mathbb{B}_{\varepsilon}(q') \subseteq V \setminus K$, entonces G_q está en el subarco (T, K) de $\mathbb{G}$, además T separa a G_p de G_q en M.

Sea E la unión de los elementos de $\mathbb{G}$ en el subarco de H a G_p, notemos que $E \subset U$. Entonces $L = J \cup E$ es un subcontinuo irreducible, pues M es hereditariamente irreducible, además, si $\pi : M \to \mathbb{G}$ es la función natural, (pag. 22) se tiene que $\pi(L) = [H, G_q]$. Veamos que si $J \cup E$ es irreducible del punto a al punto b, entonces uno de los puntos a o b es q y el otro está en H. Pues, supongamos que $a \neq q \neq b$ (notemos que a y b no pueden estar ambos en J o en E, pues son subcontinuos propios de L), supongamos sin pérdida de generalidad que $b \in J$, entonces como $b \neq q$ existe un subcontinuo propio Q de J que contiene a p y a b, entonces el subcontinuo $Q \cup E$ es un subcontinuo propio de L que contiene a a y a b contradiciendo que L sea irreducible entre a y b. Entonces, b debe de ser q. Ahora, si $a \notin H$, sean G_a y G_b los elementos de $\mathbb{G}$ que contienen a a y a b, respectivamente, $G_b = G_q$, así G_a está en el subarco (H, G_b) de $\mathbb{G}$, ahora, sea $F = L \cap \pi^{-1}([G_a, G_b])$, por ser π monótona F es un subcontinuo propio de L (pues no contiene a H) que contiene a a y a b. Lo cual contradice la irreducibilidad de L.

Así que L es un continuo irreducible con H como un subcontinuo final y $\{q\}$ como su otro subcontinuo final. Además es un subcontinuo propio, pues $K \cap L = \emptyset$ ■

Teorema 4.3 *Sea M un continuo 2-equivalente y descomponible el cual contiene un arco y no es localmente conexo. Entonces M es la cerradura topológica de un rayo R tal que $\overline{R} \setminus R$ es un subcontinuo final de M.*

Demostración. Se sigue de los dos teoremas anteriores que M tiene un subcontinuo final degenerado $\{p\}$ y un subcontinuo final no degenerado H. Sea $\mathbb{G}$ la descomposición descrita en el Teorema 2.4. Sea A un subcontinuo de M irreducible de p a un punto $x \notin H$. Sea G_x el elemento de $\mathbb{G}$ que contiene a x.

Por el Teorema 4.2, M contiene un subcontinuo J que tiene a $\{p\}$ como un subcontinuo final y para el cual el otro subcontinuo final es degenerado $\{q\}$ y es un subconjunto de un elemento de $\mathbb{G}$ entre G_x y H. Pero entonces J tiene dos subcontinuos finales degenerados, por ello J es un arco además $A \subseteq J$, pues, si existe $a \in A \setminus J$ entonces sea E la unión de los elementos de $\mathbb{G}$ en el subarco de H a G_q, donde G_q es el elemento de $\mathbb{G}$ que contiene a q. Entonces $E \cup J$ es un subcontinuo propio de M que contiene a H y a $\{p\}$, contradiciendo la irreducibilidad de M. Por ello también A es un arco. De aquí se sigue que cada elemento de $\mathbb{G}$ excepto H es degenerado, entonces la función natural (pag. 22) $\pi : M \setminus H \to (0, 1]$ es biyectiva y continua, además si C es un cerrado de $M \setminus H$, se tiene que $C = K \cap (M \setminus H)$ con K un cerrado de M, así $\pi(C) = \pi(K \cap (M \setminus H)) = \pi(K) \cap \pi(M \setminus H)$, pues claramente se tiene que $\pi(K \cap (M \setminus H)) \subseteq \pi(K) \cap \pi(M \setminus H)$ y si $y \in \pi(K) \cap \pi(M \setminus H) = \pi(K) \cap (0, 1]$ entonces $y \neq 0$, es decir, $y = \pi(x)$, con $x \notin K$, así $y \in \pi(K \cap (M \setminus H)) = \pi(C)$, con lo cual tenemos que

$\pi(C) = \pi(K) \cap (0,1]$ que es un cerrado en $(0,1]$, pues es un cerrado en $[0,1]$ (pues $\pi(K)$ es cerrado por ser π cerrada) intersectado con $(0,1]$. Así $\pi : M \setminus H \to (0,1]$ es un homeomorfismo y por lo tanto $M \setminus H$ es un rayo topológico, además $\overline{M \setminus H} = M$. ■

Capítulo 5

EJEMPLOS

En el capítulo anterior vimos que si M es un continuo 2-equivalente, descomponible, que no es localmente conexo y que contiene arcos, entonces M es la unión de un rayo topológico R y un continuo E tal que $\overline{R} \setminus R = E$.

Entonces E debe ser un arco, o debe ser homeomorfo a M.

La cerradura de la curva $sen\frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \pi]$ es un ejemplo familiar donde E es un arco. Presentamos aquí, otro ejemplo muy similar.

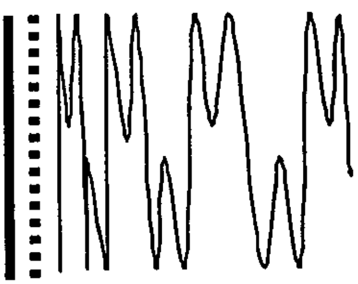


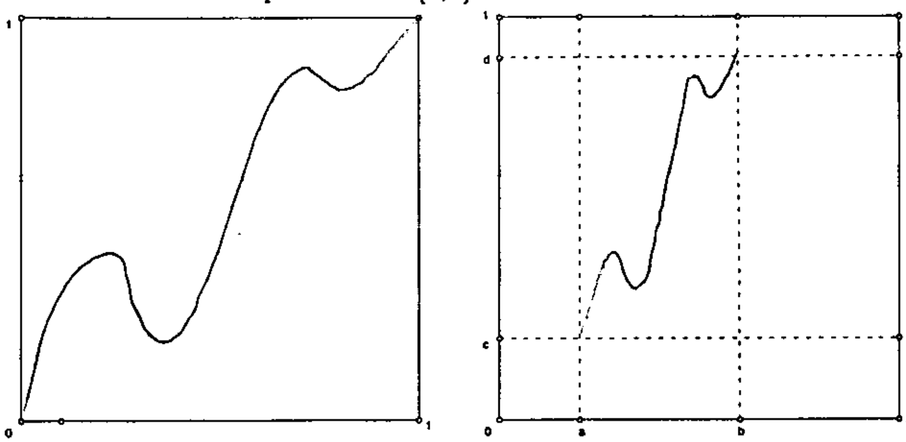
figura 5.1

A continuación daremos la terminología necesaria para presentar algunos ejemplos.

I denotará el intervalo $[0, 1]$.

Un *mapeo* en I significa una función continua de I sobre I.

Sea f un mapeo en I. Sean $a < b$ y $c < d$ denotamos por $\langle f : [a, b] \to [c, d]\rangle$, al mapeo $v \circ f \circ u$, donde v es el mapeo lineal de I sobre $[c, d]$ y u es el mapeo lineal de $[a, b]$ sobre I .



$(figura\ \ 5.2.)$ $\quad\langle f : [a, b] \to [c, d]\rangle$

Consideraremos a las funciones con valores reales de una variable real como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, haremos esto considerándolas como su gráfica en $\mathbb{R}^2$ y frecuentemente diremos que la unión de esos subconjuntos forman una nueva función.

Por un mapeo lineal entendemos una función cuya gráfica es un segmento recto.

Un poco de límites inversos:

Sean $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$ una sucesión de espacios métricos y $\{f_1, f_2, f_3, ...\}$ una sucesión de funciones continuas y suprayectivas con $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$

El espacio *límite inverso* lo definimos por

$$\varprojlim (X_n, f_n) = \{(x_1, x_2, x_3, ...) : \text{para cada } n,\ f_n(x_{n+1}) = x_n\},$$

considerado como subespacio del espacio producto $\prod_{n\geq 1} X_n$.

Aquí usaremos sucesiones $\{I_1, I_2, I_3, ...\}$ de subintervalos de I y $\{f_1, f_2, f_3, ...\}$ sucesión de funciones con $f_i\,(I_{i+1}) = I_i$

Así el espacio límite inverso

$$\varprojlim (I_n, f_n),$$

es un subespacio del espacio producto $\prod_{n\geq 1} I_n$.

Con la distancia entre dos puntos $(x_1, x_2, x_3, ...)$ y $(y_1, y_2, y_3, ...)$, definida por $\sum_{i\geq 1} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$.

Supongamos que se tiene que $f_i(0) = 0$ y $f_i(1) = 1$, para toda i, entonces $(0, 0, ...)$ y $(1, 1, ...)$ serán llamados el *primer* y el *último* puntos de $\varprojlim (I_n, f_n)$, respectivamente y diremos que $\{f_1, f_2, f_3, ...\}$ es una sucesión de mapeos que deja fijos a 0 y a 1.

Si H_1 y H_2 son subcontinuos de $\varprojlim (I_n, f_n) = M$ y son homeomorfos a M, entonces decimos que H_1 y H_2 *están unidos extremo a extremo* si existen homeomorfismos h_1 y h_2 de M sobre H_1 y H_2, respectivamente y $p \in M$ tales que $H_1 \cap H_2 = \{p\}$, $h_1^{-1}(p)$ es el último punto de M y $h_2^{-1}(p)$ es el primer punto de M.

Sea $\varprojlim (I_n, f_n) = M$ donde $\{f_1, f_2, f_3, ...\}$ es una sucesión de mapeos en I, fijos en 0 y 1 y sean $p, q \in M$.

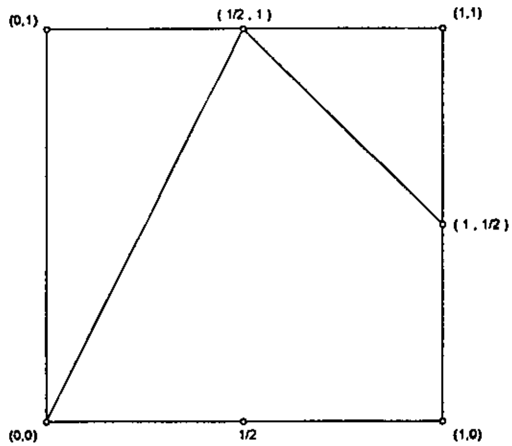
Diremos que H es *homeomorfo* a M *desde* p si hay un homeomorfismo de M sobre H que mapea el primer punto de M sobre p.

Diremos que H es *homeomorfo* a M *hasta* q si hay un homeomorfismo de M sobre H que mapea el último punto de M sobre q.

5.1 EJEMPLO 1. (Bennett).

Construiremos un ejemplo de un continuo descomponible, 2-equivalente M, el cual es la cerradura de un rayo topológico R tal que $\overline{R} \setminus R$ es homeomorfo a M.

Sea g el mapeo en I (figura 5.3) cuya gráfica contiene los puntos $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y que es lineal en los intervalos $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$.



$(figura\ 5.3)$ función g

Para cada $i \geq 0$, sea $g_i = \left\langle g : \left[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right] \to \left[1 - \frac{1}{2^i}, 1\right]\right\rangle$,
i.e.

La gráfica de g_o contiene a $(0,0)$, $\left(\frac{1}{4},1\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y es lineal en los intervalos $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ y $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$,

La gráfica de g_1 contiene a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{8},1\right)$ y $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ y es lineal en los intervalos $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$ y $\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$,

La gráfica de g_2 contiene a $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{13}{16},1\right)$ y $\left(\frac{7}{8},\frac{7}{8}\right)$ y es lineal en los intervalos $\left[\frac{3}{4},\frac{13}{16}\right]$ y $\left[\frac{13}{16},\frac{7}{8}\right]$,

$\vdots$

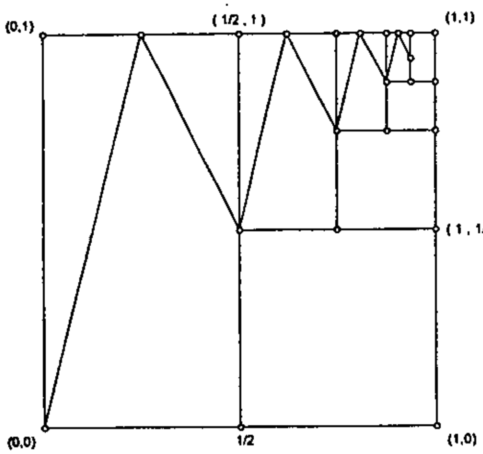
La gráfica de g_n contiene a $\left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n+1}}}{2},1\right)$ y

$\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ y es lineal en los intervalos $\left[1-\frac{1}{2^n}, \frac{1-\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n+1}}}{2}\right]$ y $\left[\frac{1-\frac{1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n+1}}}{2}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$,

$\vdots$

Sea f la función cuya gráfica es la unión de las gráficas de todos los g_i y el conjunto con un solo punto $\{(1,1)\}$. Es decir

$f=\bigcup_{i\geq 0} g_i \cup \{(1,1)\}$, es la función cuya gráfica se ve en la figura 5.4.



$(figura\ 5.4)$ función f

El ejemplo de Bennett es el límite inverso $\varprojlim\{I,f\}$. Probaremos que este límite inverso es la cerradura de un rayo topológico $\mathcal{R}$ y que $\overline{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}$ es homeomorfo a $\overline{\mathcal{R}}$.

Sea $M=\varprojlim\{I,f\}$.

Para cada entero positivo n, sea

$$\alpha_n=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in M : x_n\in\left[\,0,\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Si $x\in\alpha_n$, entonces $x_n\in[0,\frac{1}{2})$ y $x_{n+1}\in[0,\frac{1}{8})\subset[0,\frac{1}{2})$. Así que $x\in\alpha_{n+1}$. Tenemos entonces que $\alpha_n\subset\alpha_{n+1}$ para toda n.

Sea π_n la n-ésima proyección de M en I definida por:

$\pi_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = x_n$, $\pi_n|_{\alpha_n}$ es un homeomorfismo de α_n en $[0, \frac{1}{2})$, pues cada coordenada de un elemento de α_n está bien determinada por la coordenada n-ésima.

Así, cada α_n es homeomorfo a $[0, \frac{1}{2})$ y veremos ahora que $\mathcal{R} = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \ldots \cup \alpha_n \cup \ldots$, es un rayo topológico. Notemos que $\mathcal{R} = \alpha_1 \cup (\alpha_2 \setminus \alpha_1) \cup (\alpha_3 \setminus \alpha_2) \cup \ldots \cup (\alpha_n \setminus \alpha_{n-1}) \cup \ldots$. Además $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \alpha_1$ si y sólo si $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$ y para $n \geq 2$, $x \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$ si y sólo si $x_n \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$.

Definimos $\sigma : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ como

$$\sigma(x) = \begin{cases} x_1, & \text{si } x \in \alpha_1 \\ x_n + \frac{3(n-1)}{8}, & \text{si } x \in (\alpha_n \setminus \alpha_{n-1}),\, n \in \mathbb{N},\, n > 1 \end{cases}$$

así observamos que:

$\sigma(\alpha_1) = [0, \frac{1}{2}) = B_1$
$\sigma(\alpha_2 \setminus \alpha_1) = [\frac{1}{2}, \frac{7}{8}) = B_2$
$\sigma(\alpha_3 \setminus \alpha_2) = [\frac{7}{8}, \frac{10}{8}) = B_3$
$\vdots$
$\sigma(\alpha_n \setminus \alpha_{n-1}) = [\frac{3n-2}{8}, \frac{3(n+1)-2}{8}) = B_n$
$\vdots$

Se sigue de aquí que la función σ es suprayectiva, ya que $[0, \infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Veamos que σ es inyectiva. Debido a que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, la igualdad $\sigma(x) = \sigma(y)$ implica $x, y \in \alpha_1$ o $x, y \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$, para alguna $n > 1$, y por lo tanto $\sigma(x) = x_1 = y_1 = \sigma(y)$, en el primer caso y $\sigma(x) = x_n + \frac{3(n-1)}{8} = y_n + \frac{3(n-1)}{8} = \sigma(y)$, en el segundo caso. Así en ambos casos $x_n = y_n$ y como $\pi_n|_{\alpha_n}$ es un homeomorfismo, $x = y$.

Demostraremos ahora que σ es continua en cada $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Supongamos que $x \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y sea $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ tal que $d(x, y) < \delta$. Consideremos primero, el caso en que $y_n \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$. Entonces $y \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$ y como $\frac{|x_n - y_n|}{2^n} < d(x, y)$. Entonces $|x_n - y_n| < \varepsilon$. Por otra parte $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |x_n - y_n|$, así que $|\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon$. Ahora, como $x \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$, entonces $x_n \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$. Si $x_n \neq \frac{1}{8}$, tomamos $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{|x_n - \frac{1}{8}|}{2^n}, \frac{|\frac{1}{2} - x_n|}{2^n}\right\}$. Así, si $d(x, y) < \delta$, entonces $\frac{1}{2^n}|x_n - y_n| < \delta$, lo que implica que $y_n \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ y por lo tanto $y \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$ y $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |x_n - y_n| < \varepsilon$. Si $x_n = \frac{1}{8}$, tomamos $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{8(2^n)}, \frac{1}{8(2^n)}\right\}$. Sea $y \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

tal que $d(x,y) < \delta$. Entonces $|x_n - y_n| < \frac{1}{8}$, así que $y_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$. Si $y_n \geq \frac{1}{8}$, entonces nuevamente $|\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon$. Si $y_n < \frac{1}{8}$, entonces $y_{n-1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left|y_{n-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x_{n-1} - y_{n-1}|}{2^{n-1}} < \frac{1}{8(2^n)}$, y de aquí $|x_{n-1} - y_{n-1}| < \frac{1}{16}$, así que $y_{n-1} \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto
$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \left|x_n + \frac{3(n-1)}{8} - \left(y_{n-1} + \frac{3(n-2)}{8}\right)\right| = \left|x_n - y_{n-1} + \frac{3}{8}\right| = \left|\frac{1}{2} - y_{n-1}\right|$. Pero $\left|\frac{1}{2} - y_{n-1}\right| = |x_{n-1} - y_n| < \frac{\varepsilon}{16} < \varepsilon$. Por lo tanto σ es continua.

Con el fin de demostrar que la función $\sigma^{-1} : [0, \infty) \to \mathcal{R}$ es continua, definimos $\lambda : [0, \infty) \to [0, \frac{1}{2})$ como

$\lambda(t) = t$ si $t \in B_1$,

$\lambda(t) = t - \frac{3(n-1)}{8}$ si $t \in B_n$, $n > 1$.

con $B_1 = [0, \frac{1}{2}) = \sigma(\alpha_1)$, $B_n = [\frac{3n-2}{8}, \frac{3(n+1)-2}{8}) = \sigma(\alpha_n \setminus \alpha_{n-1})$.

Es fácil verificar lo siguiente:

1) $\lambda|_{B_n} : B_n \to [0, \frac{1}{2})$ es continua, para toda n.

2) Si $n > 1$, $\frac{1}{8} \leq \lambda(t) < \frac{1}{2}$.

3) Si $t \in B_n$, $\pi_n^{-1}(\lambda(t))$ consta de exactamente un punto en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ y $\sigma^{-1}(t) = \pi_n^{-1}(\lambda(t)) \in \alpha_n \setminus \alpha_{n-1} \subset \mathcal{R}$.

Se sigue de 3) que $\sigma^{-1}|_{B_n}$ es continua para cada n. Puesto que $[0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, bastará probar que σ^{-1} es continua en puntos de la forma $\frac{3n-2}{8}$. Dado $x \in [0, \infty)$ denotaremos $x_n = \pi_n(\sigma^{-1}(x))$. Sea $t = \frac{3n-2}{8}$. Entonces $\frac{1}{8} = \lambda(t) = t_n$, $t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_{n-1} = \frac{1}{2}$ y $t_{n+j} = f^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4^j}\left(\frac{1}{8}\right)$, si $j \geq 1$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta' > 0$ tales que si $\left|u - \frac{1}{2}\right| < \delta'$, entonces $\left|f^k(u) - f^k\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Sea $\delta = \min\left\{\frac{1}{8}, \varepsilon, \delta'\right\}$. Si $s \in [0, \infty)$ y $|s - t| < \delta$, entonces como $\delta \leq \frac{1}{8}$, $s \in B_{n-1} \cup B_n$, ya que $\sigma^{-1}|_{B_n}$ es continua, bastará considerar el caso en que $s \in B_{n-1}$. Probaremos que $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j \in \mathbb{N}$ y con esto quedará probado que $d(\sigma^{-1}(s), \sigma^{-1}(t)) < \varepsilon$. Nótese que $s_{n-1} = \lambda(s) = s - \frac{3(n-1)-2}{8}$, por lo tanto $|s_{n-1} - t_{n-1}| = \left|\left(s - \frac{3(n-1)-2}{8}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|s - \frac{(3n-2)}{8}\right| = |s - t| < \delta \leq \varepsilon$. Además, como $t_{n-1} = \frac{1}{2}$, la elección de δ' implica que $\left|f^k(s_{n-1}) - f^k\left(\frac{1}{2}\right)\right| = |s_{n-1-k} - t_{n-1-k}| < \varepsilon$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n-2$, es decir $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Como $s_{n-1}, t_{n-1} \in [0, \frac{1}{2})$ y $f^{-1}(u) = \frac{u}{4}$ para $u \in [0, \frac{1}{2})$, se tiene que $\left|f^{-k}(s_{n-1}) - f^{-k}(t_{n-1})\right| = \left|\frac{s_{n-1} - t_{n-1}}{4^k}\right| < \frac{\varepsilon}{4^k} < \varepsilon$, para cada $k = 1, 2, \ldots$. Por lo tanto $|s_j - t_j| < \varepsilon$ para $j \geq n$. Con esto se concluye que σ^{-1} es continua.

Nótese que $f([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$, así que podemos definir:

$$K = \varprojlim \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right], f \right\}$$

Entonces $M = \mathcal{R} \cup K$, pues si $x = (x_1, x_2, \cdots) \in M$ y $x_n < \frac{1}{2}$ para alguna n, entonces $x \in \alpha_n \subseteq \mathcal{R}$. Si $x_n \geq \frac{1}{2}$, para toda n, entonces $x \in K$. Claramente $\mathcal{R} \cap K = \emptyset$.

Demostraremos ahora que $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} = K$. Basta demostrar que $K \subseteq \overline{\mathcal{R}}$, para esto observamos que, si $x, y \in M = \varprojlim \{I, f\}$ y, para algún $k \in \mathbb{N}$, $x_k = y_k$, entonces $d(x,y) < \frac{1}{2^k}$.

Sea $x \in K$, entonces $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Por definición de f, $f\left([0,\frac{1}{2})\right) = [0,1]$. Entonces existe $y \in [0, \frac{1}{2})$ tal que $f(y) = x_n$. Así hay un punto p_n en α_{n+1} cuya $(n+1)$-ésima coordenada es y, lo cual implica que $d(x, p_n) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Por lo tanto K es un subconjunto de $\overline{\mathcal{R}}$. Entonces M es la cerradura de un rayo topológico $\mathcal{R}$ tal que $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} = K$ que es un continuo. En particular M es descomponible.

Ahora, es fácil ver en la figuara (5.4) que K es homeomorfo a M pues $K = \varprojlim \left\{ [\frac{1}{2}, 1], f\mid_{[\frac{1}{2},1]} \right\}$

Veamos ahora que M es 2-equivalente. Sea $A \subset M$, un subcontinuo propio no degenerado.

-Si $(1, 1, \cdots) \notin A$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_i(A) \subsetneq [0,1)$. Sea $\pi_i(A) = [a_i, b_i]$ ahora, si $\pi_i(A) \cap [0, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$, como $1 \notin \pi_i(A)$, entonces $\frac{1}{4} \notin \pi_{i+1}(A)$ y así se tiene que $\pi_{i+1}(A) = \left[\frac{a_i}{4}, \frac{b_i}{4}\right]$ y para cada $k > i$ se tiene que $\pi_k(A) = \left[g_0^{-1}(a_i), g_0^{-1}(b_i)\right] = \left[\frac{a_i}{4^{k-i}}, \frac{b_i}{4^{k-i}}\right]$ y $f\mid_{\pi_{i+1}(A)}$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 0.8 tenemos que $\varprojlim \left\{\pi_j(A), f|_{\pi_j(A)}\right\} = A$ (considerando $j > i$). Como cada función $f\mid_{\pi_i(A)}$ es un homeomorfismo y cada $\pi_j(A)$ es un arco, entonces A es un arco.

Ahora, si $\pi_i(A) \cap [0, \frac{3}{4}) \neq \emptyset$, podemos suponer que $\pi_i(A) \cap [0, \frac{1}{2}) = \emptyset$, pues en caso contrario, usamos el argumento anterior. Como $1 \notin \pi_i(A)$, entonces $\frac{5}{8} \notin \pi_{i+1}(A)$ y así se tiene que $\pi_{i+1}(A) = \left[g_1^{-1}(a_i), g_1^{-1}(b_i)\right] = \left[\frac{a_i}{4} + \frac{3}{2}, \frac{b_i}{4} + \frac{3}{2}\right]$, pues la gráfica de g_1 es la recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y pendiente 4; y para $k > i$ se tiene que $\pi_k(A) = \left[g_1^{k-i}(a_i), g_1^{k-i}(b_i)\right]$ y $f\mid_{\pi_{i+1}(A)}$ es un homeomorfismo. Entonces $A = \varprojlim \left\{\pi_j(A), f|_{\pi_{j+1}(A)}\right\}$ (considerando $j > i$), es un arco.

Análogamente si $\pi_i(A) \cap [0, 1-\frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$. Se tiene que A es un arco.

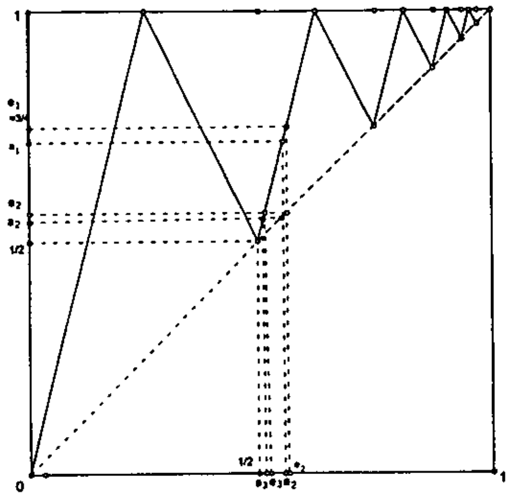
Así, sólo queda el caso en el que

- $(1, 1, \cdots) \in A$.

Para cada n, sea $v_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Sean $A = \varprojlim \{\pi_i(A), f|_{\pi_{i+1}(A)}\} = \varprojlim ([a_i, 1], f|_{[a_{i+1},1]})$

El caso más simple es que exista $j \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq j$ $\pi_i(A) = [v_n, 1]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, en este caso, se sigue del Teorema 0.8 que $A = \varprojlim \{\pi_i(A), f|_{\pi_{i+1}(A)}\}$ es homeomorfo a M.

Si no, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $v_{n-1} \leq a_1 < v_n$, observamos que $f(a_{i+1}) = a_i$ y $a_{i+1} > v_{n-1}$ si $a_i > v_{n-1}$. (obsevemos en la figura el caso en el que $n = 2$)



($figura$ 5.5)

Demostraremos que A es homeomorfo a M.

Pues, observemos primero que $M \approx G$ donde $G = \varprojlim ([v_{n-1}, 1], f|_{[v_{n-1},1]})$, G está bien definido, pues $f([v_{n-1}, 1]) = [v_{n-1}, 1]$ (Recuérdese que n está fijo). Así demostraremos que $G \approx A$. Para hacer eso usaremos los siguientes tres conjuntos:

$E = \varprojlim (E_i, f|_{E_i})$, donde $E_i = [e_i, 1]$, $e_1 = v_n$, $e_i = f^{-1}(e_{i-1})$, $e_i \in [v_{n-1}, 1]$.

$A_1 = \varprojlim ([a_i, e_i], f|_{[a_i,e_i]})$ y

$A_2 = \varprojlim ([v_{n-1}, e_i], f|_{[v_{n-1},e_i]})$

Como $v_{n-1} \leq a_1 < v_n = e_1$ y $f\mid_{[v_{n-1},v_n]}$ es creciente, entonces $a_2 < e_2$, $a_3 < e_3$, $a_4 < e_4$,.
Notemos que las funciones $f\mid_{[a_i,e_i]}$ y $f\mid_{[v_{n-1},e_i]}$ son homeomorfismos. Así tenemos que A_1 y A_2 son arcos y $E \cap A_1 = \{(e_1, e_2, \ldots)\}$, y $E \cap A_2 = \{(e_1, e_2, \ldots)\}$, por lo tanto $A = E \cup A_1$ y $G = E \cup A_2$. Lo cual demuestra que A es homeomorfo a G y por ello A es homeomorfo a M.
Esto demuestra que M tiene sólo dos tipos de subcontinuos no degenerados: arcos y continuos homeomorfos a M. Luego, M es 2-equivalente.

Pero más generalmente tenemos el Teorema de Bennett (damos también la referencia, donde se puede encontrar su demostración):

Teorema 5.1 *[Ingram, Teorema 1, pág. 2]. Supongamos que f es un mapeo del intervalo $[a,b]$ sobre sí mismo tal que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Si d es un número entre a y b tal que:*

1) $f([d,b])$ es un subconjunto de $[d,b]$,
2) $f\mid_{[a,d]}$ es monótona, y
3) Hay un entero positivo j tal que $f^j[a,d] = [a,b]$.

Entonces $\varprojlim \{[a,b], f\}$ es la unión de un rayo topológico R y un continuo K tal que $K = \overline{R} \setminus R$.

La demostración de este teorema es semejante a la que hicimos para el ejemplo de Bennett.

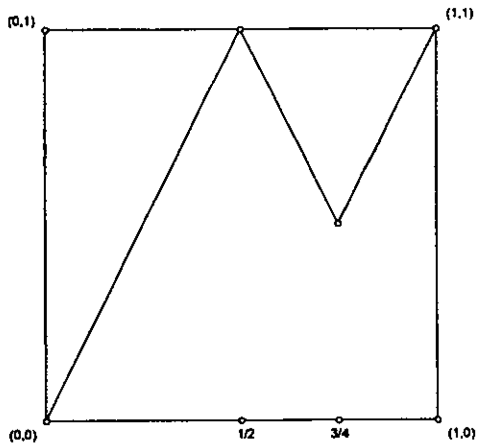
5.2 EJEMPLO 2.

El ejemplo de esta sección es el de un continuo 2-equivalente M con las siguientes propiedades:

1) M es 2-equivalente,
2) M es hereditariamente descomponible,
2) M es encadenable y
3) M no contiene arcos

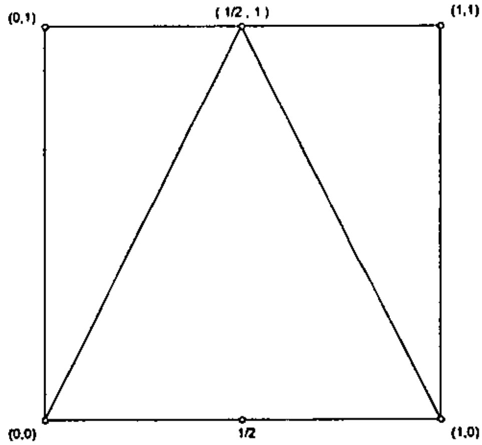
Definiremos $M = \varprojlim(I, f_n)$ donde $I = [0,1]$ y las funciones de ligadura $f_n : I \to I$ se definirán recursivamente por medio de los siguientes diagramas.

Sea $f_1 : I \to I$ definida por: $f_1(0) = 0$, $f_1(\frac{1}{2}) = 1$, $f_1(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$, $f_1(1) = 1$. y f_1 lineal en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.



($figura$ 5.6) función f_1

Sea $g : I \to I$ definida por: $g(0) = g(1) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 1$, y g lineal en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. (figura 5.7)

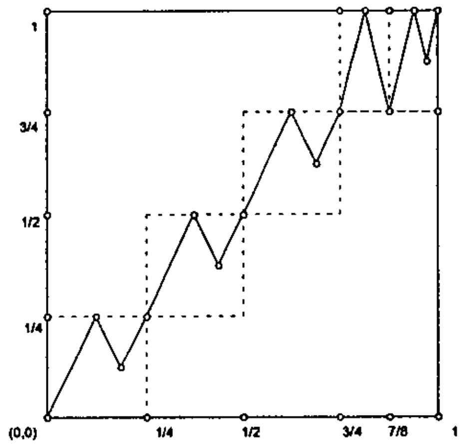


($figura$ 5.7) función g

Para definir cada f_n usaremos la siguiente sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$, tal que
$y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}$,
para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $y_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$
y para $n = 2, 3, 4, \ldots$, $y_{2n} = 1 - \frac{3}{2^{n+2}}$

Es decir,

$$\{y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{7}{8}, \frac{29}{32}, \frac{15}{16}, \cdots\right\}$$



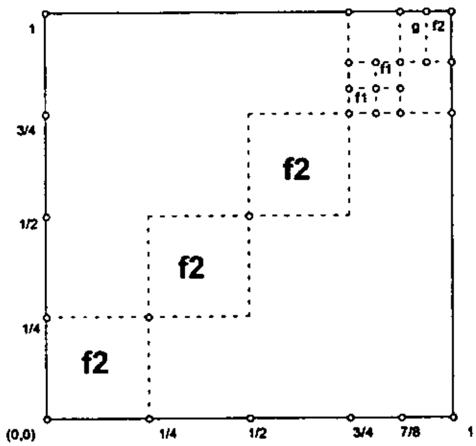
($figura$ 5.8) función f_2

La gráfica de la función f_2 (figuras 5.8 y 5.9) se define como:

$$\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle$$
$$\cup \langle g : [y_3, y_5] \to [y_3, 1] \rangle$$
$$\cup \langle f_1 : [y_5, 1] \to [y_3, 1] \rangle$$

La gráfica de la función f_3 se define como:

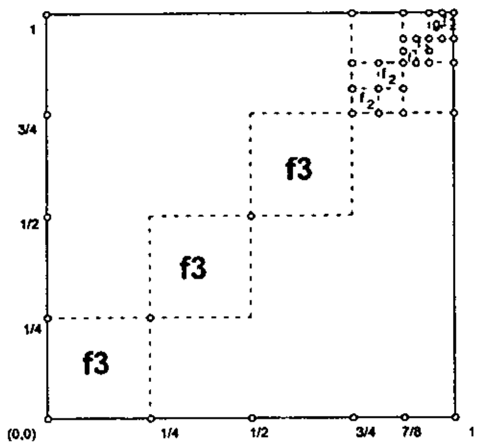
$$\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_2 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle$$
$$\cup \bigcup_{i=3}^{4} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle$$
$$\cup \langle g : [y_5, y_7] \to [y_5, 1] \rangle$$
$$\cup \langle f_2 : [y_7, 1] \to [y_5, 1] \rangle$$



$(figura\ 5.10)$ función f_3

La gráfica de la función f_4 se define como:

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_3 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=3}^{4} \langle f_2 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=5}^{6} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \langle g : [y_7, y_9] \to [y_7, 1] \rangle \\
&\cup \langle f_3 : [y_9, 1] \to [y_7, 1] \rangle
\end{aligned}
$$



$(figura\ \ 5.11)$ función f_4

Para $n > 1$, la gráfica de la función f_{n+1} se define como:

$$
\begin{aligned}
&\bigcup_{i=0}^{2} \langle f_n : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=3}^{4} \langle f_{n-1} : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \bigcup_{i=5}^{6} \langle f_{n-2} : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\vdots \\
&\cup \bigcup_{i=2n-3}^{2n-2} \langle f_1 : [y_i, y_{i+1}] \to [y_i, y_{i+1}] \rangle \\
&\cup \langle g : [y_{2n-1}, y_{2n+1}] \to [y_{2n-1}, 1] \rangle \\
&\cup \langle f_n : [y_{2n+1}, 1] \to [y_{2n-1}, 1] \rangle
\end{aligned}
$$

Definimos $M = \varprojlim(I, f_n)$.

Nótese que para definir las funciones f_n requerimos la sucesión de elementos de I, ya descrita.

$$\{y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots\} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{7}{8}, \frac{29}{32}, \frac{15}{16}, \cdots\right\}$$

Lo siguiente tiene como finalidad demostrar que M es 2-equivalente, hereditariamente descomponible y que no contiene arcos.

Proposición 5.2 *Hay una sucesión K_0, K_1, K_2, . . .de subcontinuos de M tal que:*

1) *Para cada $i \geq 0$, K_i es homeomorfo a M,*
y $K_i \cap K_{i+1} = \{(y_{i+1}, y_{i+1}, ...)\}$. Además $\lim\limits_{i\to\infty} [diam\,(K_i)] = 0$.

2) $M = \overline{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_n}$

3) $(1,1,1,...) \in E = M \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_i$, *cada punto de E es un punto límite de* $M \setminus E$ *, y*

4) $M \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_i = E$ *es homeomorfo a M.*

Demostración.

Sea
$K_n = \{(a_1, a_2, \dots) \in M |\, a_i \in [\,y_n, y_{n+1}]$ para todo número i salvo un número finito$\}$.
Entonces K_n es homeomorfo a M, ya que a partir de cierta $m(n) = m \in \mathbb{N}$
la función

$f_m|_{[\,y_n, y_{n+1}]} = \langle f_1 : [y_n, y_{n+1}] \to [y_n, y_{n+1}]\rangle,$

$f_{m+1}|_{[y_n, y_{n+1}]} = \langle f_2 : [y_n, y_{n+1}] \to [y_n, y_{n+1}]\rangle,$

$f_{m+2}|_{[y_n, y_{n+1}]} = \langle f_3 : [y_n, y_{n+1}] \to [y_n, y_{n+1}]\rangle,$ . . . , etc.

Así que $K_n = \varprojlim([y_n, y_{n+1}], f_i|_{[y_n, y_{n+1}]}, i \geq m) =$

$$\varprojlim([y_n, y_{n+1}]\,, \langle f_j : [y_n, y_{n+1}] \to [y_n, y_{n+1}]\rangle\,, j > m) \approx M$$

Si $a \in K_i \cap K_{i+1}$, $a = (a_1, a_2, ...)$, entonces $a_n \geq y_{i+1}$ y $a_n \leq y_{i+1}$ para casi toda n, entonces $a_n = y_{i+1}$ para toda n. Así $a = (y_{i+1}, y_{i+1}, ...)$.

Veamos ahora que el diámetro de las K_n converge a 0.

Dada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n+1}{2^n} < \varepsilon$,

Sean $a, b \in K_m$ con $m = 2n+1$, entonces $a = (a_1, a_2, ...)$, $b = (b_1, b_2, ...)$, como $K_m = \varprojlim ([y_m, y_{m+1}], \langle f_j : [y_m, y_{m+1}] \to [y_m, y_{m+1}] \rangle)$ con $y_m = y_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ y $y_{m+1} = y_{2n+2} = y_{2(n+1)} = 1 - \frac{3}{2^{(n+1)+2}}$, con lo que $|y_m - y_{m+1}| = \left|1 - \frac{1}{2^{n+1}} - 1 - \frac{3}{2^{(n+1)+2}}\right| = \frac{1}{2^{n+3}}$ y $|y_m - 1| = \frac{1}{2^{n+1}}$. Notemos que $a_i, b_i \in [y_m, y_{m+1}]$ para toda $i > n$ y $a_i, b_i \in [y_m, 1]$ para toda $i \leq n$, así $d(a,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k - b_k|}{2^k} + \frac{1}{2^n} < \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} < \varepsilon$.

y como fue para cualesquiera a, b en K_n arbitrarios, el diámetro de K_n es menor que $\frac{n+1}{2^n} < \varepsilon$ (*)

2) Demostraremos ahora que $M = \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i}$ y para esto, primero probaremos que si

$$E = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \text{ y } F = M \cap \left([\tfrac{1}{2}, 1] \times [\tfrac{3}{4}, 1] \times [\tfrac{7}{8}, 1] \times \cdots \times [1 - \tfrac{1}{2^n}, 1] \times \cdots \right),$$

entonces $E = F$.

Notemos que $F = M \cap ([y_2, 1] \times [y_3, 1] \times [y_5, 1] \times [y_7, 1] \times \cdots \times [y_{2n-1}, 1] \times \cdots)$,

Sea $a = (a_1, a_2, \cdots) \in F$. Es claro que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in [y_n, y_{n+1}]$, para una infinidad de números i, así que $a \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, por lo tanto, $a \in E$.

Tomemos ahora un elemento $a = (a_1, a_2, \cdots) \in E$.

Si $a_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $a_i \in [0, \frac{1}{4}]$ para toda $i \geq 2$, por lo tanto $a \in K_0$.

Esto prueba que $a_1 \notin [0, \frac{1}{2}]$, por lo tanto $a_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Si ocurriera que $a_2 \in [0, \frac{3}{4}]$. Entonces $a_2 \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Si $a_2 \in [0, \frac{1}{4}]$, entonces $a_i \in [0, \frac{1}{4}]$ para toda $i \geq 2$.

Si $a_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, entonces $a_i \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ para toda $i \geq 2$.

Si $a_2 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, entonces $a_i \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ para toda $i \geq 2$.

(Véanse los diagramas)

En cualquier caso $a \in K_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $a_2 \in [\frac{3}{4}, 1]$.

Para demostrar que $a_i \in [\frac{2^i-1}{2^i}, 1]$ para toda $i \geq 3$, el procedimiento es análogo al anterior. Por tanto $a \in F$. Hemos probado que $E = F$.

Es claro que $(1, 1, \ldots) \in E$. Ahora, para cada n sea $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = y_{2n+1}$. Sean ahora $e = (e_1, e_2, \cdots) \in E$, $\epsilon > 0$ y n tales que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Entonces existe $a_{n+1} \in [x_{n-1}, x_n]$ tal que $f_n(a_{n+1}) = e_n$. Más precisamente $f_n(a_{n+1}) = g^*(a_{n+1}) = e_n$ $(g^* = \langle g : [y_{2n-2}, y_{2n}] \to [y_{2n}, 1]\rangle)$. Por la forma en que se eligió a_{n+1}, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1} \in [y_{2j-1}, y_{2j}]$. Continuamos eligiendo, para todo $m > n+1$, $a_m \in [y_{2j-1}, y_{2j}]$ de tal manera que $f_{m-1}(a_m) = a_{m-1}$, así $a = (e_1, e_2, \cdots, e_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots) \in K_{2j-1}$ y $d(e, a) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$, lo cual prueba que que $e \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}$.

Así queda probado 2) y 3).

4) Mostraremos ahora que $F \approx M$.

$F = M \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [x_1, 1] \times [x_2, 1] \times \ldots \times [x_n, 1] \times \ldots\right)$.

Puede verse fácilmente en los diagramas que

$f_2 |_{[x_2,1]} = \langle f_1 : [x_2, 1] \to [x_1, 1]\rangle$

$f_3 |_{[x_3,1]} = \langle f_2 : [x_3, 1] \to [x_2, 1]\rangle$

$\vdots$

$f_{n+1} |_{[x_{n+1},1]} = \langle f_n : [x_{n+1}, 1] \to [x_n, 1]\rangle$

$\vdots$

Así $F = \varprojlim \{[x_{n+1}, 1], \langle f_n : [x_{n+1}, 1] \to [x_n, 1]\rangle\}$ que es homeomorfo a M, y como $E = F$, entonces E es homeomorfo a M.

■

Proposición 5.3 *M es irreducible entre $(0, 0, \ldots)$ y cada punto de E.*

Demostración. Sea $H \in C(M)$ tal que $(0, 0, \ldots) \in H$ y $E \cap H \neq \emptyset$.

Sean π_n la n-ésima proyección de M sobre I y $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Como $E = M \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [x_1, 1] \times [x_2, 1] \times \ldots \times [x_n, 1] \times \ldots\right)$, $\pi_n(E) = [x_{n-1}, 1]$ para toda n, $\pi_n(H)$ contiene al 0 y a x_{n-1}, así $\pi_n(H) \supseteq [0, x_{n-1}]$ para toda n y como $\pi_n = f_n \circ \pi_{n+1}$, tenemos que $f_n([0, x_n]) \subseteq H$ y como $f_n |_{[x_{n-1}, x_n]} = \langle g : [x_{n-1}, x_n] \to [x_{n-1}, 1]\rangle$, resulta que $1 \in \pi_n(H)$ para toda n, así que $\pi_n(H)$ es un subcontinuo de I que contiene a 0 y a 1, entonces

$\pi_n(H) = I$ para toda n. Por el Teorema 0.8, tenemos que $H = M$. Así M es irreducible entre $(0,0,...)$ y cada punto de E.

En particular M es irreducible entre $(0,0,...)$ y $(1,1,...)$. ∎

De lo anterior se sigue el siguiente corolario:

Corolario 5.4 *K_n es irreducible entre $(y_n, y_n, ...)$ y $(y_{n+1}, y_{n+1}, ...)$.*

Pues K_n es homeomorfo a M, bajo un homeomorfismo para el cual $(y_n, y_n, ...)$ es la imagen de $(0,0,...)$ y $(y_{n+1}, y_{n+1}, ...)$ es la imagen de $(1,1,...)$.

Proposición 5.5 *Si $H \in C(M)$ es tal que $(0,0,...) \in H$ y $H \cap K_n \neq \emptyset$. Entonces $K_{n-1} \subseteq H$.*

Demostración. Sea $H = \varprojlim \left([0,a_i], f_j|_{[0,a_i]}\right)$, como $H \cap K_n \neq \emptyset$, se tiene que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \geq y_n$ para toda $i \geq i_0$. Así tenemos que si $(s_1, s_2, \cdots) \in K_{n-1}$, entonces $s_i \in [y_{n-1}, y_n]$, a partir de cierta i_1, entonces para toda $i \geq \max\{i_0, i_1\}$ $s_i \in [0, a_i]$. Es decir $K_{n-1} \subseteq H$. ∎

Proposición 5.6 *El continuo $K_n \cup K_{n+1}$ es homeomorfo a M.*

Demostración. Para cada $i \geq 0$ hay un homeomorfismo $\varphi_i : K_i \to K_{i+1}$ tal que $\varphi_i((y_i, y_i, ...)) = (y_{i+1}, y_{i+1}, ...)$ y $\varphi_i((y_{i+1}, y_{i+1}, ...)) = (y_{i+2}, y_{i+2}, ...)$.

Sea $\varphi : M \setminus E \to [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, ...)\}] \setminus E$

definida por $\varphi(\overline{x}) = \varphi_i(\overline{x})$ si $\overline{x} \in K_i$. Claramente φ está bien definida, es uno a uno, sobre y continua,

y la inversa:

$\varphi^{-1} : [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, ...)\}] \setminus E \to M \setminus E$

definida por $\varphi^{-1}(\overline{x}) = \varphi_i^{-1}(\overline{x})$ si $\overline{x} \in K_{i+1}$ está bien definida. Como φ_i es un homeomorfismo, entonces φ^{-1} es continua.

Sea $\overline{\varphi} : M \to [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, ...)\}]$

definida por:

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in M \setminus E \\ x, & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Como $M \setminus E$ es abierto y φ es continua, $\overline{\varphi}$ es continua en cada punto de $M \setminus E$. Bastará demostrar que $\overline{\varphi}$ es continua en $\overline{M \setminus E}$. Sea $x \in E$ y sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus E$ una sucesión que converge a x, entonces $r_n \in K_{j_n}$ y no hay una infinidad de elementos de la sucesión que estén contenidos en un solo K_j pues como K_j es cerrado, el límite de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus E$, estaría en K_j.

Nótese que $\lim_{n\to\infty} diámetro(K_n \cup K_{n+1}) = 0$, pues $\lim_{n\to\infty} diámetro(K_n) = 0$ y $K_n \cap K_{n+1} \neq \emptyset$ para cada n.

Análogamente para cada $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} diámetro\left(\bigcup_{i=n}^{n+k} K_i\right) = 0$,

Así, $d\left(\overline{\varphi}\left(r_n\right), \overline{\varphi}\left(x\right)\right) = d\left(\varphi\left(r_n\right), x\right) \leq d\left(\varphi\left(r_n\right), r_n\right) + d\left(r_n, x\right) \leq$ $diámetro\left(\bigcup_{i=j_n}^{j_{n+1}} K_i\right) + d\left(r_n, x\right)$ lo cual converge a 0.

Lo cual implica que $\overline{\varphi}\left(r_n\right)$ converge a $\overline{\varphi}\left(x\right)$. Así $\overline{\varphi}$ es continua en x. Como $K_n \approx M \approx K_0$ (por la Proposicción 3)

y $K_{n+1} \approx M \approx [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, \ldots)\}]$

y $M = K_0 \cup [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, \ldots)\}]$

entonces $K_n \cup K_{n+1} \approx K_0 \cup [(M \setminus K_0) \cup \{(y_1, y_1, \ldots)\}] = M$. Bajo un homeomorfismo que manda $(y_n, y_n, \ldots)$ en $(0, 0, \ldots)$, $(y_{n+1}, y_{n+1}, \ldots)$ en $(y_1, y_1, \ldots)$ y $(y_{n+2}, y_{n+2}, \ldots)$ en $(1, 1, \ldots)$. ■

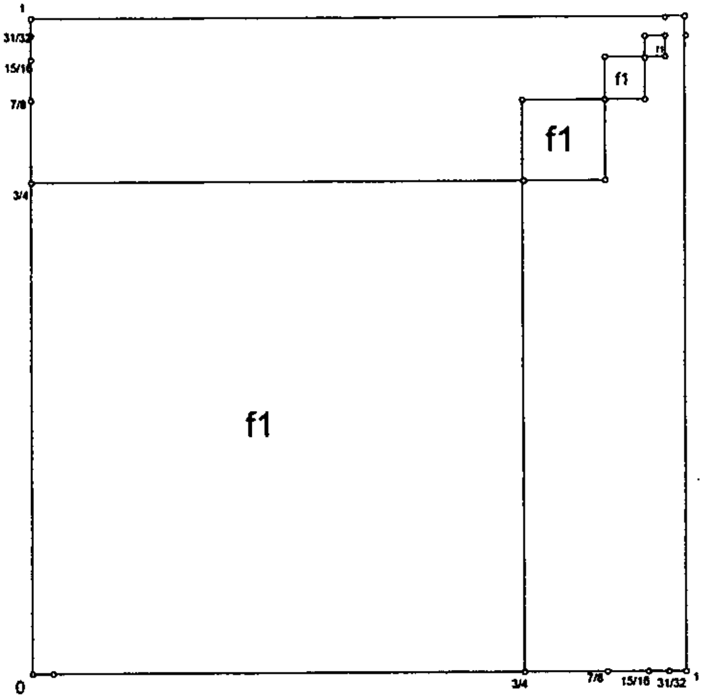
Obtenemos ahora fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 5.7 $\bigcup_{i=m}^{i=n} K_i$ *es homeomorfo a* M*, para cualesquiera* $m < n$.

Construiremos ahora un continuo N que no es un arco, y que satisface que todo subcontinuo de M es homeomorfo, o bien a N o bien a M. Con eso se probará que M es 2-equivalente y no contiene arcos.

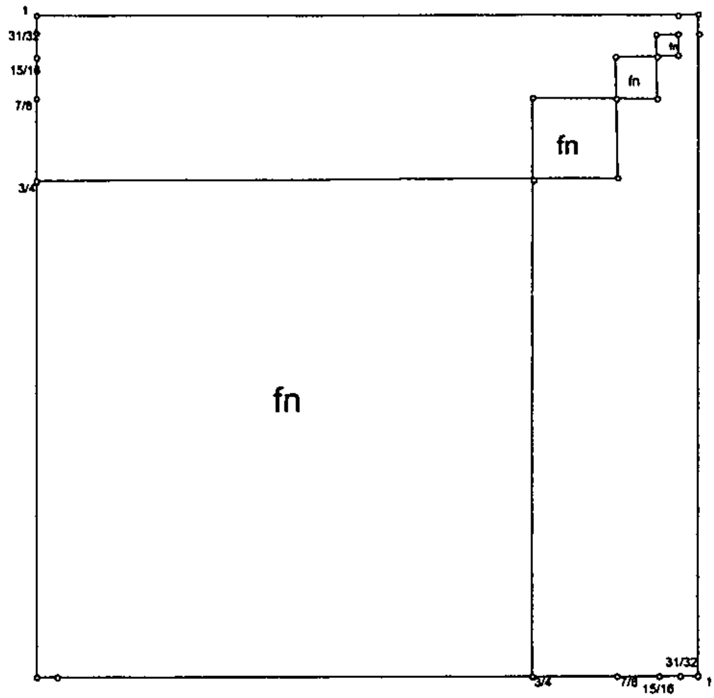
Recordemos que, para toda $n \geq 1$, $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ y $x_0 = 0$.

Sea $N = \varprojlim[\, I, h_n]$, donde h_n es como en el siguiente diagrama



($figura$ 5.13 función h_1)

$\vdots$



($figura$ 5.14 función h_n)

Con f_n las funciones con las cuales se definió M, véase págs. 40-47.

Puede verse de los diagramas que el continuo $S_0 = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{3}{4}\right], h_j \mid_{\left[0,\frac{3}{4}\right]} \right\} = \varprojlim \left\{ \left[0, \frac{3}{4}\right], \langle f_j : \left[0, \frac{3}{4}\right] \to \left[0, \frac{3}{4}\right] \rangle \right\}$ es homeomorfo a M.

El continuo

$$S_n = \varprojlim \left\{ [x_n, x_{n+1}], h_j \mid_{[x_n, x_{n+1}]} \right\} = \varprojlim \left\{ [x_n, x_{n+1}], \langle f_j : [x_n, x_{n+1}] \to [x_n, x_{n+1}] \rangle \right\}$$

también es homeomorfo a M para toda n.

Además $S_n \subseteq N$, lo cual demuestra que N no es un arco.

Claramente $S_{n-1} \cap S_n = \{(x_n, x_n, ...)\} = \{\overline{x_n}\}$.

Además $\{\overline{1}\} = \{(1,1,...)\} = N \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ ya que

$\overline{1} \notin S_n$, para toda n. Así $\{\overline{1}\} \subset N \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$.

Si $\overline{r} = (r_1, r_2, ...) \notin S_n$ para ninguna n. Se tiene que $r_j > x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ para toda j, y para toda n.

Es decir $r_j \geq 1$. Entonces $r_j = 1$ para toda j.

Además, dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $\varepsilon > \frac{1}{2^{n+1}}$, así $\left|(1) - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| = |(1) - x_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$

Entonces si $\overline{s} = (s_1, s_2, ..., s_n, ...) \in S_n$ con $s_j \in [x_n, x_{n+1}]$, tenemos que la distancia entre $\overline{s}$ y $\overline{1}$ es menor que ε.

Así, $\overline{1} \in \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n}$.

Proposición 5.8 *N es irreducible entre* $(0, 0, \cdots)$ *y* $(1, 1, \cdots)$, *pero no es irreducible entre* $(0, 0, \cdots)$ *y otro punto distinto de* $(1, 1, \cdots)$.

Demostración. Es claro que N es irreducible entre $(0, 0, \cdots)$ y $(1, 1, \cdots)$ pues si un subcontinuo H de N contiene a $(0, 0, \cdots)$ y $(1, 1, \cdots)$ entonces la proyección $\pi_n(H) = [0,1]$ para toda n. Así por el Teorema 0.8, tenemos que $H = \varprojlim \left\{ \pi_n(H), h_i|_{\pi_{n+1}(H)} \right\} = \varprojlim \left\{ [0,1], h_i|_{[0,1]} \right\} = N$.

Ahora si H es un subcontinuo de N irreducible entre a y b entonces $H = N$ sólo si $a = \overline{0}$ o $\overline{1}$ y $b = \overline{1}$ o $\overline{0}$.

Primero veamos que pasa si $a \neq \overline{1} \neq b$, sean $a = (a_1, a_2, \cdots)$ y $b = (b_1, b_2, \cdots)$, entonces para alguna i $a_i < x_r$ y para alguna j $b_j < x_m$, para algunas m y r, entonces si $n = \max\{m,r\}$, $a_j, b_j \in [0, x_n]$. Además como $h_k([x_n, x_{n+1}]) = [x_n, x_{n+1}]$, para toda k y para toda n, entonces tenemos que $a_i < x_n$ y $b_i < x_n$ para toda i. Sea $K = \varprojlim \{[0, x_n], h_i|_{[0,x_n]}\}$, entonces K es un subcontinuo de N que contiene a a y a b. K es propio ya que no contiene a $(1,1,1,\dots)$.

Ahora veamos que pasa si $b = \overline{1}$.

Si $a \neq \overline{0}$. Primero, recordemos que como se definieron las f_n, para toda k, $f_{k+1}\left(\left[0, \frac{1}{4^k}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4^k}\right]$ pues

$f_{k+1}|_{\left[0,\frac{1}{4}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \left[0, \frac{1}{4}\right]\right\rangle$,

$f_{k+1}|_{\left[0,\frac{1}{4^2}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4^2}\right] \to \left[0, \frac{1}{4^2}\right]\right\rangle$,

$\vdots$

$f_{k+1}|_{\left[0,\frac{1}{4^k}\right]} = \left\langle f_k : \left[0, \frac{1}{4^k}\right] \to \left[0, \frac{1}{4^k}\right]\right\rangle$,

además, $f_r\left(\left[0, \frac{1}{4^k}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{4^k}\right]$ para toda $r > k$.

Así como $a \neq (0, 0, \cdots)$, entonces alguna $a_i > 0$, por ello existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i > \frac{3}{4^n}$, pero por como definimos la función h_{n+1} tenemos que $h_{n+1}|_{\left[0,\frac{3}{4}\right]} = \left\langle f_{n+1} : \left[0, \frac{3}{4}\right] \to \left[0, \frac{3}{4}\right]\right\rangle$ y

$h_{n+1}|_{\left[0,\frac{3}{4^n}\right]} = \left\langle f_n : \left[0, \frac{3}{4^n}\right] \to \left[0, \frac{3}{4^n}\right]\right\rangle$, y con ello tenemos que $h_r\left(\left[0, \frac{3}{4^n}\right]\right) = \left[0, \frac{3}{4^n}\right]$ para toda $r > n$, además $h_r\left(\left[\frac{3}{4^n}, 1\right]\right) = \left[\frac{3}{4^n}, 1\right]$ para toda $r > n$. Sea $K = \varprojlim \left\{\left[\frac{3}{4^n}, 1\right], h_r|_{\left[\frac{3}{4^n},1\right]}\right\}$, entonces K es un subcontinuo de N que contiene a a y a b. K es propio pues $(0, 0, \cdots) \notin K$.

Con lo cual queda demostrado que N es irreducible sólo entre $(0, 0, \cdots)$ y $(1, 1, \cdots)$. ■

Corolario 5.9 *M no es homeomorfo a N*

Así tenemos a N como un continuo irreducible sólo entre $(0, 0, \cdots)$ y $(1, 1, \cdots)$ que es la unión de subcontinuos homeomorfos a M y cuyos diámetros convergen a 0, con límite el punto $\{(1, 1, \cdots)\}$.

Proposición 5.10 *Todo subcontinuo no degenerado de M es, o bien homeomorfo a N, o bien homeo-morfo a M. Además, N es homeomorfo a un subcontinuo de M.*

Demostración. Sea H un subcontinuo propio y no degenerado de M.

Caso 1: H contiene a $(0,0,0,\cdots)$.

Como M es irreducible de $(0,0,0,\cdots)$ a cada punto de E, entonces H no contiene puntos de E. Entonces hay un máximo entero n tal que H contiene un punto de $K_n \approx M$.

Si $H \cap K_n = \{(y_n, y_n, \cdots)\}$, entonces, por la Proposición 5.5, $H = K_0 \cup \cdots \cup K_{n-1}$ y con ello tenemos que H es homeomorfo a M, por el Corolario 5.7.

De lo contrario, sea $H_0 = K_0 \cup \cdots \cup K_{n-1}$, si $n > 0$ (así H_0 es homeomorfo a M) y $H_0 = \emptyset$ si $n = 0$. Entonces $H = H_0 \cup (H \cap K_n)$ y $H \cap K_n$ es un subconjunto propio de K_n que contiene a $(y_n, y_n, \cdots)$.

Ahora como K_n es homeomorfo a M, por la Proposición 5.2, $K_n = (K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup ...) \cup K_{n_E}$, donde

$$K_{n_j} \approx K_n \approx M \text{ y } K_{n_E} = K_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} K_{n_j} \approx M$$

Es claro que el diámetro de cada K_{n_j} es menor que $\frac{1}{4}$.

Recordemos que $(y_n, y_n, \cdots)$ es la imagen de $(0,0,\cdots)$ bajo el homeomorfismo de M sobre K_n. Entonces repitiendo el procedimiento anterior, con K_n en lugar de M y $H \cap K_n$ en lugar de H, entonces obtenemos un entero $n_{0,1}$ tal que: o bien

$i)$ $H \cap K_n = H_1$, donde $H_1 = K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup ... \cup K_{n_{0,1}}$ o

$ii)$ $H \cap K_n = H_1 \cup (H \cap K_{n_{0,1}})$

En $i)$ $H = H_0 \cup H_1$ y por ello H es homeomorfo a M por el Corolario 5.7.

En $ii)$ continuamos el mismo procedimiento con $K_{n_{0,1}}$ en lugar de K_n o M.

Entonces, o bien terminamos después de un número finito de pasos y obtenemos que,

$H = H_0 \cup H_1 \cup ... \cup H_{r-1} \cup K_{n_r}$ y así H es homeomorfo a M, pues cada H_i y K_{n_r} es homeomorfo a M.

O bien obtenemos que $H = \overline{H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \cdots}$ con cada H_i homeomorfo a M.

Nótese que para cada $n > 0$ $diam\,(H_{n+1}) \leq \frac{diam(H_n)}{2}$, y con ello obtenemos que H es la cerradura una unión numerable de subcontinuos homeomorfos a M, cuyos diámetros converge a cero y con la intersección de dos consecutivos un punto, pero $H_i \cap H_j = \emptyset$, si $|i-j| > 1$.

Sean $h_0 = (0,0,\cdots)$, $h_1 = (y_n, y_n, \cdots)$ el único elemento de $H_0 \cap H_1$, $h_i = (y_{n_i}, y_{n_i}, \cdots)$ el único elemento de $H_{i-1} \cap H_i$, para toda $i > 1$, observamos que $y_{n_i} > y_{n_j}$ si $i > j$. Entonces $\{y_{n_i}\}_{i=0}^{\infty} \subset [0,1]$ es una sucesión creciente, entonces existe un punto y que es límite de esta sucesión. Sea $h = (y, y, \cdots)$, entonces h es el límite de $\{h_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Con lo anterior, tenemos que $h \in H = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} H_j}$, ahora, si $r = (r_1, r_2, \cdots) \notin H_i$, para toda i, se tiene que $r_j > y_{n_i}$ para toda i y para toda j. Es decir $r_j \geq y$, entonces $r_j = y$ para toda j. Por lo tanto $\{h\} = H \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} H_j$.

Recordemos que $N = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \cup \{(1,1,\cdots)\}$, con cada S_n homeomorfo a M. Ahora, $H = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} H_j} = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \cup \{(y,y,\cdots)\}$, con cada H_n homeomorfo a M. Entonces existen homeormofismos $\phi_0 : S_0 \to H_0$, $\phi_n : S_n \to H_n$. Por ello podemos extender a un homeomorfismo $\phi : N \to H$, definido por

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & \text{si } x \in S_n, \\ h, & \text{si } x = (1,1,\cdots) \end{cases}$$

Es claro que ϕ es uno a uno y sobre, además de ser continua en $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. Pero, también es continua en $(1,1,\cdots)$, pues si hay una sucesión $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n}$ que converge a $(1,1,\cdots)$, entonces $\{\phi(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en $H = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} H_j}$ que converge a h.

Así tenemos que H es homeomorfo al continuo N.

Caso 2: H contiene a $(1,1,1,\cdots)$.

Supongamos primero que H contiene a E.

Entonces, hay un máximo entero n tal que H no contiene a $(y_n, y_n, \cdots)$ y $H \cap K_n \neq \emptyset$.

Si $H \cap K_n = (y_{n+1}, y_{n+1}, \cdots)$, entonces H es homeomorfo a M. Pues $H = \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} K_j\right) \cup E$, de lo contrario, definimos $H_1 = \left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} K_j\right) \cup E$, así $H = H_1 \cup (H \cap K_n)$, y $H \cap K_n$ es un subconjunto propio de K_n

Como $K_n \approx M$ por la Proposición 5.2, entonces

$K_n = (K_{n_0} \cup K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup ...) \cup K_{n_E}$ con $K_{n_j} \approx K_n \approx M$ y $K_{n_E} = K_n \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} K_{n_j} \approx M$.

Continuando con este proceso, como en el Caso 1 obtenemos:

i) que nuestro proceso termina después de un número finito de pasos y H es homeomorfo a un conjunto finito de copias de M unidas extremo a extremo. Entonces por el Corolario 5.7, H es homeomorfo a M o,

ii) este proceso continúa y obtenemos que H es la cerradura de la unión de una sucesión infinita de continuos homeomorfos a M unidos extremo a extremo cuya sucesión de diámetros converge a 0, que contiene a E.

Es decir, $H = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)}$, con $E \subset H_1$ y cada $H_i \approx M$.

Lo cual es homeomorfo a M, pues podemos ver a M como:

$M = K_0 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right)}$. Sea $A_1 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right)}$, así $M = K_0 \cup A_1$, con K_0 y A_1 homeomorfos a M. Además $K_0 = K_0^2 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^2\right)}$. Sea $A_2 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^2\right)}$, así $M = K_0^2 \cup A_2 \cup A_1$, con K_0^2 y A_2 homeomorfos a M. Además $K_0^2 = K_0^3 \cup \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^3\right)}$. Sea $A_3 = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^3\right)}$, así $M = K_0^3 \cup A_3 \cup A_2 \cup A_1$, con K_0^3 y A_3 homeomorfos a M. Continuando con este proceso, obtenemos que $M = \{(0,0,\cdots)\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)} \approx \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)} = H$.

Entonces en ambos casos H es homeomorfo a M.

Con esto, si H es un subcontinuo propio de M que contiene a $(1, 1, \cdots)$, entonces H es homeomorfo a M.

Ahora, si H no contiene a E, como $E \approx M$, denotaríamos por $E_1 = M \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, $E_2 = E_1 \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_{1,i}$, con $K_{1,i} \approx M$, etc.

Entonces $\bigcap_{n\geq 1} E_n = (1, 1, \cdots)$ y como H es no degenerado hay un mayor entero k tal que $H \subseteq E_k$. Así, $E_{k+1} \subseteq H \subseteq E_k$ y E_k es homeomorfo a M. Con lo cual tenemos que H contiene a E_k.

Caso 2: Por último, sea H un subcontinuo propio no degenerado de M;

Por la Proposición 5.2. Podemos ver a M como $\overline{\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j\right)}$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que H no es un subconjunto de K_i para ninguna $i \geq 0$, pues en ese caso, como K_i es homeomorfo a M, usamos la Proposición 5.2 para K_i en lugar de M y como H es no degenerado, después de un número finito de pasos obtendríamos que H no es un subconjunto de un elemento de las K_{i_n}.

Sea $x = (y_n, y_n, \cdots)$ un punto de H. Entonces

$$H = \left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right] \cup \left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$$

donde $\left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$ es un subcontinuo propio que contiene a x. Con $\overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}$ homeomorfo a M así estámos en el caso 1, por ello $\left[H \cap \overline{\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j\right)}\right]$ es homeomorfo a M o a N.

y $\left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right]$ es un subcontinuo propio que contiene a x, y como $\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)$ es homeomorfo a M tenemos que x está en el subconjunto de irreducibilidad de $\left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)$, por ello $\left[H \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j\right)\right]$ es homeomorfo a M.

Con lo cual tenemos que H es la unión de dos subcontinuos unidos en un punto, uno homeomorfo a M y el otro a N, y en este caso tenemos que H es homeomorfo a N o tenemos que H es la unión de dos subcontinuos homeomorfos a M, y por ello H es homeomorfo a M.

Entonces H es homeomorfo a M o a N.

Esto completa nuestro argumento que M contiene únicamente 2 subcontinuos topológicamente diferentes. ■

Como $M = K_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)$, entonces M es descomponible. Y como $N = S_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)$, entonces M es hereditariamente descomponible ya que sus únicos subcontinuos son M o N.

Como M es hereditariamente descomponible y hereditariamente irreducible, entonces es hereditariamente unicoherente, por el Corolario 1.23, y por Teorema 0.7, M es encadenable.

O se puede ver que es encadenable, observando que es límite inverso de arcos. ([*Nadler*, Teorema 12.19, pág. 246] y [*Nadler*, Teorema 12.11, pág. 235]. Límite inverso de arcos es encadenable).

Ahora como M no es un arco y como N contiene continuos homeomorfos a M, entonces N no es un arco.

Así M no contiene arcos.

Bibliografía

[*Awartani*] M. Awartani, An uncountable collection of mutually incomparable chainable continua, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 239-245

[*Bing*] R. H. Bing, Concerning hereditarily indecomposable continua, Pacific J. Math. 1 (1951), 43-51.

[*Bing* (2)] R. H. Bing, Snake-like continua, Duke Math J. 18 (1951), 653-663

[*Henderson*] G. W. Henderson, Proof that every compact decomposable continuum which is topologically equivalent to each of its nondegenerate subcontinua is an arc, Ann. of Math. 72 (1960), 421-428.

[*Ingram*] W. T. Ingram, Periodicity and indecomposibility, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (1995), 1007-1016

[*Kuratowski*1] K. Kuratowski, Topology, Vol. 1, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[*Kuratowski*2] K. Kuratowski, Topology, Vol 2, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[*Mahavier*] W. S. Mahavier, Continua with only two topologically different subcontinua, Topology Appl. 94 (1999), 243-252.

[*Mahavier*2] W. S. Mahavier, Upper semi-continuous decompositions of irreducible continua, Fund. Math. 60 (1967), 53-57.

[*Miller*] H. C. Miller, On unicoherent continua, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 179-194.

[*Moise*] E. E. Moise, An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 581-594.

[*Moore*] R. L. Moore, Foundations of point set theory, Amer. Math Soc. Colloquium Publications, vol. 13 (1932)

[*Nadler*] S. B. Nadler Jr., Continuum Theory, Marcel Deker, Inc., New York, 1992.

[*Nadler*(2)] S. B. Nadler Jr., Arc components of certain chainable continua, Canad. Math. Bull. 14 (1971), 183-189.

[*Whyburn*] G.T. Whyburn, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 28 (1942).