



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Poliedros coloreados
con órdenes cíclicos

299035

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

Isabel Alicia Hubbard Escalera

Director de Tesis: Dr. Javier Bracho Carpizo



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVIATION DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"POLIEDROS COLOREADOS CON ORDENES CICLICOS"

realizado por ISABEL ALICIA HUBARD ESCALERA

con número de cuenta 9850697-0 , quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. JAVIER BRACHO CARPIZO

Propietario

DR. FRANCISCO LARRION RIVEROLL

Propietario

DR. JORGE LUIS AROCHA PEREZ

Suplente

DR. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI

Suplente

DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

**Consejo Departamental de
Matemáticas**

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

MATEMATICAS

A mi papá, mi mamá, Aline y Alfredo.

Agradecimientos.

Quiero empezar agradeciendo a Roli por el trabajo y tiempo dedicado a esta tesis. Porque junto con Luis Montejano y Jorge Arocha me ha enseñado el maravilloso mundo de la combinatoria y cómo adentrarse a él (o al menos intentarlo).

A Paco y Rodolfo por la revisión de esta tesis y sus atinados comentarios.

A Javier Páez por lo años de enseñanza, las largas pláticas, consejos, regaños, por ser mi guía durante mi estancia en la facultad, además de revisar con muchas ganas este trabajo. Pero sobre todo por brindarme una amistad en todo momento.

A mis papás, a Aline y Alfredo por su apoyo y paciencia todos estos años, no sé que haría sin ustedes. Gracias por ser además de todo mis amigos.

A Mariana, Ingrid, Lissette, Sara, José y Julio, amistades como estas no se encuentran en cualquier lugar. A todos los hijos del Páez con quienes pasé tantas horas de estudio, en especial a Camille y Pablo.

Finalmente quiero agradecer muy especialmente a Óscar Chávez por haberme guiado por el camino del bien.

Índice General

1	Introducción	3
2	Poliedros	7
2.1	Definiciones	8
2.1.1	Reglas de pegado	13
2.1.2	Banderas	15
2.1.3	Automorfismos	17
2.2	Poliedros regulares	18
2.2.1	Generadores	19
2.3	Poliedros quirales	27
2.3.1	Orientabilidad	27
2.3.2	Poliedros quirales	30
2.3.3	Generadores	33
2.3.4	Poliedros semiregulares	35
3	La construcción	37
3.1	El grupo simétrico	37
3.2	Primera construcción	39
3.3	Segunda construcción	45
3.4	Tercera construcción	53
4	Formalización	59
4.1	Etiquetas	59
4.2	Construcción	61
4.3	Las simetrías	65
5	La última y nos vamos	75
5.1	Cuarta construcción	75

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis formaliza la generalización natural de un poliedro regular que apareció en el estudio de espacios de configuraciones. Esta generalización da lugar a nuevas familias de poliedros.

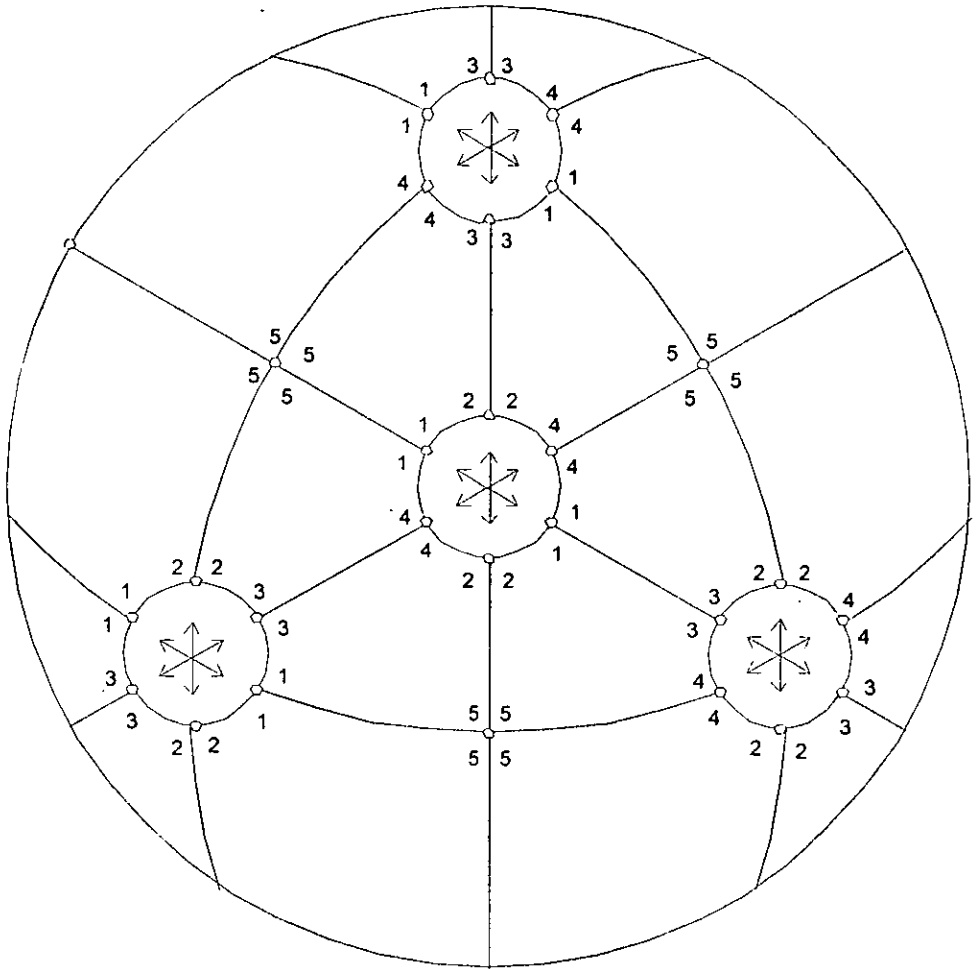
El Capítulo 2 lo empezaremos dando las nociones básicas con las que vamos a trabajar para llegar a conocer las propiedades más importantes de los poliedros, los poliedros regulares y quirales y sus respectivos grupos de automorfismos. En el Capítulo 3 construiremos las tres nuevas familias de poliedros que generalizan al poliedro regular que tenemos. En el Capítulo 4 formalizaremos las construcciones y veremos algunas propiedades de estas familias de poliedros. Finalmente en el Capítulo 5 daremos una última construcción sin entrar en mucho detalle.

Pero antes queremos empezar con el ejemplo que da lugar a esta tesis. Surge de la estructura combinatoria del espacio de configuraciones de 5 puntos en la línea proyectiva \mathbb{P}^1 , al que denotaremos \mathbb{P}_5^1 . No pretendemos definir estos espacios con precisión, sino describir intuitivamente al que nos interesa.

La idea básica de este espacio de configuraciones es pensar que cada punto tiene un color distinto y fijarnos en las maneras distintas, proyectivamente hablando, en que podemos encontrar 5 puntos, uno de cada color, en la línea proyectiva.

Para esto, necesitamos que los 5 puntos generen a \mathbb{P}^1 , y además, como estamos hablando proyectivamente, que si una proyectividad no los mueve, entonces esa proyectividad es la identidad; es decir, que al menos tres de ellos sean distintos. Podemos pensar entonces que tenemos 3 puntos fijos y los otros 2 moviéndose por \mathbb{P}^1 . Esto implica que tenemos dos grados de libertad, por lo que la dimensión del espacio es dos. Es decir, tenemos una

de los vértices del pentágono, pues las identificaciones preservan colores. El resultado se puede dibujar en el plano proyectivo con 4 agujeros:


 \mathbb{P}_5^1

en donde los círculos pequeños (la frontera de los agujeros) se identifican antipodalmente, por lo que es una superficie no orientable cuya característica de Euler es -3 .

Capítulo 2

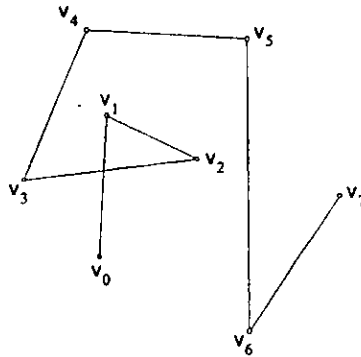
Poliedros

Desde la antigüedad el hombre conoció los poliedros, probablemente el primer poliedro conocido fue el cubo, que los etruscos usaban para apostar; más tarde, los egipcios al construir sus pirámides usaron también poliedros. Sin embargo, los primeros en estudiarlos fueron los griegos, ellos se fijaron principalmente en las simetrías que tenían, por lo que básicamente se dedicaron a los poliedros regulares que Platón identificó con los elementos básicos, el tetraedro con el fuego, el octaedro con el aire, el cubo con la tierra, el icosaedro con el agua y finalmente el dodecaedro con el universo entero. Después aparecieron Arquímedes, Kepler y Poinson, entre otros. Todos ellos estudiaron a los poliedros que viven en el espacio euclidiano de dimensión 3, principalmente viéndolos como cascos convexos de un número finito de puntos y viendo las simetrías que les heredan las isometrías del espacio; estos poliedros son topológicamente equivalentes a una esfera y su geometría resulta de esto. Aquí estudiaremos poliedros que no son necesariamente cascos convexos de puntos en \mathbb{E}^3 . Cuando sean finitos van a seguir siendo superficies, pero no necesariamente la esfera y dependiendo de la superficie les corresponderá su geometría.

Más tarde apareció Coxeter y fue el primero en estudiar a los poliedros como objetos combinatorios, más que geométricos. Nosotros, como Coxeter, los veremos combinatoriamente, aunque no por esto perderemos de vista su geometría.

2.1. DEFINICIONES

donde los v_i son distintos.



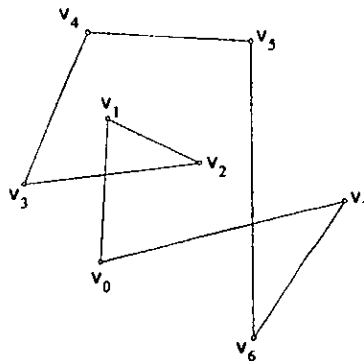
La trayectoria T que une a los vértices v_0 y v_k la podemos escribir como $T = v_0v_1\dots v_k$. Es importante notar que la trayectoria T es la misma que la $T' = v_kv_{k-1}\dots v_0$ y es una trayectoria entre v_0 y v_k o entre v_k y v_0 . La longitud de una trayectoria es la cantidad de aristas que contiene.

Una gráfica es *conexa* si para cualesquiera dos vértices que tomemos hay una trayectoria entre ellos.

Si T es una trayectoria de longitud mayor o igual a uno, entonces la gráfica C formada por la trayectoria T y la arista v_0v_k es un *ciclo*. Es decir, un ciclo C es una gráfica $C = (V, A)$ donde

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \quad A = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_0\}$$

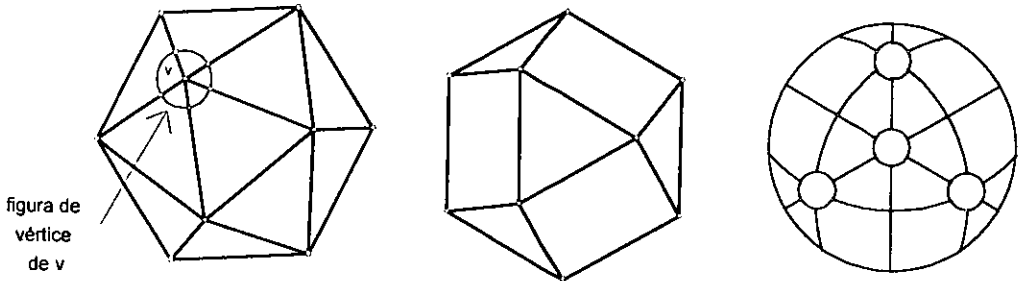
con los v_i distintos y $k \geq 1$.



La longitud de un ciclo es el número de aristas (o vértices) que tiene.

A los vértices del poliedro también los llamaremos *0-caras*, a las aristas *1-caras* y a las caras *2-caras*. Cuando hablemos de una *i-cara* nos estaremos refiriendo a un vértice, arista o cara.

Ejemplo 1 *Los sólidos platónicos y arquimedianos, el espacio de configuraciones de 5 puntos en \mathbb{P}^1 son poliedros:*



Podemos definir también a las gráficas como un par $G = (V, A)$ de conjuntos (con V no vacío) junto con una relación de orden entre ellos que cumple que cada elemento de A es mayor a exactamente dos de V . De esta forma un ciclo es una gráfica en la que además se tiene que cada elemento de V es menor a exactamente dos de A y además es conexa. A los elementos de V y de A les seguimos llamando vértices y aristas, respectivamente. Usando esta misma idea podemos definir de otra forma los poliedros

Definición 2 Un *poliedro* P es una terna $P = (V, A, C)$ de conjuntos (cuyos elementos llamaremos vértices, aristas y caras respectivamente) junto con una relación de orden parcial que cumple que:

- La función dimensión (que manda a los elementos de V al cero, a los de A al uno y a los de C al dos) es una función de rango para el orden. En particular si $v \in V$ es menor que $c \in C$, entonces existe $a \in A$ tal que $v < a < c$.
- Los vértices y aristas menores que una cara forman un ciclo (como gráfica).
- Las aristas y caras mayores que un vértice forman un ciclo (en el que pensamos a las aristas como vértices y a las caras como aristas). A este ciclo le seguimos llamando figura de vértice.

Se dice que dos caras son adyacentes si son incidentes a una misma arista. Dos vértices son adyacentes, también si son incidentes a una misma arista.

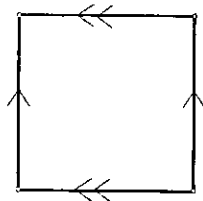
2.1.1 Reglas de pegado

Dada una colección de ciclos ajenos \mathcal{C} queremos construir poliedros cuyas caras sean los ciclos de \mathcal{C} . Para esto necesitamos aparear las aristas de los ciclos.

Diremos que una *regla de pegado* entre los ciclos de \mathcal{C} es un apareamiento entre las aristas de los ciclos que induce una dirección de pegado en las aristas. Es decir, si la regla de pegado nos dice que tenemos que identificar la arista $a_0 = u_0u_1$ con la arista $a_1 = v_0v_1$ entonces también nos dice que, cuando peguemos, si el vértice u_0 va a ir pegado con el vértice v_0 o si va a ir pegado con el vértice v_1 . Una vez que la regla de pegado nos dice con que vértice va pegado u_0 tenemos que u_1 va a ir pegado con el otro vértice incidente a a_1 . Es decir, nos dice con cuál de las dos posibilidades se pegan las aristas. En particular el apareamiento nos dice que cada arista se pega con exactamente otra.

Definición 3 A lo que resulta después de pegar lo llamaremos *protopoliedro*.

Un protopoliedro no es necesariamente un poliedro. Por ejemplo, si tomamos un solo ciclo de longitud cuatro como la colección de ciclos e identificamos sus lados opuestos de la siguiente manera:



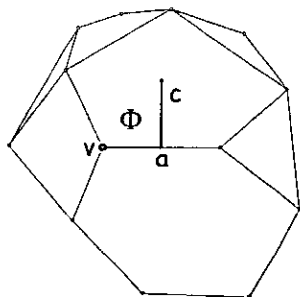
obtenemos un toro, pero no un poliedro. Es decir, dado un poliedro, si le ponemos "telita" en las caras, obtenemos una superficie; sin embargo si tenemos una superficie y le "pintamos" una gráfica, no necesariamente obtenemos un poliedro.

Esto implica que P es un poliedro.

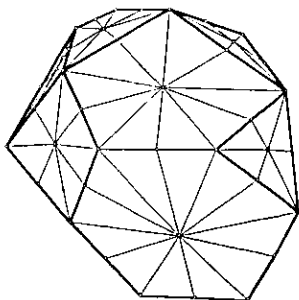
■

2.1.2 Banderas

Una *bandera* $\Phi = (v, a, c)$ de un poliedro P es una tripleta que consta de un vértice (v), una arista (a) y una cara (c) tales que el vértice es incidente a la arista y ésta a su vez a la cara. Al conjunto de todas las banderas de P lo denotamos como $\beta(P)$.



Cada poliedro lo podemos dividir en triángulos cuyos vértices sean: un vértice, el punto medio de una arista que contenga al vértice y el centro de una de las dos caras que contienen a la arista; de esta forma cada bandera queda representada por un triángulo.



Sea $\Phi = (v, a, c) \in \beta(P)$. La arista a es incidente a exactamente dos caras, una de ellas es c y la otra c' , como v es incidente a a entonces la tripleta $\Phi^2 = (v, a, c')$ también es una bandera de P y además Φ y Φ^2 son las únicas dos banderas que contienen tanto a v como a a . Si ahora nos fijamos en la cara c y en su arista a , vemos que ésta tiene exactamente dos vértices,

Sea $\Phi = (v, a, c)$, entonces su bandera 0-adyacente es $\Phi^0 = (v', a, c)$. Si ahora nos fijamos en la bandera 2-adyacente a Φ^0 , tenemos que esta bandera, $(\Phi^0)^2$, tiene la misma arista (a) que Φ , como cada arista está en exactamente dos caras, entonces la cara de $(\Phi^0)^2$ tiene que ser la misma que la de Φ^2 porque tanto Φ^0 como Φ tienen a a como arista y a c como cara, esto quiere decir que $(\Phi^0)^2 = (v', a, c)$. De la misma forma, como cada arista tiene exactamente dos vértices, entonces el vértice de $(\Phi^2)^0$ tiene que ser el mismo que el de Φ^0 , lo que quiere decir que $(\Phi^2)^0 = (v', a, c)$ por lo tanto

$$(\Phi^0)^2 = (\Phi^2)^0$$

2.1.3 Automorfismos

Sea P un poliedro. Un *automorfismo* φ es una biyección de P en él mismo tal que manda vértices en vértices, aristas en aristas y caras en caras preservando la incidencia. Por tanto φ manda banderas en banderas. Al grupo de automorfismos lo denotaremos $\Gamma(P)$.

NOTA: La multiplicación de elementos de $\Gamma(P)$ la haremos por la derecha y denotaremos también la acción de $\Gamma(P)$ en $\beta(P)$ por la derecha.

Proposición 2 Sean $\varphi \in \Gamma(P)$ y $\Phi \in \beta(P)$, entonces $\Phi^i \varphi = (\Phi \varphi)^i$, para $i \in \{0, 1, 2\}$, es decir, los automorfismos preservan adyacencia de banderas.

Demostración. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$, entonces Φ y Φ^i son banderas que difieren únicamente en la i -cara, por lo que cuando les aplicamos a ambas φ tenemos que las j -caras con $j \neq i$ de $\Phi \varphi$ y $\Phi^i \varphi$ son las mismas. Además las i -caras de $\Phi \varphi$ y $\Phi^i \varphi$ son diferentes, ya que un automorfismo no puede mandar caras diferentes en la misma. Como los automorfismos preservan incidencia, entonces $\Phi \varphi$ y $\Phi^i \varphi$ únicamente difieren en la i -cara, por lo tanto $\Phi^i \varphi = (\Phi \varphi)^i$. ■

Un poliedro es *conexo* si su 1-esqueleto es conexo o, equivalentemente, si como superficie es conexo. Es fácil ver que esto es equivalente a que para cualesquiera dos banderas Φ y Ψ existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tales que Φ_j y Φ_{j+1} son adyacentes.

En lo que resta de este capítulo, cuando hablemos de poliedros nos estaremos refiriendo a poliedros conexos, que es como se manejan en la literatura.

Proposición 3 Sea P un poliedro, entonces $\Gamma(P)$ actúa libremente en $\beta(P)$, es decir, cualquier automorfismo que fije una bandera tiene que ser la identidad.

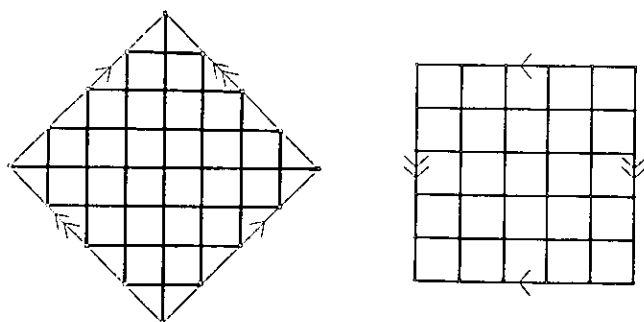
Proposición 4 Sea P un poliedro, entonces $|\Gamma(P)| \leq |\beta(P)|$; más aún, $|\Gamma(P)|$ divide a $|\beta(P)|$.

Demostración. Como $\Gamma(P)$ actúa libremente en $\beta(P)$, entonces cuando tomamos una bandera Φ fija y vemos qué le pasa si le aplicamos cada uno de los elementos de $\Gamma(P)$, tenemos que no hay dos que la manden al mismo lugar. Esto implica que cada órbita de $\Gamma(P)$ en $\beta(P)$ tiene tamaño exactamente $|\Gamma(P)|$, por lo que $|\Gamma(P)| \leq |\beta(P)|$; ahora, como la unión ajena de todas las órbitas de $\Gamma(P)$ en $\beta(P)$ es justamente $\beta(P)$, entonces $|\Gamma(P)|$ divide a $|\beta(P)|$. ■

Proposición 5 P es regular si y sólo si $|\Gamma(P)| = |\beta(P)|$

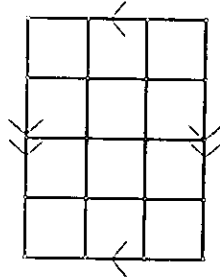
Demostración. Por definición P es regular si y sólo si $\Gamma(P)$ es transitivo en banderas, es decir si y sólo si $\Gamma(P)$ tiene una sola órbita en $\beta(P)$. Como cada órbita de $\Gamma(P)$ en $\beta(P)$ tiene tamaño exactamente $|\Gamma(P)|$, entonces $\Gamma(P)$ tiene una sola órbita en $\beta(P)$ si y sólo si $|\Gamma(P)| = |\beta(P)|$. Por lo tanto P es regular si y sólo si $|\Gamma(P)| = |\beta(P)|$ ■

Ejemplo 2 Los sólidos platónicos, el espacio de configuraciones de 5 puntos en \mathbb{P}^1 y los siguientes toros son regulares:

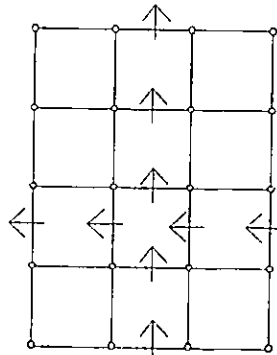


2.2.1 Generadores

Si P es regular, cuando fijamos una bandera $\Phi = (v, a, c)$ (a la que llamaremos bandera base) y vemos sus tres banderas adyacentes Φ^0 , Φ^1 y Φ^2 tenemos que, como el grupo es transitivo en las banderas, existen tres automorfismos



está hecho de cuadrados y pegamos cuatro por vértice. Sin embargo en este poliedro, cuando tomamos una bandera base y consideramos ρ_1 (que fija vértice y cara pero cambia arista) podemos ver que esto no es un automorfismo, pues intercambia las direcciones horizontal y vertical. Estas dos direcciones son distintas ya que podemos hacer un camino de la siguiente manera: nos paramos en una arista viendo hacia una cara, en esa cara tomamos la arista opuesta a la que estamos (es decir, la que no es adyacente) y ahí vemos a la cara de la que no venimos. De esta forma dada una arista horizontal, el camino que obtenemos hasta regresar al punto de partida tiene longitud 4, mientras que si empezamos en una arista vertical este camino tiene longitud 3.



Entonces la bandera base no puede ir a su 1-adyacente por medio de automorfismos y por lo tanto no es regular en el sentido que nosotros definimos. El sentido de esta regularidad es que los poliedros tengan la mayor cantidad posible de simetrías.

lo que quiere decir que $\rho_0\rho_2 = \rho_2\rho_0$, ya que el grupo actúa libremente, entonces

$$(\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_2)(\rho_0\rho_2) = (\rho_0\rho_2)(\rho_2\rho_0) = \varepsilon$$

por lo tanto

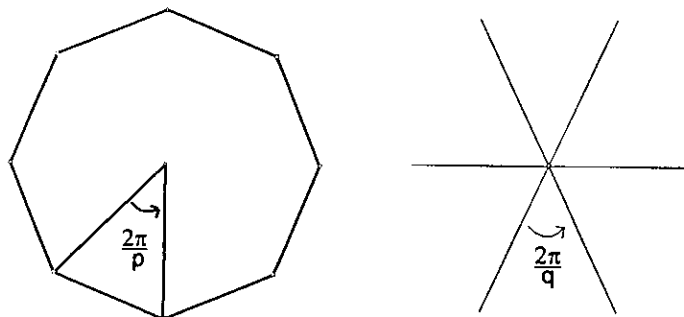
$$p_{02} = p_{20} = 2.$$

Así tenemos que los generadores ρ_0, ρ_1, ρ_2 cumplen al menos las relaciones

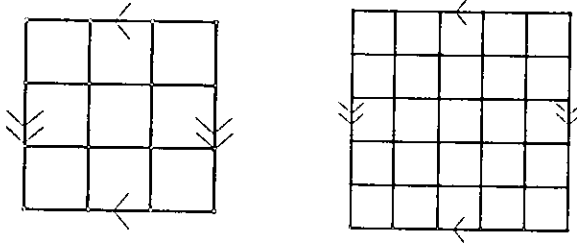
$$\rho_i^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^p = (\rho_1\rho_2)^q = \varepsilon \quad (1)$$

aunque es posible que se necesiten algunas otras relaciones para definir a $\Gamma(P)$. Las relaciones (1) son conocidas como las relaciones de Coxeter. (Ver [5])

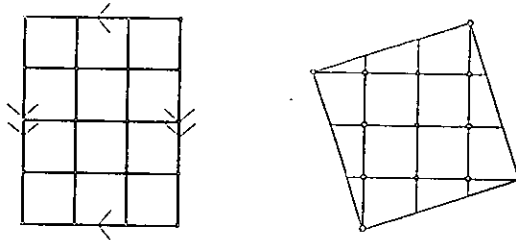
En la representación geométrica de estos automorfismos, el ángulo que forman las reflexiones ρ_0 y ρ_2 es de $\frac{\pi}{2}$, por lo que el $\rho_0\rho_2$ representa la rotación de π en el centro de la arista de la bandera base; las reflexiones ρ_0 y ρ_1 forman un ángulo de $\frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$, mientras que las ρ_1 y ρ_2 forman un ángulo de $\frac{2\pi}{2q} = \frac{\pi}{q}$; esto quiere decir que $\rho_1\rho_0$ y $\rho_1\rho_2$ son rotaciones de $\frac{2\pi}{p}$ en el centro de la cara y de $\frac{2\pi}{q}$ en el vértice de la bandera base, respectivamente:



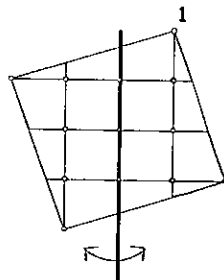
Entonces el triángulo de una bandera se ve más o menos así:



ambos son regulares de tipo $\{4, 4\}$. Cuando estemos hablando de que un poliedro tiene tipo de Schläfli $\{p, q\}$ el poliedro no va a ser necesariamente regular, por ejemplo



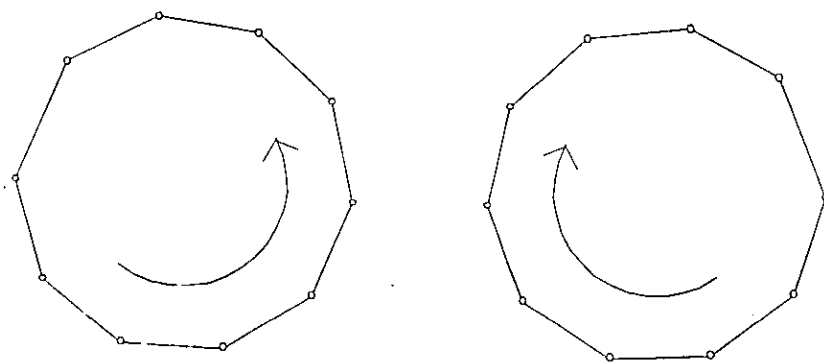
tienen tipo de Schläfli $\{4, 4\}$ pues pegamos cuadrados y de a cuatro por vértice, sin embargo ninguno de los dos es regular. Vimos ya que el primero no es regular. Supongamos que el segundo poliedro es regular, entonces la reflexión:



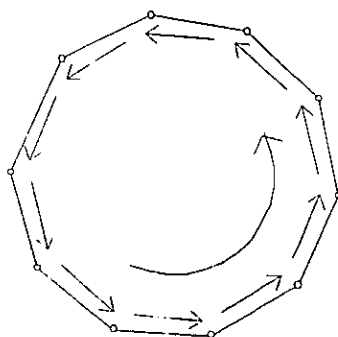
2.3 Poliedros quirales

2.3.1 Orientabilidad

Dado un ciclo C hay dos posibles orientaciones o direcciones que podemos darle:

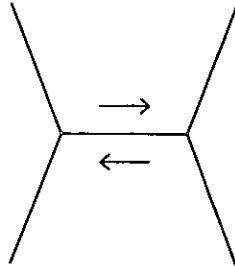


La orientación de un ciclo induce una orientación en cada una de las aristas de éste.



Cuando tenemos un poliedro P podemos orientar todas sus caras; para cada cara escogemos una de las dos orientaciones posibles. Vamos a decir que la orientación entre dos caras adyacentes es compatible si cuando nos fijamos en la arista incidente a ambas tiene en una cara la orientación contraria a la que tiene la otra. Es decir, si la arista que comparten ambos ciclos tiene las

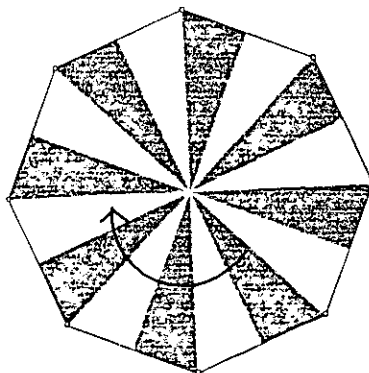
todas sus caras adyacentes. Esta orientación induce una en las aristas, por lo que cada arista la vemos así:



De esta forma podemos pintar de negro las banderas en donde empieza cada flecha que nos dice la orientación de cada arista y de banco a su bandera θ -adyacente.

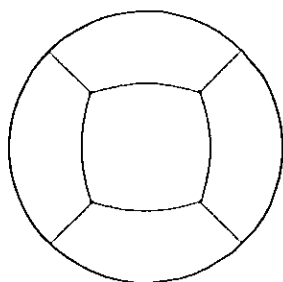
La orientación de las caras de P y su compatibilidad con las adyacentes nos dice que pintando a las banderas de esta forma cada bandera negra va a tener a sus banderas adyacentes de blanco y viceversa, cada bandera blanca tiene a sus adyacentes de negro. Esta coloración de las banderas nos induce una bipartición de su gráfica.

Ahora, si la gráfica de banderas de P es bipartita, entonces podemos colorear cada una de las partes de un color: una parte negro y la otra de blanco. De esta forma las banderas adyacentes a una bandera blanca son negras y viceversa. Entonces podemos orientar cada cara de la siguiente manera: nos paramos en una bandera negra y la orientación que le damos es hacia su bandera θ -adyacente, que es blanca.

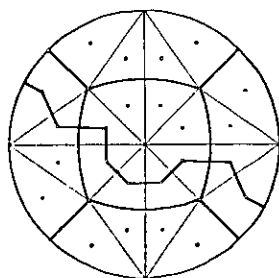


impar con respecto a Φ si no es par. Como ρ_0, ρ_1 y ρ_2 generan al grupo de automorfismos, entonces por medio de σ_0 y σ_2 podemos llegar a cualquier bandera par, ya que $\rho_1\rho_2 = \sigma_0, \rho_2\rho_1 = \sigma_0^{-1}, \rho_0\rho_1 = \sigma_2, \rho_1\rho_0 = \sigma_2^{-1}$ y $\rho_2\rho_0 = \rho_0\rho_2 = \rho_0\rho_1\rho_1\rho_2 = \sigma_2\sigma_0$, esto quiere decir que el índice de $\Gamma^+(P)$ en $\Gamma(P)$ es a lo más 2, y podría pasar que $\Gamma^+(P) = \Gamma(P)$ si el poliedro es no orientable.

Ejemplo 3 Cuando tomamos el cubo e identificamos puntos antípodas obtenemos el medio cubo.



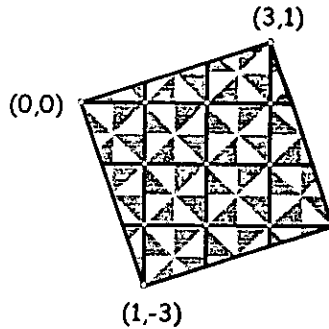
En el medio cubo las rotaciones σ_0 y σ_2 generan todo $\Gamma(P)$, ya que dada una bandera fija, podemos llegar a cualquier otra por una sucesión par de banderas adyacentes.



Definición 5 Sea P regular. Si sucede que el índice de $\Gamma^+(P)$ en $\Gamma(P)$ es 2, diremos que P es *directamente regular*. Esto es equivalente a que P sea regular y orientable.

Ejemplo 4 Los sólidos platónicos son directamente regulares.

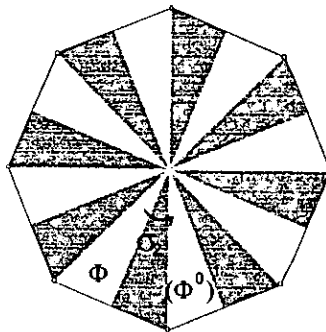
Podemos ver a las banderas de dos colores:



Ver que $\Gamma(P)$ es transitivo en las banderas de los colores será claro después de ver cómo se generan las rotaciones de estos poliedros.

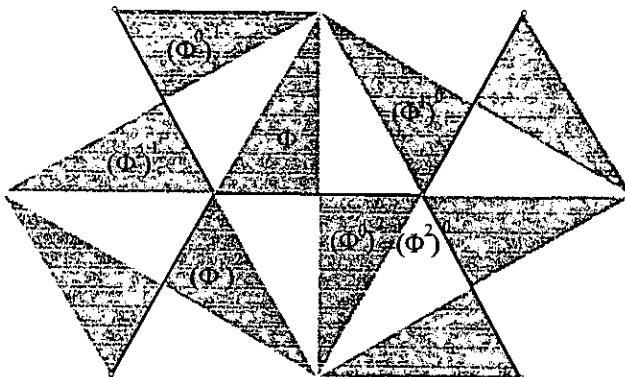
2.3.3 Generadores

Sea P quiral con tipo de Schläfli. Si nos fijamos nada más en una cara, como $\Gamma(P)$ es transitivo en las banderas de los colores, entonces hay un automorfismo que manda a una bandera Φ en $(\Phi^0)^1$. Como $\Gamma(P)$ actúa libremente en las banderas, entonces ese automorfismo es la rotación en el centro de la cara y con un ángulo de $\frac{2\pi}{p}$. Llamemos a este automorfismo σ_2 .



Si ahora nos fijamos qué pasa alrededor de un vértice, la rotación en él y con ángulo $\frac{2\pi}{q}$ es el automorfismo que manda la misma Φ en $(\Phi^1)^2$. Llamemos a

Si nos fijamos en las opciones para i y j nos da que $(\Phi^i)^j$ es una de las siguientes banderas: $(\Phi^1)^2$, $(\Phi^2)^0$, $(\Phi^0)^1$, $(\Phi^2)^1$, $(\Phi^0)^2$ o $(\Phi^1)^0$.



y tenemos que $\Phi\sigma_0 = (\Phi^1)^2$, $\Phi\sigma_2 = (\Phi^0)^1$, $\Phi\sigma_2\sigma_0 = (\Phi^2)^0$, $\Phi\sigma_0^{-1} = (\Phi^2)^1$ y $\Phi\sigma_2^{-1} = (\Phi^1)^0$

Entonces, dependiendo de la j -cara en la que sean iguales Ψ_{k-1} y Ψ_k tenemos una de las siguientes opciones: $\Psi_{k-1}\sigma_0 = \Psi_k$, $\Psi_{k-1}\sigma_0^{-1} = \Psi_k$, $\Psi_{k-1}\sigma_2 = \Psi_k$, $\Psi_{k-1}\sigma_2^{-1} = \Psi_k$ ó $\Psi_{k-1}\sigma_2\sigma_0 = \Psi_k$, es decir, $\Psi_{k-1}\delta = \Psi_k$ con $\delta \in \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$, entonces

$$\Psi = \Psi_k = \Psi_{k-1}\delta = (\Phi\varphi)\delta$$

y si hacemos $\gamma = \varphi\delta$, entonces $\gamma \in \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$ y además $\Psi = \Phi\gamma$. Por lo tanto $\Gamma(P) = \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$. ■

2.3.4 Poliedros semiregulares

Los poliedros quirales y los poliedros directamente regulares tienen muchas cosas en común, por lo que cuando hablemos de *poliedros semiregulares* nos estaremos refiriendo a un poliedro que es quiral o directamente regular. Por esto a los poliedros semiregulares les podemos asociar su tipo de Schläfli $\{p, q\}$.

Un poliedro semiregular es orientable, ya que su gráfica de banderas es bipartita.

Capítulo 3

La construcción

3.1. El grupo simétrico

Para construir los poliedros vamos a usar al grupo simétrico de n elementos (S_n), es decir, el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Cuando hablemos de un elemento $\sigma \in S_n$, es decir de una permutación de n elementos, lo vamos a representar como producto de ciclos ajenos. Por ejemplo la permutación de 4 elementos que manda el primero en el tercero, el segundo lo deja fijo, el tercero al cuarto y el cuarto al primero, la denotaremos como $(1\ 3\ 4)(2)$ o podemos omitir los elementos que quedan fijos y a esta permutación denotarla simplemente como $(1\ 3\ 4)$. Cuando representamos las permutaciones como ciclos hay varias formas de representar una misma permutación, ya que la permutación representada por el ciclo $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ (donde las a_i son elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$) es la misma que la representada por el ciclo $(a_i\ a_{i+1}\ \dots\ a_k\ a_1\ \dots\ a_{i-1})$, para cualquier $i \in \{2, 3, \dots, k\}$.

Cuando tenemos un ciclo podemos hablar de su longitud, que es la cantidad de elementos que tiene el ciclo, y que coincide con su orden en el grupo.

Sean $\sigma \in S_n$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Cuando le aplicamos al elemento i la permutación σ lo haremos por la derecha y entendemos por $i\sigma$ el elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$ al que manda σ a i . Por ejemplo si $\sigma = (2\ 5\ 3\ 1) \in S_5$, entonces $1\sigma = 2$, $2\sigma = 5$, $3\sigma = 1$, $4\sigma = 4$, $5\sigma = 3$.

Llamaremos un *orden cíclico* de longitud n a un elemento de S_n que sea un ciclo de longitud n . Por ejemplo la permutación de 5 elementos $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ es un orden cíclico. Denotaremos al conjunto de todos

Si $\zeta = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, entonces

$$\begin{aligned}\zeta * \varepsilon &= (a_1, a_2, \dots, a_n) * \varepsilon \\ &= (a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, \dots, a_n\varepsilon) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) = \zeta\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\zeta * (\sigma\rho) &= (a_1(\sigma\rho), a_2(\sigma\rho), \dots, a_n(\sigma\rho)) \\ &= ((a_1\sigma)\rho, (a_2\sigma)\rho, \dots, (a_n\sigma)\rho) \\ &= ((a_1\sigma), (a_2\sigma), \dots, (a_n\sigma)) * \rho \\ &= (\zeta * \sigma) * \rho\end{aligned}$$

por lo que la acción está bien definida.

Para la multiplicación tanto por órdenes diédricos como lineales hacemos algo similar: si $\sigma \in S_n$, $\gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n)) \in D_n$ y $\ell = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in L_n$ hacemos

$$\begin{aligned}\gamma * \sigma &= ((a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma)) \\ \ell * \sigma &= [a_1\sigma, a_2\sigma, \dots, a_n\sigma]\end{aligned}$$

Ver que estas dos multiplicaciones son acciones de S_n en D_n y L_n respectivamente es análogo a que es acción en C_n .

Es fácil ver que respecto a la cantidad de elementos se tiene que:

$$\begin{aligned}|C_n| &= (n-1)! \\ |D_n| &= \frac{(n-1)!}{2} \\ |L_n| &= n!\end{aligned}$$

3.2 Primera construcción

Regresando al poliedro que resulta de cinco puntos en \mathbb{P}^1 vemos que hay 12 pentágonos. Cada pentágono tiene 10 banderas, por lo que en total tenemos

De esta forma cada elemento de L_5 representa una única bandera y cada bandera está representada por un único elemento de L_5 .

Como S_5 actúa en L_5 , entonces S_5 actúa en las banderas, por lo que (veremos en el siguiente capítulo) cada elemento de S_5 induce un automorfismo diferente del poliedro. En principio no sabemos si el poliedro tiene más automorfismos. Como cada elemento de S_5 es un automorfismo, entonces

$$|\Gamma(P)| \geq |S_5| = 5! = 120$$

pero habíamos visto que $|\beta(P)| = 120$, por lo tanto

$$|\Gamma(P)| \geq |\beta(P)|$$

pero sabemos que $|\beta(P)| \geq |\Gamma(P)|$ [proposición 3], por lo tanto

$$|\beta(P)| = |\Gamma(P)|.$$

Entonces el poliedro es regular.

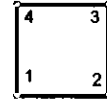
Dejando a un lado los espacios de configuraciones podemos quedarnos únicamente con el poliedro que obtuvimos y generalizar la idea de la construcción para obtener nuevas familias de poliedros. Para hacerlo, tomemos ciclos de longitud n para usarlos como las caras del poliedro. Vamos a colorear sus vértices de n diferentes colores, cada vértice de un color distinto. Consideraremos que dos ciclos son iguales o tienen la misma coloración si es posible llegar de uno al otro por medio de una rotación o una reflexión. Es decir, podemos pensar que las caras son los elementos de D_n . Si empezamos a pintar vértices con los n colores, obtenemos $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos distintos, uno por cada orden diédrico.

Éstos ciclos son las caras con las que construir el poliedro, ya sólo falta una regla de pegado. Para esto, cuando peguemos dos ciclos tendrá que ser por una arista cuyos vértices tengan los mismos colores. De esta forma el poliedro que obtendremos también tendrá sus vértices coloreados, aunque puede tener más de un vértice de cada color; pero cada vértice tiene un solo color.

Para pegar, tomamos uno de estos ciclos que está coloreado por $((a_1, a_2, \dots, a_n))$ escogemos por ejemplo la arista a_1a_2 para pegar por ahí y lo que hacemos es intercambiar los colores a_1 y a_2 y pegar por lo que resulta de hacer esto, así la cara $((a_1, a_2, \dots, a_n))$ va a estar pegada por la arista a_1a_2 con la

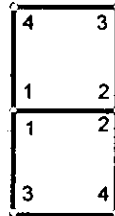
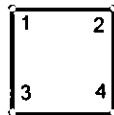
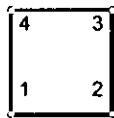
Ejemplo 6 El caso $n = 3$ no tiene sentido, pues únicamente tenemos un orden diédrico. Veamos el caso $n = 4$. Empezamos escogiendo una cara, por

ejemplo la que está coloreada por $((1, 2, 3, 4))$



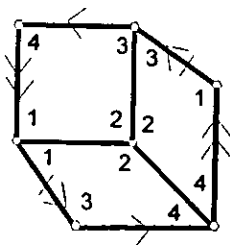
y esco-

gemos la arista 12 para empezar a pegar, entonces tenemos que intercambiar los colores de la arista, esto quiere decir que la vamos a pegar con la cara coloreada con $((2, 1, 3, 4))$



Si seguimos pegando la primera cara que escogimos, es decir la $((1, 2, 3, 4))$, pero ahora la pegamos por la arista 23, cuando cambiamos estos colores vemos que la tenemos que pegar con la cara $((1, 3, 2, 4))$ y si vemos estas

Cuando seguimos pegando de esta forma todas las aristas obtenemos



que es el medio cubo.

Es fácil ver que el poliedro de 5 puntos en \mathbb{P}^1 es el mismo que resulta de hacer la construcción para $n = 5$.

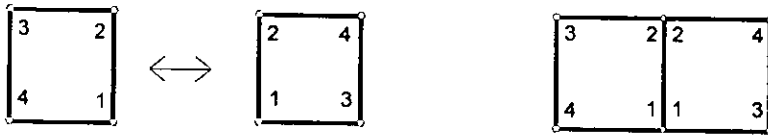
De la misma forma que antes, podemos identificar las banderas de cada poliedro con los elementos de L_n , por lo que, si seguimos el argumento que usamos para ver que el poliedro con $n = 5$ es regular, para el caso general, tenemos que todos estos los poliedros son regulares, sin embargo estos poliedros no son orientables.

3.3 Segunda construcción

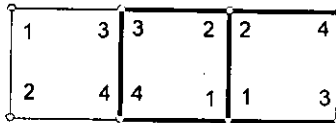
Para poder estar seguros de que el poliedro que obtenemos después de pegar ciclos es orientable, tenemos que darle una orientación a los ciclos (y que el pegado la respete). Si queremos orientar a los órdenes diédricos tenemos dos opciones de orientación distintas, por lo que por cada ciclo que teníamos vamos a obtener dos con orientaciones contrarias que podemos marcar con

3.3. SEGUNDA CONSTRUCCIÓN

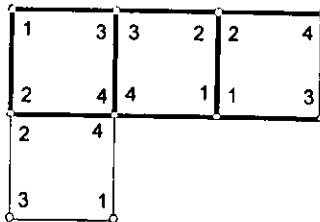
que resulta de cambiar el 1 por el 2, es decir, $(2, 1, 3, 4)$:



Y pegamos $(1, 2, 3, 4)$ por la arista 34 con $(1, 2, 4, 3)$, y con la que ya teníamos pegada nos queda

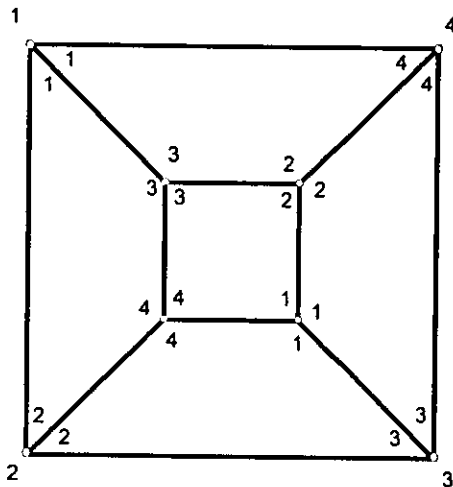


Seguimos pegando, ahora el cuadrado $(1, 2, 4, 3)$ por la arista 24, lo pegamos con $(1, 4, 2, 3)$:



después pegamos $(1, 4, 2, 3)$ por 14 con $(4, 1, 2, 3)$, pero este cuadrado es el

para cerrar el cubo:



Obtener un cubo no es de extrañarse pues es la doble cubierta del medio cubo que nos apareció en el ejemplo anterior.

Proposición 9 P_n es un poliedro con tipo de Schläfli $\{n, n - 1\}$.

Demostración. La regla de pegado es un apareamiento: el ciclo

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

lo pegamos por la arista $a_i a_{i+1}$ con el ciclo

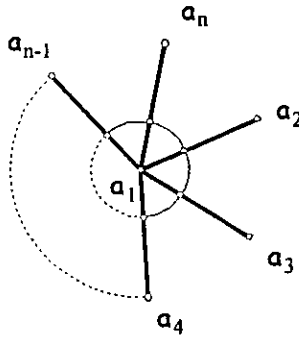
$$(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n).$$

Si ahora queremos pegar este ciclo por la arista $a_{i+1} a_i$ vamos a intercambiar los vértices y lo pegamos con

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Como los ciclos están coloreados de forma que en una cara no se repiten colores y el pegado respeta los colores, entonces no pegamos vértices de una misma cara en ningún momento, por lo tanto P_n es un poliedro.

siguiendo con ese razonamiento nos queda la siguiente figura de vértice



Es decir, en cada vértice hay $n - 1$ ciclos pegados, por lo tanto P_n es un poliedro con tipo de Schläfli $\{n, n - 1\}$.

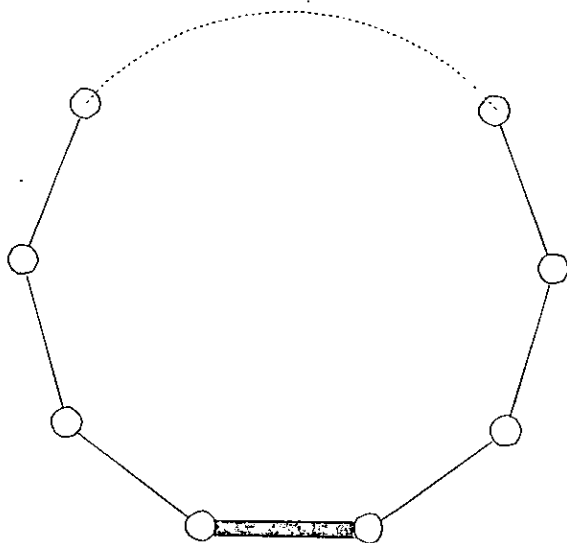
■

Como antes, podemos identificar a los órdenes lineales con banderas de P_n , pero ahora ya no nos alcanzan. El orden lineal $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ va a representar a la bandera cuyo vértice es a_1 , arista a_1a_2 y la cara es (a_1, a_2, \dots, a_n) . A cada orden lineal le corresponde un bandera, pero ahora las banderas no están todas representadas por los órdenes lineales. Por ejemplo, la bandera cuyo vértice es a_2 , arista a_2a_1 y cara (a_1, a_2, \dots, a_n) no está representada por ningún orden lineal, ya que el orden lineal $[a_2, a_1, a_n, \dots$ representa a la bandera cuyo vértice es a_2 , arista a_2a_1 , pero la cara es $(a_2, a_1, a_n, \dots, a_3)$, que es la misma que $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, pero como ahora la dirección sí nos importa, ésta cara es diferente a la (a_1, a_2, \dots, a_n) . Esto implica que en cada cara justamente la mitad de las banderas queda

En el siguiente capítulo veremos algunas propiedades de estos poliedros.

3.4 Tercera construcción

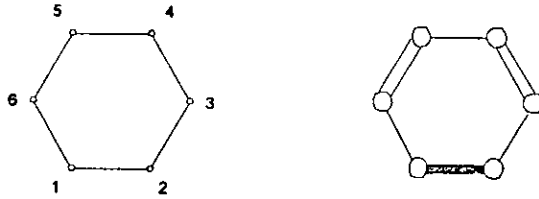
Hasta ahora cuando pegamos ciclos lo hemos hecho con una permutación que es una transposición de los colores de la arista que pegamos. Ahora generalizaremos esta idea. Para esto vamos a seguir usando ciclos coloreados por órdenes cíclicos de n elementos, es decir, van a tener orientación, pero la permutación, además de cambiar los colores de la arista por la que pegamos, también cambiará algunos otros de los colores del ciclo. Esto lo podemos representar en una charolita en forma de ciclo con una arista distinguida que es por la que se pega:



pero además de esta arista marcamos también algunas diagonales y otras aristas del ciclo con la condición de que cada vértice esté en a lo más una de

3.4. TERCERA CONSTRUCCIÓN

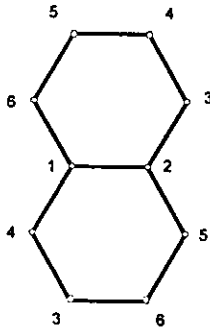
Empecemos pegando el hexágono (1, 2, 3, 4, 5, 6) por la arista 12:



hacemos los cambios y nos queda

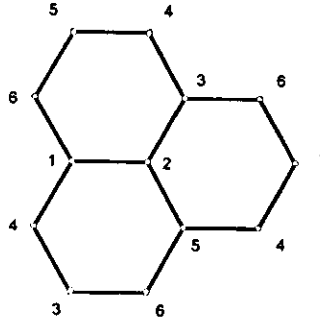


por lo que pegamos a (1, 2, 3, 4, 5, 6) por 12 con (1, 4, 3, 6, 5, 2)

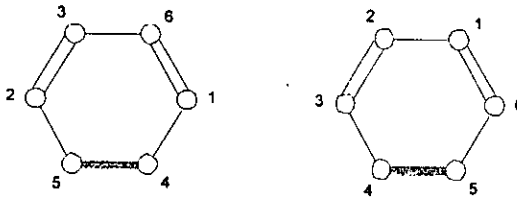


3.4. TERCERA CONSTRUCCIÓN

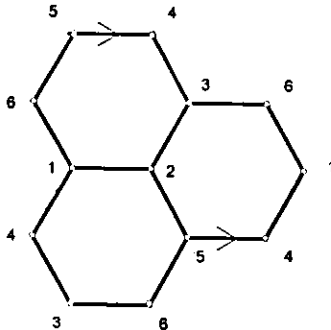
con el hexágono (1, 2, 3, 4, 5, 6) que es con el que empezamos, y el dibujo nos queda:



Ahora peguemos (1, 6, 3, 2, 5, 4) por 54



otra vez este hexágono ya había aparecido, pero como el dibujo se complica si los pegamos, simplemente vamos a dejar indicado que estas aristas están identificadas



Capítulo 4

Formalización

Debe quedar intuitivamente claro que las construcciones anteriores dan lugar a poliedros con mucha simetría. Veremos que la construcción da que son semiregulares, pero queda la pregunta de si son quirales o no. El Teorema 3 nos da una subfamilia de regulares pero queda abierto el caso general. Para poder demostrar el teorema y en general estudiar la simetría de estos poliedros necesitamos formalizar la construcción e introducir un poco de notación.

4.1 Etiquetas

Nótese que antes de pegar los ciclos podríamos llamar al vértice de color 1 simplemente 1, o a la arista cuyos vértices tiene colores 4 y 5 simplemente arista 45. Sin embargo después de pegar podemos tener más de un vértice 1 ó más de una arista 45, por lo que hace falta decir en qué ciclo vive la arista 45 para distinguirla. Recordemos que los ciclos los estamos identificando con ordenes cíclicos. Si intentamos con esto nombrar también las aristas y vértices va a ser un poco difícil ya que cuando hablamos de órdenes cíclicos no distinguimos en donde empezamos, si estamos hablando de un vértice en particular vamos a necesitar saber donde empezar.

Por esto ahora vamos a etiquetar las caras con órdenes lineales, aunque tengamos más de una etiqueta para cada cara. Sea $\ell = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in L_n$, entonces llamamos:

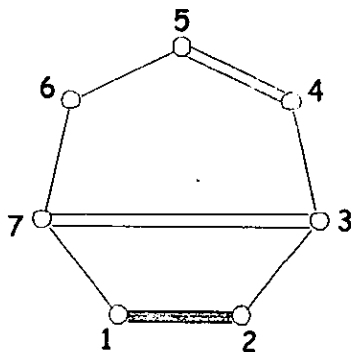
- $c^2(\ell)$ al ciclo que está etiquetado con el orden cíclico (a_1, a_2, \dots, a_n)

4.2 Construcción

Falta ver cómo vamos a pegar las caras. Necesitamos un elemento $\alpha \in S_n$ que va a jugar el papel de la charolita que teníamos. Para esto tenemos que pedirle a α que sea producto de transposiciones ajenas y que siempre contenga a la (12). La transposición (12) va a jugar el papel de la arista distinguida en la charolita, mientras que cada una de las demás transposiciones será alguna de las diagonales u otras aristas que teníamos marcadas. Entonces vemos a α como,

$$\alpha = (12)\beta$$

con β producto de transposiciones ajenas que fijen a 1 y a 2. Como α es producto de transposiciones ajenas, entonces $\alpha^2 = \varepsilon$. Por ejemplo, para $n = 7$, la charolita



equivale a la permutación $\alpha = (12)(37)(45)$.

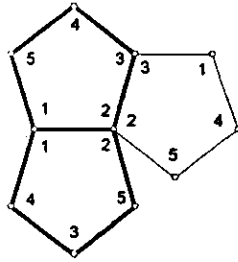
Llamemos a una $\alpha \in S_n$ como ésta “ α -charolita”.

Ahora sí estamos listos para pegar los ciclos. Tomamos una α -charolita y un ciclo etiquetado (y con vértices coloreados) con el orden cíclico $\zeta = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. A esta cara le asociamos la permutación γ_1 tal que $i\gamma_1 = a_i$, es decir, la permutación correspondiente al orden lineal $\ell = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Le asociamos esta permutación ya que $c^2(\gamma_1) = \zeta$. Hacemos ahora una nueva permutación γ_2 , definida como

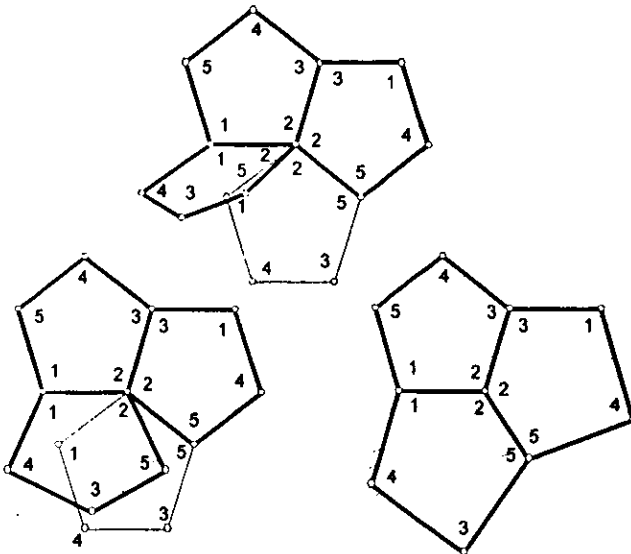
$$\gamma_2 = \alpha\gamma_1.$$

Esto es lo equivalente a poner el ciclo sobre la charolita y hacer los cambios correspondientes. Sabemos que los colores de $c^1(\gamma_1)$ son a_1 y a_2 , ya que como el orden lineal correspondiente a γ_1 es $\ell_{\gamma_1} = [1\gamma, 2\gamma, \dots, n\gamma]$,

Pegamos otra artista del ciclo $(2, 3, 4, 5, 1)$, haciendo $\gamma_1 = (23451)$. La vamos a pegar con $\gamma_2 = \alpha\gamma_1$, entonces, $\gamma_2 = (12)(34)(12345) = (135)(2)(4)$, cuyo ciclo es $(3, 2, 5, 4, 1)$



Hagamos ahora $\gamma_1 = (12534)$ (su ciclo es $(2, 5, 4, 1, 3)$), ésta la tenemos que pegar con $\gamma_2 = \alpha\gamma_1$, por lo que tenemos $\gamma_2 = (12)(34)(12534) = (153)(2)(4)$, cuyo ciclo es $(5, 2, 1, 4, 3)$



con la arista $c^1(\alpha(\alpha\gamma_1)) = c^1(\alpha^2\gamma_1)$, pero como $\alpha^2 = \varepsilon$, entonces estamos pegando a $c^1(\alpha\gamma_1)$ con $c^1(\gamma_1)$. Por lo tanto cada arista se pega con exactamente otra arista.

A la hora de pegar lo hacemos siempre respetando los colores, es decir, después de pegar, cada vértice tiene un solo color. Como las caras son órdenes cíclicos, entonces todos los vértices de una cara tienen colores distintos. Por lo tanto en ningún momento identificamos dos vértices de una misma cara.

Esto implica que $\widetilde{\sum}_\alpha$ es un poliedro. ■

En los ejemplos 8 y 9 vimos que el poliedro que resulta de hacer el pegado no es necesariamente conexo.

Definición 7 Dada una $\alpha \in S_n$, α -charolita, a la componente conexa de $\widetilde{\sum}_\alpha$ que contenga a la cara etiquetada con el orden cíclico $(1, 2, \dots, n)$ le llamaremos \sum_α .

Observemos que en la segunda construcción que hicimos cambiábamos únicamente los colores de la arista por la que pegábamos y obteníamos un poliedro P_n . Si hacemos $\alpha = (12) \in S_n$, tenemos justamente ese caso, ya que esta permutación equivale a la charolita que sólo tiene la arista distinguida. Como dados dos órdenes cíclicos podemos llegar de uno a otro por medio de transposiciones (y estas están generadas por las de la forma $(i, i+1)$), entonces P_n es conexo, por lo tanto $P_n = \sum_{(12)}$.

4.3 Las simetrías

Proposición 10 \sum_α es orientable.

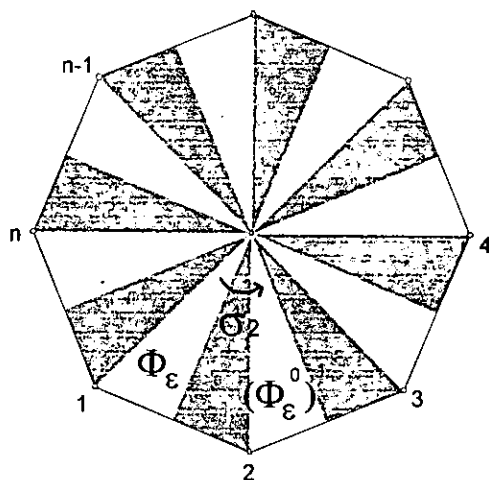
Demostración. Si pintamos de blanco a las banderas de \sum_α que están etiquetadas por elementos de S_n son exactamente la mitad de las banderas de \sum_α . Podemos pintar de negro el resto de las banderas. Observemos que si $\gamma \in S_n$, entonces la bandera $\Phi_\gamma = (c^0(\gamma), c^1(\gamma), c^2(\gamma))$, es blanca. Sin embargo sus tres banderas adyacentes no están etiquetadas, ya que si γ es tal que $i\gamma = a_i$, hacemos γ_1, γ_2 y $\gamma_3 \in S_n$ tales que

$$\begin{aligned} i\gamma_1 &= a_{i+1} \text{ si } i < n \text{ y } n\gamma_1 = a_1 \\ i\gamma_2 &= a_{i-1} \text{ si } i > 1 \text{ y } 1\gamma_1 = a_n \\ \gamma_3 &= \alpha\gamma \end{aligned}$$

recordando que no hay que confundir a este ciclo como permutación con el orden cíclico asociado. Vamos a demostrar que la acción de σ_2 en \sum_α es rotar en la cara básica $c^2(\varepsilon)$. Como

$$\varepsilon\sigma_2 = \sigma_2 = (12\dots n)$$

el orden cíclico asociado sigue siendo el canónico, $(1, 2, \dots, n)$, por lo que $c^2(\varepsilon)\sigma_2 = c^2(\varepsilon)$. El color de $c^0(\sigma_2)$ es $1\sigma_2 = 2$ y los de la arista $c^1(\sigma_2)$ son $1\sigma_2 = 2$ y $2\sigma_2 = 3$, por lo que la bandera Φ_{σ_2} es la correspondiente al orden lineal $[2, 3, \dots, n, 1]$



es decir,

$$\Phi_\varepsilon\sigma_2 = \Phi_{\sigma_2} = (\Phi_\varepsilon^0)^1.$$

Por otra parte, veamos que la acción de α en \sum_α es rotar π en el punto medio de la arista $c^1(\varepsilon)$. Cuando pegamos la cara $c^2(\varepsilon)$ por la arista $c^1(\varepsilon)$ lo hicimos con $c^1(\alpha\varepsilon) = c^1(\alpha)$, cuyo ciclo es α y $c^2(\alpha) \neq c^2(\varepsilon)$. El color de $c^0(\alpha)$ es $1\alpha = 2$, por lo que $c^0(\varepsilon) \neq c^0(\alpha)$. Además $c^i(\varepsilon)\alpha = c^i(\alpha)$, por tanto

$$\Phi_\varepsilon\alpha = \Phi_\alpha = (\Phi_\varepsilon^0)^2$$

rotaciones de \sum_{α} , y es $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle = \langle \alpha, \sigma_2 \rangle$ el subgrupo de S_n que está actuando en las banderas de \sum_{α} .

Tenemos también que \sum_{α} contiene a todos los órdenes cíclicos si y sólo si contiene a todas las banderas etiquetadas con órdenes lineales, es decir, es conexo. Esto sucede si y sólo si $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle = S_n$.

Teorema 2 \sum_{α} es semiregular y su grupo de rotaciones es $\langle \alpha, \sigma_2 \rangle$

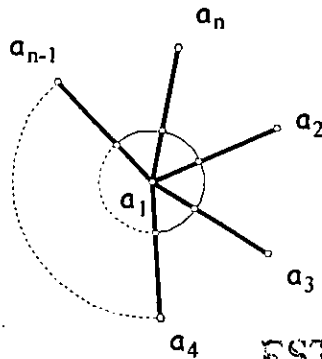
Demostración. Ya sabemos que \sum_{α} es orientable [prop 9]. Hemos demostrado que tiene una rotación en la cara básica, σ_2 , y una rotación en el vértice básico, σ_0 . Con la misma técnica que la demostración de la proposición 8 se sigue que el grupo de rotaciones de \sum_{α} es $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$; pero $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle = \langle \alpha, \sigma_2 \rangle$. ■

Proposición 11 Sea $\alpha \in S_n$. El tipo de Schläfli de \sum_{α} es $\{n, m\}$, donde m es el orden de $(12\dots n)\alpha$ como elemento de S_n .

Demostración. Como está hecho de n -ágonos, sólo falta ver qué pasa con la figura de vértice. σ_0 es la rotación en el vértice y tenemos que $\sigma_0 = \sigma_2\alpha = (12\dots n)\alpha$. Por lo tanto si m es el orden de $(12\dots n)\alpha$, entonces m es el orden de σ_0 . Esto implica que el tipo de Schläfli de \sum_{α} es $\{n, m\}$. ■

Ejemplo 10 Si $\alpha = (12)$ y cualquier n , tenemos que $\widetilde{\sum}_{\alpha}$ es P_n (el poliedro que obtuvimos en la segunda construcción). Sabemos que $\langle \alpha, \sigma_2 \rangle = S_n$, por lo que, como ya habíamos visto, P_n es conexo ($P_n = \sum_{\alpha}$) y tiene tipo de Schläfli $\{n, n-1\}$.

Tenemos también que $\sigma_2\alpha = (12\dots n)(12) = (23\dots n)$, por lo que la figura de vértice se ve:



Teorema 3 Si α es simétrica, entonces \sum_α es regular.

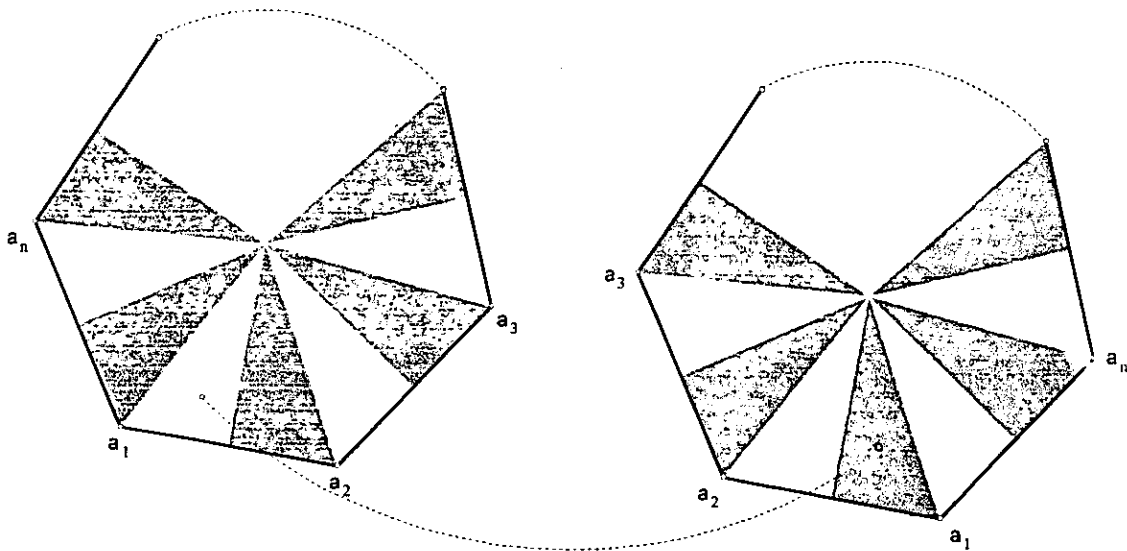
Demostración. A todas las banderas blancas las tenemos etiquetadas por órdenes lineales o por permutaciones.

Dada una bandera negra $\Psi = (v, a, c)$ sabemos que su bandera 0-adyacente es blanca, por lo que está identificada con $\gamma \in S_n$. De esta forma podemos ver a Ψ en términos de γ :

$$\Psi = \Phi_\gamma^0.$$

De esta forma podemos representar a todas las banderas negras.

Sabemos que sólo necesitamos un automorfismo que mande banderas negras en blancas y blancas en negras. El automorfismo que vamos a buscar es el que a una cara, coloreada con el orden cíclico $\zeta = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ la manda a su cara opuesta $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, respetando los colores. Para esto la cara $c^2 [a_1, a_2, \dots, a_n]$ tiene que ir a la cara $c^2 [a_2, a_1, a_n, \dots, a_3]$, la arista $c^1 [a_1, a_2, \dots, a_n]$ a la $c^1 [a_2, a_1, a_n, \dots, a_3]$ y finalmente el vértice $c^0 [a_1, a_2, \dots, a_n]$ al $c^0 [a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2]$.



Vamos a definir una función f en las banderas de \sum_α tal que dada Φ_γ , una bandera blanca, $(\Phi_\gamma) f = \Phi_{v\gamma}^0$, que es negra. Y dada Φ_γ^0 , una bandera negra, $(\Phi_\gamma^0) f = \Phi_{v\gamma}$, que es blanca.

Para ver que f es un automorfismo tenemos que ver que conserva las adyacencias. Es claro que f manda caras en caras, por lo que preserva la 0 y

y como también sabemos que $(\Psi^i)^i = \Psi$, tenemos que,

$$((\Phi_\gamma) f)^2 = (\Phi_{\alpha\gamma}^0)^0 = \Phi_{\alpha\gamma}$$

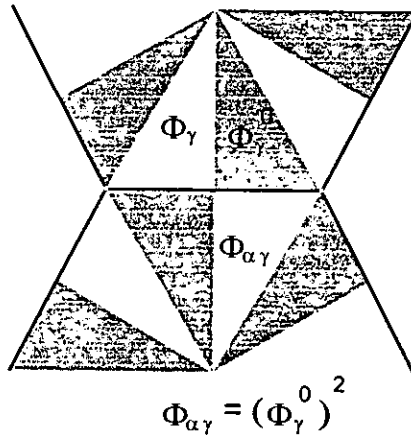
Por lo tanto, junto con (2), obtenemos

$$((\Phi_\gamma) f)^2 = (\Phi_\gamma^2) f$$

lo que demuestra (1) para banderas blancas.

Veamos ahora con banderas negras. Sea Φ_γ^0 una bandera negra, entonces por construcción de \sum_α tenemos que

$$(\Phi_\gamma^0)^2 = \Phi_{\alpha\gamma}$$



Por lo que

$$(\Phi_\gamma^0)^2 f = (\Phi_{\alpha\gamma}) f = \Phi_{\alpha\gamma}^0 = \Phi_{\alpha\gamma}^0 = \Phi_{\alpha\gamma}^2$$

y además

$$((\Phi_\gamma^0) f)^2 = (\Phi_{\alpha\gamma})^2,$$

por lo tanto $(\Phi_\gamma^0)^2 f = ((\Phi_\gamma^0) f)^2$.

Entonces f preserva las adyacencias, por lo tanto f es un automorfismo que manda banderas negras a blancas y viceversa. Entonces \sum_α es regular. ■

Capítulo 5

La última y nos vamos

Para terminar vamos a dar una última construcción en la que ya no le vamos a pedir a α que cumpla ser una involución. Los poliedros que vamos a construir también tienen mucha simetría, sin embargo ya no podemos asegurar que sean semiregulares.

5.1 Cuarta construcción

Tomando como caras de los poliedros a los elementos de C_n usamos una $\alpha \in S_n$ para hacer una regla de pegado. Era importante que esta α cumpliera que $\alpha = (12)\beta$ con β producto de transposiciones ajenas que no contengan a 1 ni a 2. Usábamos a (12) para poder pegar por esa arista, mientras que $\alpha^2 = \varepsilon$ era importante para que cada arista de un ciclo la pegáramos con exactamente una de otro y el pegado fuera un apareamiento. Podemos intentar generalizar esta α pidiéndole únicamente que contenga a la transposición (12) . Si $\alpha^2 \neq \varepsilon$ no podemos usar exactamente la misma regla de pegado, ya que tendríamos más de dos caras incidentes a cada arista, lo cual hace que el resultado del pegado no sea un poliedro. Lo que vamos a hacer entonces es duplicar los ciclos. Vamos a tomar dos copias de ciclos coloreados por elementos de C_n , una de las copias la pintamos de negro y la otra de blanco. A la hora de pegar vamos a pegar siempre una arista de una cara negra con una arista de una cara blanca y viceversa.

Para ver quién se pega con una cara (a_1, a_2, \dots, a_n) negra por la arista $a_1 a_2$, identificamos la cara y arista con la permutación γ tal que $i\gamma = a_i$. Ahora pegamos a la arista $c^1(\gamma)$ negra con la arista $c^1(\alpha\gamma)$ blanca.

Bibliografía

- [1] J. Arocha, J Bracho, L. Montejano, *The spaces of projective configurations*. (En preparación).
- [2] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes* (3ª edición). Dover. Nueva York, 1973.
- [3] H.S.M. Coxeter, O.J. Moser, *Generators and relations of discrete groups*. (4ª edición). Springer. Berlín, 1980.
- [4] B. Grünbaum, *Regular polyhedra-old and new*. Aequationes Mathematicae **16**.pp. 1 – 20. 1977.
- [5] P. McMullen, E. Schulte, *Abstract Regular Polytopes*. (En preparación).
- [6] B. Nostrand, E. Schulte, A.I. Weiss, *Constructions of chiral polytopes*. Congressus Numerantium **97**. pp. 165 – 170. Canadá, 1993.
- [7] E. Schulte, A.I. Weiss, *Chiral Polytopes*. DIMACS Series in Discrete Mathematics **4**. pp. 493 – 516. 1991.