

00372

2



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

“Oscilaciones estelares provocadas  
por fuerzas de marea en sistemas  
binarios masivos”

T E S I S

Que para obtener el grado académico de

**Maestro en ciencias**  
(Astronomía)

Presenta

**FAUSTO CERVANTES ORTIZ**

México, D. F

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

**“Oscilaciones estelares provocadas  
por fuerzas de marea en sistemas  
binarios masivos”**

T E S I S

Que para obtener el grado académico de

**Maestro en ciencias  
(Astronomía)**

Presenta

**FAUSTO CERVANTES ORTIZ**

Codirectores de tesis:

Dr. Edmundo Moreno Díaz

Dra. Gloria Koenigsberger Horowitz

---

**A la memoria de la doctora  
Rosario Peniche García**

---

## Agradecimientos:

A mi familia, por todo su apoyo durante mis estudios.

A Edmundo Moreno y Gloria Koeningsberger, por dirigir esta tesis.

A José H. Peña, por ser mi tutor durante mis estudios de maestría.

A los doctores Luis Aguilar Chiu, Armando Arellano Ferro, Julia Espresate, William Lee y Jaime Urrutia Fucugauchi, por aceptar ser mis sinodales.

Al Instituto de Astronomía, por mi formación en el posgrado y por brindarme las facilidades necesarias para llevar a cabo este trabajo.

Al Conacyt, por la beca otorgada a través del proyecto 27744-E, para realizar esta tesis.

A Carmelo Guzmán y Alfredo Díaz, por su ayuda en problemas de cómputo.

A la UNAM, y en particular a la Facultad de Ciencias y al CCH Oriente, por mi formación académica previa.

A la Universidad de Estrasburgo, por su base de datos SIMBAD, que fue de gran ayuda para obtener información.

A los que me faltaron.

A todos aquellos mexicanos que pagan impuestos, sin cuya aportación yo no hubiera podido estudiar una carrera, mucho menos un posgrado.

---

# Índice

Introducción		v
Parte I	Antecedentes	vi
Capítulo 1	Tiempos característicos	1
Capítulo 2	Oscilaciones no radiales en estrellas aisladas sin rotación	7
Capítulo 3	Oscilaciones en estrellas aisladas con rotación	17
Capítulo 4	Observación de oscilaciones no radiales en sistemas binarios	26
Capítulo 5	Modelo para las interacciones de marea	29
Parte II	Resultados	37
Capítulo 6	Modos de oscilación	38
Capítulo 7	Oscilaciones en sistemas binarios circulares	44
Capítulo 8	Oscilaciones en sistemas binarios excéntricos	60
Capítulo 9	Aplicación del modelo a sistemas conocidos	72
Conclusiones		86
Referencias		87
Apéndice		88

## Introducción

Generalmente cuando se estudia la estructura y evolución de las estrellas, se supone que están aisladas. Sin embargo, sabemos que cerca de la mitad de las estrellas forman parte de sistemas binarios. De éstos, posiblemente la mitad sean sistemas binarios cercanos. Tales sistemas se definen como aquellos en los que la evolución de cada estrella está fuertemente influida por la presencia de la otra.

Usualmente se trata la evolución en estos sistemas suponiendo equilibrio (órbita circular, corrotación y coplanaridad). En tales condiciones, cuando una de las estrellas sale de la secuencia principal y su radio crece, la transferencia de masa se da según el modelo del lóbulo de Roche. Este modelo dice que cuando las dimensiones de la estrella más evolucionada alcanzan las de la primer superficie equipotencial común entre las dos estrellas, el potencial de la otra estrella atraerá el material de la primera hacia sí. Pero el equilibrio tarda mucho en alcanzarse, según veremos en el capítulo 1.

En estrellas masivas aisladas la presión de radiación provoca pérdida de masa durante la secuencia principal y en etapas posteriores. Pero también otros procesos como las oscilaciones estelares pueden jugar un papel importante, aunque se ha hecho muy poco para explorar sus consecuencias (Hansen y Kawaler, 1994).

Si las oscilaciones pueden provocar pérdidas de masa en estrellas aisladas, en sistemas binarios ésto puede volverse significativamente más importante debido a las fuerzas de marea.

El propósito de este trabajo es explorar el comportamiento de las oscilaciones en sistemas binarios masivos, que pueden ser de importancia en los procesos de pérdida de masa durante las fases previas al equilibrio del sistema.

La parte I da los antecedentes referentes al problema de las interacciones de marea, las oscilaciones estelares sin y con rotación, y el modelo con el que se trabajó.

La parte II describe los resultados hallados al aplicar el modelo de Moreno & Koenigsberger a una serie de configuraciones. También se discutirá brevemente la potencial importancia de tales resultados en los procesos evolutivos.

Concluimos que las oscilaciones no radiales pueden incrementar las pérdidas de masa, la evolución de estrellas en sistemas binarios cercanos, fuera de equilibrio, seguirán caminos evolutivos diferentes a los de estrellas aisladas.

# Capítulo 1

## Tiempos característicos

Cuando hay un sistema binario cercano (o sea, uno en el que la separación orbital sea del orden de las dimensiones de los radios de las estrellas que lo forman), las mareas provocan cambios en los parámetros orbitales del sistema ( $a$ , el semieje mayor;  $e$ , la excentricidad orbital;  $\Omega$ , la velocidad orbital;  $\omega_1$  y  $\omega_2$  los vectores de velocidad de rotación de cada una de las estrellas;  $i_1$  e  $i_2$  los ángulos entre  $\Omega$  y  $\omega_1$ , y entre  $\Omega$  y  $\omega_2$ , respectivamente). El momento angular total se conservará, a menos que haya vientos estelares demasiado fuertes. Sin embargo, debido a la disipación de energía en las capas superiores de las estrellas, la energía total del sistema decrecerá monotónicamente (Tassoul, 2000). Al final de esto se llegará, o bien a una colisión, o a una tendencia asintótica hacia un estado de energía cinética mínima (suponiendo que el momento angular se conserva). Dicho estado está caracterizado por órbita circular ( $e = 0$ ), corrotación ( $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$ ) y coplanaridad ( $i_1 = i_2 = 0$ ).

Fuera del estado de mínima energía descrito antes, cada estrella siente un campo gravitacional externo variable que provoca movimientos oscilatorios que se pueden describir como una “marea en equilibrio” y una “marea dinámica” (Tassoul, 2000). La marea en equilibrio es simplemente la forma instantánea que se obtiene al suponer que prevalece un equilibrio mecánico estricto, aun cuando los potenciales perturbadores dependan del tiempo; o sea que ya hay una deformación permanente y las oscilaciones forzadas que se superponen a esta deformación se amortiguan rápidamente y no modifican más la distorsión previa, que ya alcanzó el equilibrio. La marea dinámica es la respuesta dinámica del sistema a las fuerzas de marea, con sus modos naturales de oscilación.

Como sabemos, la estructura de las estrellas poco masivas consiste de un núcleo radiativo pequeño donde se llevan a cabo las reacciones nucleares y capas externas que transportan la energía liberada mediante procesos convectivos. En las estrellas masivas el núcleo es convectivo (y relativamente grande) y está rodeado por capas que se suponen en equilibrio hidrostático y a través de las cuales fluye la energía mediante procesos puramente radiativos.

Existe una diferencia importante en la teoría del equilibrio de los sistemas binarios en los casos en que las capas superficiales sean convectivas y los casos de capas superficiales radiativas. Las teorías clásicas (desarrolladas por Zahn, Papaloizou, Savonije, Pringle y Smeyers principalmente) se basan en los efectos de la viscosidad turbulenta, para estrellas con una capa exterior convectiva profunda; y en el amortiguamiento radiativo para estrellas con una capa exterior radiativa.



En las siguientes secciones se describirán brevemente tales tratamientos. La sección 1.1 describe el caso convectivo y la sección 1.2 el caso radiativo. El modelo que se usa en tales tratamientos es una estrella principal o primaria de masa  $M_1$  y con radio  $R_1$ , sobre la cual actúa el potencial  $\Phi(r, \phi)$  de una estrella secundaria de masa  $M_2$  y radio  $R_2$ . La distancia entre los centros de masa de las dos estrellas es  $d$ . Generalmente se supone  $R_2 = 0$  (esto es, una masa puntual) para simplificar los cálculos, con lo cual sólo se usa  $\omega_1 = \omega$ . Los otros parámetros son como se definieron en el primer párrafo.

## 1.1 El mecanismo de torca de la marea y el modelo de fricción débil en estrellas convectivas

El potencial  $\Phi$  debido a la estrella secundaria, de masa  $M_2$  es a primer orden:

$$\Phi(r, \phi) = (GM_2 r^2 / d^3) P_2(\cos \phi), \quad (1)$$

con  $r$  la distancia desde el centro de la estrella primaria,  $\phi$  el ángulo entre la dirección al punto del campo y la línea que une los dos centros de masas, y  $P_2$  el polinomio de Legendre de segundo orden (los polinomios de Legendre de orden  $\ell$  se pueden definir con la fórmula:  $P_\ell(x) = (1/2^\ell \ell!) d^\ell / dx^\ell (x^2 - 1)^\ell$ ).

Si la disipación de energía por viscosidad es despreciable, la marea en equilibrio alcanzada se puede describir por medio de un potencial efectivo  $\Phi_{\text{ef}}$  cuyo valor en la superficie de la estrella principal está dado por:

$$\Phi_{\text{ef}}(R_1, \phi) = k(GM_2 R_1^2 / d^3) P_2(\cos \phi), \quad (2)$$

con  $k$  la constante de movimiento apsidal. Dicha constante fue definida por Zahn (1975). Las expresiones para la misma son muy complejas y no se reproducirán aquí, pero en el mismo artículo se dan valores calculados numéricamente para  $M = 1.6$  a  $15 M_{\text{sol}}$  y los valores de  $k$  van de  $1.37 \times 10^{-2}$  hasta  $2.31 \times 10^{-2}$ . Físicamente esta constante está relacionada con la función de densidad de la estrella y va desde  $0.75 \psi$  para densidad constante, hasta cero en un cuerpo con toda la masa concentrada en el centro (Russell, 1928), donde  $\psi$  representa la razón entre la fuerza centrífuga y la fuerza de gravedad en el ecuador.

Para valores de  $r$  mayores que  $R_1$ , el potencial efectivo será la solución externa de la ecuación de Laplace, ésta es:

$$\Phi_{\text{ef}}(r, \phi) = k(GM_2 R_1^5 / d^3 r^3) P_2(\cos \phi), \quad (3)$$

siempre y cuando las protuberancias de las mareas sean simétricas con respecto a la línea que une los dos centros de masas. Pero la viscosidad introduce un retardo en tiempo  $\Delta t$  que retrasa a las protuberancias en un ángulo pequeño  $\delta$  si la velocidad angular de rotación de la primaria es menor (o adelanta si es mayor) que la velocidad angular orbital. Esto produce una componente de torca en la atracción gravitacional de las dos estrellas. La torca  $\Gamma$  que siente la secundaria es:  $\Gamma = -M_2(\partial\Phi_{e\neq}/\partial\varphi)$ , con la derivada angular evaluada en  $r = d$  y  $\varphi = \delta$ . Vemos pues que:

$$\Gamma = (3/2)k(GM_2^2/R_1)(R_1/d)^6 \text{sen}2\delta \approx 3k(GM_2^2/R_1)(R_1/d)^6 \delta. \quad (4)$$

La torca de marea que actúa sobre la primaria es exactamente opuesta a esta torca.

En la llamada aproximación de fricción débil se supone que  $\delta$  es proporcional tanto al alejamiento de la sincronía (es decir, a la diferencia entre las velocidades angulares) como a la fuerza de disipación viscosa. Esta aproximación no tiene ninguna justificación física (Savonije et al., 1985) y se hace únicamente para simplificar los cálculos. Con esta aproximación:

$$\delta = (\omega - \Omega)\Delta t = (\omega - \Omega)(t_{\text{ff}}^2/T), \quad (5)$$

con  $t_{\text{ff}} = (GM_1/R_1^3)^{-1/2}$  el tiempo de caída libre y  $T$  la escala de tiempo típica en que tienen lugar cambios significativos en la órbita a través de la evolución por las mareas. Como este último es inversamente proporcional a la eficiencia de la disipación por viscosidad, en lo sucesivo se hará  $T = R^2/v_c$ , con  $v_c$  el coeficiente de viscosidad de las celdas convectivas. También se supondrá que la primaria pasa a través de una sucesión de estados de rotación rígida, durante la cual la torca de la marea causa un cambio lento pero inexorable en la velocidad angular  $\omega$ . Tenemos entonces  $I d\omega/dt \approx -\Gamma$ , con  $I$  el momento de inercia de la primaria con respecto a su eje de rotación. Entonces podemos estimar el tiempo característico para la sincronización  $t_{\text{sinc}}$  con:

$$t_{\text{sinc}} = -(\omega - \Omega)/(d\omega/dt) \approx I(\omega - \Omega)/\Gamma \approx (r_g^2/3k)(T/q^2)(d/R_1)^6, \quad (6)$$

con  $r_g = (I/M_1 R_1^2)^{1/2}$  y  $q = M_2/M_1$ . Al mismo tiempo, a través de la torca, se transfiere momento angular del espín de la primaria a la órbita de la secundaria. Esto resulta en un cambio secular en la razón de distancias  $d/R_1$  y con ello, en la velocidad angular orbital  $\Omega$ .

Una simplificación común es considerar a la secundaria como una masa puntual, de tal modo que sólo se originen mareas en la primaria. Con esto Zahn (1977,1978) dio las ecuaciones que describen los cambios en los cuatro parámetros orbitales  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$ , en función de las masas, radios y valores iniciales de los mismos. Usando esas cuatro ecuaciones Zahn pudo verificar que el momento angular se conserva, o sea:

$$d\{I\omega + [M_1 M_2 / (M_1 + M_2)] [G(M_1 + M_2) a (1 - e^2)]^{1/2}\} / dt = 0, \quad (7)$$

puesto que despreciaba la contribución de la compañera, por tratarse de una masa puntual.

Haciendo uso de las ecuaciones de Zahn, Hut (1981) encontró que la escala de tiempo característica para la circularización de la órbita es mucho mayor que las otras tres ( $t_{\text{ff}}$ ,  $T$  y  $t_{\text{sinc}}$ ) en sistemas donde el momento angular orbital es mayor que la suma de los momentos angulares de rotación. Hut (1981) obtiene la ecuación linealizada:

$$(\omega - \Omega)^{-1} d\omega / dt = -t_{\text{sinc}}^{-1}, \quad (8)$$

donde

$$t_{\text{sinc}} = (r_g^2 / 3k)(T/q^2)(a/R_1)^6, \quad (9)$$

lo cual confirma la estimación de la escala de tiempo dada en la ec. (6). Para dos cuerpos extendidos (o sea, que la secundaria no es puntual) en órbitas cuasi-circulares (esto es, excentricidad muy pequeña) alrededor del centro de masas común se tiene que:

$$(1/e) de/dt = -(1/t_{\text{circ1}}) - (1/t_{\text{circ2}}), \quad (10)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la primaria y la secundaria, respectivamente. Para la primaria se tiene:

$$t_{\text{circ}} = (2/21k)[T/(q+q^2)](a/R_1)^8; \quad (11)$$

la secundaria (de masa y radio  $M_2$  y  $R_2$ ) hace una contribución similar al tiempo de circularización.

De las ecuaciones (9) y (11) vemos que la razón  $t_{\text{sinc}}/t_{\text{circ}}$  es  $(7/3)(1/M_1 + 1/M_2)(I/a^2)$ . Esto implica que el tiempo de circularización es mucho mayor que el de sincronización; entendiéndose aquí por "sincronización" en una órbita excéntrica que en el periastro las velocidades angulares orbital y de rotación coinciden.

También Hut (1981) demostró que la rotación de cada componente se sincronizará con la velocidad orbital instantánea en el periastro, puesto que en esa posición la interacción de la

marea es más intensa; y que el ángulo  $i$  decrece rápidamente (simultáneamente con la sincronización).

Para estrellas con una capa exterior convectiva profunda, se considera que la fricción turbulenta es la responsable de la torca de la marea  $\Gamma$ , de tal modo que el tiempo característico  $T$  debe ser una escala de tiempo de fricción convectiva relacionada con los parámetros de la capa exterior. Tomando  $T = R_1^2/v_c$ , con  $v_c = L_c V_c$ , donde  $L_c$  es el tamaño típico de los remolinos más grandes en la convección, y  $V_c$  es la velocidad convectiva típica. Se tiene que típicamente  $T$  es del orden de  $(M_1 R_1^2/L)^{1/3}$ , con  $L$  la luminosidad total de la estrella. Para una estrella tipo solar,  $T \sim 160$  días. De las ecuaciones (6) y (9) esta escala implicaría que el tiempo de sincronización  $t_{\text{sinc}}$  es proporcional a la cuarta potencia del periodo orbital  $P$  ( $=2\pi/\Omega$ ), lo cual nos daría (usando las ecs. (6) y (11))  $t_{\text{circ}} \propto P^{16/3}$ . Estos exponentes tan grandes nos muestran la enorme dependencia con el periodo orbital de los tiempos característicos. Con esto podemos estimar algunos tiempos de sincronización y de circularización proponiendo los periodos orbitales. Para  $P = 1$  día se tendría:  $t_{\text{sinc}} \approx 10^4$  años y  $t_{\text{circ}} \approx 10^6$  años, mientras que para  $P = 10$  días serían  $t_{\text{sinc}} \approx 10^8$  y  $t_{\text{circ}} \approx 10^{11}$  años.

## 1.2 El mecanismo de resonancia en binarias radiativas

Cowling (1941) hizo un estudio de los modos de oscilación naturales que tienen lugar en una estrella debido a una perturbación no periódica (en general todos los objetos tienen unos modos naturales de oscilación que dependen únicamente de sus características intrínsecas, por ejemplo, densidad, elasticidad, etc.). En dicho trabajo sugirió que algunos de ellos podrían entrar en resonancia con el potencial periódico de una marea. Después Zahn (1975) notó que en una componente de un sistema binario que poseyera una capa exterior radiativa las resonancias estarían fuertemente amortiguadas por la difusión radiativa, que opera en una capa delgada debajo de la superficie estelar. Debido a este proceso disipativo, la marea dinámica no tiene la misma dirección que el potencial forzador por lo que se genera una torca que tiende a sincronizar la rotación con el movimiento orbital.

Para evaluar el tiempo característico de sincronización en una estrella de este tipo, debemos calcular la amplitud de la oscilación forzada en la superficie estelar, tomando en cuenta el amortiguamiento radiativo. Zahn (1975) demostró que la protuberancia debida a las mareas dinámicas es mucho menor que la producida por las mareas en equilibrio; sin embargo, a diferencia de esta última, la protuberancia debida a las mareas dinámicas puede tomar cualquier orientación con respecto a la compañera, dependiendo de la frecuencia de la acción del potencial perturbador. La torca resultante de la marea dinámica  $\Gamma_d$  es proporcional al producto  $(R_1/a)^6(\omega-\Omega)^{5/3}$ , si se supone que el gradiente de densidad es continuo a través de la interfase entre el núcleo y la capa exterior. Se introduce el tiempo de sincronización definido por Zahn (1975):

$$t_{\text{sinc}}^{-1} = d[|(\omega-\Omega)/\Omega|^{-5/3}]/dt. \quad (12)$$

Con  $I d\omega/dt \approx -\Gamma_d$  y la ecuación de conservación del momento angular (7), Zahn (1976) estima la escala de tiempo  $t_{\text{sinc}}$ :

$$t_{\text{sinc}} = (r_g^2/5E_s)[t_{\text{ff}}/(q^2(1+q)^{5/6})](a/R_1)^{17/2}, \quad (13)$$

donde  $E_s$  es la constante estructural definida por Zahn (1975), que tiene un significado físico análogo al de la constante apsidal, sólo que en este caso también se toman en cuenta los movimientos convectivos. En el mismo artículo da valores para este parámetro, que depende principalmente del tamaño del núcleo convectivo. Sobre la secuencia principal se tiene  $E_s \approx 10^{-8}$  con  $M_1 = 2M_{\text{sol}}$  y  $E_s \approx 10^{-6}$  cuando  $M_1 = 10 M_{\text{sol}}$ . Para excentricidades moderadas Zahn (1976) muestra también que:

$$t_{\text{circ}} = (2/21E_s)[t_{\text{ff}}/(q(1+q)^{11/6})](a/R_1)^{21/2}, \quad (14)$$

con una contribución similar de la secundaria al tiempo efectivo de circularización del sistema (o sea que el  $t_{\text{circ}}$  real  $\approx 2 \times t_{\text{circ}}$  dado en la ecuación 14). El tiempo de sincronía de un sistema crece fuertemente al incrementarse la razón de distancias  $a/R_1$  y el periodo orbital, debido al exponente tan grande en la ecuación (14).

Para este caso es más difícil estimar los tiempos característicos, por lo que sólo menciono que para un sistema de dos estrellas de masas iguales a  $10 M_{\text{sol}}$  cada una, y radios de  $5 R_{\text{sol}}$ , separadas por  $a = 33 R_{\text{sol}}$ , se tendrían  $t_{\text{sinc}} \approx 10^6$  y  $t_{\text{circ}} \approx 10^9$  años. Como estos tiempos crecen con  $(a/R_1)$ , se sigue que sistemas separados más de cinco veces el radio de la estrella principal tendrán tiempos de sincronización y circularización mayores que la escala evolutiva estelar.

Como pudimos ver, los tiempos característicos son muy grandes, por lo que se justifica efectuar un cálculo en el que no tomemos en cuenta los procesos evolutivos (sincronización, circularización, nucleosíntesis, etc), para comprender el comportamiento superficial de la estrella.

## Capítulo 2

# Oscilaciones no radiales en estrellas aisladas sin rotación

En este capítulo se describe la teoría de las oscilaciones no radiales en estrellas aisladas, sin rotación. El tratamiento sigue a Hansen y Kawaler (1994) casi al pie de la letra.

### 1. Linealización de las ecuaciones hidrodinámicas

Para describir las oscilaciones no radiales, primero consideraremos a las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por simplicidad se hará la suposición de movimientos adiabáticos. Despreciaremos la viscosidad y otros efectos disipativos y supondremos que no hay esfuerzos de cizalladura en el fluido. Las ecuaciones que requerimos son: la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional  $\Phi$ , la de continuidad y la del movimiento:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\rho (\partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi \quad (3)$$

con  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  la velocidad del fluido,  $\Phi$  el potencial gravitacional,  $\rho$  la densidad y  $P$  la presión. Esto da la descripción Euleriana del movimiento en la posición  $\mathbf{r}$  que nos interesa para ver que pasa con  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , etc. como funciones del tiempo. En una estrella no rotante en equilibrio hidrostático,  $\mathbf{v}$  es cero en todo lugar.

Adoptando la descripción Lagrangiana, consideremos un elemento que se desplaza de su posición de equilibrio en  $\mathbf{r}$ , por un vector infinitesimal  $\xi(\mathbf{r}, t)$  (cuya componente radial es  $\delta r$ ). Si  $\mathbf{v} = 0$ , las perturbaciones Euleriana y Lagrangiana de  $\mathbf{v}$ , representadas por  $\mathbf{v}'$  y  $\delta \mathbf{v}$  (se usará siempre ' y  $\delta$  para las perturbaciones Eulerianas y Lagrangianas, respectivamente, de una variable), son iguales y están dadas por:

$$\mathbf{v}' = \delta \mathbf{v} = d\xi / dt \quad (4)$$

con  $d/dt$  la derivada de Stokes

$$d/dt = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (5)$$

Conforme se desplaza el fluido, asimismo se desplazan las demás variables físicas. Por ejemplo, la presión  $P(\mathbf{r})$  que originalmente estaba asociada con el elemento en  $\mathbf{r}$ , se vuelve  $P(\mathbf{r}) + \delta P(\mathbf{r}, t)$  cuando el elemento se mueve a  $\mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}, t)$ . Lo mismo aplica a la

densidad y su perturbación  $\delta\rho(\mathbf{r},t)$ . Estos son desplazamientos Lagrangianos y se operan con  $\delta$ .

Si el movimiento es adiabático,  $\delta P$  y  $\delta\rho$  cumplen:

$$\delta P/P = \gamma_1 \delta\rho/\rho \quad (6)$$

Siendo  $\gamma_1$  el índice adiabático para un gas ideal. Nótese que no se puede usar una relación similar para las perturbaciones eulerianas  $P'(\mathbf{r},t)$  y  $\rho'(\mathbf{r},t)$ , pues esas perturbaciones se usan para hallar las nuevas presiones y densidades en un punto dado  $\mathbf{r}$  sin decir de donde vino el fluido. Las variaciones eulerianas y lagrangianas están conectadas por ciertas relaciones, por ejemplo para la densidad:

$$\delta\rho = \rho' + \xi \cdot \nabla\rho \quad (7)$$

El procedimiento a seguir consiste en reemplazar  $P$ ,  $\rho$ ,  $\Phi$  y  $\mathbf{v}$ , por  $P + P'$ ,  $\rho + \rho'$ ,  $\Phi + \Phi'$  y  $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$  en las ecuaciones 1 a 3, multiplicando y tomando términos de primer orden en las perturbaciones. La ecuación (3) se vuelve:

$$\rho \partial^2 \xi / \partial t^2 = -\nabla P - \rho \nabla \Phi - \nabla P' - \rho \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi \quad (8)$$

pero

$$-\nabla P - \rho \nabla \Phi = 0 \quad (9)$$

y sólo quedan perturbaciones. Las ecuaciones de continuidad y de Poisson dan:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho \xi) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (11)$$

Al establecer la forma de la ecuación de continuidad, hemos dado lo que resulta luego de integrar en el tiempo y remover una constante de integración al imponer  $\rho' = 0$  en  $\xi = 0$ .

Aunque hemos linealizado las ecuaciones, el conjunto es aun difícil de resolver. Para simplificar aun más el sistema, se convierten de ecuaciones diferenciales parciales a ordinarias. Supondremos que las variaciones  $\xi$ ,  $P'$ ,  $\rho'$  y  $\Phi'$  se pueden analizar por el teorema de Fourier, siendo proporcionales a  $e^{i\sigma t}$ , con  $\sigma$  la frecuencia angular. Por ejemplo,

$$\xi(\mathbf{r},t) = \xi(\mathbf{r})e^{i\sigma t} \quad (12)$$

Con esta sustitución la variación en el tiempo se separa y todas las demás variaciones son funciones únicamente del vector radial  $\mathbf{r}$ .

El segundo paso es ignorar completamente la variación en el potencial gravitacional  $\Phi'$ . Este paso, llamado *aproximación de Cowling* (Cowling, 1941), es muy bueno, sabiendo que durante el movimiento del fluido hay muy poca masa involucrada, lo cual introduce errores casi imperceptibles, pero simplifica considerablemente el tratamiento matemático.

Podemos expandir la ecuación de continuidad a

$$\rho'/\rho = -\nabla \cdot \xi - \xi \cdot \nabla \rho/\rho \quad (13)$$

pero el último término se puede relacionar con la variación Lagrangiana para dar:

$$\delta\rho/\rho = -\nabla \cdot \xi. \quad (14)$$

A través de la condición adiabática, también podríamos relacionar a  $\nabla \cdot \xi$  con la variación de la presión.

Ahora se desarrolla la ecuación de movimiento en sus componentes vectoriales, considerando primero la parte radial, que es:

$$\sigma^2 \xi_r = (1/\rho) \partial P'/\partial r - (\rho'/\rho^2) dP/dr \quad (15)$$

donde  $\nabla \Phi$  se reemplazó por  $-\nabla P/\rho$  usando la condición hidrostática para la estrella no perturbada y  $\xi_r$  es la componente radial de  $\xi(r)$ . Nótese que  $P$  es función sólo de  $r$  y por tanto no necesitamos derivadas parciales para su gradiente. Ahora manipulamos el término que contiene  $P'$  para que la derivada radial actúe sobre  $P'/\rho$ , con lo cual obtenemos:

$$\sigma^2 \xi_r = (P'/\rho^2) dp/dr + \partial/\partial r (P'/\rho) - (\rho'/\rho^2) dP/dr. \quad (16)$$

Después de esto, manipulamos el primer término del lado derecho para transformar  $P'$  y  $\rho'$  por sus formas lagrangianas  $\delta P$  y  $\delta\rho$ . Luego hacemos uso de la condición adiabática y de la ecuación (14) para llegar finalmente a:

$$\sigma^2 \xi_r = \partial/\partial r (P'/\rho) - A(r) \Gamma_1 P/\rho \nabla \cdot \xi \quad (17)$$

donde  $A(r) = d \ln \rho / dr - (1/\gamma_1) d \ln P / dr$  es el llamado discriminante de Schwarzschild, que juega un papel importante en la convección. Por otro lado,  $\gamma_1 P/\rho$  es el cuadrado de la velocidad local del sonido. Trabajando de manera similar con las otras componentes de  $\xi$  se obtiene:

$$\sigma^2 \xi_\theta(r, \theta, \phi) = \partial/\partial \theta [(1/r)(P'(r)/\rho)] \quad (18)$$

$$\sigma^2 \xi_\phi(r, \theta, \phi) = (1/\sin \theta) \partial/\partial \phi [(1/r)(P'(r)/\rho)] \quad (19)$$

El paso siguiente es resolver las tres ecuaciones para  $\xi$ .



## 2. Separación de las ecuaciones de pulsación

Las tres ecuaciones (17), (18) y (19) tienen las cuatro incógnitas  $\xi_r$ ,  $\xi_\theta$ ,  $\xi_\phi$  y  $P'/\rho$ . Sin embargo, sólo dos de ellas son independientes. Los otros dos grados de libertad están contenidos en una función clásica. Para demostrarlo, propondremos una solución y veremos si se verifica. Sea

$$\begin{aligned}\xi(r, \theta, \phi) &= \xi_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r + \xi_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + \xi_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi \\ &= [\xi_r(r) \mathbf{e}_r + \xi_t(r) \mathbf{e}_\theta \partial/\partial\theta + \xi_t(r) \mathbf{e}_\phi (1/\sin\theta) \partial/\partial\phi] Y_{\ell m}(\theta, \phi)\end{aligned}\quad (20)$$

donde los  $\mathbf{e}_i$  son los vectores unitarios de las coordenadas esféricas, y  $\xi_t(r)$  es una nueva función sólo de  $r$ . La función dependiente del ángulo  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  es el armónico esférico de índices  $\ell$  y  $m$ . Esta función, que hace la separación angular, surge en la física matemática como solución de la ecuación diferencial parcial:

$$(1/\sin\theta) \partial/\partial\theta (\sin\theta \partial Y_{\ell m}/\partial\theta) + (1/\sin^2\theta) \partial^2 Y_{\ell m}/\partial\phi^2 + \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = 0. \quad (21)$$

Aquí  $\ell$  debe ser un entero positivo o cero y  $m$  puede tomar solo los valores  $-\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, \ell-1, \ell$ . Entonces para un valor dado de  $\ell$  hay sólo  $2\ell+1$  valores permitidos de  $m$ . Nótese que  $\ell = 0$  es un caso especial porque  $Y_{00}(\theta, \phi)$  es una constante y no depende ni de  $\theta$  ni de  $\phi$ , o sea, las soluciones para  $\ell = 0$  sólo dependen de  $r$  y entonces corresponden a modos radiales.

Sea también:

$$P'(r)/\rho = [P'(r)/\rho] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (22)$$

$\xi_t(r)$  y  $P'/\rho$  están relacionadas con:

$$\xi_t(r) = (1/\sigma^2 r) P'(r)/\rho \quad (23)$$

La función  $\xi_t(r)$  reemplaza a  $P'/\rho$  y a las componentes  $\theta$  y  $\phi$  de  $\xi$  y nos referiremos a ella como el desplazamiento transversal.

Si las componentes angulares de las ecuaciones (20) y (23) se meten en las ecuaciones de la fuerza (18) y (19), las derivadas de  $Y_{\ell m}$  se cancelan en ambos lados de las ecuaciones resultantes. Por ejemplo, el lado izquierdo de (18) es (usando (20)):

$$\sigma^2 \xi_\theta(r, \theta, \phi) = \sigma^2 \xi_t(r) \partial Y_{\ell m}/\partial\theta$$

mientras que el lado derecho se vuelve (con (22) y (23)):

$$\partial/\partial\theta [(1/r)P'(r)/\rho] = \sigma^2 \partial \xi_t(r) Y_{\ell m}/\partial\theta = \sigma^2 \xi_\theta(r, \theta, \phi)$$

Entonces la componente  $\theta$  de la fuerza se satisface con nuestra elección de  $\xi_t$  y la separación de variables. Lo mismo para  $\phi$ .

La dificultad de la ec. (17) es el término radial de la divergencia de  $\xi(r, \theta, \phi)$ . Esta es:

$$\nabla \cdot \xi = (1/r^2) d/dr(r^2 \xi_r) + (1/r \sin \theta) \partial/\partial \theta (\xi_\theta \sin \theta) + (1/r \sin \theta) \partial/\partial \phi (\xi_\phi) \quad (24)$$

Pero si metemos aquí (20), recobramos los dos primeros términos de (23) y

$$\nabla \cdot \xi = (1/r^2) d/dr(r^2 \xi_r) Y_{\ell m} - [(\ell+1)/r] \xi_t Y_{\ell m} \quad (25)$$

donde  $\xi_t$  sólo depende de  $r$ . Por otro lado,  $\nabla \cdot \xi$  es, de (14), lo mismo que  $-\delta\rho/\rho$ , que puede escribirse:

$$\delta\rho/\rho = (\rho/\gamma_1 P)(\sigma^2 r \xi_t - g \xi_r) \quad (26)$$

donde se ha usado la ec. de equilibrio hidrostático para reemplazar la derivada de la presión por  $-pg$  y se han eliminado factores comunes de  $Y_{\ell m}$ . Como resultado final se tendrá una ecuación diferencial de primer orden, luego de igualar la divergencia y  $-\delta\rho/\rho$ . Pero antes veremos unas frecuencias importantes.

La primera de estas frecuencias es la de Brunt - Väisälä dada por:

$$N^2 = -Ag = -g [d \ln p / dr - (1/\gamma_1) d \ln P / dr] \quad (27)$$

donde  $g$  es la gravedad superficial. Esta es la frecuencia de oscilación asociada con una parcela perturbada de fluido en un medio convectivamente estable ( $N^2 > 0$ ).

La segunda es la de Lamb, dada por:

$$S_\ell^2 = [\ell(\ell+1)/r^2] \gamma_1 P / \rho = [\ell(\ell+1)/r^2] v_s^2 \quad (28)$$

esta es simplemente la que corresponde al recíproco de la escala de tiempo que resulta al dividir una longitud de onda horizontal entre la velocidad local del sonido ( $v_s$ ).

El número de onda transversal es (en  $\text{cm}^{-1}$ ):

$$k_t^2 = \ell(\ell+1)/r^2 = S_\ell^2/v_s^2 \quad (29)$$

Si relacionamos una longitud de onda transversal  $\lambda_t = 2\pi/k_t$  a  $k_t$ ,  $S_\ell^{-1}$  es el tiempo que le toma a una onda sonora viajar la distancia  $\lambda_t/2\pi$ . La ecuación que resulta al igualar  $\nabla \cdot \xi$  y  $-\delta\rho/\rho$  es, luego de un poco de álgebra y usando (25) y (26):

$$r d\xi_r/dr = [k_t^2 g r / S_\ell^2 - 2] \xi_r + r^2 k_t^2 [1 - \sigma^2 / S_\ell^2] \xi_t \quad (30)$$

También, si usamos (17), (22) y (26):

$$r \, d\xi_r/dr = [1 - N^2/\sigma^2] + [rN^2/g - 1]\xi_t \quad (31)$$

Las ecuaciones (30) y (31) juntas dan un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2° orden. Si hubiéramos dejado en el potencial variaciones del campo, el sistema habría sido de 4° orden. La aproximación de Cowling captura la esencia del comportamiento a baja amplitud.

Las condiciones de frontera de nuestras dos ecuaciones salen del comportamiento en la superficie y en el centro. La condición en el centro depende de cómo varían varias cantidades hidrostáticas como  $A$  y  $P$  con  $r$  cerca del centro, y de imponer que  $\xi_r$  y  $\xi_t$  sean finitos ahí. Estas soluciones regulares van como  $(\xi_r, \xi_t) \propto r^{\ell-1}$  para  $r$  pequeña y la relación entre ellas es:

$$\xi_r(r) = \ell \xi_t \quad \text{conforme } r \rightarrow \infty \quad (32)$$

La condición en la superficie depende de las condiciones atmosféricas de la estrella estática. En la forma más simple en que las condiciones de frontera son ceros, las perturbaciones deben ser tales que la presión superficial sea cero. Esto es lo mismo que requerir que  $\delta P$  sea cero en la superficie. Para expresar esto como relación entre  $\xi_r$  y  $\xi_t$  considérese que (26) puede reescribirse como:

$$\delta P/P = (\rho/P)[\sigma^2 r \xi_t - g \xi_r] \quad (33)$$

Justo debajo de la superficie la razón  $\delta P/P$  debe ser finita por consideraciones atmosféricas. Conforme nos acercamos a la superficie esto debe de seguir valiendo aun si  $P$  va a cero. Sin embargo, el factor  $\rho/P$  fuera de los corchetes va a infinito porque, en el caso del gas ideal,  $\rho/P$  es inversamente proporcional a la temperatura y  $T$  disminuye en dirección a la superficie. Entonces para que la perturbación relativa de la presión siga finita se requiere que:

$$\xi_t(R) = g_s \xi_r(R)/(\sigma^2 R) \quad (34)$$

con  $g_s$  la gravedad superficial.

Ahora tenemos dos ecuaciones diferenciales y dos condiciones de frontera. Pero, como para las oscilaciones radiales, nuestras ecuaciones y condiciones de frontera son lineales y homogéneas, entonces tenemos que fijar una normalización. La elección de normalización es arbitraria y elegimos  $\xi_r(R) = 1$ . El sistema está ahora sobredeterminado y  $\sigma^2$  es un eigenvalor y las perturbaciones  $\xi_r(r)$  y  $\xi_t(r)$  son las eigenfunciones.

Regresemos un poco a las propiedades de  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ , dadas por:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)}{4\pi(\ell + m)}} P_{\ell m}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (35)$$

siendo  $P_{\ell m}(\cos\theta)$  los polinomios asociados de Legendre:

$$P_{\ell m}(x) = (-1)^m / (2^\ell \ell!) (1 - x^2)^{m/2} d^{\ell+m} / dx^{\ell+m} (x^2 - 1)^\ell \quad (36)$$

Aquí  $x = \cos\theta$ . En la figura 1 se ve que las partes claras corresponden a valores positivos de la parte real de  $Y_{\ell m}$  y las áreas oscuras a los valores negativos. Los modos con  $m = 0$  se llaman modos zonales, mientras que los modos con  $|m| = \ell$  se llaman modos sectoriales. Los intermedios son los modos tesserales.

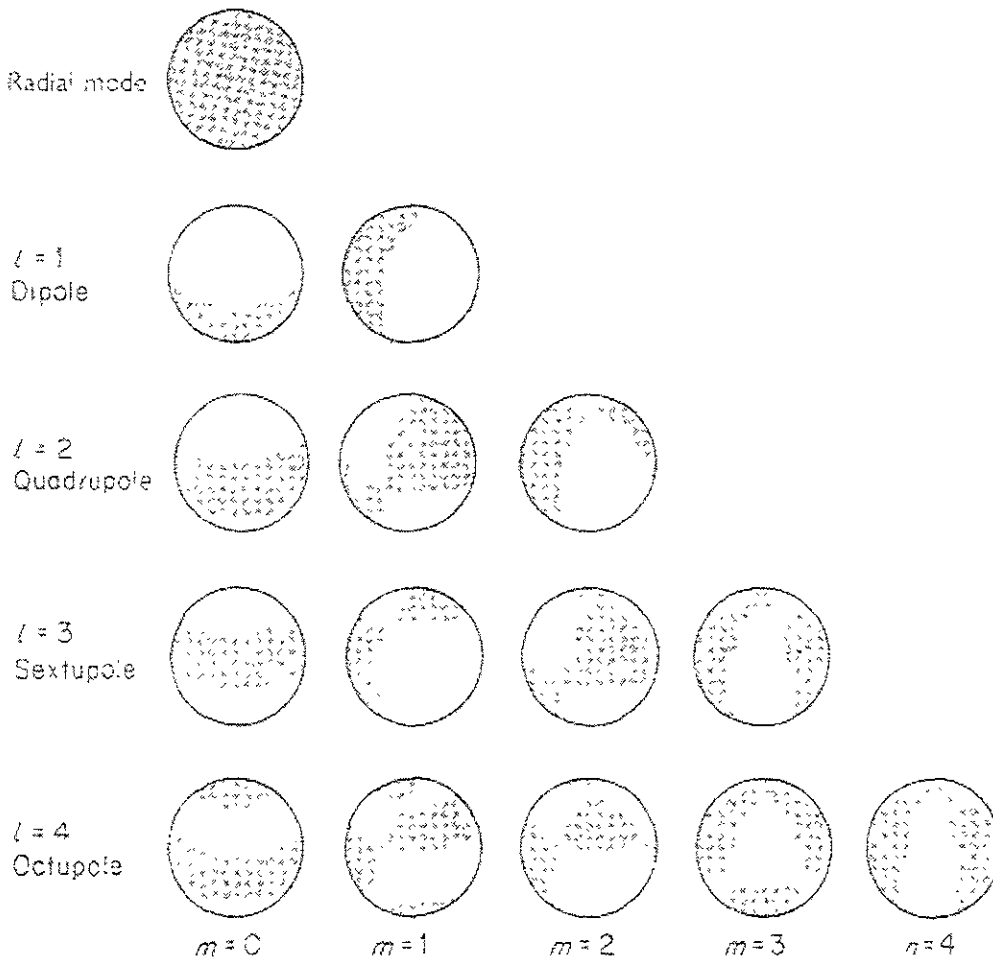


Figura 1. Modos de oscilación no radiales. el número  $\ell$  da el número total de nodos, mientras que el número  $m$  nos dice cuántos de esos nodos pasan por los polos.

Aunque la figura da una leve idea de qué pasa en la superficie estelar, el movimiento real del fluido es más complicado. Las eigenfunciones tienen líneas nodales en la superficie a cualquier instante de tiempo, pero también puede haber nodos a diferentes posiciones radiales. Esto es muy difícil de ilustrar. Además, la dependencia oscilatoria con el tiempo significa que el fluido se mueve hacia atrás y adelante periódicamente (con

respecto a un punto exterior fijo en un sistema de referencia inercial) en dirección azimutal.

Como ejemplo simple, considérese el modo sectorial  $\ell = m = 1$ . Este tiene un nodo angular que pasa por los polos, pero este nodo se mueve en dirección retrógrada azimutal (a  $\phi$  más pequeñas) debido al factor  $e^{i(\sigma t - m\phi)}$  que viene de la dependencia en el tiempo y de la exponencial en  $Y_{\ell m}$ . Esto es, las líneas de fase constante son tales que  $d\phi/dt = -\sigma/m$  y, para  $m$  positiva, tenemos una onda que corre retrógrada. El caso zonal ( $m = 0$ ) es más fácil de visualizar porque podemos imaginar las porciones clara y oscura de una superficie (como en la figura) alternando su brillo periódicamente con un periodo  $\Pi = 2\pi/\sigma$  para  $\sigma^2$  positivo.

### 3. Propiedades de las soluciones

Podemos aprender mucho acerca de las soluciones a las ecuaciones (30) y (31) para  $\xi_r$  y  $\xi_t$  haciendo un análisis local del sistema. Asumimos que  $\xi_r$  y  $\xi_t$  varían mucho más rápidamente en el espacio que las otras variables físicas que aparecen en las ecuaciones (tales como  $N^2$ ) así que tales variables pueden considerarse constantes en algún rango limitado de radios. Para calcular esto, asumimos que tanto  $\xi_r$  como  $\xi_t$  varían espacialmente como  $\exp(ik_r r)$  donde el número de onda  $k_r$  es muy grande comparado con  $r$ .

Entonces ambas eigenfunciones tienen muchas variaciones en un intervalo corto de espacio. Poniendo esta exponencial compleja en las ecuaciones diferenciales nos da un conjunto de ecuaciones algebraicas en  $\xi_r$  y  $\xi_t$  cuyo determinante de coeficientes debe ser cero para tener soluciones no triviales. Dejando los términos dominantes en  $k_r$  obtenemos la relación de dispersión:

$$k_r^2 = (k_t^2/\sigma^2 S_\ell^2)(\sigma^2 - N^2)(\sigma^2 - S_\ell^2) \quad (37)$$

donde se asume como antes que  $\sigma^2$  es positivo. Esto implica lo siguiente:

1. Si  $\sigma^2$  es mayor o menor que  $N^2$  y  $S_\ell^2$ , entonces  $k_r^2 > 0$  y hay soluciones senoidales propagantes porque  $\exp(ik_r r)$  se reduce a senos y cosenos.
2. Si  $\sigma^2$  está entre  $N^2$  y  $S_\ell^2$ ,  $k_r^2$  es negativo y las soluciones muestran comportamiento exponencialmente creciente o decreciente.

O sea que  $N^2$  y  $S_\ell^2$  son frecuencias críticas para la propagación de ondas. La relación de dispersión para  $k_r^2$  que se dará abajo, en la ec. (38) se puede usar para resolver para  $\sigma^2$  en dos límites para ondas propagándose. Para facilitar esto definimos también el número de onda total  $K$ ; con  $K^2 = k_r^2 + k_t^2$ . Esto da más de la esencia de una onda que puede viajar en una combinación de direcciones radiales y transversales. El entendimiento es que  $K$  es grande para un análisis local. Entonces, si  $\sigma^2$  es mucho más grande que  $N^2$  y  $S_\ell^2$ , y  $|N^2|$  es más pequeño que  $S_\ell^2$  (que usualmente es el caso), la raíz más grande de (37) es:

$$\sigma_p^2 = (K^2/k_t^2) S_\ell^2 = (k_r^2 + k_t^2) v_s^2, \quad (38)$$

El subíndice "p" se ha asociado para denotar "presión" porque sólo interviene la velocidad del sonido. Estos son modos de 'presión' o 'acústicos' y nos referiremos a ellos como "modos p". Aquí se regresa a los modos radiales si  $\ell$  es cero.

La raíz más pequeña surge si  $\sigma^2$  es mucho menor que  $N^2$  y  $S_\ell^2$  y está dada por:

$$\sigma_g^2 \approx k_t^2 / (k_r^2 + k_t^2) N^2, \quad (\sigma^2 \ll N^2, S_\ell^2) \quad (39)$$

Estos son los modos de gravedad o "modos g", llamados así porque la fuerza restauradora es la flotación en el campo gravitacional. Nótese que si  $N^2$  es negativo, implicando convección, entonces  $\sigma_g$  es imaginario puro y la perturbación crece o decae exponencialmente con el tiempo (estos corresponden a modos  $g^-$ , y los modos asociados con  $N^2 > 0$  se llaman modos  $g^+$ ). Entonces, en resumen, los modos p constituyen el límite de alta frecuencia del espectro de oscilaciones no radiales, mientras que los modos g son el límite de baja frecuencia.

Si cada modo en un espectro es ortogonal respecto a los otros, las eigenfunciones que corresponden a cada eigenvalor  $\sigma^2$  deben diferir en aspectos importantes. Siguiendo nuestro análisis local como una aproximación a lo que sigue,  $k_r$  y  $\ell$  deben medir esta diferencia. Como  $k_r$  es un número de onda, la longitud de onda local correspondiente es  $\lambda_r = 2\pi/k_r$ . El número total de nodos (denotado por  $n$ ) en cualquier eigenfunción es  $n \approx 2 \int_0^R dr / \lambda_r$  donde el factor 2 cuenta los dos nodos por longitud de onda. Entonces  $n \approx \int_0^R k_r dr / \pi$ . Si integramos  $\sigma_p$  de (38) de tal modo que  $k_t^2$  se pueda despreciar (para simplificar) por ser  $\ell$  pequeña, y sólo aparezca  $k_r$ , obtendremos la siguiente estimación:

$$\sigma_p \approx n\pi \left[ \int_0^R dr / v_s \right]^{-1} \quad (40)$$

Para los modos p las frecuencias dependen sólo de la variación de la velocidad del sonido, que para un gas ideal depende de la temperatura fundamentalmente. Entonces, en estrellas como el Sol, los modos p describen bastante bien la estructura de temperaturas.

Una estimación de los periodos de los modos g es:

$$\Pi_g = 2\pi / \sigma_g \approx n \{ 2\pi^2 / [\ell(\ell+1)]^{1/2} \} \left[ \int_0^R (N/r) dr \right]^{-1} \quad (41)$$

Las frecuencias (los periodos) crecen (decrecen) con  $n$ , en contraste con los modos p.

Los mismos límites de  $\sigma^2$  relativos a  $N^2$  y  $S_\ell^2$  dan las siguientes estimaciones para la razón de eigenfunciones radial/tangencial cuando se usan en las ecuaciones (30) y (31):

$$|\xi_r / \xi_t| \sim rk_r \quad \{\text{modos p}\} \quad (42)$$

$$|\xi_r / \xi_t| \sim \ell(\ell+1) / rk_r \quad \{\text{modos g}\} \quad (43)$$

Para números de onda radial grandes ( $rk_r \gg 1$ ) los movimientos del fluido para los modos p son principalmente radiales, mientras que para los modos g son principalmente transversales.

#### 4. Clasificación de modos

Hemos visto que el carácter de un modo particular depende de  $n$ ,  $\ell$ , y de las amplitudes relativas de los desplazamientos radial y tangencial. Además, los modos p son de frecuencias más altas que los modos g. La frecuencia de un modo dado se denota por  $\sigma_{n\ell}$ , entendiéndose que dos modos diferentes (p y g) pueden existir para una combinación dada de  $n$  y  $\ell$ . ¿Cómo entra el número azimutal  $m$  en este cuadro? Si la estrella no perturbada es esféricamente simétrica, el eigenvalor (la frecuencia) es independiente de  $m$  aunque la eigenfunción dependa de  $m$  por la aparición de  $e^{im\phi}$  en  $Y_{\ell m}$ . Esto es cierto porque no hay eje preferencial de simetría en un sistema esféricamente simétrico. Podemos escoger arbitrariamente ese eje (y con ello de paso establecer el polo para medir el ángulo  $\theta$ ) y podemos elegir cualquier círculo polar mayor para empezar a medir  $\phi$ . Otra forma de ver esto es revisar la derivación de las ecuaciones de pulsación en forma diferencial ordinaria, donde no aparece  $m$ . Si, por otro lado, hubiera efectos que destruyan la simetría esférica (como rotación o campos magnéticos) entonces  $m$  debería afectar y tendríamos que incluirlo en las especificaciones de  $\sigma$ .

En el próximo capítulo se describirán las oscilaciones que tienen lugar cuando introducimos una complicación: la rotación.

## Capítulo 3

### Oscilaciones en estrellas aisladas con rotación

En este capítulo se resume la teoría básica de las oscilaciones no radiales cuando interviene la rotación. Se sigue el tratamiento de Unno et al. (1989) casi al pie de la letra.

#### 3.1. Ecuaciones básicas

Las ecuaciones básicas que requeriremos aquí son las ecuaciones de Poisson, de continuidad y de movimiento:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\rho (\partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi \quad (3)$$

donde  $\rho$  denota la densidad,  $P$  la presión,  $\mathbf{v}$  la velocidad y  $\Phi$  el potencial gravitacional. Si tenemos equilibrio (es decir, no hay oscilaciones), las derivadas con respecto al tiempo son cero, y tenemos:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (4)$$

y

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -(1/\rho_0) \nabla P_0 - \nabla \Phi_0 \quad (5)$$

donde el subíndice 0 representa el estado de equilibrio. Discutamos ahora el estado de equilibrio con la velocidad debida a la rotación.

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (6)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  representa la velocidad angular de la estrella en equilibrio. Supondremos que la velocidad angular es axialmente simétrica, así que:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(r, \theta) \cos \theta \mathbf{e}_r - \Omega(r, \theta) \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (7)$$

en coordenadas esféricas. Suponemos que la configuración en estado de equilibrio es también axialmente simétrica. El campo de velocidades en equilibrio cumple:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (8)$$

y el producto escalar de  $\mathbf{v}_0$  con el gradiente de cualquier cantidad escalar  $f$  nos da:



$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla f = \Omega \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (9)$$

por tanto, la ecuación (4) se satisface automáticamente.

La ecuación (5) se reduce a:

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -(1/\rho_0) \nabla P_0 - \nabla \Phi_0 \quad (10)$$

donde el lado izquierdo representa la fuerza centrífuga.

Las ecuaciones básicas linealizadas se derivan en forma euleriana del modo siguiente:

$$\partial \rho' / \partial t + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) = 0 \quad (11)$$

y

$$\rho_0 [\partial \mathbf{v}' / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0] + \rho' (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla P' - \rho' \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \Phi, \quad (12)$$

donde (al igual que en el capítulo 2) las cantidades con ' representan las perturbaciones eulerianas) Con ayuda de las ecs. (9) y (10), la ecuación linealizada de la conservación de la masa (12) se reduce a:

$$(\partial / \partial t + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}) \rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (13)$$

El operador  $(\partial / \partial t + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi})$  que aparece en las ecuaciones anteriores representa la derivada temporal referida a un sistema de referencia local que rota con una velocidad angular  $\Omega$ .

Recordemos que en coordenadas esféricas se cumple que:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\theta \sin \theta \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_r \sin \theta - \mathbf{e}_\phi \cos \theta \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = \mathbf{e}_\theta \cos \theta \quad (16)$$

Insertando las ecuaciones (7) y (5) en la ecuación de movimiento linealizada (13), obtenemos (luego de usar las relaciones vectoriales (14), (15) y (16)):

$$[(\partial / \partial t + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}) \mathbf{v}' \cdot] \mathbf{e}_i + 2\Omega \times \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \Omega r \sin \theta \mathbf{e}_\theta = -(1/\rho_0) \nabla P' - \nabla \Phi' + (\rho' / \rho_0^2) \nabla P_0 \quad (17)$$

donde  $i$  representa a las coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$ . El primer término en el lado izquierdo de la ecuación (17) representa la derivada temporal de la velocidad referida al sistema de referencia local en rotación; el segundo es la fuerza de Coriolis, y el tercer término se debe

a la rotación diferencial. La perturbación euleriana de la velocidad  $\mathbf{v}'$  está relacionada con el desplazamiento  $\xi$ , con la ecuación:

$$\mathbf{v}' = \delta\mathbf{v} - (\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 \quad (18)$$

o bien:

$$\mathbf{v}' = \partial\xi/\partial t + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi - (\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0. \quad (19)$$

Se puede expresar también, con la ayuda de (6) y (9), más la ayuda de las identidades vectoriales (14), (15) y (16), por:

$$\mathbf{v}' = [(\partial/\partial t + \Omega \partial/\partial\phi)\xi_1]e_1 - (\xi \cdot \nabla)\Omega r \text{sen}\theta e_\theta. \quad (20)$$

Para completar la descripción del sistema se requieren ecuaciones suplementarias, por ejemplo la ecuación de Poisson al sufrir una perturbación queda como:

$$\nabla^2\Phi' = 4\pi G\rho'. \quad (21)$$

o la relación entre las perturbaciones lagrangianas de entropía (S), la presión y la densidad:

$$\delta\rho/\rho_0 - (1/\gamma_1) \delta P/P_0 = -v_T/c_P \delta S \quad (22)$$

con  $v_T = -(\partial \ln p / \partial \ln T)_P$  y  $c_P = T(\partial S / \partial T)_P$ .

Usando relaciones entre las perturbaciones lagrangianas y eulerianas, podemos expresar la perturbación en la entropía en términos de las perturbaciones eulerianas de presión y densidad:

$$(\partial/\partial t + \Omega \partial/\partial\phi)(\rho'/\rho_0 - P'/\gamma_1 P_0) + \mathbf{v}' \cdot (\nabla \ln \rho_0 - (1/\gamma_1) \nabla \ln P_0) = -(v_T/c_P)(\partial/\partial t + \Omega \partial/\partial\phi)\delta S. \quad (23)$$

Veamos cómo se describe el movimiento de un fluido en términos de la vorticidad, definida por:

$$\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v} \quad (24)$$

que representa la velocidad angular de rotación local e instantánea del fluido. Derivemos la ecuación que gobierna el cambio de vorticidad. Tomando el rotacional de la ecuación (2) obtenemos (luego de usar identidades vectoriales):

$$\partial\omega/\partial t + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) + \nabla \times (\nabla P/\rho) = 0 \quad (25)$$

Observemos que el segundo término de (25) se puede describir como:

$$\nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\omega, \quad (26)$$

con esto, la ecuación (25) se reduce a:

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (1/\rho) \nabla P = 0 \quad (27)$$

al combinar las ecuaciones (2) y (27) obtenemos:

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}/\rho - (\boldsymbol{\omega}/\rho \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + (1/\rho) \nabla \times \nabla P/\rho = 0 \quad (28)$$

Podemos reescribir el término de  $\nabla P/\rho$  de la ecuación anterior en términos de la entalpía  $h$  y la entropía  $S$  como:

$$\nabla P/\rho = \nabla h - T \nabla S \quad (29)$$

usando la relación termodinámica:

$$dh = T ds + dP/\rho, \quad (30)$$

Entonces, el tercer término de la ecuación (28) se escribe en términos del gradiente de temperatura y el de entropía como:

$$\nabla \times (\nabla P/\rho) = -\nabla \times (T \nabla S) = -\nabla T \times \nabla S. \quad (31)$$

De aquí, podemos escribir la ecuación (28) de la vorticidad en la forma:

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}/\rho - (\boldsymbol{\omega}/\rho \cdot \nabla) \mathbf{v} - (1/\rho) \nabla T \cdot \nabla S = 0. \quad (32)$$

La ecuación (32) se usa para entender la naturaleza física de las ondas causadas por la rotación del fluido.

Al sustituir las cantidades en equilibrio tales como  $\rho_0$ ,  $P_0$  y  $\mathbf{v}_0$  en la ecuación (28), obtenemos la ecuación que describe el estado de equilibrio:

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_0/\rho_0 - (\boldsymbol{\omega}_0/\rho_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (1/\rho) \nabla \times (\nabla P_0/\rho_0) = 0, \quad (33)$$

donde

$$\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \nabla \times \mathbf{v}_0 = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Omega}. \quad (34)$$

El primer término de la ecuación (33) es cero, por lo que la ecuación se reduce a:

$$-(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \nabla \times (\nabla P_0/\rho_0) = 0. \quad (35)$$

Si la rotación es uniforme (no diferencial), tenemos  $\partial \boldsymbol{\Omega} / \partial z = 0$ , y la ec. (35) nos queda:

$$\nabla \rho_0 \times \nabla P_0 = 0. \quad (36)$$

En este caso se dice que la capa de fluido es “barotrópica”.

La ecuación linealizada de la vorticidad está dada por:

$$[(\partial/\partial t + \Omega \partial/\partial \phi) \omega'_i] \mathbf{e}_i + (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \Omega) r \text{sen} \theta \mathbf{e}_\theta + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) 2\Omega - (2\Omega \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\nabla \cdot \mathbf{v}') 2\Omega + \nabla \times (\nabla P/\rho) = 0. \quad (37)$$

### 3.2. Análisis de modos

En esta sección, se omitirán los subíndices 0 de las cantidades en equilibrio. No hay confusión posible, puesto que las perturbaciones tienen su propia notación. También se supondrá que los procesos son adiabáticos y que las variaciones en el potencial son despreciables (aproximación de Cowling). Con esto, las ecuaciones (13), (23) y (17) quedan:

$$D\rho'/Dt + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}') = 0 \quad (38)$$

$$D\rho'/Dt - (1/c^2) DP'/Dt + \rho \mathbf{v}' \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (39)$$

y

$$\mathbf{e}_i Dv'_i/Dt + 2\Omega \times \mathbf{v}' = -(1/\rho) \nabla P' + (\rho'/\rho^2) \nabla P \quad (40)$$

donde:

$$D/Dt \equiv \partial/\partial t + \Omega \partial/\partial \phi \quad (41)$$

denota la derivada temporal siguiendo la rotación no perturbada, y se definió:

$$\mathbf{A} \equiv \nabla \ln \rho - (1/\gamma_1) \nabla \ln P. \quad (42)$$

Generalmente se supone que la dependencia espacial y temporal de cualquier cantidad perturbada es proporcional a  $\exp[i(\sigma t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , es decir:

$$\rho' = \rho'_0 e^{i(\sigma t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (43)$$

$$P' = P'_0 e^{i(\sigma t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (44)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 e^{i(\sigma t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (45)$$

en la que la frecuencia angular  $\sigma$  se define en un sistema de referencia en rotación. Con tal dependencia (recordando las propiedades de la derivada de la función exponencial) vemos que se cumplen las siguientes relaciones para cualquier variable  $f'$  o  $\mathbf{f}'$ :

$$Df'/Dt = i(\sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f' \quad (46)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{f}' = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}' \quad (47)$$

Sustituyendo las relaciones (43), (44) y (45) en las ecuaciones (38), (39) y (49), y usando las relaciones (46) y (47) hallamos las ecuaciones siguientes:

$$i\sigma \rho' / \rho + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (48)$$

$$i\sigma \rho' / \rho - i(\sigma/c^2) P' / \rho + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (49)$$

y

$$i\sigma \mathbf{v}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' = -i\mathbf{k} P' / \rho + (\nabla P / \rho) \rho' / \rho. \quad (50)$$

Las ecuaciones (48) a (50) forman un sistema lineal de ecuaciones simultáneas, y su ecuación característica (o sea, la ecuación que resulta al construir el determinante e igualarlo a cero) da la relación de dispersión:

$$\sigma \{ \sigma^4 / c^2 - \{ k^2 + 4\Omega^2 / c^2 + i(\mathbf{k} \cdot \nabla \ln \rho) \} \sigma^2 - \{ \mathbf{k} \cdot [2\boldsymbol{\Omega} \times \nabla \ln(\rho/P^{2/\gamma_1})] \} \sigma + \{ N^2 k_h^2 + (2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + i(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \ln \rho) \} \} = 0 \quad (51)$$

donde:

$$N^2 = \nabla P \cdot \mathbf{A} / \rho \quad (52)$$

denota el cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä y  $k_h$  denota la componente horizontal del vector de número de onda que es proporcional a la gravedad aparente. Al derivar la ecuación (51) se usó la relación barotrópica (36), que es consistente con la rotación uniforme.

Los órdenes de magnitud de los tres términos en las primeras llaves como coeficientes de  $\sigma^2$  en la ecuación (51) se representarán como  $O(k^2)$ ,  $O(\Omega^2/c^2)$  y  $O(k/H_p)$ , con  $H_p$  la escala de altura característica de las cantidades en equilibrio. Suponemos que:

$$k^2 \gg \Omega^2/c^2 \gg k/H_p, \quad (53)$$

lo cual se justifica en la mayoría de los casos en el interior estelar, según Unno et al. (1989). Sea  $\varepsilon$  tal que:

$$\varepsilon \equiv \Omega^2/k^2 c^2, \quad (54)$$

y suponemos que:

$$1/kH_p \sim O(\varepsilon^2). \quad (55)$$

El coeficiente de  $\sigma^1$  en la ec. (51) depende de la dirección del vector de número de onda, pero es, como máximo, del orden de  $\varepsilon^{3/2}k^3c$ , y los tres términos en la tercer llave en la ecuación (51) son, como máximo, del orden de  $N^2k^4c^2$ ,  $\varepsilon k^4c^2$  y  $\varepsilon^3k^4c^2$ , respectivamente. Las partes imaginarias en las dos llaves en la ecuación (51) forman el vector de número de onda complejo  $\mathbf{k}$ . Este vector provoca una variación lenta de la amplitud de la perturbación con la profundidad, la cual conlleva una variación de la densidad con la profundidad (llamada efecto de atenuación). De acuerdo a la suposición (53), este efecto es suficientemente pequeño para despreciarlo comparado con la escala de las perturbaciones. El hecho de que alguno de los términos del paréntesis cuadrado, entre el tercero y el cuarto, sea mayor, depende de la dirección del vector de número de onda. Entonces conservamos ambos términos, aunque despreciamos el último término en la tercera llave de la ecuación (51).

En un caso límite de

$$|N^2k_h^2 + (2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2| \gg k c |\mathbf{k}\cdot[2\mathbf{\Omega}\times\nabla\ln(\rho/P^{2/\gamma_1})]|, \quad (56)$$

la ecuación (51) se reduce a:

$$\sigma[\sigma^4/c^2 - k^2\sigma^2 - \{N^2k_h^2 + (2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2\}] = 0 \quad (57)$$

La ecuación (53) lleva a los siguientes modos:

$$\sigma^2 \approx k^2c^2 \quad (58)$$

y

$$\sigma^2 \approx N^2k_h^2 + (2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2/k^2. \quad (59)$$

La ecuación (58) representa un par de modos acústicos de alta frecuencia, y la ecuación (59) representa un par de modos de alta frecuencia relacionados con la rotación y la flotación al que llamamos onda inercial-gravitacional. En el caso de  $\mathbf{\Omega} = 0$ , la onda inercial-gravitacional tiende a una onda de gravedad simple:

$$\sigma^2 = N^2k_h^2/k^2. \quad (60)$$

En el caso de  $N^2 = 0$ , la onda inercial-gravitacional se simplifica a:

$$\sigma^2 = (2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2/k^2, \quad (61)$$

llamada onda inercial. Debemos notar que la ecuación (59) describe movimiento oscilatorio aun si  $N^2 < 0$  cuando  $(2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2$  es suficientemente grande.

En el otro caso límite:

$$|N^2k_h^2 + (2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{k})^2| \ll k c |\mathbf{k}\cdot[2\mathbf{\Omega}\times\nabla\ln(\rho/P^{2/\gamma_1})]|, \quad (62)$$

la onda inercial-gravitacional desaparece. En su lugar, la ecuación (55) da:

$$\sigma^2[\sigma^3/c^2 - k^2\sigma - \{\mathbf{k} \cdot [2\Omega \times \nabla \ln(\rho/P^{2/\eta})]\}] = 0. \quad (63)$$

Esta ecuación da:

$$\sigma^2 \approx -\mathbf{k} \cdot [2\Omega \times \nabla \ln(\rho/P^{2/\eta})]/k^2. \quad (64)$$

Este último modo se propaga en la dirección de rotación (progrado), puesto que  $\nabla \ln(\rho/P^{2/\eta})$  es usualmente hacia el centro estelar a través de la estrella.

En casos generales, la relación general de dispersión (55) da un par de modos acústicos de alta frecuencia:

$$\sigma^2 \approx k^2 c^2 + 4\Omega^2, \quad (65)$$

un par de modos de baja frecuencia con características mixtas de ondas inerciales gravitacionales y ondas prógradas de baja frecuencia:

$$\sigma \approx -(1/2k^2) \{\mathbf{k} \cdot [2\Omega \times \nabla \ln(\rho/P^{2/\eta})]\} \pm \pm (1/2k^2) [\{\mathbf{k} \cdot [2\Omega \times \nabla \ln(\rho/P^{2/\eta})]\}^2 + 4k^2 \{N^2 k_h^2 + (2\Omega \cdot \mathbf{k})^2\}^{1/2}], \quad (66)$$

y un modo de frecuencia cero. La ecuación (60) da un par de frecuencias complejas conjugadas si  $N^2$  es negativa y  $|\ln^2|$  es suficientemente grande, las cuales son modos de convección sobreestables propagándose en la dirección de rotación de la estrella, según Unno et al. (1989).

De acuerdo a los cálculos de Clement (1994), en un modelo calculado por él, la rotación tiene un efecto fuerte en la distribución espacial de la amplitud de las eigenfunciones. La figura 3.1 ilustra dos modos: Uno sin rotación y otro con rotación. En el límite de rotación rápida terminamos con la mayoría de sus amplitudes confinadas en las zonas ecuatoriales.

Si bien para los modos no rotantes las mayores amplitudes se presentan en el ecuador, es claro que la rotación hace que las amplitudes sean mucho mayores en el ecuador. Por esta razón el estudio de las oscilaciones sólo en el plano ecuatorial da un límite superior de las amplitudes que se encontrarían en toda la estrella.

En la siguiente sección se describirá el modelo de oscilaciones con rotación en un sistema binario en el que se introduce un efecto adicional: la viscosidad: lo cual complica aun más el tratamiento (Moreno y Koenigsberger, 1999). Como compensación, el modelo es bidimensional, es decir, sólo toma en cuenta los efectos en el ecuador estelar. Esto nos representa bien el comportamiento global del sistema por ser ahí donde las amplitudes de oscilación son mayores, según acabamos de ver.

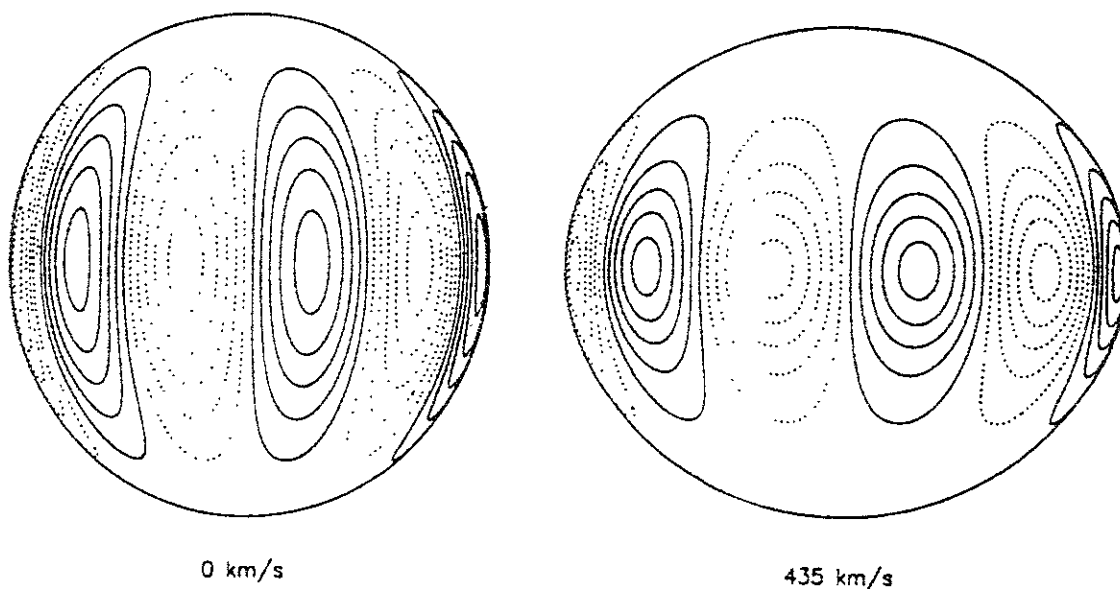


Figura 3 1. Modelos de oscilaciones con rotación calculados por Clement (1994). Debajo de cada modelo se indican las velocidades de rotación



## Capítulo 4

### Observaciones de oscilaciones no radiales en sistemas binarios

Se ha sabido desde hace muchos años que algunas estrellas oscilan en modos no radiales (Ledoux & Walraven, 1958). Estas oscilaciones producen efectos observables tanto fotométricamente (por el análisis de las curvas de luz) como espectroscópicamente (por el análisis de perfiles de líneas). Cuando una estrella oscila en modos no radiales, se puede deducir el orden del mismo a través de la medición de los periodos. Pero como los modos radiales tienen periodos de oscilación del mismo orden que algunos modos no radiales, puede haber confusión. Esto es porque al resolver las ecuaciones para los modos no radiales obtenemos como caso particular el modo radial, que tiene periodos intermedios entre los periodos de los modos p (que son más cortos) y los periodos de los modos g (que son más largos). Además de esto, los modos radiales pueden oscilar en armónicos de orden superior, los cuales tienen periodos más cortos.

Entonces la confusión mencionada sucede sólo con los modos p. Si se observa un periodo de variación más largo, sabemos que se trata de un modo g, ya que no hay modos radiales de periodos similares. De este modo, sabiendo el periodo de la oscilación radial fundamental, las oscilaciones con periodos mayores que el periodo radial necesariamente son modos g. El periodo fundamental de oscilación radial está dado por:  $P_{osc} = 2\pi / [(3\gamma_1 - 4)(GM/R^3)]^{1/2}$ .

En algunas estrellas variables las amplitudes de sus curvas de luz están moduladas con periodos mucho mayores que el periodo principal (figura 4.1). A esto se le llama fenómeno de batimiento y la explicación más simple de esto es que hay dos oscilaciones con periodos similares. Pero en oscilaciones radiales las diferencias de periodo entre los diferentes armónicos son significativas; en cambio en las oscilaciones no radiales es bastante frecuente que dos oscilaciones con combinaciones diferentes de  $\ell$  y  $m$  tengan periodos similares. Por tal razón, al hallar curvas de luz con el fenómeno de batimiento, estaremos hallando por lo menos un modo de oscilación no radial.

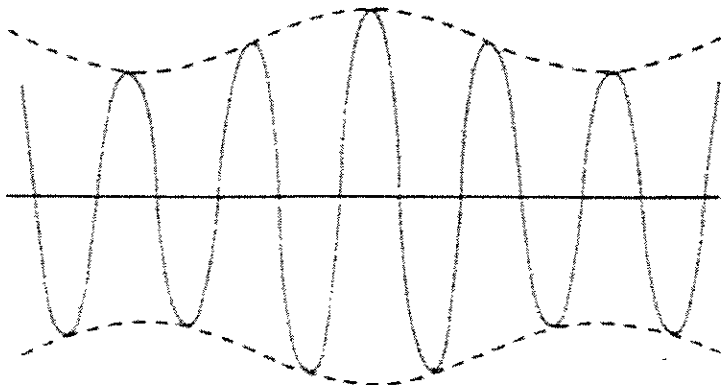


Figura 4.1. El fenómeno de batimiento en una curva de luz. Eje x. tiempo. eje y: magnitud.

Cuando una estrella oscila no radialmente, cada parte de su superficie se mueve en una fase diferente. Si además hay rotación, este tipo de movimiento produce una variación característica en el perfil de las líneas espectrales. En la figura 4.2 vemos el perfil de una línea para una oscilación de modo  $\ell = 8$ ,  $m = 8$ . Las regiones oscuras corresponden a regiones de material que se alejan del observador, mientras que las más claras se acercan al observador. Si la estrella está en rotación, veremos una variación del perfil como se muestra en la figura 4.3.

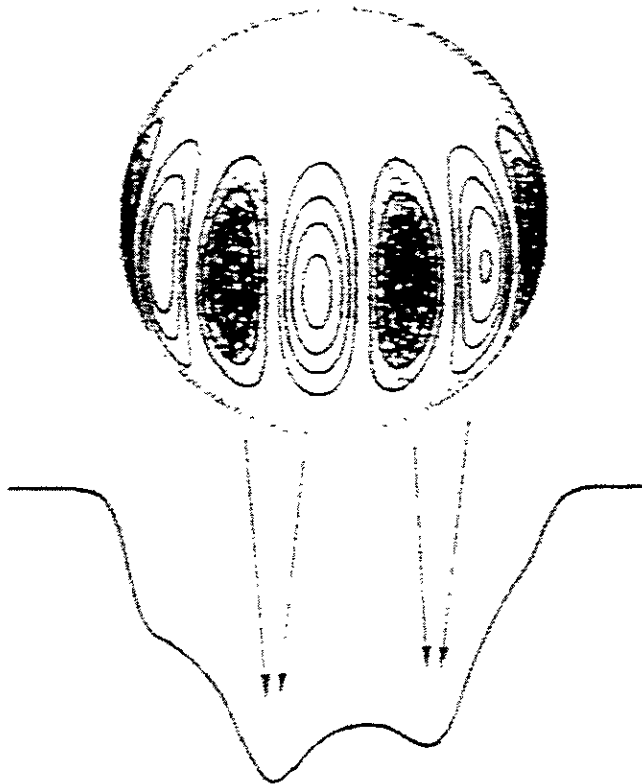


Figura 4.2. Variación del perfil de una línea espectral debido a oscilaciones no radiales. Tomada de Unno et al. (1989)

Para hallar oscilaciones forzadas por marea en sistemas binarios se buscan variaciones de los tipos descritos antes.

Gies y Kullavanijaya (1988) observaron  $\epsilon$  Per, que es una estrella con líneas espectrales cuyos perfiles son variables, y analizaron el comportamiento de esta variabilidad. Para explicar este comportamiento exploraron la posibilidad de regiones oscuras en la estrella (algo similar a las manchas solares), la de nubes de material orbitando a la estrella y la de oscilaciones no radiales. Después de analizar cada posibilidad desechan las dos primeras y llegan a la conclusión de que tales variaciones se deben a oscilaciones no radiales, estableciendo los modos de oscilación en  $\ell = 3, 4, 5$  y  $6$ . -  $m = -3, -4, -5$  y  $-6$ .

Gies et al. (1996) observan  $\iota$  Ori en busca de oscilaciones no radiales. Ellos calculan la forma de las estrellas en el periastro y hacen un análisis de la geometría de Roche, que

está alterada debido a los efectos de la presión de radiación y a la rotación (no sincronizada). Para ello hacen un ajuste artificial del periodo y la amplitud de la primaria hasta obtener el momento angular de rotación instantáneo del sistema. Sin embargo, esto les da masas erróneas. Las líneas que analizan no muestran una variación significativa, por lo que no pueden dar evidencias de oscilaciones no radiales.

Harmanec et al. (1997) iniciaron el proyecto SEFONO (acrónimo de Search of Forced Nonradial Oscilations), que tiene como objetivo la búsqueda de oscilaciones no radiales forzadas por marea. Observan V 436 Per y encuentran parámetros físicos (masas, radios, velocidades de rotación, movimiento apsidal, etc), pero no les es posible medir suficientes variaciones de perfiles que les permitan establecer el modo de oscilación.

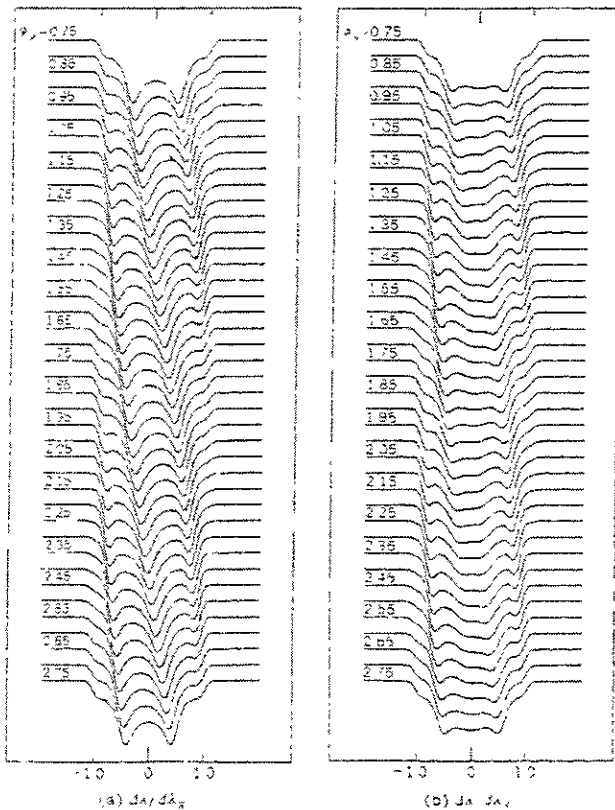


Figura 4.3. Variación esperada del perfil debido a la rotación. Unno et al. (1989)

Holmgren et al. (1997), dentro del proyecto SEFONO observan  $\beta$  Sco y hallan parámetros orbitales y físicos, pero tampoco logran establecer el modo de oscilación.

El proyecto SEFONO ha avanzado muy lentamente y los resultados que ha dado son pocos, aunque muy valiosos.

## Capítulo 5

### Modelo para las interacciones de marea

En los capítulos anteriores hemos hecho una síntesis del trabajo teórico sobre el que se fundamentan en gran medida los modelos publicados. Tal trabajo está basado en las siguientes aproximaciones y simplificaciones: 1) rotación lenta y 2) se desprecia la viscosidad. Aquí resumiremos los resultados de un modelo que aborda el problema en forma más general sin las suposiciones y simplificaciones anteriores, pero que por su complejidad está limitado actualmente a un tratamiento únicamente en dos dimensiones. El modelo que se describe en este capítulo fue desarrollado por E. Moreno y G. Koenigsberger, y está basado en un modelo anterior (Moreno y Koenigsberger, 1999). En esta nueva versión se pretende analizar varias capas y un mayor número de elementos que en la versión anterior, aunque para este trabajo nos limitamos al análisis de una sola capa.

Las dos estrellas en el sistema binario tienen masas  $M_1$  y  $M_2$ , y radios  $R_1$  y  $R_2$ . La órbita tiene semieje mayor  $a$  y excentricidad  $e$ . La rotación estelar está caracterizada por el parámetro  $\beta = \omega/\Omega$ , donde  $\omega$  y  $\Omega$  son las velocidades angulares de rotación y orbital, respectivamente. Se asume que los ecuadores de ambas estrellas están en el plano orbital. Cada estrella se analiza por separado resolviendo la ecuación de movimiento para un cierto número a elegir de elementos de superficie localizados a lo largo del ecuador en un cinturón delgado. Este cinturón es lo suficientemente delgado como para despreciar la masa de cada elemento. El cuerpo principal de la estrella, dentro de la cáscara considerada, se supone que se comporta como cuerpo rígido, y entonces la deformación de marea sólo afecta a la cáscara externa. En este trabajo se incluyeron 500 elementos, aunque el modelo permite usar hasta 3000 elementos en esta nueva versión.

Este análisis se concentra en los elementos de superficie de la cáscara externa, y el procedimiento consiste en resolver directamente las ecuaciones de movimiento de estos elementos. Aunque se resuelve sólo el movimiento del cinturón ecuatorial, los resultados proveen una visión de las oscilaciones estelares en otras latitudes, debido a que las fuerzas son simétricas respecto al ecuador estelar.

#### 5.1 Las ecuaciones de movimiento

En el problema de dos cuerpos tomamos un sistema de referencia Cartesiano no inercial (primado) en el cual una de las estrellas, en este caso  $M_1$ , está siempre en el origen, y la otra estrella,  $M_2$ , está siempre en la dirección del eje  $x'$ . Este sistema de referencia no inercial tendrá entonces una velocidad angular de rotación igual a la orbital,  $\Omega$ , de  $M_2$  alrededor de  $M_1$ . En la figura 1 se muestran los sistemas de referencia inercial y no inercial, y se localiza un elemento de superficie de  $M_1$  con los vectores  $\mathbf{r}$  (inercial) y  $\mathbf{r}'$  (no inercial).

Sea  $\mathbf{a}_{ng}$  la aceleración existente en un elemento, debida a fuerzas no gravitatorias (presión del gas, viscosidad). Entonces la aceleración del elemento con respecto al sistema inercial es:

$$\mathbf{a} \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2 = -GM_1[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1]/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3 - GM_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3 + \mathbf{a}_{ng}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son las posiciones de  $M_1$  y  $M_2$  con respecto al sistema inercial. Ahora bien,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'$  y  $\mathbf{a} \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2 = d^2\mathbf{r}_1/dt^2 + d^2\mathbf{r}'/dt^2$ . También:

$$\mathbf{a}_1 \equiv d^2\mathbf{r}_1/dt^2 = GM_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3, \quad (2)$$

y la ecuación que conecta la aceleración en el sistema inercial con la correspondiente en el sistema no inercial (representaremos las derivadas con respecto a este sistema con  $d'/dt$ , para diferenciarlas de  $d/dt$  tomadas con respecto al sistema inercial),  $\mathbf{a}' \equiv d'^2\mathbf{r}'/dt'^2$  es:

$$d^2\mathbf{r}'/dt^2 = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\Omega} \times d'\mathbf{r}'/dt + d\boldsymbol{\Omega}/dt \times \mathbf{r}', \quad (3)$$

donde  $d\mathbf{r}'/dt \equiv \mathbf{v}'$  es la velocidad del elemento en el sistema no inercial.

Calculando  $\mathbf{a}-\mathbf{a}_1$  de las ecuaciones anteriores, tenemos la siguiente expresión para  $\mathbf{a}'$ :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}_{ng} - GM_1\mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|^3 - GM_2[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3 + (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3] - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - d\boldsymbol{\Omega}/dt \times \mathbf{r}' \quad (4)$$

Esta es la ecuación de movimiento que se resuelve para cada elemento de superficie en el cinturón ecuatorial de  $M_1$ .

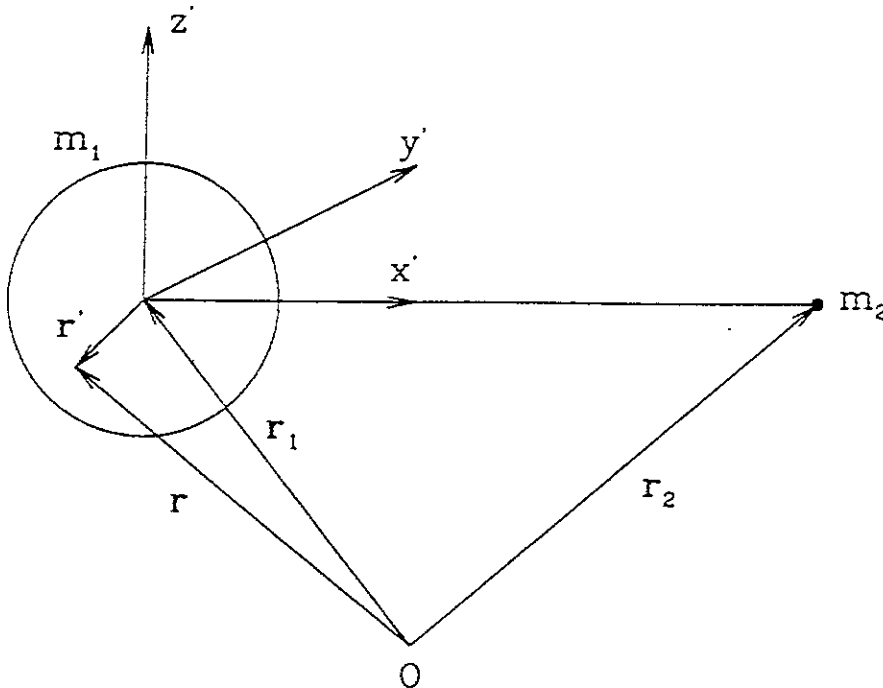


Figura 5.1. Geometría del sistema: O representa el origen del sistema de referencia inercial,  $\mathbf{r}_1$  da la posición del origen del sistema no inercial (de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$ ), que gira con la estrella de masa  $M_1$  y radio  $R_1$ . La posición de la otra estrella, de masa  $M_2$ , está dada por  $\mathbf{r}_2$ . Los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  localizan al elemento de que nos ocupamos en el sistema inercial y en el no inercial, respectivamente.

Tomando  $\mathbf{r}'$  sobre el ecuador de  $M_1$  (plano  $x', y'$ ),  $\Omega$  dirigida a lo largo del eje  $z'$  (se toma el movimiento orbital de modo que  $\Omega$  apunta en la dirección positiva de  $z'$ ), y  $\mathbf{a}_{ng} = \mathbf{i}' a_{ng1} + \mathbf{j}' a_{ng2}$ , con  $\mathbf{i}'$  y  $\mathbf{j}'$  los vectores unitarios a lo largo de los ejes  $x'$  y  $y'$ , respectivamente; tendremos las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = a_{ng1} - GM_1x'/(x'^2 + y'^2)^{3/2} - GM_2[(x'-r_{21})/[(x'-r_{21})^2 + y'^2]^{3/2} + 1/r_{21}^2] + \Omega(\Omega x' + 2dy'/dt) + y' d\Omega/dt \quad (5)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = a_{ng2} - GM_1y'/(x'^2 + y'^2)^{3/2} - GM_2y'/[(x'-r_{21})^2 + y'^2]^{3/2} + \Omega(\Omega y' - 2dx'/dt) - x' d\Omega/dt \quad (6)$$

con  $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ ,  $\Omega$ , y  $d\Omega/dt$  a determinar por medio de la solución del movimiento orbital de  $M_2$  alrededor de  $M_1$ . En este movimiento orbital se considera una órbita estacionaria; esto es, no se toman en cuenta los cambios orbitales producidos por las oscilaciones estelares. Entonces, si  $h$  es el momento angular orbital constante por unidad de masa, y  $u_r$  la rapidez orbital radial de  $M_2$ , el movimiento orbital se halla al resolver las ecuaciones:

$$dr_{21}/dt = u_r \quad (7)$$

$$du_r/dt = h^2/r_{21}^3 - G(M_1 + M_2)/r_{21}^2. \quad (8)$$

Teniendo en todo momento  $r_{21}$  y  $u_r$ ,  $\Omega$  y  $d\Omega/dt$  se obtienen con  $\Omega = h/r_{21}^2$ ,  $d\Omega/dt = -2hu_r/r_{21}^3$ . Las ecuaciones escalares de movimiento y las orbitales se resuelven para los mismos instantes de tiempo.

## 5.2 La aceleración no gravitatoria $\mathbf{a}_{ng}$

En la aceleración no gravitatoria  $\mathbf{a}_{ng}$  se incluyen las siguientes fuerzas: (i) la presión del gas que empuja hacia afuera al elemento de superficie, (ii) la fuerza lateral azimutal sobre el elemento debida a posibles presiones diferentes ejercidas por elementos adyacentes y (iii), las fuerzas viscosas radial y azimutal ejercidas por elementos adyacentes azimutales y por el material debajo del elemento dado, respectivamente. La figura 2 muestra la configuración de los elementos.

### 5.2.1 La aceleración hacia el exterior debida a la presión del gas

Tenemos un cinturón ecuatorial en la cáscara externa, que consiste de 500 elementos de igual tamaño. Todos presentan un área inicial  $A_0$ , longitud inicial  $\ell_0$ , profundidad inicial  $\Delta_0$  y masa inicial  $\Delta m$ . La presión del gas en ese elemento está dada por la ecuación politrópica:

$$P = P_0(\rho/\rho_0)^\gamma = P_0 (A_0/A)^\gamma(\Delta_0/\Delta)^\gamma = P_0(\ell_0/\ell)^\gamma(\Delta_0/\Delta)^\gamma. \quad (9)$$

Aquí  $A$  es el área en la superficie del elemento,  $\ell$  la longitud variable en la dirección azimutal y  $\Delta$  la profundidad del elemento. El índice de la politrópica usada es  $\gamma = 2$ , pues en este caso se tiene una solución analítica aceptable físicamente según Chandrasekhar (1939). Los otros casos con solución analítica ( $\gamma = 6/5$  y  $\gamma = \infty$ ) nos dan radio infinito o densidad constante, respectivamente.

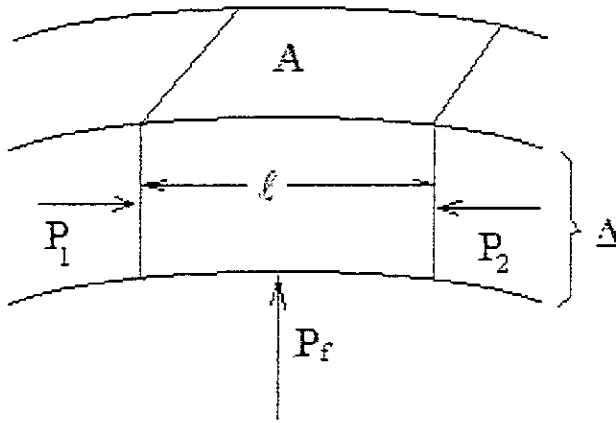


Figura 5.2. Geometría de los elementos considerados. A representa el área hacia el exterior,  $l$  la longitud azimutal y  $\Delta$  la profundidad. Las  $P_i$  representan las presiones debidas a los elementos vecinos y a la frontera rígida inferior.

La presión inmediatamente por debajo de la frontera interna rígida se toma como  $P_f = P/q$ , con  $P$  presión del elemento que esté por encima y  $q$  una constante que resulta al promediar la presión de todos los elementos superiores (en este caso 0, pues sólo hay una capa) y la presión inferior. Por ello  $q$  vale  $1/2$ . Si  $|a_{ng0}|$  es la aceleración inicial hacia el exterior del elemento con masa  $\Delta m$  y área inicial  $A_0$  entonces inicialmente se tiene que:

$$P_0 A_0 = |a_{ng0}| q \Delta m, \tag{10}$$

mientras que en instantes posteriores la aceleración  $|a_{ng1}|$  es:

$$|a_{ng1}| = P_f A / \Delta m = PA / (q \Delta m) = (PA / P_0 A_0) |a_{ng0}| = P_0 A_0 / q \Delta m \tag{11}$$

La aceleración hacia el exterior debida a la presión del gas bajo el elemento es:

$$a_{ng1} = (\ell_0 / \ell)^{\gamma-1} (\Delta_0 / \Delta)^\gamma |a_{ng0}| e_r, \tag{12}$$

Con  $e_r$  el vector unitario en dirección radial. No se consideraron las presiones de los elementos al norte y al sur, pues por ser simétricas, se compensan mutuamente.

### 5.2.2 La aceleración azimutal debida a la presión del gas

Considérese un elemento de superficie y sus dos elementos adyacentes en la dirección azimutal. Cada elemento adyacente ejerce una presión interna dada por  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. La diferencia de presiones externas en el elemento central es  $(P_1 - P_2)$ . Si  $(\Delta S)_c$  es el área azimutal presentada por el elemento central y  $(\Delta m)_c$  su masa, entonces la aceleración azimutal debida a la presión del gas es:

$$a_{ng2} = [(\Delta S)_c (P_1 - P_2) / (\Delta m)_c] e_\phi \tag{13}$$

con  $\mathbf{e}_\phi$ , el vector unitario en la dirección azimutal, y de los dos elementos adyacentes, el denotado por el subíndice 1 es el que tiene el azimut más pequeño. Usando la ecuación (10) tendremos que:

$$\mathbf{a}_{ng2} = [(\Delta S)_c q(P_1 - P_2) / \{(P_0)_c (A_0)_c\}] \mathbf{a}_{ng0|c} \mathbf{e}_\phi \quad (14)$$

o

$$\mathbf{a}_{ng2} = [(\Delta)_c q(P_1 - P_2) / \{(P_0)_c (\ell_0)_c\}] \mathbf{a}_{ng0|c} \mathbf{e}_\phi \quad (15)$$

Con ayuda de la ecuación politrópica (9) tendremos finalmente:

$$\mathbf{a}_{ng2} = (\Delta)_c (\Delta_0)_c^\gamma (\ell_0)_c^{\gamma-1} \{q[(\ell_1 \Delta_1)^{-\gamma} - (\ell_2 \Delta_2)^{-\gamma}]\} \mathbf{a}_{ng0|c} \mathbf{e}_\phi \quad (16)$$

### 5.2.3 Las aceleraciones viscosas

Las aceleraciones radial y azimutal debidas a las fuerzas viscosas se obtienen con la contribución de cizalladura del tensor de esfuerzos

$$\mathbf{P}_\eta = -\eta[\nabla' \mathbf{v}' + (\nabla' \mathbf{v}')^t - (2/3)(\nabla' \cdot \mathbf{v}') \mathbf{1}] \quad (14)$$

con  $\eta = \nu\rho$  la viscosidad dinámica y  $\nu$  la viscosidad cinemática;  $\mathbf{v}'$  es la velocidad en el sistema no inercial,  $\nabla'$  es el operador espacial correspondiente,  $\mathbf{1}$  es el tensor unitario y el superíndice t indica la matriz transpuesta.

Considerando las dos caras laterales en la dirección azimutal, la fuerza viscosa radial sobre el elemento central está dada por  $\mathbf{F}_{\eta lat} = -\mathbf{P}_{\eta 1} \cdot d\mathbf{S}_1 - \mathbf{P}_{\eta 2} \cdot d\mathbf{S}_2$ ,  $d\mathbf{S}_1$  y  $d\mathbf{S}_2$  los vectores normales a la superficie azimutal lateral del elemento central;  $\mathbf{P}_{\eta 1}$ ,  $\mathbf{P}_{\eta 2}$  son los valores del tensor de esfuerzos en las caras laterales. Escribiendo la ec. anterior en coordenadas cilíndricas( $r'$ ,  $\phi'$ ), la contribución principal a  $\mathbf{F}_{\eta lat}$  es

$$\mathbf{F}_{\eta r'} \approx \eta(\Delta S)_c [(1/r')(\partial v_r' / \partial \phi')_2 - (1/r')(\partial v_r' / \partial \phi')_1] \mathbf{e}_r \quad (15)$$

Con los dos elementos adyacentes en la dirección azimutal, hacemos la aproximación burda

$$[(1/r')(\partial v_r' / \partial \phi')_1] \approx [(v_r')_c - (v_r')_1] / \ell_c \quad (16)$$

$$[(1/r')(\partial v_r' / \partial \phi')_2] \approx [(v_r')_2 - (v_r')_c] / \ell_c \quad (17)$$

La aceleración viscosa radial es  $\mathbf{a}_{ng3} = \mathbf{F}_{\eta r'} / \Delta m$ . Con  $\Delta m = \rho \ell_c (\Delta S)_c$  y  $\eta (\Delta S)_c = \nu \rho (\Delta S)_c$  tenemos

$$\mathbf{a}_{ng3} \approx (\nu / \ell_c^2) [(v_r')_2 + (v_r')_1 - 2(v_r')_c] \mathbf{e}_r \quad (18)$$

Análogamente, la fuerza viscosa en la superficie inferior del elemento es  $\mathbf{F}_{\eta inf} = -\mathbf{P}_{\eta mf} \cdot \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A} = -\mathbf{Ae}_r$ . La principal contribución a  $\mathbf{F}_{\eta inf}$  es:



$$\mathbf{F}_{\eta\phi} \approx -\eta A (\partial v_{\phi} / \partial r' - v_{\phi} / r')_{\text{int}} \mathbf{e}_{\phi} = -\eta A (r' \partial \omega' / \partial r')_{\text{int}} \mathbf{e}_{\phi} \quad (19)$$

con  $\omega' = v_{\phi} / r'$  la velocidad angular en el sistema de referencia no inercial. Tomando la distancia característica para el cambio de  $\omega'$  en la superficie baja del mismo orden que la profundidad (pequeña) del elemento, tenemos  $(r' \partial \omega' / \partial r')_{\text{int}} \approx r' (\omega' - \omega'_{\text{int}}) / \Delta$ , con  $\omega'$ ,  $\omega'_{\text{int}}$  las velocidades angulares del elemento y de la región interna (rígida) de la estrella, respectivamente. Con respecto a un sistema de referencia inercial la velocidad angular de la región interna de la estrella se escribe como  $\omega_{\text{int}} = \beta \Omega_0$ , con  $\beta$  constante, y  $\Omega_0$  la velocidad angular orbital inicial; entonces  $\omega'_{\text{int}} = \beta \Omega_0 - \Omega$ . Entonces con  $\Delta m = \rho A \Delta$  la aceleración viscosa azimutal  $\mathbf{a}_{\text{ng}4} = \mathbf{F}_{\eta\phi} / \Delta m$  es:

$$\mathbf{a}_{\text{ng}4} \approx -v r' (\omega' + \Omega - \beta_0 \Omega_0) \mathbf{e}_{\phi} / \Delta^2 \quad (20)$$

Finalmente, con las ecuaciones ((12), (13), (18) y (20), la aceleración no gravitacional es  $\mathbf{a}_{\text{ng}} = \sum \mathbf{a}_{\text{ng}i}$ . No se consideraron las viscosidades de los elementos al norte y al sur por dos razones: a) por ser simétricas las fuerzas, consideramos que los movimientos de estos elementos son coherentes con el de en medio, por tanto la viscosidad es pequeña comparada con las otras componentes; b) por ser arbitraria la elección del coeficiente de viscosidad, poner un coeficiente de viscosidad mayor a lo real en los vecinos sobre el ecuador equivaldría a tener viscosidad también en el meridiano considerado.

### 5.3 Método numérico y condiciones iniciales

Se dividió el cinturón ecuatorial en 500 elementos de superficie. El movimiento de esos elementos se obtiene resolviendo las ecuaciones de movimiento (5) y (6) para cada elemento simultáneamente, de acuerdo a lo que se dijo al final de la sección 5.1. Se aplica un algoritmo de séptimo orden de Runge Kutta desarrollado por Fehlberg (1968). Cabe aclarar que para verificar la precisión también se hicieron pruebas con algoritmos de segundo y cuarto orden, obteniéndose resultados similares. Además, según veremos en el capítulo 7, nos reproduce el equilibrio cuando damos los parámetros adecuados (órbita circular, corrotación, coplanaridad). Inicialmente hay una separación  $\ell_0$  entre los puntos medios de los elementos a través de la cáscara; en tiempos posteriores la separación local da la longitud azimutal  $\ell$  del elemento.

Para generar condiciones iniciales en el movimiento de los elementos, se consideró un segundo sistema no inercial con centro en  $M_1$  y girando con una velocidad angular  $\beta \Omega_0$  respecto al inercial, con  $\Omega_0$  la velocidad angular orbital en el punto de la órbita en el cual se inicia. Entonces, con notación doble prima en este segundo sistema no inercial y tomando en  $t = 0$  la condición de equilibrio  $\mathbf{v}_0'' = 0$ ,  $\mathbf{a}_0'' = 0$  en cada elemento,  $\mathbf{a}_{\text{ng}0}$  es:

$$\mathbf{a}_{\text{ng}0} = \{GM_1 \mathbf{r}'' / |\mathbf{r}''|^3 + GM_2 [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3]_{t=0} + \beta^2 \Omega_0 \times (\Omega_0 \times \mathbf{r}_0'')\} \quad (21)$$

La velocidad inicial de los elementos es puramente azimutal, y depende del parámetro  $\beta$ , definido como la razón entre la velocidad angular estelar (o sea, la velocidad angular de los elementos de superficie),  $\omega$ , (con respecto al sistema de referencia inercial) y la velocidad angular orbital,  $\Omega$ . En órbitas excéntricas, esta razón cambia conforme la estrella va del periastro al

apoastro. Entonces, a un tiempo arbitrario durante el ciclo orbital, definimos  $\beta = \omega/\Omega$ . El sistema corrota si  $\beta=1$ .

La capa superficial considerada se tomó como  $\Delta = 0.01R_1$  de grosor. La elección de tal grosor es un poco arbitraria, pues según Nikolov y Tsvetko (1972), podría tenerse grosores de hasta 0.05 veces o más del radio estelar en una estrella que oscila.

## 5.4 Entradas y salidas del programa

Al comenzar a correr el programa, los parámetros que nos pide son los siguientes:

$M_1$	Es la masa de la estrella principal (en $M_{sol}$ ), a la cual se le estudian las oscilaciones.
$M_2$	Masa de la compañera (en $M_{sol}$ ).
$R_1$	Radio de la estrella principal (en $R_{sol}$ ).
$\nu$	Coefficiente de viscosidad cinemática (en $\text{dias}^{-1}$ ).
$\beta$	Cociente entre la velocidad de rotación y la orbital (sin dimensiones).
$e$	Excentricidad orbital (sin dimensiones).
$T_{orb}$	Periodo orbital (en días).

Como salidas, el programa nos genera (entre otras cosas):

-Forma del cinturón en el periastro y en el apoastro, así como en otros tiempos seleccionados si lo requerimos.

-Velocidades radiales de cada uno de los elementos, también en tiempos seleccionados.

-Valor máximo de la deformación  $R_{m\acute{a}x}$  en cada paso de integración, y posición angular del elemento que lleva dicha deformación,  $\phi(R_{m\acute{a}x})$ .

-Valor máximo de la velocidad radial  $v_{m\acute{a}x}$  en cada paso de integración, y posición angular del elemento que lleva dicha velocidad radial,  $\phi(v_{m\acute{a}x})$ .

Para extraer la información de tales datos, generamos gráficas de los siguientes pares de parámetros:  $R$  vs  $\phi$  para algunos periastrós y apoastrós;  $R_{m\acute{a}x}$  vs  $t$ ,  $\phi(R_{m\acute{a}x})$  vs  $t$ ,  $v_{m\acute{a}x}$  vs  $t$ ,  $\phi(v_{m\acute{a}x})$  vs  $t$ , para toda la corrida. Ejemplos de tales gráficas se muestran en las siguientes secciones.

Algo que es importante mencionar es que al comenzar a integrarse las ecuaciones de movimiento, el sistema primero tiene un transitorio en el cual las variaciones son inestables, y sólo hasta que pasan varios ciclos el sistema llega a un estado de comportamiento periódico. El análisis que se efectuó y que se describirá en la parte II, se hizo hasta que se alcanzó dicho comportamiento estable.

También es muy importante decir que el programa localiza en cada instante a los 500 elementos y mide la fracción de contacto entre elementos vecinos, así como su azimut. Cuando dos elementos pierden el contacto, el programa deja de calcular. Esto se podría interpretar como

---

pérdida de masa. También deja de calcular cuando dos elementos tienen el mismo azimut, pues ya no puede identificar a cada uno de ellos. Esto se podría interpretar como turbulencia.

Una descripción más detallada de la forma de correr el programa y de los archivos de datos que genera se ve en el apéndice.

## 5.4 Cálculos efectuados

Con el modelo descrito se hicieron cálculos de las oscilaciones de estrellas en sistemas binarios de diferentes configuraciones. Las masas se mantuvieron constantes en todos los casos:  $M_1 = M_2 = 40 M_{\text{sol}}$ .

Primero se supusieron sistemas con órbitas circulares con una separación orbital de  $100 R_{\text{sol}}$ . Con ello se tiene  $P_{\text{orb}} = 12.9563$  días. También se tendría un lóbulo de Roche a  $50 R_{\text{sol}}$ . Inicialmente se fijó el valor de  $R_1$  y se varió  $\beta$ . Luego se fijó el valor de  $\beta$  y se varió  $R_1$ . El valor de la viscosidad se fijó en  $\nu = 0.2/\text{día}$ .

Después se supusieron sistemas con órbitas muy excéntricas. La excentricidad se fijó en 0.8, con un semieje mayor de  $a = 500 R_{\text{sol}}$ . Con esto se tiene que la distancia del periastro está a  $r_{\text{min}} = 100 R_{\text{sol}}$ , y el periodo orbital es de  $P_{\text{orb}} = 144.8557$  días. También en estos casos se varió  $\beta$  para  $R_1$  fijo y se varió  $R_1$  para  $\beta$  fija.

Los resultados obtenidos de estos cálculos se dan en la parte II.

## **Parte II**

### **Resultados**

*y*

### **Conclusiones**

## Capítulo 6

### Modos de oscilación

En este capítulo se hará ver la relación entre lo obtenido en el modelo descrito en el capítulo 5 y lo que predicen las teorías clásicas. Para ello ajustaremos los datos obtenidos de las formas y velocidades de un caso particular en términos de armónicos esféricos y con ello poder identificar las componentes de marea en equilibrio y marea dinámica. De acuerdo con la revisión dada en los capítulos 2 y 3 sobre los modos de oscilación que predicen las teorías clásicas, en una estrella oscilante deberíamos observar modos de oscilación proporcionales a los armónicos esféricos. En este capítulo mostraremos que por lo menos para un caso, esto se cumple.

Puesto que el modelo que se usó para este trabajo sólo considera el ecuador, tendríamos que fijar el ángulo polar  $\theta$  en  $\pi/2$ , es decir, tendríamos que trabajar únicamente con los armónicos esféricos de la forma  $Y_{\ell m}(\pi/2, \phi)$ . Debido a que el eje de rotación de la estrella principal es perpendicular al plano orbital, esperamos que las fuerzas (y por tanto las deformaciones) sean simétricas en las regiones fuera del ecuador estelar, con el plano orbital siendo el plano de simetría. Por tal razón, sólo tomaremos los armónicos esféricos cuyos valores de  $\ell$  y  $m$  sean iguales ( $Y_{\ell\ell}$ ), es decir sólo los que nos describan modos sectoriales, según la terminología anterior. Pero por la forma en que se definieron los armónicos esféricos en el capítulo 2 nos damos cuenta de que este caso de los armónicos esféricos nos da sólo funciones senoidales. Por tanto, de acuerdo a la teoría del análisis de Fourier, en principio podríamos ajustar cualquier curva en términos de estos "armónicos".

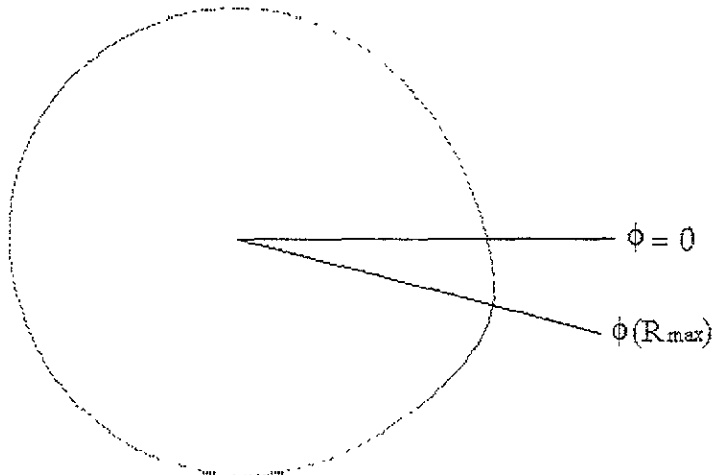


Figura 6.1. Forma de la estrella en el periastro. El ángulo  $\phi = 0$  indica la dirección hacia la compañera. El ángulo  $\phi(R_{max})$  se midió con respecto a dicho origen.

Cuando se describieron las salidas del programa en el cap. 5, se mencionó que se puede obtener la forma en algún instante, así como las velocidades de los elementos en el mismo instante. En las figuras 6.1 y 6.2 mostramos gráficas de la forma instantánea del ecuador de la estrella en el periastro y en el apoastro para el caso en que las estrellas tienen  $40 M_{sol}$ ,  $R_1 = 20 R_{sol}$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $v = 0.2$ ,  $e = 0.8$  y  $a = 500 R_{sol}$ . Cabe aclarar que se ha exagerado enormemente el grado de la

deformación (multiplicándola por 100 o por 1000) para hacerla más evidente, por tal razón no se incluye escala alguna. Como podemos observar, en el periastro la mayor deformación ocurre cerca de  $\phi = 0$ , pero no en 0 exactamente. Sin embargo, si cortamos la figura pasando por la mayor deformación y el centro, vemos que hay simetría aproximadamente. Esto se verá mejor más adelante. En el apoastro, el comportamiento es extraño en este caso particular. Generalmente en los apoastros la forma de la estrella está relajada y no muestra las deformaciones que muestra en el periastro; pero aquí vemos que la mayor deformación está ¡hacia adentro!. Uno podría pensar que esto va en contra de lo esperado físicamente. Pero no hay que alarmarse; primero veremos que las amplitudes son sumamente pequeñas en estas fases; segundo, veremos que en el apoastro la estrella puede tener deformaciones de cualquier tipo.

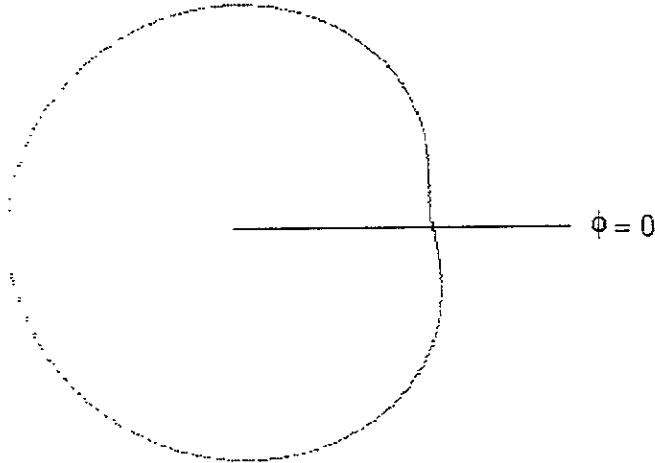


Figura 6.2. Forma de la estrella en el apoastro. Al igual que en la figura 1, el ángulo  $\phi = 0$  indica la dirección hacia la compañera.

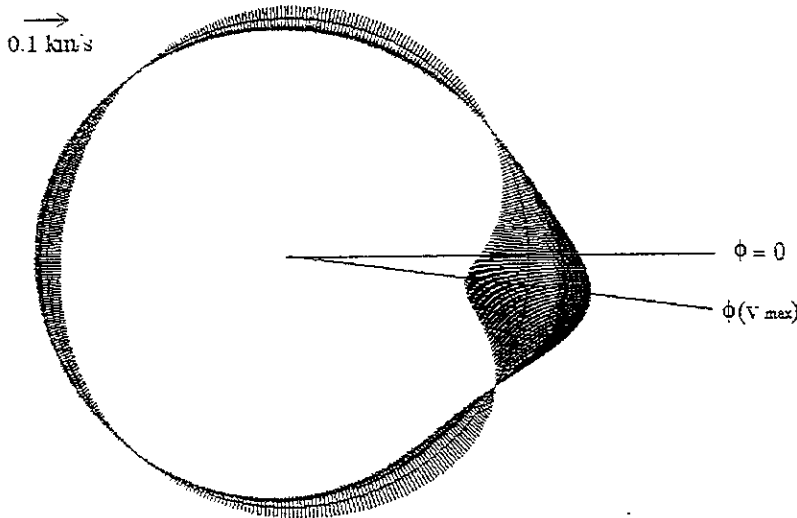


Figura 6.3. Campo de velocidades en el periastro. Idem.

En las figuras 6.3 y 6.4 vemos gráficas de las velocidades radiales de los elementos en cada instante, superpuestas en forma de vector sobre cada elemento. Aclaremos que aquí cada elemento tiene sus coordenadas reales. Esto quiere decir que la forma mostrada por el contorno que parece circular es la forma real de la estrella en la escala adecuada. Por otra parte, las escalas de las

velocidades son diferentes en ambas figuras y las establece la flecha en la parte superior izquierda de cada gráfica. En la primera, la magnitud de la flecha representa 0.1 km/s, mientras que en la segunda representa sólo 0.001 km/s, mostrando que las amplitudes en el apoastro son realmente despreciables para el caso mostrado. Notemos algo interesante: la distribución muestra cuatro nodos. Vemos cuatro nodos porque esto es un modelo bidimensional, ya que en realidad estos cuatro nodos son sólo dos en el caso tridimensional. Esto nos dice que el modo predominante es el cuadrupolo. Más adelante reafirmaremos esto cuantitativamente. Además de lo anterior, notamos que no hay la simetría que se halló en el caso de la deformación. También aquí se aprecia algo similar a la gráfica de las deformaciones: un corrimiento en  $\phi$  con respecto a la dirección a la compañera, aunque de diferente valor.

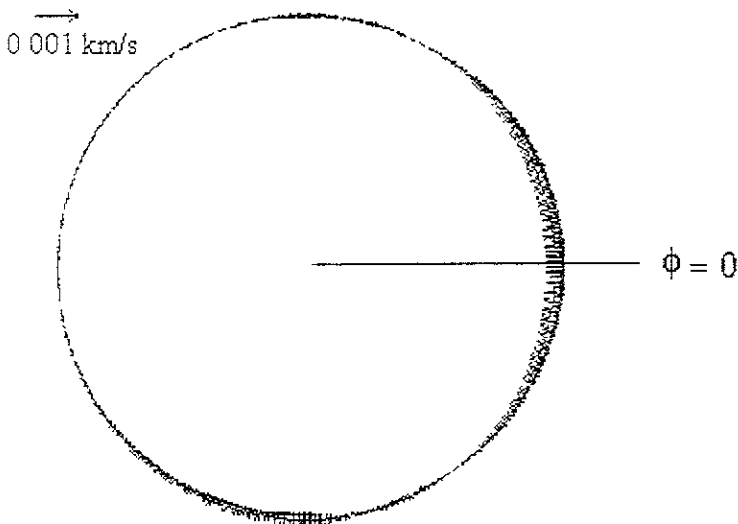


Figura 6.4. Campo de velocidades en el apoastro. Idem.

La razón de tales desplazamientos en  $\phi$  para la mayor deformación es que la viscosidad retarda el desplazamiento de los elementos y no permite que el elemento con mayor deformación siga el movimiento de la compañera. Por otra parte, el elemento con la mayor velocidad se atrasa con respecto al de mayor deformación debido a que el elemento con la mayor deformación ya ha alcanzado su máximo y en ese momento está en reposo instantáneo, esperándose que su próximo movimiento sea de regreso a la posición original. Entretanto, los elementos que vienen atrás de él aun no llegan al máximo y se espera que sigan moviéndose a gran velocidad hasta llegar a él. Físicamente esto es razonable, pues en un oscilador armónico vemos que en el instante de mayor elongación la velocidad es cero; mientras que en el instante de mayor velocidad la elongación es cero. El ligero desfaseamiento es explicable si tenemos en cuenta la viscosidad.

Ya que tenemos una idea de lo que sucede con las deformaciones y el campo de velocidades, hacemos gráficas de  $R$  vs  $\phi$  y  $V$  vs  $\phi$  para hacer un análisis más objetivo. Las figuras 6.5 y 6.6 muestran gráficas de  $R$  vs  $\phi$  en el periastro y en el apoastro, respectivamente. Debemos decir que aquí desplazamos el origen de  $\phi$  hacia  $\phi(R_{\text{máx}})$ , haciendo  $\phi' = \phi - \phi(R_{\text{máx}})$  para evitar desfaseamientos. A continuación efectuamos un ajuste en series de Fourier, pero usamos la notación adoptada antes,  $Y_{2m}(\pi/2, \phi')$ . El resultado obtenido para el periastro es:

$$R(\phi') = 106.372 Y_{00}(\pi/2, \phi') + 0.00254462 Y_{11}(\pi/2, \phi') + 0.0617828 Y_{22}(\pi/2, \phi') + 0.0227717 Y_{33}(\pi/2, \phi') + 0.0172206 Y_{44}(\pi/2, \phi') + 0.00961961 Y_{55}(\pi/2, \phi') + 0.00641621 Y_{66}(\pi/2, \phi') + 0.0041877 Y_{77}(\pi/2, \phi') + 0.00265781 Y_{88}(\pi/2, \phi'). \quad (1)$$

Notemos que numéricamente el modo predominante es el cuadrupolo (pues el coeficiente de  $Y_{22}(\pi/2, \phi')$  es el más grande), según se veía gráficamente ya desde antes (ya que el coeficiente del primer armónico esférico  $Y_{00}(\pi/2, \phi')$  en realidad sólo nos da la forma de la estrella no perturbada). Es el cuadrupolo y los armónicos de él lo que identificamos con las mareas dinámicas, mientras que al dipolo lo identificamos con la marea en equilibrio.

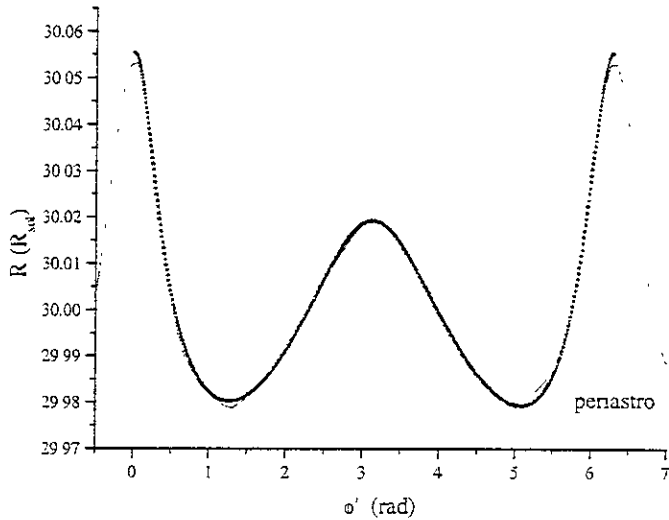


Figura 6.5. Ajuste de armónicos esféricos a la forma en el periastro. La línea gruesa son los datos calculados, mientras que la línea delgada es el ajuste realizado.

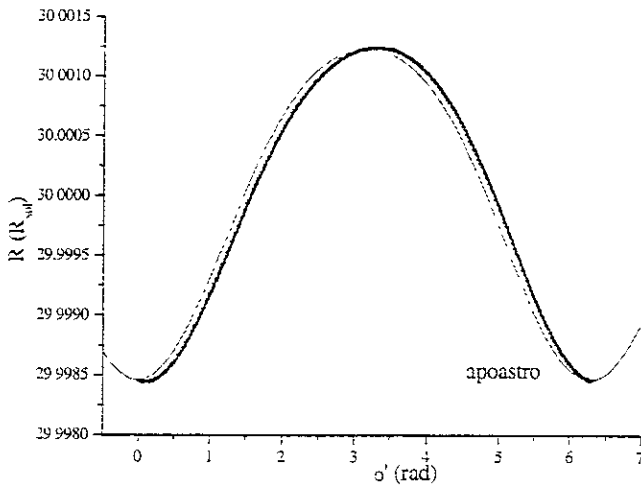


Figura 6.6. Ajuste de armónicos esféricos a la forma en el apoastro. Idem.

En la figura 6.5 vemos la gráfica de la forma en el periastro, con nuestro mejor ajuste en términos de armónicos esféricos. Un comportamiento similar se espera para los instantes cercanos.



Sin embargo, conforme nos alejamos del periastro la situación va cambiando. En la figura 6.6 está la gráfica del apoastro, que como podemos ver no muestra una configuración tan compleja como el periastro. De cualquier manera se hizo el ajuste para el apoastro en términos de armónicos esféricos, obteniéndose:

$$R(\phi''') = 106.347 Y_{00}(\pi/2, \phi') - 0.00401142 Y_{11}(\pi/2, \phi') - 0.000403789 Y_{22}(\pi/2, \phi').$$

Notemos que aquí la contribución del dipolo es mucho más pequeña comparada con el periastro, pero que el modo dipolar persiste (aunque ahora haya cambiado de signo). Esto nos indica que lejos del periastro la marea dinámica se amortigua más fuertemente que la marea en equilibrio.

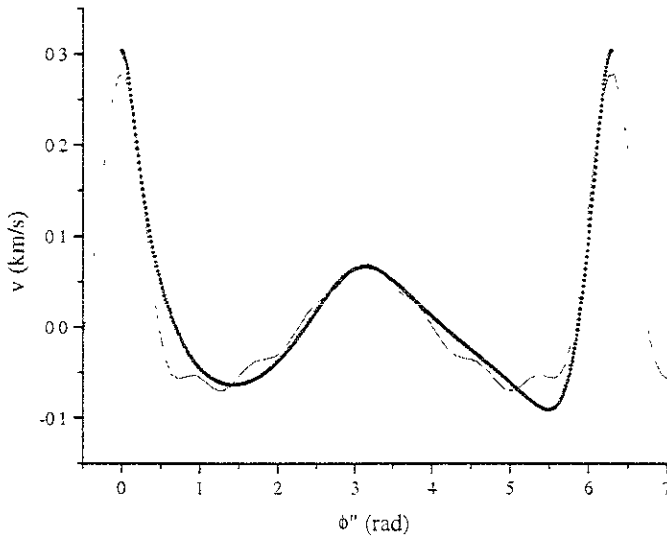


Figura 6.7. Ajuste de armónicos esféricos a las velocidades radiales en el periastro.

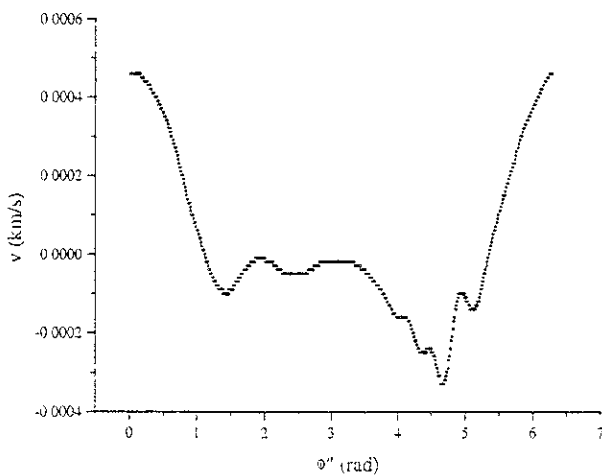


Figura 6.8. Velocidades radiales en el apoastro.

En la figura 6.7 está la gráfica de las velocidades radiales vs  $\phi''$  (definida como  $\phi'' = \phi - \phi(v_{\text{máx}})$ ). Vemos que esta gráfica tiene gran asimetría, según ya habíamos notado. Tratamos de hacer

---

un ajuste en términos de armónicos esféricos, pero la asimetría no nos permite hacer un ajuste tan bueno como los anteriores, como se ve en la figura misma. Aun así, se ve el dipolo. En la figura 6.8 vemos la gráfica para el apoastro. Aquí vemos que los puntos están muy dispersos, mostrando un comportamiento totalmente errático, aunque de muy baja amplitud.

Como hemos visto, el comportamiento de las deformaciones instantáneas calculadas mediante la solución de las ecuaciones de movimiento con el modelo de Moreno y Koenigsberger (1999) se puede describir en términos de los armónicos esféricos, consistente con los modelos clásicos. Sin embargo, lo que nos da una mayor idea de lo que sucede es la magnitud alcanzada por el elemento con la mayor deformación, mientras que los otros elementos se apartan muy poco de la forma esférica. Lo mismo pasa con las velocidades. Por esta razón en las próximas secciones se analizará el comportamiento de los elementos que llevan la mayor deformación y velocidad, haciendo caso omiso de los elementos que nos dan poca información. Obviamente que estos elementos no son siempre los mismos, por lo que para distinguirlos tomaremos en cuenta el azimut del elemento en cuestión.

## Capítulo 7

### Oscilaciones en sistemas binarios circulares

En este capítulo se darán los resultados obtenidos al aplicar el modelo descrito en el capítulo 5 a sistemas binarios con órbitas circulares. Los parámetros son los que se dieron en el capítulo 5. Primero exploramos el comportamiento en  $\beta$  y luego en  $R_1$ . Notemos que por ser circular la órbita, la velocidad angular orbital  $\Omega$  también es constante, por lo cual el valor de  $\beta$  es el mismo para toda la órbita y se puede expresar como el cociente entre los periodos de rotación y orbital:  $\beta = P_{\text{rot}}/P_{\text{orb}}$ .

#### 7.1 Variación en $\beta$

En la figura 7.1 vemos la gráfica de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Este es el caso en que  $R_1$  vale  $20 R_{\text{sol}}$  y  $\beta$  vale 0.5. Como podemos ver, las oscilaciones muestran un patrón de doble onda, que se conserva una vez que el sistema ha alcanzado la fase periódica, o sea, después de haber salido del transitorio que se observa en el intervalo de tiempo de 0 a 8 días, durante el cual las oscilaciones de amplitud mayor decrecen poco a poco, hasta alcanzar un patrón periódico.

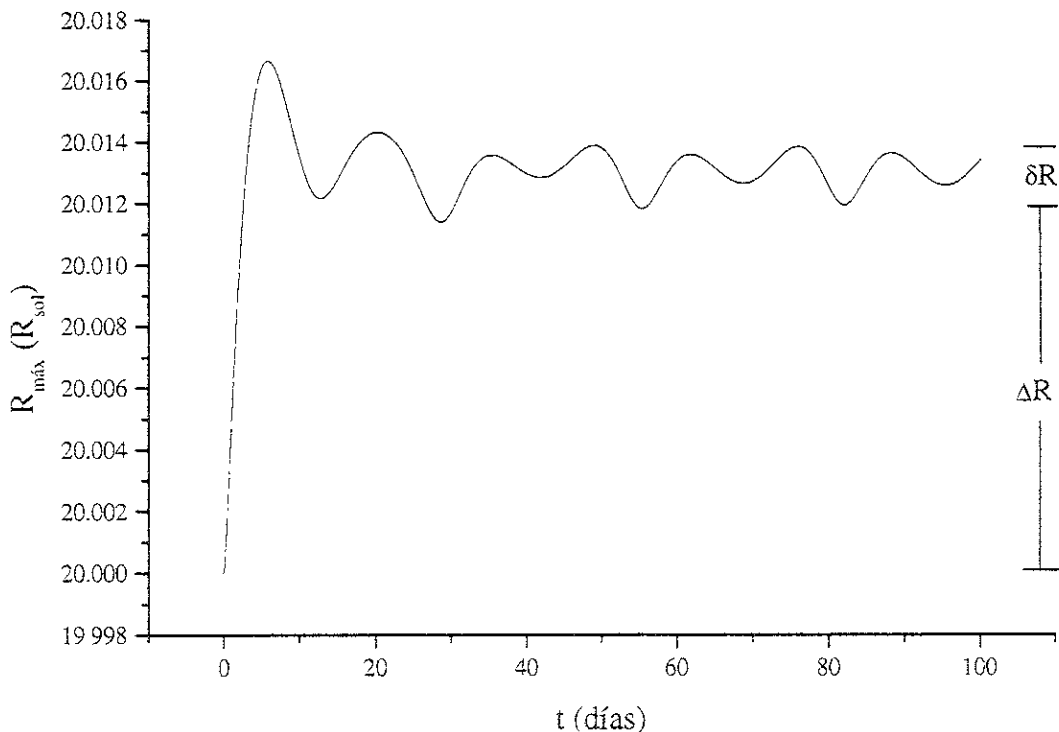


Figura 7.1. Variaciones del radio  $R_{\text{máx}}$  vs.  $t$  para  $\beta = 0.5$  y  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ .

Para los diferentes casos calculados se obtuvieron resultados similares, pero no damos las gráficas porque ello nos llevaría demasiado espacio. En las gráficas de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$  se midió la amplitud de la deformación para cada caso. Dicha amplitud tiene dos componentes: una que no cambia en el tiempo y otra que es oscilatoria. Estas componentes están identificadas con  $\Delta R$  y  $\delta R$ , respectivamente, en la figura 7.1. Ambas se midieron para cada caso *cuando ya se había alcanzado el comportamiento periódico*. También se midió el valor del periodo de oscilación  $P_{\text{osc}}$  de la onda doble que se obtiene en la fase periódica. La presencia de una componente de marea en equilibrio ( $\Delta R$ ) se explica porque en estos casos se cumplen dos de las condiciones de equilibrio: coplanaridad y órbita circular.

El elemento que presenta la mayor deformación no cambia mucho de ubicación durante un periodo orbital. Es por ello que al hacer una gráfica del ángulo de  $R_{\text{máx}}$  (llamado aquí  $\phi(R_{\text{máx}})$ ) contra el tiempo, vemos que oscila entre límites bien definidos, según se ve en la figura 7.2. El promedio en  $\phi(R_{\text{máx}})$  es el reportado en la tabla siguiente y es sobre el que se hace el análisis. Nótese que el grosor del trazo en esta figura se debe a la presencia de oscilaciones de muy corto periodo y amplitud, debidas a los efectos de la discretización

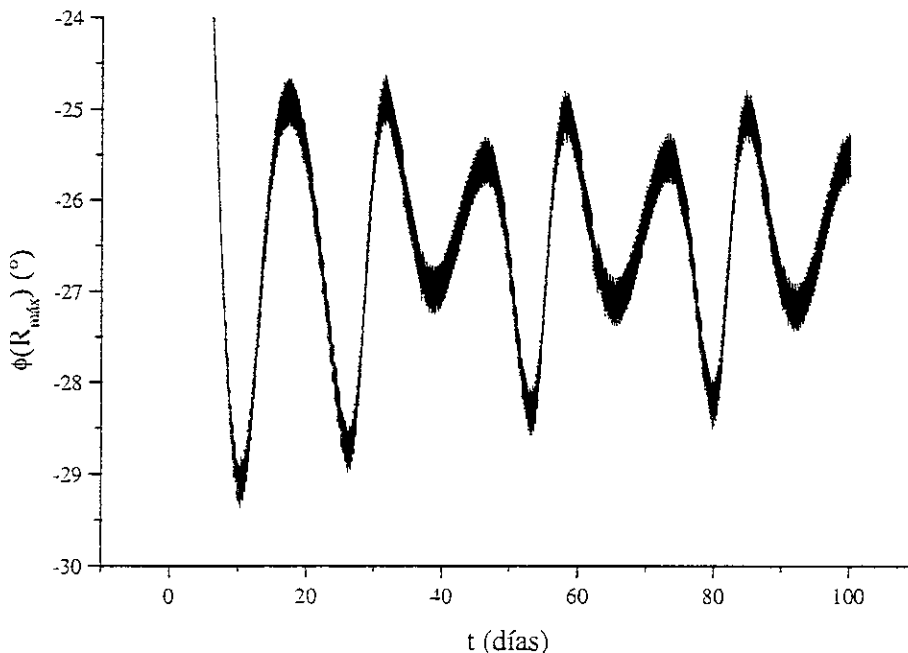


Figura 7.2. Azimut de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $t$ , para los mismos parámetros que en la figura 7.1.

En la figura 7.3 vemos la gráfica de la velocidad del elemento que lleva la mayor velocidad radial en función del tiempo. Esta gráfica muestra un comportamiento similar al de  $R_{\text{máx}}$  en función del tiempo. En efecto, observamos un patrón de doble onda una vez que se ha alcanzado el equilibrio, cuyo periodo es igual al de  $R_{\text{máx}}$  en función de  $t$ . Aquí se seleccionó la velocidad máxima que se alcanza en la fase periódica para el análisis.

La figura 7.4 muestra la gráfica del ángulo que tiene el elemento con la mayor velocidad radial en función del tiempo. Aquí vemos también, similarmente a la gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$ , que la variación es pequeña y podemos tomar el valor promedio para reportarlo.

Como se dijo antes, también se obtuvieron gráficas para los demás casos que se calcularon. Después de medir los parámetros que se describieron en los párrafos anteriores, se obtienen los resultados que se resumen en la tabla 1, para el caso en que  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ . Las tablas 2 y 3 dan los resultados para los casos calculados con  $R_1 = 25$  y  $30 R_{\text{sol}}$ , respectivamente. Recordemos que hay dos parámetros que caracterizan la deformación: a  $\Delta R$  lo identificamos como una componente de marea en equilibrio y a  $\delta R$  lo identificamos como la marea dinámica.

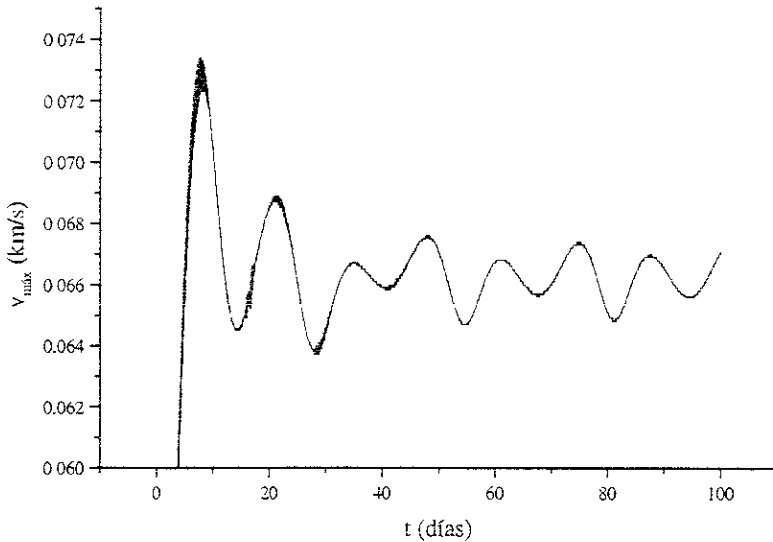


Figura 7.3. Velocidad máxima  $v_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Mismo caso que en la figura 7.1.

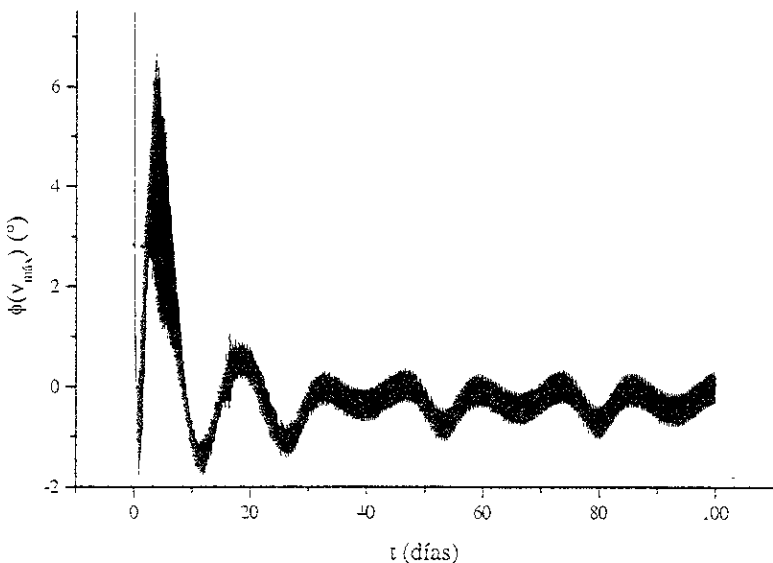


Figura 7.4. Azimut  $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $t$ .

Todo lo anterior se hizo para un rango de valores de  $\beta$ , y para tres diferentes valores de  $R_1$ . Para  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$  se calcularon valores de  $\beta$  hasta 4.0, con pasos  $\Delta\beta = 0.1$ . Para los otros se calcularon sólo hasta  $\beta = 2.0$  con pasos  $\Delta\beta = 0.2$ .

Tabla 7.1. Casos calculados variando  $\beta$  para  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ .

$\beta$	$P_{\text{osc}}$ (días)	$\delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\Delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\phi(R_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )	$v_{\text{máx}}$ (km/s)	$\dot{\phi}(v_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )
0	12.977	0.00182	0.00463	-36	0.05	5
0.1	14.5038	0.00186	0.00496	-34	0.052	-5
0.2	16.4122	0.0019	0.00558	-33	0.054	-6
0.3	19.0839	0.00192	0.00779	-31	0.058	-5
0.4	22.48	0.00183	0.00947	-29	0.063	-4
0.5	26.7175	0.00197	0.0118	-27	0.067	0
0.6	33.5878	0.00186	0.01528	-23	0.071	5
0.7	45.8015	0.00183	0.02017	-19	0.069	11
0.8	73.28	0.00194	0.0268	-13	0.058	20
0.9	164.1221	0.0022	0.03495	-7	0.033	35
1	--	0	0.03970	0	--	--
1.1	165.38	0.0022	0.03495	8	0.032	-34
1.2	73.85	0.0019	0.02636	13	0.057	-20
1.3	46.67	0.00198	0.01935	18	0.067	-11
1.4	33.85	0.00196	0.01472	23	--	-4
1.5	26.92	0.00194	0.01137	26	0.063	0
1.6	22.31	0.00214	0.00988	30	0.059	4
1.7	18.973	0.00187	0.00729	32	0.053	5
1.8	16.54	0.00192	0.00594	33	0.05	6
1.9	14.5615	0.00196	0.00195	34	0.047	5
2	13.23	0.00191	0.00417	35	0.045	5
2.1	12	0.00192	0.00353	35	0.044	5
2.3	10.11	0.00188	0.00256	37	0.04	4
2.5	8.72	0.00193	0.00184	36	0.038	3
2.7	7.96	0.00194	0.00131	37	0.035	1
2.9	6.86	0.00157	0.00088	35	0.032	0
3	6.56	0.00196	0.00071	35	0.031	-2
3.2	5.934	0.00195	0.00043	35	0.028	-5
3.4	--	0.0019	0.00026	--	--	--
3.6	5.05	0.00182	0.00048	30	0.025	-14
3.8	4.6154	0.00177	0.00016	30	0.025	-20
4	4.3956	0.00175	0.00017	35	0.028	-22

Como vemos, en el caso de  $\beta = 1$ , que es el caso de equilibrio, no hay oscilaciones. O sea que la única componente de la deformación es la marea en equilibrio. Esto nos reproduce el comportamiento conocido de las teorías clásicas, ya que se cumplen las tres

condiciones de equilibrio: órbita circular, coplanaridad y corrotación. En las siguientes tablas hay menos datos, pero cubren un rango suficiente para ver el comportamiento global.

Tabla 7.2. Casos calculados variando  $\beta$  para  $R_1 = 25 R_{\text{sol}}$ .

$\beta$	$P_{\text{osc}}$ (días)	$\delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\Delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\phi(R_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )	$v_{\text{máx}}$ (km/s)	$\phi(v_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )
0	13.33	0.00379	0.01034	-38	0.1	-12
0.2	16.92	0.00531	0.01814	-35	0.14	-20
0.4	23.08	0.005	0.03118	-23	0.52	-8
0.6	38.46	0.00559	0.04948	-15	0.046	9
0.8	95.77	0.00733	0.082	-7	0.2	27
0.9	261.54	0.00862	0.09717	-3	0.09	38
1.1	261.54	0.00853	0.09612	3	0.09	-38
1.2	96.92	0.00715	0.07934	7	0.19	-26
1.4	57.03	0.00553	0.04383	16	0.38	-9
1.6	23.08	0.00509	0.02732	25	0.37	9
1.8	16.7	0.00557	0.01497	33	0.11	16
2	13.19	0.00603	0.00794	37	0.85	11

Tabla 7.3. Casos calculados variando  $\beta$  para  $R_1 = 30 R_{\text{sol}}$ .

$\beta$	$P_{\text{osc}}$ (días)	$\delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\Delta R$ ( $R_{\text{sol}}$ )	$\phi(R_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )	$v_{\text{máx}}$ (km/s)	$\phi(v_{\text{máx}})$ ( $^\circ$ )
0	13.54	0.01329	0.02196	-43	0.2	-22
0.2	18.72	0.01553	0.07815	-15	14	-15
0.4	28.92	0.01978	0.11753	2.5	12	3
0.6	53.84	0.02222	0.16111	-6	5	16
0.8	167.31	0.02822	0.19988	-3	0.9	28
1.2	167.31	0.02945	0.19504	3	0.6	-28
1.4	52.31	0.02288	0.16093	6	4.3	-14
1.6	27.69	0.02062	0.11102	0	10	0
1.8	17.85	0.01846	0.01077	22	8	21
2	13.59	0.01585	0.00197	40	0.12	22

Graficando los datos de las tabla 1, 2 y 3 vemos lo siguiente:

La figura 7.5 nos muestra cómo varía el periodo de oscilación  $P_{\text{osc}}$  con  $\beta$ . Como podemos ver, los periodos de oscilación varían fuertemente con  $\beta$ , haciéndose más grandes a medida que crece el valor de  $\beta$  desde cero hacia 1. En 1 el valor se hace infinito (no hay oscilaciones) y al aumentar el valor de  $\beta$  vuelve a decrecer el valor de  $P_{\text{osc}}$  en forma prácticamente simétrica. También podemos ver que al hacerse más grande el valor de  $R_1$ , los valores de  $P_{\text{osc}}$  se hacen más grandes. La forma de estas curvas sugiere ajustar ecuaciones de la forma  $y = a/|1-x|^b$ , lo cual se hizo, dando los siguientes resultados:

Para  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$

$$P_{osc} = 12.076/(1-\beta)^{1.13} \quad \beta < 1 \quad (1)$$

$$P_{osc} = 12.479/(\beta-1)^{1.12} \quad \beta > 1 \quad (2)$$

Para  $R_1 = 25 R_{sol}$

$$P_{osc} = 10.544/(1-\beta)^{1.39} \quad \beta < 1 \quad (3)$$

$$P_{osc} = 13.241/(\beta-1)^{1.29} \quad \beta > 1 \quad (4)$$

Para  $R_1 = 30 R_{sol}$

$$P_{osc} = 12.632/(1-\beta)^{1.60} \quad \beta < 1 \quad (5)$$

$$P_{osc} = 11.945/(\beta-1)^{1.64} \quad \beta > 1 \quad (6)$$

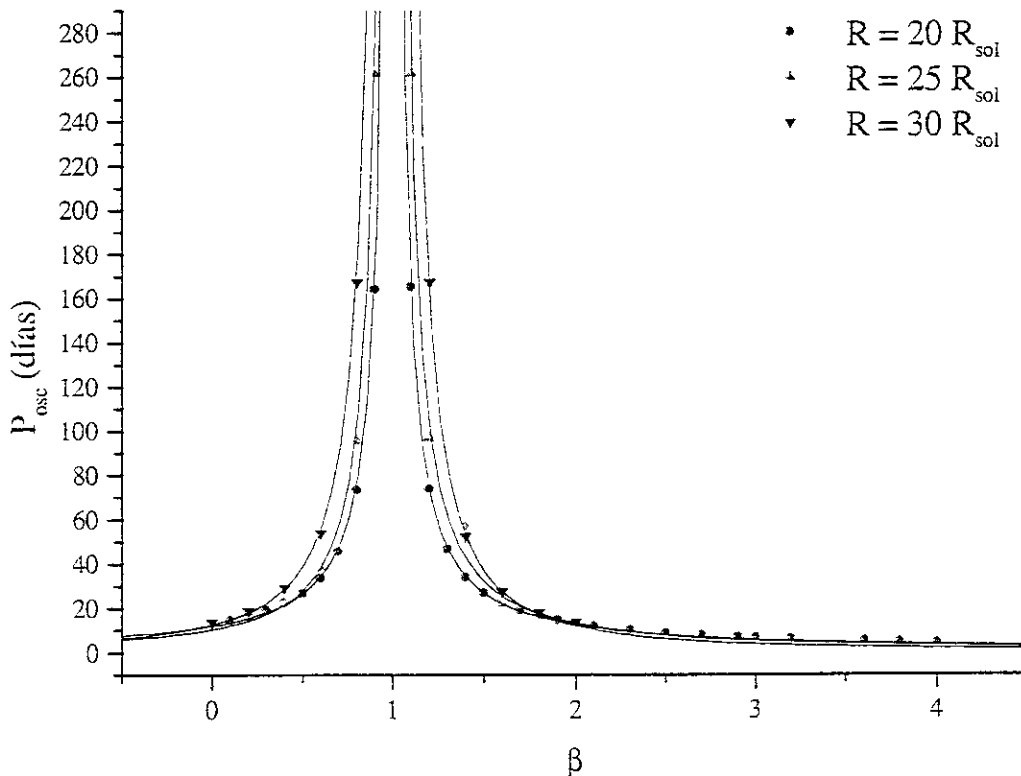


Figura 7.5.  $P_{osc}$  vs  $\beta$ . Están representados los tres casos  $R_1 = 20, 25$  y  $30 R_{sol}$ , con los diferentes símbolos según se detalla.

También notamos una fuerte tendencia del periodo de oscilación al valor del periodo orbital cuando  $\beta = 0$  (no hay rotación). Esto es de esperarse físicamente, ya que al no haber rotación, la única frecuencia presente es la orbital, que es la que provee la fuerza perturbadora. Los casos intermedios son los batimientos entre dos frecuencias: la orbital y la de rotación. Al observar que el comportamiento de los periodos de oscilación en  $\beta = 0$  y  $\beta = 1$ , apoyamos la validez del modelo.



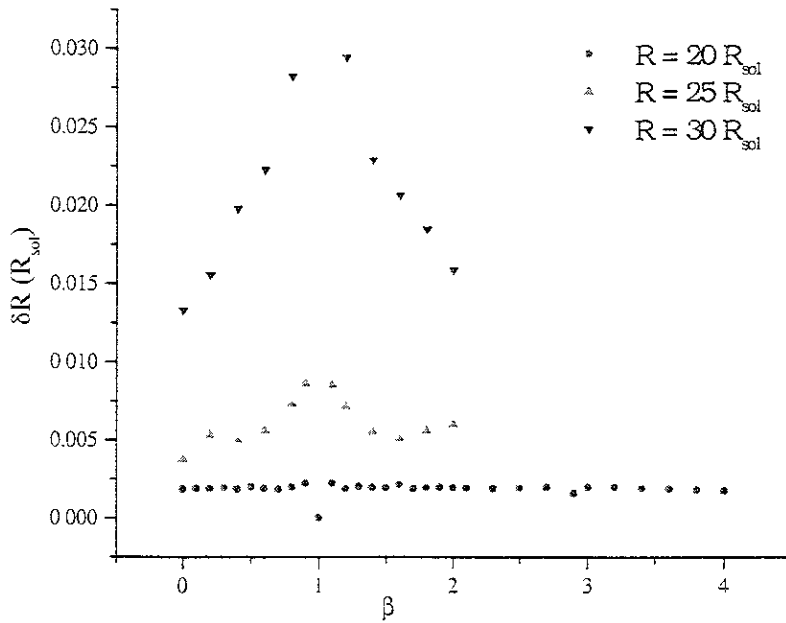


Figura 7.6.  $\delta R$  vs  $\beta$ . Igual que antes, están representados los tres radios diferentes.

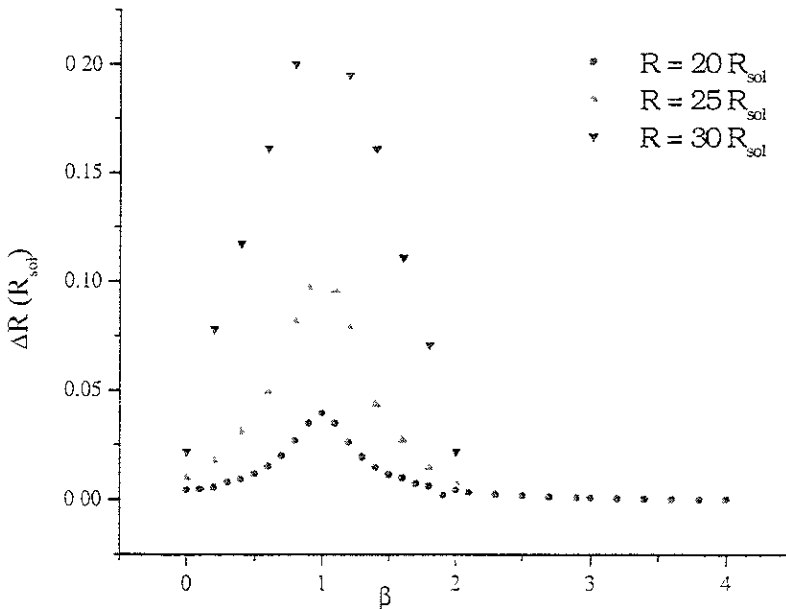


Figura 7.7.  $\Delta R$  vs  $\beta$ . Idem.

La figura 7.6 nos da una gráfica de  $\delta R$  vs  $\beta$  para los tres valores de  $R_1$  que, como vemos, muestra una tendencia a aumentar la amplitud conforme nos acercamos a corrotación ( $\beta = 1$ ). Al alejarnos de ella ( $\beta > 1$ ), vuelve a disminuir en forma casi simétrica. Por otra parte, en la figura 7.7 vemos la gráfica de  $\Delta R$ , que asimismo muestra un comportamiento similar, aunque a una escala mucho mayor. En este caso vemos también una ligera asimetría al ir hacia  $\beta > 1$ . La razón física de tal asimetría es que, mientras que

con respecto al sistema no inercial parece haber simetría entre la situación  $\beta < 1$  y  $\beta > 1$  (pues desde dicho sistema de referencia veríamos que la estrella gira hacia uno u otro lado de la línea que une a ambas estrellas), desde el sistema de referencia inercial las situaciones no son equivalentes, puesto que las aceleraciones debidas a fuerzas de inercia aumentan al aumentar el valor de  $\beta$ .

La figura 7.8 da una gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $\beta$ . Esto nos indica que al ir aumentando el valor de  $\beta$ , la perturbación también se mueve sobre la superficie de la estrella, que hace que la protuberancia se retrase respecto a la compañera para los casos en que  $\beta$  es menor que 1, y que la rebasa en los casos en que  $\beta$  es mayor que 1. Esto también es de esperarse físicamente, si tomamos en cuenta que hay viscosidad. Es este retraso (o adelantamiento) el que provocará la torca que a la larga frenará a la estrella. Como vemos, para los casos alejados de la corrotación la torca es grande, mientras que cerca de corrotación la torca es cada vez menor. Esto nos podría indicar que la evolución dinámica del sistema hacia el equilibrio es más lenta conforme más cerca está de él.

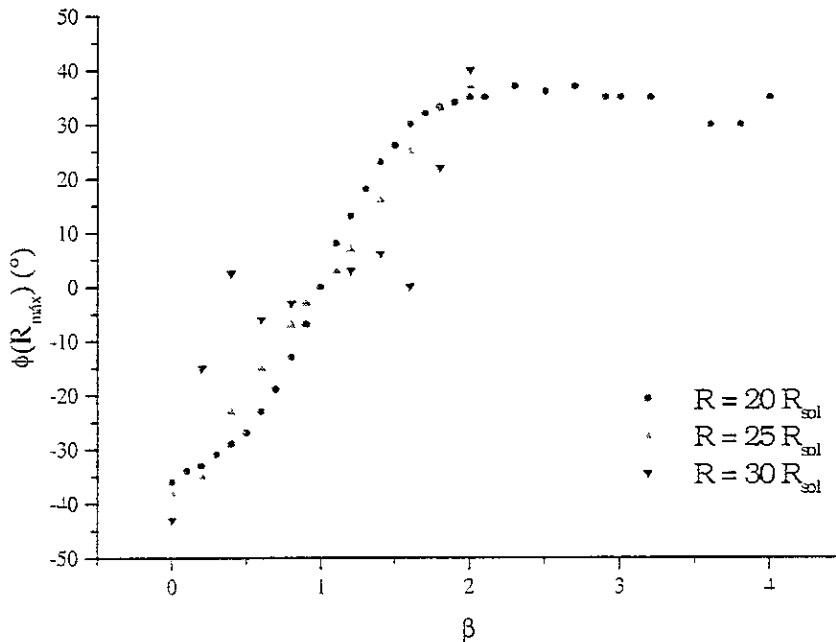


Figura 7.8. Azimut  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $\beta$ .

La figura 7.9 nos da la gráfica de la  $v_{\text{máx}}$  vs  $\beta$  para el caso  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ . La velocidad  $v_{\text{máx}}$  crece al crecer la velocidad de rotación, pero que hay un valor de  $\beta$ , conforme se acerca a  $\beta = 1$ , en que disminuye rápidamente hasta llegar a cero en  $\beta = 1$ . Posteriormente vuelve a crecer en forma casi simétrica hasta el máximo, para después disminuir otra vez. En los casos  $R_1 = 25 R_{\text{sol}}$  y  $R_1 = 30 R_{\text{sol}}$  (figura 7.10) se observa un comportamiento cualitativamente similar, en particular, la rápida disminución de  $v_{\text{máx}}$  cuando  $\beta$  tiende a 1. No parece obvia una explicación física para este comportamiento, pero podría deberse a que entre los casos de batimientos de frecuencias las perturbaciones experimentan mayor aceleración, que provocan el aumento de velocidades en los puntos intermedios.

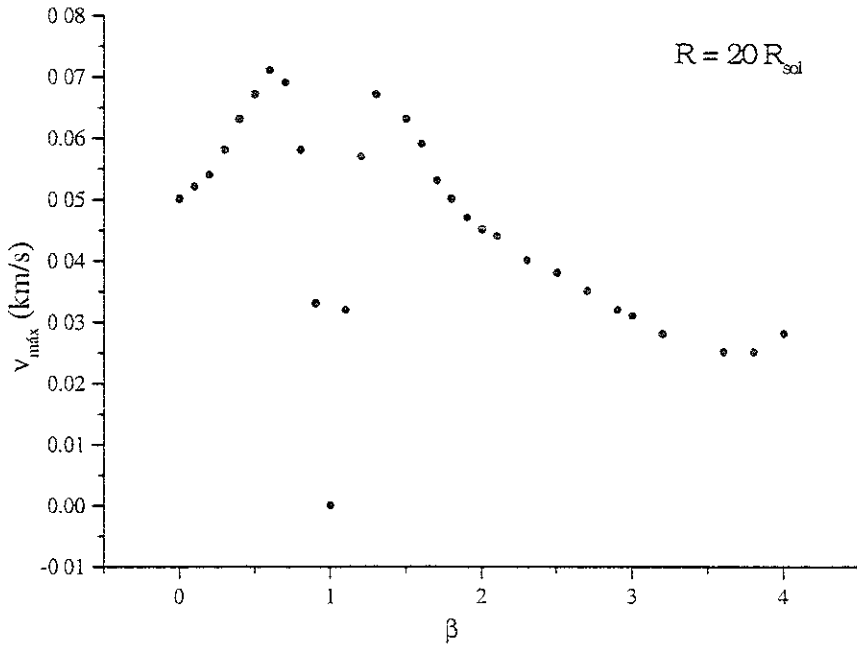


Figura 7.9. Velocidad máxima  $v_{m\acute{a}x}$  vs  $\beta$ .  $R_1 = 20 R_{sol}$ .

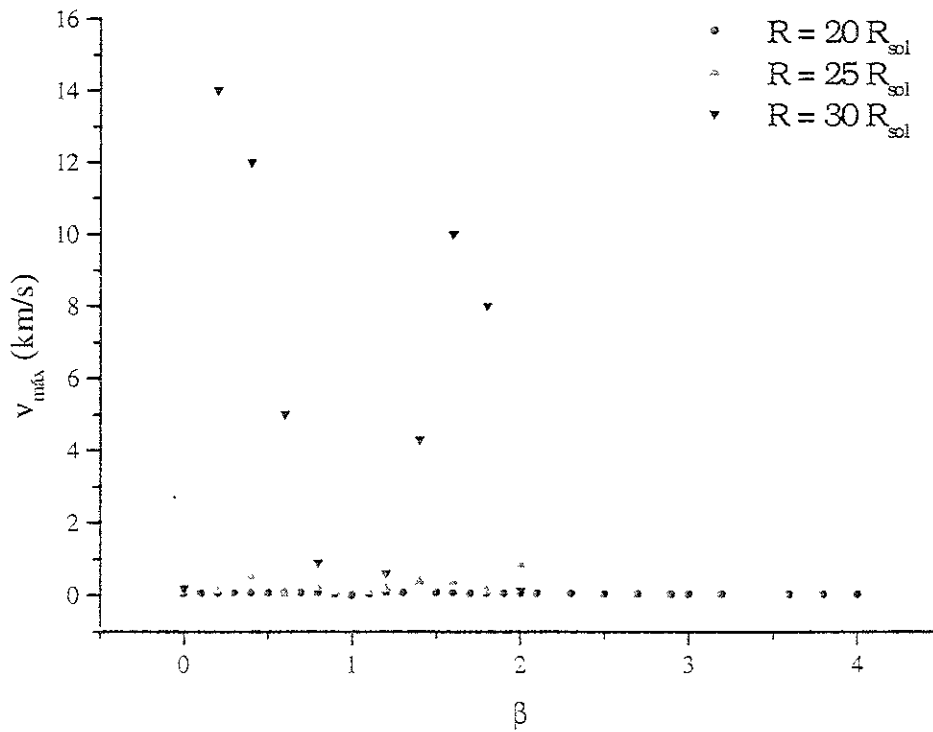


Figura 7.10. Velocidad máxima  $v_{m\acute{a}x}$  vs  $\beta$ .  $R_1 = 20, 25$  y  $30 R_{sol}$ .

La figura 7.11 nos da la gráfica de  $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $\beta$ . Aunque aquí tampoco es muy claro qué clase de función analítica pueda describir lo que se observa, cualitativamente vemos lo siguiente: Para velocidades de rotación donde  $\beta$  toma valores cercanos a cero, el ángulo que ubica al elemento con la mayor velocidad radial tiene valores negativos crecientes con  $\beta$ . Después de seguir llega a valores positivos y sigue creciendo. Cuando  $\beta$  toma valores mayores que 1, el ángulo vuelve a tomar valores negativos, de tal modo que el elemento que lleva la velocidad radial máxima ahora está en dirección perpendicular pero en el sentido opuesto (o sea, donde los ángulos son negativos). Aquí vemos que hay cierta “antisimetría” con respecto a la corrotación. Físicamente, esto tiene que ver con la asimetría de las aceleraciones debidas al sistema inercial. Para rotación lenta ( $\beta < 1$ ) la componente debida a la aceleración centrífuga es más pequeña y los elementos están más ligados a la estrella, siendo los que llevan mayor velocidad los que están más cercanos a la deformación. Como al rotar más rápido la estrella ( $\beta > 1$ ) aumenta el valor de la aceleración centrífuga, esto podría provocar que las velocidades radiales sean mayores para los elementos que se acercan rápidamente hacia la compañera.

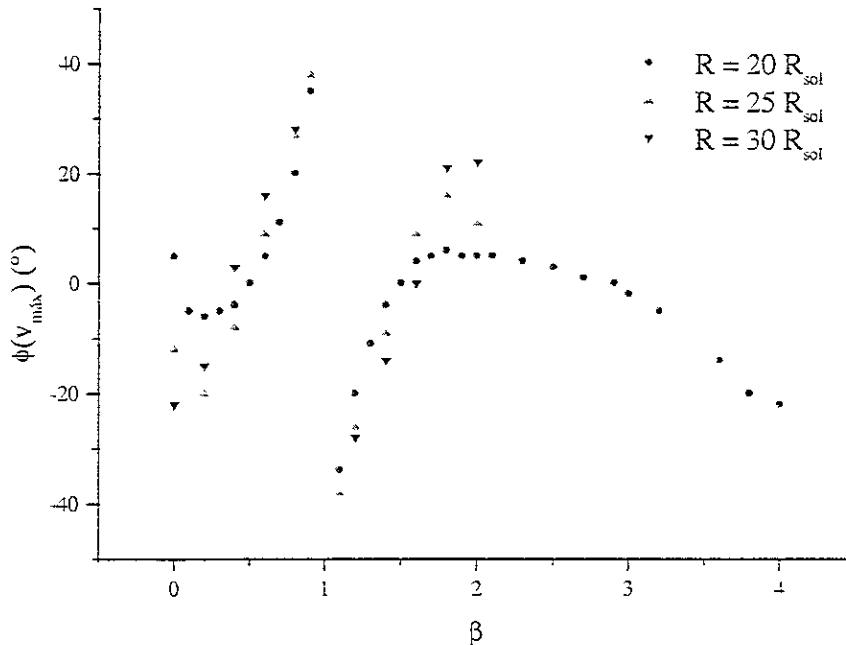


Figura 7.11. Azimut de  $v_{\text{máx}}$   $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $\beta$ .

## 7.2 Variación en $R_1$

Como ya indicamos en el capítulo 5, en estos casos se hicieron cálculos variando el valor de  $R_1$  y se midió la variación de los parámetros que elegimos para caracterizar las oscilaciones, según se describió antes. Para ésto se trabajó con gráficas similares a las mostradas en las figuras 7.1 - 7.4.

En la tabla 4 se dan los valores obtenidos para los parámetros antes descritos variando  $R_1$ , y manteniendo fija a  $\beta$  en 0.5. La tabla 5 nos da los mismos parámetros pero para el caso en que  $\beta = 1.5$ .

Tabla 4. Casos calculados variando  $R_1$  para  $\beta = 0.5$ .

$R_1$	$P_{osc}$ (días)	$\delta R$ ( $R_{sol}$ )	$\Delta R$ ( $R_{sol}$ )	$\phi(R_{m\acute{a}x})$	$v_{m\acute{a}x}$	$\Theta(v_{m\acute{a}x})$
20	26.7175	0.00197	0.00194	-27	0.067	0
21	26.92	0.00256	0.0025	-26	0.087	-1
22	27.23	0.00294	0.00302	-25	0.116	-1
23	27.69	0.00356	0.00364	-24	0.165	-1
24	28.46	0.00423	0.00443	-22	0.27	0
26	29.69	0.00617	0.00643	-17	1.3	1
27	30.77	0.00923	0.00833	-15	2.7	3
28	32.77	0.01024	0.01053	-12	4.5	5
29	35.08	0.014	0.01416	-10	7	8

Tabla 5. Casos calculados variando  $R_1$  para  $\beta = 1.5$ .

$R_1$	$P_{osc}$ (días)	$\delta R$ ( $R_{sol}$ )	$\Delta R$ ( $R_{sol}$ )	$\phi(R_{m\acute{a}x})$	$v_{m\acute{a}x}$	$\phi(v_{m\acute{a}x})$
20	26.92	0.0118	0.01137	26	0.063	0
21	26.9231	0.01584	0.01411	25	0.082	1
22	27	0.01882	0.0176	25	0.11	2
23	27.3	0.024	0.02228	24	0.15	2
24	27.69	0.03102	0.02817	22	0.22	0
25	28.15	0.03997	0.036	20	0.45	0
26	28.92	0.05268	0.04628	18	1.03	-1
27	30.05	0.0723	0.06055	16	2.2	-2
28	31.79	0.08976	0.07719	13	4	-4
29	33.69	0.125	0.09735	11	6	-6
30	36.28	0.152	0.12097	9	8	-8

Cuando se varió  $\beta$ , la razón para dejar de calcular casos fue que ya se tenía un rango suficiente para hacer el análisis deseado. Para estos casos la razón fue que ya no podíamos calcular para radios mayores debido al desprendimiento de elementos. Esto sugiere que para radios mayores que  $30 R_{sol}$ , siempre tendremos fenómenos de transferencia de masa, esto es mucho antes de alcanzar las dimensiones del lóbulo de Roche.

Similarmente a como hicimos con los casos en que se varió  $\beta$ , aquí hicimos gráficas de cada parámetro vs.  $R_1$ .

La figura 7.12 nos da la gráfica de  $P_{osc}$  vs  $R_1$ . Notamos que el periodo de oscilación aumenta fuertemente al aumentar el radio. En este caso lo que podría estar pasando es que, como al ser más grande la estrella los elementos están menos ligados gravitatoriamente, la

fuerza restauradora es menor. Esto se entiende mejor si se compara nuevamente con un oscilador armónico: cuando la constante del resorte es más pequeña la fuerza restauradora es menor, lo mismo que el periodo de oscilación. En nuestro caso la gravedad superficial actúa como constante de restitución. Es importante recordar que el periodo orbital del sistema es de 12.96 días en todos los casos así que las variaciones NO se repiten con la misma escala de tiempo que el periodo orbital.

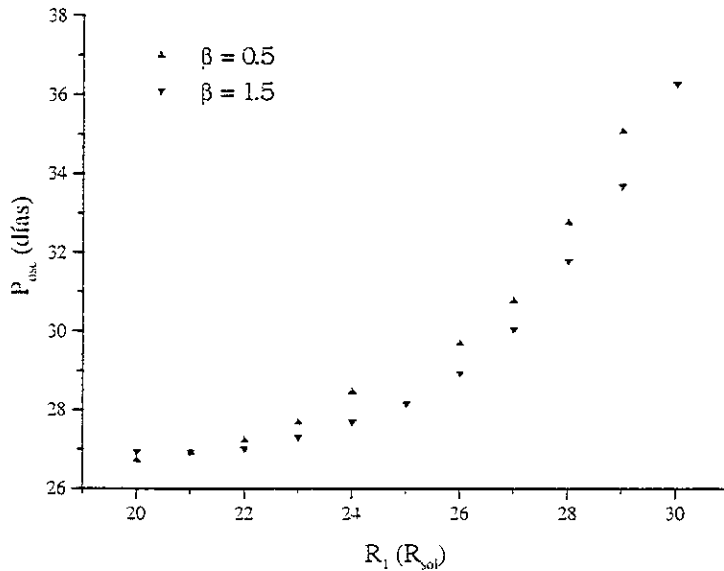


Figura 7.12. Gráfica de P<sub>osc</sub> vs R<sub>1</sub> para los casos β = 0.5 y β = 1.5

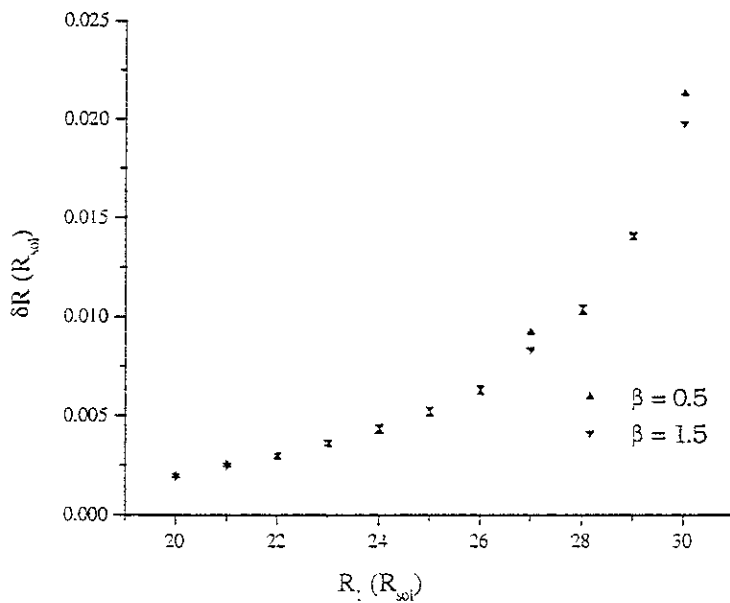


Figura 7.13. δR vs R<sub>1</sub>.

La figura 7.13 muestra la gráfica de  $\delta R$  vs  $R_1$ . En este caso también notamos un fuerte aumento en la amplitud de oscilación (marea dinámica) con el aumento en el radio. Esto es de esperarse si tomamos en cuenta que conforme aumenta el radio de la estrella, hay la fuerza que ejerce la compañera es mayor. Por lo tanto también será mayor la amplitud de la marea dinámica. Lo mismo se puede decir de la marea en equilibrio. La figura 7.14 muestra la gráfica de  $\Delta R$  vs  $R_1$ . Vemos que al igual que  $\delta R$ ,  $\Delta R$  crece fuertemente al crecer el radio. Esto también es natural esperarlo: es completamente razonable que en una estrella más grande la deformación de la marea en equilibrio sea más grande.

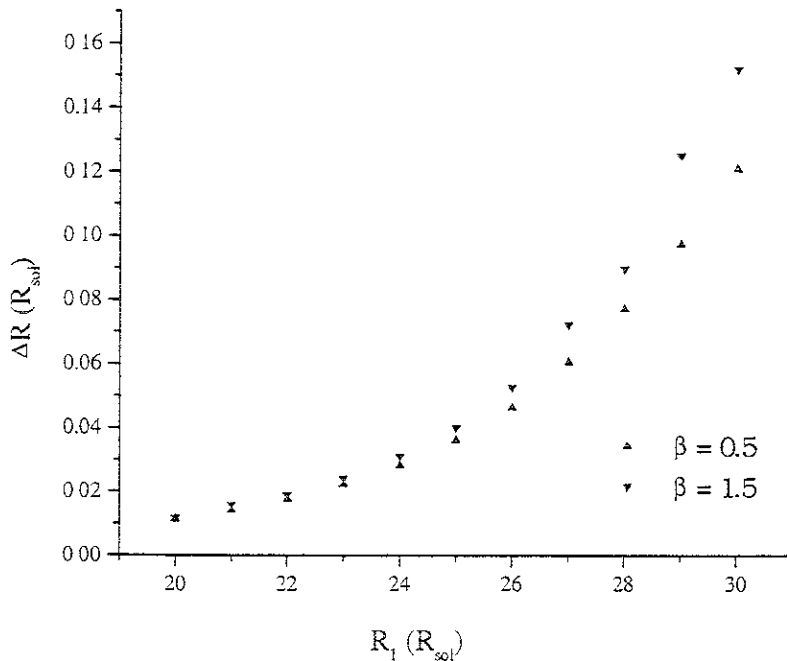


Figura 7.14.  $\Delta R$  vs  $R_1$ .

La figura 7.15 muestra la gráfica de  $\phi(R_{m\acute{a}x})$  vs  $R_1$ , que nos muestra que para velocidades de rotación más bajas que corrotación, la deformación se adelanta conforme aumenta el radio. Para velocidades más altas que corrotación, la deformación se atrasa al crecer el radio. En ambos casos la tendencia es a alinearse con la estrella vecina. Esto es consistente con el resultado clásico del capítulo 1 de que cuando aumenta la razón entre el radio estelar y su semieje mayor, el tiempo de sincronización se hace más breve. Es lógico que si hay un menor ángulo entre la compañera y la deformación, se alineará más rápidamente con la vecina.

La figura 7.16 nos da la gráfica de  $v_{m\acute{a}x}$  vs  $R_1$ . En este caso vemos curvas que tienen comportamiento más "explosivo" que las anteriormente halladas, por lo que en este caso sí se ajustaron ecuaciones, específicamente de funciones exponenciales.

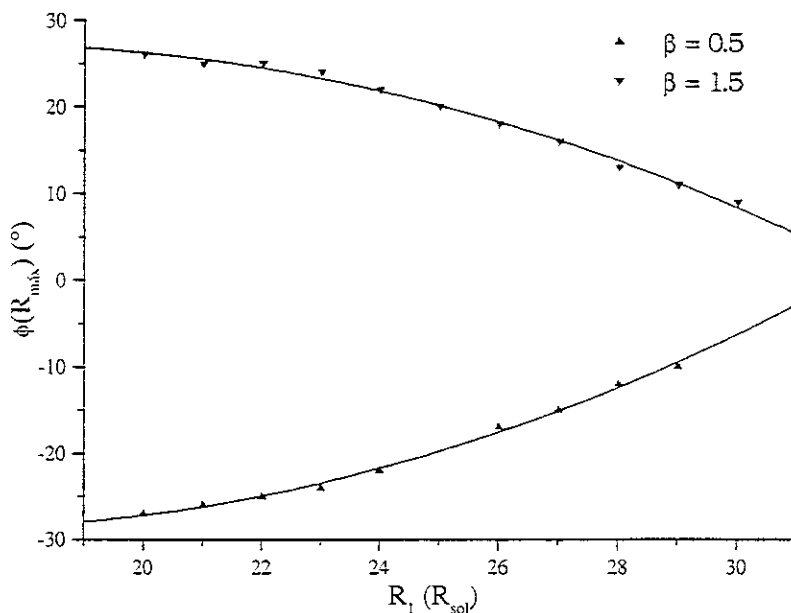


Figura 7.15.  $\phi(R_{máx})$  vs  $R_1$ .

Al ajustar curvas exponenciales a  $v_{máx}$  vs  $R_1$  nos da:

$$v_{máx} = 0.0594 \exp[0.4899( R_1-20)+0.3968] - 0.153 \quad \text{para } \beta = 0.5 \quad (7)$$

$$v_{máx} = 0.175 \exp[0.3924( R_1-20)-0.015] - 0.382 \quad \text{para } \beta = 1.5 \quad (8)$$

Lo notable aquí es que el crecimiento es tal que cuando  $R_1$  es menor que  $25 R_{sol}$  las velocidades son menores de 1 km/s. mientras que para radios mayores la velocidad crece muy rápidamente hasta alcanzar más de 8 km/s. Esto también lo justificamos diciendo que por un lado tenemos una constante de restitución más pequeña, y por otro lado tenemos una aceleración más grande; correspondiendo a la disminución de la gravedad superficial y al aumento del valor de la fuerza de marea, respectivamente. El efecto neto es que las aceleraciones aumentan fuertemente, provocando el aumento exponencial en las velocidades radiales de los elemento, lo cual llevará finalmente a la pérdida de masa.

La figura 7.17 muestra la gráfica del azimut de  $v_{máx}$  vs  $R_1$ . Como vemos aquí también se obtienen un par de curvas casi simétricas, que nos indican que para los diferentes radios hay una doble tendencia: para radios menores que  $25 R_{sol}$ , la tendencia es que sean los elementos cercanos a la línea que une a las estrellas, los que experimenten mayor aceleración y presenten las velocidades radiales más grandes. En el caso de radios mayores que  $25 R_{sol}$ , la tendencia es a alejarse de la dirección hacia la estrella perturbadora. Esta tendencia resulta un poco extraña, pero tal resulta razonable si notamos lo siguiente:



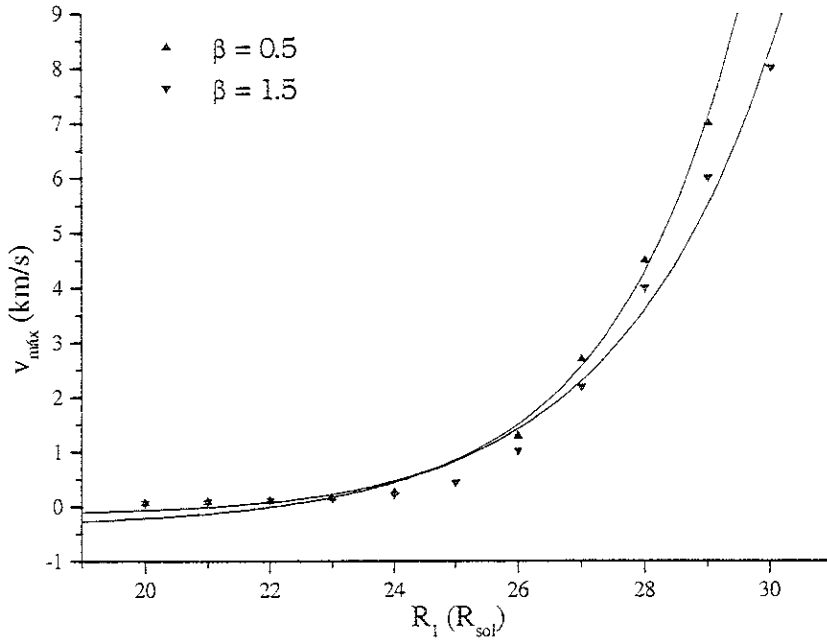


Figura 7.16.

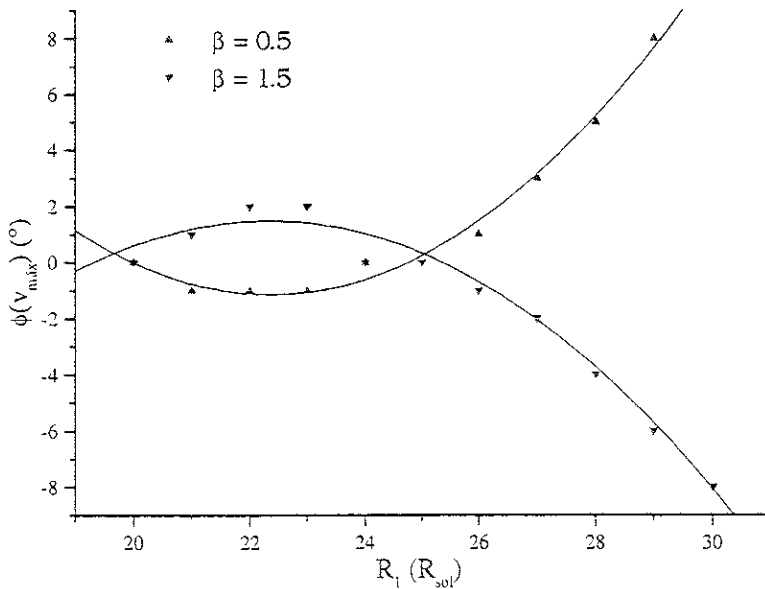


Figura 7.17.

aunque el elemento que lleva la velocidad máxima primero se acerca y luego se va alejando de la dirección del eje  $x'$  lentamente. el elemento que lleva la máxima deformación se acerca a él cada vez más. No sucede que lo alcance, porque para radios mayores el código falla, como se había mencionado antes, debido al desprendimiento de los elementos. Esto es pues una tendencia a la fase de transferencia de masa.

### 7.3 Resumen de resultados

Al aplicar el código a sistemas binarios circulares, logramos reproducir la situación de equilibrio. También hallamos que en ausencia de rotación el periodo de oscilación es similar al periodo orbital. Esto sugiere que el modelo de simulación numérica empleado tiene algo de consistencia.

Como vimos, los dos parámetros cuya variación se estudió pueden tener efecto en las amplitudes de oscilación de la estrella y con ello llevar a la pérdida de material. Sin embargo, el aumento en el radio influye mucho más fuertemente que el aumento en la velocidad de rotación (que según vimos, es proporcional a  $\beta$ ). Tanto así que, aunque aumentamos mucho el valor de  $\beta$ , nunca se llegó al desprendimiento de los elementos, mientras que al aumentar el radio esto se alcanzó pronto, aun para radios bastante menores a las dimensiones del lóbulo de Roche.

Los efectos de batimientos de frecuencias diferentes (la de rotación y la orbital) provocan diferentes periodos de oscilación. El aumento de la velocidad de rotación puede provocar que dichos periodos aumenten o disminuyan, dependiendo de lo cerca o lejos que se esté de la corrotación. Por otra parte, el aumento en radio hace crecer los periodos fuertemente.

Las amplitudes de oscilación y de la marea en equilibrio también aumentan o disminuyen dependiendo de lo cerca o lejos que se esté de la corrotación. Pero al aumentar el radio sólo vemos aumento en éstas.

Las deformaciones se atrasan o adelantan dependiendo de si se está cerca o lejos de la corrotación, y dicho desfaseamiento se vuelve menor para radios mayores.

También encontramos que las amplitudes de las velocidades varían muy rápidamente con  $\beta$  y con  $R_1$ . Las velocidades son muy pequeñas para  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ , pero para  $R_1 > 20 R_{\text{sol}}$  las amplitudes son muy grandes y ya no se tiene un comportamiento regular, sino que se entra a una fase caótica, que finalmente hará perder material a la estrella.

Todo ello nos indica que durante la evolución dinámica de un sistema binario, la presencia de una componente de marea en equilibrio se encarga de la sincronización, mientras que la componente de marea dinámica puede provocar pérdida de masa.

## Capítulo 8

### Oscilaciones en sistemas binarios excéntricos

En este capítulo expondremos los resultados hallados para los sistemas elípticos, según los cálculos efectuados con los parámetros mencionados en el capítulo 5. A diferencia de los casos circulares, aquí la velocidad angular de rotación es variable, por lo que no podemos expresar a  $\beta$  en términos de los periodos de rotación y orbital, como se hizo en los circulares. En este caso  $\beta$  es una cantidad variable a lo largo de la órbita. El valor que nosotros utilizaremos a manera de referencia es el valor de  $\beta$  en el periastro.

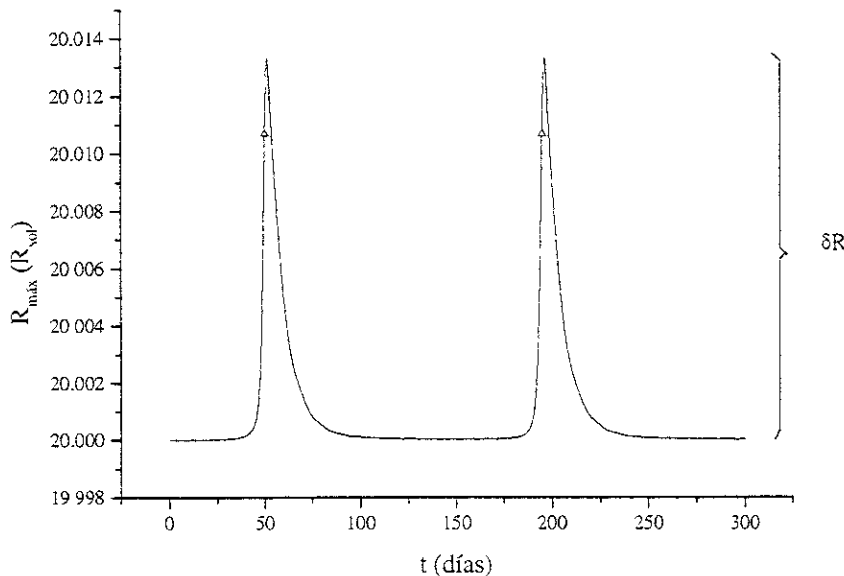


Figura 8.1. Gráfica de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$  que nos sirvió para hallar  $\delta R$ , para el caso en que  $R_1$  vale  $20 R_{\text{sol}}$  y  $\beta = 0.5$ . Los triángulos marcan los momentos del periastro

De la misma forma que para los casos circulares, generamos gráficas de cada caso para el análisis. En la figura 8.1 está la gráfica de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$  para el caso en que  $R_1$  vale  $20 R_{\text{sol}}$  y  $\beta = 0.5$ . Lo primero que notamos es que sólo tenemos una componente de marea dinámica. La razón de que no tengamos componente de marea en equilibrio es que como en este caso las órbitas son elípticas, sólo se cumple una de las condiciones de equilibrio, la de coplanaridad. Pero esto la única consecuencia que trae es que las aceleraciones sean simétricas. También vemos que para estos casos las oscilaciones están perfectamente sincronizadas con el periodo orbital, puesto que vemos que el periodo de los máximos coincide a la perfección con el periodo de los periastrós, marcados en la gráfica con triángulos. Obsérvese que la deformación máxima no coincide exactamente con el periastro. La razón de este comportamiento nuevamente es la viscosidad, pues aunque en el paso por el periastro la aceleración es máxima, la viscosidad no permite que el gas reaccione de inmediato, sino con un retardo notorio. Igual que antes, no daremos las gráficas de todos los casos calculados para no saturar el espacio.

La figura 8.2 nos muestra la gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $t$ , para el caso  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$  y  $\beta = 0.5$ . También aquí los ángulos correspondientes al paso por el periastro están marcados con un triángulo. Podemos notar que las fluctuaciones son mucho mayores que en los casos circulares, pero que en el periastro se obtiene prácticamente el mismo ángulo siempre. En este caso se reporta el promedio en los periastrós.

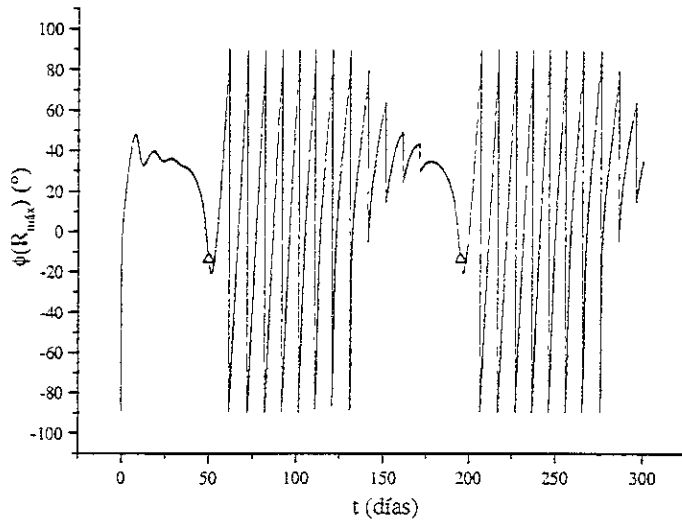


Figura 8.2. Azimut de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Mismos parámetros que en fig. 1.

La figura 8.3 muestra la gráfica de  $v_{\text{máx}}$  vs  $t$  para el caso en cuestión. El comportamiento aquí es parecido al de  $\Delta R$  vs  $t$ , pero aquí el descenso es mucho más rápido. Por otro lado, la máxima velocidad coincide perfectamente con el periastro, lo cual era de esperarse y se observa en general en todos los casos calculados. Recordemos (Capítulo 6) que el elemento que lleva la velocidad máxima no es el mismo que tiene el desplazamiento máximo. Este último se ubica en  $\phi \approx -20^\circ$  y tiene una velocidad casi nula, mientras que la velocidad máxima se da en  $\phi \approx 0$ .

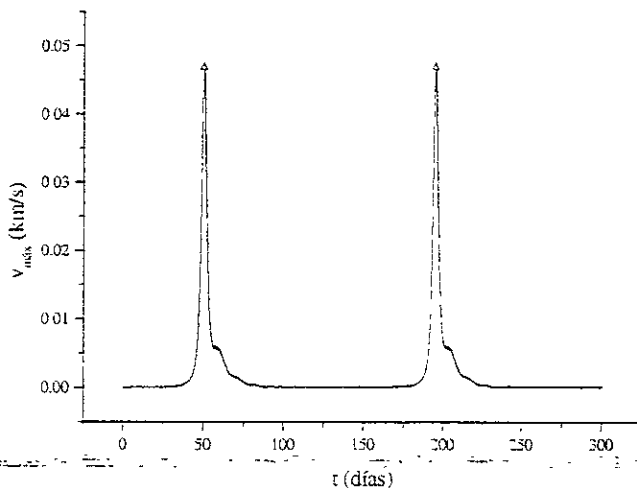


Figura 8.3.  $v_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Idem.

La figura 8.4 muestra la gráfica de  $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $t$  para el mismo caso. Aquí también se ve que las desviaciones entre cada periastro son muy pequeñas, por lo que también los promedios son casi iguales a los valores mismos que se hallaron.

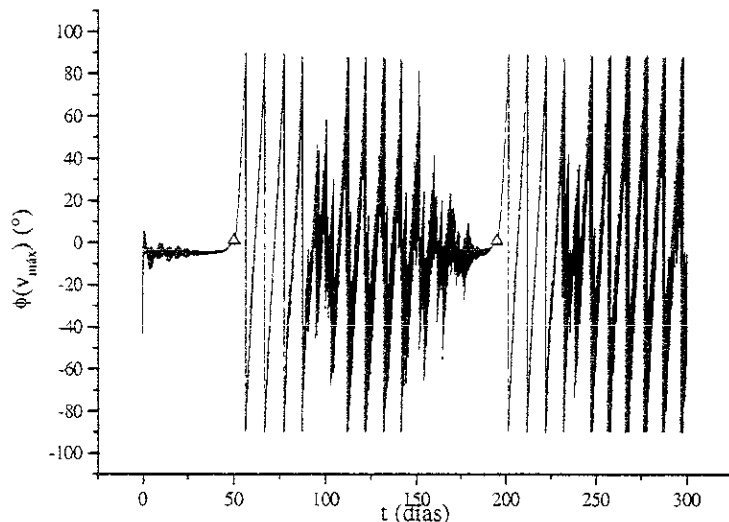


Figura 8.4.  $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $t$ . Idem.

### 8.1 Variación en $\beta$

La tabla 1 da un resumen de los resultados obtenidos para los parámetros que se detallan ahí mismo. El máximo valor de  $\beta$  es 1.4. Valores mayores llevan a la falla del código debido al desprendimiento de segmentos, que interpretamos como pérdidas de material.

Tabla 8.1. Casos elípticos con  $R_1 = 20 R_{\text{sol}}$ .

$\beta$	$\delta R (R_{\text{sol}})$	$\phi(R_{\text{máx}}) (^\circ)$	$v_{\text{máx}}(\text{km/s})$	$\phi(v_{\text{máx}}) (^\circ)$
0	0.0055	-34.8	0.046	-4.2
0.1	0.007	-32.21	0.048	-4.39
0.2	0.0087	-27.95	0.05	-3.47
0.3	0.0105	-22.83	0.05	-1.4
0.4	0.012	-18.45	0.05	0.12
0.5	0.013	-13.62	0.048	1.06
0.6	0.014	-9.55	0.046	1.35
0.7	0.015	-5.47	0.044	1.188
0.8	0.015	-1.91	0.043	-0.09
0.9	0.015	1.65	0.044	-1.4
1	0.014	4.8	0.045	-2
1.1	0.0135	7.68	0.043	-1.72
1.2	0.0125	10.53	0.047	-1.52
1.3	0.0117	13.35	0.048	-0.77
1.4	0.0106	15.54	0.048	-0.05

Tabla 8.2. Casos elípticos con  $R_1 = 25 R_{sol}$ .

$\beta$	$\delta R (R_{sol})$	$\phi(R_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$	$v_{m\acute{a}x}(km/s)$	$\phi(v_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$
0	0.01175	-37	0.09	-10
0.2	0.02077	-29	0.115	-10
0.4	0.02978	-19	0.14	-5
0.6	0.03526	-10	0.127	-2
0.8	0.03715	-3	0.117	-1
1	0.03522	4	0.12	-2
1.2	0.03068	10	0.123	1
1.4	0.02481	15	0.115	4

Tabla 8.3. Casos elípticos con  $R_1 = 30 R_{sol}$ .

$\beta$	$\delta R (R_{sol})$	$\phi(R_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$	$v_{m\acute{a}x}(km/s)$	$\phi(v_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$
0	0.02207	-39	0.15	-17
0.2	0.04716	-29	0.57	-17
0.4	0.07053	-20	2.6	-10
0.6	0.08183	-11	1.55	-5
0.8	0.08375	-4	0.357	-3
1	0.08	3	0.42	-1
1.2	0.05642	15	0.8	8
1.4	0.07	10	1.1	4

Tabla 8.4. Casos elípticos con  $R_1 = 35 R_{sol}$ .

$\beta$	$\delta R (R_{sol})$	$\phi(R_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$	$v_{m\acute{a}x}(km/s)$	$\phi(v_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$
0	0.04	-41	0.22	-27
0.2	0.24	-30	14	-23
0.4	0.33	-20	19.5	-14
0.6	0.28	-12	16.5	-7
0.8	0.185	-5	8.5	-6
1	0.175	3	8	-1
1.2	0.205	9	13	6
1.4	0.195	13	12.7	12

Al hacer las gráficas de los datos antes reportados vemos los siguientes comportamientos:

La figura 8.5 da la gráfica de  $\delta R$  vs.  $\beta$  para los diferentes valores de  $R_1$  usados. Notamos que las curvas que dibujan los datos no tienen una tendencia definida, creciente o decreciente, sino que son diferentes para cada caso, a veces crecientes y a veces decrecientes, con máximos y algunos también con mínimos locales. Esto nos parece indicar que aunque en el caso de órbitas elípticas la velocidad de rotación tiene influencia para las mareas dinámicas (lo sabemos porque no pudimos hacer cálculos para  $\beta > 1.4$ ), no se puede hacer una asociación directa entre  $\delta R$  y  $\beta$ . Es importante notar que  $\beta \approx 1$  en el periastro

implica  $\beta > 1$  en otras fases orbitales. Por otra parte, ya desde aquí se nota que el aumento en el radio influye fuertemente, como describiremos en detalle en la sección 8.2.

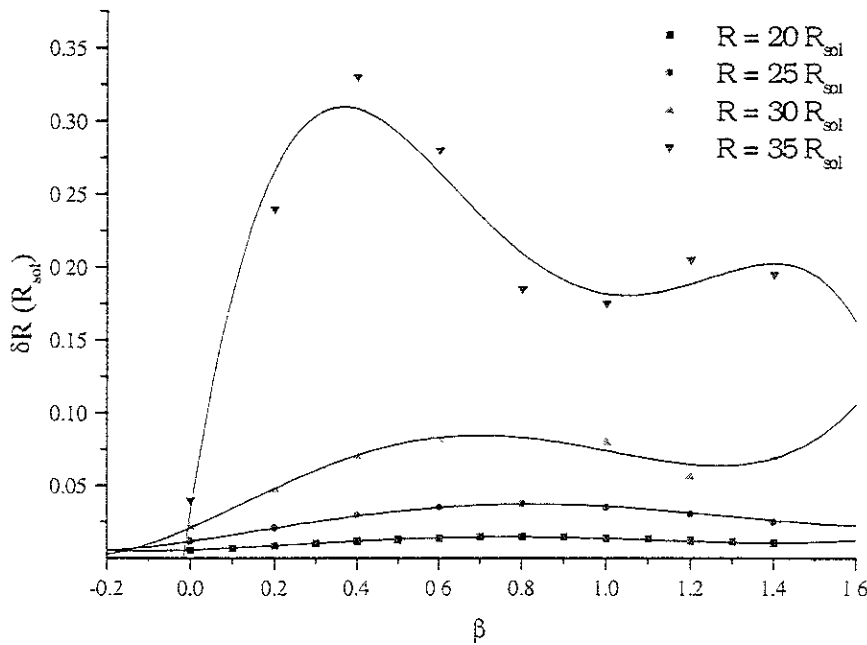


Figura 8.5.  $\delta R$  vs.  $\beta$  en el periastro. Hay 4 radios diferentes, según se indica en la figura.

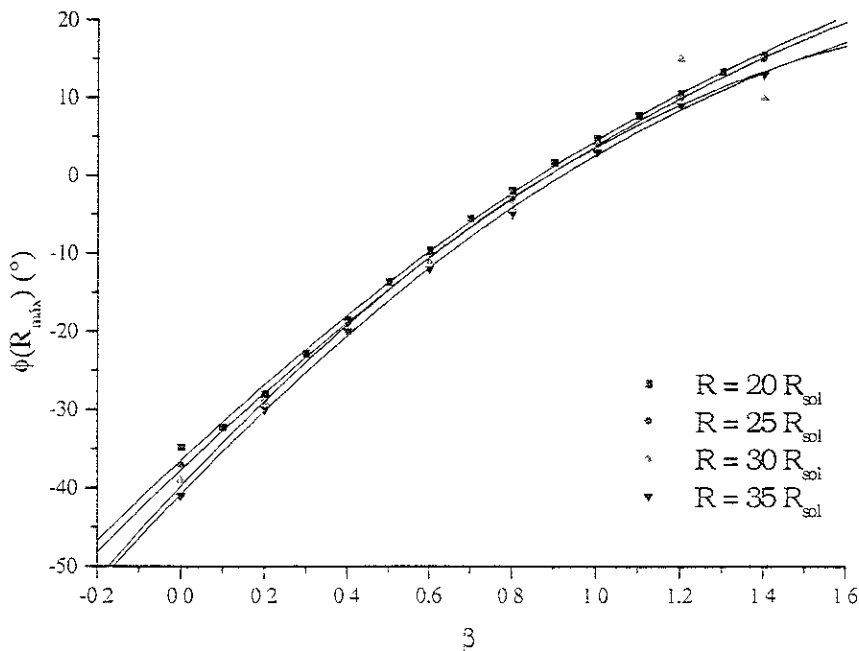


Figura 8.6  $\phi(R_{m\acute{a}x})$  vs  $\beta$  en el periastro.

La figura 8.6 muestra la gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $\beta$  para los diferentes radios usados. Como podemos ver, el comportamiento es más regular con  $\beta$  que el de  $\delta R$ . La forma de las curvas es casi recta hasta antes de llegar a  $\beta = 1$ , y es después de dicho valor cuando la curvatura se acentúa. En este caso lo que interpretamos es que al aumentar la velocidad de rotación, la protuberancia alcanza y rebasa a la estrella perturbadora. Notemos sin embargo, que la protuberancia apunta hacia la compañera cuando  $\beta = 0.9$  y no cuando  $\beta = 1$ . Esto también tiene su explicación en la viscosidad. En el instante del periastro la estrella compañera se mueve igual de rápido que la estrella en rotación, pero en instantes cercanos no, aunque su acción perturbadora es ya muy intensa. Entonces lo que en realidad sucede es que la deformación que ya se había formado rebasa a la estrella perturbadora.

La figura 8.7 nos muestra la gráfica de  $v_{\text{máx}}$  vs  $\beta$ . Como podemos ver, el comportamiento de tales curvas es como el de  $\delta R$  vs  $\beta$ . Tiene máximos y mínimos, pero no muestra una tendencia sistemática con  $\beta$ , sólo con  $R_1$ . Esto es tan notable, que para poder apreciar la variación en las curvas de  $R_1 = 20, 25 R_{\text{sol}}$ , se tuvo que graficar logarítmicamente.

La figura 8.8 nos muestra la gráfica de  $\phi(v_{\text{máx}})$  vs  $\beta$ . Aquí se ve que las curvas tienen un comportamiento suave, aunque con cambios de concavidad. De cualquier manera, es posible afirmar que hay cierta tendencia del elemento con la velocidad máxima a alinearse con la estrella perturbadora.

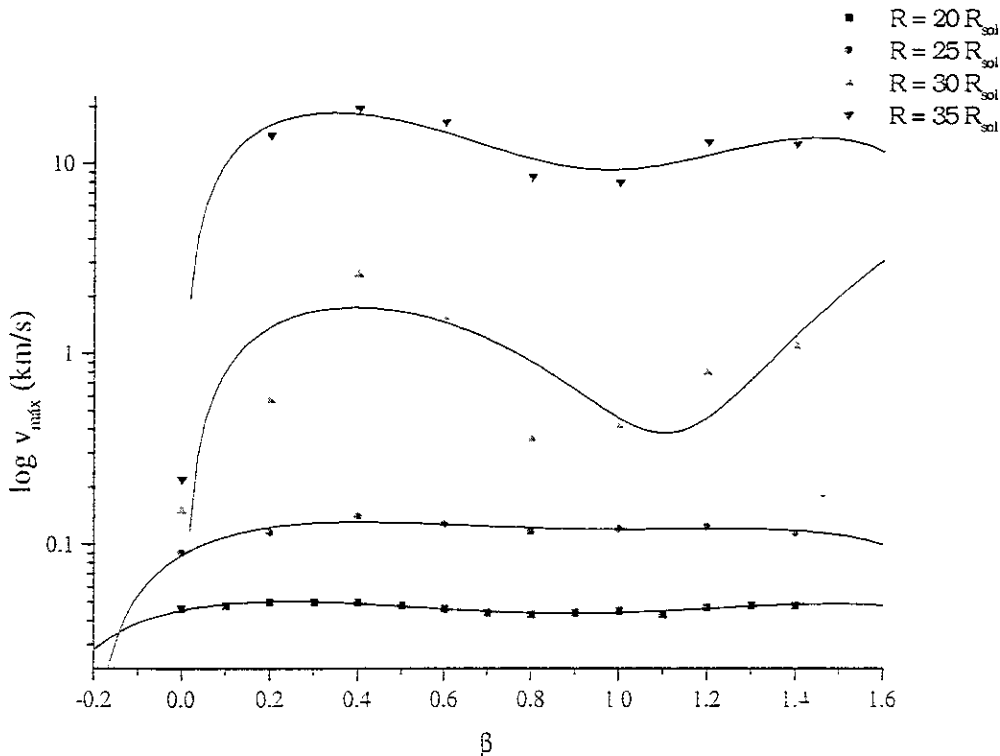


Figura 8.7.  $v_{\text{máx}}$  vs  $\beta$  en el periastro. Idem. La escala aquí es logarítmica.



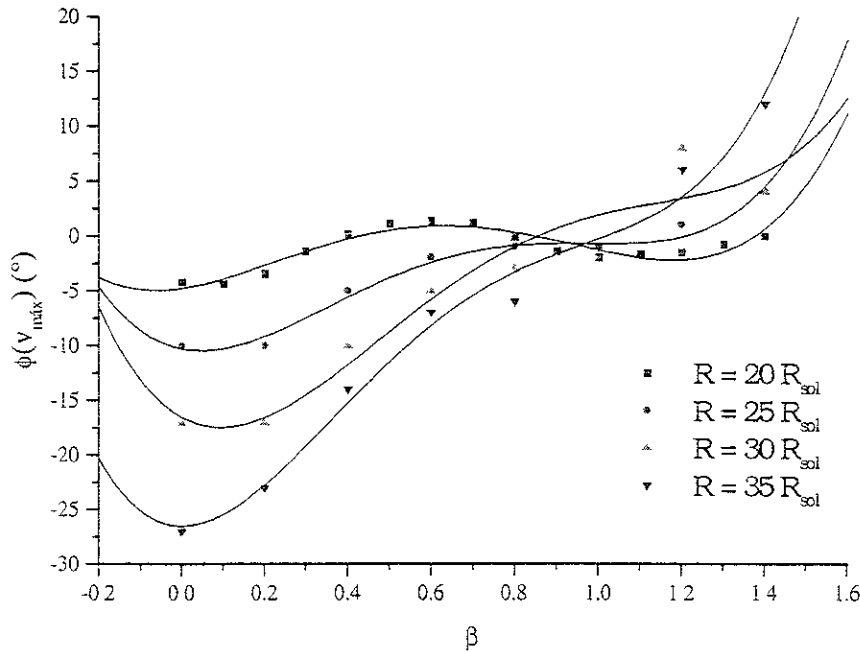


Figura 8.8.  $\phi(v_{max})$  vs  $\beta$ . Idem. Escala lineal.

### 8.2 Variación en $R_1$

De la misma manera que para los casos circulares, también se hicieron cálculos variando el valor de  $R_1$  y se midió la variación de los parámetros que elegimos para caracterizar las oscilaciones, según se describió antes. Para esto se trabajó con gráficas similares a las mostradas en las figuras 8.1-8.4.

En la tabla 8.5 se dan los valores obtenidos para los parámetros antes descritos variando  $R_1$ , y manteniendo fija a  $\beta$  en 0.5. La tabla 8.6 nos da los mismos parámetros pero para el caso en que  $\beta = 1.4$ . Para estos casos el código soportó radios hasta de  $35 R_{sol}$ . En este caso se alcanzaron radios más grandes que en el circular porque al ser elíptica la órbita, la fuerza perturbadora actúa allí sólo por un intervalo de tiempo muy corto, manteniéndose lejos la mayor parte del ciclo orbital. Esto permite a la estrella relajarse y soportar bien la siguiente perturbación, ya que tuvo tiempo suficiente para acomodarse. Sin embargo, para radios mayores que  $35 R_{sol}$ , eso ya no fue posible, y hallamos desprendimiento de segmentos.

En este caso también hallamos transferencia antes de llegar a las dimensiones del lóbulo de Roche. Esto es lo que se halla comúnmente en las variables cataclísmicas del tipo de las Wolf Rayet por ejemplo, que son sistemas binarios en los que alguna de las estrellas está oscilando y expulsando gas.

Tabla 8.5.  $\beta = 0.5$ .

$R_1$	$\delta R (R_{sol})$	$\phi(R_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$	$v_{m\acute{a}x}(km/s)$	$\phi(v_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$
20	0.0133	-13.62	0.048	1.06
21	0.016	-13.9	0.059	0.15
22	0.0195	-14.08	0.072	-0.65
23	0.0235	-14.16	0.09	-1.38
24	0.028	-14.36	0.11	-2.21
25	0.034	-14.248	0.135	-2.998
26	0.04	-14.64	0.175	-3.77
27	0.047	-14.958	0.25	-4.479
28	0.056	-15	0.45	-5.42
29	0.066	-15.2	1	-6.27
30	0.078	-15.3	2.4	-6.98
31	0.094	-15.56	5	-7.62
33	0.18	-15.65	12	-8.92
34	0.25	-15.9	15.5	-9.795
35	0.32	-16.05	19	-10.35

Tabla 8.6.  $\beta = 1.4$ .

$R_1$	$\delta R (R_{sol})$	$\phi(R_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$	$v_{m\acute{a}x}(km/s)$	$\phi(v_{m\acute{a}x}) (^{\circ})$
20	0.014	15.54	0.047	-0.05
21	0.0125	15.55	0.057	0.8
22	0.015	15.57	0.068	1.67
23	0.018	15.58	0.08	2.5
24	0.021	15.29	0.097	3.02
25	0.025	15.36	0.115	3.92
26	0.0295	15.06	0.135	4.7
27	0.035	14.98	0.16	5.4
28	0.041	15.04	0.21	5.91
29	0.048	14.808	0.37	7.01
30	0.057	14.65	0.84	7.58
31	0.067	14.613	1.95	8.24
32	0.079	14.3	4	9.12
33	0.106	13.91	6.8	9.89
34	0.145	13.7	9.7	10.98
35	0.195	13.3	13	11.637
36	0.255	12.6	15.5	12.6

Al igual que en los otros casos, se hicieron las correspondientes gráficas a fin de explorar el comportamiento de los parámetros que nos describen las oscilaciones al variar los radios.

En la figura 8.9 se ve la gráfica de  $\delta R$  vs.  $R_1$ , tanto para el caso en que  $\beta = 0.5$  como para el caso en que  $\beta = 1.4$ . Observamos un comportamiento creciente. De las posibles funciones que podrían describir el comportamiento de los datos con que se trabajó, la que “mejor” se ajusta es la exponencial. Enseguida se dan las ecuaciones obtenidas al hacer tal ajuste.

$$\delta R = 3.916 \times 10^{-5} \exp(0.2569 R_1) \quad \beta = 0.5 \quad (1)$$

$$\delta R = 3.69 \times 10^{-5} \exp(0.2446 R_1) \quad \beta = 1.4 \quad (2)$$

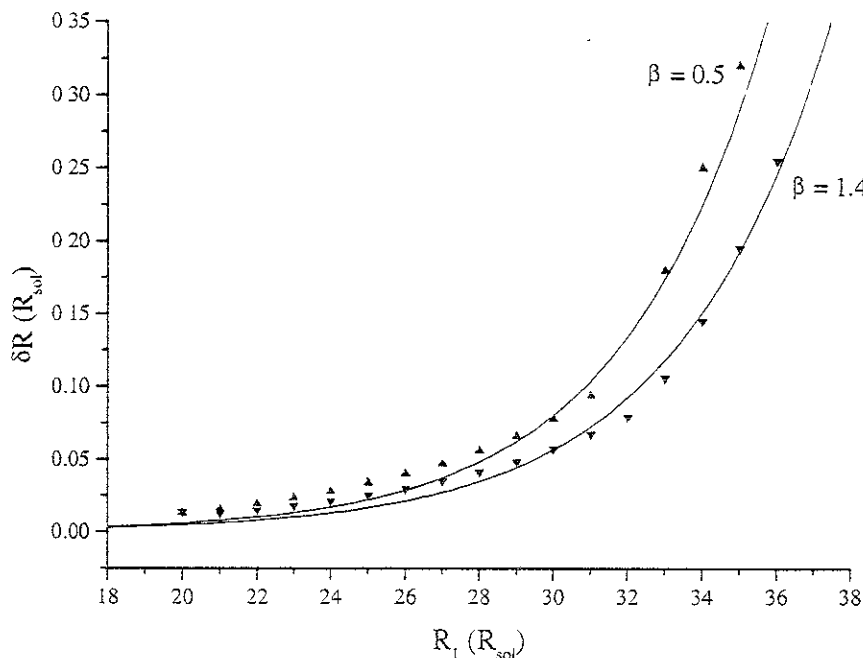


Figura 8.9.  $\delta R$  vs.  $R_1$ .

La figura 8.10 muestra la gráfica de  $\phi(R_{m\acute{a}x})$  vs  $R_1$ . Observemos que el comportamiento es casi perfectamente lineal. Por otra parte, a diferencia de los casos circulares, no hay simetría entre las gráficas, sino que ambas líneas son decrecientes conforme  $\beta$  se hace mayor. Esto nos indica que el crecimiento del radio obliga a la protuberancia a retrasarse con respecto a la estrella compañera. Esto parece lógico en el caso de  $\beta > 1$ , pero no para  $\beta < 1$ . Enseguida se dan las ecuaciones que se obtienen de ajustar por mínimos cuadrados los datos.

$$\phi(R_{m\acute{a}x}) = -0.159 R_1 - 10.51 \quad (3)$$

$$\phi(R_{m\acute{a}x}) = -0.161 R_1 + 19.228 \quad (4)$$

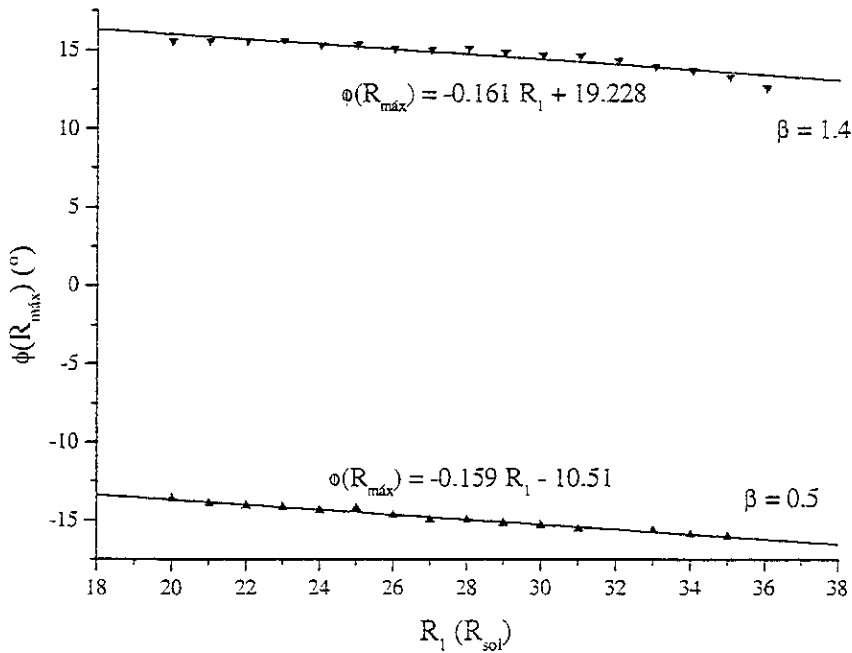


Figura 8.10.  $\phi(R_{m\acute{a}x})$  vs.  $\beta$ .

La figura 8.11 muestra la gráfica de  $v_{m\acute{a}x}$  vs.  $R_1$ . También en este caso vemos un comportamiento más o menos exponencial, por lo cual hacemos el ajuste de curvas de tal tipo.

$$v_{m\acute{a}x} = 6.249 \times 10^{-5} \exp(0.3628 R_1) \tag{5}$$

$$v_{m\acute{a}x} = 5.18 \times 10^{-5} \exp(0.3525 R_1) \tag{6}$$

La figura 8.12 muestra la gráfica de  $\phi(v_{m\acute{a}x})$  vs  $R_1$ . Como vemos, aquí también tenemos un par de rectas casi perfectas. También se ve que aquí sí hay simetría. Mientras que para valores de  $\beta$  menores que 1 el elemento con la mayor velocidad se atrasa conforme crece  $\beta$ , para  $\beta$  mayor que 1 el elemento se adelanta al aumentar  $\beta$ . Al ajustar los datos por mínimos cuadrados obtenemos:

$$\phi(v_{m\acute{a}x}) = -0.764 R_1 + 16.158 \tag{7}$$

$$\phi(v_{m\acute{a}x}) = 0.7711 R_1 - 15.41 \tag{8}$$

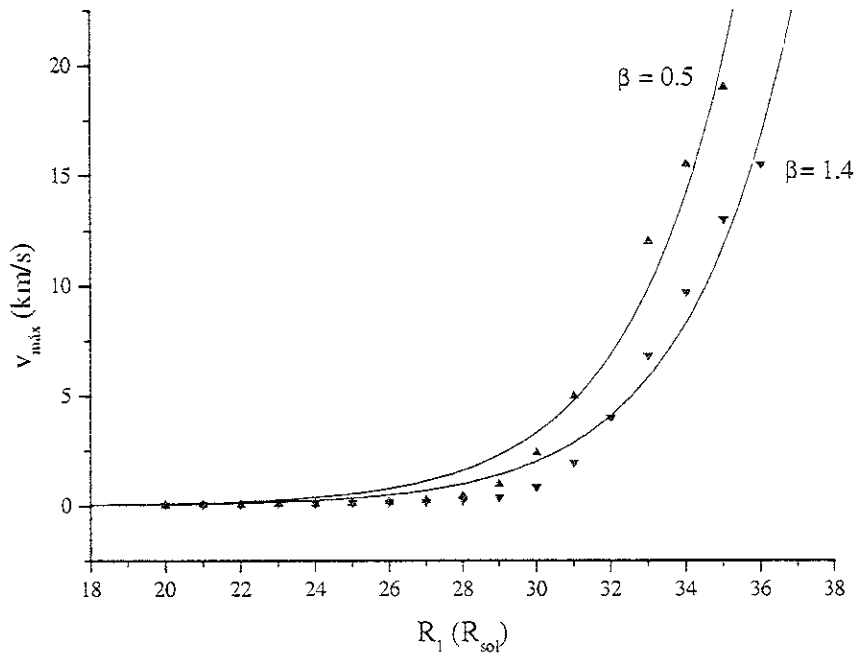


Figura 8.11.  $v_{m\acute{a}x}$  vs  $R_1$ .

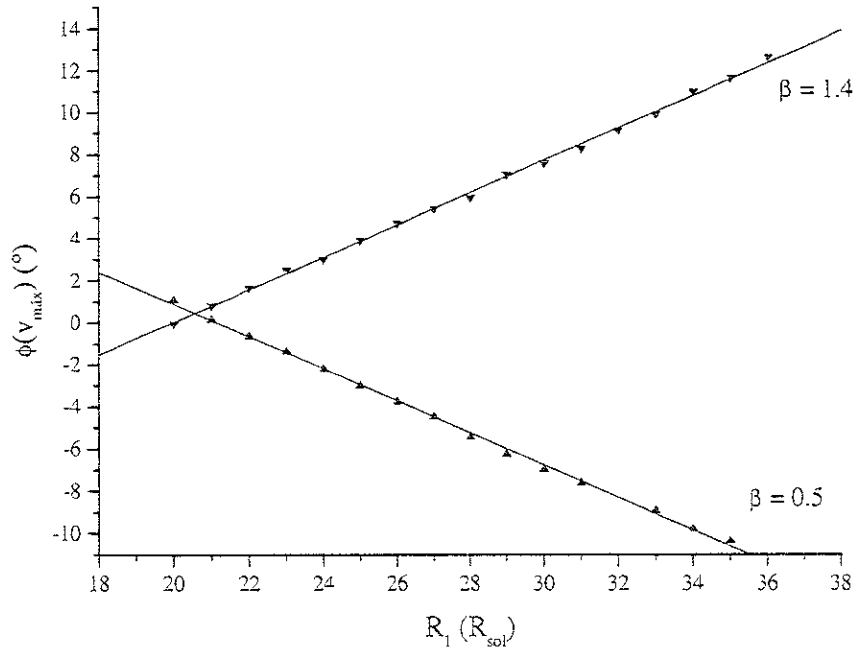


Figura 8.12.  $\phi(v_{m\acute{a}x})$  vs  $R_1$ .

Notemos que en estos casos tambi3n se cumple que el elemento con la mayor velocidad se acerca al elemento con la mayor deformaci3n (figuras 8.10 y 8.12).

---

### 8.3 Resumen de resultados

En los casos elípticos se vieron resultados muy diferentes a los obtenidos de los cálculos con órbitas circulares.

Lo primero que encontramos es que no existe componente de marea en equilibrio. También hallamos que los periodos de pulsación y orbital son exactamente iguales, por lo que  $\Delta R = 0$ . La rotación no tiene influencia alguna en ellos, generando periodos adicionales con amplitudes grandes.

Por otra parte, también a diferencia de los casos circulares, en los casos elípticos la velocidad de rotación juega un papel mucho más importante en el desprendimiento de segmentos, tanto que nunca se pudo calcular un caso con  $\beta > 1.4$ . Aunque el aumento en el radio tiene un efecto importante, aquí se soportaron radios mayores que en los casos circulares. Esto se debe aparentemente a que el efecto de interacción más intenso (alrededor del periastro) tiene una duración corta, mientras que en los casos circulares la interacción persiste a lo largo de todo el ciclo orbital. Similarmente a como sucede en los casos circulares, también aquí vemos que el elemento que lleva la velocidad máxima se acerca al que lleva la máxima deformación, con el consiguiente desprendimiento de material.

Por desgracia estos casos no se pueden comparar con lo ya conocido de las teorías clásicas, pues las teorías clásicas no tratan este caso; por tal razón la única forma de verificar nuestros resultados es mediante observaciones.

## Capítulo 9

### Aplicación del modelo a sistemas conocidos

Es difícil en este momento hacer una comparación en detalle entre la variabilidad que se predice con el modelo y la variabilidad observada en sistemas binarios reales por las siguientes razones. La variabilidad que se observa es aquella que ocurre en el hemisferio de la estrella que se encuentra visible para el observador. Dada la rotación estelar, los elementos de superficie que cumplen con esta condición van cambiando con el tiempo, de tal forma que el patrón de variabilidad observable puede ser muy diferente al patrón de variabilidad que se predice para las oscilaciones sobre la superficie estelar. Por ejemplo, cuando los elementos de superficie que tienen las amplitudes más grandes están ubicados en el hemisferio de la estrella que no es accesible al observador, entonces no se detectaría ninguna variabilidad. Por otro lado, es importante también notar que al observar un sistema binario, la inclinación orbital puede diferir en la mayoría de los casos de 90 grados; dado que las máximas amplitudes se esperan en el plano orbital, las amplitudes observadas serán menores, ya que solo se puede observar la proyección en la dirección del observador, de dichas amplitudes. Para resolver estos problemas es necesario, por un lado, hacer un cambio de sistemas de referencia de tal forma que se puedan "traducir" las variaciones predichas en el marco de referencia de la estrella pulsante a variaciones que se observarían en un marco de referencia externo en reposo con respecto al centro de masa del sistema binario. Por otro lado, es necesario hacer la corrección de las amplitudes por la inclinación de la órbita, respecto al plano del cielo. Finalmente, es necesario convertir las variaciones en los parámetros geométricos y cinemáticos de la estrella ( $R = R(\phi)$ ,  $v = v(\phi)$ ) en cantidades observables. Es decir, el modelo predice  $R(\phi, t)$ ,  $v(\phi, t)$ , donde "t" es el tiempo. Sin embargo, es imposible observar estas cantidades directamente, así que tenemos que depender de parámetros observables, como la cantidad de luz que nos llega por unidad de tiempo (flujo en alguna banda espectral) y/o los perfiles de las líneas en absorción producidas en la fotosfera. En este momento no contamos con los modelos de transferencia radiativa que permitan traducir las variaciones en los valores de  $R(\phi, t)$ ,  $v(\phi, t)$  producidos por nuestro modelo en variaciones de los parámetros observables. Este es trabajo a futuro que deberá efectuarse. Mientras tanto, sin embargo, quisiéramos presentar algunas evidencias observacionales que apuntan hacia una posible explicación en términos de los efectos de interacción gravitacional que hemos descrito en esta tesis. De hecho, el desarrollo del modelo se ha hecho en parte para entender algunos de los fenómenos que se presentan en los sistemas que a continuación mencionamos.

#### 1 V 444 Cyg

V 444 Cyg es un sistema binario eclipsante de muy baja excentricidad. Consta de una estrella O6 III-V y una Wolf Rayet WN 5. Este sistema es suficientemente brillante  $V = 8.27$  mag, Van der Hucht et al. 1981) y de corto periodo ( $P = 4.212$  días) como para que se haya podido acumular una gran cantidad de información sobre el sistema, en particular, sus

parámetros orbitales (Marchenko et al. 1997). Los parámetros del sistema se dan en la tabla 9.1.

Tabla 9.1. Parámetros del sistema V 444 Cyg.

$$M_1 = 27.9 M_{\text{sol}}$$

$$M_2 = 9.3 M_{\text{sol}}$$

$$R_1 = 10.0 R_{\text{sol}}$$

$$R_2 = 3.0 R_{\text{sol}}$$

$$a = 38 R_{\text{sol}}$$

$$e = 0.036$$

$$\beta = 1.7789$$

De las dos estrellas del sistema, la que tiene el mayor radio es la que estará sometida a las fuerzas de marea mas grandes; esta es la estrella tipo O6, y es a la que se aplicará el modelo. Por otro lado, es importante notar que no se pueden detectar líneas en absorción fotosféricas provenientes de la otra estrella (la WR) dado que tiene un viento muy denso. Por lo tanto, no se tiene información alguna respecto a la velocidad de rotación de esta estrella, y su modelaje implicaría que  $\beta$  fuera una más de las variables en el cálculo. Al aplicar el modelo descrito en el capítulo 5 encontramos los resultados que se describirán en esta sección.

El valor de la viscosidad se tomó aquí como  $\nu = 0.5 R_{\text{sol}}^2/\text{día}$ . Esto fue porque valores más bajos provocaban desprendimiento de segmentos sin permitir corrida alguna. Se dejó correr el programa para 500 días, y el análisis que se presenta a continuación corresponde únicamente a los últimos 50 días.

La figura 9.1 muestra la variación del radio contra el tiempo. Observamos aquí los batimientos de que se habló en el capítulo 7. Esto porque este sistema es de excentricidad muy baja, casi circular. Por esa razón el comportamiento es similar al de los casos circulares. Sin embargo, no se ve la doble onda que se observa en los casos calculados debido a esa ligera excentricidad. De hecho, es posible encontrar una combinación de frecuencias que describa tales batimientos. Las oscilaciones tienen amplitudes del orden de  $0.225 R_{\text{sol}}$ , pero de esa fracción, sólo 0.025 se deben a la marea dinámica, mientras que la marea en equilibrio tiene dimensiones del orden de  $0.2 R_{\text{sol}}$ . Esto es, la marea dinámica es 10 veces menor que la marea en equilibrio. Tal predominio de la marea en equilibrio se explica, como habíamos comentado antes, porque el sistema se halla cerca de el equilibrio por su órbita cuasi circular.



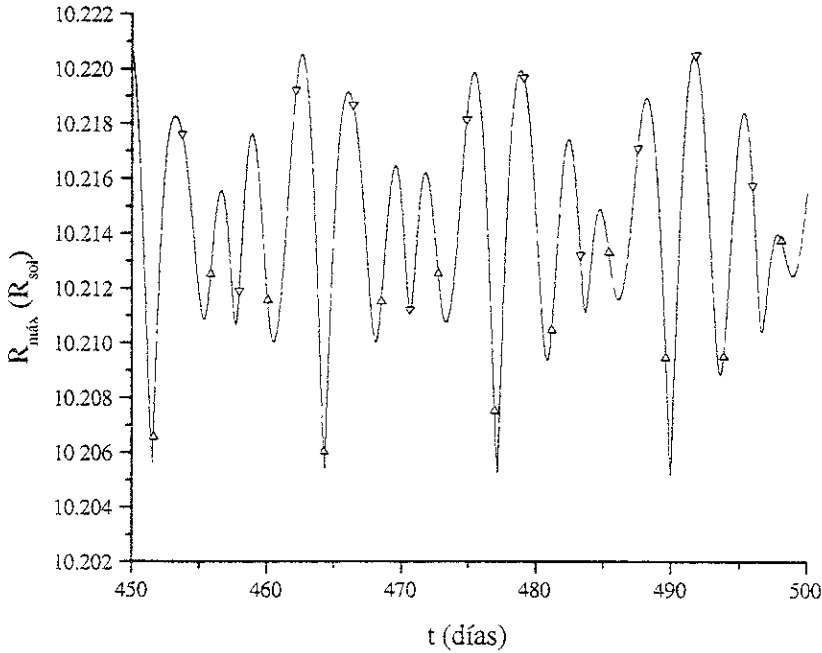


Figura 9.1. Gráfica de  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Los triángulos que apuntan hacia abajo marcan los momentos del periastro, mientras que los que apuntan hacia arriba marcan los apoastros.

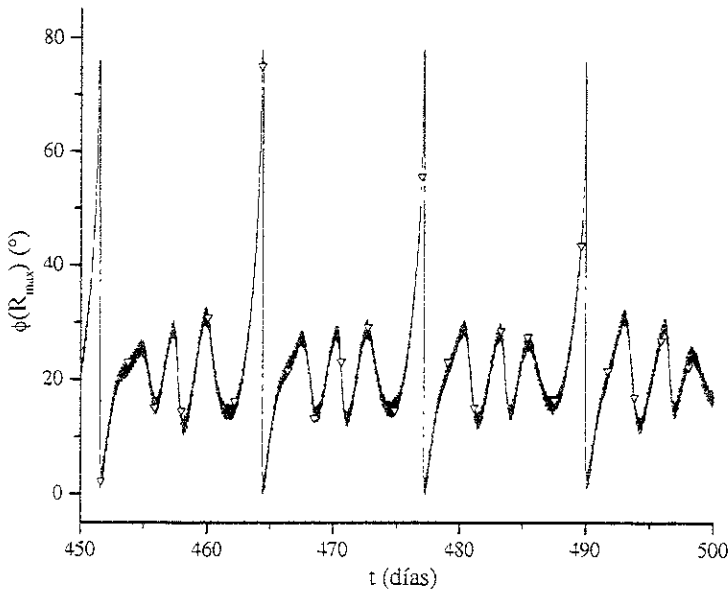


Figura 9.2. Gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $t$ .

Nótese que podemos definir al menos dos periodos característicos en esta curva: el primer periodo, definido como la distancia entre cada máximo (o mínimo) local, es del orden de 4 días, igual al periodo orbital; el segundo periodo, definido en términos de la repetición del mismo patrón de variabilidad (por ejemplo, entre un mínimo absoluto y el siguiente), es de aproximadamente 18 días. Es bien sabido que ocurren variaciones

pequeñas en V444 Cyg entre diferentes ciclos orbitales. Sería importante ahora analizar las escalas de tiempo típicas para estos cambios que se observan a escalas de tiempo mas largas que las escalas orbitales, con el fin de determinar si existe algún "súper - periodo" comparable al que hemos predicho con el modelo. En la Figura 9.7 mostramos la curva de luz de V444 Cyg tomada de Marchenko et al. (1998). Fase 0.0 corresponde a la fase en que la estrella WR esta "enfrente"; es decir, es el eclipse de la estrella O6. La segunda depresión en esta curva corresponde al eclipse de la WR. Los mismos datos fueron graficados dos veces en esta figura (es decir, no son dos ciclos diferentes). Nótese que existe una gran dispersión en los datos (que seguramente fueron obtenidos en diferentes ciclos orbitales). Es particularmente interesante ver que la dispersión mas grande ocurre en fase orbital alrededor de 0.6, poco después de que la estrella O6 sale de su eclipse. En esta fase podemos ver parte del hemisferio de la estrella O6 que se encuentra en dirección a la compañera, y es justamente esta parte de la estrella O6 que debe presentar las mayores amplitudes de oscilación.

La figura 9.2 muestra la gráfica de  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $t$ . Notamos que la mayor parte del tiempo la protuberancia mayor se encuentra alrededor de los  $20^\circ$ , acercándose o alejándose unos  $10^\circ$  de la dirección a la compañera. Sin embargo, debido a los batimientos en algunas ocasiones apunta directamente hacia la vecina o se aleja hasta  $80^\circ$ . Tales acercamientos o alejamientos no muestran relación alguna con los momentos del periastro o apoastro, como los casos elípticos mostrados en el capítulo 8.

En la figura 9.3 vemos las velocidades máximas. Notamos que tienen amplitudes de entre 0.14 y 0.22 km/s, con mayor periodicidad que la de el radio máximo. Las amplitudes de estas variaciones son sumamente pequeñas; de hecho, son mas pequeñas que la velocidad térmica del plasma de la atmósfera, por lo tanto, es difícil pensar que las oscilaciones puedan tener un impacto importante sobre la dinámica global de la atmósfera de esta estrella. La figura 9.4 muestra la variación del ángulo del elemento con la velocidad máxima. También aquí se ve una periodicidad similar a la de la amplitud de la velocidad. El elemento con velocidad máxima está siempre entre  $-5^\circ$  y  $-12^\circ$  de la dirección a la compañera.

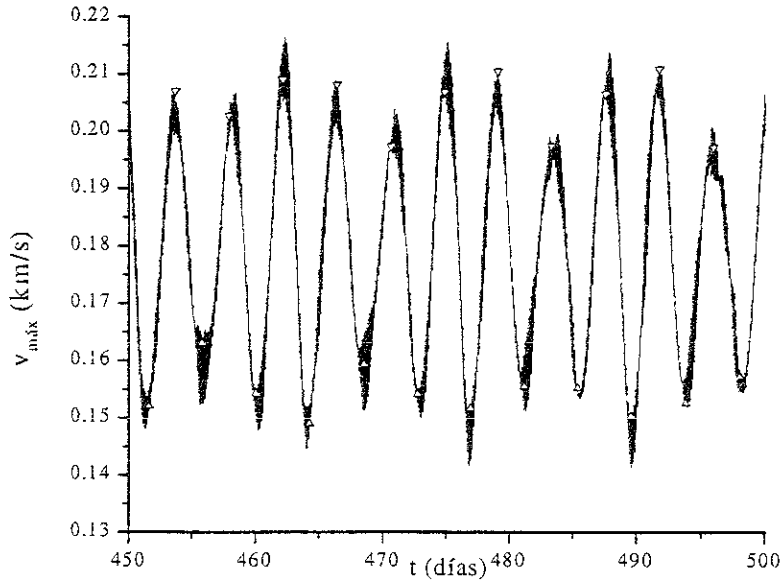


Figura 9.3. Gráfica de  $v_{\max}$  vs  $t$ .

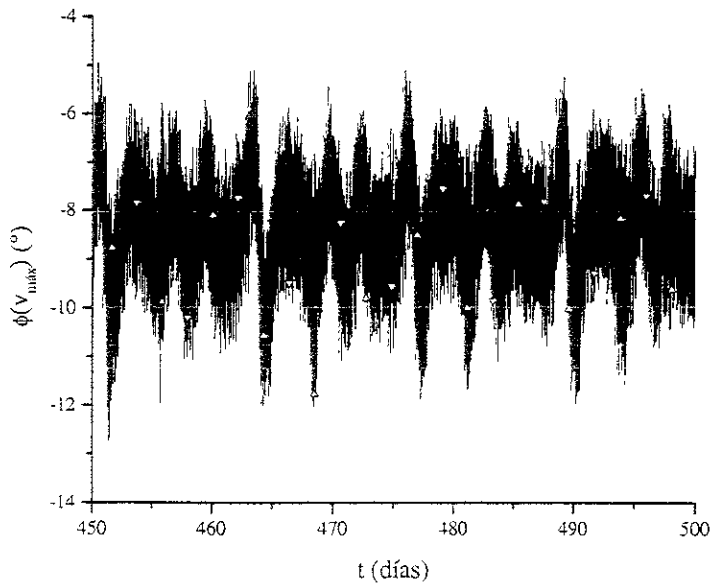


Figura 9.4. Gráfica de  $\phi(v_{\max})$  vs  $t$ .

La figura 9.5 muestra la forma de la estrella en el momento del periastro. como vemos, también en estos casos la mayor contribución es la bipolar.

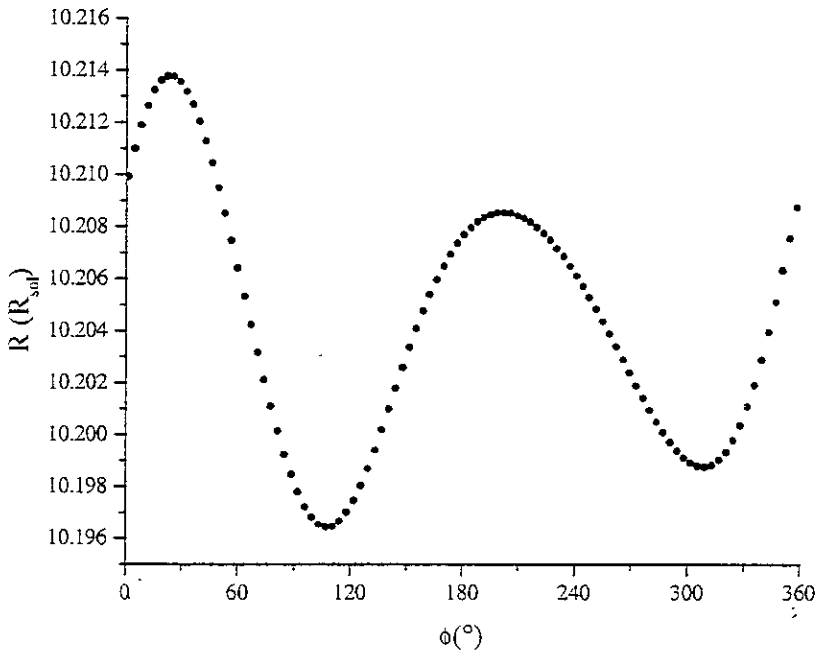


Figura 9.5. Gráfica de  $R$  vs  $\phi$ , que nos da la forma de la estrella, para el momento del periastro.

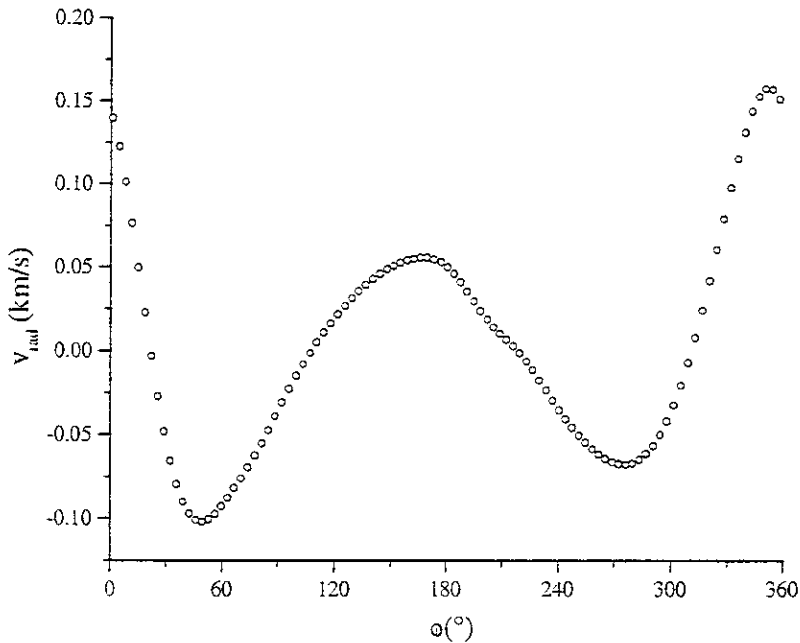


Figura 9.6. Gráfica de  $v_{\text{máx}}$  vs  $\phi$ , que nos da las velocidades radiales en el momento del periastro.

La figura 9.6 da la distribución de las velocidades en el periastro, que como vemos, también nos da un dipolo.

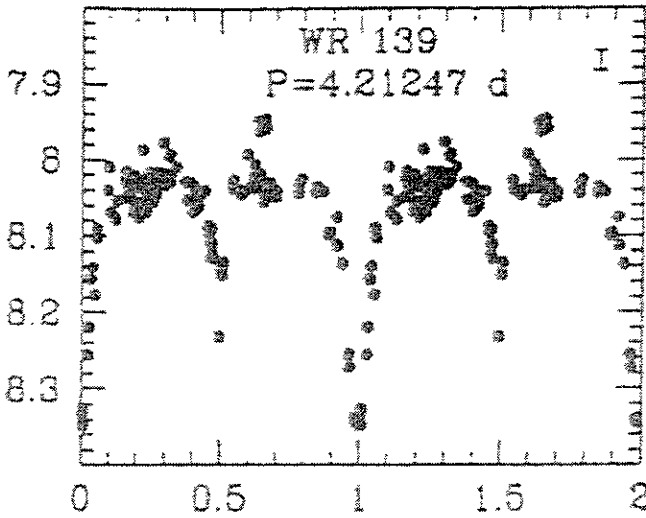


Figura 9.7. Curva de luz en la magnitud V para V 444 Cyg. Tomada de Marchenko (1998)

En la figura 9.8 mostramos la curva de velocidad radial tomada de Acker et al. (1989) correspondiente al movimiento orbital de la estrella O6. Los diferentes símbolos corresponden a diferentes temporadas de observación. Hay que notar que existe una dispersión relativamente grande en estas mediciones (es más grande que la incertidumbre en las observaciones), lo cual podría reflejar una variabilidad en los perfiles de las líneas en absorción que fueron medidas. Estas variaciones, a su vez, podrían estar asociadas a las oscilaciones no-radiales de esta estrella.?

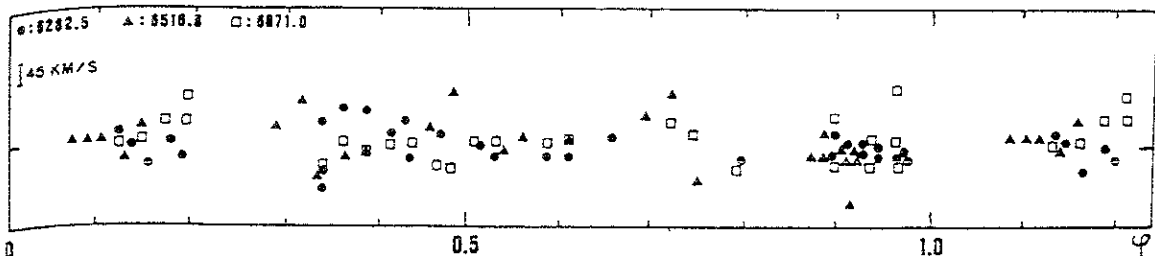


Figura 9.8. Curva de velocidad radial para V 444 Cyg. Tomada de Acker et al. (1989).

Para poder verificar las predicciones en la forma, necesitaríamos observaciones espectroscópicas del tipo descrito en el capítulo 4, llevadas a cabo por Gies et al. (1988, 1996) para otros sistemas (por ejemplo  $\epsilon$  Per). Esto nos daría el número de nodos y el modo de oscilación. Por desgracia no se tienen hasta la fecha observaciones de este tipo para V 444 Cyg.

## 2 HD 5980

Este sistema tiene una excentricidad mayor que la de V 444 Cyg,  $e = 0.27$ , por lo que esperamos que los resultados para este caso se parezcan a los de los casos elípticos calculados en el capítulo 8, aunque el periodo es de sólo 19.3 días. Los parámetros conocidos de este sistema se dan en la tabla 9.2.

Tabla 9.2. Parámetros del sistema HD 5980.

$$M_1 = 40 M_{\text{sol}}$$

$$M_2 = 28 M_{\text{sol}}$$

$$R_1 = 40.0 R_{\text{sol}}$$

$$R_2 = 23.0 R_{\text{sol}}$$

$$a = 130 R_{\text{sol}}$$

$$e = 0.27$$

$$\beta = 1.4$$

En este caso la viscosidad fue de  $\nu = 0.2 R_{\text{sol}}^2/\text{día}$ . También en este caso se corrió el programa por 500 días, y el análisis siguiente se hará para los últimos 50 días.

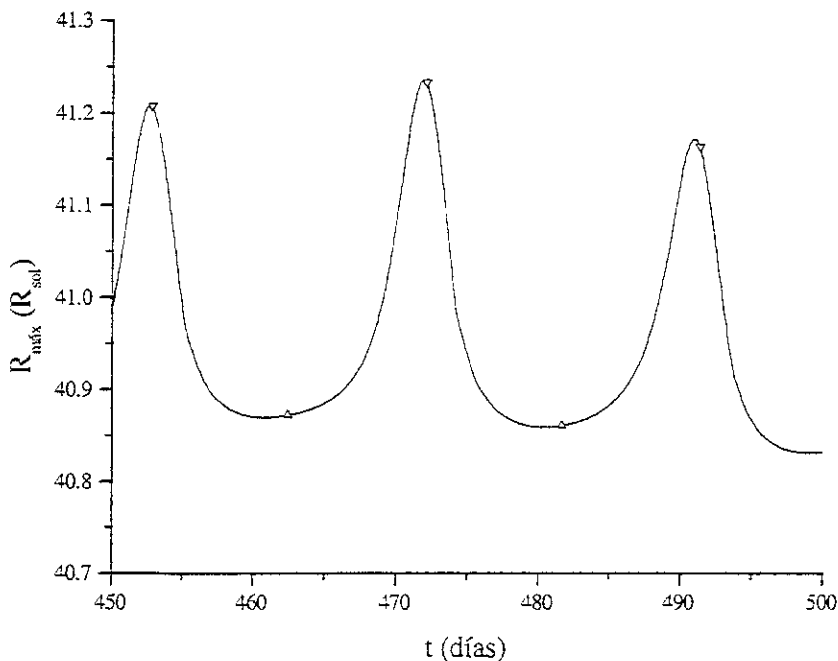


Figura 9.9.  $R_{\text{máx}}$  vs  $t$ . Los triángulos que apuntan hacia abajo muestran los tiempos del periaastro, mientras que los que apuntan hacia arriba muestran los apoastros.

La figura 9.9 muestra la variación de  $R_{\text{máx}}$  en el tiempo. En este caso las variaciones son similares a las encontradas en los cálculos para los casos elípticos del capítulo 8. Sin embargo, no podemos dejar de notar que las oscilaciones de la marea dinámica sólo tienen una amplitud máxima de  $0.3 R_{\text{sol}}$ , mientras que la marea en equilibrio mide más de  $0.8 R_{\text{sol}}$ , o sea, es más del doble de grande. Esto podría explicarse al ver que aunque aquí la excentricidad es considerable, sigue siendo pequeña comparada con el 0.8 que se usó en el capítulo 8.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

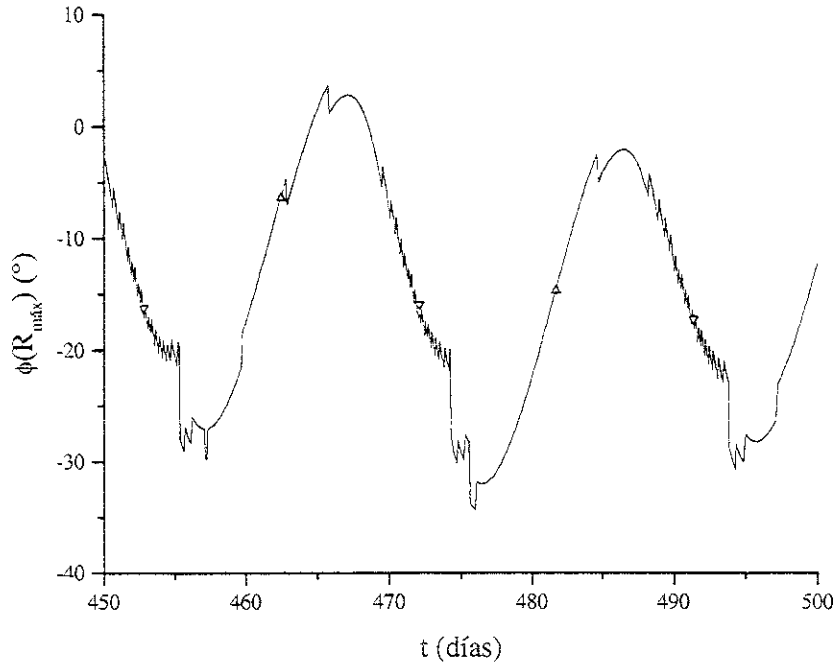


Figura 9.10.  $\phi(R_{\text{máx}})$  vs  $t$ .

La figura 9.10 muestra el ángulo que forma la protuberancia con la dirección de la otra estrella. En general siempre va atrasada, hasta unos  $30^\circ$ , aunque en ocasiones puede alcanzarla y rebasarla por unos pocos instantes. Esto ocurre después del apoastro. En el periastro y después de él la protuberancia siempre va atrasada.

La figura 9.11 muestra la velocidad máxima. Observamos algo similar a lo que pasa con los radios, sólo que aquí vemos un adelanto al tiempo de periastro. Los mínimos siguen estando en el apoastro. La máxima velocidad alcanzada es menor a 2 km/s.

La figura 9.12 muestra el azimut de la velocidad máxima. Vemos que el azimut cambia desde  $-20^\circ$  hasta  $30^\circ$ , es decir, en un rango de  $50^\circ$ . Esto quiere decir que el elemento que lleva la máxima velocidad es muy inestable.

En la figura 9.13 está la gráfica de la forma de la estrella. También en este caso observamos que domina el modo dipolar. Lo mismo en el caso de la velocidad radial, dado en la figura 9.14.

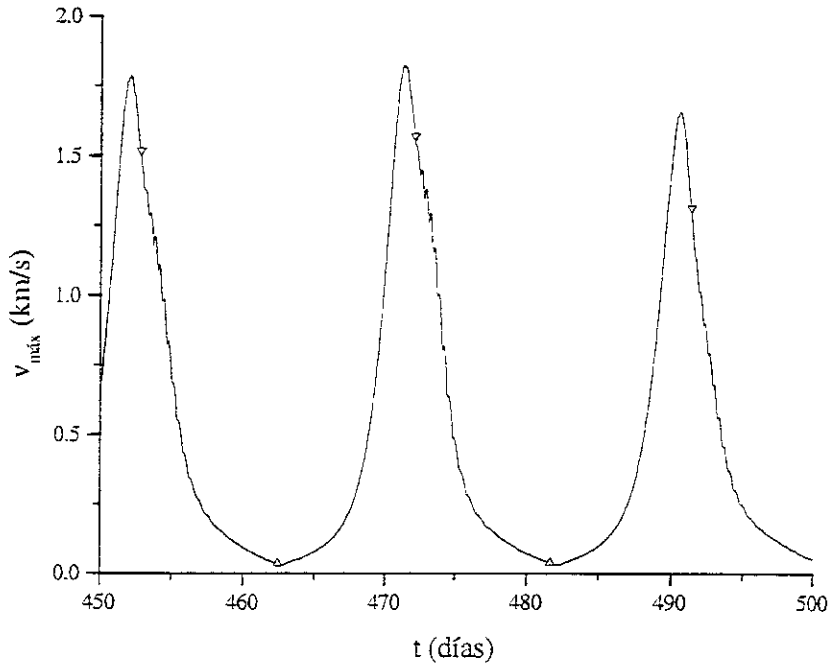


Figura 9.11.  $v_{\max}$  vs  $t$ .

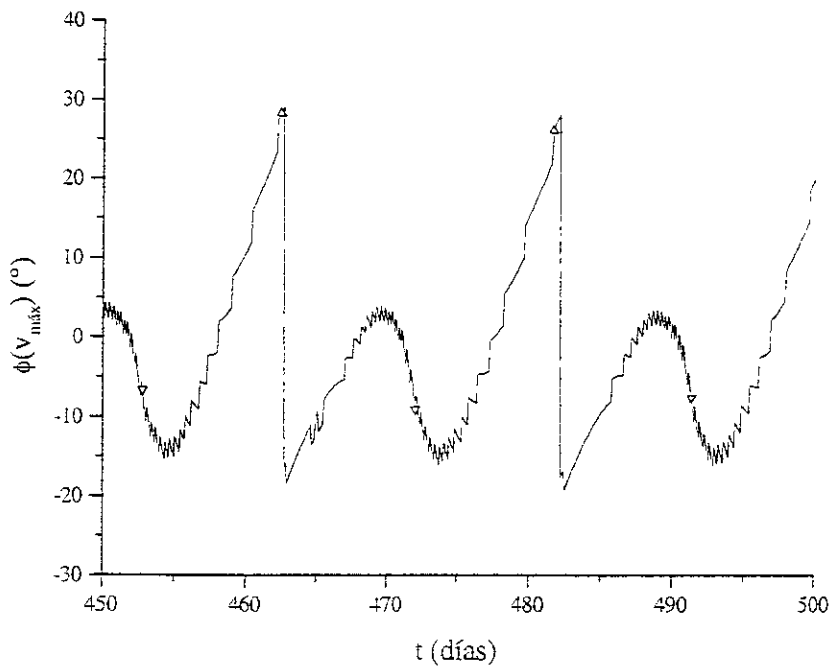


Figura 9.12.  $\phi(v_{\max})$  vs  $t$ .



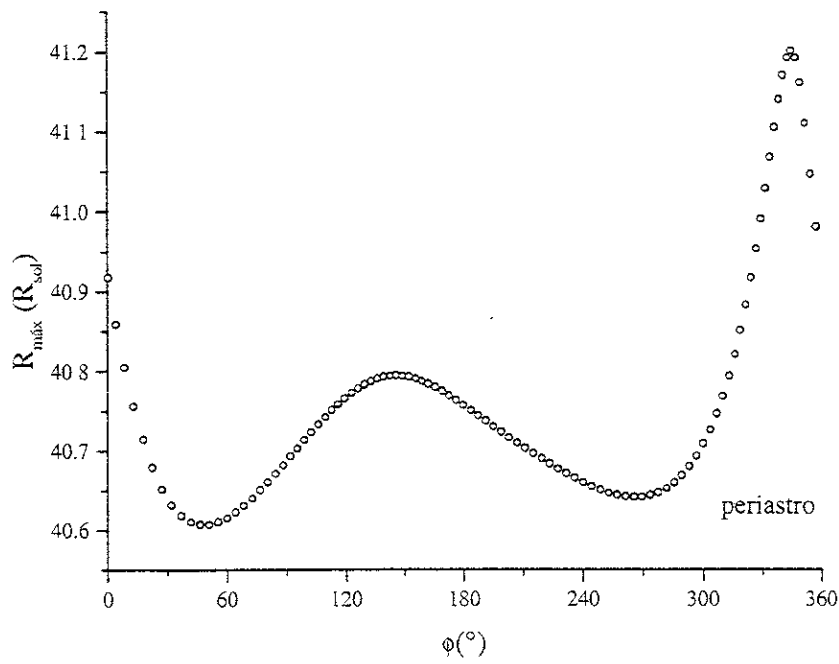


Figura 9.13. Gráfica de  $R$  vs  $\phi$  para el momento del periastro.

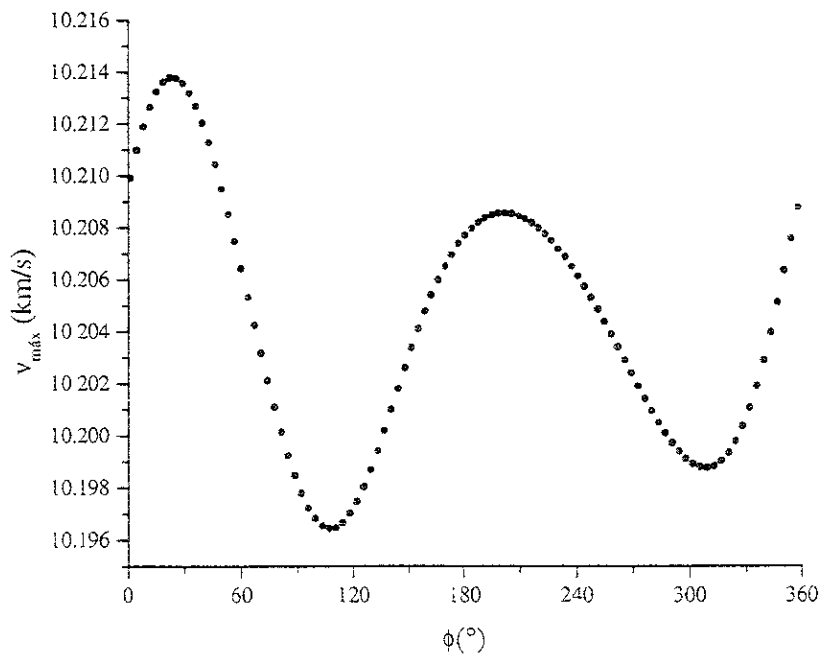


Figura 9.14. Gráfica de  $v_{\text{máx}}$  vs  $\phi$  en el momento del periastro.

Para comparar lo obtenido con lo observado, veremos también algunas mediciones de curvas de luz y velocidades radiales.

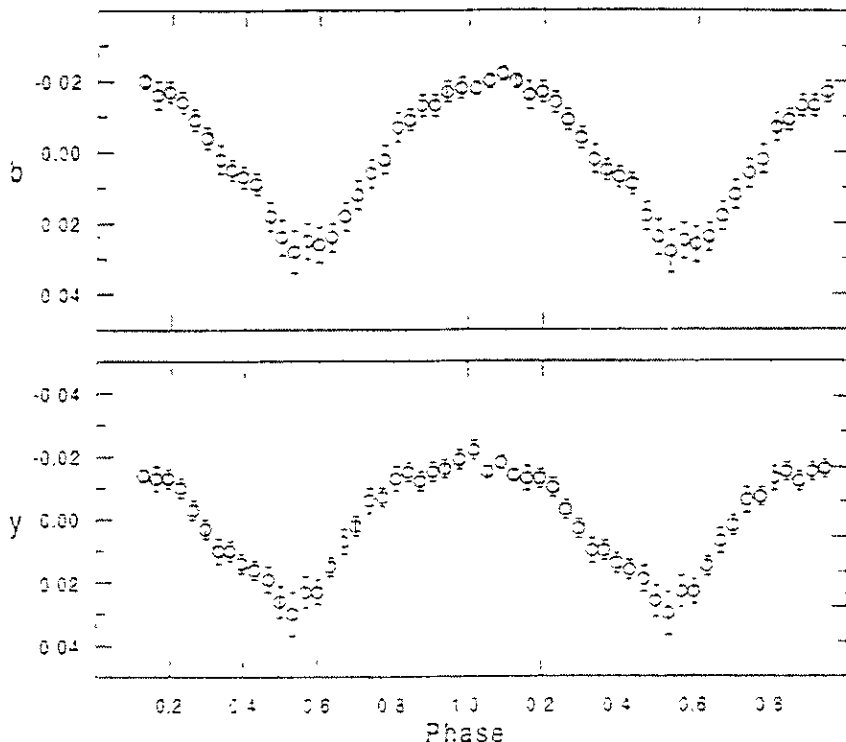


Figura 9.15. Variaciones fotométricas observadas en HD 5980 con periodo de 0.36 día (Sterken & Breysacher 1997).

### 3 Otros sistemas

El sistema HD 193793, con masas de  $38 M_{\text{sol}}$ ,  $13 M_{\text{sol}}$  periodo de 2900 días y excentricidad de 0.87 (o sea, mayor a las que se tomaron para el capítulo 8), muestra una curva de velocidad radial muy parecida a las curvas dadas en el capítulo 8 (véase figura 9.16). Esto nos permite especular sobre la validez del modelo, por lo menos cualitativamente.

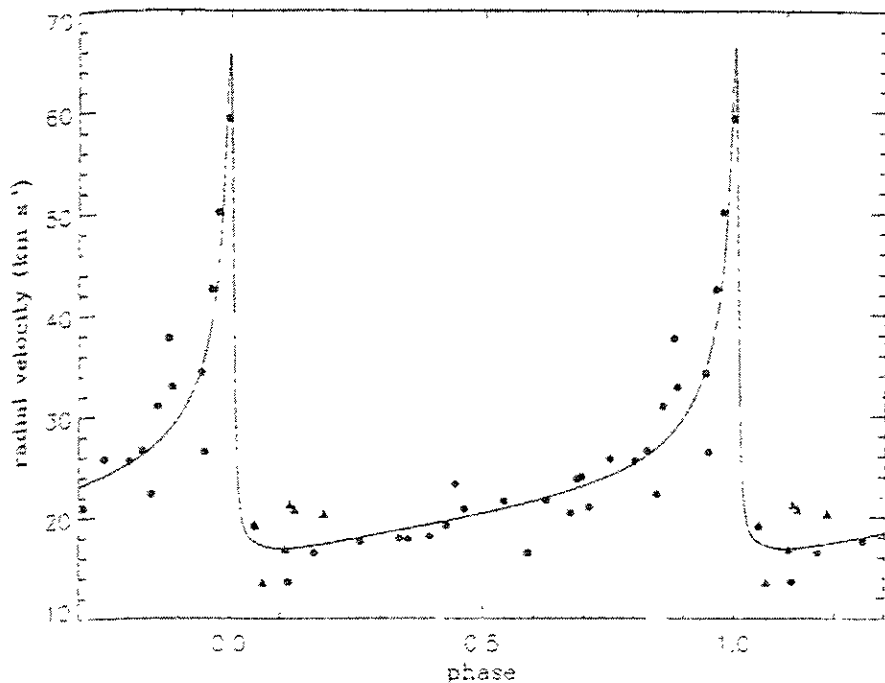


Figura 9.16. Curva de velocidad radial para HD 193793. Tomada de Setia Gunawan et al. (2001).

Existen varios sistemas binarios muy peculiares que valdría la pena analizar en el contexto del modelo que hemos presentado. Algunos de estos sistemas, tales como  $\theta$  And,  $\eta$  Cen y 16 Lac muestran variaciones fotométricas en sus curvas de luz con forma de una doble onda (Sareyan, 1998), que se asemejan a las variaciones en  $R_{\max}$  que el modelo predice para sistemas circulares fuera de equilibrio. En caso de poder demostrar una conexión clara entre las variaciones de  $R_{\max}$ ,  $v_{\max}$ , etc. predichas por nuestro modelo y variabilidad fotométrica, el modelo podría utilizarse para identificar sistemas binarios a través de su comportamiento fotométrico. Por otro lado, algunos de los sistemas binarios conocidos más peculiares tienen orbitas excéntricas. Por ejemplo, el sistema HD 193793 (también conocido como WR 140), cuyas masas son de 38 y 13 y que tiene una excentricidad de 0.87 (véase la Figura 9.17) presenta episodios de mucha actividad y erupciones cada 7.9 años, cuando el sistema pasa por el periastro. Hasta el momento, se ha interpretado esta variabilidad en términos de la colisión de los vientos dentro del sistema. Sin embargo, existe la posibilidad de que al pasar por el periastro, el enorme gradiente en las fuerzas de marea que se presenta podría provocar una fase de mayor pérdida de masa e inestabilidad en la fotosfera que producirían los efectos observados. WR 140 no es el único objeto de este tipo (Williams et al. 1998, IAU Symp. 193), y un proyecto interesante a futuro sería llevar a cabo un análisis del conjunto de sistemas binarios excéntricos con estas características peculiares, y determinar si cabe una explicación en términos de las fuerzas de marea.

En algunas estrellas menos masivas (por ejemplo,  $\theta$  And,  $\eta$  Cen y 16 Lac) también se encuentran curvas de luz con la forma de una doble onda (Sareyan et al., 1998; Stefl et al., 1995; Sareyan et al., 1997). En el caso de 16 Lac y  $\theta$  And, se sabe que se trata de sistemas dobles. En el otro caso, no se sabe si lo es o no, pero existe la hipótesis al respecto. Los resultados obtenidos en este trabajo nos permiten manifestarnos a favor de esta

---

hipótesis, ya que aunque las masas son menores de las usadas, pensamos que el comportamiento cualitativo podría ser similar.

---

## Conclusiones

En este trabajo hemos revisado las teorías clásicas de las oscilaciones no radiales y las interacciones de marea. Vimos que los tiempos característicos en los cuales se llega al equilibrio son muy largos, por lo cual se justifican cálculos efectuados sin tomar en cuenta la evolución del sistema..

Aplicando el modelo de Moreno & Koenigsberger hallamos que en algunos casos los sistemas binarios masivos oscilan en modos no radiales que pueden representarse en términos de armónicos esféricos, según las teorías clásicas, lo cual sustenta da cierto grado de confianza en el modelo.

Encontramos el comportamiento de los periodos de oscilación en sistemas binarios circulares donde hay rotación y vimos que para la suposición de equilibrio, se cumple bien. También se observa cierta simetría con respecto a la corrotación, y se halla una tendencia hacia el periodo orbital cuando no hay rotación, que se interpretó como que la única frecuencia forzadora es la que provoca dicha frecuencia. Hallamos que la rotación hace aumentar las amplitudes en buena medida, pero que el papel del aumento en radio es mucho más decisivo para el aumento de las amplitudes, lo cual puede provocar pérdidas de material. Esto nos permite proponer la hipótesis de que **en sistemas binarios circulares no sincronizados en los que una de las componentes tenga más de 30  $R_{\text{sol}}$  encontraremos fenómenos notables de pérdida de masa.**

En el caso elíptico hallamos que las oscilaciones están perfectamente sincronizadas con el periodo orbital, aunque la deformación máxima no coincide con el periastro debido a la viscosidad. Hallamos que las amplitudes crecen con  $R_1$  y con  $\beta$ . Los cambios en estos parámetros pueden significar pérdidas de material después de sobrepasar ciertos límites (para  $\beta$  el límite es 1.4, mientras que para  $R_1$  el límite es  $35 R_{\text{sol}}$ ). Esto nos permite proponer las hipótesis de que: **en sistemas binarios excéntricos ( $e = 0.8$ ) en los que a) una de las componentes rote con  $\beta > 1.4$  o b) tenga un tamaño de más de  $35 R_{\text{sol}}$  encontraremos fenómenos notables de pérdida de masa.**

Claro, estas son sólo hipótesis que resultan de un modelo numérico. Se sugiere entonces la observación sistemática de sistemas binarios para ver si estas hipótesis se confirman. El proyecto SEFONO avanzará poco a poco y nos dirá si nuestros resultados son válidos o no.

## Referencias

- Acker, A., Prévot, M. L., Prévot, L. 1989, A&A, 226, 137.  
 Breysacher, J., Francois, P. 2000, A&A. 361, 231.  
 Clement M. J. 1994 IAU Symp. 162, 117  
 Cowling, T. G. 1941 MNRAS 101, 367  
 Gies D. R. & Kullavanijaya A. 1988 ApJ 326, 813  
 Gies D. R., Barry D. J., Bagnuolo W. G. Sowers J. & Thaller M. L. 1996 ApJ 469, 884  
 Goldreich G. J. & Nicholson P. D. 1989 ApJ 342, 1079  
 Fehlberg, E. 1968, NASA, TR R-287  
 Hansen K. J. & Kawaler S. D. 1994 "Stellar interiors" Springer Verlag  
 Harmanec P., Hadrava P., Yang S., Holmgren D., North P., Koubsky P., Kubat J. & Poretti  
 E. 1997 A&A 319, 867  
 Holmgren D., Hadrava P., Harmanec P., Koubsky P. & Kubat J. 1997 A&A 322, 565  
 Hut P. 1980 A&A 92, 167  
 ----- 1981 A&A 99, 126  
 Kumar P., Ao C. O. & Quataert E. J. 1995 ApJ 449, 294  
 Ledoux, P. & Walraven. T. 1958 Handbuch der Physik 51, 353  
 Marchenko, S. V. et al. 1998, A&A 331, 1022.  
 Moreno E. & Koenigsberger G. 1999 RMAA 35,157  
 Nikolov, N. & Tsvetko, T. 1972. Ap. & Sp. Sc., 18, 445.  
 Papaloizou J., Pringle J.E. 1978 MNRAS 182, 423  
 ----- 1981 MNRAS 195, 743  
 Russell, H. N. 1928 MNRAS 88, 641  
 Savonije G. J. & Papaloizou J. C. B. 1983 MNRAS. 203, 581  
 ----- 1985 IAU Symp. 83-98  
 ----- & Alberts F. 1995 MNRAS 277, 471  
 Sareyan, J. P. et al 1998 A&A 322, 155.  
 Setia Gunawan, D. Y. A.. 2001. A&A, 376, 460.  
 Smeyers P., Van Hout M., Ruymekers E. & Polfliet R. 1991 A&A 248, 94  
 Sterken, C. Breysacher, J. 1997, A&A, 328, 269.  
 Tassoul J. L. 2000 "Theory of rotating stars" Cambridge University Press. 2a. ed.  
 Unno W., Osaki Y. H., Ando H., Saio H. and Shibahashi H., 1989 "Nonradial oscillations  
 of stars" Tokio University Press. 2a. ed.  
 Verbunt F. & Phinney E. S. 1995 A&A 296, 709  
 Zahn J. P., 1966 Ann. Ap. 29, 313  
 ----- 29, 489  
 ----- 29, 585  
 ----- 1970 A&A 4, 452  
 ----- 1975 A&A 41, 329  
 ----- 1977 A&A 57, 383  
 ----- 1989 A&A 220, 112

## Apéndice

Para correr el programa, seguimos los siguientes pasos (esto es lo que saldría en la pantalla de una computadora):

```

fausto@cometa%./corre.def
  M1, M2 ? (MASAS SOLARES)
40, 40
  PERIODO (DIAS) Y EXCENTRICIDAD ORBITAL ?
144.8557, 0.8
  PUNTO ORBITAL INICIAL : DAR TIEMPO ANTES
  O DESPUES DEL PERI ...
50
  EMPEZAMOS ANTES (1), O DESPUES (2) DEL PERI ?
1
  BETA EN EL PERI ?
0.5
  R1 ?
20
  NUMERO MAXIMO DE CAPAS :
  99
  NUMERO DE CAPAS ?
1
  PRODUCTO ESCALAR MINIMO :
  0.99964966949350
  VISCOSIDAD CONSTANTE NU ?
0.2
  TIEMPO DE INTEGRACIÓN?
100

```

Y el programa empieza a correr. En la pantalla va imprimiendo para cada paso de integración. los siguientes datos:

```

-----
  1.8592032907759      2.1989091614066D-02
  0.99890432654916
  0.21303318963503
  0.25112617950192   1  131   0.19659308600090   1  75
20.004075884483   467
-----

```

En donde el primer renglón nos da los valores del tiempo y del incremento en el paso de integración.

El segundo renglón nos da la fracción de contacto mínima que haya entre dos elementos. Esto no debe hacerse cero, ya que eso indicaría que hubo un desprendimiento de elementos.

El tercer renglón nos da la velocidad radial máxima,  $v_{m\acute{a}x}$ .

El cuarto renglón nos da la longitud azimutal mínima y la mínima profundidad en el tiempo  $t$ . Estos parámetros no deben hacerse cero, ya que eso indicaría un traslape de elementos.

El quinto renglón nos da el valor de  $R_{m\acute{a}x}$  en el instante en cuestión, así como el elemento que presenta dicha deformación.

Si en algún momento los elementos se desprenden (la fracción de contacto se vuelve cero), el código ya no puede continuar calculando, y envía un mensaje como el siguiente:

```
NO HAY CONTACTO EN LA CAPA Y ELEMENTOS
  1  225  226
PAUSE: To resume execution, type:  go
Any other input will terminate the program.
```

Si en algún instante dos elementos se traslapan, el programa envía el siguiente mensaje:

```
AZIMUT INCORRECTO EN LA CAPA Y ELEMENTOS :
  1  272  273
PAUSE: To resume execution, type:  go
Any other input will terminate the program.
```

Cualquiera de estos dos mensajes es preámbulo a la interrupción de los cálculos, ya que aunque se le de go, como pide el programa, el código ya no puede continuar calculando.

Cuando el programa se encuentra con un periastro, manda el siguiente mensaje:

```
PERI ; CHECAMOS FORMA ? (1,2)=(N,S)
2
  ESCRIBIR FORMA Y VELOCIDAD RADIAL SUPERFICIAL
  EN TIEMPOS SIGUIENTES CERCANOS ? (1,2)=(N,S)
2
  DELTA T PARA ESCRIBIR FORMA Y VELOCIDAD RADIAL ?
1
  SEGUIMOS ESCRIBIENDO FORMA Y VELOCIDAD RADIAL ?
  (1,2)=(N,S)
2
  DT A PARTIR DEL ULTIMO PERI O APO ?
2
```

Los archivos que genera son, (entre otros que no se usaron para este trabajo):



angrmax  
 angvrmax  
 apo  
 apovrmax  
 peri  
 perivrmax  
 formas  
 fperiapo

Cada uno de ellos nos da la siguiente información:

formas

t (días)	$\phi$ ( $^{\circ}$ )	R	x	y	V <sub>rad</sub>	$\Phi$ (V <sub>rad</sub> )
505.4190	4.52706	40.86899	40.74148	3.22579	0.13658	4.52706
505.4190	7.32992	40.86729	40.53332	5.21395	0.12554	7.32992
505.4190	10.15065	40.86333	40.22373	7.20163	0.11221	10.15065
505.4190	13.00042	40.85705	39.80982	9.19113	0.09715	13.00042
505.4190	15.89080	40.84848	39.28747	11.18451	0.08096	15.89080
505.4190	18.83375	40.83769	38.65121	13.18336	0.06429	18.83375
505.4190	21.84159	40.82480	37.89423	15.18853	0.04775	21.84159
505.4190	24.92678	40.81002	37.00845	17.19978	0.03196	24.92678
505.4190	28.10182	40.79362	35.98454	19.21542	0.01752	28.10182
505.4190	31.37875	40.77596	34.81223	21.23176	0.00500	31.37875

Este archivo nos da los principales parámetros de cada uno de los quinientos elementos en un instante de tiempo seleccionado. El archivo fperiapo nos da la misma información, sólo que para los momentos del periastro y el apoastro. t es el tiempo, x, y son las coordenadas cartesianas de cada elemento.

angrmax

t	R <sub>máx</sub>	$\phi$ (R <sub>máx</sub> )	v (R <sub>máx</sub> )	$\Phi$ (v (R <sub>máx</sub> ))
0.0010	20.0000000	90.738	-89.262	0.0000
0.0028	20.0000000	17.571	-42.429	0.0000
0.0150	20.0000000	19.951	-40.049	0.0000
0.0289	20.0000000	22.363	-37.637	0.0000
0.0425	20.0000001	24.770	-35.230	0.0000
0.0972	20.0000002	42.320	-17.680	0.0000

Este archivo nos da los parámetros del elemento con la mayor deformación en cada instante de tiempo durante el intervalo de integración. Los archivos peri, apo nos dan la misma información, sólo que para los momentos del periastro y el apoastro.

---

angvrmax

$t$	$V_{\text{máx}}$		$\Phi(V_{\text{máx}})$
0.0010	0.0000	16.818	-43.182
0.0028	0.0000	7.571	-42.429
0.0150	0.0000	19.951	-40.049
0.0289	0.0000	23.803	-36.197
0.0425	0.0000	29.810	-30.190
0.0562	0.0000	40.137	-19.863
0.0698	0.0000	56.225	-3.775
0.0835	0.0000	3.672	3.672

Este archivo nos da los parámetros del elemento con velocidad radial máxima en cada instante de tiempo. Los archivos `perivrmax`, `apovrmax` nos dan la misma información, sólo que para los momentos del periastro y el apoastro.

Estos archivos son los que se usaron para construir las gráficas de cada caso. Las columnas que no se rotularon es porque no se utilizaron.