01168
9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA (D.E.P.F.I.)

JERARQUIAS POR PRIORIDADES: TECNICA DE LOS EIGENVECTORES CON APLICACION A LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO PARA LA ASIGNACION DE RECURSOS FINANCIEROS

TESIS DE MAESTRIA

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)
P R E S E N T A :

JOSE HUMBERTO HERNANDEZ HERNANDEZ

298982

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F. OCTUBRE DEL 2001

JERARQUÍAS POR PRIORIDADES

TÉCNICA DE LOS EIGENVECTORES

CON APLICACIÓN A LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO

J. Humberto H. Hernández

Contenido

JERARQUÍAS POR PRIORIDADES
TÉCNICA DE LOS EIGENVECTORES
CON APLICACIÓN A LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO

J. Humberto Hernández Hernández

Sección de Investigación de Operaciones
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (D.E.P.F.I.)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
Septiembre del 2001-09-15.

RESUMEN

Los seres humanos, estamos acostumbrados a observar el universo y casi inmediatamente que vemos algo nuevo lo jerarquizamos, no obstante, hasta el momento no hay algo que nos diga si la jerarquía que hacemos es correctamente la óptima, simplemente confiamos en los sentidos de nuestra propia naturaleza.

Dada esta **problemática**, el trabajo tuvo como principal objetivo la presentación de *la técnica de los autovectores* para ordenar por jerarquía de prioridades los juicios del decisor. Posteriormente, y como segundo **objetivo** se aplicó la técnica siguiendo dos metodologías, la de SAATY THOMAS: *The Analytic Hierarchy Process* y el Programa de matematicas; Mathsoft Apps: *Mathcad 2000 profesional*, a un conjunto de programas de desarrollo, con la finalidad de conocer la correcta asignación de recursos financieros a cada uno de estos. Contando con la participación profesional del personal académico para llenar el ***cuestionario de prioridades***.

Con la información obtenida se pretendieron básicamente dos cosas, primero mostrar detalladamente la forma cómo se opera con la técnica en la práctica a través de cuestionarios ya que también podría hacerse por sesiones, y segundo señalar cómo la técnica conduce de manera natural a **resultados** consistentes.

El *método de autovectores* proporciona una forma racional y analítica de la subjetivad de las preferencias individuales expresadas a través del vector de prioridades o autovector.

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

Los seres humanos, estamos acostumbrados a observar la naturaleza y casi inmediatamente que vemos algo nuevo tratamos de ponerle alguna etiqueta y lo encasillamos en algún concepto.

Todo esto muchas veces lo hacemos automáticamente y a veces casi inconscientemente.
Esta clasificación y ordenamiento de objetos varía de persona a persona pero casi siempre predomina un parámetro de orden común y es en este en el que confiamos muchas veces para hacer juicios.

Hacer las jerarquías es una propiedad básica de los humanos para entender los diferentes niveles que hay en la naturaleza y romper la realidad en subniveles y así sucesivamente hasta llegar a los más elementales para su comprensión.

Hasta el momento no hay algo que nos diga si la jerarquía que hacemos cada uno de nosotros es la óptima y verdadera, simplemente confiamos en nuestros sentidos como un juicio absoluto.

Lo único que podemos decir en favor de todo esto es que confiamos en nuestra propia naturaleza humana y funciona realmente, aunque lo anterior no conduce necesariamente a la mejor toma de decisiones.

Al hacer las jerarquías, inmediatamente nos damos cuenta de que existen cosas muy cercanas y otras muy lejanas a nosotros. Por lo que comenzamos a jerarquizarlas en el grado que nos afectan éstas y decimos que importa si nos impactan y no importa si no nos afectan, es decir, le damos prioridades a las cosas en la medida que interactúan con nosotros.

Aunque este fenómeno es muy complejo y no es objeto de estudio en este trabajo, lo emplearemos y nos apoyaremos en él para resolver el problema de ¿Cómo tener certeza de que la ordenación de las prioridades por jerarquías es la correcta? ¿Cómo organizar los programas de un plan de desarrollo? .

Atendiendo a nuestras propias reglas, deberemos antes que nada plantear los fines y propósitos Perseguidos en éste trabajo. En primer lugar se tiene como **objetivo**, la presentación y desarrollo de la técnica[1] *jerarquías por prioridades* [1](Hierarchies and Priorities) que analíticamente consiste en obtener los eigenvectores y eigenvalores de la matriz de prioridades, no sin antes presentar una breve explicación de la Naturaleza matemática de éstos. Una vez expuesta la **metodología**, detalladamente y a profundidad, se realizará su **aplicación** a los programas del plan de desarrollo de la facultad de Ingeniería para obtener evidencias analíticas de nuestra intuición por las preferencias. En tercer lugar, hacer notar como ésta nueva organización de los programas de desarrollo, resultantes de la aplicación de la técnica, conduce a una forma óptima y eficiente en el proceso de ejecución de dichos programas, para cumplir con su misión de formar íntegramente recursos humanos en Ingeniería satisfaciendo las necesidades del país y su competitividad internacionalmente; para dar solución a los problemas Ingenieriles.

De los 32 programas que conforman el plan de desarrollo[2] de la Facultad de Ingeniería, seleccionamos los que consideramos como representativos de lo que hace la Facultad en el Posgrado.

---

[1] *Ver, bibliografía al final del trabajo, la referencia SAATY THOMAS L. y el plan de desarrollo de la Facultad de Ingeniería, 1995-2000.*

A continuación presentamos los **objetivos** de cada uno de esos nueve programas ya que sin ellos no sería posible una correcta aplicación de la técnica *jerarquías y prioridades*. Dichos programas y objetivos son:

P_1 .- Programa para la adecuación al nuevo sistema de posgrado de la UNAM.

Objetivos: Adecuar la División de Estudios de Posgrado al nuevo Reglamento General de Estudios de Posgrado de la UNAM.

P_2 .- Programa de docencia en maestrías y doctorados en ingeniería.

Objetivos: Impartir los mejores programas de docencia en maestrías y doctorados acordes a las necesidades del país y que sean competitivos en excelencia a nivel nacional e internacional.

P_3 .- Programa de investigación.

Objetivos: Realizar las investigaciones en ingeniería que necesita el País, vinculados al proceso enseñanza aprendizaje.

P_4 .- Programa de promoción para la consecución de proyectos.

Objetivos: Establecer un sistema que permita captar y atender en la Facultad de Ingeniería los proyectos externos que se generen.

P_5 .- Programa para la elaboración de artículos, notas y libros.

Objetivos: Presenta a la Facultad como la principal generadora de material didáctico y de investigación en el área de ingeniería.

P_6 .- Programa de creación de empresas científicas y tecnológicas(asociadas o independientes a la UNAM).

Objetivos: Dotar a la Facultad de Ingeniería y a la UNAM con una forma organizacional novedosa para la vinculación Universidad-Sector Productivo, y así crear empresas de base tecnológica y científica, que contribuyan al arraigo de los investigadores en la UNAM.

P_7 .- Programa de eventos académicos

Objetivos: Realizar eventos académicos (conferencias, congresos, simposio, etc.) relacionados con las diferentes ramas de la ingeniería, de problemas actuales de México y nuevas tecnologías e investigaciones realizadas de manera que contribuyan al mejor desarrollo de estudiantes y académicos.

P_8 .- Programa de intercambios y relaciones nacionales e internacionales.

Objetivos: Fortalecer el sistema de intercambios nacionales e internacionales para aumentar los conocimientos y la cultura de los miembros de la Facultad de Ingeniería (alumnos, académicos e investigadores) y de sus egresados (pasantes y titulados).

P_9 .- Programa de docencia en especializaciones en ingeniería.

Objetivos: Impartir los mejores programas de docencia en especializaciones acordes a las necesidades del país y que sean competitivos en excelencia a nivel nacional e internacional.

Ahora que ya conocemos los objetivos, ¿Cómo se van a jerarquizar los programas? Ya se ha dicho que mediante las jerarquías y prioridades según sientan las personas que así deberían ser ordenadas. No obstante, es claro que hacerlo de este modo (sentimental e intuitivo como se acaba de mencionar) no se llegaría a nada concreto y sí a muchas contradicciones. Por lo que es necesario establecer reglas o algún método para conducirnos a posibles resultados y ver que efectivamente son correctos.

En general, se puede adelantar que en el **capítulo 2**, se planteo la "problemática" que se tiene para tomar una correcta decisión al seleccionar la mejor de las alternativas de acuerdo con nuestro juicio e intuición y que conduzca a la solución optima para conseguir buenos resultados al satisfacer los objetivos predeterminados. Aunque si bien es cierto, existen en la literatura[3] una extensa variedad de técnicas y métodos para resolver éste tipo de problemas de toma de decisiones y optimización de sistemas. Aquí se desarrolló el enfoque de sistema sobre la selección de alternativas, comenzando con la definición de la evolución del sistema y su entorno hasta establecerlo como un modelo muy general para alcanzar objetivos.

Una vez exhibida la problemática del proceso para tomar las decisiones, cuando se enfrenta alguna situación dudosa cualquiera que sea su naturaleza. Ya sea que el decisor tenga incertidumbre o no al seleccionar una o varias alternativas, en el **capítulo 3**, se abordo la "metodología" a seguir con la que se puede resolver una gran cantidad de problemas de naturaleza muy diversa y tan ajenos entre sí que uno nunca sé imaginaria tener una estimación analítica de la solución de dichos problemas. Para concretar esto, en la primer sección se presentó la metodología de la técnica *Hierarchies and priorities* para la toma de decisiones, comenzando con un ejemplo de la construcción de la matriz de prioridades en el caso de la luz sobre cuatro sillas, así mismo se enunciaron cuatro aproximaciones para conseguir los eigenvectores ejemplificando con tres bolas de diferentes colores en donde se expuso detalladamente cómo calcular el índice de consistencia (C.I.), índice aleatorio (R.I.) y el radio de consistencia (C.R.) con sus respectivas interpretaciones. Estableciendo las propiedades para las prioridades y la consistencia de las matrices. Esto con el propósito de diversificar la técnica, haciendo más evidente la funcionalidad y al mismo tiempo aclarar la operatividad, a diferencia del ejercicio de la luz sobre las sillas. Enseguida se presentó la justificación matemática del método en tres pasos, comenzando con el caso real hasta concluir con el ideal que está relacionado con la ecuación formal de eigenvalores $Aw = nw$. Aunque al principio resulte difícil llevar a cabo estos cálculos, una vez asimilados los conceptos se realizan sin la mayor dificultad. Por esta razón y dado el oportuno momento se le apoya y estimula con ideas (consejos) al decisor cuando aplique la técnica, al asignar los pesos y valorar las acciones de acuerdo con sus prioridades y en general hacer toda la labor con objetividad y filosofía.

La aplicación de la técnica puede realizarse a través de sesiones, entrevistando a los decisores uno a uno o bien reuniéndolos en grupo donde expongan sus ideas y prioridades. Pero también puede aplicarse por cuestionarios, y es aquí en esta sección donde se expuso su estructura y como llenarlos, ejemplificando con el caso del brillo sobre las sillas. No obstante, sea cual sea la manera de aplicación resultará necesario e indispensable hacer pruebas de exactitud de la metodología *hierarquies and priorities* comparando en los casos donde se conozcan los resultados reales del problema, con la ayuda de las medidas estadísticas de la raíz cuadrada del cuadrado de la media (RMS) y la desviación absoluta de la mediana alrededor de la mediana (MAD). Ya que éstas proporcionarán el grado de variación de los datos alrededor de su valor medio o central. Para ver como funcionan estas medidas de dispersión, se aplicaron al mismo ejemplo de la intensidad de iluminación sobre las sillas y se compararon con los resultados obtenidos por la ley del inverso del cuadrado, encontrando una gran similitud como era de esperarse. Enseguida se exhibió el hecho del porqué el eigenvector con el mayor de los eigenvalores es seleccionado para dar las prioridades. Así mismo se hizo hincapié en que las prioridades de las personas (preferencias) pueden ser inconsistentes y no transitivas. También se indico una breve reseña del porqué se escogió la escala de comparación de la tabla 4-1 para asignar los pesos a juicio del decisor en la selección de prioridades, y se justificó él ¿porqué? Del límite superior (9) de la escala.

Posteriormente, en el **capítulo 4**, se explicó el modo de "aplicar la técnica desarrollada", en el capítulo 3, a los programas del Plan de Desarrollo de la Facultad de Ingeniería, 1995-2000. Y simultáneamente se aplicó a la misma matriz el programa de matemáticas: Mathsoft Apps:*Mathcad 2000 Profesional*.

Es en la primer sección donde se hizo el desarrollo experimental de la técnica, con la colaboración profesional del personal académico del área de investigación de operaciones para llenar el cuestionario de prioridades. Una copia de éste se da en el **apéndice** A. Con los resultados arrojados se formó la matriz de prioridades y se presentaron paso a paso en cuadros y tablas los cálculos realizados para **estimar** el vector de prioridades con sus eigenvalores asociados.

Finalmente en el **capítulo 5**, como consecuencia de haber aplicado la técnica a las prioridades del decisor se presentaron las "conclusiones" quedando los programas en el siguiente *orden*.

P_1 : Programa para la *adecuación al nuevo sistema de posgrado* de la UNAM.

P_3 : Programa *de investigación*.

P_2 : Programa de *maestrías y doctorados* en Ingeniería.

P_4 : Programa de promoción para la *consecución de proyectos*.

P_5 : Programa para la *elaboración de artículos y notas*.

P_8 : Programa de *intercambio y relaciones nacionales e internacionales*.

P_7 : Programa de *eventos académicos*.

P_6 : Programa de *creación de empresas* científicas y tecnológicas.

P_9 : Programa de *docencia en especializaciones* en Ingeniería.

Para ésta jerarquía se encontró un radio de consistencia del 21.45%, el cual no estuvo muy lejos del reportado por Saaty del 10.0% y lo que sugirió esta discrepancia es una revisión, sin que por ello se tuviera que realizar todo el trabajo de nuevo. No obstante, bien podría suceder que en este radio de consistencia las jerarquías resultarían ser inconsistentes y verdaderamente un desastre pragmático.

Para concluir el capítulo y la tesis se dio una lista de algunas de las **ventajas** y **desventajas** de las **jerarquías** mostrando sus virtudes y defectos. El *método de eigenvectores*[4] nos da una forma racional de nuestras preferencias subjetivas. Y es obvio que el método no funciona con las personas que son expertos porque estos dan la respuesta inmediatamente acerca de lo que nosotros no conocemos. Sin embargo, si lo aplican ellos mismos en sus propias decisiones, es útil, porque pueden comparar los nuevos resultados obtenidos con los que ya conocían y ver si efectivamente coinciden.

El primer paso es entender lo que son los valores y vectores, propios[5] y cómo pueden ser útiles[6]. A estos también se les conoce con los nombres de eigenvals o autovalores y eigenvecs o autovectores respectivamente. Como ejemplo[7] veamos una de sus aplicaciones, que es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 4v - 5w, \qquad v = 8 \quad \text{en} \quad t = 8, \\ \frac{dw}{dt} &= 2v - 3w, \qquad w = 5 \quad \text{en} \quad t = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Escribiendo en forma matricial. Sea u el vector incógnita, su valor inicial u_0 y la matriz de coeficientes A :

$$u(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{v(t)}{w(t)} \end{bmatrix}, \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} .$$

Con esta notación el sistema se transforma en

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u = u_0 \quad \text{en} \quad t = 0. \tag{2}$$

Nótese que es una ecuación de primer orden (no aparecen derivadas de orden superior) y es lineal en las incógnitas. Además, tiene coeficientes constantes; la matriz A es independiente del tiempo.

¿Cómo encontrar la solución? Si tuviéramos sólo una incógnita en lugar de dos, la respuesta sería fácil. Tendríamos una ecuación diferencial escalar en lugar de una vectorial, y si es homogénea con coeficientes constantes, sólo puede tener la forma

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u = u_0 \quad \text{en} \quad t = 0, \tag{3}$$

Cuya solución es

$$u(t) = u_0 e^{at} \quad , \tag{4}$$

$u(t)$ alcanza el valor requerido u en el tiempo inicial t=0. La ecuación es inestable si a>0, es neutralmente estable si a=0, o es estable si a<0; La solución en cada caso tiende a infinito, permanece acotada o tiende a cero respectivamente. Si a fuera un número complejo, $a = \alpha+\beta i$, se podrían aplicar los mismos criterios a la parte real α. La parte compleja produce las oscilaciones $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i \operatorname{sen} \beta t$; pero la estabilidad está gobernada por el factor $e^{\alpha t}$.

Enfoquemos directamente los sistemas y busquemos soluciones del mismo tipo que las dependencias exponenciales respecto a t que encontramos en el caso escalar. En otras palabras, buscamos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} v(t) &= y e^{\lambda t} \\ w(t) &= z e^{\lambda t} \quad , \end{aligned} \tag{5}$$

o en notación vectorial

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x} e^{\lambda t} \tag{6}$$

Sustituyendo esta solución esperada en el sistema de ecuaciones diferenciales, encontramos

$$\begin{aligned} \lambda y e^{\lambda t} &= 4y e^{\lambda t} - 5z e^{\lambda t} \\ \lambda z e^{\lambda t} &= 2y e^{\lambda t} - 3z e^{\lambda t} \ . \end{aligned}$$

El factor $e^{\lambda t}$ es común a cada término y puede eliminarse. Esta cancelación es la razón para suponer el mismo exponente λ para ambas incógnitas; si v y w fueran proporcionales a exponenciales $e^{\lambda t}$ y $e^{\rho t}$ diferentes, estos factores aparecerían en ambas ecuaciones y su cancelación sería imposible. Pero como están las cosas, nos quedamos con

$$\begin{aligned} \lambda y &= 4y - 5z \\ \lambda z &= 2y - 3z \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

La sustitución de $u = x\,e^{\lambda t}$ en $du/dt{=}Au$ dio $\lambda x\,e^{\lambda t} = Ax\,e^{\lambda t}$, y la cancelación produjo

$$Ax = \lambda x\ . \tag{8}$$

Esta es la ecuación fundamental para el valor propio λ y el vector propio x. Nótese que es no lineal, ya que involucra el producto de ambas incógnitas λ y x. Si pudiéramos descubrir el número λ, entonces la ecuación para x se volvería lineal; de hecho, podríamos escribir λIx en lugar de λx [2], y pasar este término al lado izquierdo:

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{9}$$

Evidentemente el vector propio x está en el espacio nulo de la matriz

$$A - \lambda\ I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\ .$$

Aquí hay un punto clave: para cada valor de λ, el vector x=0 siempre satisface $Ax{=}\lambda x$; el espacio nulo de cualquier matriz contiene a x=0. Pero no podemos utilizar el vector cero en nuestro problema de construir la solución $u(t)$ a partir de la exponencial $x\,e^{\lambda t}$. *Por lo tanto, estamos interesados sólo en aquellos valores particulares λ para lo cual existe algún vector diferente de cero.* Para poder ser útil, el espacio nulo de A- λI debe contener algún vector diferente de cero. En forma breve A- λI debe ser singular. Para esto, el determinante da un criterio definitivo.

A.- El número λ será un valor propio de A, con un vector propio correspondiente distinto de cero, sí y sólo sí

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{10}$$

Esta es la **ecuación característica**[8] para la matriz A.

En nuestro ejemplo,

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2\,.$$

El polinomio característico $\lambda^2 - \lambda - 2$ sé factoriza en $(\lambda+1)(\lambda-2)$ y la matriz A tiene dos valores propios distintos: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. A cada uno de estos dos valores especiales le corresponde un espacio de vectores propios que satisfacen $Ax{=}\lambda x$ o $(A-\lambda I)x{=}0$. Se realizan por separado los cálculos para λ_1 y λ_2 :

$$\lambda_1 = -1 \qquad (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ .$$

Y la solución es cualquier múltiplo de $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$\lambda_2 = 2: \qquad (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ .$$

Y la solución es cualquier múltiplo de $x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$;

Los vectores propios no están determinados únicamente; cualquier vector en el espacio nulo de A-λI (al que llamaremos **espacio propio** correspondiente a λ) es un vector propio, y lo que queremos es una base para ese espacio. En este ejemplo ambos espacios propios son unidimensionales y están generados por x_1 y x_2 , respectivamente.

---

[2] *Se introduce la matriz identidad "I" sólo para trabajar correctamente con matrices, vectores y escalares; la ecuación (A-λ)x=0 es más corta pero mezcla todo.*

Regresando a la ecuación diferencial, hemos encontrado dos soluciones puramente exponenciales:

$$u = x_1 e^{t\lambda_1} = e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad y \qquad u = x_2 e^{t\lambda_2} = e^{-t}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}.$$

Como la ecuación es lineal, se permite la superposición; cualquier combinación de estas dos soluciones especiales,

$$u = c_1 x_1 e^{t\lambda_1} + c_2 x_2 e^{t\lambda_2} \quad . \tag{11}$$

Es una solución. Tenemos ahora dos parámetros libres c_1 y c_2; por lo tanto, es razonable esperar que los podamos elegir de manera que satisfagan la condición inicial $u=u_0$ en $t=0$:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = u_0 \quad . \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Las constantes son $c_1 = 3$ y $c_2 = 1$, y la solución requerida para la ecuación original (1) es

$$u(t) = 3e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Escribiendo las componentes por separado, esto significa que

$$v(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}, \qquad w(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t} \quad .$$

Se verifican fácilmente las condiciones iniciales $u_0 = 8$ y $w_0 = 5$.

La moraleja parece ser que la clave de una ecuación se encuentra en sus **valores propios** y en sus **vectores propios**. Lo que el ejemplo no muestra es su ***significado físico***; tienen su importancia propia y no sólo es parte de una treta para encontrar u. Quizás el ejemplo más sencillo es el de los soldados que cruzan un puente. Cada vez que lo hacen dejan de marchar y lo cruzan sólo caminando. La razón es que podrían marchar a una frecuencia igual a la de uno de los valores propios del puente y entonces comenzaría a oscilar. (Como cuando un niño se columpia; rápidamente se detecta la frecuencia de oscilación del columpio y al ajustarse a ella el columpio va más alto.) Un ingeniero trata de que las frecuencias naturales de su puente o de su cohete estén alejadas de las del viento o del chapoteo de la gasolina. En el otro extremo, un corredor de bolsa pasa su vida tratando de estar en correspondencia con las frecuencias naturales del mercado. Los valores propios son los rasgos más importantes de prácticamente cualquier sistema dinámico.

En resumen se ha mostrado cómo aparecen de manera natural y automáticamente los valores propios y los vectores propios de A al resolver $du/dt=Au$. Esta ecuación tiene "soluciones puramente exponenciales" $u=xe^{\lambda t}$, el valor propio λ da la razón de crecimiento o decaimiento y el vector propio x se desarrolla en esa razón. Las otras soluciones serán mezclas de estas solucione puras y la mezcla se ajusta con las condiciones iniciales.

La ecuación clave fue $Ax=\lambda x$. La mayoría de los vectores x no satisfacen esta ecuación, ya sea λ un valor propio o no. Una x típica cambia de dirección cuando se multiplica por A, así que Ax no es un múltiplo de x. Esto significa que ***sólo ciertos números especiales son valores propios y que sólo ciertos vectores especiales son vectores propios***. Claro que sí A fuera un múltiplo de la matriz identidad, entonces ningún vector cambiaría de dirección y todos los vectores serían vectores propios. Pero en el caso usual los vectores propios son pocos y separados.

En conclusión, algunos de los hechos básicos acerca de los valores propios y los vectores propios: $Ax=\lambda x$, son: La matriz A de n por n está dada y el problema es encontrar aquellos vectores especiales x para los cuales A actúa como una multiplicación simple; Ax apunta en la misma dirección de x. La treta es encontrar primero los valores propios, reescribiendo λx como λIx y pasando este término al lado izquierdo: $(A-\lambda I)x=0$. Un vector propio de A es un vector nulo de $A-\lambda I$. En otras palabras, la cuestión clave es ésta: Si modificamos A por varios múltiplos de la matriz identidad, *¿qué cambio la hará singular*? Estas modificaciones revelarán los valores propios y entonces podremos calcular los vectores propios.

Si A es singular, entonces una posibilidad es no modificarla. Uno de los valores propios de una matriz singular es $\lambda=0$ y el espacio nulo contiene los vectores propios correspondientes. En realidad, el que A sea singular no significa algo especial; significa sólo que $\lambda=0$ es un valor propio. Ya sea que A sea singular o no, todos sus valores propios están basados en lo mismo: La combinación $A-\lambda I$ es singular y el espacio nulo de esa combinación es el espacio de los vectores propios correspondientes a λ.

Para saber cuando $A-\lambda I$ es singular, calcularemos su determinante. Este determinante es un polinomio en λ de grado n y se conoce como el *polinomio característico* de A. La ecuación $det(A-\lambda I)$ es la *ecuación característica* y sus raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ (que pueden ser números reales o no, y pueden incluir o no, algunas repeticiones de la misma) son los valores propios de A.

B.- Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que el número λ sea un valor propio de A:

(1) Hay algún vector x diferente de cero tal que $Ax=\lambda x$.

(2) La matriz $A-\lambda I$ es singular.

(3) $det(A-\lambda I) = 0$.

EJEMPLO: Consideremos la matriz simétrica.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Su polinomio característico es

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \quad .$$

Por lo tanto, la ecuación característica es

$$-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \quad .$$

y los valores propios son reales y distintos: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$. Para cada valor propio λ_i buscamos un vector propio correspondiente x_i.

$$\lambda_1=0: \qquad (A-0I)x_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad x_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1: \qquad (A-I)x_2=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad x_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=3: \qquad (A-3I)x_3=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad x_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esta cantidad de cálculos es inevitable y desde luego fue necesario hacer algunos arreglos para presentar un ejemplo agradable; la mayoría de los polinomios cúbicos no se factorizarán tan fácilmente como sucedió con este. No cabe duda de que algebraicamente y desde el punto de vista de los cálculos, el problema de los valores propios es mucho más difícil que $Ax=b$.

Para un sistema lineal, un número finito de pasos de eliminación produjo la respuesta exacta en un tiempo finito (O de manera equivalente, la regla de cramer nos dio una fórmula exacta para la solución.) En el caso de los valores propios no pueden existir tales pasos ni tal formula, pues Galois se revolvería en su tumba: el polinomio característico de una matriz de 5 por 5 es de grado quinto, y él probó que no puede haber una fórmula algebraica para las raíces de un polinomio de grado quinto. Todo lo que permitirá serán simples verificaciones de los valores propios, después de que se hayan calculado; mencionamos dos de ellas:

C.- La suma de los n valores propios es igual a la suma de las n entradas de la diagonal de A:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn} \quad .$$

Esta suma es la ***traza*** de A. Además, el producto de los n valores propios es igual al determinante de A.

Esto se confirma por el ejemplo dado anteriormente, donde la *traza* de A es $0+1+3=1+2+1=4$ y el determinante es $0 \cdot 1 \cdot 3=0$.

No deben confundirse los valores propios de una matriz y sus entradas diagonales. Normalmente son completamente diferentes. Sin embargo, a riesgo de introducir un poco de confusión donde no la había, señalaremos una situación donde esos números coinciden.

D.- Si la matriz A es triangular (puede ser superior o inferior y en particular diagonal), entonces los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, son exactamente los mismos que la diagonal $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$. La razón se hará obvia al ver un ejemplo. Sí

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

entonces su polinomio característico es

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3/4-\lambda)(1/2-\lambda) \quad .$$

El determinante es el producto de las entradas diagonales. Obviamente las raíces son $\lambda=1$, $\lambda=3/4$ y $\lambda=1/2$; Los valores propios ya estaban colocados a lo largo de la diagonal principal.

Hay otra situación en que los cálculos son fáciles. Supongamos que hemos encontrado ya los valores propios y los vectores propios de una matriz A. Entonces los valores propios de A^2 son exactamente $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \ldots, \lambda_n^2$, y cada vector propio de A es también un vector propio de A^2. La demostración es típica en matemáticas; si tratamos de estudiar $\det(A^2 - \lambda I)$ nos hundimos: Pero si comenzamos con $Ax=x$, todo es obvio. Multiplicando nuevamente por A,

$$A^2 x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

Entonces λ^2 es un valor propio de A^2 con el mismo vector x. Si la primera multiplicación por A deja intacta la dirección de x, lo mismo hará la segunda.

Este razonamiento no se aplica cuando estén involucradas dos matrices diferentes. Supongamos que λ es un valor propio de A y que μ es un valor propio de B. Entonces, *en general*, $\lambda\mu$ *no es un valor propio de* AB. Un intento de demostración sería éste: si $Ax=\lambda x$ y $Bx=\mu x$, entonces $ABx=A\mu x=\mu Ax=\mu\lambda x$. Se introduce la falacia al suponer que A y B comparten el mismo vector propio x. En general no es así.

CAPÍTULO 2

PROBLEMÁTICA:

A la problemática de tomar decisiones[9] que enfrentamos, es un asunto de principio cuando se tiene un conjunto de posibles alternativas y deseamos hacer una selección o algunas para llevarlas a la práctica en nuestra conveniencia o bien para la empresa. Escoger una posible alternativa puede ser un problema muy simple o también muy difícil, dependiendo de muchos factores, pero principalmente de la naturaleza del mismo problema que se tenga enfrente.

En primer lugar, lo que hacemos normalmente para resolver un problema cualquiera que este sea, usando nuestro sentido común, es hacer una proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado, conociendo ciertos datos y con ésto tomar una decisión.

Pero muchas otras veces, queremos tener la certeza de los resultados y entonces comenzamos hacer investigación y aplicar alguna de las técnicas disponibles y de estas la más adecuada con nuestro problema. No obstante ¿Cómo saber que tan confiables son los resultados?. Bueno después dé haber resuelto el problema por medio de algún método cualquiera que éste haya sido nos damos cuenta que no existe un método o técnica universal para resolver los problemas y que nos revelen los secretos de la naturaleza, y con base en ésto tomar decisiones correctas. Cabe mencionar que una correcta decisión a diferencia de una buena decisión, son aquellas que nos dan una solución optima.

Antes de abordar nuestro problema del que nos ocuparemos en este trabajo y metodología para solucionarlo, daremos algunas ideas en general para atacar problemas, no sin antes definir lo que entenderemos de aquí en adelante por sistema[10].

Comencemos por imaginar un automóvil, piense usted en el automóvil moviéndose a una alta velocidad, de manera que puede ver cómo va devorando la línea asfáltica y el paisaje va quedando detrás, observando cada vez uno nuevo. Observe que en ningún momento, hemos definido cualidades del vehículo ni del paisaje, sin embargo usted ha tenido la capacidad de imaginar el evento. Si deseamos verlo con mayor detalle y examinarlo, entonces podemos añadir cualidades, repitiendo una vez más el ejercicio. Ahora, imaginando un Porche Rojo con puertas elevadoras y llantas anchas, tablero digital en el que se ve claramente un termómetro indicando la temperatura del interior de la cabina y otro la temperatura del motor que ruge cada vez que pisa el acelerador. El Porche comienza a moverse como si fuera usted en una suave nube y sale a una carretera de cuatro carriles, puede ver todos los árboles que hay a la orilla de la misma, los señalamientos y las franjas pintadas en el asfalto. Sabe que su Porche Rojo tiene ocho cilindros y aprieta el acelerador, mira al velocímetro y apenas marca 160 Km./h pasando la curva que esta mirando al frente, aumenta la velocidad y ahora ya va a 190 Km./h, siente como vibra el volante y la carrocería, acompañado del ruido del motor, ahora ya no hay árboles, solo cactus y arena en el paisaje y usted es dueño absoluto de la carretera casi recta y acelera hasta los 220 Km./h va casi volando sobre la superficie asfaltada.

Hasta aquí detenemos el ejercicio imaginativo y nos preguntamos acerca de las **propiedades** del automóvil e incluso podemos enumerarlas. Estas lo conforman y le dan cualidades muy diferentes a la de otros vehículos y justamente esta es la estructura del Porche.

Se entiende la estructura del Porche como el arreglo y configuración del conjunto de las partes más elementales que lo conforman en su totalidad, gobernadas por ciertos principios, leyes y reglas. De este modo, entenderemos la estructura de un sistema. ¿Pero, si aún no sabemos qué es un sistema?. Entonces, de acuerdo con el ejercicio imaginativo, el sistema será el automóvil, en este caso el porche mientras que los árboles, las señales de la carretera, las nubes, el viento, el calor y todo lo que rodea al porche, lo denominaremos, como el medio ambiente del sistema.

En general, el sistema lo entenderemos como una abstracción mental del ente deseado, y para su estudio crearemos modelos que lo representen. Podemos observar que con base en esta definición cualquier cosa abstracta ó concreta, que exista o que pudiera existir se aborda fácilmente con sólo abstraerla mentalmente. No así su estudio, puesto que un sistema puede ser tan complejo que se tendrá que dividir en subsistemas con el fin de estudiarlo. De este modo, algunos ejemplos son: un sistema de comunicaciones, el sistema nervioso, el sistema económico, un sistema mecánico, el sistema de red de computadoras, el sistema político, etc.

Tal y como se ha definido al sistema, se estaría tentado a pensar en que el problema ya se ha resuelto si lo atrapamos con la mente. Sin embargo, no es tan sencillo como pareciera, puesto que se deberán considerar otras variables. Estas variables servirán como marco de referencia, a saber dichas variables son el espacio y el tiempo. Pensemos de nuevo en el Porche Rojo, como un sistema. Este, aún cuando permanezca en la cochera de casa, estará evolucionando temporalmente, es decir, el automóvil estará viajando en el tiempo aunque no cambie de posición, esto trae como consecuencia que cambie debido a las acciones del medio ambiente, erosionando y envejeciéndolo. Lo cual implica que el sistema comienza a evolucionar desde un estado inicial en un espacio y tiempo inicial, hasta un estado final con una posición final y un tiempo final. Y a todo esto se le denomina proceso.

A la luz de estas ideas, veamos cómo atacar el problema para tomar decisiones correctas[11], conduciéndonos a un buen resultado. Para ello veremos el siguiente diagrama (Fig. 2-1).

PROCESO PARA TOMAR DECISIONES

Con frecuencia nos enfrentamos al problema de alcanzar ciertos objetivos[12], si los objetivos son de interés personal, podemos hacer una selección por prioridades y verlas a corto, mediano o largo plazo. Ahora, si se trata de una decisión trivial donde el riesgo no sea grande o el rendimiento sea mayor o igual al valor que esperamos recibir, una vez alcanzado el objetivo, tomamos la decisión sin necesidad de hacer un estudio profundo y esto es en el caso de una o varias alternativas. Sin embargo, esto no es lo que sucede a nivel corporativo, gubernamental, industrial o financiero, donde una decisión trae consecuencias verdaderamente trascendentes.

A continuación, presentaremos algunas ideas básicas y de manera muy general en el proceso pragmático y empírico para tomar decisiones.

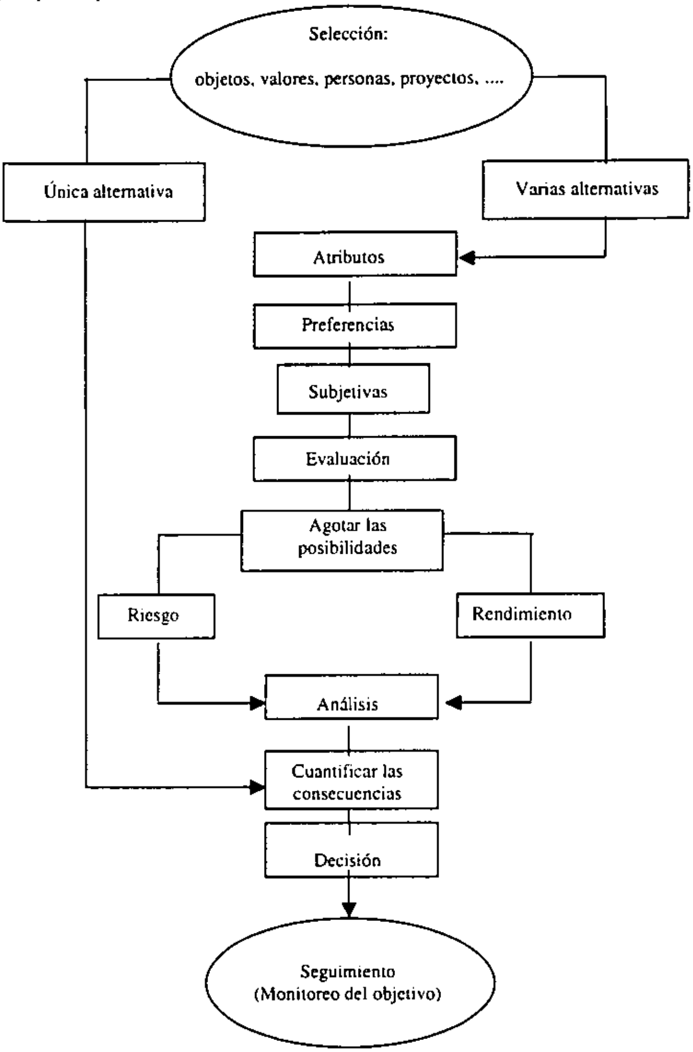

Fig.1-1. Diagrama general del proceso para alcanzar objetivos y obtener buenos resultados haciendo una correcta decisión.

La manera de seleccionar es muy compleja, puesto que esto depende de una infinidad de factores, y la pregunta inevitable es: ¿Qué podemos seleccionar?, ¿Para qué seleccionar?, ¿Cómo seleccionar? Y ¿Cuándo seleccionar?. En principio y suponiendo una alta probabilidad de que sean factibles los objetivos deseados éstos dependen de la *función de seleccionar*[13] y de esta depende que se cumplan o no dichos objetivos, puesto que podemos tener por objetivos la selección de personal, de proyectos, de objetos, etc. El problema de la selección se complica aún más cuando existen varias posibles alternativas y es en este momento en donde se **debe** de tener especial cuidado en verificar que ya no existen más alternativas, pues sería muy lamentable encontrar una nueva forma o bien alternativa mucho más sencilla o fácil de hacer las cosas y que conduzcan al mismo objetivo, y lo que es peor aún, que con menor riesgo otorgue mayor rendimiento. Si se observara, que solo hay una posible alternativa para alcanzar el objetivo, entonces no hay problema de decisión y si hay varias alternativas, se hace un estudio muy cuidadoso. Esto significa tomar en cuenta todos los atributos de cada una de las alternativas posibles y obviamente podrían estar o no en términos de nuestras preferencias, con tal de satisfacer nuestros objetivos.

Pues, si bien es cierto las jerarquías de las preferencias tienen cualidades que les da la razón de ser, La mayoría de las veces hacemos selección de las alternativas en base a las preferencias de los atributos sin perder de vista los objetivos deseados.

Hablar de preferencias en la selección de alternativas es muy ambiguo, al momento de definir los objetivos, ya que se deben precisar estos y no tratar de desviarlos con otros intereses muy particulares.

Desde el marco de referencia humano se puede afirmar que las preferencias son de naturaleza **subjetiva**. No obstante, alguien podría pensar en las preferencias objetivas y que estas dependen de las propiedades relativas al objeto en si y no a nuestro modo de pensar o de sentir. Es decir, en la calidad de la estructura del sistema. Sin embargo, basta con una sola persona que no piense de ese modo para dejar de ser en ese momento objetivas y caer inmediatamente en el caso subjetivo. De hecho, ni siquiera tiene sentido pensar en preferencias objetivas.

Las preferencias **subjetivas**; Son una propiedad inherente al decisor el cual tiene gustos, sentimientos, deseos, anhelos, pasión, etc., de ciertas *cualidades* de los atributos del sistema (objetos, personas, proyectos, programa de desarrollo, etc.) a seleccionar. Las *cualidades* bien podrían ser cuantitativas y cualitativas como el tamaño, el peso, volumen, masa, etc. y modelo, color, forma, apariencia, textura, duración y así muchas otras respectivamente.

En este punto es donde se torna más agudo el problema de la selección, puesto que se complicó aún más con los criterios de preferencias ya expuestas. ¿Qué hacer en estos casos...?. Lo recomendable es continuar con la lógica de la secuencia de selección.

El siguiente paso es hacer una **evaluación**[14] donde se contemplen todas las posibles alternativas con todos los atributos de cada una de ellas y todas las preferencias subjetivas, hasta agotar las posibilidades. Es obvio que hacer esta evaluación resulta un trabajo muy cuidadoso y por consiguiente extenuante, por lo que se deberá buscar personas capacitadas y especialistas para realizar toda esta labor.

Al realizar la **evaluación** del sistema, también se deberán considerar las propiedades del *riesgo* y *rendimiento* que tiene de manera natural el sistema que sé este estudiando sin perder de vista el objetivo. Estos factores son de vital importancia en el marco de referencia humano, pues el sistema o sistemas a evaluar tienen algún valor. Y este valor no es absoluto, es decir, tiene variaciones en el tiempo y también con el lugar donde se encuentre por lo que siempre habrá peligro de sufrir algún daño(perdida o ganancia). Así que definir, **riesgo** en términos generales de selección de sistemas resulta muy complicado dado que podría tratarse de un sistema de carteras de inversión, un sistema de programas de desarrollo institucionales, un sistema empresarial y hasta una simple adquisición de un auto o una computadora.

A la mayoría de nosotros no nos gustan los riesgos, lo cual significa que tenemos aversión por los riesgos y por el contrario, hay quienes, tienen por objetivo conseguir placer en el riesgo sin importar nada por que esto les satisface y si en principio resulta difícil definir el riesgo en la selección de sistemas, mucho más complicado es evaluarlo, por que siempre habrá imprevistos que no contemplamos. Lo que se puede hacer en alguno de los casos muy particulares es tener solamente una estimación.

A la mayoría de las personas les gustaría tener un riesgo igual a cero, y que esto les otorgue el mayor **rendimiento** en su objetivo.

De nueva cuanta, caemos en un concepto difícil de definir en términos de selección del sistema. Para no entrar en conflictos, podemos aceptar de la práctica común el rendimiento del sistema como el resultado producido o la utilidad obtenida. Más concretamente es la relación entre algún efecto útil (aprovechable) que se obtiene del sistema y la cantidad de la inversión suministrada.

Para la administración financiera[15], esta relación se conoce como tasa de rendimiento, donde previamente se define al:

Rendimiento = Ingreso - Gastos

De manera que un rendimiento es el resultado de cuánto efectivo neto reciben los propietarios y cuándo lo reciben.

No nos ocuparemos aquí de entrar en detalles con estos conceptos, tratados extensamente en otros documentos especializados[16] en este campo.

Riesgo y rendimiento son conceptos que no se pueden desprender uno del otro y guardan una relación muy estrecha, al evaluar los posibles sistemas alternativos, en los que se deberán desechar los no trascendentes y que no tengan relevancia de acuerdo con los objetivos perseguidos.

Esto significa hacer un análisis[17], el cual no debe quedar en manos del administrador del sistema, sino de un analista del sistema y el planificador.

Con base en el conocimiento del sistema, de las posibles alternativas y sus atributos, las preferencias, la evaluación, las posibilidades agotadas de sistemas alternativos existentes, un estudio[18] del rendimiento y los riesgos, éstos harán el análisis para seleccionar la mejor alternativa, y de aquí hacer predicciones y evitar en lo posible el riesgo de alguna perdida y del objetivo mismo.

Con el análisis y las predicciones del mejor sistema, se tienen las bases suficientes para tomar una buena decisión[19], cabe mencionar que una correcta decisión aumenta la posibilidad de obtener un buen resultado.

El problema no termina con haber tomado una buena decisión y obtener un buen resultado. Debe recordar que éste es un *proceso de selección de sistemas* eficientes en el sentido de satisfacer nuestros objetivos y como todo proceso, éste puede continuar hasta alcanzar su plena madurez de rendimiento. Si por alguna razón, no evolucionara el sistema como eran nuestros propósitos, entonces diremos que ***el sistema se aborto***, aún cuando se hayan visto nuestros objetivos cumplidos parcialmente. Para que no suceda esto se le deberá dar un estricto seguimiento a todo el sistema desde que se toma la decisión de ponerlo en marcha. Esto con el propósito de ir moni toreando paso por paso todo el proceso y consecuentemente para tener control, aplicando las medidas correctivas en los momentos adecuados con el fin de poder ver cumplidos nuestros objetivos deseados.

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA EN LA TOMA DE DECISIONES

Dejando a un lado el empirismo y el pragmatismo pasemos al formalismo de la estructura del problema de toma de decisiones[20] contenido dentro del mismo proceso, que básicamente consiste en: Análisis de la problemática, modelado de las preferencias del decisor y solución del problema. Esto es que para resolver un problema de toma de decisiones, se consideran las etapas[21] siguientes:

I. Definición de las acciones y formulación del problema (escoger una acción, seleccionar un subconjunto de acciones, ordenar acciones)
II. Determinación de criterios y modelado de las preferencias del decisor respecto a cada uno de estos criterios
III. Síntesis de la información existente en un modelo global (agregación de criterios)
IV. Aplicación de algún procedimiento para resolver el problema de toma de decisiones

Formalmente, tomar una decisión consiste en determinar:

a).- un conjunto de *cursos de acción*, A;
b).- un conjunto de *consecuencias*, C;
c).- un conjunto de *estimados de consecuencias*, E;
d).- una función e: $A \rightarrow E$ llamada *estimación de consecuencias*;
e).- una relación binaria asimétrica de ordenamiento $\geq$ sobre E, llamada *relación de preferencias*;
f).- un curso de acción $a \in A$ tal que $e(a) \geq e(b)$ para todo curso de acción $b \in A$, llamada *solución del problema* de toma de decisiones.

Cada uno de los conjuntos A, C es un conjunto excluyente y exhaustivo. La realización de cualquier curso de acción $a \in A$ implica que se realiza un cierto elemento de C, llamado la *consecuencia* del curso de acción a o un estimado $e(a) \in E$ de dicha consecuencia. La decisión consiste en elegir el curso de acción $a \in A$ de modo que el estimado de su consecuencia, $e(a)$, sea al menos tan preferible como el de cualquier otro curso de acción, lo que se denota por $e(a) \geq e(b)$.

Los problemas de toma de decisiones pueden ser clasificados según la forma matemática de los estimados de las consecuencias: si para cada $a \in A$, $e(a) \in E$ es un elemento de C, un conjunto de C o una distribución de probabilidad sobre C, entonces se dice que el problema es bajo certeza, incertidumbre o riesgo, respectivamente otra posibilidad es que $e(a)$ sea un conjunto borroso de C, [Roubens y Vincke, 1987].

Si el conjunto de consecuencias C, es un producto cartesiano, el problema de toma de decisiones se llama multicriterio (objetivos o atributos múltiples) porque cada una de las componentes se asocia con un criterio relevante para la decisión.

Un criterio es una función real sobre un conjunto de acciones que representa las preferencias del decisor según uno de sus puntos de vista. Si la estructura de preferencias es de preorden total, cuasi orden, orden de intervalo o un seudo orden, entonces este criterio resulta ser un criterio verdadero, cuasi criterio, criterio de intervalo o seudo criterio, respectivamente. Saaty jerarquiza los criterios mediante la técnica de los autovectores o aigenvectores.

Visto de otro modo la estructura de un problema de decisiones[22], requiere:

a).- formular el problema: es decir, responder a la pregunta; *¿ cuál es el problema ?*;
b).- identificar los objetivos de la decisión: ellos son las respuestas a preguntas del tipo *¿ para qué...?*;
c).- identificar y posiblemente diseñar cursos de acción alternativos: Estos son medios para lograr los objetivos y responder a preguntas del tipo *¿ cómo lograr el objetivo... ?*
d).- estimar consecuencias: la respuesta a *¿ qué ocurriría si se llevara a cabo el curso de acción...?* Es el estimado de las consecuencia del curso de acción considerado;
e).-comparar preferencialmente las alternativas: la respuesta a *¿ qué alternativa tiene asociado el mejor estimado de consecuencias?* Es la solución del problema.

Como ya se ha mencionado, en la toma de decisiones intervienen elementos de carácter subjetivo, que son las preferencias del decisor sobre distintas consecuencias de las alternativas, y también elementos que son deseable sean lo más objetivos posible, que son el conocimiento sobre las alternativas disponibles y sus posibles consecuencias.

Por ejemplo, las Instituciones Escolares con escasos recursos financieros[23], tienen serios problemas para mantenerse ante la creciente competencia de la oferta y la demanda en el mercado educativo. Sus decisores (directores y administradores) deberán ser en la mayor medida posible objetivos al asignar dichos recursos, de acuerdo con las prioridades académicas.

En nuestro caso el problema del que nos ocuparemos en este trabajo es el ordenamiento de acuerdo con las jerarquías de preferencias por selección de propiedades de un sistema de **programas de desarrollo**, que conllevan la evolución de la vida académica de la Facultad de Ingeniería y por tanto es indispensable y necesario asignarles recursos financieros a cada uno de dichos programas. Así que, concretamente nuestro problema es seleccionar una correcta organización por jerarquía de prioridades para asignar recursos financieros.

Las preguntas ahora son: ¿Para qué ordenarlos?, ¿Con qué propósito?, ¿Cómo organizarlos?, ¿Bajo qué criterios son ordenados?, ¿Qué técnica emplear?, ¿Cómo saber si es correcta dicha organización?. Todas estas y muchas otras preguntas, se aclararán en el siguiente capítulo.

CAPITULO 3

METODOLOGÍA O MARCO TEÓRICO

El método puede ahora ser descrito como sigue. Dados ciertos elementos de la misma naturaleza y de un nivel, digamos, que sean cuatro elementos de cierta jerarquía y un quinto elemento "*e*" del siguiente nivel jerárquico superior, compare los cuatro elementos uno a uno sintiendo intensamente su influencia sobre "*e*" de manera que sea por parejas, asignándoles un valor. Inserte los números en una matriz reflejando la comparación y encuentre el eigenvector con el mayor eigenvalor. El eigenvector provee una ordenación de prioridades y los eigenvalores una medida de consistencia de los juicios.

Para ejemplificar el método determinaremos una escala de prioridades. Sean *A*, *B*, *C* y *D* lugares para sillas arregladas en línea recta, comenzando desde una fuente de luz. Se desarrollará una escala de prioridades relativa a los brillos sobre las sillas. Los juicios serán obtenidos por un individuo quién está de pie junto a la fuente de luz y se le pregunta por ejemplo, ¿Qué tan fuerte es el brillo de luz en la silla *B* con relación a la *C*? Este dará uno de los números de comparación que se describen en una tabla y este valor del juicio será colocado en la matriz en la posición (*B*, *C*).

Por conveniencia, las comparaciones de intensidad serán las actividades que estarán siempre en la columna de la izquierda contra las actividades que aparecerán en el renglón superior de la derecha. Tendremos entonces la matriz de comparaciones por parejas con cuatro renglones y cuatro columnas (una matriz de 4×4)

brillos	*A*	*B*	*C*	*D*
A				
B				
C				
D				

Los números que se agregarán sobre ésta serán como sigue. Con los elementos *A* y *B* dados; sí

A y *B* son igualmente importantes, insertar 1.
A es un poco más importante que *B*, inserte 3
A es más importante que *B*, inserte 5
A es demostrablemente o mucho más importante que *B*, inserte 7
A es absolutamente más importante que *B*, inserte 9
en la posición (*A*, *B*) donde el renglón de *A* se encuentra con la columna *B*.

Un elemento, es igualmente importante cuando se compara consigo mismo. Así cuando el renglón *A* se encuentra con la columna *A* en la posición (*A*, *A*) inserte 1. Entonces el diagonal del centro de la matriz deberá consistir de unos. Inserte los inversos correspondientes 1/3,..., o 1/9 donde la columna de *A* se encuentre con el renglón de *B*, i.e., en la posición (*B*, *A*) por la comparación inversa de *B* con *A*. Los números 2,4,6,8 y sus inversos serán usados cuando de verdad sea muy necesario e indispensable, para facilitar el compromiso de aceptación entre los juicios significativamente diferentes. También emplearemos, números racionales para radios que estén por arriba de la escala de valores cuando se desee forzar la consistencia sobre la matriz de pocos juicios, i.e., un mínimo de n-1.

Regresando, ahora a el ejemplo de los brillos sobre las sillas. Estos son 16 espacios en la matriz para los números. De éstos, cuatro están predeterminados, a saber, están en la diagonal, (*A*, *A*), (*B*, *B*), (*C*, *C*), (*D*, *D*) y se tienen el valor de 1, aquí, en el ejemplo, la silla *A* tiene el mismo brillo así misma. De los doce números restantes, después de la diagonal es llenada(filled in), necesariamente de seis números, debido a que los otros seis son las comparaciones inversas y deben ser los recíprocos de los primeros seis. Suponga que el individuo, empleó la escala recomendada, colocando el número 4 en la posición (*B*, *C*). El piensa que la silla "*B*" está entre los brillos, débil y fuerte más que "*C*". Entonces los valores recíprocos ¼ es automáticamente la entrada en la posición (*C*, *B*). Esto no es un mandato u obligación para colocar los recíprocos, pero es una relación general para hacer esto correctamente de acuerdo con la técnica.

Después de que los 5 juicios restantes han sido dados y sus recíprocos también han sido colocados, se obtiene la matriz completa.

brillos	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	5	6	7
B	1/5	1	4	6
C	1/6	1/4	1	4
D	1/7	1/6	1/4	1

El siguiente paso consiste en el calculo del vector de prioridades para la matriz dada. En términos matemáticos el principal eigenvector es calculado y cuando normalizamos resulta el vector de prioridades. Veremos posteriormente que los brillos relativos de las sillas, expresados por este vector satisfacen la ley del inverso del cuadrado de óptica. En ausencia de una gran escala de cálculos para resolver el problema exactamente, estimaremos crudamente los vectores que pueden ser obtenidos de los siguientes cuatro caminos:

1.- **El Tierno**. Sume los elementos en cada renglón y normalice por la división de cada uno sumado por el total de todas las sumas, entonces el resultado ahora sumará la unidad. La primer entrada del vector resultante es el vector de prioridades de la primer actividad; el segundo de la segunda actividad y así los demás.

2.- **El mejor**. Tome los elementos de cada columna y sume los inversos de estos. Para normalizar también estos números agregue la unidad, dividiendo cada reciproco por la suma de los recíprocos.

3.- **Bueno**. Divida los elementos de cada columna por la suma de la columna y entonces sume los elementos en cada uno de los renglones resultantes y divida esta suma por el número de elementos en el renglón. Este es un proceso de promediar sobre las columnas normalizadas.

4.- **Bueno aproximación**. Multiplique los n elementos en cada renglón y tome la raíz n-ésima. Normalice los números resultantes.

Una ilustración simple, la cual muestra los métodos (1), (2) y (3) produce las acostumbradas respuestas esperadas en una urna con 3 bolas blancas(W), 2 negras (B) y una roja (R). Las probabilidades del sorteo en W, B y R son, respectivamente, 1/2, 1/3, 1/6. Es fácil ver como cualquiera de los tres primeros métodos dan esas probabilidades cuando se aplica la matriz de comparación de parejas consistentes siguientes. El método (4) da una buena aproximación.

	W	*B*	*R*
W	1	3/2	3
B	2/3	1	2
R	1/3	1/2	1

Es importante observar como este método da diferentes resultados para el caso general en el que la matriz no es ***consistente***.

Ahora aplicaremos, los diferentes métodos de estimación, solucionando el ejemplo de las sillas. Aplicando el método (1), la suma de los renglones de esta matriz es el vector columna, el cual, para ahorrar espacio, lo escribiremos como (19.00, 11.20, 5.42, 1.56). La suma total de la matriz es dada por la suma de las componentes de este vector. Este valor es 37.18. Si divide cada componente del vector por este número, obtiene el vector columna de prioridades, y de nuevo lo escribimos como un vector renglón (0.51, 0.30, 0.15, 0.04) para los brillos relativos de las sillas A, B, C y D respectivamente.

Aplicando el método (2), la suma de las columnas de esta matriz es el vector renglón (1.51, 6.43, 11.25, 18.00). Los recíprocos de estas componentes son (0.66, 0.16, 0.09, 0.06), los cuales normalizados resultan (0.68, 0.16, 0.09, 0.06).

Aplicando el método (3) normalizamos cada columna obteniendo (sumando las componentes y dividiendo cada componente por la suma) la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0.66 & 0.78 & 0.53 & 0.39 \\ 0.13 & 0.16 & 0.36 & 0.33 \\ 0.11 & 0.04 & 0.09 & 0.22 \\ 0.09 & 0.03 & 0.02 & 0.06 \end{bmatrix}$$

La suma de los renglones es el vector columna (2.36, 0.98, 0.46, 0.20) Los cuales cuando son promediados por la muestra de tamaño 4 de las columnas conduce al vector columna de prioridades (0.590, 0.245, 0.115, 0.050).

El método (4) produce (0.61, 0.24, 0.10, 0.04), la solución exacta para el problema es obtenida por la matriz producida para grandes potencias arbitrarias y dividiendo la suma de cada renglón por la suma de los elementos de la matriz. Para dos decimales, están dados por (0.61, 0.24,0.10, 0.05).

Por comparación de estos resultados note que la exactitud es mejorada de (1) a (2) a (3) no obstante estos incrementan en complejidad en los cálculos. Si la matriz es consistente todos estos cuatro vectores podrían ser los mismos. El método (4) solamente da una muy buena aproximación.

Multiplique ahora la matriz de comparación por la derecha con el vector solución estimado, obteniendo un nuevo vector. Sí dividimos la primer componente de este vector por la primer componente del vector solución estimado, la segunda componente del nuevo vector por la segunda componente del vector solución estimado y así el resto, obtendremos otro vector. Si tomamos la suma de las componentes de este vector y dividimos por el número de componentes tendremos una aproximación para el número $\lambda_{máx.}$ (llamado el máximum o principal eigenvalue) para usarlo como una estimación de la consistencia y a la vez como un reflejo de la proporcionalidad de preferencias. El valor $\lambda_{máx.}$ para n (el número de actividades en la matriz) es el resultado más **consistente**.

Será claro para nuestra discusión teórica en capítulos posteriores que la desviación para la **consistencia** puede ser representada por $(\lambda_{máx.} - n)/(n-1)$ la cual le llamaremos *índice de consistencia* (C.I). Llamaremos al índice de consistencia de una matriz reciproca generada aleatoriamente con las escalas de 1 a 9, con recíprocos forzados, el *Índice Aleatorio* R.I.(Random Index).

En el Laboratorio Nacional del colegio Oak Ridge, generaron un promedio de R.I. para matrices de 1-15 empleando una muestra de tamaño 100. Uno podría esperar que el R.I. incrementara de acuerdo con el incremento del orden de las matrices. Ya que la muestra fue sólo de tamaño 100 estas permanecieron fluctuando estáticamente para los índices de un orden a otro. Debido a esto, fueron repetidos los cálculos en la escuela Wharton para una muestra de tamaño de 500 para matrices de 11 por 11, y entonces empleando los resultados de Oak Ridge para n=12,13,14,15. Se obtiene la siguiente tabla, dando los ordenes de las matrices (primer renglón) y el promedio de R.I. (segundo renglón) determinados como se describe abajo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Tabla 3-0: *Relaciona el tamaño de la matriz con los respectivos índices aleatorios*

Los radios de C.I. y los promedios R.I. para las matrices del mismo orden es llamado *radio de consistencia* C.R. (Concistency ratio). **Un radio de consistencia de 0.10 o menos es considerado aceptable.**

Para ilustrar un calculo aproximado del C.I. con un ejemplo, emplearemos la matriz anterior y el tercer vector columna derivado por el método (3) para encontrar $\lambda_{máx}$. Se tiene (0.59, 0.25, 0.11, 0.05) el vector de prioridades. Si multiplica la matriz por la derecha con este vector, resulta el vector columna (2.85, 1.11, 0.47, 0.20). Si divide las componentes correspondientes del segundo vector por el primero, se obtiene (4.83, 4.44, 4.28, 4.00). Sumando sobre éstas componentes y promediando resulta 4.39. Esto proporciona (4.39- 4)3=0.13 para el C.I. y entonces para determinar que tan bueno es este resultado se divide por el valor correspondiente R.I. = 0.90. El radio de consistencia (C.R) es 0.13/0.90 = 0.14 el cual no es un valor cerrado como a uno le gustaría que fuera 0.10.

Estos cálculos y comparaciones establecen las prioridades de los elementos de un nivel de jerarquía con respecto a un elemento del siguiente nivel. Si estos son más de dos niveles, los vectores de prioridades podrán ser combinados en matrices prioritarias, las cuales producirán finalmente un vector de prioridades para el nivel más bajo.

JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO

Suponga que n actividades han sido consideradas por un grupo de personas muy interesadas en éstas. Y también suponga que el grupo de metas son:

1.- Proveer juicios sobre la importancia relativa de estas actividades
2.- Asegurar que los juicios son cuantificados por una extensión la cual también permite una interpretación cuantitativa de los juicios entre todas las actividades.

Claramente la meta (2) requeriría asistencia técnica apropiada. Nuestra meta es describir un método derivado de un grupo de juicios cuantificados (i.e., de los valores asociados con pares de actividades), con un conjunto de pesos asociados a las actividades individuales; en el sentido que se define abajo, estos pesos muestran reflejado el grupo de juicios cuantificados.

Sea $C_1, C_2, \ldots, C_n$ el conjunto de actividades. Los juicios cuantificados en pares de actividades C_i , C_j son representados por una matriz de $n \times n$.

$$A = a_{ij} \quad , \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Las entradas $a_{i,j}$ son definidas por las siguientes reglas.

Regla 1.- Si $a_{i,j} = \alpha$ entonces $a_{j,i} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Regla 2.- Si C_i es juzgada de igual importancia relativa como C_j entonces $a_{i,j} = 1$, $a_{j,i} = 1$; en particular, $a_{i,i} = 1$ para toda i.

Entonces la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ & . & . & \cdots & . \\ & . & & \cdots & . \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Habiendo registrado los juicios cuantificados en pares (C_i, C_j) como entradas numéricas $a_{i,j}$ en la matriz A, el problema ahora es asignar las n contingencias $C_1, C_2, \ldots, C_n$ al conjunto de pesos numéricos $W_1, W_2, \ldots, W_n$ que puedan "reflejar los juicios registrados".

Haciendo en orden, la formulación superficial del problema, primeramente será transformar en unos matemáticos precisos. Este esencial y aparentemente inofensivo paso es más crucial en cualquier problema que requieran la representación de una situación de la vida real en términos de una estructura matemática abstracta. Es particularmente crucial en el presente problema donde la representación involucra un número de transición que no son inmediatamente discernibles. Por tanto seria deseable en el presente problema identificar los principales pasos en el proceso de representación y hacer cada paso lo más explícito posible en orden para habilitar los potenciales usados de sus propios juicios sobre el *valor y significado* del método en relación a sus problemas y metas.

La pregunta principal esta relacionada con el significado de las condiciones formuladas vagamente en la declaración de nuestras propias metas: "Estos pesos muestran el reflejo de los grupos de juicios cuantificados". Y presentan las necesidades para describirse en términos aritméticos precisos, de como los pesos w_i debieran relacionar los juicios $a_{i,j}$; En otras palabras, el problema es especificar las condiciones que deseamos imponer sobre los pesos observando las relaciones para los juicios obtenidos. La descripción deseada es desarrollada en tres pasos, procediendo desde el caso simple y particular hasta uno general.

Paso 1.- suponga que los juicios son simplemente los resultados de mediciones físicas precisas. Digamos que los juicios son dados en un conjunto de guijarros, C_1 , C_2 , ... , C_n y en una escala precisa. Para comparar C_1 con C_2 , coloque C_1 en una escala y suponga una lectura para su peso digamos, W_1 -305 gr. De la misma manera para el peso C_2 y encuentra W_2 = 244 grs. Ellos se dividen W_1 entre W_2 , lo cual da 1.25. Pronunciando en juicios, " C_1 es 1.25 veces más pesado que, C_2 " y se registra como a_{12} =1.25. Entonces, en este caso ideal de medidas exactas, la relación entre los pesos W_i y los juicios a_{ij} son simplemente dados por

$$\frac{w_i}{w_j} = a_{ij} \qquad \text{para} \quad i,j = 1,2,\dots,n\,, \tag{3-1}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, seria irreal que estas relaciones requeridas contuvieran el caso general. Imponiendo a ésta restricciones, en muchos de los casos prácticos, resultaría el problema de encontrar los W_i (cuando a_{ij} son dados) desconocidos. Primero, al comparar las medidas físicas nunca son exactas en el sentido matemático y de aquí, es preciso hacer asignaciones para las desviaciones correspondientes; y segundo, debido a que son juicios humanos, estas desviaciones son considerablemente grandes.

Paso 2.- Con el propósito de ver como hacer las asignaciones para las desviaciones, considere el i-esimo renglón en la matriz A. Las entradas en ésta son el renglón

$$a_{i1}\,, a_{i2}\,, \dots, a_{ij}\,, \dots, a_{in}$$

En el caso ideal (exacto) estos valores son los mismos radios

$$w_i / w_1\,, w_i / w_2\,, \dots, w_i / w_j\,, \dots, w_i / w_n$$

De aquí, en el caso ideal, si multiplicamos por la primer entrada de este renglón por W_1, el segundo por W_2, y así con los restantes, se obtiene:

$$\frac{w_i}{w_1}w_1 = w_i, \frac{w_i}{w_2}w_2 = w_i, \ldots, \frac{w_i}{w_j}w_j = w_i, \ldots, \frac{w_i}{w_n}w_n = w_i$$

El resultado es un renglón de entradas idénticas w_i , w_i , w_i , ... , w_i Donde en el caso general podríamos obtener un renglón de entradas que representen la dispersión estadística alrededor de valores w_i.. Es por tanto razonable requerir que los valores w_i sean iguales a los promedios de estos valores. Consecuentemente, en el caso ideal (relación (3-1))

$$w_i = a_{ij} w_j \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

La relación más realista para el caso general toma la forma(para cada i fijo)

$$w_i = \text{el promedio de } (a_{i1}w_1, a_{i2}w_2, \ldots, a_{in}w_n)$$

Más explícitamente tenemos:

$$w_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3\text{-}2)$$

Mientras las relaciones en (3-2) representan una relajación substancial de la relación más restringida (3-1), aún deja libre la pregunta; ¿Es la relajación suficiente para asegurar la existencia de la solución? ; es decir, asegura el problema de encontrar un único peso w_i cuando a_{ij} son dados en una solución?.

Paso 3.- Para responder a la pregunta esencialmente matemática, es necesario expresar la relación (3-2) en términos más familiares. Para estos propósitos necesitamos resumir la línea de razonamientos en este punto, observando el conjunto de condiciones para ver como el vector de pesos w relaciona los juicios cuantificados, considerado en el caso ideal en el paso 1, el cual sugiere la relación (3-1). En seguida, analizáremos el caso real que requiere las asignaciones de las desviaciones, dadas en el paso 2, que nos conducen a la formación (3-2), la cual no es lo bastante realista para asegurar la existencia del vector de pesos w que pudieran satisfacer (3-2). Observe que una buena estimación a_{ij} tiende a ser cerrada para w_i/w_j, sin embargo existen pequeñas perturbaciones para este radio. Ahora como a_{ij} cambia, permite una solución correspondiente de (3-2), (i.e., w_i y w_j pueden cambiar para acomodar este cambio en a_{ij} en el caso ideal), Sí n también cambia. Denotaremos este valor de n por $\lambda_{máx}$. Entonces el problema

$$w_i = \frac{1}{\lambda_{max}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tiene solución única. Este es el bien conocido ***eigenvalor*** del problema con el que estaremos tratando.

En general, la desviación en a_{ij} puede permitimos una gran desviación en $\lambda_{máx}$ y en w_i , i=1,...,n . Sin embargo este no es el caso para una matriz reciproca la cual satisface las reglas 1 y 2. En este caso tenemos una solución estable.

Recuerde que se dio una justificación intuitiva de nuestra aproximación. Esto es una manera elegante al hacer esta notación matemática. Estableciendo brevemente en notación matricial, comenzamos llamándole el caso paradigma $Aw = nw$, donde A es una matriz consistente y considere una matriz reciproca A' la cual es una perturbación de A, obtenida de las comparaciones por pares de los juicios y resuelve el problema $A'w' = \lambda_{máx}\, w'$ donde $\lambda_{máx}$ es el eigenvalor más grande de A'.

Algunas ocasiones estaremos interesados en el problema inverso para controlar con respecto a ciertas propiedades dadas llamándole recesividad de una actividad cuando compare otra con respecto a esta propiedad. En este caso se resolverá por la parte izquierda con el eigenvector "v" en $vA = \lambda_{máx}\, v$. Solamente cuando A es consistente sobre los elemento de v y los recíprocos de w. Sin consistencia, tendrán recíprocos para n = 2 y n = 3. En general no necesariamente esperamos tener una relación definida. Los dos vectores corresponden a los dos lados de la doble cara de la realidad- La luz y la oscuridad.

PARA EL DECISOR

Si usted se enfrenta con un gran número de opciones para seleccionar y tiene una gran confusión de los criterios para juzgarlas, entonces puede hacer las comparaciones de los criterios por parejas con respecto a rangos de esfuerzos cortos y largos, riesgo y beneficios como se mencionó en los primeros capítulos, y así construir una matriz de comparación de parejas en relación al efecto y éxito. Finalmente, en los niveles bajos, compare las opciones con respecto a cada criterio, componiendo los pesos de las jerarquías y seleccionando las prioridades superiores. Su usted debe examinar bastantes juicios, deberá estar seguro de haber considerado todos los factores relevantes y los mejores juicios, deténgase y medite sobre su selección. Usted deberá hacer su mejor esfuerzo humano para hacer su correcta selección.

Día con día, las rápidas decisiones mantienen archivadas las operaciones de las jerarquías de trabajo, sus juicios y prioridades resultantes. Cambie los juicios necesarios de las decisiones para obtener los resultados ú observe cuales juicios deben ser cambiados para obtener los resultados deseados. Por último, añada elementos con sus juicios relevantes y si fuera necesario obtener nuevas prioridades.

Esto también, puede hacerse con la interacción de una computadora, la cual tiene almacenada información. Para selección de portafolios se necesita una jerarquía de beneficios y una jerarquía de costos. Las relaciones beneficio costo son usadas para propósitos de decisiones.

EN RESUMEN

El enfoque de **eigenvalor** por comparación de pares, provee una alternativa para calibrar en una escala numérica, particularmente en áreas nuevas donde las mediciones y comparaciones cuantitativas no existen. Las mediciones de la consistencia nos permiten retomar los juicios modificados y volverlos a corregir para mejorar la consistencia completamente. La participación de varias personas hace posible el intercambio de ceder preferencias entre las diferentes entradas. Esto también crea un diálogo para que se de una relación real: Un arreglo entre varios juicios representan diversas experiencias.

Los pasos del procedimiento del proceso jerárquico por prioridades son como sigue:

1.- Situación del problema.
2.- Poner el problema en un amplio contexto -empotrarlo si es necesario en un gran sistema incluyendo otros actores, sus objetivos y resultados.
3.- Identificar los criterios que influencian la conducta de los problemas.
4.- Estructurar una jerarquía de los criterios, subcriterios, propiedades de alternativas y las mismas alternativas.
5.- En muchas reuniones los niveles del problema pueden estar relacionados con el ambiente, los actores, los objetivos de los actores, políticas de los actores y resultados, de los cuales se derivan las composiciones de los resultados (estado del mundo).
6.- Para remover la ambigüedad, definir cuidadosamente cada elemento en las jerarquías.
7.- Priorizar los criterios primarios con respecto a sus impactos sobre los objetos completos llamándole focos.
8.- Establecer las preguntas por parejas equivalentes de comparación claramente sobre cada matriz.
Poner atención para la orientación de cada pregunta, e.g., costos desciende, beneficios aumenta.
9.- Priorizar los subcriterios con respecto a sus propios criterios.
10.- Colocar por pares equivalentes los juicios a comparación y forzar sus recíprocos.
11.- Calcule prioridades por la suma de elementos de cada columna y dividiendo cada entrada por el total de la columna. Promedie sobre los renglones de la matriz resultante y usted obtendrá el vector de prioridades.

12.- En caso de escenarios calibre sus variables de estado sobre una escala de -8 a 8 según cuando sean diferentes desde la primera hasta la última.
13.- Componga los pesos en jerarquías para obtener prioridades compuestas y también valores compuestos de las variables de estado las cuales colectivamente definirán las composiciones de resultados.
14.- En el caso de elegir entre alternativas seleccione las alternativas prioritariamente más altas.
15.- En el caso de asignación de recursos, agote las alternativas de los costos, calcule la razón beneficio costo y asigne consistentemente, uno u otro completamente o proporcionalmente por las prioridades.

JERARQUÍAS Y JUICIOS POR CUESTIONARIOS

Es posible obtener la relación de jerarquías como resultado de la aplicación de cuestionarios, sintetizando los resultados y continuando por otros cuestionarios para conseguir los juicios.

Demos un simple ejemplo de como pueden obtenerse los juicios por una simple matriz usando un cuestionario. El mismo método de cuestionarios puede ser aplicado para jerarquizar. Entonces consideremos el ejemplo óptico para obtener juicios acerca de la luz sobre las sillas. Se indican los valores de escala en el rango comenzando desde un extremo, descendiendo hasta la igualdad y de nuevo asciende hasta el otro extremo. En la columna de la izquierda se enlistan todas las alternativas que serán comparadas en forma ascendente con las otras alternativas en la columna de la derecha. En todos los casos, cada columna contendrá $n(n-1)/2$ alternativas.

Entonces les pedimos a las personas que confronten juzgando los elementos que se indican en forma ascendente en la columna de la izquierda, contra los elementos correspondientes sobre los renglones de la columna de la derecha.

Sí el hecho es tal que la persona que realiza los juicios tiene **preferencia** por el elemento localizado en la última columna (C_2) del primer renglón, sobre el primer elemento del primer renglón de la primer columna (C_1), entonces deberá seleccionar el conjunto de valores a la derecha de la igualdad y rechazar el conjunto de valores de la izquierda de la igualdad. Lo mismo se hace para todas las alternativas.

Columna I	Absoluto	Muy importante	Importante	Débil	Igual	Débil	Importante	Muy importante	Absoluto	Columna II
C_1										C_2
C_1										C_3
C_1										C_4
C_2										C_3
C_2										C_4
C_3										C_4

TABLA 3-1 *Formato para recabar la información de los juicios en el caso del brillo de la luz sobre las sillas, comparando las alternativas.*

PRUEBAS PARA LA EXACTITUD, RMS Y MAD

Es de considerable interés para nosotros señalar cuan fiel es el vector de prioridades por el método desarrollado de concordar la realidad a través del vector de prioridades. Una manera para descubrir esto es aplicar el método a la situación la cual nos permita determinar los verdaderos números reales. En este caso, deseamos checar(revisar) cuan tan exacto es el vector de prioridades.

La prueba para la exactitud consiste en comparar estimaciones en los experimentos con las respuestas reales que ya conocemos. La comparación de números involucra el uso de medidas estadísticas y no son muchas las medidas para validar los resultados teóricos frente a la realidad. Estos son la raíz cuadrada del cuadrado de la media (Root Mean Square deviation "RMS") y la desviación absoluta de la mediana alrededor de la mediana (Median absolute deviation "MAD"). Estas serán usualmente empleadas con propósitos de comparación entre varias muestras estimando lo cercano(estreches) de las preferencias con la realidad y no medidas tan absolutas.

Ambas son maneras de medir la dispersión de un conjunto de mediciones provenientes de una colección de valores fundamentales conocidos.

Las desviaciones entre números pequeños son aptas de ser pequeñas. Para ver cuan significativamente pequeñas son estas en términos absolutos deberán ser divididas por el número del tamaño del promedio de donde fueron tomados. En nuestro caso, esto debe ser $1/n$ donde n es el número de acciones(artículos) que serán comparadas. Incidentalmente, una medida del error puede ser tomando las diferencias (o diferencias absolutas), de los pesos por las prioridades, tomando su promedio, entonces se divide por $1/n$, i.e., donde w_i son las prioridades y x_i son sus estimaciones.

La raíz cuadrada del cuadrado de la desviación (the root mean Square deviation (RMS)) de un conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - b_i\right)^2}$$

La mediana de un conjunto de n números es obtenida por su arreglo en orden creciente y tomando el término medio si n es impar y el promedio de los dos términos del centro si n es par. La desviación absoluta de la mediana alrededor de la media (the median absolute deviation about the median(MAD)) de un conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es dado por la mediana$\{ |(a_i - b_i) - \text{mediana}(a_i - b_i)| \}$. Como una ilustración, veamos el ejemplo de la intensidad de la iluminación en las sillas.

INTENSIDAD DE ILUMINACIÓN Y LA LEY DEL INVERSO DEL CUADRADO

Ya se ha presentado el ejemplo del brillo sobre las sillas y se procedió hasta agotar y llenar con los juicios la matriz, y entonces se resuelve para los brillos relativos. Cuatro sillas idénticas fueron colocadas en línea desde la fuente de luz a las distancias de 9, 15, 21 y 28 yardas (0.914 metros). El propósito fue para ver si podíamos estar de pie mirando la luz sobre las sillas y comparar sus brillos relativos por parejas, llenando la matriz de juicios y obtener las relaciones entre las sillas y sus distancias desde la fuente de luz. Este experimento fue repetido dos veces con diferentes jueces cuyas matrices de juicios se dan en seguida. La primera de estas ya se dio anteriormente, al inicio del capítulo.

Brillo relativo visual (primer ensayo)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	5	6	7
C_2	1/5	1	4	6
C_3	1/6	1/4	1	4
C_4	1/7	1/6	1/4	1

Brillo relativo visual (segundo ensayo)

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	4	6	7
C_2	1/4	1	3	4
C_3	1/6	1/3	1	2
C_4	1/7	1/4	1/2	1

Los juicios de la primer matriz fueron de los hijos del autor con edades de 5 y 7 años, quienes proporcionaron sus juicios cualitativamente a la vez.

Los juicios de la segunda matriz fueron de la esposa del autor, quien no estuvo presente durante el proceso de opinión de los niños.

Eigenvector de los brillos relativos (primer ensayo)	*Eigenvector de los brillos relativos (segundo ensayo)*
0.61	0.62
0.24	0.22
0.10	0.10
0.05	0.06
λ_{max} = 4.39	λ_{max} = 4.1
C.I.= 0.13	C.I. = 0.03
C.R.= 0.14	C.R. = 0.03

Tabla 3-2, *Parámetros de diferentes observadores, quienes emitieron sus juicios independientemente.*

Distancia	*Distancia normalizada*	*Cuadrado de la distancia normalizada*	*Reciproco de la columna previa*	*Reciproco normalizado*	*redondeo*
9	0.123	0.015129	66.098	0.607	0.61
15	0.205	0.042025	23.79	0.2188	0.22
21	0.288	0.082944	12.05	0.1108	0.11
28	0.384	0.147456	6.78	0.0623	0.06

Tabla 3-3, *Ley del inverso del cuadrado de óptica*

En el primer y segundo ensayo los eigenvectores son comparables con la última columna de la ley del inverso del cuadrado en la tabla (3-3) calculados por la ley del inverso del cuadrado de óptica. Es importante y muy interesante observar los juicios que han sido capturados aquí por la ley natural. Esto parece indicar, que es posible hacer lo mismo en otras áreas del pensamiento o percepción, como se verá más tarde.

Observe las sensibilidades de los resultado como los objetos muy cercanos a la fuente absorben el mayor valor de los índices relativos y un pequeño error en la distancia desde la fuente conduce a un gran error en los valores.

Lo que es notable de éste experimento sensorial son las observaciones o hipótesis de la variación de la intensidad de la iluminación con el inverso del cuadrado de la distancia.

Un diseño más cuidadoso del experimento mejoraría los resultados obtenidos de los observadores visuales. El RMS de (0.62, 0.22, 0.10, 0.06) y (0.61, 0.22, 0.11, 0.06) es $\{1/4[(0.01)^2 +0+(0.01)^2 +0]\}^{1/2}$ $=2.23\times10^{-3}$. El MAD es como sigue; La diferencia entre los dos vectores están dadas por (0.01, 0, -0.01, 0). La mediana de estos números es (0+0)/2=0. La desviación alrededor de la mediana es (0.01,0,-0.01,0). Su valor absoluto se toma y la mediana del resultado es: (0.01+0)/2 = $0.005=5\times10^{-3}$. El significado de ambos RMS y MAD puede ser determinado dividiendo sus valores por el valor promedio de las componentes de los vectores los cuales son simplemente $1/n$, donde n es el número de componentes. Dos vectores son casi iguales (equivalentes) si alguno de los dos o ambos radios, son menores o iguales a 0.1.

PRIORIDADES COMO EIGENVECTOR
(RELACIÓN PARA LA CONSISTENCIA)

Considere los elementos C_1, C_2, ... , C_n de algún nivel en una jerarquía y que deseamos encontrar la influencia de los pesos W_1, W_2, ... , W_n sobre algún elemento en el siguiente nivel. Nuestra herramienta básica es una matriz de números representando los juicios como resultado de la comparación de parejas. Mostraremos porque el eigenvector con el mayor de los eigenvalores es seleccionado para proveer las prioridades.

Denotaremos por a_{ij} el número indicando la intensidad de C_i cuando se compare con C_j. La matriz de éstos números a_{ij} es denotada por A o correctamente por:

$$A = a_{ij}$$

Como se vio anteriormente, $a_{ji} = 1/a_{ij}$, es la matriz reciproca de A. Sí nuestros juicios son perfectos en toda la comparación, entonces $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ para toda i, j, k y llamaremos a la matriz A consistente.

Un caso obvio de una matriz consistente es el caso particular en la cual las comparaciones son basadas en mediciones exactas, esto es, los pesos W_1, W_2, ... , W_n ya son conocidos. Entonces:

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \qquad i, j = 1,\ldots,n$$

y

$$a_{ij}\,a_{jk} = \frac{w_i}{w_j}\frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}$$

y por supuesto,

$$a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{\frac{w_i}{w_j}} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Consideremos más ampliamente el caso de este paradigma. Sea la ecuación matricial $A^{\bullet}x = y$ donde $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en notación abreviada para el conjunto de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = y_i, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Ahora, de la ecuación (3-1) obtenemos

$$a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = 1 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

y consecuentemente

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j\,\frac{1}{w_i} = n \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j = n\,w_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

El cual es equivalente a

$$Aw = n\,w \qquad (3\text{-}3)$$

En teoría matricial, esta fórmula expresa el hecho de que w es un eigenvector de A con eigenvalor n. Entonces escribiendo esta ecuación completamente queda como sigue

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & . & . & . & A_n \\
\hline
A_1 & w_1/w_1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 & . & . & . & w_1/w_n \\
A_2 & w_2/w_1 & W_2/w_2 & w_2/w_3 & . & . & . & w_2/w_n \\
A_3 & w_3/w_1 & W_3/w_2 & w_3/w_3 & . & . & . & w_3/w_n \\
. & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . \\
A_n & w_n/w_1 & w_n/w_2 & w_n/w_3 & . & . & . & w_n/w_n
\end{array}
\left|\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{array}\right| = n \left|\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{array}\right|
$$

Regresamos al caso práctico, en el cual a_{ij} no son basadas sobre mediciones exactas, sino sobre juicios subjetivos. Entonces, los a_{ij} se desvían de los radios ideales w_i/w_j, y por tanto la ecuación (3-3) no es autoconsistente. Dos hechos de la teoría de matrices vienen a nuestro rescate.

El **primero** es; si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son números que satisfacen la ecuación $Ax = \lambda x$, i.e, son los eigenvalores de A, y si $a_{ii} = 1$ para todo i, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

Por tanto, si (3-3) contiene a todos los eigenvalores iguales a cero, excepto alguno, el cual es "n". Claramente entonces, en el caso consistente, n es el mayor eigenvalor de A.

El **segundo**, hecho que nos ayudará, es que si cambian las entradas a_{ij} de una matriz positiva reciproca A por cantidades pequeñas, entonces los eigenvalores cambian en pequeñas cantidades. Combinando éstos resultados, se encuentra que si la diagonal principal de la matriz A consiste de unos ($a_{ii} = 1$), y si A es consistente, entonces las pequeñas variaciones de a_{ij} contienen al mayor eigenvalor $\lambda_{máx}$ cercano hasta n, y los eigenvalores permanecen cercanos a cero.

Por tanto, el problema es: Si A es la matriz de valores, resultantes de la comparación por parejas de los juicios, entonces para encontrar el vector de prioridades, deberemos encontrar primeramente el vector w el cuál satisface

$$Aw = \lambda_{max} w.$$

Puesto que sería deseable tener una solución normalizada, cambiáremos ligeramente a w por $\alpha = \Sigma w_i$ y reemplazando w por $(1/\alpha)w$. Esto asegura la unicidad y también $\Sigma w_i = 1$.

Observando que los pequeños cambios en a_{ij} implican pequeños cambios en $\lambda_{máx}$, la desviación de los n últimos, es una medida de consistencia. Esto nos permite evaluar la exactitud (fidelidad) de la escala derivada de una escala de radios fundamentales los cuales deseamos estimar. Entonces, tomamos

$$\frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

El *índice de consistencia*, como nuestro indicador de "**la exactitud para la consistencia** ". En general, si este número es menor que 0.1, podemos estar satisfechos con nuestros resultados de los juicios.

Es de utilidad repetir que los reportes de los juicios pueden no solamente violar la relación de **consistencia** si no que también pudieran ser ***no transitivos***; i.e., si la importancia relativa de C_1 es más grande que C_2 y la importancia relativa de C_2 es más grande que la de C_3, entonces la relación de importancia de C_1 necesariamente no es más grande que la de C_3, como comúnmente ocurre en los juicios humanos. Un interesante ejemplo es proporcionado por un torneo con relación a la **inconsistencia** o la falta de **transitividad** de las preferencias. Un equipo C_1 puede perder contra el equipo C_2 el cual ha perdido contra un tercero C_3; sin embargo C_1 ganó frente al equipo C_3. Entonces, el comportamiento de equipos es ***inconsistente***. (Un hecho que ha sido aceptado en la formulación, y nada puede hacerse al respecto). Por supuesto, nuestro modelo requiere **transitividad** interna; pero en el procedimiento del reporte puede rebatir las ideas.

En mayo (1954) fueron estudiadas las ideas de que la **intransitividad** podría ser un fenómeno natural y no una consecuencia del error o aberración de los juicios humanos concluyendo que esta no era una razón para evitar considerar a la intransitividad como un fenómeno natural.

En un experimento, 62 estudiantes de un colegio se les pidió que eligieran de tres hipotéticos compañeros para casarse x, y y z. En grado de inteligencia tenían el siguiente orden xyz, en aspecto yzx, y en riqueza zxy. La estructura del experimento no fue explicada. Los sujetos fueron interrogados en diferntes ocasiones con cartas seleccionadas aleatoriamente por parejas con etiquetas. En cada ocasión x fue descrita como muy inteligente, apariencia sencilla y acomodada; y como inteligente de muy buena apariencia y pobre; z como imparcialmente inteligente, buena apariencia y rico. Todos los prospectos fueron descritos como aceptables en cada ocasión, ninguno resulto ser pobre, sencillo o estúpido como sería automáticamente eliminado.

Sobre la definición del grupo de preferencias la mayoría voto en el modelo circular indicado de la siguiente manera: x le ganó a y por 39 a 23; y le ganó a z por 57 a 5; y z le ganó a x por 33 a 29.

La selección fue xyz: 21; $xyzx$: 17; yzx:12; yxz:7; zyx: 4; xzy: 1; zxy: 0; $xzyx$: 0.

El modelo **intransitivo** es fácilmente explicado como el resultado de seleccionar las alternativas en dos de tres criterios. Las ordenaciones xyz y yzx al parecer resultaron de darle mayor importancia a los pesos para la inteligencia y la apariencia, respectivamente. Los cuatros quienes escogieron inversamente con respecto a la inteligencia (zyx) fueron hombres y podría indicar la extensión (alcance) del miedo del macho por la inteligencia de la mujer. Los siete quienes seleccionaron inversamente con respecto a la riqueza (yxz) no debieron considerar que tenían desdén a la prostitución y libertinaje por el dinero. Ellos podrían haber tenido mayor preferencia de y sobre x debido a una amplia disparidad en apariencia, de x sobre z debido a la amplia disparidad en inteligencia y y sobre z debido a una combinación de apariencia e inteligencia. Cuando se requirió de un rango completo de las tres alternativas se dispararon en el modelo de **intransitividad**, escogiendo la mayoría (9) yzx y (4) yxz. Aquellos con orden transitivo para una selección binaria la mayor parte formó la ordenación obvia.

Tales experimentos no prueban que las selecciones humanas son **intransitivas** pero pueden sugerir alternativas de diseños de experimentos los cuales muestran ***circularidad*** o simplemente ***transitividad***. Experimentos en los cuales las componentes se encuentran en estrecho conflicto de direcciones, puede esperarse que den lugar a ***circularidades***. Entonces, la pregunta no es ¿son las preferencias transitivas? Si no más bien ¿bajo que condiciones falla la transitividad? Algunas personas evitan este resultado para así poder asegurar la ***transitividad*** como parte de la definición de conducta racional.

El teorema de Imposibilidad de Kenneth Arrow's da una respuesta negativa a la posibilidad de encontrar el diseño de una función de bienestar social que pudiera servir como guía para las autoridades planificadoras. Esta, también debería satisfacer las selecciones individuales y sociales. Es difícil imaginar, del mismo modo a una función de utilidad individual única y que también pudiera satisfacer varias de sus selecciones bajo todas las circunstancias que uno prefiera(desee) hacer frente en cualquier momento dado. En el trabajo de Arrow's la ***transitividad*** de las preferencias es tomada en una base determinista(si, no) para la consistencia y ésta violación es un considerable desastre lógico.

La gente hace continuamente intercambios y trueques violando la ***transitividad*** porque se encuentran sobre un completo compromiso que es aceptable debido a que ellos mismos toman en consideración la importancia relativa de sus propios criterios. Claramente éstos en algunas ocasiones, cuando no pueden hacer una clara decisión individual es debido a que los intercambios entre varias actividades resultan ser las mismas. Esta no es una razón para no actuar y mucho menos desear tanto como actuar si los criterios son exactamente identificados y evaluados. Sin embargo el autor no está particularmente convencido sobre la necesidad absoluta de una función de bienestar social, y él creé que las ideas básicas usadas para probar el teorema de imposibilidad social deben ser reexaminadas, eso no puede ser un teorema de imposibilidad social de una función de utilidad social algo mucho más que eso puede ser una función de utilidad individual. Los individuos hacen ellos mismos su felicidad o infelicidad por la cantidad de bienestar que ellos consigan de sus propias prioridades y compromisos establecidos. Él puede (el autor) y frecuentemente tiene conflictos internos con cualquier cosa que escoge y siempre trata de estar seguro, si es perfectamente racional al expresar intensamente sus propias preferencias.

ESCALA DE COMPARACIÓN

El desarrollo de la sección anterior es independiente del empleo de la escala de comparación como de la escala de la longitud del radio. (Esto es considerado con más detalle en la parte II para las diferentes escalas) La pregunta que trataremos de justificar es; ¿Por qué se escogieron los valores del 1-9? En esta sección intentaremos satisfacer al lector acerca de esta escala que es considerada preferible a todas las otras.

Comencemos por describir nuestra escala en más detalle, como en la tabla 3-1.

Los investigadores Ernest Heinrich Weber (1795-1878), Gustav Theodor Fechner (1801-87), y Stanley Smith Stevens (1906-73) comenzaron considerando el asunto de estimulo y respuesta.

En 1846 Weber formula su ley "**recordando**"(regarding) un estimulo de magnitud medible s (Weber encontró, por ejemplo, que las personas, mientras sostenían en sus manos diferentes pesos, podían distinguir pesos entre 20gr. y 21grs, pero no sí el segundo peso era 20.5grs. Por otra parte, mientras ellos no podían distinguir entre 40grs y 41grs. ellos lo podían hacer entre los pesos anteriores y 42grs.. y así para niveles superiores)

Necesitaremos incrementar a s por una cantidad mínima Δs para alcanzar el punto donde nuestros sentidos pueden discriminar(distinguir) exactamente entre s y $(s+\Delta s)$. Δs es llamado la diferencia notable exacta(just noticeable difference "jnd"). El radio $r = \Delta s/s$ no depende de s. Su ley de estados de cambios en sensación es notable cuando los estímulos son incrementados por un porcentaje constante de los mismos estímulos. Esta ley es válida en los rangos donde Δs es pequeña cuando se compara con s, y de aquí que en la práctica esto falle cuando s es una de dos, muy pequeña o bien muy grande.

Agregando o descontando estímulos en grupos(clusters) o niveles jerárquicos es un camino efectivo para extender el uso de esta ley.

En 1860 Fechner consideró una secuencia del incremento en los *estímulos* notablemente exactos. Él los denotó; los primeros por s_0. Los siguientes estímulos notables exactos(Ver: Batschelet, 1973) por

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0(1+r)$$

habiendo usado la ley de Weber's.

Similarmente

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1(1+r) = s_0(1+r)^2 = s_0\alpha^2$$

En general

$$s_n = s_{n-1}\alpha = s_0\alpha^n \quad , \qquad\qquad n = 0,1,2,...$$

Entonces el estimulo de diferencias notables sigue secuencialmente una progresión geométrica. Fechner sostiene que las *sensaciones* correspondientes deben seguir cada una de las otras una secuencia aritmética ocurriendo en puntos discretos en los cuales suceden diferencias notables exactas. Pero las últimas son obtenidas cuando se resuelve para *n*. Se tiene entonces

$$n = \frac{(\log s_n - \log s_0)}{\log \alpha}$$

Y la *sensación* es una función lineal logarítmica de los estímulos. Entonces si *M* denota la *sensación* y *s* los *estímulos*, la ley Psicofisica de Weber-Fechner es dada por

$$M = a \log s + b\,, \qquad\qquad a \neq 0$$

Suponga que consigue estímulos por hacer comparaciones de pares de actividades relativamente comparables. Donde estamos interesados en responder qué valores numéricos están en forma de radio. Entonces $b = 0$, por lo que podemos hacer $\log s_0 = 0$ ó $s = 1$ el cual es posible por calibración a una unidad de estímulos. Porque esto es el resultado de comparar una actividad consigo misma.

La siguiente respuesta notable es para el estimulo

$$s_1 = s_0\alpha = \alpha$$

Esto conduce a la respuesta $\log \alpha / \log \alpha = 1$. El siguiente estimulo es:

$$s_2 = s_0\alpha^2$$

El cual conduce a la respuesta de 2. De esta manera se obtiene la secuencia 1,2,3,4,.... Para propósitos de consistencia colocaremos las actividades en racimos(grupos) cuya pareja de comparación de estímulos dan lugar a respuestas cuyos valores numéricos son del mismo orden de magnitud. En la práctica, las diferencias cualitativas en respuestas a estímulos son pocas. Estrictamente, estas son cinco diferentes como se enlistaron anteriormente con algunas adicionales que son comprometidas entre las respuestas adyacentes. La noción de compromiso es particularmente observable en los juicios mentales como un proceso opuesto a los sentidos. Esto trae, hasta completar un total de nueve lo cual es compatible con el orden de magnitud que supuestamente se había hecho al principio.

OBSERVACIÓN: La ley de poder de Stevens extiende las ideas de ***estímulos*** y ***respuestas*** a través de un amplio rango(como si los cortes son a través de niveles diferentes jerárquicos) estimando respuestas como un potencial de estímulos obtenidos de la adaptación de curvas provenientes de una amplia distribución de datos. Podría parecer que esta ley de poder es una aproximación a un resultado obtenido por descomposición jerárquica.

EL LIMITE SUPERIOR 9 ES RAZONABLE

Son varias las razones para colocar un límite superior sobre la escala definida para poner en práctica el método.

1.- Las distinciones cualitativas son significativas en la práctica y tienen un elemento de precisión cuando los artículos comparados son del mismo orden de magnitud o son encerrados a la vez con relación a la propiedad usada para hacer la comparación.

2.- Observe que nuestra habilidad para hacer distinciones cualitativas está bien representada por cinco atributos: igual(equal), débil(weak), fuerte(strong), muy fuerte(very strong) y absoluto(absolute). Podemos hacer compromisos entre los atributos adyacentes cuando se requiera y sea muy necesaria una gran precisión. La totalidad de nueve valores puede ser requerida y esta debe ser consecutiva, por lo que la escala resultante es válida en la práctica.

3.- Para el refuerzo de (2), un método práctico frecuentemente empleado para evaluar artículos es a través de la clasificación de estímulos en la tricotomía de regiones: Rechazo, indiferencia y aceptable. Para afinar la clasificación, cada una de éstas es subdividida en una tricotomía de bajo, medio y alto.

Los investigadores del colegio Yoram Wind indicaron en estudios de mercado conducido por su colega Paul Green muestra que uno no necesita más que cerca de 7 puntos de la escala para distinguir entre los estímulos. Por lo tanto nosotros no necesitaremos más de 9.

4.- El límite psicológico de 7 ± 2 artículos en una comparación simultánea sugiere que si se toma 7+2 artículos satisfacen la descripción de la condición (1), y si ellas son todas significativamente diferentes de cada una de las otras, podemos ocupar 9 puntos para distinguir esas diferencias(ver: G.A. Miller, 1956.)

En los siguientes capítulos se hará básicamente la aplicación sobre la *matriz de prioridades* con **dos métodos** el primero es el de Saaty con la ayuda del procesador EXEL para hacer los cálculos de la aproximación al vector de prioridades o autovector y sus autovalores. Y el segundo será aplicando el programa de Matemáticas: MATHSOFT APPS: MATHCAD 2000 PROFESIONAL para estimar los autovectores de la misma matriz. Finalmente se hará una comparación de ambos resultados y concluir sobre las distintas aproximaciones al autovalor y autovector así como a sus interpretaciones en términos de las estructuras jerárquicas de las prioridades.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN

EL MÉTODO DE JERARQUÍAS ANALÍTICAS POR PRIORIDADES

El método de jerarquías analíticas nos proporciona una manera de hacer decisiones racionales y particularmente donde un número de objetivos tiene que satisfacerse. También es particularmente útil en situaciones, donde se quieran hacer decisiones para conseguir resultados finales deseados y tener la certeza de estar haciendo lo correcto.

Esencialmente han sido tres los caminos lógicos para explicar los fenómenos del mundo real. El primero y el más reconocido es el de causa y efecto, éste es conocido como el método reducciónista y es en el que la mayoría de los investigadores científicos se han basado. El siguiente es el probabilistico[24] y emplea la comparación de los procesos estocásticos para explicar las ocurrencias por promedios y desviaciones. El tercero y el más reciente es el de sistemas el cual considera las interacciones internas del sistema y las del medio ambiente. Este método de comprender la naturaleza es sintético y mira sobre todos los propósitos que gobiernan el diseño y funcionamiento del sistema para explicar su comportamiento. Los sistemas son jerárquicos de manera natural y van de lo particular a lo general. No obstante la síntesis no puede ser separada del análisis y causalidad, siendo diferente en su aspecto general. Veamos ahora como trabaja el método de jerarquías por prioridades.

DESARROLLO EXPERIMENTAL

Como ya se mencionó antes, la técnica de jerarquías por prioridades puede aplicarse por sesiones o por cuestionarios. En este trabajo se decidió aplicar la técnica por medio de un cuestionario. Uno de éstos se anexó en el apéndice *A* para que el lector lo pueda consultar oportunamente.

Para llevar a cabo esta práctica se contó con el apoyo profesional del personal académico del Departamento de Investigación del Operaciones de la División de Estudio de Posgrado de la facultad de Ingeniería (DEPFI), sin el cual no hubiera sido posible la buena realización de dicho trabajo.

El procedimiento se ilustra a continuación: De la aplicación del cuestionario se obtuvo la siguiente información del cuadro 4.1 que aparece en la siguiente página.

CUESTIONARIO PARA ORDENAR POR PRIORIDADES LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Columna I	absoluto	muy fuerte	fuerte	débil	igual	débil	fuerte	muy fuerte	Absoluto	columna II
P_1	✓									P_2
P_1	✓									P_3
P_1		✓								P_4
P_1	✓									P_5
P_1		✓								P_6
P_1		✓								P_7
P_1		✓								P_8
P_1		✓								P_9
P_2					✓					P_3
P_2	✓									P_4
P_2	✓									P_5
P_2	✓									P_6
P_2	✓									P_7
P_2			✓							P_8
P_2	✓									P_9
P_3		✓								P_4
P_3	✓									P_5
P_3	✓									P_6
P_3	✓									P_7
P_3	✓									P_8
P_3	✓									P_9
P_4		✓								P_5
P_4			✓							P_6
P_4			✓							P_7
P_4					✓					P_8
P_4			✓							P_9
P_5				✓						P_6
P_5				✓						P_7
P_5				✓						P_8
P_5				✓						P_9
P_6					✓					P_7
P_6					✓					P_8
P_6					✓					P_9
P_7				✓						P_8
P_7				✓						P_9
P_8			✓							P_9

Cuadro 4-1. *En éste cuadro se muestran los resultados obtenidos después de haber comparado los nueve programas de desarrollo de la Facultad de Ingeniería a través de los juicios personales de acuerdo con las prioridades señaladas con una paloma y que en el cuestionario aplicado corresponde a la tabla N°1.*

La manera en que se ordenaron los programas para el cuestionario fue aleatoria y se muestra en seguida:

P_1 .- Programa para la *adecuación al nuevo sistema* de posgrado de la UNAM
P_2 .- Programa de *docencia en maestrías y doctorados* en ingeniería
P_3 .- Programa de *investigación*
P_4 .- Programa de *promoción* para la consecución de proyectos
P_5 .- Programa para la *elaboración* de artículos, notas y libros
P_6 .- Programa de *creación* de empresas científicas y tecnológicas
P_7 .- Programa de *eventos académicos*
P_8 .- Programa de *intercambios y relaciones* nacionales e internacionales
P_9 .- Programa de *docencia* en especializaciones en ingeniería

Con ésta información del cuadro que muestra un grupo de juicios cuantificados por parejas de los programas P_i ,P_j los podemos representar por una matriz de *n* por *n* en el caso general

$$A = a_{ij} \quad , \qquad i, j = 1,2,3,\ldots,n$$

Es decir que en nuestro caso tendremos una matriz de 9 por 9 dado que son 9 los programas y los representaremos como $a_{9\times9} = P_{9\times9}$, para crear esta matriz de pesos relativos se empleó la escala que se muestra en seguida

ESCALA DE CALIFICACIÓN Y SU DESCRIPCIÓN

Intensidad de importancia	Definiciones	Explicación
1	Igual importancia	Dos actividades contribuyen igualmente al mismo objetivo
3	Débil importancia de uno sobre otro	La experiencia y el juez están ligeramente a favor de una actividad sobre la otra.
5	Esencial o fuerte importancia	La experiencia y el juez están fuertemente a favor de una actividad sobre la otra
7	Muy fuerte o demostradamente importante	Una actividad es fuertemente a favor de una actividad sobre la otra.
9	Absoluta importancia	Las evidencias favorecen una actividad sobre otra que es posiblemente de un orden superior de afirmación.
2,4,6,8	Valores intermedios entre dos juicios adyacentes	Cuando el compromiso es necesario.

Tabla 4-1: *Escala de valores y su significado para asignar por el desisor de acuerdo con sus juicios y prioridades.*

El primer renglón de la matriz, se forma viendo el cuadro 4.1 y donde se preguntó ¿Qué tan importante es el programa P_1 en relación al programa P_2? respondieron: absoluto, entonces nosotros nos vamos a la escala de calificaciones y vemos que le corresponde el valor 9 y este valor lo colocamos en el lugar P_{12} de la matriz. En la siguiente entrada de la matriz de los programas P_1 y P_3 respondieron absoluto y en la matriz se coloca P_{13} =9, en la siguiente entrada respondieron "*muy fuerte*" y se pone entonces P_{14} =7, en P_{15} respondieron de nueva cuenta "absoluto" y se queda como P_{15}=9, el P_{16} fue "*muy fuerte*" y quedo P_{16} =7 y para los restantes es lo mismo, es decir P_{17} =7, P_{18} =7, P_{19} =7.

La primer entrada de la matriz P_{11}, es uno puesto que se está comparando el programa uno consigo mismo. Con el programa P_{22} también tiene el valor de uno, el $P_{33} = 1, \ldots, P_{99} = 1$. Para la diagonal. Dicho de otro modo la diagonal principal de la matriz debe constar de unos.

En relación a las componentes del primer renglón, se colocaron sus inversos en la primer columna o sea los valores $P_{21}=1/9$, $P_{31}=1/9$, $P_{41}=1/7$, $P_{51}=1/9$, $P_{61}=1/7$, $P_{71}=1/7$, $P_{81}=1/7$ y $P_{91}=1/7$.

El mismo procedimiento se sigue para todos los renglones y columnas hasta terminar con el cuadro(4.1). Y entonces la matriz completa queda de la forma:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
P_1	1	9	9	7	9	7	7	7	7
P_2	1/9	1	1	9	9	9	9	5	9
P_3	1/9	1	1	7	9	9	9	9	9
P_4	1/7	1/9	1/7	1	7	5	5	1	5
P_5	1/9	1/9	1/9	1/7	1	3	3	3	3
P_6	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	1	1
P_7	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	3	3
P_8	1/7	1/5	1/9	1	1/3	1	1/3	1	5
P_9	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1/3	1/5	1

CALCULO DE LOS PESOS Y LAS PRIORIDADES

Como ya se mencionó anteriormente, existen varios métodos para hacer los cálculos del vector de prioridades, dicho de otro modo, el eigenvector principal normalizado de la matriz *A* de la comparación de parejas de programas es quien dará los pesos de los elementos comparados. Es muy fácil hacer los cálculos por medio de una computadora usando cualquier hoja de calculo como lotus, exel, etc. e incluso hasta es posible hacer un programa que de los resultados.

Aquí emplearemos el tercer método (el bueno) que ya fue explicado en su momento. Entonces normalizando la primer columna (expresada como renglón por razones obvias de espacio) haciendo la suma de todos los elementos resulta 2.047 y luego dividiendo cada uno de los elementos de la columna por la cantidad obtenida de la suma se obtiene: (0.488, 0.054, 0.054, 0.069, 0.054, 0.069, 0.069, 0.069, 0.069) haciendo lo mismo para la segunda columna resulta: (0.765, 0.085, 0.085, 0.009, 0.009, 0.009, 0.009, 0.017, 0.009) repitiendo este proceso para las siete restantes columnas y reagrupando en un sólo cuadro queda de la siguiente forma:

CALCULO PARA LA APROXIMACION DEL EIGENVECTOR *W*.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	
P1	1	9	9	7	9	7	7	7	7	
P2	1/9	1	1	9	9	9	9	5	9	
P3	1/9	1	1	7	9	9	9	9	9	
P4	1/7	1/9	1/7	1	7	5	5	1	5	
P5	1/9	1/9	1/9	1/7	1	3	3	3	3	
P6	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	1	1	
P7	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	3	3	
P8	1/7	1/5	1/9	1	1/3	1	1/3	1	5	
P9	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1/3	1/5	1	
SUM (P i)	2.047619048	11.75555556	11.6984127	25.74285714	36.33333333	37	35.66666667	30.2	43	
										EIGENVECTOR
	0.488372093	0.765595463	0.769335142	0.271920089	0.247706422	0.189189189	0.196261682	0.231788079	0.162790698	0.369217651
	0.054263566	0.085066163	0.085481682	0.349611543	0.247706422	0.243243243	0.252336449	0.165562914	0.209302326	0.188063812
	0.054263566	0.085066163	0.085481682	0.271920089	0.247706422	0.243243243	0.252336449	0.298013245	0.209302326	0.194148132
	0.069767442	0.009451796	0.012211669	0.038845727	0.19266055	0.135135135	0.140186916	0.033112583	0.11627907	0.083072321
	0.054263566	0.009451796	0.009497965	0.00554939	0.027522936	0.081081081	0.08411215	0.099337748	0.069767442	0.048953786
	0.069767442	0.009451796	0.009497965	0.007769145	0.009174312	0.027027027	0.028037383	0.033112583	0.023255814	0.024121496
	0.069767442	0.009451796	0.009497965	0.007769145	0.009174312	0.027027027	0.028037383	0.099337748	0.069767442	0.036647607
	0.069767442	0.017013233	0.009497965	0.038845727	0.009174312	0.027027027	0.009345794	0.033112583	0.11627907	0.036673684
	0.069767442	0.009451796	0.009497965	0.007769145	0.009174312	0.027027027	0.009345794	0.006622517	0.023255814	0.019101312

Tomando el promedio del primer renglón del cuadro anterior resulta 0.3692, para el segundo renglón 0.18806 y así hasta el noveno renglón, se obtiene el eigenvector: v = (0.369, 0.188, 0.194, 0.083, 0.049, 0.024, 0.036, 0.037, 0.019) el cual representa la jerarquía de prioridades de los programas.

Ahora solamente nos resta calcular el índice de consistencia y el radio de consistencia. Para ello multiplicamos a la matriz A por la derecha con el eigenvector v, y se obtiene un nuevo vector x.

$$A\vec{v} = \vec{x}.$$

De la forma: x = (5.647, 2.514, 2.494, 0.931, 0.494, 0.245, 0.356, 0.379, 0.191). Ahora para obtener, el índice de consistencia; C.I. = $(\lambda_{max} - n)/(n-1)$ se requiere calcular $\lambda_{max} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\lambda_i$, donde las λ_i son de la forma:

$$\lambda_1 = \frac{x_1}{v_1},\quad \lambda_2 = \frac{x_2}{v_2},\quad \lambda_3 = \frac{x_3}{v_3}\quad ,\ldots,\quad \lambda_9 = \frac{x_9}{v_9}\quad .$$

Con $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9)$ y $v = (v_1, v_1, v_1, \ldots, v_9)$ que ya se conocen. Entonces

$\lambda_1 = 5.647 / 0.3692 = 15.29$
$\lambda_2 = 2.514 / 0.1881 = 13.37$
$\lambda_3 = 2.494 / 0.1941 = 12.85$
$\lambda_4 = 0.931 / 0.0831 = 11.59$
$\lambda_5 = 0.494 / 0.0490 = 10.09$
$\lambda_6 = 0.245 / 0.0241 = 10.14$
$\lambda_7 = 0.356 / 0.0366 = 9.72$
$\lambda_8 = 0.379 / 0.03667 = 10.36$
$\lambda_9 = 0.191 / 0.01910 = 9.99$

Y lambda máxima resulta $\lambda_{máx} = 11.48$, sustituyendo este valor en la expresión para el índice de consistencia se obtiene C.I.=(11.48 -9)/ 8 =0.3111 con $n = 9$.

Los cálculos en detalle para $\lambda_{máx}$ se realizaron utilizando el procesador EXEL y se muestran en la tabla que aparece en la siguiente página.

CALCULO DEL PARAMETRO LAMBDA MAXIMA ($\lambda_{máx.}$)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	EIGENVECT
P1	1	9	9	7	9	7	7	7	7	0.3692176
P2	1/9	1	1	9	9	9	9	5	9	0.1880638
P3	1/9	1	1	7	9	9	9	9	9	0.1941481
P4	1/7	1/9	1/7	1	7	5	5	1	5	0.0830723
P5	1/9	1/9	1/9	1/7	1	3	3	3	3	0.0489537
P6	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	1	1	0.0241214
P7	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1	3	3	0.0366478
P8	1/7	1/5	1/9	1	1/3	1	1/3	1	5	0.0366736
P9	1/7	1/9	1/9	1/5	1/3	1	1/3	1/5	1	0.0191013
SUM (P*i*)	2.047619048	11.75555556	11.6984127	25.74285714	36.33333333	37	35.66666667	30.2	43	
	0.3692177	0.041024	0.041024	0.052745	0.041024	0.052745	0.052745	0.052745	0.052745	
	1.6925743	0.188064	0.188064	0.020896	0.020896	0.020896	0.020896	0.037613	0.020896	
	1.7473332	0.194148	0.194148	0.027735	0.021572	0.021572	0.021572	0.021572	0.021572	
	0.5815062	0.747651	0.581506	0.083072	0.011867	0.016614	0.016614	0.083072	0.016614	
	0.4405841	0.440584	0.440584	0.342677	0.048954	0.016318	0.016318	0.016318	0.016318	
	0.1688505	0.217093	0.217093	0.120607	0.072364	0.024121	0.024121	0.024121	0.024121	
	0.2565346	0.329830	0.329830	0.183239	0.109943	0.036648	0.036648	0.012216	0.012216	
	0.2567158	0.183368	0.330063	0.036674	0.110021	0.036674	0.110021	0.036674	0.007335	
	0.1337092	0.171912	0.171912	0.095507	0.057304	0.019101	0.057304	0.095507	0.019101	
SUMA	5.647025553	2.5136750	2.49422514	0.96315239	0.49394633	0.24469006	0.35624006	0.37983808	0.19091925	LAMNDA MAXIMA
	15.29457094	13.3660752	12.8470211	11.5941432	10.0900538	10.1440666	9.72063783	10.3572384	9.99508526	11.489876

Para calcular el radio de consistencia se requiere del índice aleatorio (ramdon index). Para una matriz del tamaño 9×9 se busca en la tabla (3-0) y se encuentra que la consistencia aleatoria es 1.45, así que;

Radio de Consistencia = C.R.=C.I./R.I.=0.311/1.45 = 0.2145.

En resumen, los resultados obtenidos son el eigenvector; v = (0.3692, 0.1881, 0.1941, 0.0831, 0.0490, 0.0241, 0.0366, 0.0367, 0.0191) que traducido a los los programas del Plan de Desarrollo de la Facultad de Ingeniería, 1995-2000 queda como:

$v = (P_1, P_3, P_2, P_4, P_5, P_8, P_7, P_6, P_9)$
$\lambda_{máx} = 11.48$,
Índice de Consistencia = 0.311
Radio de Consistencia = 0.2145
Índice Aleatorio =1.45

Hasta aquí hemos concluido con la aplicación del método Analytic hierarchy Process de Saaty Thomas, Y como segundo método se aplicó el programa MATHSOFT APPS: MATHCAD 2000 PROFESIONAL para estimar los autovalores con sus respectivos autovectores.

ESTIMACIÓN DE LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES CON MATHCAD 2000

No es una gran ciencia aplicar el programa mathcad a una matriz de 9 por 9, porque estos programas tienen un gran potencial para poder hacer las aproximaciones en cuestión de segundos. Lo que realmente si es muy importante y muy difícil es el poder hacer una correcta interpretación de los resultados arrojados por los cálculos como se verá más adelante.

Con la matriz *A* que aparece en seguida:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 7 & 9 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \frac{1}{9} & 1 & 1 & 9 & 9 & 9 & 9 & 5 & 9 \\ \frac{1}{9} & 1 & 1 & 7 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 & 7 & 5 & 5 & 1 & 5 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Resultaron los siguientes *eigenvalores* o *autovalores* de *A*:

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 11.405 \\ 0.527 + 4.322i \\ 0.527 - 4.322i \\ -0.608 + 2.643i \\ -0.608 - 2.643i \\ -0.894 + 0.629i \\ -0.894 - 0.629i \\ -0.386 \\ -0.07 \end{pmatrix} \qquad c := \text{eigenvals}(A) \qquad c = \begin{pmatrix} 11.405 \\ 0.527 + 4.322i \\ 0.527 - 4.322i \\ -0.608 + 2.643i \\ -0.608 - 2.643i \\ -0.894 + 0.629i \\ -0.894 - 0.629i \\ -0.386 \\ -0.07 \end{pmatrix}$$

Y sus respectivos *eigenvectores* o *autovectores* resultaron:

$$
\mathrm{eigenvecs(A)} = \begin{pmatrix}
0.858 & 0.935 & 0.935 & 0.951 & 0.951 & 0.947 & 0.947 & 0.23 & -0.0 \\
0.344 & 0.056 + 0.249i & 0.056 - 0.249i & -0.134 + 0.138i & -0.134 - 0.138i & -0.22 + 0.134i & -0.22 - 0.134i & -0.654 & -0.7 \\
0.341 & 0.011 + 0.214i & 0.011 - 0.214i & 4.142 \times 10^{-3} + 0.192i & 4.142 \times 10^{-3} - 0.192i & -0.016 - 0.079i & -0.016 + 0.079i & 0.659 & 0.71 \\
0.129 & -0.068 + 0.073i & -0.068 - 0.073i & -0.028 - 0.098i & -0.028 + 0.098i & 0.074 - 0.048i & 0.074 + 0.048i & 0.044 & 9.64 \times \\
0.069 & -0.046 - 3.184i \times 10^{-3} & -0.046 + 3.184i \times 10^{-3} & 0.03 + 0.019i & 0.03 - 0.019i & 0.031 + 0.084i & 0.031 - 0.084i & -0.102 & -0.0 \\
0.037 & -2.519 \times 10^{-3} - 0.021i & -2.519 \times 10^{-3} + 0.021i & 6.248 \times 10^{-3} - 0.026i & 6.248 \times 10^{-3} + 0.026i & -0.062 - 0.019i & -0.062 + 0.019i & -0.116 & -0.01 \\
0.052 & -0.021 - 0.024i & -0.021 + 0.024i & 0.018 + 0.037i & 0.018 - 0.037i & 9.292 \times 10^{-3} - 0.074i & 9.292 \times 10^{-3} + 0.074i & 0.216 & 0.02 \\
0.056 & -2.93 \times 10^{-3} - 0.017i & -2.93 \times 10^{-3} + 0.017i & -0.071 + 0.034i & -0.071 - 0.034i & 0.025 + 0.056i & 0.025 - 0.056i & -0.105 & -0.0 \\
0.03 & 4.824 \times 10^{-3} - 0.024i & 4.824 \times 10^{-3} + 0.024i & -0.016 - 0.037i & -0.016 + 0.037i & -0.04 - 8.875i \times 10^{-3} & -0.04 + 8.875i \times 10^{-3} & 0.041 & 0.018
\end{pmatrix}
$$

Y es aquí donde surgen los verdaderos problemas debido a que como se puede observar se tiene una matriz de *9 por 9* con componentes complejas debido a que se tiene un polinomio de grado 9 y lógicamente arroja valores imaginarios o complejos. ¿Qué se puede establecer con relación a las componentes? O de otra manera ¿Qué se puede decir de las componentes complejas?, la verdad es que resulta muy difícil su interpretación y esto es un nuevo campo de investigación para quienes estén interesados en las investigaciones de las estructuras de las jerarquías. Hasta aquí dejaremos este problema abierto e intentemos darle una interpretación de acuerdo con el modelo matemático propuesto por Saaty para aproximarse a un vector de prioridades.

Como puede observarse, únicamente para el primer, octavo y noveno eigenvalor les corresponde un vector real, mientras que los restantes son imaginarios.

$$
\mathrm{eigenvec}(A, 11.405) = \begin{pmatrix} 0.858 \\ 0.344 \\ 0.341 \\ 0.129 \\ 0.069 \\ 0.037 \\ 0.052 \\ 0.056 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{eigenvec}(A, -0.386) = \begin{pmatrix} 0.23 \\ -0.654 \\ 0.659 \\ 0.044 \\ -0.102 \\ -0.116 \\ 0.216 \\ -0.105 \\ 0.041 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{eigenvec}(A, -0.07) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ -0.701 \\ 0.711 \\ 9.64 \times 10^{-3} \\ -0.021 \\ -0.019 \\ 0.028 \\ -0.02 \\ 0.018 \end{pmatrix}.
$$

Si consideramos sólo el primer eigenvalor con su eigenvector, observamos que este aparece casi ordenado como resultó con el método de Saaty. Así que nos quedaremos con la partes reales y diremos que corresponden a las prioridades del decisor. De este modo los resultados son coherentes y los programas quedarían de la siguiente forma: v=(0.858, 0.344 ,0.341, 0.129, 0.069, 0.037, 0.052, 0.056, 0.030) en términos de los programas del Plan de Desarrollo de la Facultad de Ingeniería quedarían de la siguiente manera: $v = (P_1 , P_2, P_3, P_4 , P_5 , P_8, P_7 , P_6 , P_9)$, e insistimos una vez más que concuerdan con la técnica de Saaty considerando el eigenvector con el mayor de los eigenvalores o autovalores.

Si comparamos ambos resultados se tiene:

Técnica Analytic Hierarchy Process	$v = (P_1, P_3, P_2, P_4, P_5, P_8, P_7, P_6, P_9)$
Programa Mathcad 2000	$v = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_8, P_7, P_6, P_9)$

En ésta tabla se muestran los resultados obtenidos por distintos métodos de aproximación para los eigenvectores asociados a las prioridades de un mismo decisor

Como se podrá observar son casi los mismos resultados por las preferencias de las prioridades para los programas de Desarrollo, excepto por P_2 y P_3 que están intercambiados, en todos los demás siguen el mismo orden jerárquico.

En el siguiente capítulo discutiremos dichos resultados y trataremos de llegar a una conclusión satisfactoria derivada de los distintos métodos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

La **técnica** de Jerarquías por prioridades es versátil en el sentido que puede aplicarse a través de sesiones o por cuestionarios, es generalmente consistente y proporciona como resultado valores numéricos después de haber operado con un proceso analítico de jerarquízación de prioridades.

Si bajo ciertas circunstancias se requiere el **anonimato** de cada miembro del equipo, existen ciertas técnicas que se ajustan muy bien porque son estructuradas para que cada uno responda anónimamente a través de un cuestionario previamente preparado para evitar influencias de las personas y por consiguiente pudieran sesgar la información. En las jerarquías además de cumplir con esta cualidad tiene la virtud de que los criterios y juicios pueden ser generalmente establecidos por un proceso de **grupo abierto** de discusión.

Algunos métodos se ajustan a una **serie de rounds**, solicitando la revisión de los resultados de los cuestionarios y los ajustes son requeridos nuevamente sobre la base anónima. En las jerarquías **la discusión es abierta y dinámica** mientras construyen las jerarquías proveyendo juicios por agregación mutua y revisando los distintos puntos de vista. Las personas presentan sus argumentos abiertamente.

Otras requieren únicamente cuestionarios, implicando la selección de variables involucradas por las personas que crearon el cuestionario. En las jerarquías se tiene a las estructuras jerárquicas como base para los decisores donde el grupo decide sobre las variables que podrían tener algún efecto sobre los juicios hechos. Inicialmente todas las variables sugeridas son aceptables. Posteriormente, durante el procesos algunas son descartadas debido a la baja prioridad asignada por el mismo grupo.

Hay técnicas que tienen como base a la estadística y un **análisis cuantitativo**, requiriendo respuestas numéricas las cuales serán analizadas a través de medidas de tendencia central y funciones de distribución, así como pruebas de hipótesis, sentando las bases para el próximo round. En las jerarquías el **análisis es cualitativo** debido a que los juicios involucran números absolutos del 1 al 9 reflejando cualitativamente los juicios de los decisores por comparación de prioridades pares y usa el rigor de la desviación como estimación de la escala de radio básico. Consistencia es un importante criterio como una condición necesaria para validar la escala de la realidad.

En todos los casos del proceso de análisis del problema por **el método** que sea mejora cualitativamente los juicios, pero **la técnica** de las jerarquías rompe desde el interior los juicios en sus componentes elementales y por lo tanto es apto para el estilo del conocimiento humano. Otro importante resultado es que el grupo determina la importancia del conjunto de variables, y por tanto tiene mejor confiabilidad en la relevancia de los juicios. Este proceso es muy útil para desagregar los juicios desmenuzándolos en una dinámica abierta. Es una **técnica** corta con un proceso simple y alta efectividad en los resultados.

Nuestra conclusión es que al usar el proceso Analítico de Jerarquías (Analytic Herarchy Process "AHP") es una herramienta poderosa para quienes deseen conocer sus propios resultados estratégicos como los de sus adversarios.

Ventajas y Desventajas de las Jerarquías:

* La representación de un sistema de jerarquías puede ser empleado para describir los cambios en las prioridades de los niveles superiores a los niveles bajos o viceversa.

** No obstante estos cambios dependen de los juicios *subjetivos* que proporciona el decisor, los que en muchos de los casos pudieran ser susceptibles de representar los **deseos** y no lo que **debiera** ser al momento de tomar la decisión correcta.

* Las jerarquías proporcionan en detalle la información sobre la estructura y función del sistema de prioridades, suministrando un panorama completo de los juicios de los decisores así como sus objetivos preferenciales con los niveles superiores e inferiores.

** Si bien es cierta la anterior afirmación se debe hacer siempre la discriminación de las jerarquías por prioridades, cuando se trate de analizar o estudiar un fenómeno Natural(como el caso de la ley del inverso del cuadrado de óptica) de un problema de decisiones humanas (Corporativo, Industrial, Financiero, etc.). Es correcto hacer esta observación puesto que se trata de fenómenos con distinta Naturaleza.

* Los sistemas naturales se congregan ordenándose por jerarquías, i.e. a través de la construcción de módulos y finalmente se hace el ensamble de los módulos, desplegándose mucho más eficientemente que si se tratara como un todo.

** Aunque es una manera de la ocurrencia natural de las cosas, sigue siendo ***subjetiva*** la percepción del decisor quién podría poseer condiciones no aptas para percibir tales cambios y por tanto reflejar juicios verdaderamente inconsistentes con la realidad.

* Las jerarquías de prioridades, son estables y flexibles; estables en aquellos casos donde intervienen los juicios del decisor con pequeños cambios, teniendo como resultado poco efecto(pequeñas variaciones) y flexibles en aquellos casos donde se adicionan o agregan nuevos conceptos a la estructura jerárquica, y no rompen con su desempeño (funcionalidad)

** Con relación a la metodología de las jerarquías por prioridades es correcta la suposición de estabilidad y flexibilidad, dado que representan los *modos normales de percepción*. No obstante, cabe mencionar que en general esto no es cierto, primero porque esto tiene validez en intervalos de tiempo cortos, y en algunos casos pudieran ser prolongados. Y segunda, esto es debido a la propia dinámica de la evolución de la Naturaleza, por lo que pudieran cambiar las percepciones de los decisores y en algunos casos pudieran ser verdaderamente radicales dichos cambios.

El *método de eigenvectores* nos da una forma racional de nuestras preferencias subjetivas. Y es obvio que el método no funciona con las personas que son expertos porque estas dan la respuesta inmediatamente acerca de lo que nosotros no conocemos. Sin embargo, si lo aplican ellos mismos en sus propias decisiones, es útil, porque pueden comparar los nuevos resultados con los que ya conocían y ver si efectivamente coinciden.

También sabemos, de los experimentos realizados por Saaty, que cuando se aplica el método en un problema con personas que no saben nada al respecto se obtienen resultados muy diferentes que con las personas que están bien informadas y conocen la situación del problema del que se este hablando.

El método se puede aplicar para comparar opiniones de expertos y no expertos también, entre personas que están parcialmente informadas y en parte diligentes para aplicar correctamente el método contra las personas que están parcialmente informadas pero menos cuidadosas en proporcionar la información.

Se puede decir que las personas que están bien informadas en general o en algún campo particular y todas aquellas que emplean sus sentidos para comparaciones físicas, el enfoque de eigenvectores balancea comparablemente en radios muy pequeños en comparación con otros métodos.

Este también produce mejores resultados entre las personas que están parcialmente informadas y que desean balancear sus preferencias construidas lógicamente y simplemente por la relación de pares. Por ejemplo, las personas pueden comenzar por arreglar las cosas obre una balanza ordinaria. Entonces ellos pueden seleccionar por comparación los artículos(o cosas) de los que ellos estén seguros, entre estos comenzar con los artículos más dominantes y seguir con los menos dominantes hasta conseguir los límites sobre un rango de sus preferencias y sus sentimientos. Hasta ahora cientos de personas han participado en la solución de problemas involucrados con aplicaciones gubernamentales y para la industria. Otro tanto lo han usado en sus problemas personales y pocas aplicaciones han sido en ejercicios naturales, como el de la ley del inverso del cuadrado de óptica.

Habiendo hecho los comentarios acerca de la metodología empleada en este trabajo, pasemos ahora a las conclusiones de las aplicaciones de la técnica.

Para comenzar, recordemos que en el caso general en teoría de matrices una pequeña perturbación de los coeficientes implica una pequeña perturbación de los eigenvalores. Es decir que de la ecuación de eigenvectores $Aw=\Re_{máx}\, w$, donde $\Re_{máx}$ es el principal eigenvalor y A es la matriz de comparación de parejas. ¿Cómo saber si la estimación para w es buena? Observamos que si obtuvimos w por la solución de la matriz cuyas entradas son $w_i\ /w_j$ entonces A es una matriz considerada consistente. De hecho, las entradas de A no necesariamente son consistentes, i.e., A_1 puede ser preferida a A_2, y A_2 a A_3 pero A_3 es preferible a A_1. Lo que nosotros queremos es el error debido a la inconsistencia. Entonces A es consistente si y sólo si el principal eigenvector $\Re_{máx} = n$ donde n es el número de entradas de la matriz. Y aunque en realidad siempre se tiene $\Re_{máx} \geq n$.

El valor que se obtuvo para el eigenvalor fue de $\Re_{máx} = 11.4\ 8$ y sabemos que n=9, como se puede apreciar $\Re_{máx}$ es un poco mayor que n.

Si ahora deseamos saber que tan bueno es el resultado, vemos el radio de consistencia que es del orden de 21.45% el cual es muy alto con relación al 10.0% que obtuvo Saaty al hacer muestreo estadístico. Este valor que se obtuvo de hecho no es muy malo, pero sugiere que puede hacerse una revisión. Ésta, podría hacerse entrevistando a otros expertos y no expertos, con la misma metodología y comparar las jerarquías resultantes. No obstante si después de haber realizado la revisión persiste un radio de consistencia mayor o igual al 20.0%. Esto no significa que las preferencias por los programas estén mal o que deberá repetirse el experimento hasta conseguir un radio de consistencia muy aproximado al 10%, porque quizás en ese valor las prioridades de los programas podrían ser completamente desastrosas e inconsistentes con la práctica común.

En términos generales los resultado son buenos y el eigenvector de prioridades queda de la siguiente manera.

Se le da **prioridad** a los programas en el *orden* en que aparecen:

$P_1 = 0.369$: Programa para la *adecuación al nuevo sistema* de posgrado de la UNAM.

$P_3 = 0.194$: Programa de *investigación*.

$P_2 = 0.188$: Programa de *maestrías y doctorados* en Ingeniería.

$P_4 = 0.083$: Programa de *promoción* para la consecución de proyectos.

$P_5 = 0.049$: Programa para la *elaboración de artículos y notas*.

$P_8 = 0.037$: Programa de *intercambio y relaciones* nacionales e internacionales.

$P_7 = 0.036$: Programa de *eventos académicos*.

$P_6 = 0.024$: Programa de *creación de empresas científicas y tecnológicas*.

$P_9 = 0.019$: Programa de *docencia en especializaciones* en Ingeniería.

Para finalizar las conclusiones cabe mencionar y como bien sabemos, son un verdadero problema encontrar solución a el sistema lineal $Ax=b$ y el de los valores propios. En ambos casos el determinante conduce a una solución formal, a la regla de Cramer en el caso de $Ax=b$ y al polinomio $det(A-\lambda I)$, cuyas raíces son los valores propios. Cuando $n=2$ o 3, puede resultar sencillo resolver el problema. No obstante para n grande es muy difícil y tedioso, en nuestro caso hubiera resultado una matriz de 9 x 9 es decir de $n=9$, y resolver un polinomio de grado 9 es prácticamente imposible. Estando así las cosas la Técnica de Jerarquías por Prioridades propone cuatro métodos de aproximación los cuales no cumplen con la precisión exigida y deseada idealmente, porque no satisfacen plenamente al polinomio característico, por lo que se le da la vuelta al problema con **I**ndices de **C**onsistencia (CI) y **R**adios de Consistencia (CR). Pero también es cierto que no es posible encontrar fórmulas para resolver polinomios de grado n y no por eso debe uno cruzarse de brazos, más bien se trataría de buscar métodos y formulas para hacer mejores aproximaciones a los autovectores así como a los autovalores. Es por esta razón que se propone aplicar simultáneamente algún programa de matemáticas profesional o especializado en buscar los eigenvalores y eigenvectores asociados a su matriz.

El verdadero poder de la Técnica Analytic Hierarchy Process (AHP) radica en el siguiente hecho. La mayoría de los vectores x no satisfacen la ecuación $Ax=\lambda x$ ya sea λ un valor propio o no. Un vector x típico cambia de dirección cuando se multiplica por A, así que Ax no es un múltiplo de x. Esto significa que sólo ciertos números especiales λ son valores propios y que sólo **ciertos vectores especiales son vectores propios**. Claro que si A fuera un múltiplo de la matriz identidad, entonces ningún vector cambiaría de dirección y todos los vectores serían vectores propios. Pero en el caso usual los *vectores propios son claramente precisos, escasos y separados*. Dichos vectores tienen su significado físico siendo en la mayoría de las ocasiones difícil de interpretar. En nuestro caso parece ser que la clave es el **modo natural de percepción del decisor**, asociado a su propio autovector y autovalor, reflejando sus prioridades y por consiguiente una jerarquía. Es decir que las jerarquías de las prioridades son las frecuencias naturales perceptivas del decisor expresadas a través del vector de prioridades o autovector.

CUESTIONARIO PARA ORDENAR POR PRIORIDADES LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

El siguiente cuestionario tiene como finalidad ordenar los programas de la Facultad de Ingeniería a través de sus juicios personales. Para ello, le pediremos leer cuidadosamente las instrucciones.

A continuación aparece una lista de los programas para el desarrollo de la facultad de ingeniería, que se denotan como P_1, al programa para la adecuación al nuevo sistema de posgrado, P_2 , al programa de docencia en maestrías y doctorados en ingeniería , ... , P_9 , al programa de docencia en especializaciones en ingeniería, respectivamente.

P_1 .- Programa para la *adecuación al nuevo sistema de posgrado* de la UNAM.
P_2 .- Programa de *docencia en maestrías y doctorados* en ingeniería.
P_3 .- Programa de *investigación.*
P_4 .- Programa de *promoción* para la consecución de proyectos.
P_5 .- Programa para la *elaboración de artículos, notas y libros.*
P_6 .- Programa de *creación de empresas* científicas y tecnológicas
P_7 .- Programa de *eventos académicos*
P_8 .- Programa de *intercambios y relaciones* nacionales e internacionales.
P_9 .- Programa de *docencia* en especializaciones en ingeniería.

¿Cómo comparar estos programas?

Estos programas P_1 P_2 P_3 .... , P_9 los podemos comparar por parejas, escogiendo el primero en relación al segundo, es decir (P_1, P_2), (P_1. P_3) ,..., (P_8 . P_9) . Es importante que usted siga este orden hasta el final de la evaluación. Seleccione el primero y piense qué tan importante es en comparación con el segundo, posteriormente usted tendrá mayor conciencia como para decidir qué tan importante es el segundo programa en comparación con el primero, o viceversa.

¿Cómo evaluar las parejas de programas?

Para poder evaluar las parejas de los programas (P_1, P_2), (P_1, P_3) ,.... (P_8 . P_9) de acuerdo con su propio juicio y criterios, le presentamos una **lista de importancias** (cualidades) de las que puede elegir, como mejor le convenga.

Lista de importancias.

1.- igual importancia
2.- débil importancia de uno sobre otro
3.- esencial o fuerte importancia
4.- muy fuerte o demostradamente importante
5.- absoluta importancia

¿Cómo asignar los valores de la lista de importancias a las parejas de programas?

Los valores de la lista de importancias se encuentran tabuladas en el primer renglón de la tabla* número uno (tab. N° 1) con el siguiente orden: Absoluta importancia, muy fuerte, fuerte, débil, igual, débil, fuerte, muy fuerte, absoluta importancia.

Observe que el orden de importancia va decreciendo de mayor a menor, hasta ***igual*** y luego aumenta nuevamente a mayor. Es decir que primero es muy intensa la importancia, luego baja la intensidad de importancia y posteriormente vuelve a subir la intensidad de importancia.

El primer renglón de la tabla número uno (tab. N°1), comienza con la etiqueta **columna I**, la cual contienen las denotaciones de los programas P_1, P_2, P_3,..., P_9 y lo mismo para la última columna de la derecha, denotada como **columna II**, que comienza con el programa P_2 (programa de maestrías y doctorados en ingeniería) y termina con el programa P_9 (programa de docencia en especializaciones en ingeniería).

¿Cómo llenar la tabla N°1?

Para poder asignar los valores de la lista de importancias a las parejas de programas que se encuentran tabuladas en la tabla N°1, comience por escoger la primer pareja de programas (P_1, P_2). El primer programa P_1(programa para la adecuación al nuevo sistema de posgrado de la UNAM) se localiza en la **columna I** de la tabla y el programa P_2 (programa de docencia en maestrías y doctorados en ingeniería) se encuentra en la **columna II** de la derecha de la tabla.

En seguida observe el primer programa P_1 y compárelo con el programa P_2. Si usted siente que el programa P_1 tiene mayor prioridad, entonces vea los valores de importancia que se encuentran en el primer renglón de la tabla, desde ***absoluto*** hasta ***igual*** (viendo de frente a la tabla N°1 y de izquierda a derecha, para hacer la comparación) descartando las alternativas que continúan y diga usted qué tan importante es el programa P_1 en comparación con el programa P_2 . Para ello basta marcar, con una palomita o cruz en la casilla correspondiente a la columna de su preferencia de importancia.

Si por el contrario, usted siente que el programa P_2 podría ser más importante que el programa P_1, entonces nuevamente revise la misma pareja de programas (P_1, P_2) y diga ahora que tan importante es el programa, P_2, comparado con el programa P_1, para esto, deseche las primeras alternativas de valores, que son desde absoluto hasta débil y vaya a lo largo del mismo renglón 2 de la tabla, comenzando desde **igual** ubicado en el centro de la tabla, hasta **absoluto** (desde izquierda a derecha) que se localiza hasta antes de la columna II. Y marque con una cruz o paloma su preferencia por el programa P_2 en comparación con P_1 en la casilla correspondiente.

Repita el mismo procedimiento, hasta concluir con la última pareja de programas (P_8,P_9), localizados en la tabla N° 1.

Ejemplo:

Suponga, que desea comparar la pareja de programas (P_4, P_7), correspondientes a : Programa de promoción para la consecución de proyectos y programa de eventos académicos. Respectivamente.

i.- Observe que esta pareja se localiza en el renglón n° 25 de la tabla N°1. Entonces supóngase que a nuestro juicio muy particular el programa P_4 es más importante que el programa P_7 .

---

* *La tabla número uno se encuentra al final del documento.*

¿Qué tan importante?, Bueno digamos que P_4 es de más absoluta importancia que el programa P_7. Si esto es así, entonces buscamos en el primer reglón de la tabla el término **absoluto** y vemos que se encuentra en la segunda columna (viendo de izquierda a derecha). Luego marcamos con una paloma o cruz la casilla donde se interceptan esta columna con el renglón n° 25. El resultado queda de la siguiente forma:

Columna I	absoluto	muy fuerte	fuerte	débil	igual	débil	fuerte	muy fuerte	Absoluto	columna II
P_1										P_2
P_1										P_3
P_1										P_4
P_1										P_5
P_1										P_6
P_1										P_7
P_1										P_8
P_1										P_9
P_2										P_3
P_2										P_4
P_2										P_5
P_2										P_6
P_2										P_7
P_2										P_8
P_2										P_9
P_3										P_4
P_3										P_5
P_3										P_6
P_3										P_7
P_3										P_8
P_3										P_9
P_4										P_5
P_4										P_6
P_4	✓									P_7
P_4										P_8
P_4										P_9
P_5										P_6
P_5										P_7
P_5										P_8
P_5										P_9
P_6										P_7
P_6										P_8
P_6										P_9
P_7										P_8
P_7										P_9
P_8										P_9

ii.- Si por el contrario, sentimos que el programa P_7 puede ser mejor que el programa P_4 entonces nos preguntamos ¿qué tan importante es el programa P_7 con relación al programa P_4? Sí P_4 es importante y P_7 también lo es, yo diría que P_7 es un poco más importante que P_4 ¿qué tanto es un poco importante? Digamos que sí es importante. Y.... ¿qué tan importante? Yo diría que es demostrativamente importante. O sea que es **muy fuerte** su importancia.

Si esto es así, de acuerdo con nuestro juicio, buscamos en el primer renglón de la tabla de izquierda a derecha, comenzando desde **igual** hasta **absoluto** en donde se encuentra el término muy fuerte y vemos que éste corresponde a la columna n°9 de la tabla N°1. Entonces marcamos con una paloma la celda donde se interceptan la columna n°9 de ***muy fuerte*** con el renglón N°25. El resultado deberá aparecer de la siguiente forma:

Columna I	absoluto	muy fuerte	fuerte	débil	igual	débil	fuerte	muy fuerte	Absoluto	columna II
P_1										P_2
P_1										P_3
P_1										P_4
P_1										P_5
P_1										P_6
P_1										P_7
P_1										P_8
P_1										P_9
P_2										P_3
P_2										P_4
P_2										P_5
P_2										P_6
P_2										P_7
P_2										P_8
P_2										P_9
P_3										P_4
P_3										P_5
P_3										P_6
P_3										P_7
P_3										P_8
P_3										P_9
P_4										P_5
P_4										P_6
P_4								✓		P_7
P_4										P_8
P_4										P_9
P_5										P_6
P_5										P_7
P_5										P_8
P_5										P_9
P_6										P_7
P_6										P_8
P_6										P_9
P_7										P_8
P_7										P_9
P_8										P_9

Ahora ya puede comenzar a llenar el cuestionario que aparece en seguida y si existiera alguna duda con el llenado de ésta forma, puede preguntar, con toda confianza.

CUESTIONARIO PARA ORDENAR POR PRIORIDADES LOS PROGRAMAS DE DESARROLLO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

El siguiente cuestionario tiene como finalidad ordenar los programas de la facultad de Ingeniería a través de sus juicios personales. Para ello, le pedimos leer cuidadosamente las instrucciones.

Tabla número uno (tab. N° 1)

Columna I	absoluto	muy fuerte	fuerte	débil	igual	débil	fuerte	muy fuerte	Absoluto	columna II
P_1										P_2
P_1										P_3
P_1										P_4
P_1										P_5
P_1										P_6
P_1										P_7
P_1										P_8
P_1										P_9
P_2										P_3
P_2										P_4
P_2										P_5
P_2										P_6
P_2										P_7
P_2										P_8
P_2										P_9
P_3										P_4
P_3										P_5
P_3										P_6
P_3										P_7
P_3										P_8
P_3										P_9
P_4										P_5
P_4										P_6
P_4										P_7
P_4										P_8
P_4										P_9
P_5										P_6
P_5										P_7
P_5										P_8
P_5										P_9
P_6										P_7
P_6										P_8
P_6										P_9
P_7										P_8
P_7										P_9
P_8										P_9

BIBLIOGRAFÍA

1.- SAATY THOMAS L., *The Analyitic Hierarchy Process.* Mc Graw Hill, 1980.

2.- Plan de desarrollo de la Facultad de Ingeniería, 1995-2000.

3.- ELISA E. GONZALES DEL VALLE CAMPO AMOR, *Modelos y Decisioners Técnicas Básicas de Toma de* , México, 1992

4.- SAATY THOMAS L. *Thinking with models.* Mc Graw Hill, 1981.

5.- STEPHEN H. FREDBERG, ARNOLD J. INSEL, LAWRENCE E. SPENCE, *Algebra Lineal,* Publicaciones Cultural, S.A., México 1982.

6.- STEVEN J. LEON, *Linear Algebra with applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458 Ee.u.a., 1988.

7.- GILBERT STRANG, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Addison-Wesley Iberoamericana., Wilminton, Delawere, E.U.A., 1986.

8.- SERGE LANG, *Lineal Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company Inc. Reading Massachusetts. E.U.A., 1976.

9.- LUDWING VON BERTALANFFY, *Teoría General de los Sistemas: Fundamentos, Desarrollo, Aplicaciones.* Fondo de Cultura Económica, México, D.F., 1976.

10.- LANCELOT LAW WHYTE, ALBERT G. WILSON Y DONNA WIILSON, *Las Estructuras Jerárquicas,* Alianza Editorial, S.A., Madrid, España, 1973.

11.- GABRIEL BACA URBINA, Eva*luación de Proyectos,* Mc Graw Hill, México 1995.

12.- RALPH L. KEENEY and HOWARD RAIFFA, *Decisions with multiple Objetives. Preferences and value tradeoffs.* John Wiley & Sons, Inc. 1976.

13.- MARIO ULLOA RAMÍREZ, *Generación y Análisis de Estructuras Jerárquicas en la Clasificación de Variables, Selección de Proyectos y Toma de Decisiones.* México 1995.

14.- REINALDO NASSIR SAPAG CHAIN, *Preparación y evaluación de Proyectos,* Mc Graw Hill, Colombia 1996.

15.- R. W. JOHNSON, R.W. MELICHER, *Administración Financiera,* Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. (CECSA), México, 1989.

16.- EDWARD J. MISHAN, *Cost-Benefit Analisis*, Third Edition, George Allen & UNWIN, London 1982.

17.- SAMUEL E BODILY, *Modern Decision Marking: a guide to Modeling with decision support systems*, New York, México, Mc. Graw Hill, 1985.

18.- JHON FRED J. WESTON, EUGENE F. BRIGHAM, *Fundamentos de Administración Financiera de Empresas*, Tercera Edición, Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V., México, D.F., 1975.

19.- W. EDWARDS & A. TUERSKY, *Toma de Decisiones*, Fondo de Cultura Económica, México, D.F., 1979.

20.- MAYRA ESTELA TREJOS ALVARADO, (Tesis) *Teoría de Decisiones Multicriterio: Método de Relaciones Binarias de Sobre clasificación que usa una Familia de Funciones de Utilidad*, México 1991.

21.- NIJKAMP, P. VOOGD, H. *An Introduction to Multicriteria Evaluation,* Fandel, G., Spronk, J. Multiple Criteria Decision Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.

22.- SERVIO TULIO GUILLÉN BURQUETE, (Tesis) *Relaciones Valuadas de Preferencia en la Toma de Decisiones Multicriterio*, México 1993.

23.- CONRADO GARCÍA OLIVARES, (Tesis) *Bases conceptuales y Metodológicas para la toma de Decisiones en Presencia de Criterios con Objetivos Múltiples: Caso de la Jerarquización de Objetivos en Instituciones Educativas Sujetas a Restricciones Presupuestales*, México 1969.

24.- RUBEN TELLEZ SÁNCHEZ, *Relaciones entre la teoría de Decisiones Estadísticas, la Teoría de Juegos y la Programación Lineal*, México 1969.

OTRAS REFERENCIAS

25.- ANASTACIO SOLIS MEXICANO, (Tesis) *El Proceso de Análisis Jerárquico y la Toma de Decisiones,* México 1992.

26.- LAURA ELISA PÉREZ GÓMEZ, (Tesis) *La Teoría de Conjuntos Borrosos como Base Metodológica Alternativa para el Análisis de Decisiones Bajo Criterios Múltiples.* México 1986.

27.- C. WEST CHURCHMAN, LEONARD AUREBACH, SIMCHA SADAN, *Thinking for decisions Deductive Quantitative Methodods, Sciencie Research Associates*. INC. Chicago U.S.A., 1975.

28.- BELA BALASSA, *The effects method of project evaluation*, Washington, D.C. 1996.

29.- PURSELL, GARRY G. *Cost Benefit Evaluation of LDC industrial sectors*, New York 1996.

30.- SAATY THOMAS L., *Nonlineal Mathematics*. Mc Graw Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London. 1964.

31.- RAMÓN GARCÍA PELAYO, *Diccionario usual Larousse* (diccionario enciclopédico) Ediciones Larousse, México 1985.

SOFTWARE

32.- Mathsoft Apps: Mathcad 2000 Profesional.