



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESELACIONES DE SUSTITUCION Y  
CONJUNTOS APERIODICOS

T E S I S

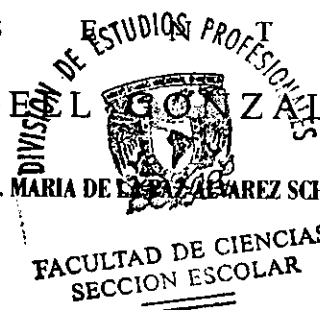
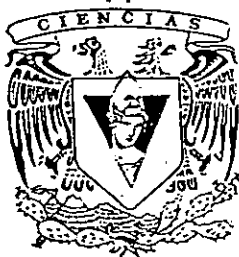
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

PABLO ROSE L G O Z A L E Z

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA DE LOS ANGELES ALVAREZ SCHERER



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Teselaciones de sustitución y conjuntos aperiódicos”

realizado por Pablo Rosell González

con número de cuenta 9350485-4, quién cubrió los créditos de la carrera de

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario Dra. María de la Paz Álvarez Scherer

Propietario Dr. Chaim Goodman-Strauss

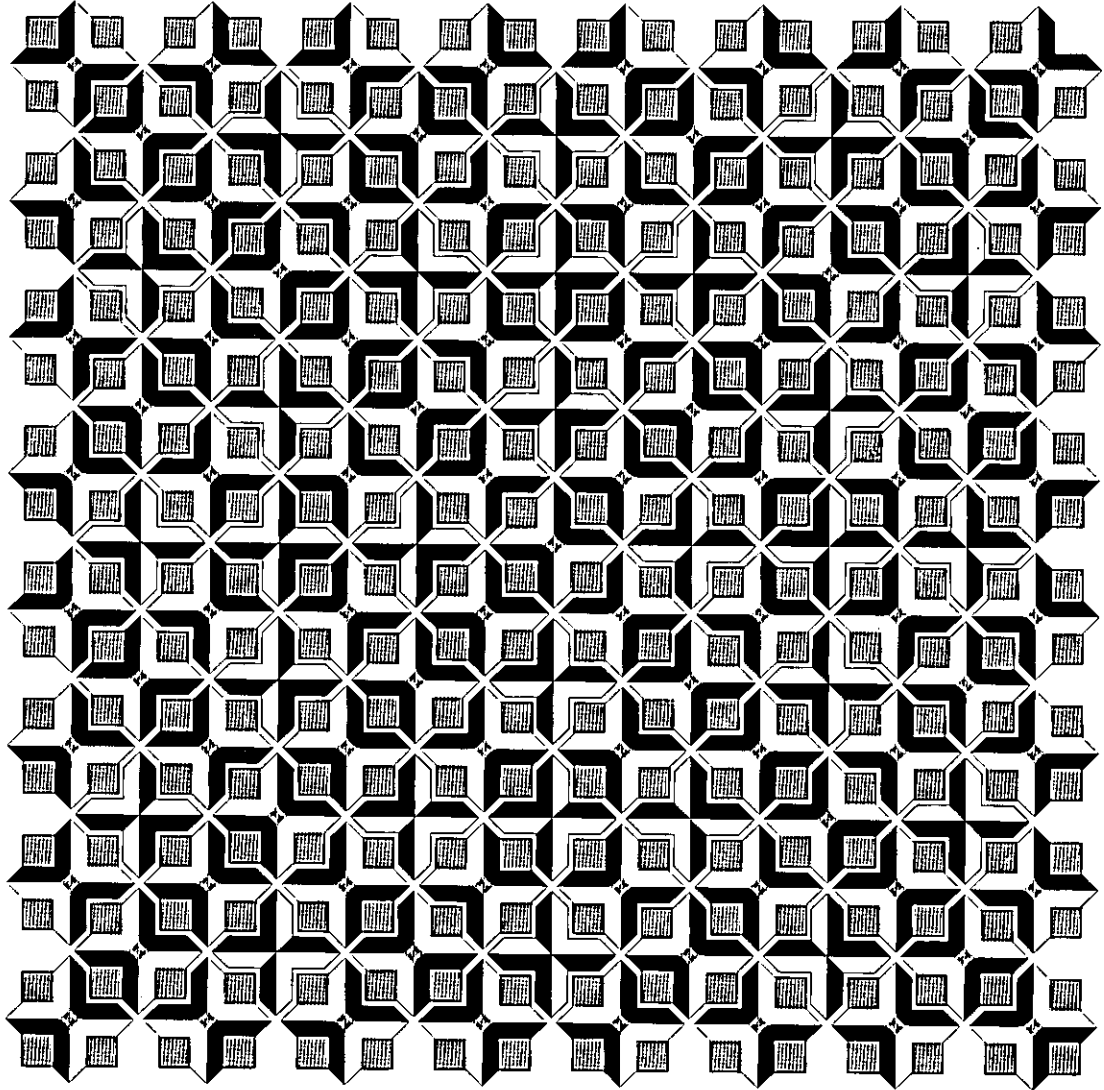
Propietario M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez

Suplente Dr. Javier Bracho Carpizo

Suplente Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

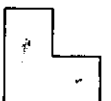
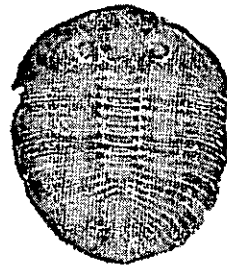


*A mis padres por su apoyo,  
mucho siempre y siempre incondicional.*

*A Juani y a Mari.*

*A mi amada luna.*

*Y al ...*



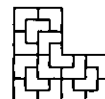
# Índice General

<b>Prefacio</b>	<b>xi</b>
<b>Acerca de las esquinas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Grupos de simetrías</b>	<b>1</b>
1.1 Isometrías del Plano Euclidiano . . . . .	1
1.2 Grupos de simetrías con puntos fijos . . . . .	5
1.3 Grupos de simetrías sin puntos fijos . . . . .	6
<b>2 Teselaciones</b>	<b>13</b>
2.1 Reglas de pegado . . . . .	13
2.2 Teselaciones de sustitución . . . . .	15
<b>3 El trilobite y la cruz</b>	<b>25</b>
3.1 Características de las L-teselaciones de sustitución . . . . .	25
3.2 De L a T y C . . . . .	30
3.2.1 Configuraciones de trilobites . . . . .	31
3.2.2 Cadenas $\alpha$ y $\gamma$ . . . . .	35
<b>A Teselaciones de Penrose</b>	<b>41</b>
<b>B Conjunto aperiódico de Socolar</b>	<b>49</b>
<b>Epílogo</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>
<b>Índice de Materias</b>	<b>59</b>



# Índice de Materias

- cadena  $\alpha$  y  $\gamma$ , 35–39
- configuración, 15
- conjunto
  - aperiódico, 11
  - débil, 54
  - fuerte, 54
- cruz, 25
- decibilidad, 53
- distancia euclidiana, 1
- isometría, 1
- isometrías
  - directas, 4
  - grupo de, 2
  - indirectas, 4
- L-teselaciones, 25–29
- pegado, *véase* reglas de pegado
- Penrose
  - teselaciones de, 13, 41–48
- Plano Euclidiano, 1
- reflexión, 3
- reflexión trasladada, 3
- reglas de pegado, 13
- rotación, 3
- semigiro, 3
- simetría, 4
- simetrías
  - de la circunferencia, 4
  - del cuadrado, 4
- Socolar, 49
  - S8, 49
- soporte, 15
- supertesela, 19
- sustitución, 18
  - primitiva, 19
- teselación, 7, 16
  - aperiódica, 11
  - autosemejante, 22
  - de Penrose, *véase* Penrose
  - de sustitución, 19
  - no-periódica, 9
  - periódica, 8
  - subperiódica, 9
- teselas, 7
- traslación, 3
- trilobite, 25
  - configuraciones de, 31
- Turing
  - máquina de, 54
- Wang, 53



# Prefacio

Después de haber cursado un par de Seminarios de Geometría con Paco, que trataban, uno de teselaciones periódicas y otro de teselaciones de Penrose, surge la idea (de Paz) de hacer la tesis sobre teselaciones aperiódicas en el plano hiperbólico. Buscando información en Internet me topo por casualidad con un par de artículos de Chaim Goodman-Strauss, ambos relacionados con conjuntos aperiódicos de dos elementos, uno para el espacio euclidiano de tres o más dimensiones y el otro para el plano euclidiano. Hay que reconocer la disposición de Paz por permitirme cambiar sutilmente de tema, ¡del plano hiperbólico al euclidiano! (Ella siempre dirá que fueron tres y no dos cambios de tema.)

Resultaba totalmente nuevo para nosotros el enfoque que da Chaim al estudio de teselaciones, todas, salvo las suyas, conocidas por nosotros. Me refiero precisamente al término *de sustitución* que aparece en el título de este trabajo.

Transcurrido cierto tiempo en que más o menos iba desglosando el artículo relacionado con el plano euclidiano, de repente, ¡pas!, ¡Chaim llega a México para una estancia de un año! Ofrece un seminario de teselaciones y tengo la fabulosa oportunidad de platicar con el autor mismo del artículo.

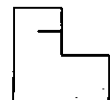
El trabajo toma forma, la idea es explicar qué es una sustitución, qué relación tiene con las teselaciones, qué condiciones se necesitan para que una teselación de sustitución sea no-periódica, y finalmente cómo construir un conjunto aperiódico a partir de una teselación no-periódica. Todo esto con base en un ejemplo, el conjunto aperiódico creado ¿o inventado? por Chaim, llamado *el trilobite y la cruz*<sup>1</sup>.

Desgraciadamente ¿o afortunadamente? la última cuestión del párrafo anterior, según palabras de Chaim, es un procedimiento llamado... *magia*.

La estructura de este trabajo es como sigue: primero explicamos cuáles

---

<sup>1</sup>En estos días parece que prefiere llamarlo *trilobite y cangrejo*.





son las isometrías del plano euclidiano para poder estudiar las simetrías de cualquier conjunto contenido en él, de los frisos y las teselaciones. En el segundo capítulo estudiamos las teselaciones, en particular las teselaciones de sustitución, para tener las herramientas necesarias para poder demostrar, en el tercer capítulo, que el conjunto de trilobites y cruces es aperiódico.

Incluimos también un apéndice que trata de teselaciones de Penrose por ser las teselaciones aperiódicas más conocidas, haciendo énfasis en el concepto de sustitución, dividiendo las teselas en triángulos y aplicando la sustitución como Raphael Robinson lo hizo.

En otro apéndice mostramos otro conjunto aperiódico debido a Socolar que surge del mismo sistema de sustitución del cuál surgen el trilobite y la cruz. La diferencia es que el conjunto de Socolar consiste de ocho prototeselas mientras que el trilobite y la cruz son solamente dos.

En el epílogo platicamos acerca de la importancia que tiene el estudio de teselaciones aperiódicas y cuáles son los posibles caminos de investigación a seguir.

Quiero agradecer a los cuates todos, a Galito en especial y al Mok por los viejos tiempos.

Por último quiero agradecer a Paz por la paciencia la enseñanza y la motivación que para mí representa. A Paco por darme a conocer el magnífico mundo de las teselaciones. Al tiempo, junto con Roli y Chaim, que los tres combinados con harta suerte hicieron posible que Chaim estuviera aquí con toda la disposición para platicar y enseñarme su magia. Otra vez gracias a ustedes cinco.

*Pablo Rosell González,  
México, D.F., octubre de 2001.*



## Acerca de las esquinas

La esquina inferior externa de este trabajo es tan sólo una representación de algo que pasó hace mucho tiempo en un planeta llamado *Eletrilo*. Las criaturas que algunas vez habitaron este planeta tenían la forma de  $\sqsubset$ . Cada vez que había que reproducirse las  $\sqsubset$  doblaban su tamaño y generaban cuatro nuevas  $\sqsubset$ .

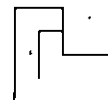
*Pequele* era un pueblo cuyos habitantes adoraban a *Granele*. La doctrina de *Granele* se basaba en mantener el respeto y sobre todo el conocimiento que heredaban de los antepasados.

Por esta razón se debía mantener un registro preciso de la descendencia de cada poblador. Según el viejo libro, *Granele* ideó una forma de crecimiento de la población con la cual no había necesidad de mantener un registro escrito de nacimientos ni parentescos. Los pobladores simplemente tenían que fijarse en quiénes los rodeaban, quiénes rodeaban a quienes los rodeaban y así hasta el nivel de descendencia que quisieran.

Conforme creció la población ocurrió lo que siempre pasa en las sociedades; hubo pobladores inconformes que decidieron romper con las enseñanzas de sus antecesores y de *Granele*. Se separaban de sus padres, abuelos, bisabuelos, . . . , hasta quedar totalmente separados de la sociedad y luego se acomodaban entre ellos a capricho, obteniendo nuevas formas de interactuar y creando distintas sociedades con distintas doctrinas.

Una de ellas, según el *Odirruba*, planteaba que no existía descendencia ni ascendencia, tan sólo debían de llegar nuevos pobladores y acomodarse sin molestar a los demás, sin alterar en lo posible a sus vecinos. Una vez que creció esta población se veía (desde un satélite) como la figura 3.8 en la página 30.

Regresando a nuestra historia, en *Pequele* estaba ocurriendo un desorden social referente al conocimiento que se heredaba de los ancestros. Pero finalmente llegó el milagro, apareció como por arte de magia *Miach el enviado*.



*Miach* predicaba un sistema menos rígido de descendencia y a la vez tenía la solución para que, queriendo o no, cada poblador tuviera perfectamente claro quienes eran sus ancestros, que a partir de su aparición podían ser elegidos por los mismos pobladores.

La solución planteada por *Miach* solamente se pudo consumir una vez que éste hizo llover los polvos mágicos de la metamorfosis sobre los hasta entonces □ que se convirtieron a partir de entonces y hasta la fecha en ㄣ.

Para ver como se llevaba a cabo el orden social promulgado por *Granele* debes hojear la esquina inferior de adelante hacia atrás.

Para ver como fue que se llevó a cabo la metamorfosis cuando *Miach* hizo llover sus polvos mágicos hay que hojear la esquina inferior de atrás para adelante.



# Capítulo 1

## Grupos de simetrías

### 1.1 Isometrías del Plano Euclidiano

El *Plano Euclidiano*,  $\mathbb{E}^2$ , es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

junto con la *distancia euclidiana*,  $d(X, Y)$ , entre dos puntos cualesquiera  $X = (x_1, x_2)$  y  $Y = (y_1, y_2)$  en  $\mathbb{E}^2$  definida por:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

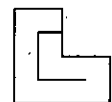
**Definición 1.1.** Una *isometría* es una transformación del plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  en sí mismo que preserva distancias.

Si a esta transformación la denotamos por  $\sigma : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ , y  $A, B$  son dos puntos cualesquiera, entonces la distancia entre  $A$  y  $B$  es igual a la distancia entre  $\sigma(A)$  y  $\sigma(B)$ . Es decir,

$$d(A, B) = d(\sigma(A), \sigma(B)).$$

Por ejemplo, la traslación  $\tau : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ , definida por  $\tau(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_2 + \beta)$  es una isometría ya que si  $X = (x_1, x_2)$  y  $Y = (y_1, y_2)$  son dos puntos cualesquiera de  $\mathbb{E}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} d(\tau(X), \tau(Y)) &= \sqrt{((x_1 + \alpha) - (y_1 + \alpha))^2 + ((x_2 + \beta) - (y_2 + \beta))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1 + \alpha - \alpha)^2 + (x_2 - y_2 + \beta - \beta)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$



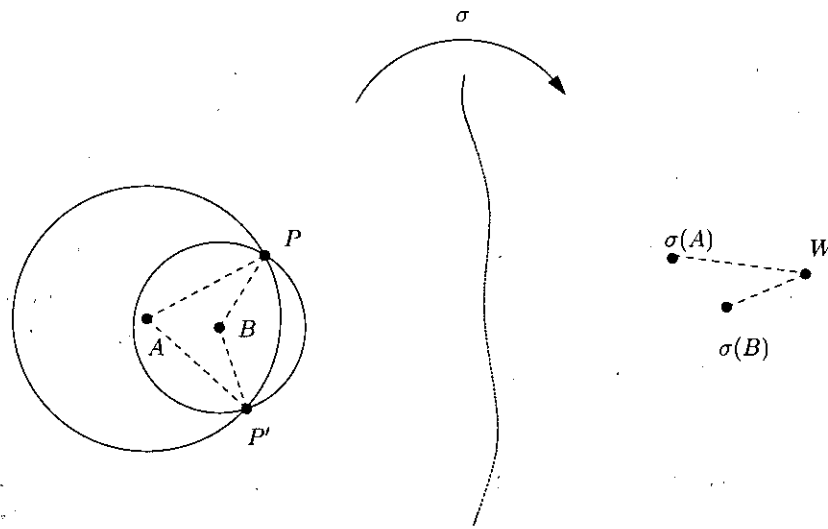


Figura 1.1 — Las isometrías son transformaciones sobre.

La transformación identidad,  $\text{id}(X) = X$  para todo  $X \in \mathbb{E}^2$ , es claramente una isometría.

Cualquier isometría  $\sigma$  de  $\mathbb{E}^2$  es inyectiva, ya que si  $X$  y  $Y$  son dos puntos distintos, la distancia  $d(X, Y) > 0$ , entonces  $d(\sigma(X), \sigma(Y)) > 0$ , por lo que  $\sigma(X) \neq \sigma(Y)$ .

Para ver que  $\sigma$  es sobre, sea  $W \in \mathbb{E}^2$  un punto del contradominio. Sean  $\sigma(A)$  y  $\sigma(B)$  las imágenes de dos puntos  $A$  y  $B$  y sean  $r_1 = d(\sigma(A), W)$  y  $r_2 = d(\sigma(B), W)$ . Como  $\sigma$  es isometría, los puntos de intersección  $P$  y  $P'$  de la circunferencia con centro en  $A$  y radio  $r_1$  y la circunferencia con centro en  $B$  y radio  $r_2$  cumplen con  $d(A, P) = d(A, P') = d(\sigma(A), W)$  y  $d(B, P) = d(B, P') = d(\sigma(B), W)$ , de donde  $W = \sigma(P)$  o  $W = \sigma(P')$ . Como  $\sigma$  es inyectiva,  $W$  es imagen solamente de  $P$  o de  $P'$  (figura 1.1).

Con esto se sigue que toda isometría es una transformación biyectiva.

La composición de isometrías es una isometría ya que si  $\sigma$  y  $\tau$  son isometrías entonces para todos  $X, Y \in \mathbb{E}^2$ ,

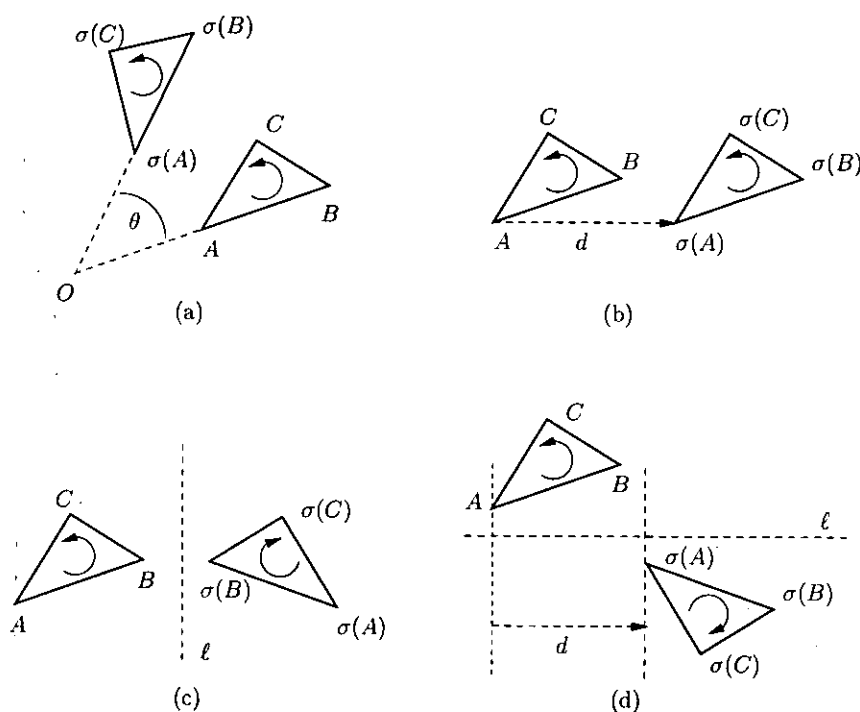
$$\begin{aligned} d(\sigma(\tau(X)), \sigma(\tau(Y))) &= d(\tau(X), \tau(Y)) && (\sigma \text{ es isometría}) \\ &= d(X, Y). && (\tau \text{ es isometría}) \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que el conjunto de todas las isometrías de  $\mathbb{E}^2$  bajo la operación composición forman un grupo, que denotaremos por  $\text{Iso}(\mathbb{E}^2)$ .



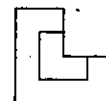
Es fácil ver que cualquier isometría en  $\mathbb{E}^2$  es una de las siguientes:

1. *Rotación* con centro en  $O$  y ángulo  $\theta$  (figura 1.2 (a)). Para el caso particular en que  $\theta = \pi$ , el segmento que une a  $A$  con  $\sigma(A)$  será bisecado por  $O$ , y a  $\sigma$  lo llamaremos *semigirotación*.
2. *Traslación* en una dirección y distancia dadas (figura 1.2 (b)).
3. *Reflexión* en una línea dada  $\ell$  (figura 1.2 (c)).
4. *Reflexión trasladada*,<sup>1</sup> reflexión en una línea dada  $\ell$  seguida de una traslación paralela a  $\ell$  (figura 1.2 (d)).



**Figura 1.2** — Isometrías del Plano Euclidiano. (a) Rotación. (b) Traslación. (c) Reflexión. (d) Reflexión trasladada.

<sup>1</sup>También llamada *deslizamiento*. En inglés el término es *glide-reflection*, por lo cual preferimos llamarla reflexión trasladada.



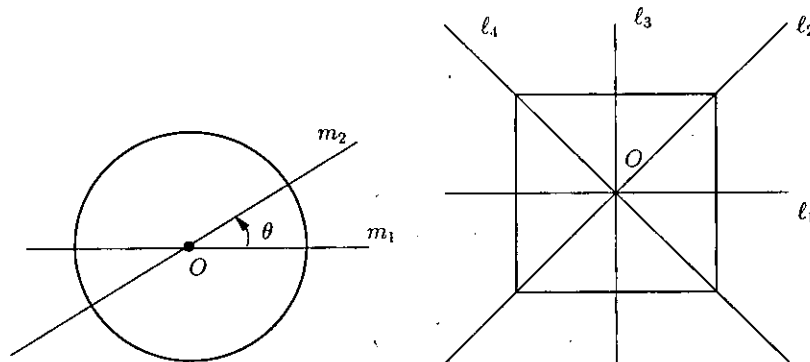
A las primeras dos isometrías se les llama *directas* porque preservan orientación, es decir, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos no colineales podemos considerar al triángulo  $\triangle ABC$ , y sus vértices se leen en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si  $\sigma$  es una rotación o una traslación, entonces  $\sigma(A)$ ,  $\sigma(B)$  y  $\sigma(C)$  serán los vértices de un triángulo que también se lee en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por otro lado, tanto la reflexión como la reflexión trasladada se conocen como *indirectas* porque invierten el sentido en que se leen los vértices, es decir, ahora  $\sigma(A)$ ,  $\sigma(B)$  y  $\sigma(C)$  se leen en el sentido de las manecillas del reloj.

Para cualquier isometría  $\sigma$  y cualquier conjunto  $\mathcal{A}$ , denotaremos por  $\sigma(\mathcal{A})$  a la imagen de  $\mathcal{A}$  bajo  $\sigma$ .

**Definición 1.2.** Una *simetría* del conjunto  $\mathcal{A}$  es una isometría  $\sigma$  de  $\mathcal{A}$  en sí mismo, es decir  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

La isometría *identidad*, es simetría de cualquier conjunto.

Sea  $C_{O,r}$  la circunferencia con centro  $O$  y radio  $r$ . Cualquier rotación con centro en  $O$  y ángulo  $\theta$  es una simetría de  $C_{O,r}$ . También lo es la reflexión a través de cualquier línea  $m$  que pase por  $O$  (figura 1.3).



**Figura 1.3** — Simetrías de la circunferencia y del cuadrado

Las simetrías del cuadrado son las reflexiones a través de sus diagonales y de las líneas que unen los puntos medios de lados opuestos (las líneas  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$ ), así como las rotaciones con ángulos  $\pi/2$ ,  $\pi$  y  $3\pi/2$  con centro en  $O$  (figura 1.3). A  $O$  se le llama un *4-centro de rotación*. En general, si entre las simetrías de un conjunto dado existe una rotación con centro en  $O$  y ángulo



positivo mínimo igual a  $2\pi/n$ , al centro de rotación se le llama *n-centro de rotación*.

Siempre pensaremos a las rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj, por lo cual no distinguiremos entre una rotación con ángulo  $\theta$  y una rotación con ángulo  $2\pi - \theta$  en el sentido de las manecillas del reloj. Tampoco haremos distinción entre una rotación con ángulo  $\theta$  y otra con ángulo  $\theta + 2\pi k$ , para cualquier entero  $k$ . Como simetrías serán consideradas idénticas.

Es fácil demostrar que las simetrías de un conjunto dado forman un *grupo*. La operación es asociativa, el neutro del grupo es la transformación identidad, y la existencia de inversos no es problema ya que las reflexiones son sus propios inversos y si existe una rotación mínima de ángulo  $2\pi/n$ , existe también una rotación de ángulo  $2\pi(n-1)/n$ .

Continuando con nuestro ejemplo, vemos que el cuadrado tiene ocho simetrías: la identidad, tres rotaciones y cuatro reflexiones (figura 1.3). Al grupo de simetrías del cuadrado se le conoce como el *grupo diédrico de 8 elementos* que denotaremos por  $D_4$ .

## 1.2 Grupos de simetrías con puntos fijos

**Definición 1.3.** El grupo que consiste únicamente de rotaciones (con un mismo centro) con ángulo  $2\pi j/n$ , con  $n \geq 2$  y  $j = 0, 1, \dots, n-1$  se llama *grupo cíclico de orden n* y lo denotaremos por  $C_n$ .

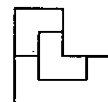
Al grupo que consiste de una sola isometría (la identidad) lo denotaremos por  $C_1$ .

**Definición 1.4.** El grupo que incluye todas las isometrías de  $C_n$  junto con  $n$  líneas de reflexión que pasan por el centro de rotación y forman ángulos  $2\pi j/n$  se llama *grupo diédrico de orden 2n* que denotaremos por  $D_n$ .

$D_\infty$  consiste de todas las rotaciones con centro en un punto dado y todas las reflexiones a través de líneas que pasan por ese punto.

Aunque algebraicamente los grupos  $D_1$  y  $C_2$  son isomorfos, geométricamente son distintos;  $D_1$  consiste únicamente de la identidad y una línea de reflexión. Éste es el grupo de simetrías del corazón, o de la letra M, a diferencia de  $C_2$  que es el grupo de las letras S y N (figura 1.4).

El grupo  $D_2$  contiene a la identidad, dos reflexiones perpendiculares y un semigiro. Éste es el grupo de simetrías del rectángulo.





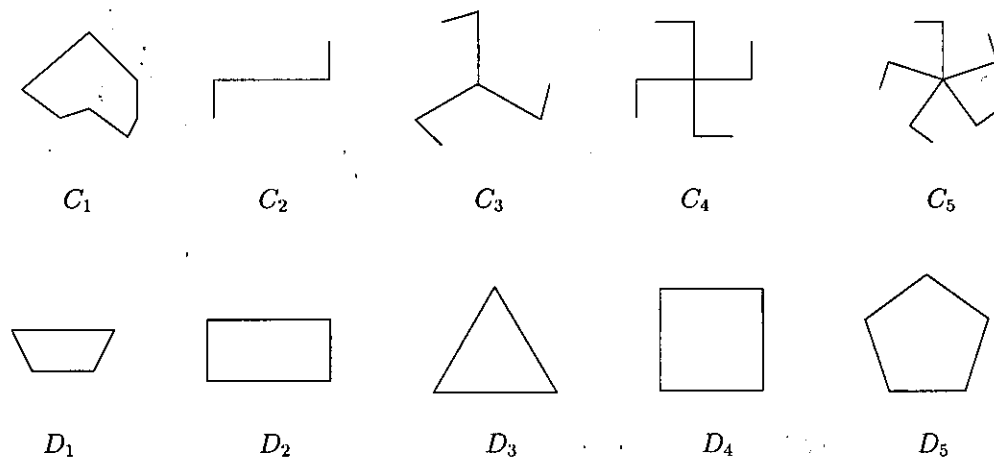


Figura 1.4 — Conjuntos y sus grupos de simetrías.

Para  $n \geq 3$ ,  $D_n$  es el grupo de simetrías de los polígonos regulares.  $D_\infty$  es el grupo de simetrías de la circunferencia.

$C_1$  deja todos los puntos fijos y  $D_1$  deja una línea fija. Los grupos  $C_n$  y  $D_n$  con  $n \geq 2$  tienen la propiedad de dejar un punto fijo (el centro de rotación).

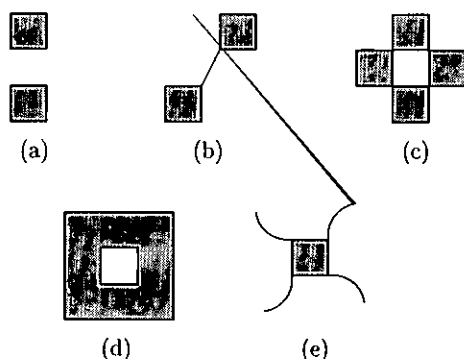
Extenderemos la noción de simetría para frisos y teselaciones.

### 1.3 Grupos de simetrías sin puntos fijos

**Definición 1.5.** Un conjunto de prototeselas  $T = \{T_1, \dots, T_n\}$  es una colección de subconjuntos acotados y simplemente conexos  $T_i$  de  $\mathbb{E}^2$  junto con posibles “marcas” o decoraciones que sirven para determinar las reglas de pegado (ver sección 2.1).

Los conjuntos de prototeselas están formados por conjuntos homeomorfos a discos cerrados, con lo cual evitamos tener conjuntos como los que se muestran en la figura 1.5. La idea de asignar a cada prototesela alguna marca nos permite, por ejemplo, incluir colores a los conjuntos, es decir, podríamos considerar al conjunto formado por un cuadrado negro y uno blanco como un conjunto de prototeselas.





**Figura 1.5** — (a) Conjunto disconexo. (b) y (e) Conjuntos que contienen segmentos o arcos de curva (en general, figuras de área cero). (c) Conjuntos que se vuelven disconexos al quitar un número finito de puntos. (d) Conjunto que no es simplemente conexo (lo cual quiere decir que contiene, al menos, un hoyo).

**Definición 1.6.** Una *teselación*  $\mathcal{T}$  del plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  es una familia numerable de conjuntos cerrados, llamados *teselas*:

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\},$$

tales que

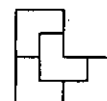
$$\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset, \quad \text{si } i \neq j; \quad (\text{i})$$

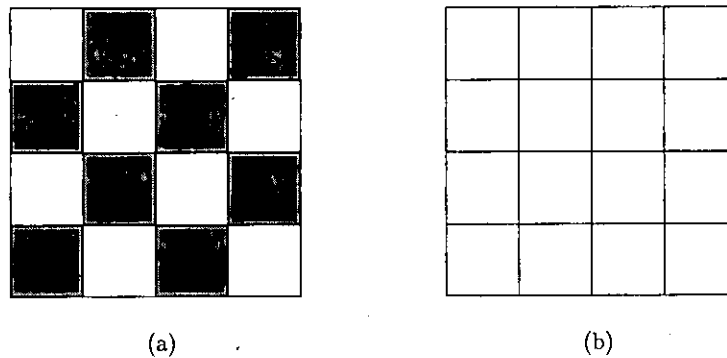
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = \mathbb{E}^2. \quad (\text{ii})$$

Si todas las teselas de una teselación  $\mathcal{T}$  son congruentes a un número finito de teselas distintas,  $T_1, \dots, T_n$ , podemos ver al conjunto  $\mathcal{S} = \{T_1, \dots, T_n\}$  como un conjunto de prototeselas que genera a  $\mathcal{T}$ .

**Definición 1.7.** Si  $\mathcal{T}$  es una teselación cuyo conjunto de prototeselas es  $\mathcal{S}$ , decimos que  $\mathcal{S}$  *admite a*  $\mathcal{T}$ .

En general, un conjunto de prototeselas no tiene por qué admitir alguna teselación, por ejemplo, si consideramos al conjunto de prototeselas que consiste únicamente de un pentágono regular, es fácil ver que éste no admite teselación alguna.





**Figura 1.6** — (a) Tablero de ajedrez, (b) Piso de mosaicos cuadrados.

Un tablero de ajedrez como el de la figura 1.6 (a) requiere de dos tipos de cuadrados, unos claros y otros oscuros, además debemos pedir que las aristas coincidan y que cada cuadro esté rodeado de cuatro cuadros del otro color.

Por otro lado, el clásico piso de mosaicos cuadrados de un mismo color (figura 1.6 (b)) simplemente requiere que las aristas coincidan.

En los ejemplos anteriores, el conjunto de prototeselas para el tablero de ajedrez consta de dos cuadrados, uno claro y otro oscuro, mientras que para el piso sólo se requiere un cuadrado. El criterio usado para teselar en forma de tablero requiere que los cuadrados estén alternados tanto horizontal como verticalmente. Para formar el piso basta con colocar los mosaicos seguidos haciendo que las aristas coincidan.

**Definición 1.8.** Para una teselación  $\mathcal{T}$ , una isometría  $\sigma$  de  $\mathbb{E}^2$  es una *simetría de  $\mathcal{T}$*  si manda cada tesela de  $\mathcal{T}$  en una tesela de  $\mathcal{T}$ . Al grupo de simetrías de  $\mathcal{T}$  lo denotaremos por  $S(\mathcal{T})$ .

**Definición 1.9.** Una teselación  $\mathcal{T}$  es *simétrica* si  $S(\mathcal{T})$  contiene simetrías distintas de la identidad.

**Definición 1.10.** Una teselación de  $\mathbb{E}^2$  es *periódica* si  $S(\mathcal{T})$  contiene dos traslaciones en direcciones no paralelas.

Si  $S(\mathcal{T})$  no contiene traslaciones, tampoco tiene reflexiones trasladadas, por lo que  $\mathcal{T}$  fija al menos un punto y su grupo de simetrías corresponderá a algún  $C_n$  o  $D_n$ . En particular si  $S(\mathcal{T})$  solamente contiene a la identidad entonces  $S(\mathcal{T}) = C_1$ .



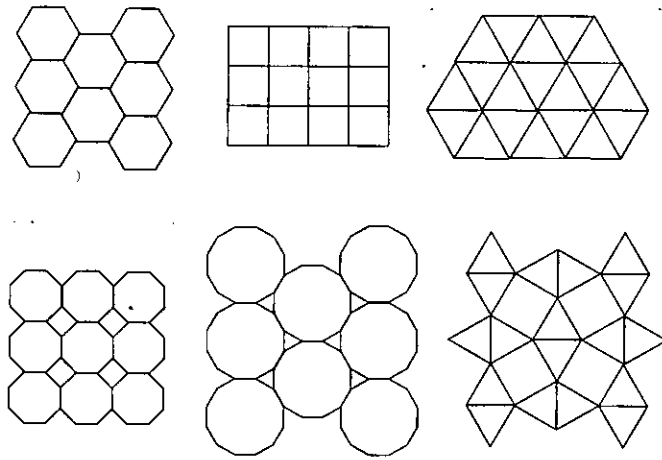


Figura 1.7 — Algunas teselaciones periódicas.

En el caso en que  $S(\mathcal{T})$  contenga únicamente traslaciones paralelas, entonces  $S(\mathcal{T})$  coincide con algún grupo de simetrías de *frisos*.

**Definición 1.11.** Una teselación  $\mathcal{T}$  es *no-periódica* si el grupo de simetrías  $S(\mathcal{T})$  es un subgrupo de  $D_n$  para alguna  $n$ . En particular,  $\mathcal{T}$  es no-periódica si  $S(\mathcal{T})$  no contiene traslaciones. Una teselación es *subperiódica* si  $S(\mathcal{T})$  contiene únicamente una traslación.

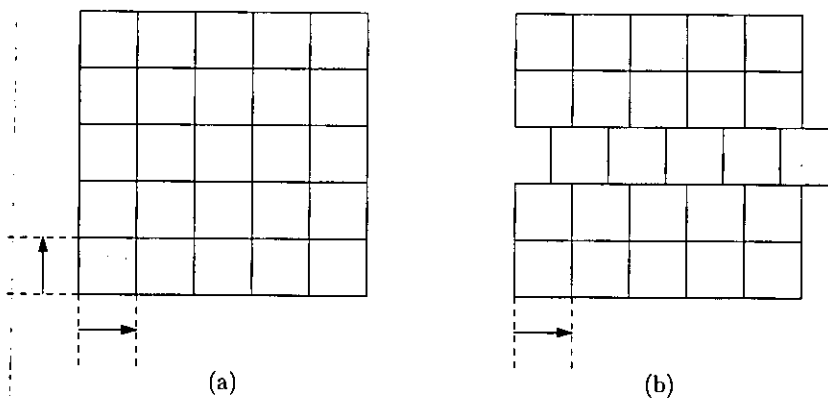


Figura 1.8 — (a) Teselación periódica, (b) Teselación subperiódica.



La tabla 1.1, tomada de [4] muestra todos los grupos de simetrías posibles de frisos y teselaciones periódicas.

C-T	Símbolo	<i>f o t</i>	Número de isometrías					
			Reflexiones trasladadas	Reflexiones	<i>n</i> -centros de rotación			
<i>c</i>					2	3	4	6
$\infty\infty$	<i>p111</i>	<i>f</i>	0	0	0	0	0	0
$\infty x$	<i>p1a1</i>	<i>f</i>	1	0	0	0	0	0
$\infty*$	<i>p1m1</i>	<i>f</i>	0	1	0	0	0	0
$*\infty\infty$	<i>pm11</i>	<i>f</i>	0	2	0	0	0	0
$22\infty$	<i>p112</i>	<i>f</i>	0	0	2	0	0	0
$2*\infty$	<i>pma2</i>	<i>f</i>	1	1	1	0	0	0
$*22\infty$	<i>pmm2</i>	<i>f</i>	0	3	2'	0	0	0
<i>o</i>	<i>p1</i>	<i>t</i>	0	0	0	0	0	0
<i>xx</i>	<i>pg</i>	<i>t</i>	2	0	0	0	0	0
<i>**</i>	<i>pm</i>	<i>t</i>	0	2	0	0	0	0
<i>x*</i>	<i>cm</i>	<i>t</i>	1	1	0	0	0	0
$2222$	<i>p2</i>	<i>t</i>	0	0	4	0	0	0
$22x$	<i>pgg</i>	<i>t</i>	2	0	2	0	0	0
$22*$	<i>pmg</i>	<i>t</i>	2	1	2	0	0	0
$*2222$	<i>pmm</i>	<i>t</i>	0	4	4'	0	0	0
$2*22$	<i>cmm</i>	<i>t</i>	2	2	2',1	0	0	0
$333$	<i>p3</i>	<i>t</i>	0	0	0	3	0	0
$3*3$	<i>p31m</i>	<i>t</i>	1	1	0	1',1	0	0
$*333$	<i>p3m1</i>	<i>t</i>	1	1	0	3'	0	0
$442$	<i>p4</i>	<i>t</i>	0	0	1	0	2	0
$4*2$	<i>p4g</i>	<i>t</i>	2	1	1'	0	1	0
$*442$	<i>p4m</i>	<i>t</i>	1	3	1'	0	2'	0
$632$	<i>p6</i>	<i>t</i>	0	0	1	1	0	1
$*632$	<i>p6m</i>	<i>t</i>	2	2	1'	1'	0	1'

**Tabla 1.1** — Los 24 grupos de simetrías de frisos (*f*) y teselaciones periódicas (*t*). C-T corresponde a la notación de Conway-Thurston, y *c* corresponde a la notación cristalográfica. La tilde de los centros de rotación indica que éstos además son centros caleidoscópicos, es decir, hay ejes de reflexión que pasan por ellos y por tanto son diédricos.



A mediados del siglo XX surgió la inquietud por saber si existe algún conjunto de prototeselas que *sólo* pudiera teselar no periódicamente el plano  $\mathbb{E}^2$ . Tal inquietud se resuelve favorablemente, siendo R. Berger en 1966 el primero en encontrar un conjunto de alrededor de ¡20000 piezas!. Al poco tiempo el mismo Berger reduce este número a 104. En 1971 Raphael Robinson encuentra un conjunto de seis piezas que, al igual que los mencionados a continuación, se basan en construcciones *autosemejantes*. Roger Penrose en 1973 y 1974 propone un conjunto de 6 piezas y dos conjuntos de dos piezas basadas en la proporción áurea  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . A estos conjuntos se les conoce como P1, P2 y P3. En 1977 Robert Ammann descubre varios conjuntos de dos piezas, también basados en la proporción áurea.

**Definición 1.12.** Un conjunto de prototeselas se llama *conjunto aperiódico* si únicamente admite teselaciones no-periódicas. A las teselaciones con conjuntos aperiódicos las llamaremos *teselaciones aperiódicas*.

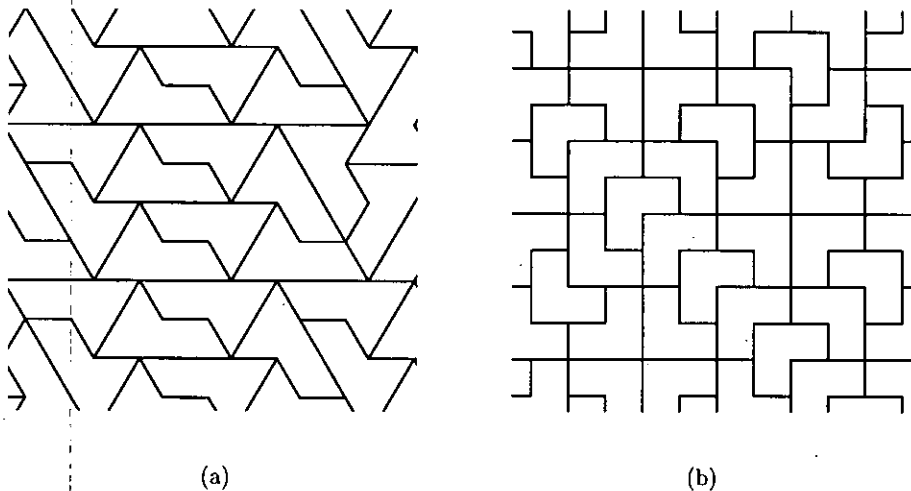
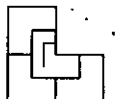
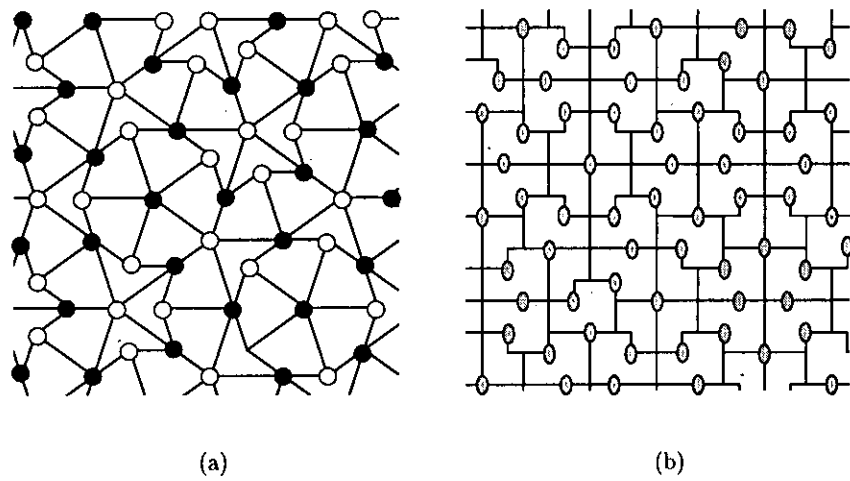


Figura 1.9 — Teselaciones no-periódicas. (a) la esfinge, (b) la L.





**Figura 1.10** — Tesselaciones con conjuntos aperiódicos. (a) Penrose P3, (b) Ammann A2.



# Capítulo 2

## Teselaciones

### 2.1 Reglas de pegado

La existencia de un conjunto aperiódico finito (R. Berger, 1966), condujo a la búsqueda de nuevos conjuntos aperiódicos de menor tamaño. A la fecha se conocen varios conjuntos de dos piezas que invariablemente se han descubierto usando el mismo método; encontrar una teselación no-periódica<sup>1</sup> de pocas prototeselas y modificar éstas para forzar la no-periodicidad. De los conjuntos más notables y conocidos se encuentran las teselaciones de Penrose que usaremos en esta sección, en particular el conjunto P2 que consiste de papalotes y flechas. En el apéndice A que es un breve resumen de [4, capítulo 10], se muestra la construcción de los conjuntos de Penrose.

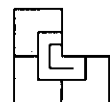
Esta idea de modificar un conjunto de prototeselas que admite alguna teselación no-periódica para obtener un conjunto aperiódico se traduce esencialmente en agregar colores o decoraciones a las piezas y condiciones de pegado válidas que dependen de dicha decoración. A estas restricciones las llamamos *reglas de pegado*.

En la mayoría de los casos es posible deformar las aristas de las prototeselas de tal manera que solamente admitan teselaciones no-periódicas, con lo cual se puede prescindir de las decoraciones.

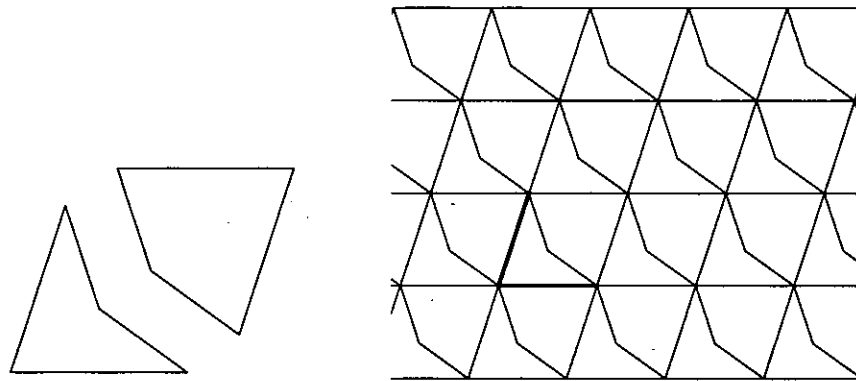
En la figura 2.1 se muestra un conjunto de prototeselas, formado por un papalote y una flecha, cuya construcción está basada en la proporción áurea (ver apéndice A), junto con una teselación periódica.

---

<sup>1</sup>Estas teselaciones no-periódicas son además teselaciones de sustitución, que estudiaremos en la sección 2.2

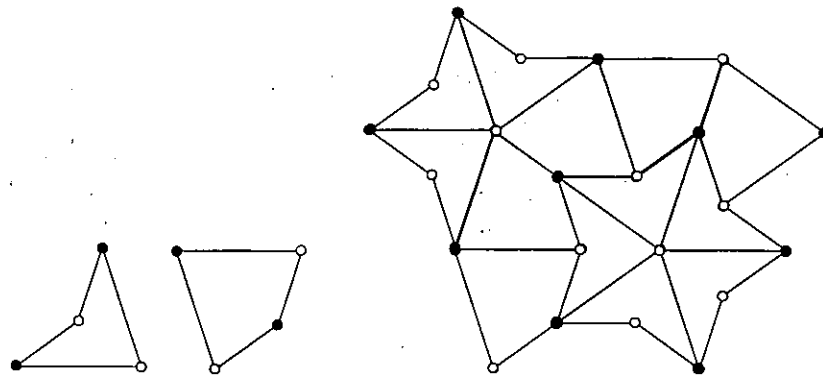






**Figura 2.1** — Conjunto de prototeselas que admite teselaciones periódicas.

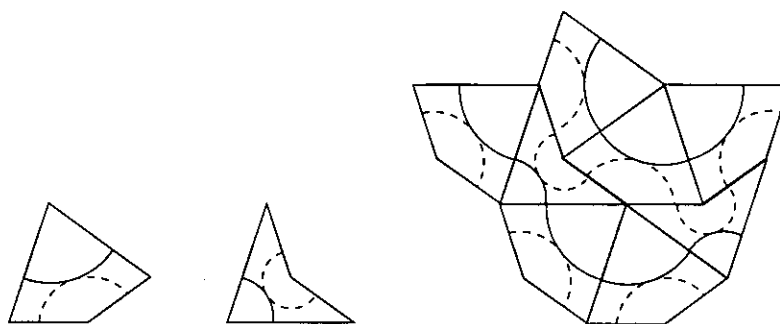
Si a los vértices de estas prototeselas les asignamos los colores blanco y negro como en la figura 2.2 y exigimos que coincidan los colores de los vértices de las teselas, entonces obtenemos un conjunto aperiódico.



**Figura 2.2** — Papalote y flecha de Penrose. Los vértices están marcados de distintos colores, que en la figura los denotamos por círculos blancos y negros.

Otra forma de forzar la no-periodicidad de este conjunto es decorando las prototeselas como se muestra en la figura 2.3 donde lo que se pide ahora es que tanto las curvas punteadas como las continuas de las teselas coincidan.





**Figura 2.3** — Papalote y flecha de Penrose. Ahora las piezas están decoradas y la regla de pegado que se asigna es que las curvas continuas coincidan así como las curvas punteadas.

## 2.2 Teselaciones de sustitución

En esta sección veremos nuevas caracterizaciones de las teselaciones que permitirán, dado un conjunto de prototeselas, definir qué es sustitución para poder construir teselaciones de sustitución y, finalmente, saber cuándo una teselación de sustitución es no-periódica.

Como antes, pediremos que las prototeselas sean conjuntos simplemente conexos y acotados.

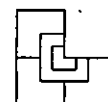
Todas las definiciones y teoremas de esta sección pueden generalizarse para cualquier espacio métrico  $X$ , básicamente hay que reemplazar  $\mathbb{E}^2$  por  $X$ , pero nuestro interés es el plano euclidiano y para facilitar la exposición trabajaremos en  $\mathbb{E}^2$ .

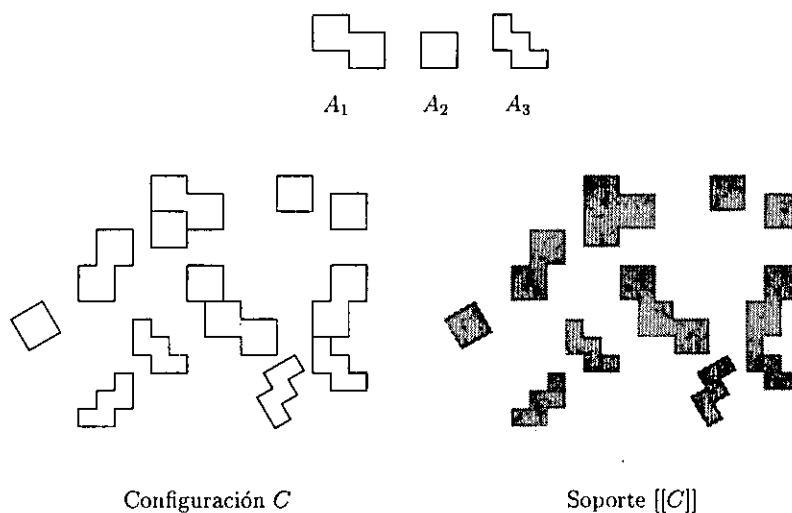
**Definición 2.1.** Sea  $T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un conjunto de prototeselas en  $\mathbb{E}^2$ . Una configuración  $C$  en  $T$ , que denotaremos por  $C(T)$  es un conjunto formado por copias de prototeselas,  $C(T) = \{gA_i\}$ , con  $g$  isometría que cumple que si  $gA_i$  y  $hA_j$  son distintos en  $C$ , entonces  $\text{int}(gA_i) \cap \text{int}(hA_j) = \emptyset$ .

**Definición 2.2.** El soporte de  $C(T)$  es  $[[C(T)]] = \bigcup_{gA \in C} gA$ .

El soporte de una configuración es simplemente un conjunto de puntos de  $\mathbb{E}^2$  como se muestra en la figura 2.4, con lo cual basta pedirle a una configuración que su soporte sea el plano euclidiano para tener una teselación,

*Las prototeselas  
son  
homeomorfas a  
discos cerrados.*





**Figura 2.4** — Arriba  $T = \{A_1, A_2, A_3\}$ , a la izquierda una configuración  $C(T)$ , y a la derecha su soporte  $[[C(T)]]$ .

ya que por definición las teselas de una configuración no se intersecan salvo posiblemente en sus fronteras.

*Una teselación es un conjunto numerable de teselas que cubren el plano y que no se traslapan.*

**Definición 2.3.** Una *teselación* es una configuración en  $T$  cuyo soporte es el plano euclidiano, es decir,  $C(T)$  es una teselación si  $[[C(T)]] = \mathbb{E}^2$ .

**Definición 2.4.** Denotaremos al conjunto formado por todas las posibles configuraciones en  $T$  como  $\mathcal{C}_T$ .

Del conjunto formado por todas las posibles configuraciones  $\mathcal{C}_T$ , nos interesa particularmente el subconjunto de *teselaciones* que definimos a continuación.

**Definición 2.5.** Al conjunto formado por todas las posibles teselaciones admitidas por  $T$  lo denotaremos como  $\Sigma_T$ ,

$$\Sigma_T = \{C(T) \in \mathcal{C}_T : [[C(T)]] = \mathbb{E}^2\}.$$

Cuando sea claro cuál es el conjunto de prototeselas  $T$ , omitiremos en ocasiones la referencia que a éste se hace, es decir, escribiremos  $C$  en lugar de  $C(T)$  para alguna configuración en  $T$ .



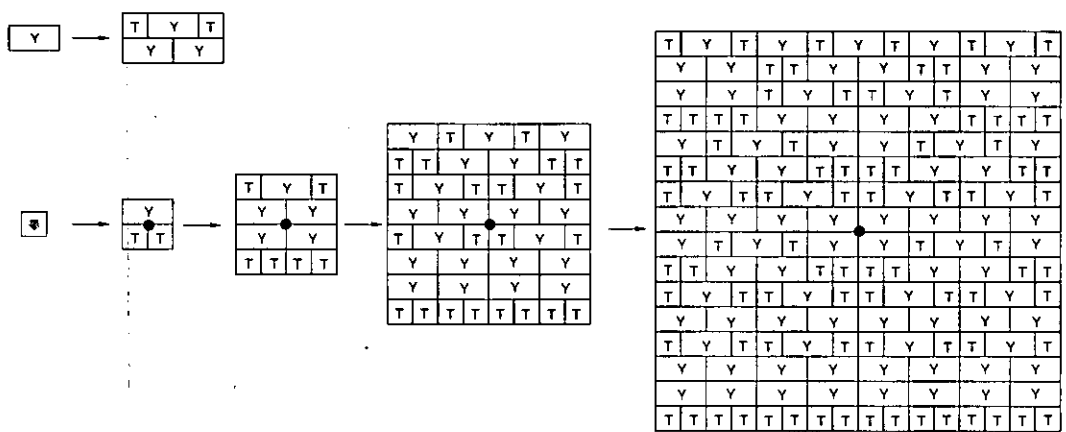


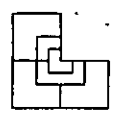
Figura 2.5 — Ejemplo de sustitución; las letras T y Y sirven para limitar las simetrías del cuadrado y del rectángulo, evitando las rotaciones.

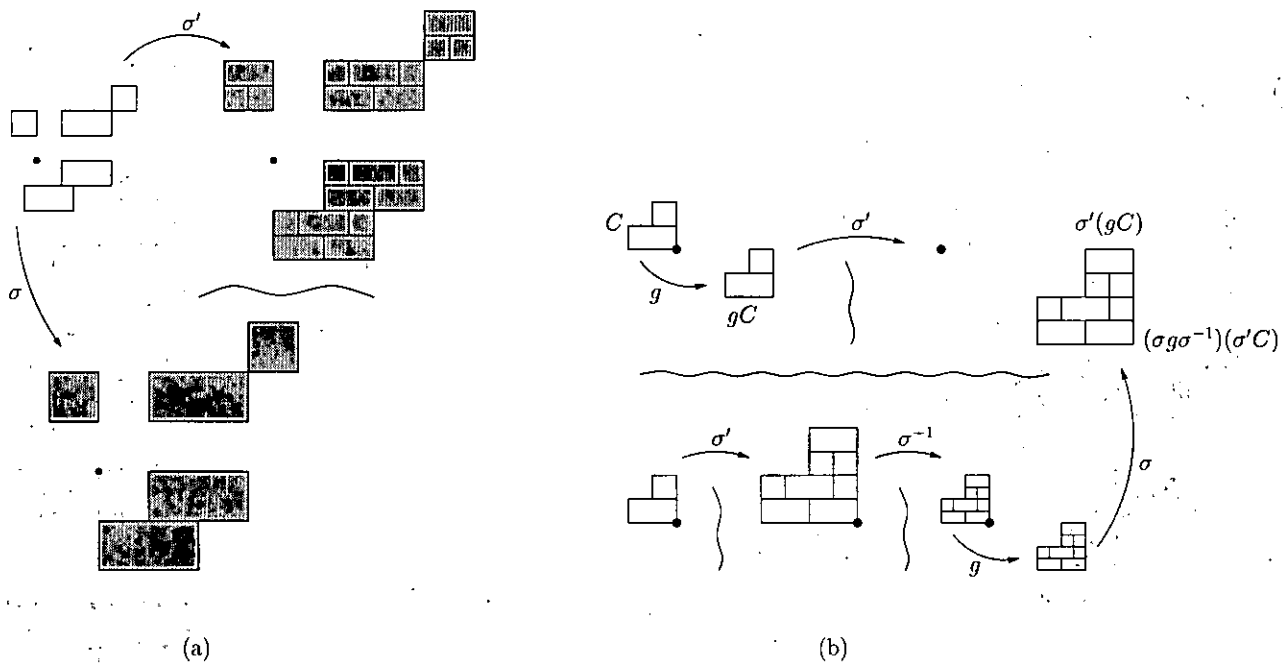
Supongamos que tenemos un conjunto de dos prototeselas,  $T = \{A_1, A_2\}$ , donde  $A_1$  es un rectángulo en proporción 2 : 1 y  $A_2$  es un cuadrado, y definimos una correspondencia como la que se muestra en la figura 2.5 con constante de expansión 2.

A este tipo de correspondencia, donde a cada prototesela se le asignan una expansión y una regla de “llenado” de copias de prototeselas se conoce como *sustitución*. El aplicar varias veces la sustitución a una prototesela da como resultado una tesela semejante a mayor escala que contiene varias copias de las prototeselas originales, posiblemente no todas. A estas teselas a mayor escala se les llama *superteselas*.

Continuando con el ejemplo de la figura 2.5, supongamos que fijamos como origen el centro del cuadrado, entonces cada vez que apliquemos la correspondencia, el cuadrado se expandirá al doble y deberá ser llenado según lo indica dicha correspondencia. Es claro que si aplicamos esta sustitución *ad infinitum* obtendremos una teselación. Este tipo de teselaciones se llaman *teselaciones de sustitución*.

A *grosso modo* una *sustitución* es una regla de correspondencia que a cada prototesela de un conjunto  $T$  la manda a una expansión de ella misma que contiene “información” de cómo está construida con base en prototeselas de  $T$ ; es decir, al sustituir  $A \in T$ , obtendremos una  $gA$ , donde  $g$  es una expansión y  $gA$  estará formada por copias de todas las prototeselas de  $T$ .





**Figura 2.6** — (a) El soporte de la sustitución de una configuración es igual a la expansión del soporte de la configuración. Esta configuración puede verse como la unión de dos (o más) configuraciones. (b) La parte superior muestra como se aplica la sustitución a la imagen de una configuración bajo alguna isometría y la parte de abajo muestra que da lo mismo aplicar la sustitución seguida de una contracción, después aplicar la isometría y finalmente la expansión.

**Definición 2.6.** Sea  $\sigma : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  una expansión, es decir, una transformación afín tal que  $d(\sigma(P), \sigma(Q)) > d(P, Q)$ . Diremos que  $\sigma' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es una *sustitución* en  $T$  con expansión  $\sigma$  si y sólo si satisface:

1.  $[[\sigma' C]] = \sigma[[C]]$ , para toda  $C \in \mathcal{C}$ ,
2.  $\sigma'(C_1 \cup C_2) = \sigma' C_1 \cup \sigma' C_2$ , para todas  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ,
3.  $\sigma'(gC) = (\sigma g \sigma^{-1})(\sigma' C)$ , para toda isometría  $g$ , y toda  $C \in \mathcal{C}$ .

Las primeras dos condiciones de esta definición se ilustran en la figura 2.6 (a), y la tercera en la figura 2.6 (b).

Las sustituciones que tienen interés en materia de teselaciones son aquellas en las que toda prototesela, después de sustituir un número finito de



veces, contiene copias de las otras prototeselas. A este tipo de sustitución se le llama *primitiva* (ver definición 2.9).

**Definición 2.7.** Una *supertesela*  $A^n$  se obtiene al aplicar  $n$  veces la sustitución a una prototesela  $A \in T$ , es decir,  $A^n = (\sigma')^n A$ .

Sea  $\tau$  una teselación; si a cualquier conjunto acotado formado por teselas (es decir, cualquier configuración acotada) la podemos llevar mediante alguna isometría a alguna supertesela, entonces diremos que la teselación es una *teselación de sustitución*.

En la figura 2.5 se muestran las primeras cuatro superteselas del cuadrado ( $A_2$ ), donde cada flecha representa aplicar la sustitución una vez, de tal forma que el cuadrado de la derecha es  $A_2^4 = (\sigma')^4 A_2$ .

**Definición 2.8.** Una *teselación de sustitución* es una teselación  $\tau \in \Sigma_T$ , tal que para toda configuración acotada  $C$  de  $\tau$  existen  $g$  isometría,  $n \in \mathbb{N}$  y  $A \in T$  tales que  $gC \subset (\sigma')^n A$ .

En otras palabras una teselación de sustitución es una teselación en la cual desde cualquier posición, por muy lejos que podamos ver, siempre parecerá que estamos metidos en una supertesela gigante.

Supongamos que vivimos dentro de una  $\square$  de la teselación que se muestra en la figura 2.7. Si pudieramos levantar un poco la vista, notaríamos que la  $\square$  donde vivimos está contenida en una  $\square$  más grande; si pudieramos ver un poco más lejos veríamos que esta  $\square$  grande está metida en una  $\square$  aún más grande, y así ocurriría siempre que veamos más y más lejos sin importar cual fue la  $\square$  que escogimos.

La figura 2.8 muestra ejemplos clásicos de teselaciones de sustitución. Es claro que para cualquier configuración acotada existirá en (a) un cuadrado y en (b) un triángulo suficientemente grandes que contengan a dicha configuración.

**Definición 2.9.** Sea  $\sigma'$  una sustitución. Diremos que  $\sigma'$  es *primitiva* si para todas  $A, B \in T$ , existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $g$  isometría tales que  $gB \subset (\sigma')^n A$ .

Para el estudio de teselaciones siempre nos interesarán las sustituciones primitivas. Un ejemplo de teselación de sustitución no primitiva se muestra en la figura 2.9.

Si definimos un sistema de sustitución primitiva, es decir una expansión y una sustitución sobre un conjunto de prototeselas  $T$ , cualquier teselación



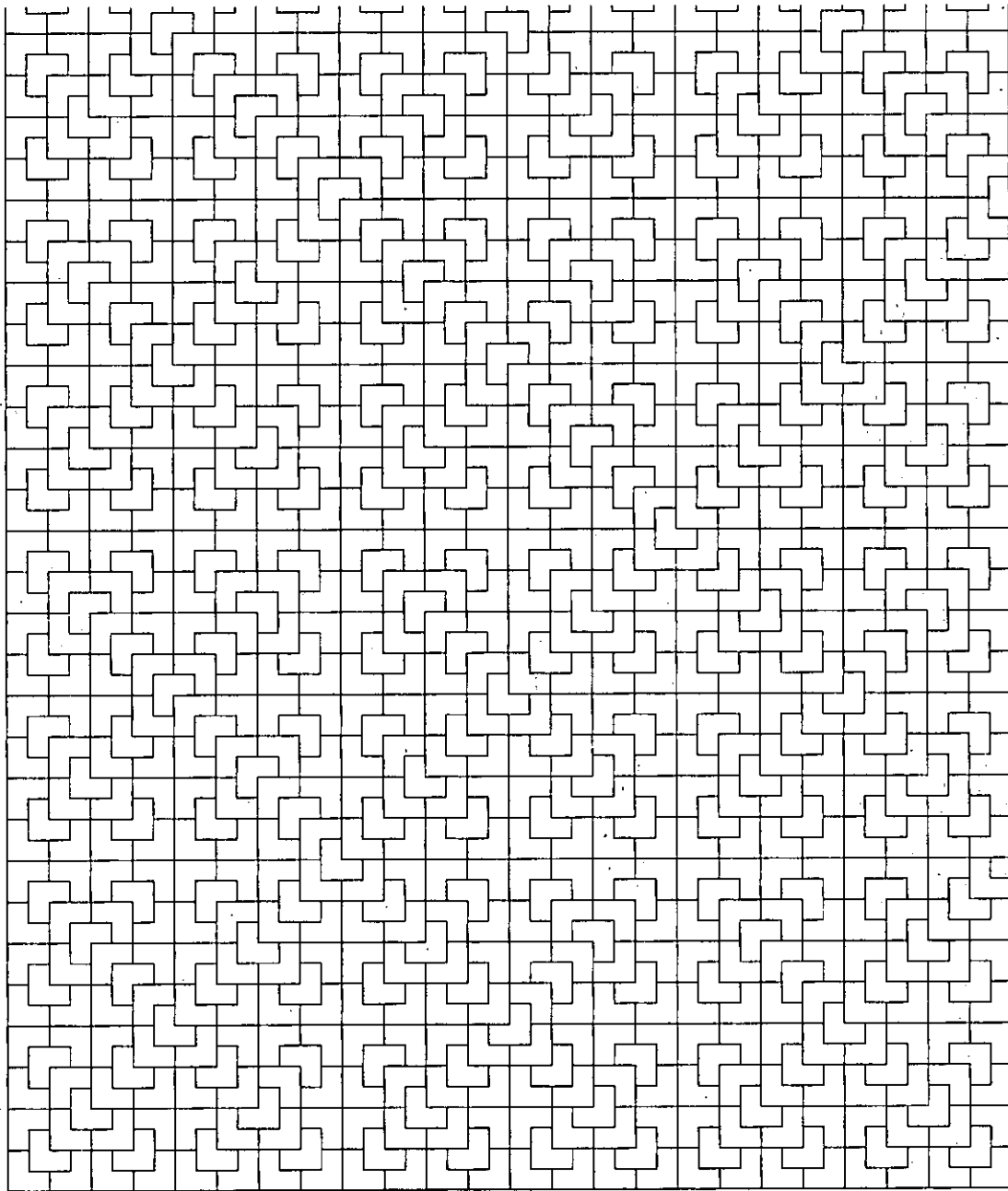


Figura 2.7 — Una teselación de sustitución formada por  $\square$ .



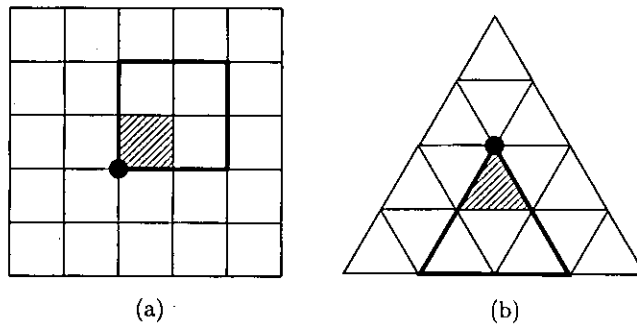


Figura 2.8 — Una de las opciones para sustituir (a) los cuadrados y (b) los triángulos.

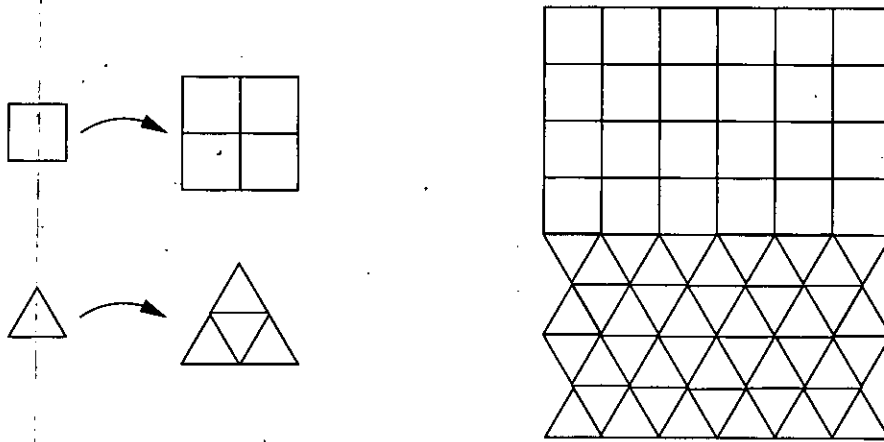


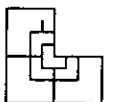
Figura 2.9 — Teselación de sustitución no primitiva.

de sustitución  $\tau$  puede verse como imagen de otra teselación de sustitución,  $\tau = \sigma' \tau_1$ , y ésta a su vez es imagen de otra; es decir, existe una sucesión de teselaciones de sustitución, todas ellas imágenes de la anterior bajo la sustitución. Con esto tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.** *Sea  $\sigma'$  una sustitución primitiva. Una teselación  $\tau \in \Sigma_T$  es una teselación de sustitución si y sólo si existe una sucesión*

$$\dots, \tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_2, \tau_1, \tau_0 = \tau,$$

tal que  $\sigma' \tau_k = \tau_{k-1}$ .





**Definición 2.11.** Una teselación es *autosemejante* si existe

$$\tau = \tau_n, \dots, \tau_1, \tau_0 = \tau$$

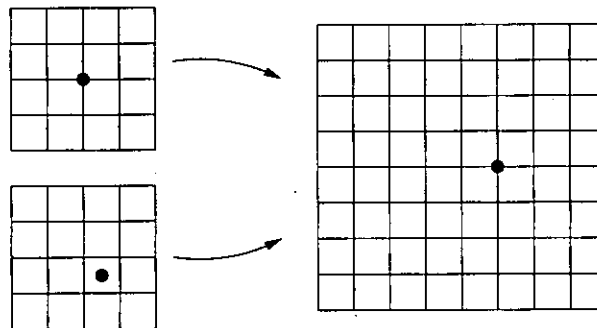
tal que  $\sigma' \tau_k = \tau_{k-1}$ .

La sucesión del teorema 2.10 es única cuando la preimagen de la teselación de sustitución es única.

**Definición 2.12.** Sea  $\sigma'$  una sustitución en  $T$ . Al conjunto formado por todas las posibles teselaciones de sustitución admitidas por  $T$  lo denotaremos como  $\Sigma_{T, \sigma'}$ .

**Definición 2.13.** Sea  $\sigma'$  una sustitución en  $T$ . Se dice que las teselaciones en  $\Sigma_{T, \sigma'}$  tienen descomposición única si y sólo si  $\sigma' : \Sigma_{T, \sigma'} \rightarrow \Sigma_{T, \sigma'}$  es uno a uno.

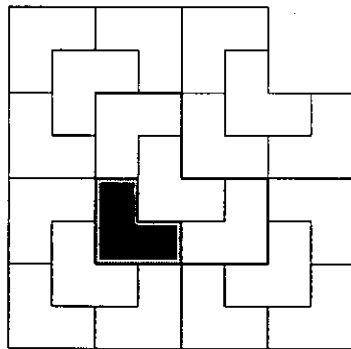
En las figuras 2.10 y 2.11 se muestran algunos ejemplos de teselaciones de sustitución. Es importante observar que es posible escoger muchas formas distintas de componer las teselaciones formadas por cuadrados, a diferencia de la teselación formada por  $\square$ , donde cada  $\square$  pequeña está contenida en una única  $\square$  grande.



**Figura 2.10** — Dos formas distintas de sustituir y obtener la misma imagen.

Dicho de otra forma, las teselaciones de la figura 2.8 no tienen descomposición única, ya que ambas pueden obtenerse de sustituciones distintas; en la figura se muestra que las teselas grises están contenidas en una de cuatro posibles superteselas después de haber aplicado la sustitución, con el centro de expansión señalado, mientras que la teselación de sustitución formada por





**Figura 2.11** — La única  $\sqsubset$  grande que contiene a la  $\sqsubset$  marcada en gris.

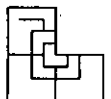
$\sqsubset$  que en adelante llamaremos L-teselación de sustitución, de la figura 2.11 es de descomposición única, es decir, esta teselación es imagen de una única teselación a la cual se le aplicó la sustitución.

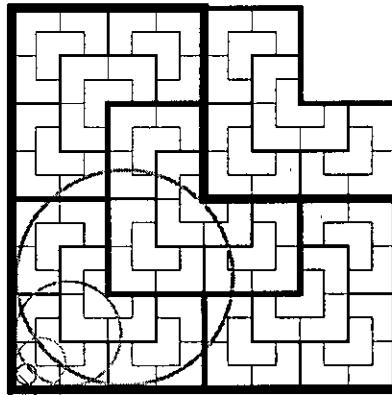
**Teorema 2.14.** *Si toda teselación de sustitución  $\tau$  en  $\Sigma_T$  es de descomposición única, entonces  $\tau$  es no-periódica.*

*Demostración.* La principal idea es que si existe una traslación como simetría de una teselación de sustitución con descomposición única, esta traslación debe ser simetría para cualquier nivel de sustitución de la misma.

Como nuestro conjunto de prototeselas es finito, podemos inscribir una circunferencia de radio  $c$  en las teselas originales, una circunferencia de radio  $\lambda c$  en las imágenes de la expansión de las teselas, es decir en  $\sigma T_i$ , y continuar así. Después de  $k$  sustituciones, el radio de la circunferencia inscrita será  $\lambda^k c$ .

Si la teselación tuviera una traslación como simetría, podríamos hacerla coincidir consigo misma al trasladarla una cierta distancia finita  $d$  en alguna dirección. Pero esto sólo es posible cuando  $d > \lambda^k c$ , ya que de otra forma la traslación provocaría que las teselas se encimaran respecto a sus posiciones originales. Claramente, para una cierta  $k$  la sustitución  $\sigma^k$  que tendrá expansión  $\sigma^k$  hará que el radio de la circunferencia sea mayor a la distancia de la traslación,  $\lambda^k c > d$ , pero entonces la traslación caerá completamente dentro de las circunferencias inscritas de las teselas del nivel  $k$ . Por lo tanto la traslación no es simetría de la teselación después de  $k$  sustituciones. Esto implica que tampoco es una simetría de la teselación original, ya que si lo





**Figura 2.12** — El grosor de las líneas indica el nivel de sustitución.

fuera habría teselas de la téselación original que pertenecerían a más de una tesela de nivel de sustitución  $k$  contradiciendo la hipótesis.  $\square$

El converso de este teorema ha sido parcialmente probado en [7], pero aún no se sabe si en general es cierto.



# Capítulo 3

## El trilobite y la cruz

En este capítulo veremos que el conjunto de prototeselas mostradas en la figura 3.1 junto con la regla de pegado asociada, forman un conjunto aperiódico.

*Cualquier  
teselación  
formada por un  
conjunto  
aperiódico es  
no-periódica.*

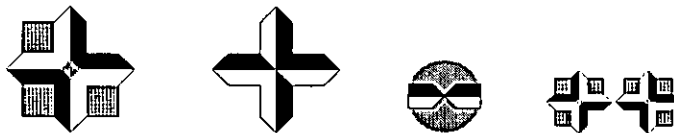


Figura 3.1 — El trilobite, la cruz, la regla de pegado y un ejemplo.

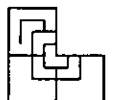
La regla de pegado consiste en hacer coincidir los colores negro y blanco de las puntas de trilobites y cruces cuando están colocadas una contra otra.

El trilobite y la cruz aprovechan la estructura dada por las L-teselaciones de sustitución que explicaremos con detalle en la siguiente sección.

### 3.1 Características de las L-teselaciones de sustitución

Para facilitar la discusión pondremos nombres a los vértices de la prototesela  $\square$  como se muestra en la figura 3.2.

La primera observación importante respecto a las L-teselaciones de sustitución formadas por  $\square$  es que los codos de cualquier  $\square$  siempre coinciden



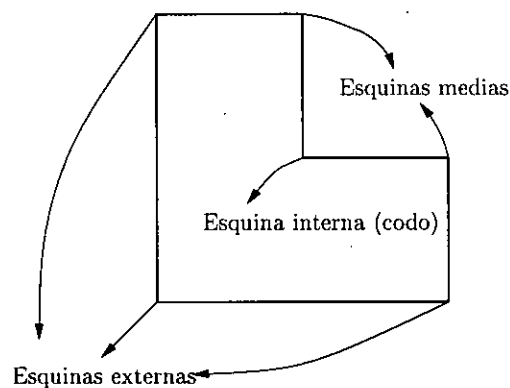


Figura 3.2 — Tipos de vértices de una  $\sqsubset$ .

con vértices externos, nunca con medios. Esto podemos verlo usando un argumento inductivo respecto a la forma en que se construye esta teselación a partir de dividir una  $\sqsubset$  en cuatro nuevas  $\sqsubset$  y después ampliar para que cada una de ellas tenga el tamaño de la original. Definimos la sustitución como se muestra en la figura 3.3.

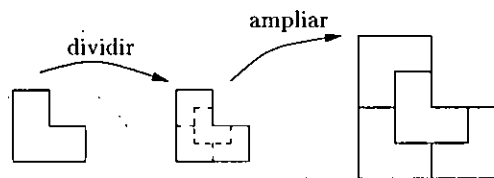


Figura 3.3 — (a) Construcción de la  $\sqsubset$ -teselación.

Podemos construir una infinidad de L-teselaciones de sustitución como mostraremos a continuación. Debemos tener cuidado dónde fijamos el origen para garantizar que cubran el plano. La siguiente teselación aparece en [4, 5, 6]. Iniciamos con dos  $\sqsubset$  como se muestra en la figura 3.4 y fijamos el vértice indicado como origen del plano. Aplicamos la sustitución *ad infinitum* obteniendo la teselación.

Otra L-teselación de sustitución se muestra en la figura 3.5. Esta vez comenzamos con una configuración de cuatro  $\sqsubset$ . Es claro que estas teselaciones son distintas; la única simetría que tiene la primera es una reflexión en la diagonal, mientras que la segunda además tiene cuartos de giro.



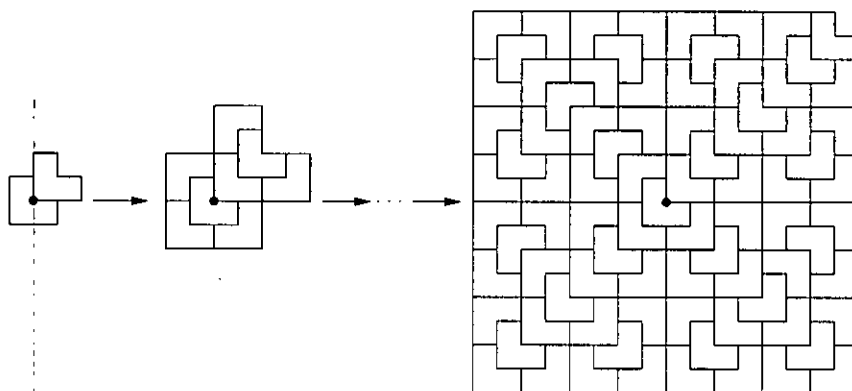


Figura 3.4 — Fijamos un vértice como origen del plano.

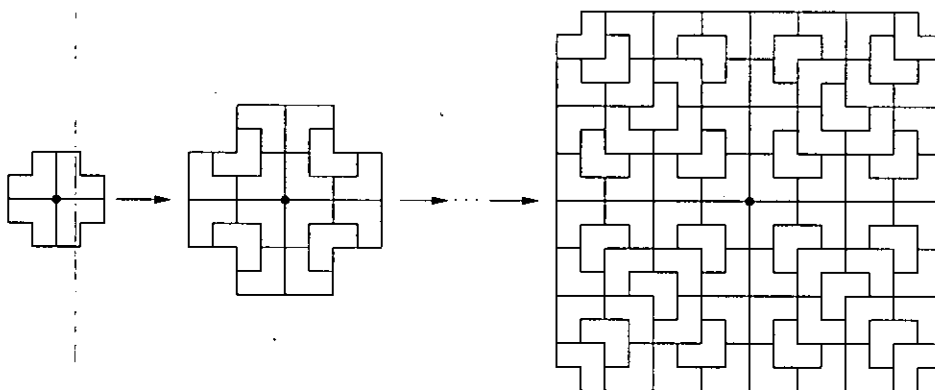
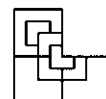
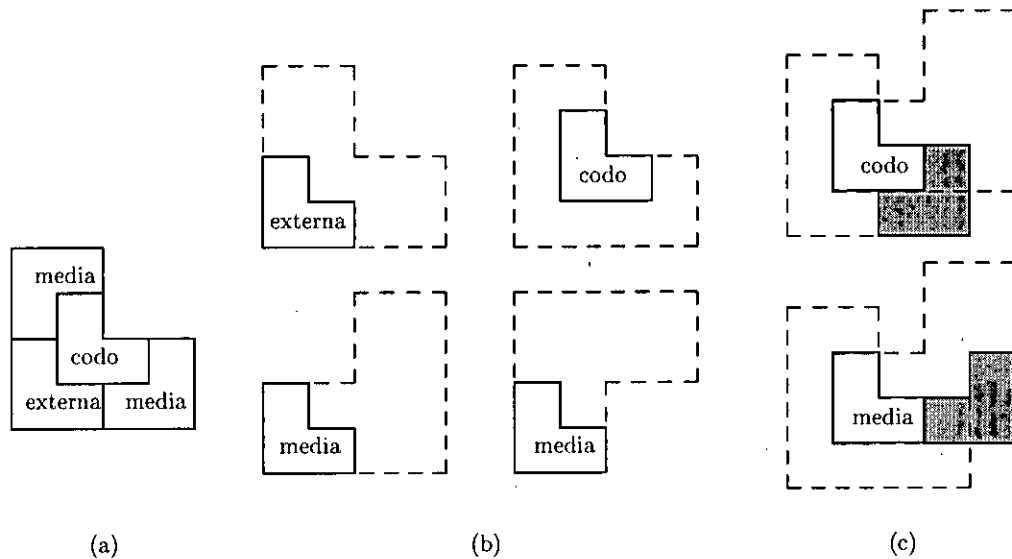


Figura 3.5 — Fijamos un vértice como origen del plano.

Otra observación importante es que cada  $\sqsubset$  pertenece a una única  $2\text{-}\sqsubset$ . Para ver esto podemos adoptar los nombres que dimos a los vértices (figura 3.2), ahora para las posiciones que puede tener cada  $\sqsubset$  en la  $2\text{-}\sqsubset$  que la contiene, como se muestra en la figura 3.6 (a), con lo cual basta observar que cualquiera de estas posiciones determinan la manera en que está formada la  $2\text{-}\sqsubset$  (figura 3.6 (b)).

La observación anterior nos permite ahora construir una infinidad de L-teselaciones de sustitución de la siguiente forma: iniciamos con una  $\sqsubset$  y elegimos aleatoriamente la posición que debe ocupar en la  $2\text{-}\sqsubset$ , para lo cual tenemos cuatro opciones. Aleatoriamente obtenemos la posición que debe





**Figura 3.6** — (a) Nombres de  $\sqsubset$  dependiendo de la posición que tiene respecto a la  $2\text{-}\sqsubset$  que la contiene. (b) Existe una única  $2\text{-}\sqsubset$  que contiene a cada  $\sqsubset$ .

ocupar la  $2\text{-}\sqsubset$  en la  $3\text{-}\sqsubset$  que la contiene y continuamos así obteniendo aleatoriamente la posición de la  $m\text{-}\sqsubset$  en la  $(m+1)\text{-}\sqsubset$  que la contiene.

Con el método anterior debemos escoger adecuadamente el centro de expansión, que será el único punto fijo, para obtener una teselación bien definida.

Por otro lado no podemos garantizar que la sustitución cubrirá el plano completo. De hecho es fácil construir infinidad de cuadrantes y semiplanos distintos si restringimos las posibles posiciones que cada  $m\text{-}\sqsubset$  debe ocupar en la  $(m+1)\text{-}\sqsubset$ . El conjunto de todas estas configuraciones es claramente un subconjunto del caso en que no restringimos las posibles posiciones que pueden ocupar las  $\sqsubset$ .

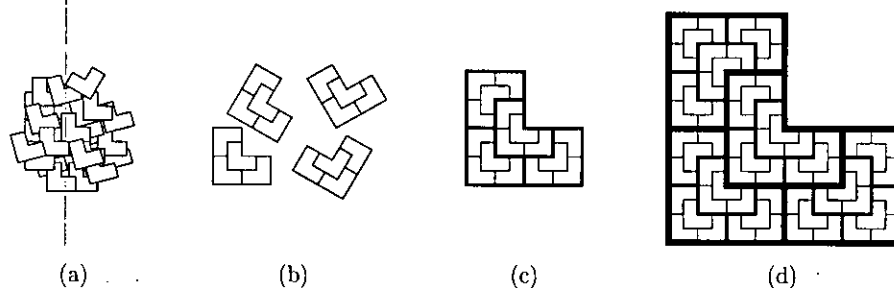
Es claro que cuando obtenemos una teselación usando este método, la teselación será de sustitución, ya que cualquier configuración acotada que tomemos en ella pertenecerá a alguna  $n\text{-}\sqsubset$ , para  $n$  suficientemente grande.

En cada proceso de la construcción tenemos cuatro opciones por lo que tenemos una familia no numerable de L-teselaciones de sustitución.

Dada una  $\sqsubset$  y su primer nivel de división, podemos ver que tres de las cuatro  $\sqsubset$  pequeñas que la forman tienen forzadas la forma en que pegan sus codos.



Si ahora nos fijamos en el proceso inverso de construcción, es decir, si ahora lo que tenemos es un conjunto de  $\square$  y queremos construir una teselación auto-semejante basada en estas piezas, lo que tenemos que hacer es, para el primer nivel, pegar conjuntos de cuatro  $\square$ , que llamaremos  $2-\square$  (figura 3.7(b)), para el segundo nivel pegar conjuntos de cuatro  $2-\square$  formando  $\square$  más grandes (figura 3.7(c) y (d)) y continuar así infinitamente. Es inmediato que los codos de cada  $i-\square$  coinciden con vértices externos en el nivel  $i$ , pero también es fácil observar que los codos de cada  $(i - 1)-\square$  coinciden con vértices externos en el mismo nivel y así sucesivamente hasta llegar a las piezas originales  $\square$ . Por lo cual podemos afirmar que los codos de la  $\square$ -teselación siempre coinciden con vértices externos.



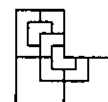
**Figura 3.7** — (a) Conjunto de  $\square$ . (b)  $2-\square$  que son  $\square$  más grandes. (c)  $3-\square$ . (d)  $4-\square$ .

Supongamos, por ejemplo, que una  $\square$  es codo de una  $2-\square$  y a la vez es media de otra  $2-\square$ , esto implicaría que las  $2-\square$  que la contienen se intersecan como se ve en la figura 3.6 (c), donde las  $\square$  grises se intersecan con lo cual no tenemos una teselación. Este argumento es válido para cualquier nivel de la  $\square$ -teselación, es decir, cualquier  $m-\square$  pertenece a una única  $(m + 1)-\square$ , con lo que demostramos el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Toda L-teselación de sustitución es no-periódica.*

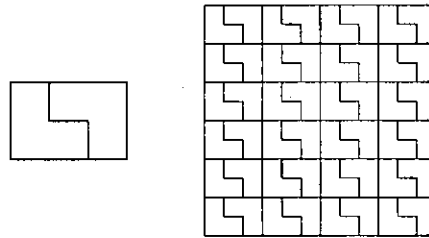
*Demostración.* Toda L-teselación de sustitución es de descomposición única ya que las  $m-\square$  se pueden componer de forma única en  $(m + 1)-\square$  para toda  $m = 0, 1, 2, \dots$ , por lo tanto, por el teorema 2.14, la teselación es no-periódica.  $\square$

Es evidente que existen teselaciones con  $\square$  como prototesela que no satisfacen esta sustitución. Si los codos pudieran coincidir con los vértices



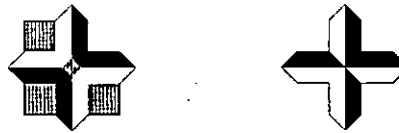


medios, entonces podríamos formar rectángulos (figura 3.8) con los cuales teselar periódicamente.



**Figura 3.8** — Rectángulo formado al hacer coincidir el codo con un vértice medio.

### 3.2 De L a T y C



**Figura 3.9** — El trilobite y la cruz.

**Lema 3.2.** *Toda L-teselación de sustitución se puede recomponer en una teselación de trilobites y cruces.*

*Demostración.* Dada la L-teselación, cada  $\sqsubset$  contiene un trilobite  $\ast$ . Podemos sustituir cada  $\sqsubset$  por una  $\ast$  (figura 3.10). Los trilobites no se superponen; ya que cada codo de cualquier  $\sqsubset$  siempre descansa en una esquina externa de otra  $\sqsubset$ .

Es importante observar que si el vertice externo de una  $\sqsubset$  no coincide con el codo de otra, entonces coincidirá con tres vértices externos, de tal forma que los espacios que quedan después de recomponer las  $\sqsubset$  por  $\ast$  pueden ser rellenados por cruces ( $\ast$ ).



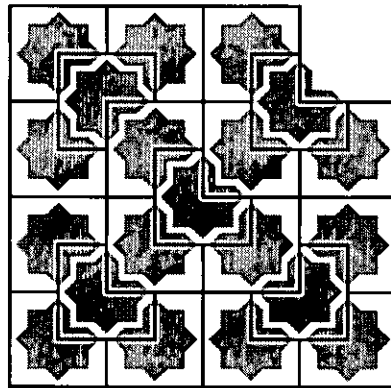


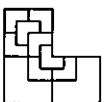
Figura 3.10 — Sustitución de  $\sqsubset$  por  $\oplus$

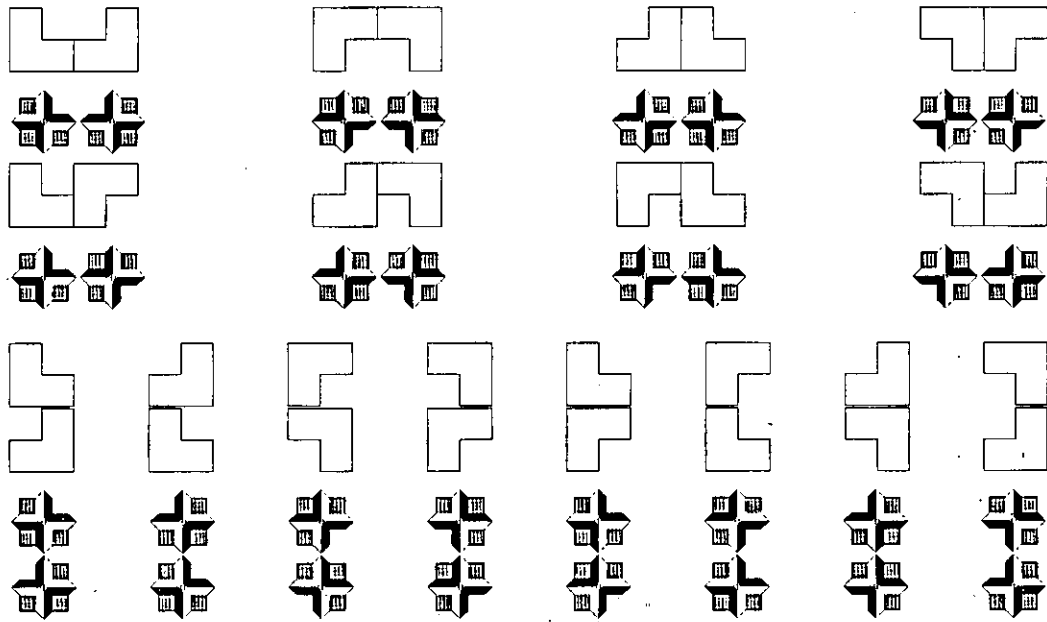
Para ver que las cruces preservan las reglas de pegado, consideremos cualquier cadena de aristas que forman una línea recta de la L-teselación. Estas cadenas pueden ser infinitas o terminar en  $\sqsubset$  por ambos lados. En este caso las  $\sqsubset$  que forman los extremos de las cadenas, sin importar que tan largas sean (pero finitas), estarán orientadas como se muestra en la figura 3.11, donde además se muestra cómo se recomponen en trilobites. Las cruces pegan correctamente siendo las marcas de los extremos de la cadena las que determinan la manera en que debemos acomodarlas. Si la cadena es infinita y se extiende en una sola dirección la  $\sqsubset$  del lado en que es finita determina la marca; en caso de que se extienda en ambos sentidos entonces tenemos la opción de escoger las marcas. En cualquier caso, las reglas de pegado se respetan, por lo que podemos concluir que cualquier L-teselación se puede recomponer en una teselación de trilobites y cruces.  $\square$

### 3.2.1 Configuraciones de trilobites

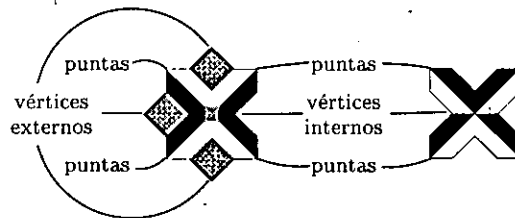
Para facilitar la discusión daremos nombres a los elementos importantes de cada una de las prototeselas como se muestra en la figura 3.12.

Notemos que, como puntas deben pegar con puntas, el vértice interno del trilobite únicamente puede pegar con algún vértice externo del trilobite. Análogamente los vértices externos del trilobite solamente pueden pegar con vértices internos, ya sea del trilobite o de la cruz. De esta forma tenemos que las únicas opciones para rodear un trilobite dado  $t$  alrededor de sus vértices





**Figura 3.11** — Recomposición de  $\sqsubset$  consecutivas en trilobites. Estos son también los posibles extremos de cualquier cadena de aristas.



**Figura 3.12** — Partes importantes del trilobite y la cruz.



externos son, salvo reflexión:  $TTT$ ,  $CTC$ ,  $CCC$ ,  $CTT$ ,  $CCT$  y  $TCT$ . donde  $T$  y  $C$  representan un trilobite y una cruz respectivamente. La figura 3.13 muestra estas opciones.

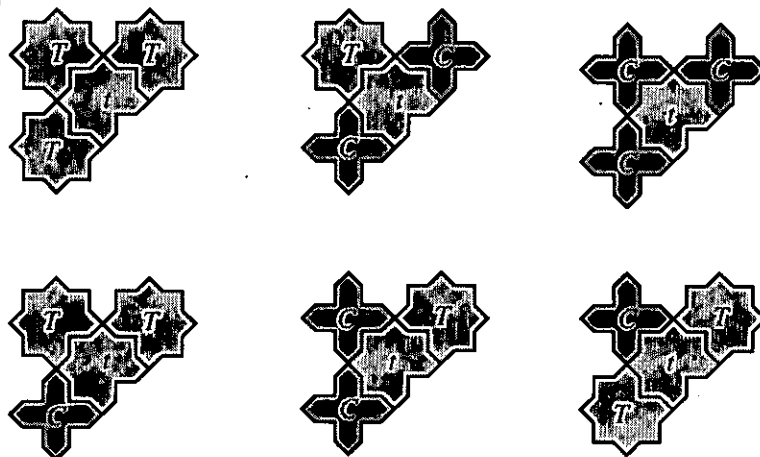


Figura 3.13 — Las posibles formas de rodear un trilobite  $t$  por sus vértices externos.

En la figura 3.14 se muestra que las configuraciones  $CCT$  y  $TCT$  no son válidas ya que violan las reglas de pegado.

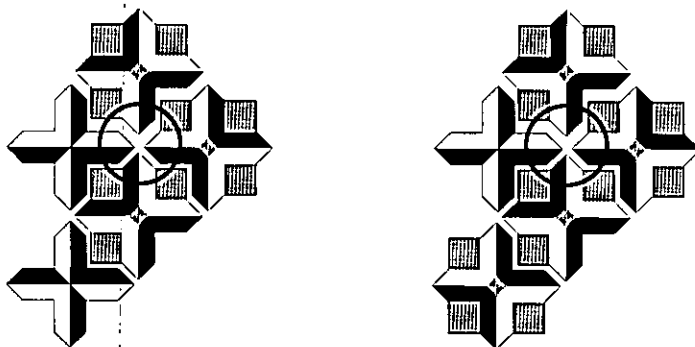
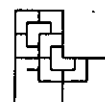


Figura 3.14 —  $CCT$  y  $TCT$  no son válidas. Las circunferencias muestran la forma en que se viola la regla de pegado al estar forzados los trilobites superiores.

Por tanto los posibles tipos de trilobites son  $TTT$ ,  $CCC$ ,  $CTT$  y  $CTC$  (figura 3.15), salvo reflexión.



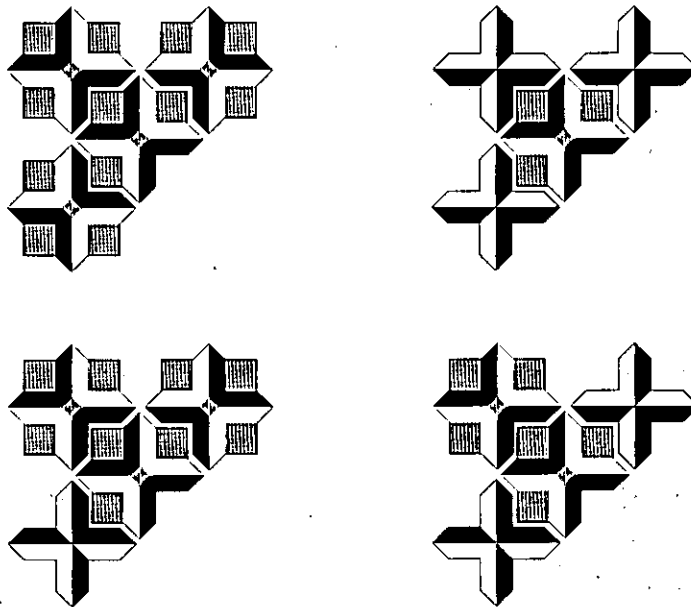


Figura 3.15 — *TTT*, *CCC*, *CTT* y *CTC* son configuraciones válidas.

Demostraremos que toda teselación formada por trilobites y cruces es no-periódica. Si tenemos una teselación  $\tau$  formada por trilobites y cruces, y suponemos que tiene alguna traslación como simetría, al aplicar deslizamientos en la dirección de la traslación, ésta seguirá siendo simetría de la teselación transformada.

La idea es que después de aplicar deslizamientos adecuados a  $\tau$  en la dirección de la supuesta traslación, obtendremos parches —configuraciones conexas— que se pueden recomponer en  $\square$  formando configuraciones de superteselas  $\square$ . Entonces, después de realizar un cierto número de deslizamientos lograremos obtener un parche lo suficientemente grande para contener una circunferencia cuyo diámetro sea mayor que la magnitud de la traslación, con lo cual habremos mostrado que no puede existir tal traslación.

Para ello es necesario estudiar con detalle el comportamiento de las distintas configuraciones de trilobites en una teselación. Como veremos en la siguiente sección, es posible que tengamos cadenas infinitas que no permitan forzar la estructura de las L-teselaciones de sustitución. A estas cadenas las llamaremos  $\gamma$  y veremos que, afortunadamente, estas cadenas corren en la misma dirección que la posible traslación que pudiera tener la teselación.



como simetría. Con esto podremos eliminar tales cadenas por medio de deslizamientos y obtener otras cadenas que llamaremos  $\alpha$  las cuales sí permiten forzar la estructura de las L-teselaciones de sustitución, es decir, al eliminar las cadenas  $\gamma$ , podremos formar conjuntos de trilobites que consideraremos como *supertrilobites*, de la misma forma en que cuatro  $\sqsubset$  forman una super  $\sqsubset$ .

### 3.2.2 Cadenas $\alpha$ y $\gamma$

Supongamos que en una teselación formada por trilobites y cruces existe un trilobite  $t$  de tipo  $CTT$ , entonces el trilobite del vértice externo central tiene que ser del mismo tipo pero con la secuencia invertida, es decir,  $TTC$ . Más aún,  $t$  es a su vez el vértice externo central de otro trilobite de tipo  $TTC$ . Por lo tanto cualquier trilobite de este tipo solamente puede estar en una cadena infinita  $\gamma$  de trilobites  $TTC$  y  $CTT$  alternados (figura 3.16).

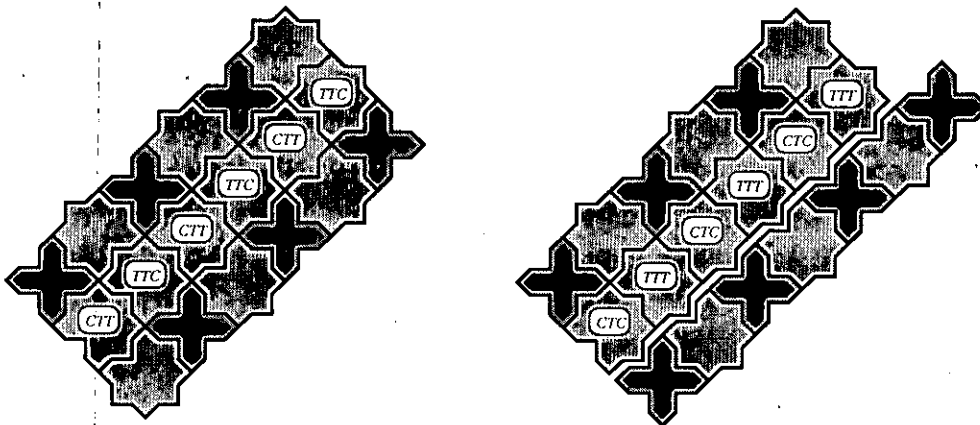
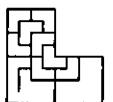


Figura 3.16 — Cadenas  $\gamma$  y  $\alpha$ .

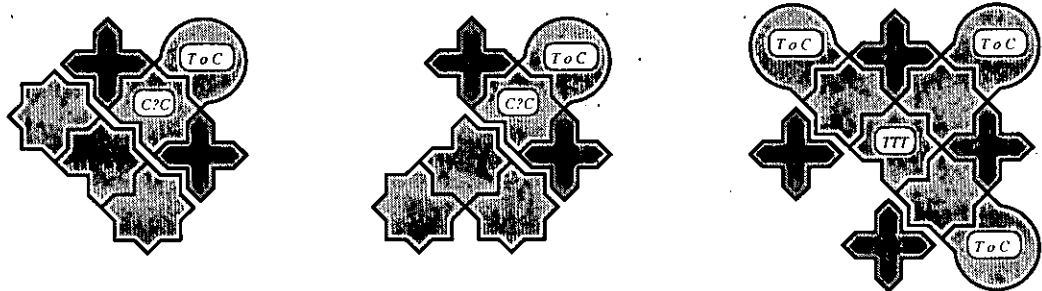
En caso de existir más de una cadena  $\gamma$ , éstas deben ser paralelas, ya que sabemos que se extienden en ambos sentidos infinitamente y basta observar que cualquier trilobite de los extremos de la cadena está rodeado en sus vértices opuestos por cruces, es decir tienen que ser de tipo  $CCC$  o  $CTC$ , por lo que las cadenas no pueden intersectarse.

Supongamos que esta teselación admite alguna traslación. Esta traslación debe tener la misma dirección que las cadenas  $\gamma$ . Si deslizamos en el



sentido de la cadena de tal forma que recorremos los trilobites y las cruces de uno de los extremos de la cadena para que ocupen el lugar inmediato; es decir, un trilobite reemplazará a una cruz y viceversa, transformaremos a la cadena  $\gamma$  en una cadena  $\alpha$  que ahora alterna trilobites del tipo  $TTT$  y  $CTC$ . Es importante observar que la supuesta traslación no se afecta por deslizamientos paralelos a ella. Al aplicar una serie de deslizamientos de este estilo podremos eliminar toda cadena  $\gamma$  para transformarla en una cadena  $\alpha$ , y obtendremos una nueva teselación formada únicamente de trilobites de tipo  $CCC$ ,  $CTC$  y  $TTT$ .

Una vez que eliminamos las cadenas  $\gamma$ , es fácil ver (figura 3.17) que el vértice interno de cualquier trilobite de tipo  $CCC$  o  $CTC$  tiene que pegar con el vértice externo de un trilobite de tipo  $TTT$ , y de forma análoga los vértices externos de trilobites de tipo  $TTT$  tienen que pegar con vértices internos de trilobites  $CCC$  o  $CTC$ .



**Figura 3.17** — Posibles configuraciones de trilobites una vez que eliminamos las cadenas  $\gamma$ .

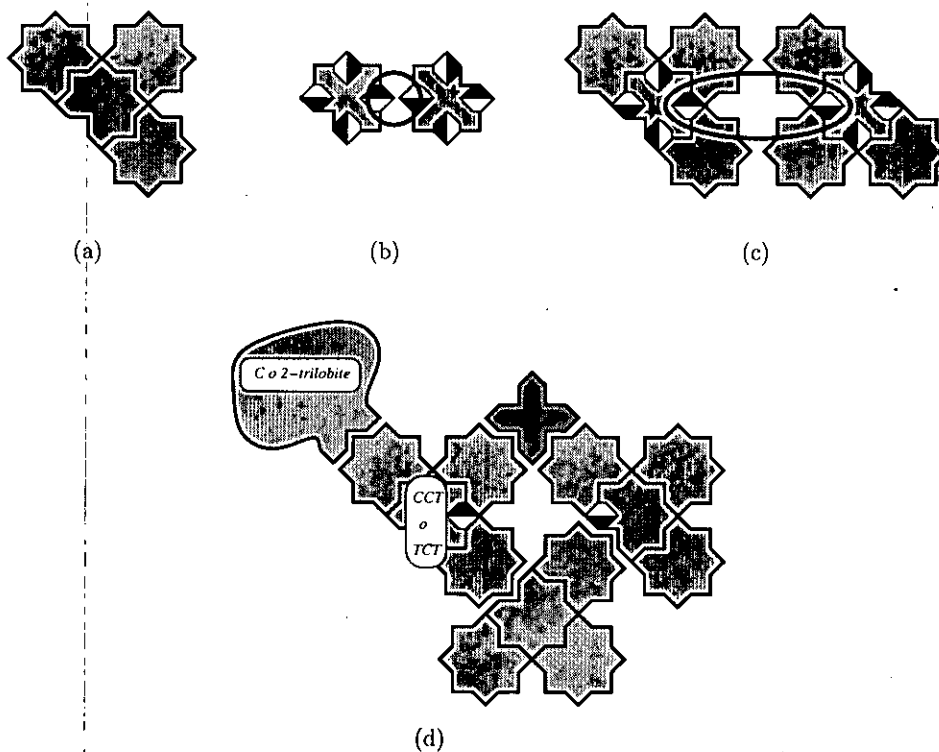
Si tenemos un trilobite de tipo  $CCC$  o  $CTC$ , hay dos opciones (salvo reflexión) para el vértice interno del trilobite. En el primer caso (figura 3.17, izquierda) quedan obligadas las piezas de alrededor; en el segundo caso (figura 3.17, centro) está obligado el trilobite central, pero recordemos que al eliminar las cadenas  $\gamma$ , ya no tenemos trilobites de tipo  $CTT$  o  $TTC$ , por lo cual la tesela externa también queda obligada a ser trilobite. Para el caso de trilobite de tipo  $TTT$  (figura 3.17, derecha), tiene que haber cruces entre los trilobites, y una vez más, al no existir cadenas  $\gamma$ , los extremos de los trilobites tienen que ser también cruces, por lo cual los trilobites externos tienen que ser de tipo  $CCC$  o  $CTC$ .

Con lo anterior, podemos decir que los trilobites deben estar acomodados



en conjuntos de cuatro, con un trilobite de tipo  $TTT$  al centro y trilobites de tipo  $CCC$  y  $CTC$  alrededor.

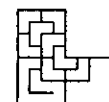
Estos conjuntos de cuatro trilobites,  $2$ -trilobites, son esencialmente trilobites (figura 3.18 (a)), es decir, las reglas de pegado de los  $2$ -trilobites son las mismas que las reglas de los trilobites originales. En la figura 3.18 (b) se muestra un ejemplo de las restricciones que tenemos en los trilobites y en la figura 3.18 (c) se muestra cómo sigue aplicando esta restricción.



**Figura 3.18** — (a) 2-trilobite, (b) y (c) reglas de pegado, (d) no pueden ocurrir configuraciones  $TCT$  y  $CCT$ .

Las configuraciones válidas de  $2$ -trilobites son exactamente las mismas que las de los trilobites originales, es decir,  $TCT$  y  $CCT$  no son configuraciones válidas (figura 3.18 (d)), pero  $CCC$ ,  $CTC$ ,  $TTT$  y  $CTT$  sí lo son, donde  $C$  corresponde a una cruz en el vértice externo central de uno de los trilobites que forman al  $2$ -trilobite.

El análisis realizado con las cadenas  $\gamma$  formadas por trilobites originales, es también válido para los  $2$ -trilobites; en caso de que exista un  $2$ -trilobite de





tipo  $CTT$ , éste debe pertenecer a una cadena infinita  $\gamma$  de 2-trilobites  $CTT$  y  $TTC$  alternados (figura 3.19). Entonces podemos eliminar toda cadena  $\gamma$  formada por 2-trilobites deslizando de la misma forma como hicimos para los trilobites originales obteniendo cadenas  $\alpha$ .

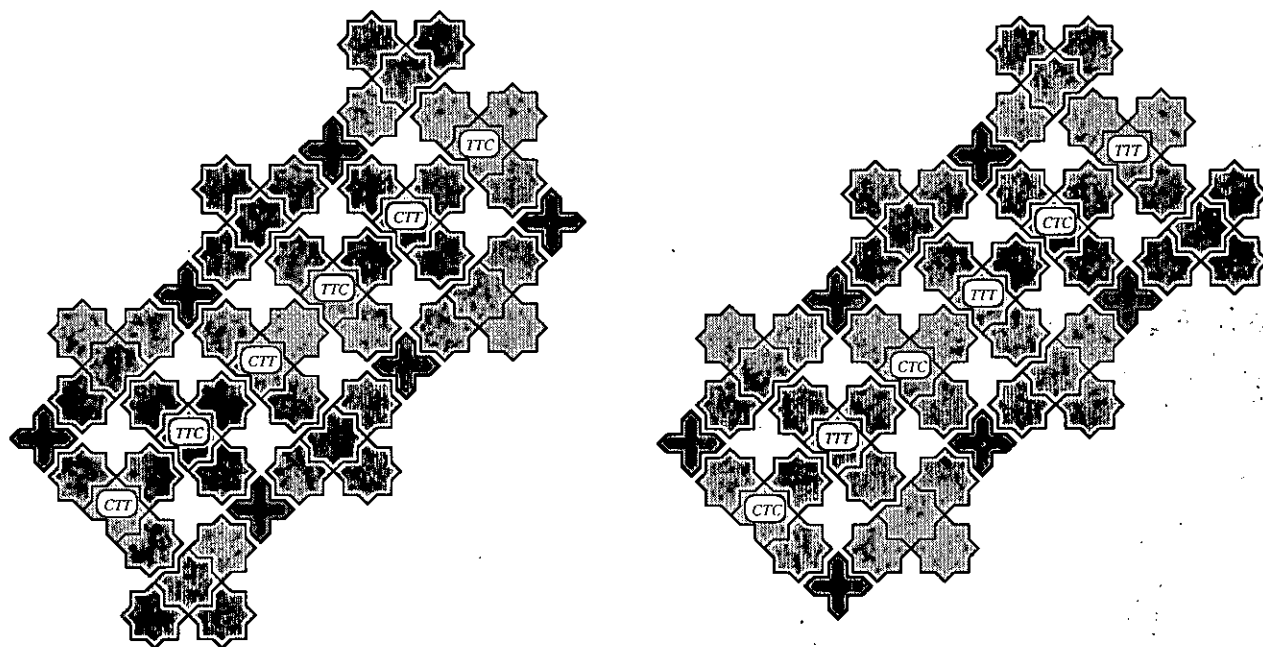


Figura 3.19 — Cadenas  $\gamma$  y  $\alpha$  de 2-trilobites.

Una vez más obtendremos una teselación formada únicamente por 2-trilobites de tipo  $CCC$ ,  $CTC$  y  $TTT$ .

Estos 2-trilobites formarán conjuntos de cuatro 2-trilobites, *3-trilobites*, que tienen 16 trilobites originales, a los cuales se puede aplicar el mismo análisis. Después de eliminar las posibles cadenas  $\gamma$  de 3-trilobites podremos formar 4-trilobites y continuar así *ad infinitum*.

Consideremos una cadena  $a$  de tipo  $\alpha$  de  $n$ -trilobites. Esta cadena contiene exactamente una cadena  $\alpha$  de  $k$ -trilobites,  $k < n$ , que corre a través del centro de  $a$ . Esta cadena, a su vez, es el centro de una cadena  $\alpha$  o  $\gamma$  de  $n+1$ -trilobites. Como las cadenas  $\gamma$  se pueden eliminar con un deslizamiento, conforme crece  $n$ , el ancho de la cadena  $\alpha$  crece sin límite.

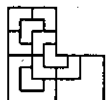
Supongamos que existe una teselación formada por trilobites y cruces que



tiene dos cadenas  $\gamma$ . Estas cadenas son paralelas y supongamos que están separadas a una distancia  $d$ . Después de un número finito de deslizamientos, cada una de las cadenas  $\gamma$  es transformada en una cadena  $\alpha$  que es el centro de una cadena  $\alpha$  de ancho mayor a  $d$ . Como cada cadena  $\alpha$  de  $n$ -trilobites contiene una única cadena  $\alpha$  de  $k$ -trilobites,  $k < n$ , llegamos a una contradicción. Por tanto, en cualquier teselación de trilobites y cruces hay a lo más una cadena  $\gamma$ . Análogamente, después de eliminar toda cadena  $\gamma$  de  $k$ -trilobites,  $k < n$ , para formar cadenas  $\alpha$ , solamente puede haber una cadena  $\gamma$  de  $n$ -trilobites.

Consideremos una teselación de trilobites y cruces en la cual ningún  $n$ -trilobite sea de tipo  $CTT$  o  $TTC$ , entonces cada  $n$ -trilobite forma parte de un  $n+1$ -trilobite, más aún, cada  $n$ -trilobite, junto con las cruces adyacentes, se puede recomponer en una supertesela  $L$ . Por lo tanto una teselación en que ningún  $n$ -trilobite sea de tipo  $CTT$  o  $TTC$  se puede recomponer en una  $L$ -teselación de sustitución, con lo cual tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.** *El trilobite y la cruz forman un conjunto aperiódico.*



# Epílogo

Este es sólo un recuento de cómo surgió la inquietud y necesidad de probar que existía —o no— un conjunto aperiódico formado por cuadrados cuyas aristas están coloreadas, los cuales únicamente pueden trasladarse y pegar arista con arista siempre que sean del mismo color; estamos hablando de los sesentas.

Después de casi cuarenta años, las cosas han cambiado, ahora se conocen varios conjuntos aperiódicos que consisten de tan solo dos prototeselas, ¿qué sigue?

## Teselaciones y máquinas de Turing

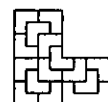
Dado  $T$  un conjunto de prototeselas finito, ¿existe un algoritmo o procedimiento estándar para decidir si  $T$  admite una teselación? Este es el conocido *problema de las teselaciones*.

Se dice que el problema de las teselaciones es *decidible* si existe un algoritmo que proporcione una solución después de un número finito de pasos.

A finales de los 50 y durante los 60 Hao Wang investigó acerca de la *decidibilidad* del problema de las teselaciones. Si un conjunto  $T$  de prototeselas admite alguna teselación entonces tiene que cumplirse una de las siguientes posibilidades:

1.  $T$  sólo admite teselaciones periódicas.
2.  $T$  admite tanto teselaciones periódicas como no-periódicas.
3.  $T$  solamente admite teselaciones no-periódicas, es decir,  $T$  es un conjunto aperiódico.

Wang mostró que el problema de las teselaciones era decidible si consideramos conjuntos  $T$  que satisfacen 1 y 2. En 1961 llegó a la conjetura de que 3 no



podía ocurrir, es decir, la conjetura de Wang decía que el problema de las teselaciones era decidible. Para 1966 R. Berger descubrió el primer conjunto aperiódico que consiste de aproximadamente 20000 prototeselas, mostrando que la conjetura de Wang era falsa, de hecho ahora se sabe que el problema de las teselaciones es *indecidible*.

Una *máquina de Turing* es una especie de computadora primitiva que puede ser descrita como un dispositivo capaz de leer símbolos desde una "cinta de memoria" infinita y actuar sobre ellos de acuerdo a un "programa", ya sea escribiendo nuevos símbolos sobre la cinta o moviéndola hacia delante o hacia atrás. La teoría sobre máquinas de Turing juega un papel importante en la lógica matemática ya que puede demostrarse que toda función recursiva puede calcularse con una de estas máquinas.

Wang demostró que es posible simular las operaciones de cualquier máquina de Turing usando teselaciones adecuadas. De aquí la relación tan estrecha con la lógica y la importancia en el estudio de teselaciones. Para ver ejemplos de teselaciones que realizan operaciones como máquinas de Turing ver [4, capítulo 11] y las referencias que éste incluye.

## Conjuntos aperiódicos débiles y fuertes

En el plano euclidiano cualquier teselación no-periódica, al no tener traslaciones como simetrías, tampoco puede tener reflexiones trasladadas ya que toda reflexión trasladada tiene una traslación como subgrupo. Por lo mismo cualquier conjunto aperiódico admite teselaciones que no tienen un grupo cíclico infinito como subgrupo de las simetrías.

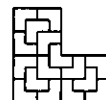
Sin embargo para dimensiones mayores, es decir, para  $\mathbb{E}^n$  con  $n > 2$  existen teselaciones no-periódicas (su región fundamental no es compacta) invariantes bajo grupos cíclicos infinitos de simetrías. Los conjuntos de prototeselas que solamente admiten teselaciones con este tipo de simetrías se conocen como *conjuntos aperiódicos débiles*. Los conjuntos de prototeselas que no admiten teselaciones con grupos cíclicos infinitos como simetría se llaman *conjuntos aperiódicos fuertes*. En particular todo conjunto aperiódico de  $\mathbb{E}^2$  es fuerte.

Actualmente se conocen conjuntos aperiódicos fuertes de 4, 3 y 2 prototeselas debidos a L. Danzer, P. Schmitt y Goodman-Strauss [2], respectivamente. Este último es una especie de generalización del trilobite y la cruz.



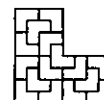
Schmitt tiene un conjunto aperiódico débil de una única pieza para  $\mathbb{E}^3$  y Goodman-Strauss está trabajando en construir conjuntos aperiódicos débiles que consisten de un solo triángulo para el plano hiperbólico.

La gran pregunta es ¿Existe un conjunto aperiódico fuerte de una sola prototesela, ya sea en  $\mathbb{E}^n$  o en  $\mathbb{H}^n$  ?



# Bibliografía

- [1] GOODMAN-STRAUSS, CHAIM, Matching rules and substitution tilings, *Annals of Mathematics*, **147** (1998), 181–223.
- [2] —, A pair of aperiodic tiles in  $\mathbb{E}^n$ ,  $n \geq 3$ , *European Journal of Combinatorics*, **20** (1999), 385–395.
- [3] —, A small set of aperiodic tiles, *European Journal of Combinatorics*, **20** (1999), 375–384.
- [4] GRÜNBAUM, BRANCO, G.C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Company, Nueva York, EUA, 1986.
- [5] MARTIN, GEORGE E., *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, Nueva York, Berlín y Heidelberg, 1982.
- [6] SENECHAL, MARJORIE, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1996.
- [7] SOLOMYAK, BORIS, Non-periodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings, *Discrete and Computational Geometry*, **20** (1998), 265–279.
- [8] STILLWELL, JOHN, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, Nueva York, Berlín y Heidelberg, 1992.



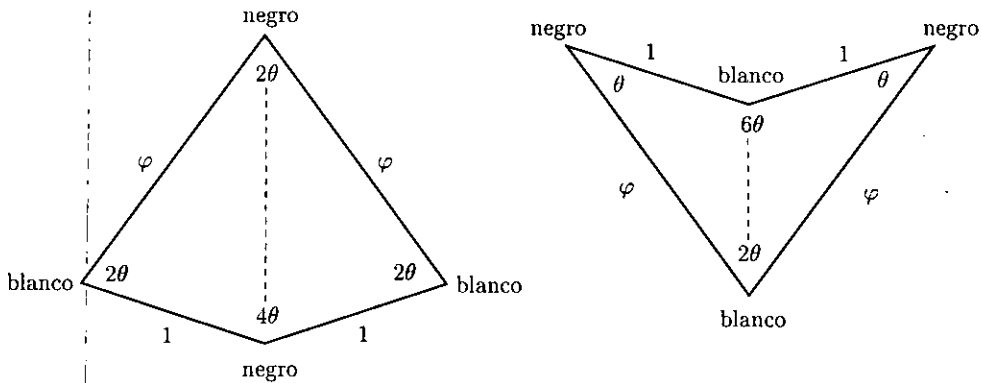
# Apéndice A

## Teselaciones de Penrose

El conjunto P2 formado por las dos prototeselas conocidas como el papalote y la flecha se construye con base en la proporción áurea  $\varphi$  cuyo valor es

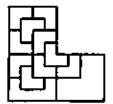
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

como se ilustra en la figura A.1. Las reglas de pegado son: lados iguales deben coincidir así como colores de vértices.

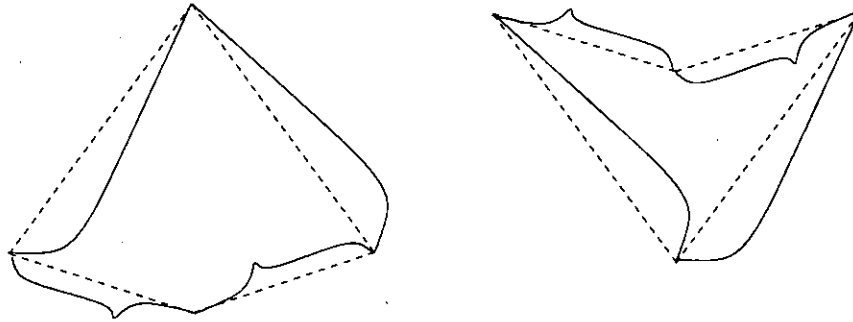


**Figura A.1** — El conjunto P2 de Penrose. Los lados son de dos longitudes en proporción  $\varphi : 1$  y el ángulo  $\theta = \frac{1}{5}\pi$ . Además se indican las reglas de pegado como colores de vértices.

Si quisiéramos evitar la necesidad de usar colores y condiciones de pegado relacionadas con ellos, es posible lograr una condición equivalente únicamente



deformando los lados de las prototeselas. Para ello, notemos primero que como cada tesela tiene un eje de simetría, no es necesario usar reflexiones de las prototeselas, basta usar congruencias directas. Por lo tanto lo único que se requiere es reemplazar los lados por dos curvas convenientes para obtener el resultado requerido (figura A.2).



**Figura A.2** — Esta modificación del papalote y la flecha nos permite prescindir de colorear los vértices.

Una forma sencilla de analizar las propiedades de las teselaciones admitidas por P2 se debe a Raphael Robinson (1975), que consiste en cortar cada papalote y cada flecha por su eje de simetría obteniendo dos triángulos de cada tesela, como se indica con líneas punteadas en la figura A.1.

De esta forma obtenemos las teselas de tipo *A* donde denotaremos por  $G_A$  a los triángulos grandes, los obtenidos de cortar al papalote, y  $C_A$  a los triángulos chicos, los obtenidos de cortar la flecha.

Además de forzar el pegado por medio de los colores de los vértices, es necesario añadir otra condición: los lados monocromáticos, es decir los lados cuyos vértices son del mismo color, deben tener una orientación para garantizar que al pegar un triángulo y su imagen reflejada por el lado monocromático resulte en un papalote o una flecha según sea el caso. Esta orientación se puede representar con una flecha (figura A.3(a)). Cualquier teselación admitida por el conjunto *A* la llamaremos *A*-teselación, cualquier teselación admitida por P2 la llamaremos P2-teselación.

Cualquier P2-teselación se puede llevar a una *A*-teselación si a cada papalote y a cada flecha los cortamos por su eje de simetría; de forma análoga cualquier *A*-teselación se puede llevar a una P2-teselación quitando las aristas monocromáticas (figura A.4).





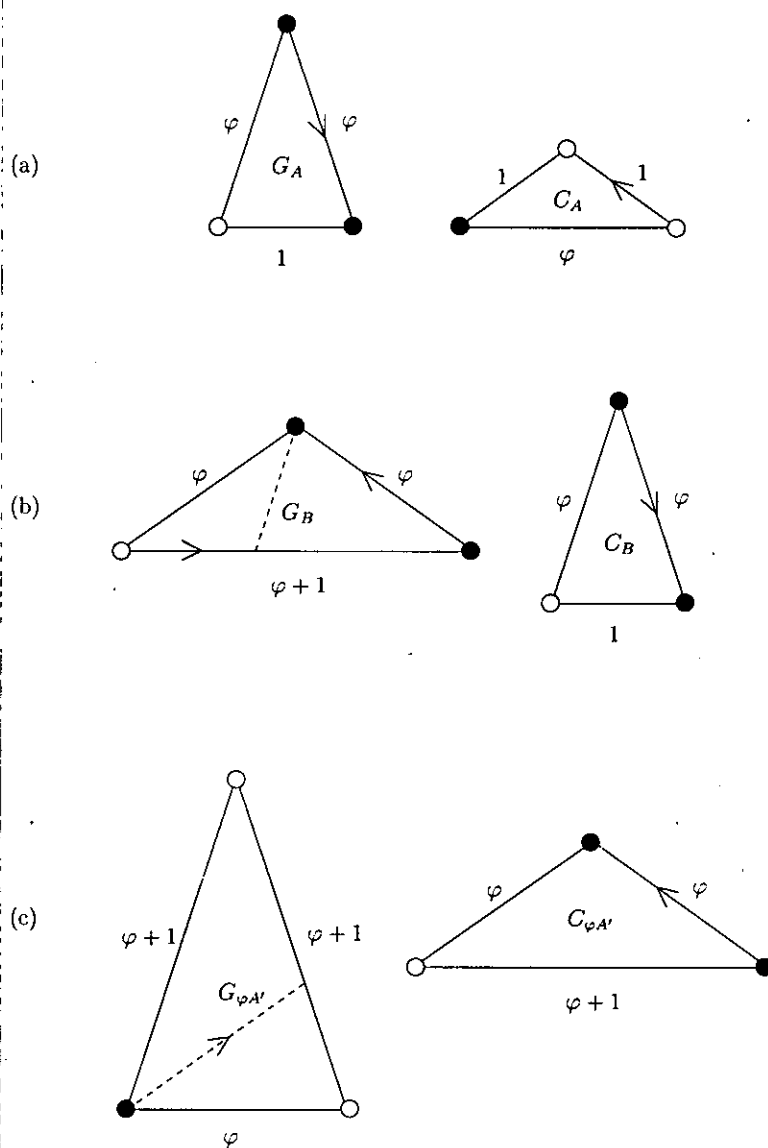
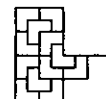


Figura A.3 — (a) Conjunto A. (b) Conjunto B. (c) Conjunto  $\varphi A'$ .

En la figura A.3(b), mostramos como podemos componer el conjunto A para obtener un nuevo conjunto, que llamaremos B, para el cual aplican las mismas reglas de pegado. Estas piezas las llamamos de forma análoga a las A, como  $G_B$  para el triángulo grande y  $C_B$  para el chico. Notemos que



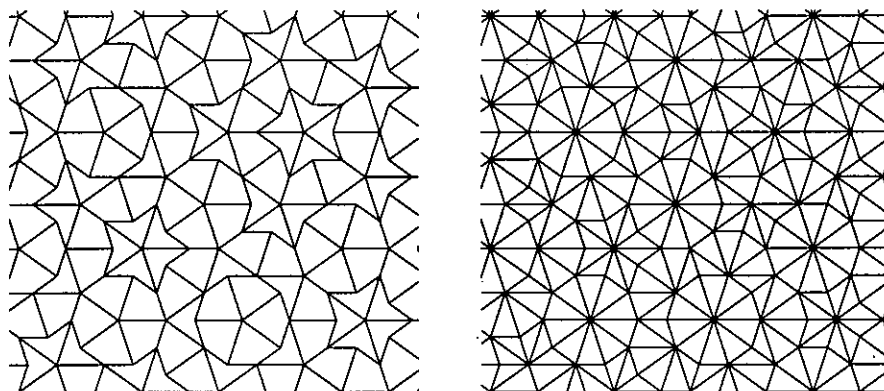


Figura A.4 — Cualquier P2-teselación se puede sustituir por una A-teselación.

$$C_B = G_A.$$

Al componer las teselas  $B$  obtenemos el conjunto  $\varphi A'$  (figura A.3(c)), donde  $\varphi$  quiere decir que estas nuevas prototeselas son semejantes al conjunto  $A$  en escala  $\varphi : 1$  y ( $'$ ) quiere decir que los colores de los vértices están intercambiados.

Si ahora componemos las teselas  $\varphi A'$  obtendríamos teselas  $\varphi B'$  que si las compusiéramos obtendríamos teselas  $\varphi^2 A$ . Es claro que este proceso lo podemos continuar *ad infinitum* con lo que tenemos una teselación jerárquica. Veremos un poco más adelante que éstas son, de hecho, teselaciones únicamente jerárquicas y, por tanto, todos estos conjuntos ( $P2$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi^n A$ , etc.) son aperiódicos.

Este proceso de composición puede aplicarse tanto a teselaciones como a teselas individuales. Con esto queremos decir que siempre es posible componer cualquier  $A$ -teselación para obtener una  $B$ -teselación y este proceso es único.

La forma de hacerlo es muy simple: eliminamos de la  $A$ -teselación cada arista corta que une un vértice blanco con uno negro.

De forma análoga, de cualquier  $B$ -teselación podemos obtener una  $\varphi A'$ -teselación eliminando las aristas monocromáticas que separan las teselas  $G_B$  de las  $C_B$ .

La figura A.5 muestra diagramas de estas teselaciones de sustitución (sin presentar las reglas de pegado). Es claro que cada una de estas sustituciones está determinada de forma única. Por lo visto en la sección 2.2, los conjuntos



$A$  y  $B$  son aperiódicos.

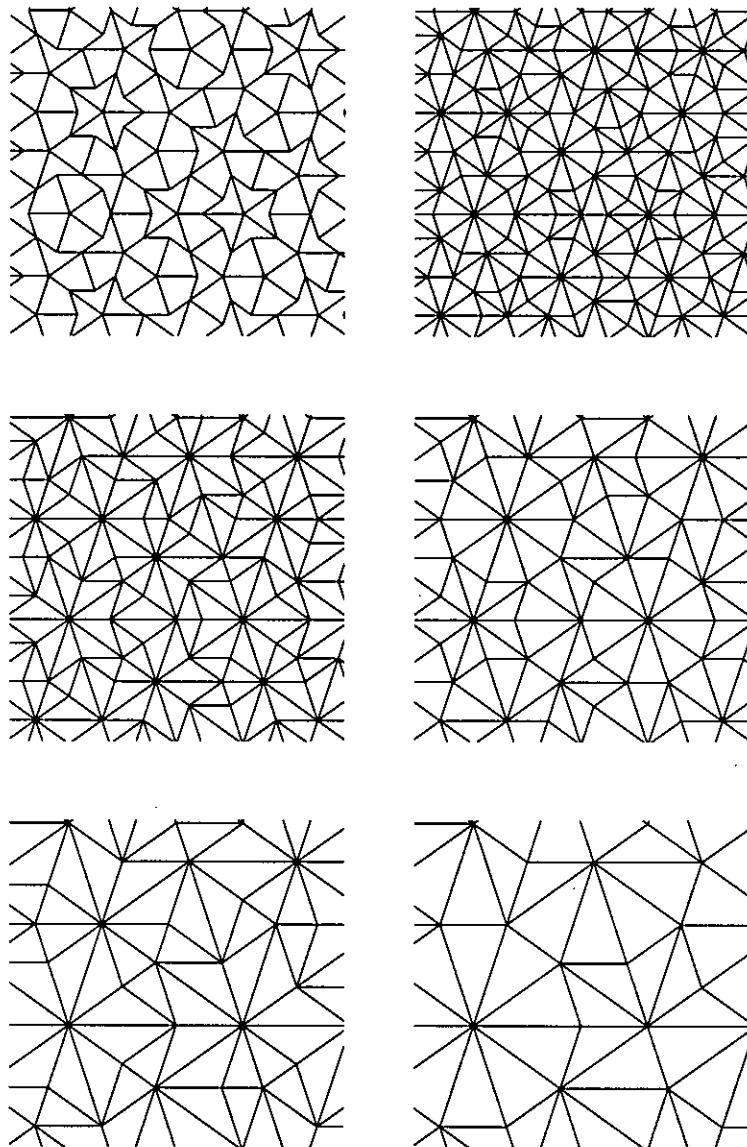
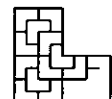


Figura A.5 — De  $P2$  a  $A$  a  $B$  a  $\varphi A'$  a  $\varphi B'$  a  $\varphi^2 A$

Las teselaciones admitidas por el conjunto  $B$  tienen la propiedad de poderse recomponer en teselaciones admitidas por otro conjunto aperiódico de



Penrose que llamaremos P3.

Dada una  $B$ -teselación, podemos eliminar los lados largos del triángulo grande ( $G_B$ ) y los lados cortos del triángulo chico ( $C_B$ ) como se muestra en la figura A.6. Esto siempre se puede hacer porque el triángulo  $C_B$  no tiene lados de longitud el lado grande de  $G_B$  así como el triángulo  $G_B$  no tiene lados de longitud el lado chico de  $C_B$ .

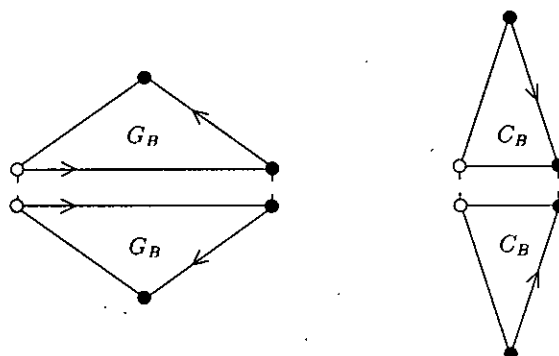


Figura A.6 — Identificación de los lados largos de  $G_B$  y los cortos de  $C_B$ .

Así obtenemos P3, que consiste de dos rombos cuyas aristas miden lo mismo, sus ángulos son múltiplos de  $\frac{1}{5}\pi$  y cuyas reglas de pegado mostramos en la figura A.7.

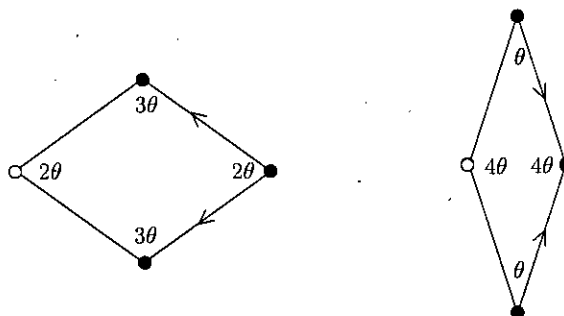


Figura A.7 — El conjunto P3 de Penrose. Todos los lados son iguales y el ángulo  $\theta = \frac{1}{5}\pi$ .

En la figura A.8 se muestra como es la sustitución de una  $B$ -teselación en una P3-teselación.



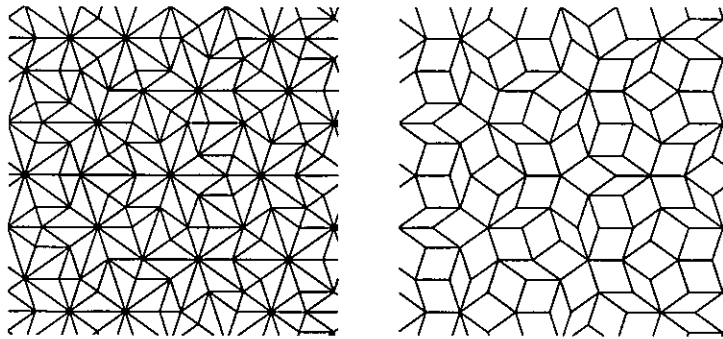
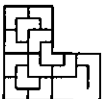


Figura A.8 — Sustitución de  $B$  a  $P3$ .

Como el proceso de sustitución de  $A$ -teselaciones en  $B$ -teselaciones es único, es fácil hacer una analogía que nos permita sustituir  $P2$ -teselaciones en  $P3$ -teselaciones.

La idea es dividir una  $P2$ -teselación dada en una  $A$ -teselación, sustituirla por una  $B$ -teselación y llevar ésta a una  $P3$ -teselación. Es claro que el proceso inverso también es válido; los rombos de una  $P3$ -teselación se dividen para obtener una  $B$ -teselación, que se puede dividir para llevarla a una  $A$ -teselación y sustituirla por una  $P2$ -teselación. La figura A.9 muestra 6 niveles de sustitución de  $P2$  a  $P3$  a  $P2$ ...



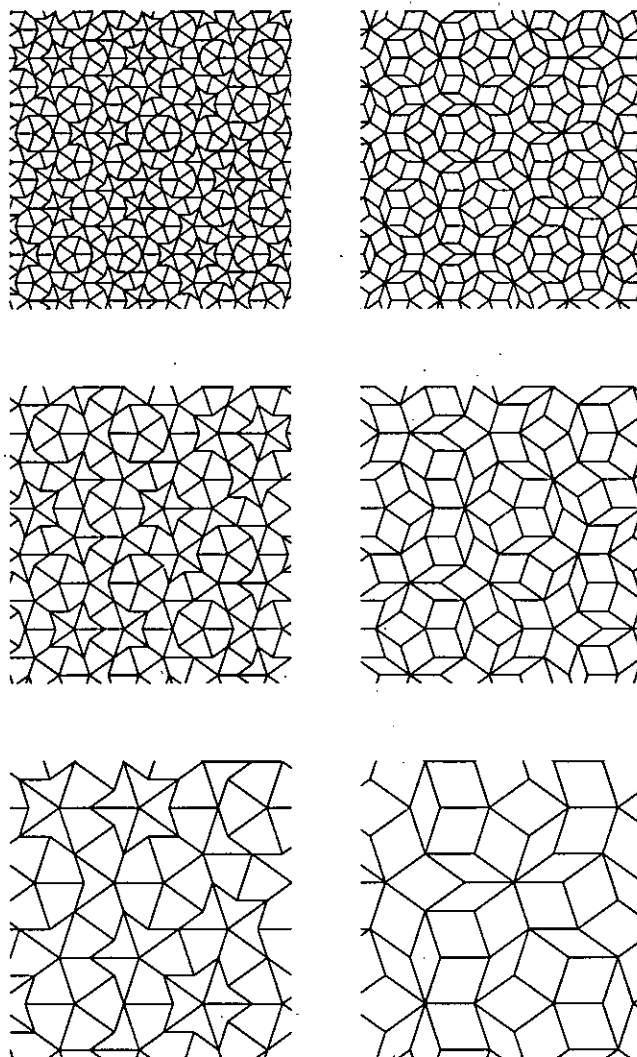


Figura A.9 — De P2 a P3 a P2...

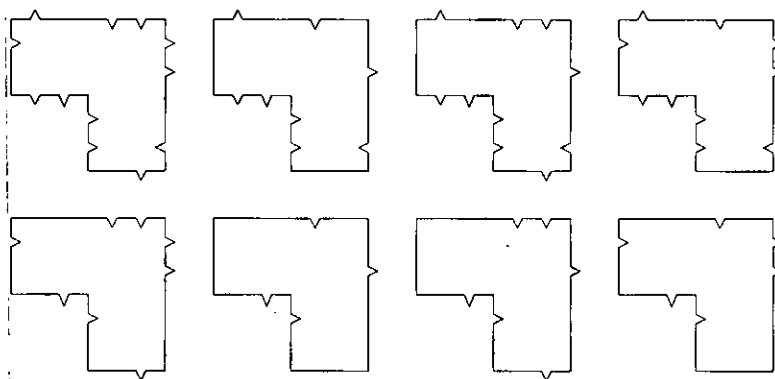


## Apéndice B

### Conjunto aperiódico de Socolar

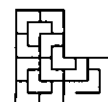
En este apéndice mostramos otro conjunto aperiódico basado en las L-teselaciones de sustitución, que llamaremos  $S8$ . A diferencia del trilobite y la cruz, este conjunto está formado por ocho piezas y las reglas de pegado dependen simplemente en hacer coincidir las aristas que han sido deformadas para forzar la no-periodicidad de cualquier teselación formada por  $S8$ .

La figura B.1 muestra este conjunto donde las deformaciones de las aristas están indicadas por picos y hendiduras.

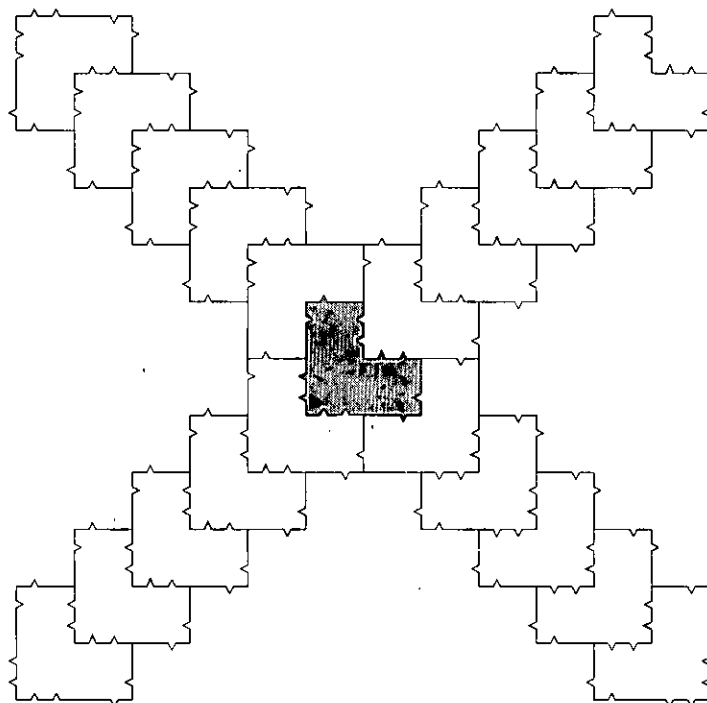


**Figura B.1** — Deformación de aristas para obtener un conjunto aperiódico,  $S8$ , de ocho piezas debido a Socolar.

La ventaja de este conjunto es la simplicidad de las piezas, finalmente son  $\sqsubset$  con modificaciones en las aristas, pero la cardinalidad del conjunto es “grande” comparado con el trilobite y la cruz.



La figura B.2 muestra una posible forma de iniciar la construcción de una teselación formada por  $S8$ . La idea es tomar una porción de una L-teselación de sustitución (en este caso la clásica, es decir una supertesela  $\sqsubset$ ) y jugar con copias de  $S8$  hasta lograr cubrir la supertesela  $\sqsubset$  completa.



**Figura B.2** — Inicio de construcción de una teselación formada por  $S8$ .

El lector puede notar —si tiene la paciencia y las ganas del autor— lo forzado que está el acomodo de las teselas una vez que se escoge la primera (marcada en gris). Para poder generar las diagonales tenemos una única opción que es la primera prototesela de la figura B.1, y para rellenar los huecos entre las diagonales seguimos teniendo pocas opciones, como lo muestra la figura B.3.





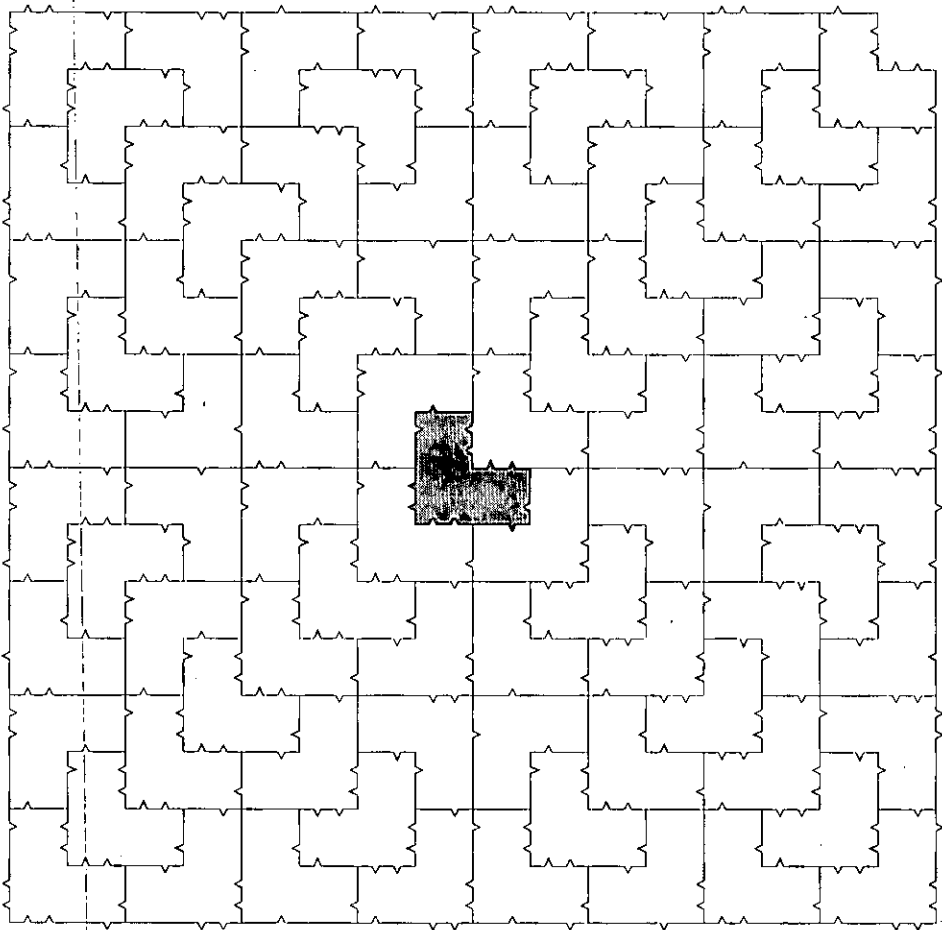


Figura B.3 — Porción de una teselación cuyo protoconjunto es  $S8$ .

