UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENDOMORFISMOS NATURALES DEL FUNTOR ANILLO DE BURNSIDE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

PRESENTAN:

GONZALEZ SOLANO FELIX ENRIQUE
MOLINA RINCON GUADALUPE RAFAEL

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ERNESTO VALLEJO RUIZ

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside

realizado por González Solano Félix Enrique
Molina Rincón Guadalupe Rafael

con número de cuenta 9658699-2, 9756656-6, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Ernesto Vallejo Ruiz	
Propietario	Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas	
Propietario	Dr. Francisco Marmolejo Rivas	
Suplente	Dr. Christof Geiss Hahn	
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejia	Hugo A. Rincón M.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS

Endomorfismos Naturales Del Funtor Anillo De Burnside

González Solano Félix Enrique
Molina Rincón Guadalupe Rafael

A nuestros padres

Agradecimientos

Este trabajo no se hubiera realizado sin la ayuda, el apoyo y la paciencia de nuestro director de tesis, el Dr. Ernesto Vallejo Ruiz, le agradecemos su confianza, durante la realización de este proyecto y por permitirnos conocerlo como investigador y como persona.

Deseamos agradecerle a nuestros sinodales; Gerardo Raggi, Francisco Marmolejo, Christof Geiss y Hugo Rincón, sus comentarios.

Finalmente queremos agradecer el soporte que nos otorgo CONACyT.

Índice General

Introducción

El objetivo del presente trabajo, es estudiar los endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside, basándose en los trabajos de Blass y Vallejo.

En la primera parte de la tesis, se desarrolla la teoría básica de los anillos de Burnside. En el primer capítulo, se da un breve repaso de la teoría de G-conjutos para un grupo G y se define el anillo de Burnside de G, $A(G)$ como el grupo de Grothendieck del semianillo de clases de isomorfía de G-conjuntos.

En el segundo capítulo, se analizan los ideales primos del anillo de Burnside, donde el resultado central, es el teorema 2.2.19, el cual nos da una correspondencia entre los idempotentes primitivos y ortogonales del anillo de Burnside y las clases de conjugancia de subgrupos perfectos de G.

En el tercer capítulo, se da un cálculo explícito de de los idempotentes primitivos y ortogonales de $A(G)$, los cuales están dados por la formula (3.2).

La segunda parte, de este trabajo esta dedicada al estudio de los endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside. En el capitulo cuarto se estudian, en primer lugar, los endomorfismos naturales del funtor álgebra de Burnside $A_{\mathbb{Q}}$. Los endomorfismos del álgebra de Burnside $A_{\mathbb{Q}}(G)$ para un grupo fijo G, se caracterizan por el teorema:

"(4.1.6)*Exite una biyección entre el conjunto de endomorfismos de anillos de $A_{\mathbb{Q}}(G)$ y el conjunto de funciones de $C(G)$ en $C(G)$, donde $C(G)$ es un conjunto de representantes de clases de conjugancia de subgrupos de G*".

Como consecuencia de este teorema se obtiene el siguiente resultado importante:

"(4.1.7)*Sea G un grupo, $U \leq G$ y θ_G un endomorfismo de $A_{\mathbb{Q}}(G)$. Entonces para cada $x \in A_{\mathbb{Q}}(G)$, se tiene que*

$$\varphi_U(\theta_G(x)) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U)}(x),$$

donde $\bar{\theta}_G : C(G) \longrightarrow C(G)$ es la función asociada a θ_G dada por el teorema anterior y $\varphi_U(x)$ denota la marca de U en x (1.1.22)".

De este cálculo, se obtiene la siguiente caracterización de los endomorfismos naturales del funtor álgebra de Burnside:

"(4.1.10)Sea θ una colección de endomorfismos de anillos $\{\theta_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}(G)\}_{G \in Obj(GRU)}$. Entonces θ es un endomorfismo natural del funtor $A_{\mathbb{Q}}$ si y sólo si:

1). *Dado $G \in Obj(GRU)$ y $U \leq G$, entonces $\bar{\theta}^U(U) \subseteq \bar{\theta}^G(U)$.*

2). *Dados $G, H \in Obj(GRU)$ y $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ un epimorfismo de grupos, entonces $\alpha(\bar{\theta}^G(G)) = \bar{\theta}^H(H)$".*

Con base en este resultado, el teorema 4.2.10, caracteriza algunos endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside. Cabe resaltar, que el teorema 4.2.10 caracteriza todos los endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside conocidos actualmente, los cuales por la proposición 4.3.12 son un número no numerable.

En el capítulo 5, se da una perspectiva distinta a la del capítulo 4, para estudiar a los endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside. Consideramos el funtor A^+ de la categoría de grupos a la categoría de conjuntos, que a cada grupo G le asocia el conjunto de clases de isomorfía de G-conjuntos finitos. Entonces se obtiene un isomorfismo de grupos (5.1.12):

$$\Phi : Op(A^+, A) \longrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} As(k),$$

donde $Op(A^+, A)$ es el conjunto de transformaciones naturales de A^+ en A. Así cada transformación natural $\eta \in Op(A^+, A)$ queda determinada por una sucesión $(a_n) \in \prod_{k=0}^{\infty} As(k)$. También, se obtiene un isomorfismo de grupos (5.2.7)

$$\hat{F} : \prod_{k=0}^{\infty} As(k) \longrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} As(k),$$

que da como resultado una expresión única de las operaciones $\eta \in Op(A^+, A)$ como:

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} F(b_k),$$

para algunas operaciones $F(b_k) \in Op(A^+, A)$, llamado el desarrollo de Taylor de η (5.2.8). En estos términos, la aditividad y la multiplicatividad de una transformación natural $\eta : A^+ \longrightarrow A$ con $\Phi(\eta) = (a_k)_{k=0}^{\infty}$ y $\hat{F}((a_k)_{k=0}^{\infty}) = (b_k)_{k=0}^{\infty}$, están dados por los siguientes teoremas:

"(5.3.10) *Una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ es aditiva si y sólo si para cualesquier $m, n \in N$*

$$Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(a_{m+n}) = p_1^*(a_m) + p_2^*(a_n)".$$

"(5.3.13) *Una condición necesaria y suficiente para que η sea aditiva es que para cada k y para cualesquier $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = k$, tenemos*

$$Res_{s(\alpha,\beta)}^{s(k)}(b_k) = 0".$$

"(5.4.5) *Sea $\eta : A^+ \longrightarrow A$ una operación, y sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ su sucesión asociada, entonces η es multiplicativa si y sólo si para cualesquier m, n,*

$$f^*((a_{mn})) = p_1^*(a_m) \smile p_2^*(a_n),$$

donde " $\smile$ " denota el producto en el anillo $A(s(m) \times s(n))$ y f es el isomorfismo dado en 5.4.1".

En donde, el último resultado fue obtenido también por Vallejo, pero no se encuentra publicado.

Finalmente, en el capítulo 6, se exponen una serie de resultados nuevos, obtenidos por Vallejo y los autores de esta tesis, los cuales se obtienen al aplicar los métodos dados por Blass en el marco dado por Vallejo. Los resultados mas importantes de este capítulo son:

"(6.3.2) *Sea η un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside entonces:*

$$\varphi_{[H]_{S(n)}}(b_n) = \begin{cases} \varphi_{[H]_{S(n)}}(a_n) & si\ H \leq S(n) actúa\ transitivamente\ en\ [n] \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases} ".$$

"(6.3.5) *Sea $U \leq s(n)$, entonces U actúa en $[n]$ y así $[n] = P_1 \coprod \cdots \coprod P_k$, donde P_i son las órbitas en U. Entonces, tenemos que*

$$\varphi_U(a_n) = \varphi_{p_1(U)}(b_{l_1}) + \ldots + \varphi_{p_k(U)}(b_{l_k}),$$

$\varphi_{p_1(U)}(b_{l_1})$*donde* $p_i : s(l_1) \times ... \times s(l_k) \longrightarrow s(l_i)$ *es la i-ésima proyección".*

"(6.4.1)*Sea* θ *un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside. Si* θ *no es el endomorfismo natural trivial ni la identidad, entonces* θ *tiene desarrollo de Taylor infinito".*

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Anillos de Burnside

Este capítulo esta basado en [Ka]. Su objetivo es desarrollar la teoría de anillos de Burnside que se va a estar usando a través de todo este trabajo.

1.1 G-conjuntos

En lo que sigue G denota un grupo finito y 1 denotara la identidad del grupo.

Definición 1.1.1 *Un G-**conjunto** es un conjunto finito X junto con una aplicación $G \times X \longrightarrow X$ denotada por $(g, x) \longmapsto gx$, tal que:*

1). $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$, *para todo* $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$.

2). $1x = x$, *para todo* $x \in X$.

Definición 1.1.2 *Sean X y Y dos G-conjuntos. Una aplicación f de X en Y se llama un G-**homomorfismo**, si $f(gx) = gf(x)$ para cualesquier $g \in G$ y $x \in X$. Diremos que dos G-conjuntos X y Y son G-**isomorfos** $(X \cong Y)$ si existe un G-homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ y f es una función biyectiva.*

Notación 1.1.3 *Dados dos G-conjuntos X y Y escribimos:*

$$Hom_G(X, Y)$$

como el conjunto de todos los G-homomorfismos de X a Y.

Definición 1.1.4 *Llamaremos la* ***G-órbita*** *de un elemento $x \in X$ al conjunto:*

$$O_G(x) := \{gx : g \in G\}.$$

Las G-órbitas de X son precisamente las clases de equivalencia bajo la relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\ g \in G \text{ tal que } y = gx.$$

Decimos que X es un ***G-conjunto transitivo*** *si para cualesquier $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Equivalentemente X es transitivo si y sólo si tiene una sola G-órbita.*

Definición 1.1.5 *El* ***estabilizador*** *de un elemento $x \in X$ es el conjunto:*

$$G_x := \{g \in G : gx = x\},$$

este conjunto es un subgrupo de G y satisface $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

Proposición 1.1.6 *Un G-conjunto X no vacío es transitivo si y sólo si cualquier G-homomorfismo de un G-conjunto no vacío Y en X es suprayectivo.*

Demostración. En efecto, supongamos que X es transitivo y sea Y un G-conjunto no vacío y $f : Y \longrightarrow X$ un G-homomorfismo. Entonces, si $x \in X$ y $f(y) \in f(Y)$, existe $g \in G$ tal que $x = gf(y)$, pues X es transitivo. Luego, $x = gf(y) = f(gy) = f(y')$ para algún $y' \in Y$. Así f es suprayectiva. La implicación inversa es también sencilla de probar. ■

Proposición 1.1.7 *Si X es un G-conjunto transitivo, entonces $X \cong G/G_x$ para cualquier $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y definamos $\psi : G/G_x \longrightarrow X$ por $\psi(gG_x) = gx$, $g \in G$. Tenemos que $gG_x = g'G_x$ si y sólo si $g^{-1}g'G_x = G_x$ lo cual es posible si y sólo si, $g'x = gx$. Luego entonces ψ esta bién definida y es inyectiva. Por otro lado, tenemos para todo $u \in G$ que $u\psi(gG_x) = u(gx) = (ug)x = \psi((ug)G_x)$, de esta manera ψ es un homomorfismo de G-conjuntos. Por último, tenemos por transitividad que para todo $y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx = \psi(gG_x)$. Concluimos que ψ es un G-isomorfismo. ■

Corolario 1.1.8 *Sea X un G-conjunto. Entonces para cualquier $x \in X$, $O_G(x) \cong G/G_x$, donde el isomorfismo es de G-conjuntos.*

Notación 1.1.9 *Denotamos por 1_G al G-conjunto que consiste de un solo elemento, entonces $1_G \cong G/G$ como G-conjuntos.*

Observación 1.1.10 *Dados dos G-conjuntos X y Y tenemos que el producto cartesiano $X \times Y$ es un G-conjunto con la* **acción diagonal** *la cual esta definida por:*

$$g(x, y) = (gx, gy), \text{ para todo } g \in G, \ x \in X, \ y \in Y.$$

De la misma manera, dados dos G-conjuntos X y Y la unión disjunta $X \coprod Y$ es un G-conjunto.

Proposición 1.1.11 *Sean H y K dos subgrupos de G. Entonces G/H y G/K son G-isomorfos si y sólo si, H y K son subgrupos conjugados en G.*

Demostración. Sea $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$. Definamos la función $\phi : G/H \longrightarrow G/K$ por $\phi(xH) = xg^{-1}K$. Como $\phi(xhH) = xhg^{-1}K = xhHg^{-1} = xHg^{-1} = xg^{-1}K$, entonces ϕ está bien definida. Claramente ϕ es un G-homomorfismo. De manera análoga se ve que la siguiente aplicación $\psi : G/K \longrightarrow G/H$, $\psi : yK \longmapsto ygH$, esta bién definida y es un G-homomorfismo. Entonces tenemos: $\psi(\phi(xH)) = \psi(xg^{-1}K) = xg^{-1}gH = xH$ y $\phi(\psi(yK)) = \phi(ygH) = ygg^{-1}K = yK$, por lo que ϕ es un G-isomorfismo.

Para demostrar la implicación inversa, consideremos $\phi : G/H \longrightarrow G/K$ un G-isomorfismo. Sea $g \in G$ tal que $\phi(H) = g^{-1}K$. Deseamos demostrar que $gHg^{-1} = K$. Como H es el estabilizador de la clase eH, basta con probar que K es el estabilizador de gH. Para cada $k \in K$, $\phi(kgH) = kg\phi(H) = kK = K = \phi(gH)$, la inyectividad de ϕ implica que $kgH = gH$, entonces $k \in G_{gH}$ y por lo tanto $K \subseteq G_{gH}$. Para la otra contención observamos que si $m \in G_{gH}$, entonces $mK = m\phi(gH) = g(mgH) = \phi(gH) = K$ y por lo tanto $m \in K$. ■

Corolario 1.1.12 *Tenemos en particular, que si $U_1, ..., U_n$ son representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G, entonces los elementos $G/U_1, ..., G/U_n$ son representantes de todas las clases de isomorfía de G-conjuntos transitivos.*

Notación 1.1.13 *Sea G un grupo finito y X un conjunto finito. Denotamos por $s(X)$ al* ***grupo de permutaciones*** *de X, esto es, el conjunto de funciones biyectivas en X.*

Definición 1.1.14 *Sea X un G-conjunto finito. Para cada $g \in G$ definimos la aplicación:*

$$\begin{aligned} \rho_g \;&:\; X \longrightarrow X \\ &:\; x \longmapsto gx. \end{aligned}$$

Estas aplicaciones tienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.1.15 *Sea G un grupo finito y X un G-conjunto, entonces*

1). $\rho_1 = i_X$, *donde i_X* es *la aplicación identidad en X.*

2). $\rho_g \rho_h = \rho_{gh}, \forall g, h \in G.$

3). $\rho_g \in s(X), \forall g \in G.$

4). $(\rho_g)^{-1} = \rho_{g^{-1}}.$

Se sigue de el inciso 2) lo siguiente:

Proposición 1.1.16 *La aplicación $\rho_X : G \longrightarrow s(X)$ dada por $\rho_X : g \mapsto \rho_g$ es un homomorfismo de grupos.*

Definición 1.1.17 *Sea X un conjunto. Un homomorfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow s(X)$ se llamará* ***representación por permutaciones de G en X***.

Lema 1.1.18 *Sea X un conjunto. Entonces todo homomorfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow s(X)$ induce una acción de G en X dada por $gx := \rho(g)(x)$.*

Definición 1.1.19 *Dos representaciones por permutaciones $\rho_1 : G \longrightarrow s(X)$, $\rho_2 : G \longrightarrow s(Y)$ se dicen equivalentes (en símbolos $\rho_1 \sim \rho_2$), si existe una biyección $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$\rho_2(g) = \psi \circ \rho_1(g) \circ \psi^{-1}, \forall g \in G.$$

Teorema 1.1.20 *Hay una correspondencia biyectiva entre los G-conjuntos y las representaciones por permutaciones de G dada por $X \mapsto \rho_X$. Además dos G-conjuntos X y Y son G-isomorfos si y sólo si sus representaciones por permutaciones ρ_X, ρ_Y son equivalentes.*

Demostración. La correspondencia se sigue de 1.1.16 y 1.1.18. Ahora bien, sea $\psi : X \longrightarrow Y$ un G-isomorfismo. Sean $g \in G$, $y \in Y$, $x = \psi^{-1}(y)$, entonces $\rho_Y(g)(y) = gy = g\psi(x) = \psi(gx) = \psi\rho_X(g)(x) = \psi\rho_X(g)(\psi^{-1}(y)) = \psi \circ \rho_X(g) \circ \psi^{-1}(y)$. Por lo tanto $\rho_X \sim \rho_Y$. La implicación inversa es similar. ■

Notación 1.1.21 *Sean H y K subgrupos de G. Escribimos $K \sim_G H$ si K es **conjugado** en G a H. Denotamos por $(H)_G$ ((H) si no hay peligro de confusión) a la clase de conjugancia de H en G. Análogamente denotamos por $K \leq_G H$ si existe $g \in G$ tal que $gKg^{-1} \leq H$, decimos en este caso que K es **subconjugado** en G a H.*

Definición 1.1.22 *Dado un G-conjunto X y un subgrupo H de G, definimos el conjunto de H-**invariantes** de X, $(X)^H := \{x \in X : hx = x, \forall h \in H\}$. También definimos la **marca** de H en X por $\varphi_H(X) :=\mid (X)^H \mid$.*

La siguiente proposición establece algunas propiedades básicas de estos conjuntos.

Proposición 1.1.23 *Sean H y K subgrupos de G y sea X un G-conjunto. Entonces se verifica lo siguiente:*

1). $\varphi_H(X) =\mid Hom_G(G/H,X) \mid$

2). $\varphi_H(G/K) =\mid Hom_G(G/H,G/K) \mid$

3). $(G/K)^H = \{gK : g \in G, H \subseteq gKg^{-1}\}$

4). $\varphi_H(G/K) = [N_G(K) : K]n(H,K)$, *donde $n(H,K)$ es el número de G-conjugados de K que contienen a H. En particular $\varphi_H(G/H) = [N_G(H) : H]$.*

5). $\varphi_H(G/K) = [N_G(K) : K] \mid \{L \leq G : L \sim_G H \text{ y } L \subseteq K\} \mid$.

6). $(G/K)^H \neq \emptyset$, *si y sólo si, $H \leq_G K$.*

7). $\varphi_H(X) = \varphi_{gHg^{-1}}(X)$, para todo $g \in G$ y para todo G-conjunto X.

8). Si $K \trianglelefteq H$, entonces para H_1/K y H_2/K subgrupos de H/K, tenemos que

$$\varphi_{H_1/K}((H/K)/(H_1/K)) = \varphi_{H_1}(H/H_1)$$

Demostración. 1) Afirmamos que la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi \ &: \ Hom_G(G/H, X) \longrightarrow (X)^H \\ &: \ f \longmapsto f(H) \end{aligned}$$

es una biyección. Tenemos que para todo $h \in H$, $hf(H) = f(hH) = f(H)$, por lo tanto $f(H) \in (X)^H$. Luego ψ esta bien definida. Más aún, f esta únicamente determinada por $f(H)$, pues $f(gH) = gf(H)$ para todo $g \in G$. Así la afirmación $\psi(f) = \psi(g)$ implica que $f = g$, por lo que ψ es inyectiva. Por otro lado, para cualquier $x \in (X)^H$, la aplicación $f : G/H \longrightarrow X$, dada por $f(gH) = gx$ es un G-homomorfismo. Claramente $\psi(f) = x$, por lo que ψ es suprayectiva.

2) Esto se sigue de 1) aplicado al caso $X = G/K$.

3) Por definición, $gK \in (G/K)^H$ si y sólo si $h(gK) = gK$ para todo $h \in H$, lo cual pasa si, y sólo si $h(gKg^{-1}) = gKg^{-1}$ y esto es equivalente a $H \subseteq gKg^{-1}$.

4) Sean $g_1Kg_1^{-1}, ..., g_rKg_r^{-1}$ todos los G-conjugados distintos de K que contienen a H. Supongamos que $t_1, ..., t_s$ es un conjunto de representantes de las clases en $N_G(K)/K$. Deseamos probar que g_it_jK $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ son todos los elementos distintos de $(G/K)^H$. Tenemos que $g_it_jKt_j^{-1}g_i^{-1} = g_iKg_i^{-1} \supseteq H$ $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ así, $g_it_jK \in (G/K)^H$ para i en $\{1, .., r\}$ y j en $\{1, .., s\}$. Supongamos que $g_it_jK = g_lt_mK$, entonces $g_it_j = g_lt_mk$ para algún, $k \in K$ y así $g_i = g_lt_mkt_j^{-1}$. En consecuencia $g_iKg_i^{-1} = g_lKg_l^{-1}$ por lo que $l = i, j = m$. Por último, supongamos que $gK \in (G/K)^H$ para algún $g \in G$. Entonces por 3), $H \subseteq gKg^{-1} = g_iKg_i^{-1}$ para algún $i \in \{1, .., r\}$. En consecuencia, $g_i^{-1}g \in N_G(K)$ y así $g_i^{-1}g = t_jk$ para algún $k \in K$, $j \in \{1, .., s\}$. Pero entonces $g = g_it_jk$ y $gK = g_it_jK$ por lo que $(G/K)^H = \{g_it_jK : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$.

5) Esta se demuestra de manera análoga a la dada en 4).

6) Esta afirmación se sigue de 3).

7) Nótese que para cualesquier $g \in G$ y X un G-conjunto tenemos que $x \in (X)^H$ si y sólo si $gx \in (X)^{gHg^{-1}}$.

8) En efecto, tenemos que

$$\varphi_{H_1/K}((H/K)/(H_2/K) = [N_{H/K}(H_2/K) : H_2/K]n(H_1/K, H_2/K),$$

además por el teorema de correspondencia, $H_1/K \leq_N H_2/K$ si y sólo si $H_1 \leq_N H_2$, por lo que $n(H_1/K, H_2/K) = n(H_1, H_2)$. Un cálculo directo muestra que $[N_{H/K}(H_2/K) : H_2/K] = [N_H(H_2) : H_2]$. ■

Lema 1.1.24 *Sea H subgrupo de G. Para cualesquier G-conjuntos X y Y, tenemos*

$$\begin{aligned}(X \coprod Y)^H &= (X)^H \coprod (Y)^H \\ (X \times Y)^H &= (X)^H \times (Y)^H\end{aligned}$$

en particular, $\varphi_H(X \coprod Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$ y $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

Proposición 1.1.25 *Sean H un subgrupo de G y N un subgrupo normal de H. Para cualquier G-conjunto X tenemos:*

1). *$(X)^N$ es un H/N-conjunto, vía $(hN)x = hx$, para todo $h \in H, x \in (X)^N$.*

2). *$(X)^H \subseteq (X)^N$ y $(X)^N - (X)^H$ es la unión disjunta de todas las H/N-órbitas no triviales.*

3). *Si p es número primo y H/N es un p-grupo, entonces $\varphi_H(X) \equiv \varphi_N(X)(mod\ p)$.*

Demostración. 1) Como X es un G-conjunto, en particular es un H-conjunto y por lo tanto $hx \in X$, para todo $h \in H$, $x \in X$. Sean $x \in (X)^N$ y $n \in N$, entonces para toda $h \in H$:

$$\begin{aligned}n(hx) &= h(h^{-1}nh)x \\ &= hx\end{aligned}$$

por lo tanto $hx \in (X)^N$. Luego $(X)^N$ es un H-conjunto. Como N actúa trivialmente en $(X)^N$, concluimos que $(X)^N$ es un H/N-conjunto.

2) Es claro que $(X)^H \subseteq (X)^N$ y que $(X)^H$ es la unión disjunta de todas las H/N-órbitas de $(X)^N$.

3) Sea $x \in (X)^N - (X)^H$. Consideremos la H/N-órbita de x. Tenemos:

$$O_{H/N}(x) \cong (H/N)/(H'/N),\ H' \leq H$$

por lo tanto $| O_{H/N}(x) |= p^\alpha$ para alguna α. La afirmación se sigue de (2), pues las órbitas no son triviales y por lo tanto $\alpha \neq 0$. ■

Proposición 1.1.26 *Para cualesquier H y K subgrupos de G,*

$$(G/H) \times (G/K) \cong \coprod_{g \in T} G/(H \cap gKg^{-1}),\ \textit{como } G\textit{-conjuntos}$$

donde T es un conjunto completo de representantes de las clases dobles HgK en G.

Demostración. Escribamos $S = (G/H) \times (G/K)$ y para cualquier $g \in G$ sea $S_g \in S$ definido por $S_g = (H, gK)$. Tenemos entonces

$$G_{S_g} = H \cap gKg^{-1}.$$

En consecuencia,

$$O_G(S_g) \cong G/H \cap gKg^{-1} \text{ como } G\text{-conjuntos.}$$

Así es suficiente con demostrar que:

$$S = \coprod_{g \in T} O_G(S_g).$$

Ahora bien $O_G(S_x) = O_G(S_y)$ si y sólo si $S_x = gSy$ para algún $g \in G$, lo cual pasa si y sólo si $(H, xK) = (gH, gyK)$, esto es, $g \in H$ y $xK = gyK$, en consecuencia, $HxK = HgyK = HyK$.

Por otra parte, como cualquier G-órbita de S tiene un elemento de la forma S_x para algún, $x \in G$, el resultado se sigue ahora. ■

Corolario 1.1.27 *En particular, si G es abeliano, tenemos que:*

$$(G/H) \times (G/K) \cong \left(\frac{| G || H \cap K |}{| H || K |} \right) G/(H \cap K),\ \textit{como } G\textit{-conjuntos.}$$

Proposición 1.1.28 *Sea X un G-conjunto y sean $U_1, ..., U_n$ representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G. Sea $I = \{1, .., n\}$. Para cada $i \in I$, definimos $X_i = \{x \in X : G_x \sim_G H_i\}$. Entonces,*

$$X \cong \coprod_{i \in I} \lambda_i (G/U_i)$$

donde, $\lambda_i = \mid X_i \mid /[G : U_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Sabemos que todo G-conjunto es unión disjunta de sus órbitas. Se tiene que λ_i es el número de G-órbitas de X isomorfas a G/U_i. Así, es suficiente con demostrar que $\mid X_i \mid = \lambda_i [G : U_i]$. Ahora bien, una G-órbita $O_G(x)$ es isomorfa a G/U_i si y sólo si G_x es G-conjugado a U_i esto es, si y sólo si $x \in X_i$. Pero si $x \in X_i$, entonces $gx \in X_i$, para todo $g \in G$, pues $G_{gx} = gG_x g^{-1}$. Luego, X_i es la unión disjunta de todas las G-órbitas de X que son isomorfas a G/U_i. En consecuencia, $\mid X_i \mid = \lambda_i [G : U_i]$. ■

Teorema 1.1.29 (Krull-Schmidt para G-conjuntos) *Sean $U_1, ..., U_n$ representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G. Para X un G-conjunto, tenemos*

$$X \cong \coprod_{i \in I} \lambda_i (G/U_i),\ I = \{1, ...n\}$$

donde los $\lambda_i \geq 0$, son únicos.

Demostración. Supongamos que $X \cong \coprod_{i \in I} \mu_i (G/U_i)$, para algunos enteros $\mu_i \geq 0$. Pero, μ_i es el número de G-órbitas isomorfas a G/U_i y por la demostración de la proposición anterior, $\mu_i = \mid X_i \mid /[G : U_i] = \lambda_i$. El teorema se sigue ahora de la proposición anterior. ■

Lema 1.1.30 (Burnside) *Para cualquier G-conjunto X, el número de G-órbitas r de X es igual a*

$$r = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \varphi_{<g>}(X)$$

en particular,

$$\sum_{g \in G} \varphi_{<g>}(X) \equiv 0 (mod \mid G \mid).$$

Demostración. [Ro], teorema 3.26. ■

1.2 Anillos de Burnside

Definición 1.2.1 *Sea M un monoide abeliano. Podemos asociarle a M un grupo abeliano $K_0(M)$,llamado el* **grupo de Grothendieck**, *junto con un homomorfismo de monoides $\alpha : M \longrightarrow K_0(M)$ el cual es universal en el siguiente sentido; Para todo grupo abeliano B y todo homomorfismo de monoides $\gamma : M \longrightarrow B$ existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\tilde{\gamma} : K_0(M) \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & K_0(M) \arrow[dl, "\tilde{\gamma}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Si tal $K_0(M)$ existe este debe ser único salvo isomorfismo.

Primera construcción *Construimos $K_0(M)$ de la manera usual: $K_0(M) = F/F_0$, donde F es el grupo libre abeliano generado por los símbolos $s \in M$ y F_0 es el subgrupo de F generado por las expresiones $s+t-(s\oplus t)$, donde $\oplus$ es la suma en M. Claramente $K_0(M)$ tiene la propiedad descrita anteriormente con $\alpha : M \longrightarrow K_0(M)$ la aplicación natural.*

Segunda construcción *Una construcción diferente de $K_0(M)$, donde M es un monoide con cancelación, la cual algunas veces es mas útil, es la siguiente: En $M \times M$ construimos una relación de equivalencia "$\sim$" de la siguiente manera*

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Así, definimos $K_0(M)$ como el conjunto cociente $(M \times M)/\sim$. Un cálculo directo muestra que $K_0(M) := (M \times M)/\sim$ junto con la aplicación $\alpha = p \circ i$, donde $i : M \longrightarrow M \times M$, $i : m \longmapsto (m, 0)$ y $p : M \times M \longrightarrow (M \times M)/\sim$ es la proyección natural, satisface la propiedad universal descrita anteriormente.

Observación 1.2.2 *Se sigue de la segunda construcción que si M es un monoide con ley de cancelación, entonces la aplicación $\alpha : M \longrightarrow K_0(M)$, es inyectiva.*

Observación 1.2.3 *Se demuestra, de manera directa, que si M es un semianillo entonces $K_0(M)$ es un anillo con la operación de suma inducida y la multiplicación dada por:*

$$(m_1, n_1) \cdot (m_2, n_2) = (m_1m_2 + n_1n_2, m_1n_2 + n_1m_2).$$

Definición 1.2.4 *Sea G un grupo. Denotamos por $A^+(G)$ al conjunto de clases de isomorfía de G-conjuntos finitos. Definimos la suma y la multiplicación en $A^+(G)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} [X] + [Y] &:= [X \coprod Y] \\ [X][Y] &:= [X \times Y] \end{aligned}$$

donde, $[X], [Y] \in A^+(G)$. Claramente $(A^+(G), +)$ es un monoide abeliano asociativo, cuyo elemento neutro es la clase del G-conjunto vacío $[\emptyset]$.

Proposición 1.2.5 *Se tienen las siguientes propiedades:*

1). *Si $1_G := G/G$, entonces $1_G \times X \cong X$.*

2). *Sean $X, Y \in A^+(G)$, entonces $X \times Y = Y \times X$.*

3). *Para $X, Y, Z \in A^+(G)$, $X \times (Y \coprod Z) = (X \times Y) \coprod (X \times Z)$.*

4). *Para $X, Y, Z \in A^+(G)$, $X + Y = X + Z \Longrightarrow Y = Z$.*

Concluimos que $(A^+(G), +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo con uno.

Entonces tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.6 *El* ***anillo de Burnside de*** *G, el cual denotaremos de ahora en adelante por $A(G)$, es el grupo de Grothendieck asociado a $A^+(G)$, esto es, $A(G) := K_0(A^+(G))$. También definimos el* ***álgebra racional de Burnside*** *por medio de la siguiente igualdad: $A_{\mathbb{Q}}(G) := A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Notación 1.2.7 *Sean $U_1, ..., U_n$ representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G. Denotamos por $C(G)$ al conjunto $\{ U_1, ..., U_n \}$.*

Tenemos las siguientes propiedades básicas del anillo de Burnside.,

Teorema 1.2.8 *Sean H y K subgrupos de G. Para X y Y G-conjuntos, tenemos*

1). $[X] = [Y]$ *en* $A(G)$, *si y sólo si,* $X \cong Y$.

2). $A(G)$ *es un* Z*-módulo libre generado por* $[G/U_1], ..., [G/U_n]$.

3). $[G/H][G/K] = \sum_{g\in T}[G/(H \cap gKg^{-1})]$, *donde* T *es un conjunto completo de representantes de clases dobles* HgK *en* G.

Demostración. 1) Esto se sigue de la observación 1.2.2.
2) Se sige de 1.1.29.
3) Se sigue del.1.26. ∎

Observación 1.2.9 *Sea H un subgrupo de G. La aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi_H &: A^+(G) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ &: X \longmapsto \varphi_H(X), \end{aligned}$$

se puede extender fácilmente a $A(G)$ por linealidad. Claramente la aplicación $\varphi_H : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada de esta manera es un homomorfismo de anillos.

Teorema 1.2.10 (Burnside) *Sean X y Y G-conjuntos. Entonces $X \cong Y$ si y sólo si $\varphi_H[X] = \varphi_H[Y]$, para todo $H \in C(G)$.*

Demostración. Es claro, que si $X \cong Y$, entonces $\varphi_U[X] = \varphi_U[Y]$, para todo $U \in C(G)$. De manera inversa, supongamos que $\varphi_U[X] = \varphi_U[Y]$, para cualquier $U \in C(G)$, tenemos:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i[G/U_i],\ Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i[G/U_i],\ \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}$$

debemos demostrar entonces que $\lambda_i = \mu_i$ para cada i. Supongamos que el conjunto $F = \{U_i : \lambda_i \neq \mu_i\} \neq \emptyset$. Consideremos a F como un conjunto parcialmente ordenado bajo la subconjugación y sea U_m un elemento maximal de F. Entonces, tenemos

$$\varphi_{U_m}([G/U]) = 0 \text{ para todo } U \in F \text{ con } U \neq U_m$$

Ahora bien, $\varphi_{U_m}(X) = \varphi_{U_m}(Y)$, por hipótesis y $\lambda_i = \mu_i$ si $U_i \notin F$. En consecuencia tenemos:

$$\sum_{U_i \in F} \lambda_i \varphi_{U_m}([G/U_i]) = \sum_{U_i \in F} \mu_i \varphi_{U_m}([G/U_i])$$

y por tanto,

$$\lambda_m \varphi_{U_m}([G/U_m]) = \mu_m \varphi_{U_m}([G/U_m])$$

pero $\varphi_{U_m}([G/U_m]) \neq 0$, así $\lambda_m = \mu_m$, lo cual es una contradicción, por lo que $F = \emptyset$. ∎

Definición 1.2.11 *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Definimos un homomorfismo de anillos*

$$f^* : A(H) \longrightarrow A(G),$$

de la siguiente manera: a cada $X \in A^+(H)$, le damos una estructura de G-conjunto definiendo

$$g \cdot x = f(g)x, \forall g \in G, \forall x \in X.$$

Observación 1.2.12 *Un cálculo directo da que f^* es un homomorfismo de anillos.*

Proposición 1.2.13 *1). Si $i_G : G \longrightarrow G$ es el homomorfismo identidad en G, entonces $i_G^* = i_{A(G)}$, donde $i_{A(G)}$ es el homomorfismo identidad en $A(G)$.*

2). Si $f_1 : G \longrightarrow H$ y $f_2 : H \longrightarrow K$ son homomorfismos de grupos, entonces $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$.

Observación 1.2.14 *Se sigue que el anillo de Burnside es un funtor contravariante de la categoría de grupos finitos a la categoría de anillos conmutativos con identidad.*

Notación 1.2.15 *Sean $H \leq G$ y X cualquier H-conjunto. Para $g \in G$, definimos el G-**conjugado** de X, el cual denotamos por ${}^gX$, como el gHg^{-1}-conjunto X con la siguiente acción:*

$$\alpha \cdot x := (g^{-1}\alpha g)x, \ \forall \alpha \in gHg^{-1}, \ \forall x \in X$$

Así para cada $g \in G$ tenemos el homomorfismo de grupos $c_g : gHg^{-1} \longrightarrow H$, $c_g : ghg^{-1} \longmapsto h$, lo cual induce un homomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} c_g^* &: A(H) \longrightarrow A(gHg^{-1}) \\ &: X \rightarrow {}^gX \end{aligned}$$

Proposición 1.2.16 *Sean $\alpha : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos, U un subgrupo de G y X un H-conjunto, entonces*

$$\varphi_U(\alpha^*(X)) = \varphi_{\alpha(U)}(X)$$

donde $\alpha^* : A(H) \longrightarrow A(G)$ es el homomorfismo inducido por α.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} (\alpha^*(X))^U &= \{x \in \alpha^*(X) : u \cdot x = x, \forall u \in U\} \\ &= \{x \in X : \alpha(u)x = x, \forall u \in U\} \\ &= (X)^{\alpha(U)}. \end{aligned}$$

■

Observación 1.2.17 *Sea $C(G) = \{U_1, ..., U_n\}$ un conjunto de representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G. Entonces cada $X \in A(G)$ tiene, por 1.1.29, una representación única de la forma:*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi(X)_i G/U_i$$

donde $\xi(X)_i \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.2.18 *La aplicación $\xi : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$, dada por $\xi : X \longrightarrow (\xi(X)_i)_{i=1}^n$, es un isomorfismo aditivo. Más aún, su extensión natural a $A_{\mathbb{Q}}(G)$ da un isomorfismo aditivo con $\mathbb{Q}^n$.*

Demostración. Esto se sigue de las definiciones y del teorema 1.1.29.

■

Análogamente tenemos el siguiente lema:

Lema 1.2.19 *La aplicación:*

$$\begin{aligned} \varphi &: A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ &: X \longmapsto (\varphi_U(X))_{U\in C(G)} \end{aligned}$$

es un monomorfismo de anillos. Más aún, la extensión de φ a $A_{\mathbb{Q}}(G)$ da un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras con $\mathbb{Q}^n$.

Demostración. La aplicación φ es inyectiva por el teorema 1.2.10. Además, por 1.2.8 se sigue que $[G/U_1]\otimes 1,...,[G/U_n]\otimes 1$ es una base de $A_{\mathbb{Q}}(G)$. En consecuencia $\varphi : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ es un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras. ■

Observación 1.2.20 *La aplicación $\varphi\xi^{-1} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ esta dada por la matriz M en la cual los renglones y columnas estan indexadas por los grupos $U \in C(G)$ y la entrada (U,V) es:*

$$\varphi_U(G/V) = \mid \{g \in G : U \leq gVg^{-1}\} \mid / \mid V \mid . \tag{1.1}$$

Si refinamos el orden parcial $H \leq K$ en $C(G)$ a un orden total, entonces las entradas en el primer renglón son $\varphi_e(G/V)$, donde e es la identidad en G y las entradas en la última columna son $\varphi_U(G/G) = 1$.

Definición 1.2.21 *Con la notación anterior, llamamos a la matriz M la* ***tabla de marcas*** *del grupo G.*

Ejemplo 1.1 *Consideremos al grupo alternante en 5 símbolos ($\mathbb{A}_5$), entonces el orden total de $C(\mathbb{A}_5)$ se encuentra dado de la siguiente manera:*

$$\mathbb{A}_5 > \mathbb{A}_4 > \mathbb{D}_5 > \mathbb{D}_3 > \mathbb{C}_5 > \mathbb{D}_2 > \mathbb{C}_3 > \mathbb{C}_2 > 1$$

donde $\mathbb{C}_2 :=< (2,3)(4,5) >$, $\mathbb{C}_3 :=< (3,4,5) >$, $\mathbb{D}_2 :=< (2,3)(4,5),\ 1,\ (2,4)(3,5) >$, $\mathbb{C}_5 :=< (1,2,3,4,5) >$, $\mathbb{D}_3 :=< (3,4,5),\ (1,2)(4,5) >$, $\mathbb{D}_5 :=< (1,2,3,4,5),\ (2,5)(3,4) >$, $\mathbb{A}_4 :=< (2,3)(4,5),\ (2,4)(3,5),\ (3,4,5) >$, *por lo que, la tabla de marcas de* $\mathbf{A}_5$, *se encuentra dada por:*

$$\begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 15 & 12 & 10 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos las siguientes propiedades básicas de la tabla de marcas:

Lema 1.2.22 *Sea M la tabla de marcas de un grupo G. Entonces M es triangular superior y el determinante de M es*

$$det(M) = \prod_{U \in C(G)} \mid N_G(U)/U \mid.$$

Demostración. La matriz M es triangular superior, pues la entrada (U, V) es no cero sólo cuando $U \leq_G V$. Además las entradas en la diagonal de M son $\varphi_U(G/U)$ y por la proposición 1.1.23 este número es $\mid N_G(U)/U \mid$, así

$$det(M) = \prod_{U \in C(G)} \mid N_G(U)/U \mid.$$

■

Observación 1.2.23 *Nótese que por la proposición 1.1.23 $\mid N_G(V)/V \mid$ divide a $\varphi_U(G/V)$. Esto dice que toda entrada de M es divisible por la entrada diagonal en la misma columna.*

Esto nos da el siguiente lema:

Lema 1.2.24 *Sea M la tabla de marcas de un grupo G. Entonces M se puede factorizar como $M = \tilde{M}D$, donde D es la matriz diagonal con las mismas entradas diagonales que M y $\tilde{M}$ es una matriz triangular superior cuyas entradas diagonales son 1.*

En la siguiente proposición vemos a X como un G-conjunto y como un elemento de $\mathbb{Z}^n$ bajo φ.

Proposición 1.2.25 *Un vector columna $X = (X_j)_{j=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ está en $A(G)$ si y sólo si*

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{M}^{-1})_{i,j}X_j \equiv 0 \ mod \ \mid N_G(U_i)/U_i \mid \ , \ i = 1, ..., n \tag{1.2}$$

Demostración. En efecto, el isomorfismo aditivo ξ esta dado por $M^{-1} = D^{-1}\tilde{M}^{-1}$, así un vector $X \in \mathbb{Z}^n$ esta en $A(G)$ si y sólo si las componentes de $D^{-1}\tilde{M}^{-1}X$ son enteras. La proposición se sigue ahora. ∎

Observación 1.2.26 *La primera de las n congruencias (1.2) corresponden a $U_i = e$, donde e es la identidad en G y $\mid N_G(e)/e \mid = \mid G \mid$. Esto nos da la congruencia:*

$$\varphi_e(X) + \sum_{j=2}^{n}(\tilde{M}^{-1})_{1,j}X_j \equiv 0 \ mod \ \mid G \mid \tag{1.3}$$

Definición 1.2.27 *La congruencia (1.3) es llamada una* **congruencia principal** *para G.*

Observación 1.2.28 *Sean p un primo, $H \leq G$. Para cualquier subgrupo $U \leq N_G(H)/H$, escribimos U' para la imagen inversa en $N_G(H)$. Para cualquier G-conjunto X el subconjunto Y de puntos fijos bajo H es permutado por $N_G(H)$, así podemos ver a Y como un $N_G(H)/H$-conjunto o como un S-conjunto para cualquier $S \leq N_G(H)/H$. Ahora bien, sea S un p-subgrupo de Sylow de $N_G(H)/H$, y sea $\mid S \mid = p^k$. Cualquier congruencia principal para S la verifica Y:*

$$\varphi_e(Y) + \sum_{e \neq U \leq S} a_U \varphi_U(Y) \equiv 0 \ mod \ p^k$$

donde a_U es entero. Claramente $\varphi_U(Y) = \varphi_{U'}(X)$ (por 1.1.23) y así, esta congruencia es equivalente a

$$\varphi_H(X) + \sum_{H \lneqq U' \leq S'} a_U \varphi_{U'}(X) \equiv 0 \ mod \ p^k \tag{1.4}$$

Definición 1.2.29 *Llamamos a (1.4) la* (H,p)***-congruencia*** *para* $A(G)$.

Recordemos el siguiente resultado de la teoría de anillos:

Lema 1.2.30 (Teorema Chino del residuo) *Sea R un anillo conmutativo con unidad tal que si $I_1, ..., I_n$, son ideales de R con*

$$I_i + I_j = R, \; i \neq j.$$

entonces,

$$R \Big/ \bigcap I_i \simeq R/I_1 \oplus ... \oplus R/I_n.$$

Demostración. [Row], proposición 2.2.1. ■

Teorema 1.2.31 *$A(G)$ consite de todos los vectores en $\mathbb{Z}^n$ que satisfacen las (H,p)-congruencias, para todo $H \leq G$ y todo divisor primo p del orden de G.*

Demostración. Sea $S_p = \{X \in \mathbb{Z}^n : X$ satisface las (H,p)-congruencias, para todo $H \leq G\}$, esto es, $S_p = \{X \in \mathbb{Z}^n : X_H + \sum_{H \lneq U' \lneq S'} a_U X_{U'} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p^k)\}$. Claramente S_p es un ideal de $\mathbb{Z}^n$ y $A(G) \subseteq S_p \subseteq \mathbb{Z}^n$. Deseamos probar que $A(G) = \bigcap_{p||G|} S_p$.

Sea $\tilde{A}_p$ la matriz cuyo i-ésimo renglón esta dado por los coeficientes de la congruencia (U_i, p) (por el orden total dado en $C(G)$, esta matriz es triangular superior y es invertible pues su coeficiente (j,j) es 1) y B_p la matriz diagonal cuya entrada (i,i) es $1/p^{k_i}$, donde p^{k_i} es la p-parte de $[N_G(U_i) : U_i]$. Entonces $B_p^{-1}\tilde{A}_p^{-1}(X)$ está en $\mathbb{Z}^n$ si y sólo si X está en S_p. Denotemos por M_p a la matriz $B_p^{-1}\tilde{A}_p^{-1}$, entonces S_p es precisamente la imagen de M_p.

Afirmamos que para dos primos distintos p y q, se tiene

$$S_p + S_q = \mathbb{Z}^n$$

en efecto, sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de $\mathbb{Z}^n$ y q^{l_i} es la q- parte de $[N_G(U_i) : U_i]$, entonces$1 = ap^{k_1} + bq^{l_1}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ y así $e_1 = M_p[a, 0, ..., 0]^t + M_q[b, 0, ..., 0]^t \in S_p + S_q$. Supongamos ahora que $e_1, ..., e_i \in S_p + S_q$, entonces $1 = ap^{k_{i+1}} + bq^{l_{i+1}}$, y $e_{i+1} = M_p v_1 + M_q v_2 + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in S_p + S_q$, donde v_1(resp. v_2)$\in \mathbb{Z}^n$ es el vector que en la posición $j \neq i+1$ vale cero y en la posición $i+1$ vale a (resp. b).

Por otra parte, tenemos que $\bigcap_p S_p = \prod_p S_p$, así por el teorema chino del residuo:

$$\mathbb{Z} \Big/ \bigcap_p S_p = \mathbb{Z}^n \Big/ \prod_p S_p = \bigoplus_p \mathbb{Z}^n / S_p$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\left| \mathbb{Z}^n \Big/ \bigcap_p S_p \right| &= \prod_p \left(\prod_{i=1}^{n} p^{k_i} \right) \text{(ver [Ja],cap.3,sec.3.7)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mid N_G(U_i)/U_i \mid \\
&= \mid \mathbb{Z}^n / A(G) \mid
\end{aligned}$$

y como $A(G) \subseteq \bigcap_p S_p$, concluimos que $A(G) = \bigcap_p S_p$. ■

1.3 Restricción, inducción y conjugación.

Definición 1.3.1 *Sean H un subgrupo de G y $X \in A^+(G)$. Podemos ver a X como un H-conjunto por la restricción de la acción de G a H. A X visto como H-conjunto se le llama la* **restricción de** G **a** H *y se le denota por $Res_H^G(X)$.*

Observación 1.3.2 *Claramente esta definición se extiende a $A(G)$ y la aplicación:*

$$\begin{aligned}
Res_H^G &: A(G) \longrightarrow A(H) \\
&: X \longmapsto Res_H^G(X)
\end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos.

Definición 1.3.3 *Sea $H \leq G$ y $X \in A^+(H)$, entonces le asignamos a $G \times X$ una estructura de H-conjunto, mediante lo siguiente:*

$$h(g,x) := (gh^{-1}, hx),\ \forall h \in H, \forall g \in G, \forall x \in X$$

Se sigue de la definición que la órbita de (g,x) en H es el conjunto:

$$O_H(g,x) = \{(gh^{-1}, hx) : h \in H\}$$

Definimos a $G \times_H X$ como el conjunto de órbitas del H-conjunto $G \times X$. Entonces, $G \times_H X$ es un G-conjunto bajo la acción:

$$\alpha O_H(g,x) := O_H(\alpha g, x),\ \forall \alpha, g \in G, \forall x \in X$$

*nos referimos a $G \times_H X$ como el **G-conjunto inducido** y lo denotamos por $Ind_H^G(X)$.*

Observación 1.3.4 *Esta definición se extiende naturalmente a $A(G)$ y se ve que la aplicación:*

$$\begin{aligned} Ind_H^G \ &: \ A(H) \longrightarrow A(G) \\ &: \ X \longmapsto Ind_H^G(X) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Lema 1.3.5 *Tenemos para $X \in A^+(G)$, que*

$$| \, Ind_H^G(X) \, | = [G : H] \, | \, X \, | \tag{1.5}$$

Demostración. En efecto, si $g_1, ..., g_n$ son representantes de las clases laterales G/H, entonces $Ind_H^G(X)$ tiene $| \, X \, | \, n$ elementos, a saber

$$\{O_H(g_i, x) : 1 \le i \le n,\ x \in X\}$$

■

Tenemos las siguientes propiedades elementales:

Proposición 1.3.6 *Sean H y K subgrupos de G tales que $K \le H$. Entonces,*

1). *Para cualquier K-conjunto X,*

$$(Ind_H^G \circ Ind_K^H)(X) \cong Ind_K^G(X)$$

2). $Ind_H^G(H/K) \cong G/K$

3). *Para cualquier G-conjunto X,*

$$Res_K^G(X) \cong (Res_K^H \circ Res_H^G)(X)$$

4). *Para cualesquier H-conjuntos X y Y tenemos:*

$$^g(X \coprod Y) =^g X \coprod {}^gY, \quad ^g(X \times Y) =^g X \times^g Y \text{ para todo } g \in G.$$

5). *Sea $f : G \longrightarrow H$ un isomorfismo de grupos, entonces*

$$f^*(H/K) \simeq G/f^{-1}(K)$$

en particular para cualquier $g \in G$, $^g(H/K) \cong gHg^{-1}/gKg^{-1}$.

6). *Para cualesquier G-conjuntos X y Y,*

$$Res_H^G(X \times Y) = Res_H^G(X) \times Res_H^G(Y)$$

7). *Para cualquier G-conjunto X, $Ind_G^G(X) \cong X$ y $Res_G^G(X) \cong X$, como G-conjuntos.*

Demostración. Los incisos 3), 4) y 6) son obvios.

1) Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi &: G \times_H X \longrightarrow G \times_K (K \times_H X) \\ &: O_H(g,x) \longmapsto O_K(g, O_H(1,x)) \end{aligned}$$

un cálculo directo demuestra que, ψ esta bien definida y es inyectiva. Por 1.5 concluimos que $G \times_H X$ y $G \times_K (K \times_H X)$ tienen la misma cardinalidad, luego ψ es biyectiva. Por último, para cualquier $g' \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} \psi(g' \cdot O_H(g,x)) &= \psi(O_H(g'g,x)) \\ &= O_K(g'g, O_H(1,x)) \\ &= g' \cdot \psi(O_H(g,x)) \end{aligned}$$

lo cual prueba 1).

2) Sea $g_1, ..., g_n$ representantes de las clases laterales G/H. Entonces $Ind_H^G(H/K)$ tiene $\mid G/H \mid\mid H/K \mid=\mid G/K \mid$ elementos, así tomamos ψ :

$Ind_H^G(H/K) \longrightarrow G/K$, dada por $\psi : O_H(g, hK) \longmapsto ghK$, esta aplicación es claramente suprayectiva y por lo tanto debe ser biyectiva.

5) Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi &: f^{\bullet}(H/K) \longrightarrow G/f^{-1}(K) \\ &: hK \longmapsto f^{-1}(h)f^{-1}(K) \end{aligned}$$

Un cálculo directo demuestra que ϕ debe ser biyectiva. Mas aún, para cualesquier $g \in G$, tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(g(hK)) &= \phi(f(g)hK) \\ &= f^{-1}(f(g)h)f^{-1}(K) \\ &= gf^{-1}(h)f^{-1}(K) \\ &= g\phi(hK) \end{aligned}$$

concluimos que ϕ es in isomorfismo de G-conjuntos.

7). Claramente $Res_G^G(X) \cong X$. Por definición, $Ind_G^G(X)$ tiene $\mid X \mid$ elementos, a saber:

$$\{O_G(1, x) : x \in X\}$$

Así, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi &: X \longrightarrow Ind_G^G(X) \\ &: x \longmapsto O_G(1, x) \end{aligned}$$

es claramente un G-isomorfismo. ■

Teorema 1.3.7 (Descomposición de Mackey para G-conjuntos) *Sean H y K subgrupos de G y sea T un conjunto completo de representantes de las clases dobles $K\backslash G/H$. Entonces para cualquier H-conjunto X,*

$$(Res_K^G \circ Ind_H^G)(X) \cong \coprod_{g \in T} (Ind_{K \cap gHg^{-1}}^K \circ Res_{K \cap gHg^{-1}}^{gHg^{-1}})(\,{}^gX).$$

Demostración. Sea $g_1, ..., g_n$ representantes de las clases laterales G/H. Entonces $Ind_H^G(X)$ tiene $\mid X \mid n$ elementos, a saber

$$\{O_H(g_i, x) : 1 \leq i \leq n,\, x \in X\}$$

Tomando $X_i := \{O_H(g_i, x) : x \in X\}$, tenemos

$$Ind_H^G(X) = \coprod_{i=1}^{n} X_i$$

además G permuta los X_i. En efecto, para cualquier $\alpha \in G$, $\alpha X_i = X_j$, si y sólo si $\alpha g_i = g_j h$ para algún $h \in H$, es decir, si y sólo si $\alpha(g_i H) = g_j H$. Así, X_i y X_j están en la misma K-órbita si y sólo si $Kg_iH = Kg_jH$.

Para cada $g \in T$, sea X_g la unión de los X_j para los cuales $g_j \in KgH$. Entonces cada X_g es un K-conjunto y tenemos:

$$(Res_K^G \circ Ind_H^G)(X) = \coprod_{g \in T} X_g.$$

En consecuencia, tomando $L = gHg^{-1} \cap K$ y $Y = {}^gX$, necesitamos verificar que

$$X_g \cong Ind_L^K \circ Res_L^{gHg^{-1}}(Y) \text{ como } K\text{-conjuntos.}$$

Sean $k_1, ..., k_r$ representantes de las clases laterales K/L. Entonces, $O_L(k_i, x)$, $1 \leq i \leq r$, $x \in Y$, son todos elementos distintos de $Ind_L^K \circ Res_L^{gHg^{-1}}(Y)$, consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi \ &: \ Ind_L^K \circ Res_L^{gHg^{-1}}(Y) \longrightarrow X_g \\ &: \ O_L(k_i, x) \longmapsto O_H(k_i g, x) \end{aligned}$$

Para $\lambda \in L$, sea $h = g^{-1}\lambda g$, entonces $(k_i\lambda^{-1}g, \lambda x) = (k_i g h^{-1}, hx)$. Luego ψ esta bien definida. Ahora bién, si $O_H(k_i g, x_1) = O_H(k_j g, x_2)$ entonces existe $h \in H$ tal que $k_i g = k_j g h$ y $x_1 = h^{-1}x_2$, así $k_j^{-1}k_i = ghg^{-1}$, por lo que $k_j^{-1}k_i \in L$. Tenemos $k_i = k_j(k_j^{-1}k_i)$ y $h^{-1}x_2 = gh^{-1}g^{-1}x_2 = k_i^{-1}k_j x$, por lo tanto $O_L(k_i, x_1) = O_L(k_j, x_2)$, así que ψ es inyectiva. Es fácil ver que ψ es suprayectiva y que preserva la acción de K. ■

Corolario 1.3.8 *Sea $G = \coprod_{i=1}^{s} Kg_iH$ la descomposición de G en clases doblelaterales con respecto a H y a K. Entonces*

$$Res_K^G(G/H) = \sum_{i=1}^{s} K/(K \cap g_iHg_i^{-1}).$$

Capítulo 2

Teorema de Dress

Este capítulo se encuentra basado en el artículo [Dr]. El resultado mas importante es el teorema 2.2.19, el cual nos asegura una corrrespondencia de idempotentes primitivos y ortogonales del anillo de Burnside de un grupo finito G y las clases de conjugancia de subgrupos perfectos de G. El lector con conocimientos básicos de álgebra conmutativa puede, en una primera lectura, saltarse la primera sección.

2.1 El espectro de un anillo

Esta sección esta basada en [Bo], capítulo II, sección 4.

Sea A un anillo conmutativo con identidad y X el conjunto de ideales primos en A ($A \notin X$).

Definición 2.1.1 *Para cada $M \subset A$, definimos $V(M) := \{I \in X : I \supseteq M\}$. Para $M = \{f\}$, $f \in A$ escribimos $V(f)$ en lugar de $V(\{f\})$.*

Proposición 2.1.2 *1). Si $\tilde{a}$ es el ideal generado por M, entonces $V(M) = V(\tilde{a})$, más aún $V(f) = V(Af)$.*

2). La aplicación $M \longmapsto V(M)$ es decreciente con respecto a la inclusión en A y X, esto es, si $M_1 \subsetneq M_2$, entonces $V(M_1) \supseteq V(M_2)$.

Definición 2.1.3 *Si $\tilde{a}$ es un ideal de A definimos el* **radical** *de $\tilde{a}$, el cual denotamos por $r(\tilde{a})$, como*

$$r(\tilde{a}) = \bigcap_{p \in X, p \supset \tilde{a}} p.$$

Proposición 2.1.4 *Las siguientes fórmulas se verifican:*

1). $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$;

2). *Para toda familia* $(M_i)_{i\in\Lambda}$ *de subconjuntos de* A, *tenemos* $V(\cup_{i\in\Lambda} M_i) = V(\sum_{i\in\Lambda} M_i) = \cap_{i\in\Lambda} V(M_i)$;

3). *Para todo par de ideales* $\tilde{a}$ *y* $\tilde{a}'$ *en* A, *tenemos* $V(\tilde{a} \cap \tilde{a}') = V(\tilde{a}\tilde{a}') = V(\tilde{a}) \cup V(\tilde{a}')$

4). $V(\tilde{a}) = V(r(\tilde{a}))$.

Observación 2.1.5 *La segunda fórmula en (1) tiene el siguiente converso: si* $\tilde{a}$ *es un ideal de* A *tal que* $V(\tilde{a}) = \emptyset$, *entonces* $\tilde{a} = A$, *pues no hay ideales maximales de* A *que contengan a* $\tilde{a}$.

Observación 2.1.6 *Las formulas 1) a 3) demuestran que los subconjuntos* $V(M)$ *de* X *satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados de una topología.*

Definición 2.1.7 *Sea* A *un anillo. El conjunto* X *de ideales primos de* A, *con la topología cuyos cerrados son los conjuntos* $V(M)$, *donde* M *recorre* $\mathcal{P}(A)$ *(El conjunto potencia de* A *), es llamado el* ***espectro primo de*** A *y se denota por* $Spec(A)$. *La topología así definida se llama la* ***topología espectral****, o la* ***topología de Zariski*** *sobre* X.

Observación 2.1.8 *Claramente la relación* $Spec(A) = \emptyset$ *es equivalente a* $A = 0$.

Notación 2.1.9 *Sea* $X = Spec(A)$, *para todo* $f \in A$, *denotamos por* X_f *como el conjunto de ideales primos de* A *que no contienen a* f, *entonces* $X_f = X - V(f)$ *por lo que* X_f *es abierto. Se sigue de 2) que* $\{X_f\}$ *es una base para la topología de Zariski en* X.

Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.10 *1).* $X_0 = \emptyset$, $X_1 = X$. *Más generalmente,* $X_f = X$ *para todo elemento invertible* f *de* A,

2). $X_{fg} = X_f \cap X_g$ *para todo* $f, g \in A$.

Notación 2.1.11 *Para todo subconjunto Y de X denotamos por $\mathcal{T}(Y)$ la intersección de todos los ideales primos de A que están en Y, es decir, $\mathcal{T}(Y) = \cap_{p \in Y} p$.*

Proposición 2.1.12 *$\mathcal{T}(Y)$ es un ideal de A y la aplicación $Y \longmapsto \mathcal{T}(Y)$ es decreciente con respecto a la inclusión en X y A, esto es, si $Y_1 \subset Y_2$, entonces $\mathcal{T}(Y_1) \supset \mathcal{T}(Y_2)$.*

Proposición 2.1.13 *Las siguientes igualdades se verifican para todo familia $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X:*

1). $\mathcal{T}(\emptyset) = A$,

2). $\mathcal{T}(\cup_{\lambda \in L} Y_\lambda) = \cap_{\lambda \in L} \mathcal{T}(Y_\lambda)$.

Proposición 2.1.14 *Sea A un anillo, $\tilde{a}$ un ideal de A y Y un subconjunto de $X = Spec(A)$.*

- **1).** *$V(\tilde{a})$ es cerrado en X y $\mathcal{T}(Y)$ es in ideal de A el cual es igual a su radical.*
- **2).** *$\mathcal{T}(V(\tilde{a}))$ es el radical de $\tilde{a}$ y $V(\mathcal{T}(Y))$ es la cerradura de Y en X.*
- **3).** *Las aplicaciones $\mathcal{T}$ y V dan una biyección, entre el conjunto de subconjuntos cerrados de X y el conjunto de ideales de A que son iguales a sus radicales.*

Demostración. La afirmación 1) y la primera afirmación de 2) se siguen de la definición. Probaremos, ahora la segunda afirmación en 2). Sea $M \subseteq A$. Si un subconjunto cerrado $V(M)$ contiene a Y, entonces $M \subseteq \tilde{p}, \forall \tilde{p} \in Y$, así $M \subseteq \mathcal{T}(Y)$ y en consecuencia $V(M) \supseteq V(\mathcal{T}(Y))$. Como $Y \subseteq V(\mathcal{T}(Y))$, $V(\mathcal{T}(Y))$ es el mínimo cerrado de X que contiene a Y. Esto prueba 2).

Finalmente, se sigue de 2) que si $\tilde{a}$ es un ideal primo igual a su radical, entonces $\mathcal{T}(V(\tilde{a})) = \tilde{a}$ y que, si Y es cerrado en X, entonces $V(\mathcal{T}(Y)) = Y$. Esto prueba 3). ∎

Corolario 2.1.15 *La igualdad $X_f = X_e$ se verifica si y sólo si existen enteros m y n, tales que $f^m \in Ae$ y $e^n \in Af$.*

Corolario 2.1.16 *Sea $f \in A$, entonces $X_f = \emptyset$ si y sólo si f es nilpotente.*

Lema 2.1.17 *Sea $\tilde{p} \in Spec(A)$, entonces $\{\tilde{p}\}^- = V(\tilde{p})$, donde $\{\tilde{p}\}^-$ denota la cerradura de $\tilde{p}$.*

Demostración. Por definición, $\{\tilde{p}\}^-$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $\{\tilde{p}\}$, así $V(\tilde{p}) \supseteq \{\tilde{p}\}^-$. Ahora, si $\tilde{q} \in V(\tilde{p})$, entonces $\tilde{q} \supseteq \tilde{p}$, luego toda vecindad de $\tilde{q}$ intersecta a $\{\tilde{p}\}$, por lo que $\tilde{q} \in \{\tilde{p}\}^-$. ■

Proposición 2.1.18 *Sea A un anillo, $X = Spec(A)$. La aplicación $\phi : e \longmapsto X_e$ es una biyección entre el conjunto $Idem(A)$ de idempotentes de A y el conjunto de subconjuntos de X que son abiertos y cerrados.*

Demostración. Obsérvese que si e es un idempotente , también lo es $f = 1 - e$ y se tiene que $ef = 0$. Además el conjunto abierto X_e es cerrado, pues su complemento es el conjunto abierto X_f; en efecto, $X_e \cup X_f = X_1 = Spec(A)$ y $X_e \cap X_f = X_{ef} = X_0 = \emptyset$.

Ahora bien, la aplicación $\phi : e \longmapsto X_e$ es suprayectiva: en efecto, sea U un abierto y cerrado de X y sea V su complemento. Entonces $U = V(\tilde{a})$ y $V = V(\tilde{b})$, con $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ ideales. Puesto que $\emptyset = U \cap V = V(\tilde{a} + \tilde{b})$, se tiene que $\tilde{a} + \tilde{b} = A$. Sea $1 = \alpha + \beta$, $\alpha \in \tilde{a}, \beta \in \tilde{b}$, entonces $V(\alpha\beta) \supset V(\tilde{a}\tilde{b}) = V(\tilde{a}) \cup V(\tilde{b}) = X$, por lo tanto $X_{\alpha\beta} = \emptyset$ y así $\alpha\beta$ es nilpotente. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha^n\beta^n = 0$ y sean c y d elementos de A tales que $1 = c\alpha^n + d\beta^n$, entonces tenemos dos idempotentes ortogonales $f = c\alpha^n$, $e = d\beta^n$. Se deduce que $V(e)$ y $V(f)$ forman una partición abierta de X. Como $U \subsetneq V(f)$ y $V \subsetneq V(e)$, resulta que $U = V(f)$ y $V = V(e)$, luego entonces $U = X_e$.

Ahora veamos que la aplicación ϕ es inyectiva; en efecto, la igualdad $X_e = X_{e'}$, con $e, e' \in Idem(A)$, es equivalente a la igualdad $r(Ae) = r(Ae')$ y si $e \neq e'$, se tiene

$$e = ae' \text{ y } e' = be \text{ con } a, b \in A$$

se deduce que:

$$ee' = ae'^2 = ae' = e \text{ y } ee' = be^2 = be = e'$$

en consecuencia $e = e'$. ■

Corolario 2.1.19 *$Spec(A)$ es conexo si y sólo si A no contiene mas idempotentes que el cero y el uno.*

Demostración. En efecto, si $Spec(A)$ es conexo entonces sus únicos abiertos y cerrados son $\{\emptyset\}$ y $Spec(A)$, luego por la proposición anterior A no contiene mas idempotentes que el cero y el uno. Inversamente, si A no contiene mas idempotentes que el cero y el uno, entonces $Spec(A)$ no contiene mas de dos subconjuntos que sean abiertos y cerrados, así $Spec(A)$ debe ser conexo. ■

2.2 Ideales primos

A partir de este momento, utilizaremos del mismo modo G/K y $[G/K]$, donde K es un subgrupo de G.

Lema 2.2.1 *Sea $\{U_1, ..., U_n\}$ un conjunto completo de representantes de clases de conjugancia de subgrupos de G. Sea H un subgrupo de G y X un $G-$conjunto, entonces*

$$[G/H][X] = \varphi_H([X])[G/H] + \sum_{H_i <_G H} r_i[G/U_i]$$

para algunos enteros no negativos r_i.

Demostración. Como $[X]$ es un G-conjunto, entonces por la proposición 1.1.29, se tiene

$$[G/H][X] = \sum_{i=1}^{n} r_i[G/U_i], \tag{2.1}$$

para algunos enteros no negativos r_i. Ahora bien, sea $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $r_j \neq 0$, entonces

$$\varphi_{U_j}([G/H])\varphi_{U_j}(X) = \sum_{i=1}^{n} r_i\varphi_{U_j}([G/U_i]) > 0$$

pues $r_j\varphi_{U_j}([G/U_j]) \neq 0$, luego entonces

$$\varphi_{U_j}([G/H]) \neq 0$$

por lo que $U_j \leq_G H$. Por lo tanto, por (2.1) tenemos que

$$[G/H][X] = r_H[G/H] + \sum_{U_i <_G H} r_i[G/U_i]$$

pero, $\varphi_H(G/U_j) = 0$ si $U_j <_G H$, por lo que

$$\varphi_H([G/H])\varphi_H(X) = r_H\varphi_H([G/H])$$

y como $\varphi_H(G/H) \neq 0$, entonces

$$r_H = \varphi_H(X)$$

que es lo que se deseabamos probar. ■

Lema 2.2.2 *Sean R un dominio entero y $\lambda : A(G) \longrightarrow R$ un homomorfismo de anillos no nulo. Entonces existe un subgrupo minimal H tal que $\lambda[G/H] \neq 0$; este subgrupo es único salvo conjugación y satisface:*

$$\lambda(X) = \varphi_H(X)1_R, \text{ para todo } X \in A(G).$$

Demostración. Sea $C(G) = \{U_1, ..., U_n\}$ representantes de todas las clases de conjugancia de subgrupos de G, y supongamos que $H = U_i$ para algún i. Basta con probar cuando X es un G-conjunto. Entonces, para esta elección de H, tenemos que $\lambda(G/U_i) = 0$, si $U_i \lneq_G H$. En efecto, si $gU_ig^{-1} \lneq H$ para algún $g \in G$, entonces $\lambda(G/U_i) = \lambda(G/gU_ig^{-1}) = 0$, por la minimalidad de H. En consecuencia, aplicando λ a ambos lados de la igualdad en el lema anterior tenemos:

$$\lambda[G/H]\lambda[X] = \varphi_H(X)\lambda[G/H]$$

como $\lambda[G/H] \neq 0$ y R es un dominio entero, deducimos que

$$\lambda[X] = \varphi_H(X)1_R$$

que es lo que deseábamos probar.

Por otra parte, supongamos que K es un subgrupo minimal de G con la propiedad de que $\lambda[G/K] \neq 0$. Entonces tenemos:

$$\lambda([G/H][G/K]) \neq 0$$

Por otro lado por 1.1.26, tenemos:

$$[G/H][G/K] = \sum_{L \leq_G H, L \leq_G K} n_L[G/L]$$

para algunos enteros n_L. Así, $\lambda[G/L] \neq 0$ para algún subgrupo L de G con $L \leq_G H, L \leq_G K$. La minimalidad de H y K fuerzan a que $H \sim_G L \sim_G K$. ∎

Definición 2.2.3 *Sea π un conjunto no vacío de números primos. Un grupo G se llama π-grupo si todos los divisores primos del orden de G están en π.*

Proposición 2.2.4 *Sea G un grupo, entonces G tiene un único subgrupo normal N tal que el cociente es un π-grupo soluble.*

Demostración. Sean G un grupo finito y definamos $M(G) := \{H \trianglelefteq G : G/H \text{ es un } \pi\text{-grupo soluble}\}$. Como $G \in M(G)$, tenemos que $M(G) \neq \varnothing$. Mas aún, para $H_1, H_2 \in M(G)$, tenemos que $G/(H_1 \cap H_2)$ es un π-grupo soluble, pues $H_1/(H_1 \cap H_2) \simeq (H_1H_2)/H_1 \leq G/H_1$ es un π-grupo soluble y $(G/(H_1 \cap H_2))/(H_1/(H_1 \cap H_2)) \simeq G/H_1$. De esta manera $H_1 \cap H_2 \in M(G)$, es decir, $M(G)$ es cerrado bajo intersecciones. Luego entonces, tomamos a N como la intersección de todos los elementos de $M(G)$. ∎

Notación 2.2.5 *Si $\pi = \{p_1, ..., p_n\}$ es un conjunto de primos, denotamos por $O^\pi(G)$ como el mínimo subgrupo normal de G tal que el cociente $G/O^\pi(G)$ es un π-grupo soluble, en particular si $\pi = \{p\}$, entonces escribimos $O^\pi(G) = O^p(G)$. Si además π es el conjunto de divisores primos del orden de G, entonces $O^\pi(G)$ es el mínimo subgrupo normal tal que el cociente $G/O^\pi(G)$ es soluble. Denotamos a $O^\pi(G)$ por $O(G)$ en este caso.*

Definición 2.2.6 *Decimos que un grupo G es π-**perfecto** si $G = O^\pi(G)$.*

Definición 2.2.7 *Sea $H \leq G$. Decimos que H es un **subgrupo característico** de G, si para todo automorfismo Ψ del grupo G, $\Psi(H) = H$. En este caso escribimos $H car G$.*

Proposición 2.2.8 *Sean p un número primo, π un conjunto finito de primos y G un grupo, entonces*

1). *$O^\pi(G)$ es un subgrupo característico de G.*

2). $O^p(O^p(G)) = O^p(G)$.

3). $O^\pi(G) = O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))$, para algunos primos $q_i \in \pi$.

4). Sea H un subgrupo de G, entonces para todo $g \in G$, $gO^\pi(H)g^{-1} = O^\pi(gHg^{-1})$.

5). Sean H y K subgrupos de G. Si $K \subseteq H$, entonces $O^\pi(K) \subseteq O^\pi(H)$.

6). El grupo $O^\pi(G)$ es π-perfecto.

Demostración. 1) Sea Ψ un automorfismo del grupo G. Claramente $\Psi(O^\pi(G))$ es un subgrupo normal de G y $[G : O^\pi(G)] = [G : \Psi(O^\pi(G))]$, luego $G/\Psi(O^\pi(G))$ es un π-grupo soluble, por lo que $O^\pi(G) \subseteq \Psi(O^\pi(G))$.

2) Como $O^p(O^p(G))$ es característico en $O^p(G)$ y este último es característico en G, tenemos que $O^p(O^p(G))$ es normal en G, así por los teoremas de isomorfía tenemos que

$$\frac{G/O^p(O^p(G))}{O^p(G)/O^p(O^p(G))} \simeq G/O^p(G)$$

luego entonces $G/O^p(O^p(G))$ es un p-grupo, por lo que $O^p(G) \subseteq O^p(O^p(G))$.

3) Un cálculo análogo al dado en 2), demuestra que

$$\frac{G}{O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))}$$

es un π-grupo soluble, donde $q_i \in \pi$, por lo que $O^\pi(G) \subseteq O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))$. Ahora bien, sea $\pi = \{p_1, ..., p_m\}$. Entonces, como $\frac{G}{O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))}$ soluble tenemos que $O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...)) = O^\pi(G)$, o bien para algún $q \in \pi$, $O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...))$ tiene un subgrupo propio normal de índice q. Luego $O^q(\ O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...)))$ es un subgrupo propio de $O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...))$ y $O^\pi(G) \subseteq O^q(\ O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...)))$. De aquí tenemos que $O^\pi(G) = O^q(\ O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...)))$, o bien $O^q(\ O^{p_1}(O^{p_2}(...O^{p_m}(G)...)))$ tiene un subgrupo propio de indice $q' \in \pi$. Siguiendo este argumento por recurrencia, tenemos que $O^\pi(G) = O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))$, para algunos primos $q_i \in \pi$.

4) En efecto, se tiene que

$$\frac{gHg^{-1}}{gO^\pi(H)g^{-1}} \simeq \frac{H}{O^\pi(H)}$$

luego, $O^\pi(gHg^{-1}) \subseteq gO^\pi(H)g^{-1}$. La otra contención se da de manera análoga.

5) Tenemos que

$$\frac{\frac{K}{O^\pi(K)\cap O^\pi(H)}}{\frac{O^\pi(K)}{O^\pi(K)\cap O^\pi(H)}} \simeq \frac{K}{O^\pi(K)}$$

luego para demostrar que $O^\pi(K) \subseteq O^\pi(H)$, basta con probar que $\frac{O^\pi(K)}{O^\pi(K)\cap O^\pi(H)}$, es un π-grupo soluble, en efecto tenemos que

$$\frac{O^\pi(K)}{O^\pi(K)\cap O^\pi(H)} \simeq \frac{O^\pi(K)O^\pi(H)}{O^\pi(H)} \leq \frac{H}{O^\pi(H)}$$

6) Esto se sigue de 3) y 2). ■

Definición 2.2.9 *Decimos que G es un grupo* **perfecto** *si $G = G'$, donde G' es el subgrupo conmutador de G.*

Proposición 2.2.10 *Sea G un grupo, entonces G es un grupo perfecto si y sólo si $G = O(G)$.*

Demostración. Supongamos que G no es un grupo perfecto y que $G = O(G)$. Entonces G/G', es un grupo abeliano no trivial, por lo tanto soluble, entonces por minimalidad $O(G) \subseteq G' \subset G$, lo que es una contradicción, pues $G = O(G)$.

Inversamente, supongamos que $O(G) \subset G$ y que G es perfecto, entonces $G/O(G)$, es un grupo soluble no trivial, por lo tanto existe $K/O(G) \lhd G/O(G)$, tal que que el grupo cociente $(G/O(G))/(K/O(G))$, es abeliano, entonces por el teorema de correspondencia y el tercer teoreme de isomorfía, existe $K \lhd G$, tal que el grupo cociente G/K,es abeliano, por lo tanto $G' \subseteq K \subset G$, lo que es una contradicción pues, G es un grupo perfecto. ■

Proposición 2.2.11 *Sea G un grupo, entonces $O(G) = O(O^p(G))$.*

Demostración. Observamos que $O(O^p(G)) \trianglelefteq G$ ($\gamma_x(O^p(G)) = O^p(G)$, donde γ_x es conjugar por $x \in G$ ya que $O^p(G) \trianglelefteq G$, por lo tanto $\gamma_x(O(O^p(G))) = O(O^p(G))$, pues $O(O^p(G))$ es característico en $O^p(G)$), entonces por el tercer teorema de isomorfía se tiene que $(G/O(O^p(G)))/(O^p(G)/O(O^p(G)))$ es isomorfo como grupo a $G/O^p(G)$ el cual es soluble, entonces $G/O(O^p(G))$, es soluble por lo tanto por minimalidad se tiene que $O(G) \subseteq O(O^p(G))$.

Por otro lado $G/O^p(G)$, es soluble, entonces por minimalidad se tiene que $O(G) \subseteq O^p(G)$, entonces por el teorema de correspondencia se tiene que $O^p(G)/O(G) \subseteq G/O(G)$, pero $G/O(G)$, es un grupo soluble, luego entonces $O^p(G)/O(G)$ es un grupo soluble, por lo tanto $O(O^p(G)) \subseteq O(G)$. ■

Proposición 2.2.12 *Sea G un grupo, entonces G es un grupo soluble si y sólo si el subgrupo identidad es el único subgrupo perfecto de G.*

Demostración. En efecto, supongamos que existe un subgrupo H de G, diferente del subgrupo identidad y que sea perfecto. Como H es un subgrupo de un grupo soluble entonces este es soluble, por lo tanto existe $K \lhd H$, tal que el cociente es un grupo abeliano, por lo tanto $H' \subseteq K \subset H$, lo cual es una contradicción, pues $H' = H$.

Inversamente, como el subgrupo identidad es el único subgrupo perfecto, entonces existe la serie $G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset e$, donde e es el subgrupo identidad, pero dicha serie es soluble, luego entonces G es soluble. ■

Lema 2.2.13 *Sea H algún subgrupo de G y sea $K/O^p(H)$ un p-subgrupo de Sylow de $N_G(O^p(H))/O^p(H)$. Entonces $O^p(H) = O^p(K)$.*

Demostración. Por la minimalidad de $O^p(K)$ se tiene que $O^p(K) \subseteq O^p(H)$. Por otro lado $H/O^p(H)$ es un p-grupo, entonces existe un p-subgrupo de Sylow $M/O^p(H)$ de $N_G(O^p(H))/O^p(H)$, tal que lo contiene. Puesto que $M/O^p(H)$ es un p-grupo entonces $O^p(M) \subseteq O^p(H)$, por lo que $O^p(M) \subseteq H$. Haciendo uso de esto y del teorema de correspondencia, se llega a $H/O^p(M) \leq M/O^p(M)$, por lo que $O^p(H) \subseteq O^p(M)$. Luego entonces $O^p(M) = O^p(H)$.

Por el segundo teorema de Sylow $M/O^p(H) \sim_{N_G(O^p(H))/O^p(H)} K/O^p(H)$, por lo tanto $M \sim_{N_G(O^p(H))} K$ (claramente $|M| = |K|$, por otro lado, todo elemento de M es de la forma $uxu^{-1}s$, donde $u \in N_G(O^p(H))$, $s \in O^p(H)$ y $x \in K$, pero $O^p(H)$ es normal en K, por lo tanto $uxu^{-1}s = uxtu^{-1}$, donde $t \in O^p(H)$, pero $uxtu^{-1} \in uKu^{-1} \Rightarrow M \subseteq uKu^{-1}$), luego entoces $|O^p(M)| = |O^p(K)| = |O^p(H)|$, pero $O^p(K) \subseteq O^p(H)$, por lo tanto $O^p(K) = O^p(H)$. ■

Lema 2.2.14 *Sean H y L subgrupos de G, entonces para un número primo p las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1). *L es un subgrupo minimal de G tal que $p \nmid \varphi_H([G/L])$.*

2). $p \nmid [N_G(L) : L]$ *y*

$$\varphi_H(X) \equiv \varphi_L(X) \ mod\ p, \text{para todo } G\text{-conjunto } X.$$

3). *L es G-conjugado a el subgrupo K de G donde $K/O^p(H)$ es un p-subgrupo de* Sylow *de* $N_G(O^p(H))/O^p(H)$.

Demostración. 1)$\Longrightarrow$2) Consideremos la aplicación $\lambda : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dada por $\lambda : X \longmapsto \varphi_H(X) + p\mathbb{Z}$. Por hipótesis, L es minimal tal que $\lambda(G/L) \neq 0$, en consecuencia por 2.2.2, $\lambda(X) = \varphi_L(X) + p\mathbb{Z}$, para todo $X \in A(G)$. Así

$$\varphi_H(X) \equiv \varphi_L(X) \ mod\ p, \text{ para todo } X \in A(G).$$

Se sigue ahora que

$$[N_G(L) : L] = \varphi_L(G/L) \equiv \varphi_H(G/L) \ mod\ p$$

por lo tanto, $p \nmid [N_G(L) : L]$, lo cual prueba 2).

2)$\Rightarrow$1) Aplicando la hipótesis para $X = G/L$, tenemos

$$[N_G(L) : L] = \varphi_L(G/L) \equiv \varphi_H(G/L) \ mod\ p$$

Por lo que $p \nmid \varphi_H(G/L)$. Por otra parte, sea $Q \leq L$ tal que $p \nmid \varphi_H(G/Q)$, entonces aplicando la hipótesis a G/Q, tenemos $\varphi_H(G/Q) \equiv \varphi_L(G/Q)$ *mod* p, por lo que $\varphi_L(G/Q) \neq 0$, con lo que $| L | \leq | Q |$, así $Q = L$, lo cual prueba 1).

1)$\Longleftrightarrow$3) Sea K subgrupo de G tal que $K/O^p(H)$ es un p-subgrupo de Sylow de $N_G(O^p(H))/O^p(H)$ entonces por 2.2.13, se tiene que

$$O^p(H) = O^p(K),$$

Entonces, por este resultado y por 2.2.8, se tiene que $O^p(H) car K \trianglelefteq N^G(K)$, de donde

$$N_G(K) \subseteq N_G(O^p(H))$$

lo cual fuerza a que $p \nmid [N_G(K) : K]$. Además, para cualquier G-conjunto X, tenemos por el inciso 3) de la proposición 1.1.25 que

$$\varphi_H(X) \equiv \varphi_{O^p(H)}(X) = \varphi_{O^p(K)}(X) \equiv \varphi_K(X) \ mod\ p.$$

De la congruencia anterior se tiene que el subgrupo minimal U de G tal que $p \nmid \varphi_H([G/U])$, es G-conjugado a K, por lo tanto aplicando el lema anterior a este razonamiento se tiene 1)$\Rightarrow$3).

Por la equivalencia de 1)$\Longleftrightarrow$2) se ve facilmente que 3)$\Rightarrow$1). ∎

Notación 2.2.15 *Sea p un número primo o cero, entonces para cualquier subgrupo H de G y para cada p, escribimos:*

$$I(H,p) := \varphi_H^{-1}(p\mathbf{Z}).$$

Observación 2.2.16 *Sea P un ideal primo de $A(G)$, entonces $A(G)/P \cong \mathbf{Z}_p$, o bien $A(G)/P \cong \mathbf{Z}$.*

Lema 2.2.17 *Si P es un ideal primo e $I(H,0) \subseteq P$, entonces $P = I(H,p)$, donde p es la característica de $A(G)/P$.*

Demostración. En efecto, sea $\pi : A(G) \longrightarrow A(G)/P$, la aplicación canonica, entonces

$$\pi(x) = \varphi_H(x) + P, \forall x \in A(G),$$

luego $x \in P \Longleftrightarrow \pi(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_H(x) \equiv 0 \; mod \; p \Longleftrightarrow x \in I(H,p)$. ■

Entonces tenemos el siguiente:

Teorema 2.2.18 ([Dr], proposición 1) *Sean H y K subgrupos de G. Entonces:*

1). *Los ideales primos de $A(G)$ son precisamente los ideales $I(H,p)$, definidos anteriormente, para alguna elección de H y p.*

2). $I(H,0) = I(K,0)$ *si y sólo si* $H \sim_G K$.

3). *Si p es un primo, entonces $I(H,p) = I(K,p)$ si y sólo si $O^p(H) \sim_G O^p(K)$.*

4). $I(H,p) \subseteq I(K,q)$ *si y sólo si se tiene alguno de los siguientes dos casos:*

  a). $p = q$ *y* $I(H,p) = I(K,q)$.

  b). $p = 0$, $q \neq 0$ *y* $I(H,q) = I(K,q)$.

en particular, $I(H,p)$ es minimal si y sólo si $p = 0$ e $I(H,p)$ es maximal si y sólo si $p \neq 0$.

Demostración. 1) Los ideales primos de $A(G)$ son precisamente los núcleos de los homomorfismos de anillos $\lambda : A(G) \longrightarrow R$, donde R es un dominio entero de característica $p \geq 0$. Por 2.2.2 $Nuc(\lambda) = I(H,p)$ para alguna elección de H. Más exactamente, si P es un ideal primo de $A(G)$, entonces tomamos $R = A(G)/P$, $p =$ característica de R, la cual es cero o un número primo, precisamente por ser R un dominio entero. Sea $\lambda : A(G) \longrightarrow R$, el homomorfismo natural, vemos fácilmente que $P = Nuc(\lambda) = I(H,p)$, para alguna elección de H.

2) Si $H \sim_G K$, entonces por 1.1.23 $\varphi_H = \varphi_K$, se sigue de la definición que $I(H,0) = I(K,0)$. Inversamente, si $I(H,0) = I(K,0)$ entonces para cualquier $X \in A(G)$,

$$\varphi_H(X) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_K(X) = 0$$

entonces $\varphi_H(G/H) \neq 0 \Rightarrow \varphi_K(G/H) \neq 0$ y $\varphi_K(G/K) \neq 0 \Rightarrow \varphi_H(G/K) \neq 0$, en consecuencia $H \sim_G K$.

3) Sea N un subgrupo normal de H tal que H/N es un p-grupo, entonces para cualquier G-conjunto X se tiene por el inciso 3) de 1.1.25 que,

$$\varphi_H(X) \equiv \varphi_N(X) \ mod\ p$$

en consecuencia, si $O^p(H) \sim_G O^p(K)$, se tiene que para todo $X \in A(G)$,

$$\varphi_K(X) \equiv \varphi_{O^p(K)}(X) = \varphi_{O^p(H)}(X) \equiv \varphi_H(X) \ mod\ p$$

lo cual demuestra que $I(H,p) = I(K,p)$.

Inversamente, supongamos que $I(H,p) = I(K,p)$ entonces, para cualquier $X \in A(G)$,

$$\varphi_H(X) \equiv 0 \ mod\ p \Longleftrightarrow \varphi_K(X) \equiv 0 \ mod\ p \tag{2.2}$$

Por lo tanto, si L es un subgrupo de G tal que $L/O^p(H)$ es un p-subgrupo de Sylow de $N_G(O^p(H))/O^p(H)$, M su contraparte con respecto a K y sea N un subgrupo minimal G tal que de $p \nmid \varphi_H([G/N])$ entonces N es G-conjugado al subgrupo L, por el lema anterior, pero por (2.2) N es un subgrupo minimal G tal que de $p \nmid \varphi_K([G/N])$ entonces N es G-conjugado al subgrupo M, en conclusión L es G-conjugado a M, pero por 2.2.13 se tiene que

$$O^p(L) = O^p(H) \text{ y } O^p(M) = O^p(K)$$

por lo tanto $O^p(H) \sim_G O^p(K)$.

4) Si p es un número primo, entonces para algún subgrupo H de G, la función $\lambda : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$, tal que $\lambda(x) = \varphi_H(x) + p\mathbb{Z}$, es un homomorfismo

de anillos, cuyo núcleo está dado por $I(H,p)$. Más aún, $A(G)/I(H,p) \cong \mathbb{Z}_p$, el cual es un campo, así $I(H,p)$ es un ideal maximal.

Probaremos ahora que $I(H,0)$ es un ideal minimal. Si $P \subseteq I(H,0)$ es un ideal primo, entonces $P = I(K,q)$ para algún $K \leq G$ y q un número primo o cero, pero $q = 0$ si no $I(K,q)$ seria un ideal maximal. Así por el lema anterior, debemos tener que $P = I(K,0) = I(H,0)$.

Claramente $I(H,0) \subset I(H,p)$, con p un número primo, pues $p\,[G/H] \in I(H,p)$, pero $p\,[G/H] \notin I(H,0)$.

Supongamos que $I(H,p) \subseteq I(K,q)$. Si $p \neq 0$, por lo anterior $I(H,p)$ es maximal, luego $I(H,p) = I(K,q)$, pero por el primer teorema de isomorfía para anillos $A(G)/I(H,p)$ es isomorfo como anillo a $\mathbb{Z}_p$y $A(G)/I(K,q)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_q$, de aquí que $p = q$.

Supongamos que $p = 0$. Si $q = 0$, entonces $I(H,p) = I(K,q)$, por minimalidad, si $q \neq 0$, entonces $I(H,q) = I(K,q)$ por maximalidad.

El inverso es inmediato. ∎

Teorema 2.2.19 ([Dr], proposición 2) *Sean H y K subgrupos de G. Entonces:*

1). *Dos ideales primos $I(H,p)$ y $I(K,q)$ están en la misma componente conexa de Spec($A(G)$) si y sólo si $O(H) \sim_G O(K)$.*

2). *Las componentes conexas de Spec($A(G)$) están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugancia de subgrupos perfectos de G.*

3). *G es soluble si y sólo si Spec($A(G)$) es conexo, es decir, si y sólo si los únicos idempotentes de $A(G)$ son 0 y 1.*

4). *Los idempotentes primitivos de $A(G)$ están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugancia de subgrupos perfectos de G.*

Demostración. Por 2.2.12, 3) es una consecuencia de 2), haciendo uso de2.2.8 y 2.2.10, se observa que 2) es cosecuencia de 1). Más aún se ve fácilmente que 2) y 4) son equivalentes. Por lo tanto, sólo basta con verificar 1).

Sea R un anillo noetheriano. Para cualquier ideal primo P de R, tenemos que

$$\bar{P} = \{Q \mid Q \in Spec(R),\ Q \supseteq P\}$$

es la cerradura de P en $Spec(R)$, más aún, tenemos por definición que dos ideales primos P y Q, de R están en la misma componente conexa de $Spec(R)$, si y sólo si, existe una sucesión $P_1, ..., P_n$ de ideales primos minimales tales que

$$P \in \bar{P}_1,\ Q \in \bar{P}_n,\ \bar{P}_i \cap \bar{P}_{i+1} \neq \emptyset.$$

Ahora, sea $R = A(G)$, entonces por el teorema anterior

$$\overline{I(H,0)} \cap \overline{I(K,0)} \neq \emptyset$$

si y sólo si $O^p(H) \sim_G O^p(K)$, para algún p. Por 2.2.11 se tiene que

$$O(H) = O(O^p(H))$$

entonces $O(H) \sim_G O(K)$. Pero los ideales primos minimales de $A(G)$ son de la forma $I(H,0)$. En consecuencia si $I(H,p)$ e $I(K,q)$ están en la misma componente conexa, entonces $O(H) \sim_G O(K)$.

Ahora demostraremos que $I(H,p)$ e $I(O(H),0)$ están en la misma componente conexa. Podemos encontrar una cadena descendente de subgrupos de H,

$$H = H_0 \supseteq ... \supseteq H_n = O(H)$$

tal que $H_i \lhd H_{i-1}$ y H_{i-1}/H_i es un p_i-grupo para algunos primos p_i, $1 \leq i \leq n$. Por otro lado, tenemos que $O^{p_i}(H_i) \lhd H_{i-1}$, pues por 2.2.8, $O^{p_i}(H_i)$ es un subgrupo característico en H_i, el cual es normal en H_{i-1}, por lo tanto por el tercer teorema de isomorfía $(H_{i-1}/O^{p_i}(H_i))/(H_i/O^{p_i}(H_i))$, es isomorfo como grupo a H_{i-1}/H_i, el cual es un p_i-grupo, luego entonces $H_{i-1}/O^{p_i}(H_i)$, es un p_i-grupo, por lo tanto $O^{p_i}(H_{i-1}) \subseteq O^{p_i}(H_i) \subseteq H_i$, pero por el teorema de correspondencia, $H_i/O^{p_i}(H_{i-1}) < H_{i-1}/O^{p_i}(H_{i-1})$, de aquí que $H_i/O^{p_i}(H_{i-1})$, sea un p_i-grupo, entonces $O^{p_i}(H_i) \subseteq O^{p_i}(H_{i-1}) \Rightarrow O^{p_i}(H_i) = O^{p_i}(H_{i-1})$. De esto, se puede concluir que, $\overline{I(H_{i-1},0)} \cap \overline{I(H_i,0)} \neq \emptyset$ y claramente se tiene que $I(H,p) \in \overline{I(H_0,0)}$, $I(O(H),0) \in \overline{I(H_n,0)}$, entonces $I(H,p)$ e $I(O(H),0)$ están en la misma componente conexa.

De manera análoga observamos que $I(K,q)$ e $I(O(K),0)$ están en la misma componente conexa, por lo tanto $I(H,p)$ e $I(K,q)$ están en la misma componente conexa, ya que por hipótesis $O(H) \sim_G O(K)$. ∎

Definición 2.2.20 *Para un grupo G sea $\tilde{A}(G) := \mathbb{Z}^n$, donde $n = \mid C(G) \mid$. Para un conjunto π de primos definimos:*

$$\begin{aligned} A_\pi(G) &:= \mathbb{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}} A(G) \\ \tilde{A}_\pi(G) &:= \mathbb{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}_\pi^n \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Z}_\pi := \{a/b \in \mathbb{Q} : b$ es un π'-número$\}$. Si π es vacío, por convención es $\mathbb{Z}_\pi = \mathbb{Q}$ y tenemos $A_\pi(G) = A_{\mathbb{Q}}(G)$, $\tilde{A}_\pi(G) = \tilde{A}_{\mathbb{Q}}(G)$. También escribimos $\varphi_\pi : A_\pi(G) \longrightarrow \tilde{A}_\pi(G)$ como la extención por $\mathbb{Z}_\pi$-linealidad de el homomorfismo de Burnside $\varphi : A(G) \longrightarrow \tilde{A}(G), \varphi : X \longmapsto (\varphi_H(X))_{(H)\in C(G)}$. Nos referimos a φ_π como el ***π-homomorfismo de Burnside****. Es claro que φ_π es inyectiva, pues φ lo es.*

Definición 2.2.21 *Para cada subgrupo H de G y cada ideal primo P de $\mathbb{Z}_\pi$, definimos:*

$$I_\pi(H,P) := \{x \in A_\pi(G) : \varphi_{\pi,H}(x) \in P\}$$

donde $\varphi_{\pi,H} : A_\pi(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_\pi$ es la extensión de $\varphi_H : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_\pi$-linealidad. Es claro que $I_\pi(H,P)$ es un ideal primo de $A_\pi(G)$.

Análogo al teorema de Dress tenemos el siguiente teorema dado en [Dr]:

Teorema 2.2.22 *Sea G un grupo y H un subgrupo de G, entonces*

1). *Todo ideal primo de $A_\pi(G)$ es de la forma $I_\pi(H,P)$ para ciertas elecciones de H y P.*

2). *$I_\pi(H,P) = I_\pi(K,P)$ si y sólo si $O^p(H)$ es conjugado a $O^p(K)$, donde $pZ = P \cap Z$*

3). *Dos ideales primos $I_\pi(H,P), I_\pi(K,Q)$ están en la misma componente conexa de spec$(A_\pi(G))$ si y sólo si $O^\pi(H)$ y $O^\pi(K)$ son conjugados. Así las componentes conexas de spec$(A_\pi(G))$ están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugancia de π-subgrupos perfectos de G.*

4). *Los idempotentes primitivos de$A_\pi(G)$ están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugancia de subgrupos π-perfectos de G.*

Corolario 2.2.23 *Sea π el conjunto de divisores primos del orden de G. Entonces los idempotentes de $A(G)$ y $A_\pi(G)$ son los mismos.*

Demostración. En efecto, sea k el número de clases de conjugancia de subgrupos perfectos de G, entonces por el teorema anterior k es igual al número de clases de conjugancia de subgrupos π-perfectos de G. Así, $A(G)$ y $A_\pi(G)$ tienen el mismo número de idempotentes primitivos. Por otro lado, si $e \in A(G)$ es un idempotente primitivo, entonces e también es un idempotente primitivo de $A_\pi(G)$, pues si no $A_\pi(G)$ tendriá más de k idempotentes. En consecuencia, si $X = \{e_1, ..., e_k\}$ son todos los idempotentes primitivos de $A(G)$, entonces $X \subseteq A_\pi(G)$, también son todos los idempotentes primitivos de $A_\pi(G)$. ∎

Capítulo 3

Idempotentes del anillo de Burnside.

Este capítulo esta basado en el artículo [Yo]. El resultado mas importante en este capítulo es el teorema 3.2.9, el cual nos asegura que los elementos de $A_\pi(G)$ dados en la fórmula 3.2 son todos los idempotentes primitivos y ortogonales de $A_\pi(G)$.

3.1 Función de Möbius

Esta sección esta basada en [Sta], capítulo 3.

Definición 3.1.1 *Una relación $\leq$ sobre un conjunto P se llama* ***de orden*** *si es reflexiva, antisimetrica y transitiva, es decir, si*

1). *$x \leq x$ para toda $x \in P$.*

2). *Si $x, y \in P$ con $x \leq y$ y $x \geq y$, entonces $x = y$.*

3). *Si $x, y, z \in P$ con $x \leq y$ y $z \geq y$, entonces $x \leq z$.*

Un conjunto P en el cual se ha definido un orden parcial $\leq$ se llama un ***conjunto parcialmente ordenado (copo)****.*

Definición 3.1.2 *Un* ***intervalo*** *de un copo P es cualquier conjunto de la forma:*

$$[a, b] = \{x \in P : a \leq x \leq b\} \ a, b \in P$$

Un copo se llama ***localmente finito*** *si todos los intervalos de P son finitos.*

Definición 3.1.3 *Un subconjunto I de un copo P se llama un **ideal** de P si para calesquier $x, y \in P$, tenemos:*

$$x \in I \text{ y } y \leq x \text{ implica } y \in I.$$

Dado un subconjunto S de P, el conjunto

$$I = \{x \in P : x \leq y, \text{ para algún } y \in S\}$$

*es un ideal. Nos referiremos a I como el ideal generado por S. Si $| S |= 1$, entonces llamamos a I **ideal principal**.*

Notación 3.1.4 *Sea P un copo. Si P contiene un único elemento minimal, entonces este elemento es llamado elemento **cero**, denotado por* 0.

Definición 3.1.5 *Sea P un copo localmente finito y F un campo de característica* 0. *Definimos $A_F(P)$ (o $A(P)$ si no hay peligro de confusión), por*

$$A(P) = \{f : P \times P \to F \mid x \nleq y \Longrightarrow f(x,y) = 0\}$$

Proposición 3.1.6 $A(P)$ *es un espacio vectorial sobre F via:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y) &= f(x,y) + g(x,y) \\ (\lambda f)(x,y) &= \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

para cualesquier $x, y \in P, \lambda \in F$ y $f, g \in A(P)$.

Ahora le daremos a $A(P)$ una estructura de F-álgebra definiendo el producto $f * g$ de dos elementos $f, g \in A(P)$ (llamdo **convolución**) de la siguiente manera:

Definición 3.1.7 *Sean $f, g \in A(P)$ definimos la **convolución** $f * g$ por:*

$$(f * g)(x,y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x,y) g(z,y)$$

con la convención de que si $x \nleq y$, entonces $(f * g)(x,y) = 0$.

De hecho, la finitud local de P garantiza que el lado derecho de la igualdad esta bien definido.

Definición 3.1.8 *La **función de Kronecker** $\delta : P \times P \to F$ se define por: $\delta(x, y) = 1$ si $x = y$ y $\delta(x, y) = 0$ si $x \neq y$.*

Lema 3.1.9 *Sea P un copo localmente finito. Entonces $A(P)$ es una F-álgebra con la función de Kronecker como el elemento identidad.*

Demostración. Claramente $f * \delta = f$ para todo $f \in A(P)$. Probaremos ahora la asociatividad. Dados $x, y \in P$ con $x \leq y$ y $f, g, h \in A(P)$, tenemos

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)(g * h)(z, y) \\
&= \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)(\sum_{z \leq w \leq y} g(z, w)h(w, y)) \\
&= \sum_{x \leq w \leq y} (\sum_{x \leq z \leq w} f(x, z)g(z, w))h(w, y) \\
&= \sum_{x \leq w \leq z} (f * g)(x, w)h(w, y) \\
&= ((f * g) * h)(x, y).
\end{aligned}$$

si $x \not\leq y$, entonces ambos lados son cero, por la definición de convolución. La distributividad se prueba de manera análoga. ■

Definición 3.1.10 *El álgebra $A(P)$ se llama el **álgebra de incidencia** de P sobre F y sus elementos se llaman **funciones de incidencia** sobre P.*

Lema 3.1.11 *Sea P un copo localmente finito. Un elemento $f \in A(P)$ es una unidad si y sólo si $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Más aún, si f es una unidad, entonces f^{-1} esta definida inductivamente por*

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x, x) &= f(x, x)^{-1} \quad \textit{para todo } x \in P \\
f^{-1}(x, y) &= f(y, y)^{-1}(- \sum_{x \leq z < y} f^{-1}(x, z)f(z, y)), \quad \textit{para todo } x, y \in P.
\end{aligned}$$

Demostración. La función f es unidad si y sólo si existe $g \in A(P)$ tal que $f * g = \delta$, esto es, para $x, y \in P$, tenemos

$$(g * f)(x, y) = \sum_{x \leq c \leq y} g(x, c)f(c, y) = \delta(x, y).$$

Luego, si $x = y$ entonces $(g * f)(x,y) = g(x,x)f(x,x) = 1$, por lo tanto $f(x,x) \neq 0$ y $g(x,x) = f(x,x)^{-1}$. Más aún, si $x \neq y$, entonces

$$\sum_{x \leq c \leq y} g(x,c)f(c,y) = g(x,y)f(y,y) + \sum_{x \leq c < y} g(x,c)f(c,y) = 0$$

por lo tanto,

$$g(x,y) = f(y,y)^{-1}(-\sum_{x \leq c < y} g(x,c)f(c,y)).$$

■

Ahora veamos dos ejemplos de funciones de incidencia sobre P. Supongamos que P es un copo localmente finito.

Ejemplo 3.1 *La función* ***zeta****,* $\zeta : P \times P \longrightarrow f$ *se define por* $\zeta(x,y) = 1$, *si* $x \leq y$ *y* $\zeta(x,y) = 0$ *en cualquier otro caso. Por el lema anterior tenemos que* ζ *es una unidad en* $A(P)$.

Ejemplo 3.2 *La función de* ***Möbius****,* $\mu : P \times P \longrightarrow F$, *esta definida por* $\mu := \zeta^{-1}$. *Así,*

$$(\zeta * \mu)(a,b) = \sum_{c \in [a,b]} \zeta(a,c)\mu(c,b) = \sum_{c \in [a,b]} \mu(c,b) = \delta(a,b).$$

Luego, μ *esta únicamente determinada por la condición:*

$$\sum_{c \in [a,b]} \mu(c,b) = \delta(a,b).$$

Por el lema anterior tenemos que $\zeta^{-1}(a,a) = \mu(a,a) = \zeta(a,a)^{-1} = 1$. *Más aún, si* $a < b$, *entonces*

$$\begin{aligned} \mu(a,b) &= -\sum_{a \leq z < b} \mu(a,z) \\ &= -\sum_{a < z \leq b} \mu(z,b). \end{aligned}$$

Proposición 3.1.12 *Sea P un copo localmente finito, tal que todos los ideales principales de P son finitos y sean $f : P \longrightarrow F, g : P \longrightarrow F$ dos aplicaciones. Entonces, para cualquier $x \in P$,*

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

si y sólo si,

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y)\mu(y, x).$$

Demostración. Sea F^P el conjunto de funciones de P en F. Este conjunto forma un espacio vectorial en el cual $A(P)$ (actua por la derecha) como un álgebra de transformaciones lineales por:

$$f\xi(x) = \sum_{y \leq x} f(y)\xi(y, x), \text{ donde } f \in F^P \text{ y } \xi \in A(P).$$

Así la formula de inversión se sigue del hecho

$$f\zeta = g \Longleftrightarrow f = g\mu$$

donde ζ y μ son las funciones zeta y de Möbius, respectivamente. ∎

3.2 Idempotentes

En lo que sigue G denotará un grupo finito y μ la función de Möbius de la retícula de subgrupos de G. Para un conjunto π de números primos, escribimos $P_\pi(G)$ como el subconjunto de $C(G)$ que consiste de todas las clases de conjugancia de subgrupos π-perfectos de G.

Notación 3.2.1 *Dado un subgrupo π-perfecto H de G, definimos*

$$S_\pi(H) := S_\pi(G, H) := \{L \leq G : O^\pi(L) = H\}.$$

Notación 3.2.2 *Si H es un subgrupo π-perfecto de G y K es cualquier subgrupo de G, ponemos*

$$\lambda(K,H) := \sum_{L\in S_\pi(H)} \mu(K,L)$$

Lema 3.2.3 *Si $\lambda(K,H) \neq 0$, entonces*

$$O^\pi(K) \subseteq H \text{ y } K \subseteq N_G(H) \tag{3.1}$$

Demostración. Pues si $\lambda(K,H) \neq 0$, entonces existe L en $S_\pi(H)$ con $\mu(K,L) \neq 0$. En consecuencia $K \subseteq L$ y $O^\pi(L) = H \trianglelefteq L$, lo cual demuestra que $K \subseteq N_G(H)$ y por 2.2.8 $O^\pi(K) \subseteq O^\pi(L) = H$. ■

Definición 3.2.4 *Por otra parte, para cada subgrupo π-perfecto H de G, definimos*

$$e^\pi_{G,H} := \frac{1}{\mid N_G(H)\mid} \sum_{K\subseteq N_G(H)} \mid K \mid \lambda(K,H)[G/K]. \tag{3.2}$$

Observación 3.2.5 *Como $\mu(K,L) = \mu(gKg^{-1}, gLg^{-1})$, para todo $g \in G$, tenemos que $(S) = (H)$ implica que $e^\pi_{G,H} = e^\pi_{G,S}$. Finalmente, cuando π es vacío, tenemos que $A_\pi(G) = A_\mathbb{Q}(G)$, $P_\pi(G) = C(G)$ y $S_\pi(H) = \{H\}$ para cualquier subgrupo H de G. Así por 3.1*

$$e_{G,H} := e^\emptyset_{G,H} = e^\pi_{G,H} := \frac{1}{\mid N_G(H)\mid} \sum_{K\subseteq H} \mid K \mid \mu(K,H)[G/K]. \tag{3.3}$$

Lema 3.2.6 *Con la notación anterior, tenemos que $\{e_{G,H} : (H) \in C(G)\}$ es el conjunto de todos los idempotentes primitivos y ortogonales de $A_\mathbb{Q}(G)$.*

Demostración. Como $A_\mathbb{Q}(G) \simeq \mathbb{Q}^n$, donde $n =\mid C(G)\mid$ entonces basta con probar que

$$\varphi_L(e_{G,H}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (L)=(H) \\ 0 \text{ si } (L)\neq(H) \end{cases}.$$

Usando la función ζ de la retícula de subgrupos de G tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_L([G/K]) &= \mid (G/K)^L \mid \\ &= \frac{1}{\mid K\mid} \mid \{g \in G : L^g \subseteq K\} \mid \\ &= \frac{1}{\mid K\mid} \sum_{g\in G} \zeta(L^g, K) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora bien, por la definición de la función de Möbius, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_L(e_{G,H}) &= \frac{1}{\mid N_G(H)\mid}\sum_{K\subseteq H}\mid K\mid \mu(K,H)\varphi_L([G/K]) \\
&= \frac{1}{\mid N_G(H)\mid}\sum_{g\in G}\sum_{K\subseteq H}\zeta(L^g,K)\mu(K,H) \text{ por 3.4} \\
&= \frac{1}{\mid N_G(H)\mid}\sum_{g\in G}\delta(L^g,H) \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } (H)=(L) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Lo cual es lo que deseabamos probar. ■

Observación 3.2.7 *Esto prueba además que* $e_{G,H} = e_{G,K}$ *si y sólo si* $(H) = (K)$.

Lema 3.2.8 *Sea* $\pi \neq \emptyset$ *y* H *un subgrupo* π*-perfecto de* G. *Sea* $\{K_1, ..., K_r\}$ *un conjunto completo de representantes de clases de conjugancia de* $S_\pi(G,H)$ *bajo* G. *Entonces,*

$$e^{\pi}_{G,H} = \sum_{i=1}^{r} e_{G,K_i}. \tag{3.5}$$

Demostración. Sean $N = N_G(H)$ y $S = S_\pi(G,H)$. Nótese que si H es característico en K, entonces $N_G(K) \subseteq N_G(H)$. Luego, como $O^\pi(K)$ es característico en K, entonces para todo $K \in S$, H es característico en K y $N_G(K) \subseteq N_G(H)$. Más aún, si $K, L \in S$ y $K = gLg^{-1}$, para $g \in G$, entonces $O^\pi(K) = O^\pi(gLg^{-1}) = gO^\pi(L)g^{-1} = H$. Luego, $H = O^\pi(L) = g^{-1}Hg$, por lo que $g \in N$. Concluimos que dos elementos de S son conjugados en G si y sólo si son conjugados en N. En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} e_{G,K_i} &= \sum_{K\in S}\frac{1}{[N:N_G(K)]}e_{G,K} \\
&= \sum_{K\in S}\frac{1}{[N:N_G(K)]}\left(\frac{1}{\mid N_G(K)\mid}\sum_{D\subseteq K}\mid D\mid \mu(D,K)[G/D]\right) \\
&= \sum_{K\in S}\sum_{D\subseteq K}\frac{1}{\mid N\mid}\mid D\mid \mu(D,K)[G/D].
\end{aligned}$$

Ahora, si $D \not\leq K$ entonces $\mu(D,K)=0$, además $K \leq N_G(K) \leq N_G(H)$, en consecuencia:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} e_{G,K_i} &= \frac{1}{|N|}\sum_{K\in S}\sum_{D\subseteq N} |D|\,\mu(D,K)[G/D] \\
&= \frac{1}{|N|}\sum_{D\subseteq N}\sum_{K\in S} |D|\,\mu(D,K)[G/D] \\
&= \frac{1}{|N|}\sum_{D\subseteq N} |D| \left(\sum_{K\in S}\mu(D,K)\right)[G/D] \\
&= \frac{1}{|N|}\sum_{D\subseteq N} |D|\,\lambda(D,H)[G/D] \\
&= e^{\pi}_{G,H}.
\end{aligned}$$

■

Concluimos de esta lema que $e^{\pi}_{G,H}$ es un idempotente de $A_{\mathbb{Q}}(G)$, mas aún $e^{\pi}_{G,H} = e^{\pi}_{G,K}$ si y sólo si $(H) = (K)$.

Teorema 3.2.9 ([Yo],teorema 3.1) *Con la notación anterior, tenemos que* $\{e^{\pi}_{G,H} : (H) \in P_\pi(G)\}$ *es el conjunto de todos los idempotentes primitivos de* $A_\pi(G)$. *Más aún, se verifican las igualdades:*

$$\sum_{(H)\in P_\pi(G)} e^{\pi}_{G,H} = 1$$

$$\begin{aligned}
e^{\pi}_{G,H}e^{\pi}_{G,K} &= e^{\pi}_{G,H},\ si\ (H)=(K) \\
e^{\pi}_{G,H}e^{\pi}_{G,K} &= 0,\ si\ (H)\neq(K)
\end{aligned}$$

Demostración. Por el teorema 2.2.22, el número de idempotentes primitivos de $A_\pi(G)$ es igual a $|P_\pi(G)|$; este número también es igual a el número de idempotentes de $A_{\mathbb{Q}}(G)$ de la forma $e^{\pi}_{G,H}$, por el lema anterior. Así para probar que cada $e^{\pi}_{G,H}$ es un idempotente primitivo de $A_\pi(G)$, basta con demostrar lo siguiente:

" Todo idempotente de $A_\pi(G)$ es la suma de algunos idempotentes distintos de la forma $e^{\pi}_{G,H}$"

En efecto, si $\{e_1, .., e_r\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos de $A_\pi(G)$, entonces por la afirmación anterior

$$e_i = \sum_{l=i_1}^{r(i)} e^\pi_{G,U_l}, \text{ para algunos subgrupos } U_l.$$

Ahora bien, si $r(i) > 1$ existirían $i \neq j$ tales que

$$\begin{aligned} e_i &= e^\pi_{G,H} + \sum_{l=i_1}^{r(i)} e^\pi_{G,U_l} \\ e_j &= e^\pi_{G,H} + \sum_{l=j_1}^{r(j)} e^\pi_{G,K_l} \end{aligned}$$

pero $e_i e_j = e^\pi_{G,H} + \sum_{l=k}^{r} e^\pi_{G,L_l} \neq 0$ para algunos subgrupos L_l, lo cual es una contradicción.

Probaremos la afirmación anterior. Sea $e \in A_\pi(G)$ un idempotente. Puesto que $A_\pi(G) \hookrightarrow A_\mathbb{Q}(G)$, entonces e es la suma de algunos idempotentes distintos de $A_\mathbb{Q}(G)$. Sea H un subgrupo de G, entonces $\varphi_H(e)$ debe ser 0, o bién 1. Definamos $C := \{(H) : H \leq G, \varphi_H(e) = 1\}$. Ahora bien, si $e = \sum_{i=1}^r e_i$, con $e_i \in A_\mathbb{Q}(G)$ idempotente, tenemos para $(H) \in C$

$$\varphi_H(e) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_H(e_i) = 1$$

Luego existe $1 \leq i \leq r$ tal que $\varphi_H(e_i) = 1$ y $\varphi_H(e_j) = 0$ para todo $j \neq i$. Como $\varphi : A_\mathbb{Q}(G) \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ es un isomorfismo, se sigue que $e_i = e_{G,H}$. En consecuencia e es la suma de estos idempotentes $e_{G,H}$ con $(H) \in C$.

Ahora bien, sea H un subgrupo de G y tomemos $p \in \pi \cup \{0\}$. Entonces por la definición de el ideal primo $I_\pi(H, p\mathbb{Z}_\pi)$, tenemos que $e \in I_\pi(H, p\mathbb{Z}_\pi)$ si y sólo si $(H) \notin C$. Puesto que $O^p(H) = O^p(O^p(H))$, tenemos por el teorema 2.2.22:

$$I_\pi(H, p\mathbb{Z}_\pi) = I_\pi(O^p(H), p\mathbb{Z}_\pi)$$

por lo que $(H) \in (C)$ si y sólo si $(O^p(H)) \in C$. De la misma manera, como $O^\pi(G) = O^{q_1}(O^{q_2}(...O^{q_n}(G)...))$, para algunos primos $q_i \in \pi$., tenemos que $(H) \in C$ si y sólo si ($O^\pi(H)) \in C$. Luego para cada $(H) \in C \cap P_\pi(G)$

tenemos que $S_\pi(H) \subseteq C$, además si $(H) \in C$ tenemos que $(H) \in S_\pi(O^\pi(H))$ y como $O^\pi(H)$ es también π-perfecto, esto dice que

$$C = \dot\cup\{S_\pi(H) : (H) \in C \cap P_\pi(G)\}$$

donde la unión es disjunta, así tenemos que

$$e = \sum_{(H)\in C\cap P_\pi(G)} e^\pi_{G,H}.$$

lo cual es lo que deseabamos probar. ∎

Ejemplo 3.3 *Haciendo uso de la igualdad 3.5 y del teorema 3.2.9, se tiene que los idempotentes primitivos y ortogonales de la $\mathbb{Q}$-álgebra de Burnside de* $\mathbb{A}_5$*, son*

$$e_{\mathbb{A}_5,1} := 1/60\,[\mathbb{A}_5/1]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{C}_2} := -1/4[\mathbb{A}_5/1] + 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_2]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{C}_3} := -1/6[\mathbb{A}_5/1] + 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_3]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{D}_2} := 1/6[\mathbb{A}_5/1] - 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_2] + 1/3[\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_2]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{C}_5} := -1/10[\mathbb{A}_5/1] + 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_5]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{D}_3} := 1/2[\mathbb{A}_5/1] - 1[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_2] - 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_3] + [\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_3]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{D}_5} := 1/2[\mathbb{A}_5/1] - 1[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_2] - 1/2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_5] + [\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_5]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{A}_4} := 1/3[\mathbb{A}_5/1] - 1[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_3] - 1/3[\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_2] + [\mathbb{A}_5/\mathbb{A}_4]$$

$$e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{A}_5} := -1[\mathbb{A}_5/1]+2[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_2]+1[\mathbb{A}_5/\mathbb{C}_3]-1[\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_3]-1[\mathbb{A}_5/\mathbb{D}_5]-1[\mathbb{A}_5/\mathbb{A}_4]+ 1[\mathbb{A}_5/\mathbb{A}_5].$$

Ejemplo 3.4 *Procediendo de manera análoga al ejemplo anterior, se observa que los idempotentes primitivos y ortgonales de $A(A_5)$ son los elementos del conjunto* $\left\{e^{\{2,3,5\}}_{\mathbb{A}_5,1} := 1 - e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{A}_5},\ e^{\{2,3,5\}}_{\mathbb{A}_5,\mathbb{A}_5} := e_{\mathbb{A}_5,\mathbb{A}_5}\right\}.$

Capítulo 4

Una perspectiva funcional

Este capítulo se encuentra basado en el artículo [Bl]. Los resultados principales de este capítulo son los teoremas 4.1.10 y 4.2.10, donde este último resultado es usado para dar varios ejemplos de endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside.

4.1 Endomorfismos naturales del funtor álgebra de Burnside

Notación 4.1.1 *Dada una categoría C, consideraremos por $Obj(C)$ a la clase de objetos de C y por $Mor(C)$ a la clase de morfismos de C. Denotaremos por $\mathcal{GRU}$ a la categoría de grupos finitos y por $\mathcal{CRWI}$ a la categoría de anillos conmutativos con uno.*

Definición 4.1.2 *Sea Ω un funtor contravariante de $\mathcal{GRU}$ a $\mathcal{CRWI}$, entonces definimos θ un* **endomorfismo natural del funtor** *Ω como la colección de endomorfismos de anillo $\{\theta_G : \Omega(G) \to \Omega(G)\}_{G \in Obj(\mathcal{GRU})}$, tal que si $f : G \to H$, es un homomorfismo de grupos y $f^* := \Omega(f)$, entonces el* *siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(H) & \xrightarrow{\theta_H} & \Omega(H) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \Omega(G) & \xrightarrow[\theta_G]{} & \Omega(G) \end{array}.$$

Notación 4.1.3 *A la colección de todos los endomorfismos naturales de un funtor contravariante $\Omega : \mathcal{GRU} \rightarrow \mathcal{CRWI}$, lo denotaremos por $End(\Omega)$.*

Definición 4.1.4 *Sea G un grupo finito y $A_{\mathbb{Q}}(G)$ el álgebra de Burnside de G sobre $\mathbb{Q}$. Escribiremos como $A_{\mathbb{Q}}$ al funtor contravariante de la categoría de grupos finitos a la categoría $\mathcal{CRWI}$, que a cada grupo G le asocia su álgebra de Burnside $A_{\mathbb{Q}}(G)$.*

Ejemplo 4.1 ***El endomorfismo identidad.*** *Definimos el endomorfismo natural $1 : A_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}$, de la siguiente manera: para cada grupo G tomamos el homorfismo trivial $1_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}(G)$.*

Ejemplo 4.2 ***El endomorfismo aumentación.*** *Para cada grupo G sea $\varphi_{G,e} : A(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por $\varphi_{G,e} : X \longmapsto \mid X \mid$, esto induce una aplicación $\phi_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, dada por $\phi_G := \varphi_{G,e} \otimes i$, donde i es la aplicación identidad en $\mathbb{Q}$. Así definimos la aumentación como $\varepsilon_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}(G)$, $\varepsilon_G : X \longmapsto \phi_G(X) \cdot 1$. Ahora bien, sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos, para probar que ε es un endomorfismo natural bastaría con probar que $\varphi_{H,e} = f^*\varphi_{G,e}$. En efecto, sea X un H-conjunto, entonces $f^*(X)$ es un G-conjunto y tenemos $\varphi_{H,e}(X) = \mid X \mid = \mid f^*(X) \mid = \varphi_{G,e}(f^*(X))$.*

Notación 4.1.5 *Para un grupo finito G sea $C(G) = \{U_1, ...U_n\}$ un conjunto de representantes de clases de conjugancia de subrupos de G.*

Teorema 4.1.6 *Exite una biyección entre el conjunto de endomorfismos de anillos de $A_{\mathbb{Q}}(G)$ y el conjunto de funciones de $C(G)$ en $C(G)$.*

Demostración. Para construir la tabla de marcas de un grupo G, se considero un orden total en $C(G)$, dicho orden induce un orden total en el conjunto de idempotentes primitivos y ortogonales de $A_{\mathbf{Q}}(G)$, luego por 3.2.9 el conjunto $\{e_{U_1}, ..., e_{U_n}\}$ forma una base ordenada de $A_{\mathbf{Q}}(G)$.

Sean x y z dos elementos cualesquiera de $A_{\mathbf{Q}}(G)$, entonces podemos definir un producto interior entre estos dos elementos como

$$\langle x, z\rangle = \sum_{U_i \in C(G)} \varphi_{G,U_i}(x)\varphi_{G,U_i}(z).$$

Sea θ_G un endomorfismo de $A_{\mathbf{Q}}(G)$ entonces este lleva al elemento unitario en el elemento unitario e idempotentes a idempotentes, por lo tanto, θ_G induce una función $\bar{\theta}_G : C(G) \longrightarrow C(G)$, tal que si $U \in C(G)$, entonces $\bar{\theta}_G(U) = V$, donde e_V es el único idempotente primitivo de $A_{\mathbf{Q}}(G)$, tal que $\langle e_U, \theta_G(e_V)\rangle = 1$.

Inversamente, para una función $\bar{\theta}_G : C(G) \longrightarrow C(G)$ definimos un endomorfismo de $A_{\mathbf{Q}}(G)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \theta_G \ &: \ A_{\mathbf{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbf{Q}}(G) \\ &: \ e_{U_i} \longmapsto. \sum_{U_j \in \bar{\theta}^{-1}(U_i)} e_{U_j}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Claramente estas correspondencias dan una biyección entre el conjunto de endomorfismos de $A_{\mathbf{Q}}(G)$ y el conjunto de funciones de $C(G)$ en $C(G)$. ∎

Corolario 4.1.7 *Sea G un grupo, $U \leq G$ y θ_G un endomorfismo de $A_{\mathbf{Q}}(G)$. Entonces para cada $x \in A_{\mathbf{Q}}(G)$, se tiene que*

$$\varphi_U(\theta_G(x)) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U)}(x), \tag{4.2}$$

donde $\bar{\theta}_G : C(G) \longrightarrow C(G)$ esta dada como en la demostración del teorema anterior.

Demostración. Se sigue de la definición de $\bar{\theta}_G$ que:

$$\varphi_U(\theta_G(e_{U_j})) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U)}(e_{U_j})$$

luego, para toda $x \in A_{\mathbf{Q}}(G)$,

$$\varphi_U(\theta_G(x)) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U)}(x)$$

∎

Observación 4.1.8 *Si G es un grupo finito y denotamos por $\mathbb{C}(G)$ al conjunto $\{(U)_G : U \in C(G)\}$ entonces dada una función $\bar{\theta}_G : C(G) \to C(G)$, induce otra función $\bar{\theta}^G : \mathbb{C}(G) \to \mathbb{C}(G)$, tal que $\bar{\theta}^G((U)_G) = (\bar{\theta}_G(U))_G$. Si $H \in Obj(\mathcal{GRU})$ y $\alpha : G \to H$, es un homomorfismo de grupos, entonces $\alpha\left(\bar{\theta}^G(U)\right) = (\alpha(\bar{\theta}_G(U)))_G$.*

Notación 4.1.9 *Sea G un grupo finito, $U \leq G$ y $\varphi_{G,U} : A(G) \to \mathbb{Z}$, la marca correspondiente a U, entonces $\varphi_{G,U} = \varphi_{G,(U)_G} = \varphi_U = \varphi_{(U)_G}$, donde $(U)_G$ es la clase de conjugancia en G de U.*

Teorema 4.1.10 ([Bl], teorema 2) *Sea θ una colección de endomorfismos de anillos $\{\theta_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}(G)\}_{G \in Obj(\mathcal{GRU})}$. Entonces θ es un endomorfismo natural del funtor $A_{\mathbb{Q}}$ si y sólo si:*

1). Dado $G \in Obj(\mathcal{GRU})$ y $U \leq G$, entonces $\bar{\theta}^U(U) \subseteq \bar{\theta}^G(U)$.

2). Dados $G, H \in Obj(\mathcal{GRU})$ *y* $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ *un epimorfismo de grupos, entonces* $\alpha(\bar{\theta}^G(G)) = \bar{\theta}^H(H)$.

Demostración. Supongamos que $\{\theta_G : A_{\mathbb{Q}}(G) \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}(G)\}_{G \in Obj(\mathcal{GRU})}$, es un endomorfismo natural del funtor $A_{\mathbb{Q}}$.

Sean $\alpha : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos, X un H-conjunto virtual y U un subgrupo de G. Escribamos $X = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i X_i$ donde $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ y X_i un H-conjunto transitivo. Como α^* y φ_U son homomorfismos de anillos, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_U(\alpha^*(X)) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_U(\alpha^*(X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_{\alpha(U)}(X_i) \\ &= \varphi_{\alpha(U)}(X) \end{aligned}$$

Luego por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha(\bar{\theta}_G(G))}(X) &= \varphi_{\bar{\theta}_G(G)}(\alpha^*(X)) \\ &= \varphi_G(\theta_G(\alpha^*(X)) \quad \text{por 4.2} \\ &= \varphi_G(\alpha^*(\theta_H(X))) \quad \text{por naturalidad} \\ &= \varphi_{\alpha(G)}(\theta_H(X)) \\ &= \varphi_{\bar{\theta}_H(\alpha(G))}(X). \end{aligned}$$

Luego por 1.1.23, $\alpha(\bar{\theta}_G(G)) \sim_H \bar{\theta}_H(\alpha(G))$. En conclusión, si $H \leq G$ y α es la inclusión de H en G tenemos que $\bar{\theta}_G(H) \sim_G \bar{\theta}_H(H)$ lo cual prueba 1). Más aún, si $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ es un epimorfismo de grupos, tenemos que $\alpha(\bar{\theta}_G(G)) \sim_H \bar{\theta}_H(H)$ lo cual prueba 2).

De manera análoga tenemos el inverso. Supongamos que se verifican 1) y 2). Sean $U \leq G \in Obj(\mathcal{GRU})$ y $\alpha : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Si X es un H-conjunto, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_U(\theta_G(\alpha^\bullet(X)) &= \varphi_{\bar{\theta}_G(U)}(\alpha^\bullet(X)) \\
&= \varphi_{\bar{\theta}_U(U)}(\alpha^\bullet(X)) \\
&= \varphi_{\alpha(\bar{\theta}_U(U))}(X) \\
&= \varphi_{\bar{\theta}_H(\alpha(U))}(X) \text{ por 2) y 1)} \\
&= \varphi_{\alpha(U)}(\theta_H(X)) \\
&= \varphi_U(\alpha^\bullet(\theta_H(X)))
\end{aligned}$$

concluimos que $\theta_G(\alpha^\bullet(X)) = \alpha^\bullet(\bar{\theta}_H(X))$. ■

4.2 Teorema de Blass

Definición 4.2.1 *Decimos que un endomorfismo de anillos θ_G de $A_{\mathbb{Q}}(G)$ es un* ***endomorfismo entero*** *si aplica a $A(G)$ en el mismo, es decir, si es un endomorfismo de $A(G)$. Análogamente, decimos que es p-**entero** para un primo p, si aplica $A(G)$ al conjunto de vectores que satisfacen las (H,p)-congruencias para un primo fijo p y para todo $H \in C(G)$.*

Notación 4.2.2 *De aquí en adelante denotaremos por θ a un endomorfismo natural del funtor $A_{\mathbb{Q}}$.*

Definición 4.2.3 *Sea G un grupo y $\bar{\theta}^G : \mathbb{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}(G)$, entonces diremos que la terna $(H, G, \bar{\theta}^G)$ satisface la* ***condición de Blass*** *si $H \leq G$ y para todo elemento A de $\bar{\theta}^H(H)$ existe un elemento B en $\bar{\theta}^G(G)$ tal que $A = H \cap B$.*

Observación 4.2.4 *El conjunto $L(G)$, de todos los subgrupos de un grupo G, es un conjunto parcialmente ordenado bajo la inclusión de conjuntos.*

Proposición 4.2.5 *Sea G un grupo, U y V subgrupos de G, diremos que $U \preceq_\theta V$ si y sólo si $(U, V, \bar{\theta}^V)$ satisface la condición de Blass, entonces la relación binaria $\preceq_\theta$ en $L(G)$, es una relación de orden.*

Demostración. Por definición se tiene que si U, V y W son subgrupos de G, entonces $U \preceq_\theta U$ (reflexividad), si $U \preceq_\theta V$ y $V \preceq_\theta U \Longrightarrow U = V$ (antisimetría). Supongamos que $U \preceq_\theta V$ y $V \preceq_\theta W$, entonces para todo elemento A de $\bar{\theta}^U(U)$, existe un elemento B de $\bar{\theta}^V(V)$, tal que $A = U \cap B$ y por hipótesis $B = V \cap C$, para algún C en $\bar{\theta}^W(W)$, luego entonces $A = U \cap (V \cap C) = U \cap C$, por lo tanto si $U \preceq_\theta V$ y $V \preceq_\theta W$, se tiene que $U \preceq_\theta W$ (transitividad). ■

Proposición 4.2.6 *Sea θ un elemento de $End(A_{\mathbb{Q}})$, p un número primo, $G \in Obj(\mathcal{GRU})$ y $H \trianglelefteq G$ tal que $[G : H] = p^a$. Supongamos que para todo grupo M y $N \trianglelefteq M$ tal que $[M : N] = p$ se tiene que $N \preceq_\theta M$, por tanto, si $\bar{\theta}_{C_p}(C_p) = 1$ entonces $\bar{\theta}^G(G) \supseteq \bar{\theta}^H(H)$.*

Demostración. Por el primer teorema de Sylow y por el teorema de correspondencia, se tiene que existe la serie normal $H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n$, donde $H_0 = H$, $H_n = G$ y $[H_{i+1} : H_i] = p$, por otro lado, si consideramos el epimorfismo $\alpha : H_k \to H_k/H_{k-1}$, se tiene entonces por el inciso 2) de 4.1.10 que $\alpha\left(\bar{\theta}^{H_k}(H_k)\right) = \bar{\theta}^{H_k/H_{k-1}}(H_k/H_{k-1}) = \{1\}$, lo cual implica que si A es elemento de $\bar{\theta}^{H_k}(H_k)$, entonces $A \subseteq H_{k-1}$ pero por hipótesis $H_{k-1} \preceq_\theta H_k$ por lo tanto para todo $B \in \bar{\theta}^{H_{k-1}}(H_{k-1})$, existe $C \in \bar{\theta}^{H_k}(H_k)$, tal que $B = H_{k-1} \cap C$, luego $B = C$ lo cual implica que $\bar{\theta}^{H_{k-1}}(H_{k-1}) = \bar{\theta}^{H_k}(H_k)$. Entonces por la igualdad anterior y por la serie normal que se obtuvo al principio de la demostración se puede concluir que $\bar{\theta}^H(H) = \bar{\theta}^G(G)$. ■

Proposición 4.2.7 *Sea θ un elemento de $End(A_{\mathbb{Q}})$, p un número primo. Supongamos que para todo grupo finito G, cualquier subgrupo normal H de G con índice p satisface la condición $H \preceq_\theta G$ y que para todo grupo cíclico C de orden p, $\bar{\theta}^C(C) = \{C\}$. Entonces se verifica lo siguiente:*

1). *Para todo p-grupo P, $\bar{\theta}^P(P) = \{P\}$.*

2). *$O^p(G)\ A = G$, para todo $A \in \bar{\theta}^G(G)$.*

3). *Si $O^p(G) \leq H \leq G$, entonces $H \preceq_\theta G$.*

Demostración. 1). Procederemos por inducción sobre el orden de P. Si $\mid P \mid= 1$ es claro que $\bar{\theta}^P(P) = \{P\}$. Supongamos como hipótesis de inducción que si $|P| = p^{n-1}$, entonces $\bar{\theta}^P(P) = \{P\}$. Sea P un p-grupo de orden p^n entonces tiene un subgrupo normal H de índice p, consideremos la proyección $\alpha : P \longrightarrow P/H$, como θ es elemento de $End(A_{\mathbb{Q}})$, tenemos que $\alpha(\bar{\theta}^P(P)) = \bar{\theta}^{P/H}(P/H) = \{P/H\}$, pues por hipótesis se tiene $\bar{\theta}(C_p) = C_p$ y $P/H \cong C_p$. Por lo tanto si U es elemento de $\bar{\theta}^P(P)$ se tiene que $HU = P$.

Por otra parte, por la hipótesis del teorema tenemos $H \preceq_\theta P$ por lo tanto, para todo $A \in \bar{\theta}^H(H)$ existe $B \in \bar{\theta}^P(P)$, tal que $A = H \cap B$. Como $|H| = p^{n-1}$ tenemos por hipótesis de inducción que $\bar{\theta}^H(H) = \{H\}$, así $H = H \cap B$ por lo que $H \subseteq B$. Pero $HB = P$ y $H \subseteq B$, por lo que $B = P$. En consecuencia, $\bar{\theta}^P(P) = \{P\}$.

2). En efecto, consideremos el epimorfismo $\alpha : G \longrightarrow G/O^p(G)$, entonces $\alpha(\bar{\theta}^G(G)) = \bar{\theta}^{G/O^p(G)}(G/O^p(G))$, pues θ es elemento de $End(A_{\mathbb{Q}})$, entonces aplicando el inciso 1) a la igualdad anterior se tiene que $\alpha(\bar{\theta}^G(G)) = \{G/O^p(G)\}$, de aquí que para todo $A \in \bar{\theta}^G(G)$, $O^p(G)A = G$.

3). Por el primer teorema de Sylow y por el teorema de correspondencia existe la serie normal $H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n$, donde $H_0 = H$, $H_n = G$ y $[H_{i+1} : H_i] = p$, aplicando la hipótesis a dicha serie se tiene $H_0 \preceq_\theta H_1 \preceq_\theta ... \preceq_\theta H_{n-1} \preceq_\theta H_n$, por lo tanto $H \preceq_\theta G$. ■

Lema 4.2.8 *Sea G un grupo finito, N un subgrupo normal de G, H un subgrupo de G, $\mathbb{A} := \{U : N \leq U \leq HN\}$ y $\mathbb{B} := \{V : N \cap H \leq V \leq H\}$ entonces el mapeo $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, definido por $\alpha(U) = U \cap H$, es una biyección.*

Demostración. Por el segundo teorema de isomorfía tenemos que existe un isomorfismo de grupos $\beta : HN/N \rightarrow H/(H \cap N)$, tal que si $hnN \in HN/N$, donde $h \in H$ y $n \in N$, entonces $\beta(hnN) = h(H \cap N)$. Observamos que al ser β un isomorfismo de grupos, lleva de manera biyectiva subgrupos de HN/N en subgrupos de $H/(H \cap N)$, por lo tanto, por el teorema de correspondencia β induce una biyección $\bar{\beta}$ entre los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, entonces lo que vamos a ver es que $\bar{\beta} = \alpha$, para esto, solo vasta con demostrar que si $U/N \leq HN/N$, entonces $\beta(U/N) = (U \cap H)/(N \cap H)$.

En efecto, $\beta(U/N) = \{h(N \cap H) : hn \in U,\ h \in H \text{ y } n \in N\}$, como $N \leq U$, se tiene que si $hn \in U$, $h \in H$ y $n \in N$ entonces $h \in U$ pues $n^{-1} \in U$, por tanto $h \in U \cap H$, de aquí que $\beta(U/N) \subseteq (U \cap H)/(N \cap H)$. La contención inversa se deduce de manera análoga. ■

Lema 4.2.9 *Sea G un grupo finito, N un subgrupo normal de G, H un subgrupo de G, U y $V \in \mathbb{A}$ entonces $U \sim_{HN} V \Leftrightarrow U \cap H \sim_H V \cap H$.*

Demostración. Por el segundo teorema de isomorfía existe un isomorfismo de grupos $\beta : HN/N \to H/(H \cap N)$, tal que si $hnN \in HN/N$, donde $h \in H$ y $n \in N$, entonces $\beta(hnN) = h(H \cap N)$ y por el lema 4.2.8 si $U/N \leq HN/N$ entonces $\beta(U/N) = (U \cap H)/(N \cap H)$. Supongamos que $U \sim_{HN} V$ entonces $U/N \sim_{HN/N} V/N \Leftrightarrow ((hn)N)U/N((hn)^{-1}N) = V/N$, por lo tanto si aplicamos β a la igualdad anterior, se tiene que $\beta(V/N)$ y $(h(U \cap H)h^{-1})/(N \cap H)$ son iguales, luego por el teorema de correspondencia $h(U \cap H)h^{-1} = V \cap H$. ■

Teorema 4.2.10 ([Bl], teorema 4) *Sea θ un elemento de $End(A_{\mathbb{Q}})$ y p un número primo. Supongamos que para todo grupo finito G y cualquier subgrupo normal H de índice p en G se tiene que $H \preceq_\theta G$. Entonces para todo G, θ_G es p-entera.*

Demostración. Dado un grupo finito G, deseamos demostrar que para cualquier G-conjunto X y cualquier subgrupo H de G, $\theta_G(X)$ satisface la (H, p)-congruencia, esto es

$$\varphi_H(\theta_G(X)) + \sum_{H<U_i'\leq S'} a_i\varphi_{U_i'}(\theta_G(X)) \equiv 0 \; mod \; p^k \tag{4.3}$$

donde, S es un p-subgrupo de Sylow de $N_G(H)/H$, y si $\alpha : N_G(H) \longrightarrow N_G(H)/H$, es el epimorfismo canónico, entonces $U' = \alpha^{-1}(U)$, para todo $U \leq S$. Más aún, por la ecuación 4.2 la congruencia anterior se convierte en:

$$\varphi_{\bar{\theta}_G(H)}(X) + \sum_{H<U_i'\leq S'} a_i\varphi_{\bar{\theta}_G(U_i')}(X) \equiv 0 \; mod \; p^k. \tag{4.4}$$

De aquí en adelante la demostración se va a dividir en dos casos, de acuerdo a como se comporte $\bar{\theta}^{C_p}$ en C_p.

Caso 1. $\bar{\theta}^{C_p}(C_p) = \{e\}$.

Siguiendo la notación de la primera parte de esta demostración y por la proposición 4.2.6 se tiene que $\bar{\theta}^{U'}(U') \supseteq \bar{\theta}^{H}(H)$, para todo $U \leq S$, por lo tanto la congruencia 4.4 se transforma en

$$\left(1 + \sum_{H<U_i'\leq S'} a_i\right)\varphi_{\bar{\theta}^G(H)}(X) \equiv 0 \; mod \; p^k. \tag{4.5}$$

Entonces basta con probar esta congruencia para que θ_G sea p-entera, pero

$$\left(1 + \sum_{H<U_i'\leq S'} a_i\right) \equiv 0 \ mod \ p^k,$$

pues $[G/G]$, siempre esta en $A(G)$ y por lo tanto cumple la (H,p)-congruencia.

Caso 2. $\bar{\theta}^{C_p}(C_p) = \{C_p\}$.

En esta parte haremos uso de la notación dada al principo de esta demostración. Sea S un p-subgrupo de Sylow de $N_G(H)/H$, entonces se tiene

$$O^p(S') \leq H \leq S',$$

luego por el inciso 3) de la proposición 4.2.7 se observa que $H \preceq_\theta S'$, por lo tanto, para todo $A \in \bar{\theta}^H(H)$, existe $B \in \bar{\theta}^{S'}(S')$, tal que $A = H \cap B$, de aquí se puede concluir haciendo uso del segundo teorema de isomorfía que $B/A \cong BH/H$, pero por el inciso 2) de la proposición 4.2.7 $BH = S'$ entonces $B/A \cong S$.

Sea X un G-conjunto, entonces por el inciso 1) de la proposición 1.1.25 se tiene que $Z = (X)^A$ es un B/A-conjunto, pero $B/A \cong S$, luego Z es un S-conjunto, por lo tanto Z satisface la congruencia principal para S (ver la definición 1.2.27) esto significa que

$$\varphi_e(Z) + \sum_{e<U\leq S} a_U \varphi_U(Z) \equiv 0 \ mod \ p^k \tag{4.6}$$

donde $| S |= p^k$. Por el lema 4.2.8, dado algún subgrupo U de S le correponde el subgrupo $(U' \cap B)/(H \cap B)$ de $B/(H \cap B)$, entonces haciendo uso de 1.1.23 se tiene que

$$\varphi_U(Z) = \varphi_{(U'\cap B)/(H\cap B)}(Z) = \varphi_{(U'\cap B)}(X)$$

luego la congruencia 4.6 se convierte en

$$\varphi_A(X) + \sum_{H<U'\leq S'} a_U \varphi_{(U'\cap B)}(X) \equiv 0 \ mod \ p^k. \tag{4.7}$$

Por otro lado, se tiene por el inciso 1) del teorema 4.1.10 que $\varphi_{\bar{\theta}_{V'}(V')}(X) = \varphi_{\bar{\theta}_G(V')}(X)$ y $\varphi_{\bar{\theta}_{U'}(U')}(X) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U')}(X)$. Si $V' \sim_{S'} U'$ entonces $\varphi_{\bar{\theta}_G(V')}(X) = \varphi_{V'}(\theta_G(X)) = \varphi_{U'}(\theta_G(X)) = \varphi_{\bar{\theta}_G(U')}(X)$, luego $\varphi_{\bar{\theta}_{V'}(V')}(X) = \varphi_{\bar{\theta}_{U'}(U')}(X)$.

Como se tiene que $O^p(S') \leq V' \leq S'$, entonces el inciso 3) de la proposición 4.2.7 nos afirma que $V' \preceq_\theta S'$, por lo tanto, para todo $C \in \bar{\theta}^{V'}(V')$, existe $D \in \bar{\theta}^{S'}(S')$, tal que $C = V' \cap D$ entonces $C = V' \cap yBy^{-1}$ donde $y \in S'$, luego $y^{-1}Cy = y^{-1}V'y \cap B$. Por el inciso 2) del teorema 4.1.10 se tiene que $W' \cap B \in \bar{\theta}^{W'}(W')$, donde $W' = y^{-1}V'y$. Si $V' \sim_{S'} U'$, entonces $W' \sim_{S'} U'$ pero por el lema 4.2.9 $W' \cap B \sim_B U' \cap B$ por lo que $\varphi_{\bar{\theta}_{U'}(U')}(X) = \varphi_{\bar{\theta}_{W'}(W')}(X) = \varphi_{W' \cap B}(X) = \varphi_{U' \cap B}(X)$, entónces se concluye que $\varphi_{\bar{\theta}_{U'}(U')}(X) = \varphi_{U' \cap B}(X)$, pero al aplicar esta igualdad a la congruencia 4.7 se tiene que

$$\varphi_{\bar{\theta}_H(H)}(X) + \sum_{H < U' \leq S'} a_U \varphi_{\bar{\theta}_{U'}(U')}(X) \equiv 0 \ mod\ p^k.$$

■

4.3 Ejemplos

Definición 4.3.1 *Sean N_1, N_2 subgrupos normales de un grupo G, entonces existe un monomorfismo:*

$$\begin{aligned} \psi &: G/(N_1 \cap N_2) \hookrightarrow G/N_1 \times G/N_2 \\ \psi &: g(N_1 \cap N_2) \longmapsto (gN_1, gN_2). \end{aligned}$$

Al grupo $G/(N_1 \cap N_2)$ se le llama el ***producto subdirecto*** *de G por N_1 y N_2.*

Lema 4.3.2 *Sea $\mathcal{K}$ una clase no vacía de grupos finitos cerrada bajo cocientes y productos subdirectos. Entonces todo grupo G tiene un mínimo subgrupo normal N tal que $G/N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. Como el grupo trivial esta en $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Sean G un grupo finito y definamos $M(G) := \{H \trianglelefteq G : G/H \in \mathcal{K}\}$. Ahora bien, como $G \in M(G)$, tenemos que $M(G) \neq \varnothing$. Más aún, para $H_1, H_2 \in M(G)$, tenemos que $G/(H_1 \cap H_2) \in \mathcal{K}$ pues $\mathcal{K}$ es cerrado bajo productos subdirectos. De esta manera $H_1 \cap H_2 \in M(G)$, es decir, $M(G)$ es cerrado bajo intersecciones. Luego entonces, definimos a N como la intersección de todos los elementos de $M(G)$. ■

Notación 4.3.3 *Para cada grupo finito G denotamos por $O^{\mathcal{K}}(G)$ al mínimo subgrupo normal de G tal que el cociente $G/O^{\mathcal{K}}(G)$ esta en $\mathcal{K}$. Un cálculo directo muestra que $O^{\mathcal{K}}(G)$ es característico en G.*

Teorema 4.3.4 ([Bl], teorema 3) *Sea $\mathcal{K}$ una clase no vacía de grupos finitos cerrada bajo cocientes y productos subdirectos. Entonces el operador $\bar{\theta}_{\mathcal{K}} : \mathcal{GRU} \longrightarrow \mathcal{GRU}$, dada por $\bar{\theta}_{\mathcal{K}} : G \longmapsto O^{\mathcal{K}}(G)$ conmuta con epimorfismos, esto es si $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ un homomorfismo suprayectivo entonces $\alpha(\bar{\theta}(G)) = \bar{\theta}(H)$.*

Demostración. Sea $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ un homomorfismo suprayectivo. Deseamos mostrar que $\alpha(\bar{\theta}(G)) = \bar{\theta}(H)$. Sea N un subgrupo normal de H, entonces

1). $\bar{\theta}(H) = O^{\mathcal{K}}(H) \subseteq N$ si y sólo si $H/N \in \mathcal{K}$. Claramente si $H/N \in \mathcal{K}$, entonces $\bar{\theta}(H) \subseteq N$. Inversamente si $\bar{\theta}(H) \subseteq N$ entonces existe un epimorfismo $\psi : H/\bar{\theta}(H) \twoheadrightarrow H/N$ y puesto que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cocientes esto implica que $H/N \in \mathcal{K}$.

2). $H/N \in \mathcal{K}$ si y sólo si $G/\alpha^{-1}(N) \in \mathcal{K}$. En efecto, la aplicación $\phi : G/\alpha^{-1}(N) \longrightarrow H/N$, dada por $\phi : g\alpha^{-1}(N) \longmapsto \alpha(g)N$, es un isomorfismo de grupos.

3). $G/\alpha^{-1}(N) \in \mathcal{K}$ si y sólo si $\bar{\theta}(G) \subseteq \alpha^{-1}(N)$. La prueba de esto es equivalente a la dada en 1).

4). $\bar{\theta}(G) \subseteq \alpha^{-1}(N)$ si y sólo si $\alpha(\bar{\theta}(G)) \subseteq N$. En efecto si $\bar{\theta}(G) \subseteq \alpha^{-1}(N)$, entonces $\alpha(\bar{\theta}(G)) \subseteq \alpha(\alpha^{-1}(N)) \subseteq N$. Inversamente, si $\alpha(\bar{\theta}(G)) \subseteq N$, entonces $\bar{\theta}(G) \subseteq \alpha^{-1}(\alpha(\bar{\theta}(G))) \subseteq \alpha^{-1}(N)$.

Concluimos de estos cuatro puntos que

$$\bar{\theta}(H) \subseteq N \text{ si y sólo si } \alpha(\bar{\theta}(G)) \subseteq N,$$

esto es, $\bar{\theta}(H) = \alpha(\bar{\theta}(G))$. ■

Teorema 4.3.5 ([Bl], teorema 3) *Sea $\bar{\theta} : \mathcal{GRU} \longrightarrow \mathcal{GRU}$ una operación tal que $\bar{\theta}(G) \trianglelefteq G$ y supongamos que $\bar{\theta}$ conmuta con epimorfismos. Entonces la clase $\mathcal{K} = \{G \in \mathcal{GRU} : \bar{\theta}(G) = e\}$ es cerrada bajo cocientes y productos subdirectos. Mas aún, para cualquier grupo G, $\bar{\theta}(G) = O^{\mathcal{K}}(G)$.*

Demostración. Sea $\alpha : G \twoheadrightarrow H$ un epimorfismo de grupos y supongamos que $G \in \mathcal{K}$, entonces $\bar{\theta}(G) = e$ por lo que $\bar{\theta}(H) = \alpha(\bar{\theta}(G)) = \alpha(e) = e$, en consecuencia $H \in \mathcal{K}$. Esto prueba que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cocientes.

Ahora bien sean N_1, N_2 subgrupos de G de manera que $G/N_1, G/N_2 \in \mathcal{K}$. Deseamos mostrar que el producto subdirecto $G/N_1 \cap N_2$ está en $\mathcal{K}$. Consideremos los morfismos: $i : G/(N_1 \cap N_2) \hookrightarrow G/N_1 \times G/N_2$, dado por $i : g(N_1 \cap N_2) \longmapsto (gN_1, gN_2)$, $pr_j : G/N_1 \times G/N_2 \longrightarrow G/N_j$, definido por $pr_j : (gN_1, gN_2) \longmapsto gN_j$, $j = 1, 2$. Entonces la composición. $pr_j \circ i$ es suprayectiva $j = 1, 2$. Luego,

$$pr_j \circ i(\bar{\theta}(G/(N_1 \cap N_2))) = \bar{\theta}(G/N_j) = e, \quad j = 1, 2$$

pues $\bar{\theta}$ cunmuta con epimorfismos. Así $\bar{\theta}(G/(N_1 \cap N_2)) = e$.

Por último, para probar que $\bar{\theta}(G) = O^{\mathcal{K}}(G)$, bastaría con probar que $\bar{\theta}(G/N) = e$ si y sólo si $\bar{\theta}(G) \subseteq N$. Supongamos que $\bar{\theta}(G/N) = e$ y sea $\alpha : G \twoheadrightarrow G/N$ el epimorfismo canónico, entonces

$$\alpha(\bar{\theta}(G)) = \bar{\theta}(G/N) = e$$

así, $\bar{\theta}(G) \subseteq N$. De manera análoga si $\bar{\theta}(G) \subseteq N$, entonces

$$e = \alpha(\bar{\theta}(G)) = \bar{\theta}(G/N).$$

■

Tenemos los siguientes ejemplos dados por el teorema de Blass:

Proposición 4.3.6 ([Bl], corolario 4a) *Sea p un número primo. Para cada $G \in Obj(\mathcal{GRU})$ definimos $\bar{\theta}_G(G) := G_p$ como un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces θ es un endomorfismo entero.*

Demostración. Sean q un número primo y H un subgrupo normal de G de índice q. Deseamos demostrar que $\bar{\theta}_H(H) = H \cap U$, para algún conjugado U en G de $\bar{\theta}_G(G)$. Supongamos que $q \neq p$, entonces puesto que $[G : H] = q$, tenemos que $H_p \sim_G G_p$, así tomamos a U como H_p. Supongamos ahora que $q = p$, entonces $G_p \nsubseteq H$, por lo que $C_p = G/H \cong HG_p/H \cong G_p/G_p \cap H$, por lo tanto si $| G_p |= p^k$, entonces $| G_p \cap H |= p^{k-1}$. Claramente $G_p \cap H$ es un p-subgrupo de Sylow de H, pues $| G |= mp^k$ y $| H |= mp^{k-1}$ donde $(m, p) = 1$. En consecuencia $\bar{\theta}_H(H) \sim_H G_p \cap H = \bar{\theta}_G(G) \cap H$. ■

Proposición 4.3.7 ([Bl], corolario 4b) *Para cada $G \in Obj(\mathcal{GRU})$ definimos $\bar{\theta}_G(G)$ como el mínimo subgrupo normal N de G tal que el grupo cociente G/N es soluble. Entonces θ es un endomorfismo entero.*

Demostración. Sea H un subgrupo normal de G de índice p. Debemos probar que $\bar{\theta}_H(H) = H \cap U$, para algún conjugado U en G de $\bar{\theta}_G(G)$. Sea $N := \bar{\theta}_G(G)$, entonces $N \subseteq H$ pues $G/H \cong C_p$, el cual es soluble. Más aún H/N es soluble pues $H/N \leq G/N$, así $\bar{\theta}_H(H) \leq N = \bar{\theta}_G(G) = H \cap \bar{\theta}_G(G)$. Por otro lado, como $\bar{\theta}_H(H)$ es característico en H y $H \trianglelefteq G$, entonces $\bar{\theta}_H(H) \trianglelefteq G$, además el primer y ultimo miembro de la sucesión

$$H/\bar{\theta}(H) \hookrightarrow G/\bar{\theta}(H) \twoheadrightarrow G/H \cong C_p$$

son solubles, así que $G/\bar{\theta}_H(H)$ es soluble. Luego, entonces $N \leq \bar{\theta}_H(H)$. ■

Definición 4.3.8 *El endomorfismo natural θ definido en el corolario anterior es llamado el **residuo perfecto.***

Observación 4.3.9 *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de clases de isomorfía de grupos simples no abelianos, definamos $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} := \{G$: los factores de composición de G están en $\mathcal{A}$ o son abelianos$\}$. Se ve facilmente que $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ es cerrada bajo cocientes y productos subdirectos.*

Proposición 4.3.10 *El endomorfismo $\theta_{\mathcal{A}}$ dado por $\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(G) := O^{\mathcal{K}_{\mathcal{A}}}(G)$, es un endomorfismo entero.*

Demostración. Sea H un subgrupo normal de G de índice p. Debemos probar que $\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) = H \cap U$, para algún conjugado U en G de $\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(G)$. Sea $N := \bar{\theta}_{\mathcal{A}}(G)$, entonces $N \subseteq H$ pues $G/H \cong C_p$, el cual esta en $\mathcal{K}$. Mas aún H/N esta en $\mathcal{K}$ pues $H/N \leq G/N$, así $\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) \leq N = \bar{\theta}_{\mathcal{A}}(G) = H \cap \bar{\theta}_{\mathcal{A}}(G)$. Ahora bien, como $\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H)$ es característico en $H \trianglelefteq G$, tenemos

$$\left(G/\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H)\right) / \left(N/\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H)\right) \cong G/N$$

como $G/N \in \mathcal{K}$ y $N/\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) \leq H/\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) \in \mathcal{K}$, tenemos que $G/\bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) \in \mathcal{K}$, así $N \subseteq \bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H) \subseteq \bar{\theta}_{\mathcal{A}}(H)$. ■

Lema 4.3.11 *Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos clases distintas, entonces $\theta_{\mathcal{A}_1} \neq \theta_{\mathcal{A}_2}$*

Demostración. En efecto, sea $A \in \mathcal{A}_1$ tal que $A \notin \mathcal{A}_2$, entonces $\bar{\theta}_{\mathcal{A}_1}(A) = e$ y $\bar{\theta}_{\mathcal{A}_2}(A) = A$, por lo que $\theta_{\mathcal{A}_1} \neq \theta_{\mathcal{A}_2}$. ■

Proposición 4.3.12 ([Bl], corolario 4c) *El número de endomorfismos naturales de $A(\_)$ es no numerable. Mas aún, es la cardinalidad del continuo.*

Demostración. El endomorfismo θ esta determinado si $\bar{\theta}(G)$ esta definido para todo grupo finito G. Luego, sí $\varsigma_G :=$ número de subgrupos de G y $End[A]$ es el conjunto de endomorfismos naturales de A, entonces

$$\mid End[A] \mid \leq \prod_G \varsigma_G^{\varsigma_G} \leq \prod_G \chi_0 = \chi_0^{\chi_0} := C$$

Ahora bien, hay un número numerable de grupos simples no abelianos, así podemos elegir tantas clases de isomorfía de grupos simples no abelianos $\mathcal{A}$ como subconjuntos de $\mathcal{S} := \{S : S \text{ es un grupo simple no abeliano finito}\}$. Luego, por el lema anterior

$$C \leq \mid End[A] \mid$$

∎

Proposición 4.3.13 ([Bl], corolario 4d) *El monoide de endomorfismos naturales de A no es abeliano.*

Demostración. En efecto, sea θ el residuo perfecto y η dado por, $\bar{\eta}(G) =$ 2-subgrupo de Sylow de G. Entonces, $\bar{\eta}(\bar{\theta}_{A_5}(A_5)) = \bar{\eta}(A_5)$ el cual es un grupo de orden cuatro y $\bar{\theta}_{\bar{\eta}(A_5)}(\bar{\eta}(A_5)) = e$. ∎

Ejemplo 4.3 *Sea θ el endomorfismo natural del funtor A asociado al residuo perfecto, $\mathbf{A}_5$ el grupo alternante en 5 símbolos y $H \in C(\mathbf{A}_5)$, entonces*

$$\theta_{\mathbf{A}_5}(e_{\mathbf{A}_5,H}) = \begin{cases} 0 & si\ H \neq 1\ y\ H \neq \mathbf{A}_5 \\ 1 - e_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_5} & si\ H = 1 \\ e_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_5} & si\ H = \mathbf{A}_5 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{A}_5}\left(e^{\{2,3,5\}}_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_5}\right) &= e^{\{2,3,5\}}_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_5} \\ \theta_{\mathbf{A}_5}\left(e^{\{2,3,5\}}_{\mathbf{A}_5,1}\right) &= e^{\{2,3,5\}}_{\mathbf{A}_5,1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 *Sea θ el endomorfismo natural del funtor A asociado a los 2-grupos de Sylow, entonces*

$$\theta_{\mathbf{A}_5}(e_{\mathbf{A}_5,H}) = \begin{cases} 0 & si\ H\ no\ es\ un\ 2\text{-}grupo \\ e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{C}_2} + e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{D}_3} + e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{D}_5} & si\ H = \mathbb{C}_2 \\ e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{D}_2} + e_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_4} + e_{\mathbf{A}_5,\mathbf{A}_5} & si\ H = \mathbb{D}_2 \\ e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{C}_5} + e_{\mathbf{A}_5,\mathbb{C}_3} + e_{\mathbf{A}_5,1} & si\ H = 1 \end{cases}$$

Capítulo 5

Una perspectiva categorica

Este capítulo esta basado en [Va1] y [Va2]. Los resultados principales de este capítulo son los teoremas 5.1.12, 5.2.7, 5.3.10, 5.3.12, 5.3.13 y 5.4.5 donde este último no se encuentra publicado, pero fue obtenido por el autor de dichas publicaciones.

5.1 Lema de Yoneda y el funtor A^+

A continuación denotamos por $\mathcal{GRU}$ y $\mathcal{SET}$ a las categorías de grupos finitos y de conjuntos respectivamente.

Notación 5.1.1 *Denotamos por A^+ (resp. A), al funtor $A^+ : \mathcal{GRU} \longrightarrow \mathcal{SET}$, dado por $A^+ : G \longmapsto A^+(G)$ (resp. $A : \mathcal{GRU} \longrightarrow \mathcal{SET}$, dado por $A : G \longmapsto A(G)$). Para cada homomorfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$ denotamos por $f^\bullet$ al morfismo $A(f)$.*

Definición 5.1.2 *una transformación natural η en A es una familia de operaciones entre conjuntos $\{\eta_G : A(G) \longrightarrow A(G)\}_{G \in \mathcal{GRU}}$ tal que para cualquier homomorfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$, se tiene que $\eta_H \circ f^\bullet = f^\bullet \circ \eta_G$. Denotamos por $Op(A, A)$ al conjunto de transformaciones naturales de A. De manera análoga se define $Op(A^+, A)$.*

Observación 5.1.3 *Sean G y H grupos, decimos que dos homomorfismos de grupos $\rho_1, \rho_2 : G \longrightarrow H$, son **equivalentes** si existe $h \in H$ tal que para todo $g \in G$, $\rho_1(g) = h\rho_2(g)h^{-1}$. Así, definimos la categoria $\mathcal{G} = \mathcal{GRU}/\sim$, donde $\sim$ es la equivalencia entre morfismos de grupos dada anteriormente.*

Luego el funtor $A^+ : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{SET}$, dado por $A^+ : G \longmapsto A^+(G)$, esta bien definido; en efecto si X es un H-conjunto entonces definimos el morfismo de G-conjuntos: $f : \rho_1^*(X) \longrightarrow \rho_2^*(X)$, dado por $f : x \longmapsto h^{-1}x$, claramente f es una biyección entre conjuntos, más aún para cada $g \in G$, $f(gx) = f(\rho_1(g)x) = h^{-1}\rho_1(g)x = \rho_2(g)h^{-1}x = gf(x)$, así f es un isomorfismo de G-conjuntos, luego entonces $\rho_1^* = \rho_2^*$.

Notación 5.1.4 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría no vacía y sea X un objeto de $\mathcal{C}$. Consideremos el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(X, \_)$ y cualquier otro funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{SET}$. Sea $\eta : Hom_{\mathcal{C}}(X, \_) \longrightarrow T$ una transformación natural, denotamos por $Nat(Hom_{\mathcal{C}}(X, \_), T)$ al conjunto de transformaciones naturales entre estos funtores.*

Tenemos el siguiente lema:

Lema 5.1.5 (Yoneda) *La aplicación $Y : Nat(Hom_{\mathcal{C}}(X, \_), T) \longrightarrow T(X)$, dada por $\eta \longmapsto \eta_X(1_X)$, es biyectiva.*

Definición 5.1.6 *Un funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{SET}$ se llama* ***representable*** *si para algún objeto X de C, T es isomorfo a $Hom_{\mathcal{C}}(X, \_)$.*

Notación 5.1.7 *Para cada $n \geq 0$, denotamos por $A_n^+(G)$ al conjunto*

$$\{X \in A^+(G) : \mid X \mid = n\}.$$

Se ve como en el caso de A^+ que el funtor $A_n^+ : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{SET}$, dado por $A_n^+ : G \longmapsto A_n^+(G)$, esta bien definido.

Notación 5.1.8 *Denotamos al $s(n)$-conjunto $s(n)/s(n-1)$ por $[n]$. Un cálculo directo muestra que $[n] \cong \{1, 2, ..., n\}$ como $s(n)$-conjuntos.*

Observación 5.1.9 *Sea $X \in A_n^+(G)$ y $\rho_X : G \longrightarrow s(X)$, su representación por permutaciones asociada (1.1.16). Entonces para cada isomorfismos $\nu : s(X) \longrightarrow s(n)$ induce representaciones equivalentes:*

$$\nu \circ \rho_X \sim \rho_X$$

Lema 5.1.10 *Existe un isomorfismo natural*

$$A_n^+(G) \cong Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n)).$$

En particular, si $G = s(n)$ entonces la identidad $i_{s(n)} : s(n) \longrightarrow s(n)$ se corresponde con el $s(n)$-conjunto $[n] = s(n)/s(n-1)$.

Demostración. En efecto, sea $\psi : A_n^+(G) \longrightarrow Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n))$ dada por $\psi : X \longmapsto \rho_X$ (1.1.16), este es claramente un isomorfismo. Por otra parte, consideremos al $s(n)$-conjunto $[n]$ como $\{1, 2, ..., n\}$, entonces $\psi : [n] \longmapsto \rho_{[n]}$, donde $\rho_{[n]} : s(n) \longrightarrow s(n)$ esta dado por $\rho_{[n]} : \sigma \longmapsto \rho_\sigma$, pero por definición:

$$\begin{aligned} \rho_\sigma &: [n] \longrightarrow [n] \\ &: i \longrightarrow \sigma(i) \end{aligned}$$

luego, $\rho_\sigma = \sigma$, por lo que $\rho_{[n]} = i_{s(n)}$. ∎

Lema 5.1.11 ([Va2], lema 1.5) *Existe un isomorfismo natural*

$$A^+(G) \cong \coprod_{n=0}^{\infty} Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n)).$$

Demostración. Para cada $G \in \mathcal{G}$,tenemos

$$A^+(G) \cong \coprod_{n=0}^{\infty} A_n^+(G).$$

y tenemos por el lema anterior que $A_n^+(G) \cong Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n))$. El lema se sigue ahora. ∎

Teorema 5.1.12 ([Va2], lema 1.10) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi &: Op(A^+, A) \longrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} As(k) \\ &: \eta \longmapsto (\eta_{s(k)}([k]))_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

donde $[k] = s(k)/s(k-1)$, *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} Op(A^+, A) &= Op(\coprod_{k=0}^{\infty} A_k^+, A) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} Op(A_k^+, A) \end{aligned}$$

y por el lema de Yoneda

$$\prod_{k=0}^{\infty} Op(A_k^+, A) \cong \prod_{k=0}^{\infty} Op(Hom_G(\_, s(k)), A) \cong \prod_{k=0}^{\infty} As(k)$$

se sigue del lema 5.1.10 que el isomorfismo se encuentra definido por el mapeo $\Phi : \eta \longmapsto (\eta_{s(k)}([k]))_{k=0}^{\infty}$. ■

Definición 5.1.13 *Los elementos $\eta_{s(k)}([k]) \in As(k)$, $k = 0, 1, ..$, son llamados los* ***números característicos*** *de la operación η.*

5.2 Desarrollo de Taylor de una operación

Definición 5.2.1 *Para cada $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ sean $X \in A^+s(m)$ y $Y \in A^+s(n)$, definimos un producto $\bullet : A^+s(m) \times A^+s(n) \longrightarrow A^+s(m+n)$, dado por*

$$X \bullet Y := Ind_{s(m,n)}^{s(m+n)}(X \times Y).$$

Observación 5.2.2 *Se sigue de la definición que $X \bullet Y = Y \bullet X$. Este producto se extiende a $As(m) \times As(n)$ y también se extiende al producto $\prod_{n=0}^{\infty} As(n)$, de la siguiente manera: $(a_n)_{n=0}^{\infty} \bullet (b_n)_{n=0}^{\infty} = (c_n)_{n=0}^{\infty}$, donde $c_n = \sum_{i+j=n} a_i \bullet b_j$.*

Proposición 5.2.3 *Sean $X_1, X_2 \in As(m)$ y $Y \in As(n)$, entonces $(X_1 + X_2) \bullet Y = X_1 \bullet Y + X_2 \bullet Y$. Análogamente, si $Y_1, Y_2 \in As(n)$ y $X \in As(m)$, entonces $X \bullet (Y_1 + Y_2) = X \bullet Y_1 + X \bullet Y_2$.*

Observación 5.2.4 *Para $b \in As(m)$, consideramos la sucesión $(\lambda(b)_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por: $\lambda(b)_n = 0$, si $n < m$ y $\lambda(b)_n = b \bullet 1_l$ (donde $1_l = s(l)/s(l)$), si $m + l = n$. Claramente la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} As(m) & \longrightarrow & \prod_{n=0}^{\infty} As(n) \\ b & \longmapsto & (\lambda(b)_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos. Esto define un homomorfismo de grupos:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \bigoplus_{n=0}^{\infty} As(n) \longrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} As(n) \\ F & : & \sum b_i \longmapsto \prod((\lambda(b_i)_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}$$

la cual se puede extender a un homorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \hat{F} &: \prod_{n=0}^{\infty} As(n) \longrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} As(n) \\ \hat{F} &: (b_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto (b_n)_{n=0}^{\infty} \bullet (1_n)_{n=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

Lema 5.2.5 *Sean X un G-conjunto de cardinalidad k y $\rho_X : G \longrightarrow s(k)$ la representación asociada a G en $s(k)$. Entonces para $\eta \in Op(A, A)$, $\eta_G(X) = \rho_X^{\bullet}(a_k)$, donde $a_k = \eta([k])$.*

Demostración. En efecto, por ser η una transformación natural tenemos $\eta_G \circ \rho_X^{\bullet} = \rho_X^{\bullet} \circ \eta_{s(k)}$, luego $\rho_X^{\bullet} \circ \eta_{s(k)}([k]) = \rho_X^{\bullet}(a_k) = \eta_G \circ \rho_X^{\bullet}([k]) = \eta_G(X)$. ■

Lema 5.2.6 *Para $b \in As(m)$ y $G \in \mathcal{G}$, tenemos que la aplicación $F(b)_G : A^+(G) \longrightarrow A(G)$ es cero en G-conjuntos de cardinalidad menor a m.*

Demostración. Esto se sigue de las definiciónes y del lema anterior. ■

Teorema 5.2.7 ([Va2], proposición 2.7) *La aplicación $\hat{F}$, es un isomorfimo de grupos.*

Demostración. Esto se sigue de la definición y del hecho que la sucesión $(1_n)_{n=0}^{\infty}$ es un elemento invertible de $\prod_{n=0}^{\infty} As(n)$. ■

Corolario 5.2.8 *Cada operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ puede expresarse, de manera única, como una suma infinita de la forma*

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} F(b_k)$$

con $b_k \in As(k)$. Nos referiremos a esta expresión como el ***desarrollo de Taylor de*** *η.*

Demostración. Esto resulta del teorema anterior,del lema 5.2.6 y del teorema 5.1.12. ■

Lema 5.2.9 *Sean G y K grupos. Si $p_1 : G \times K \longrightarrow G$ es la proyección en la primera coordenada, entonces para cada $H \leq G$, $p_1^*(G/H) \cong \frac{G\times K}{H\times K}$, como $G \times H$-conjuntos. Análogamente, si $p_2 : G \times K \longrightarrow K$ es la proyección en la segunda coordenada, entonces para cada $N \leq K$, $p_2^*(K/N) \cong \frac{G\times K}{G\times N}$, como $K \times N$-conjuntos.*

Demostración. Considerar a $p_1^*(G/H)$ es tomar a G/H como $G \times H$-conjunto vía la acción: $\alpha \cdot gH = p_1(\alpha)gH$, $\alpha \in G\times H$. Sea $\theta : G/H \longrightarrow \frac{G\times K}{H\times K}$, la biyección dada por $gH \longmapsto (g \times 1_K)(H \times K)$, donde 1_K es la identidad en K. Si $\alpha_1 \times \alpha_2 \in G \times K$ entonces $\theta((\alpha_1 \times \alpha_2) \cdot gH) = \theta(p_1(\alpha_1 \times \alpha_2)gH) = \theta(\alpha_1 gH) = (\alpha_1 g \times 1_K)(H \times K)$, por otro lado

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \times \alpha_2\theta(gH) &= (\alpha_1 \times \alpha_2)(g \times 1_K)H \times K \\
&= (\alpha_1 g \times \alpha_2)(H \times K) \\
&= (\alpha_1 g \times 1_K)(H \times K)
\end{aligned}$$

en consecuencia $p_1^*(G/H) \cong \frac{G\times K}{H\times K}$ como $G \times H$-conjuntos. ■

Lema 5.2.10 *Sea H un subgrupo de un grupo G. Si $in : H \hookrightarrow G$ es la inclusión, entonces $in^* = Res_H^G$.*

Demostración. La demostración es análoga a la dada en el lema anterior. ■

5.3 Teorema de Vallejo

En esta sección $p_1 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(m)$ y $p_2 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(n)$ son las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente.

Definición 5.3.1 *Una **composición débil** para m (la cual denotaremos por $\gamma \vdash m$) es una suceción $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tal que $\gamma_i \geq 0$ para cada i, y tenemos que $\sum_{i=1}^n \gamma_i = m$. Un **subgrupo de Young** de $s(m)$ con respecto a la composición débil γ es un subgrupo de la forma $s([\gamma_1]) \times ... \times s([\gamma_n])$, donde el producto se considera directo interno. Denotamos este grupo por $s(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ o bién s_γ. Cada composición débil $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ induce una partición del conjunto $[m] = \{1, ..., m\}$*

$$[m] = \coprod_{i=1}^{n} \Lambda_i, \text{ donde } |\Lambda_i| = \gamma_i.$$

Notación 5.3.2 *Sean $\Gamma = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ y $\Lambda = (\beta_1, ..., \beta_s)$ composiones de n. Denotamos por $\{\Gamma, \Lambda\}$ al conjunto de matrices $m = (m_{i,j})$ de dimensión $r \times s$ con coeficientes en $\mathbb{N}$, tales que:*

$$\sum_{i=1}^{s} m_{i,j} = \beta_j \text{ y } \sum_{j=1}^{r} m_{i,j} = \alpha_i.$$

Entonces tenemos el siguiente teorema dado en [Ke 1]:

Teorema 5.3.3 *Sean s_Γ y s_Λ los subgrupos de Young de $\Gamma = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ y $\Lambda = (\beta_1, ..., \beta_s)$, composiciones de n y sean $\coprod_{i=1}^{r} \Lambda_i$, $\coprod_{i=1}^{s} \Omega_i$ las particiones inducidas en el conjunto $[m]$ respectivamente. Entonces existe una biyección entre las clases doble laterales $s_\Gamma \backslash s(n) / s_\Lambda$ y las matrices $\{\Gamma, \Lambda\}$, dada por $s_\Gamma \sigma s_\Lambda \longmapsto (|\Lambda_i \cap \sigma \Omega_j|)$. Más aún, $s_\Gamma \cap g s_\Lambda g^{-1} = \prod_{i,j} s(m_{i,j})$.*

Lema 5.3.4 *Sean $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ y G un grupo , entonces tenemos el siguiente isomorfismo de grupos:*

$$Hom_{\mathcal{G}}(G, s(m)) \times Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n)) \simeq Hom_{\mathcal{G}}(G, s(m) \times s(n)).$$

Demostración. Esto se sigue de las siguentes asociaciones:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{G}}(G, s(m)) \times Hom_{\mathcal{G}}(G, s(n)) & \longleftrightarrow & Hom_{\mathcal{G}}(G, s(m) \times s(n)) \\ (p_1 \circ f, p_2 \circ f) & \leftarrow & f \\ (\varphi, \psi) & \rightarrow & (\phi : g \longmapsto (\varphi(g), \psi(g)) \end{array}$$

donde, $p_1 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(m)$ y $p_2 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(n)$ son las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente. ■

Definición 5.3.5 *Una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ es* **aditiva** *si para todo $G \in \mathcal{G}$ y para todo $X, Y \in A^+(G)$,*

$$\eta_G(X + Y) = \eta_G(X) + \eta_G(Y).$$

Deseamos ver cuando una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ (cuya sucesión asociada es $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, donde $a_n := \eta_{s(n)}([n])$), es un homorfismo de anillos. Para esto tenemos la siguiente proposición:

Teorema 5.3.6 *Un elemento $\zeta \in Op(A^+ \times A^+, A)$, esta totalmente determinado por la sucesión $(\zeta_{s(m,n)}(p_1^*[m], p_2^*[n]))_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.*

Demostración. Tenemos que,

$$A^+ \cong \coprod_{n=0}^{\infty} Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(n))$$

así,

$$\begin{aligned} A^+ \times A^+ &\cong \coprod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} (Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(m)) \times Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(n))) \\ &\cong \coprod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(m) \times s(n)) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Op(A^+ \times A^+, A) &\cong Op(\coprod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(m) \times s(n)), A) \\ &= \prod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} Op(Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(m) \times s(n)), A) \end{aligned}$$

y por el lema de Yoneda,

$$\prod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} Op(Hom_{\mathcal{G}}(\_, s(m) \times s(n)), A) \cong \prod_{(m,n)\in \mathbb{N}^2} As(m, n).$$

Ahora bien, por 5.3.4 tenemos que el morfismo identidad $i_{s(m)\times s(n)} : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(m) \times s(n)$ se corresponde con $(p_1 \circ i_{s(m)\times s(n)}, p_2 \circ i_{s(m)\times s(n)})$, un calçulo directo muestra que $\rho_{p_1^*[m]} = p_1 \circ i_{s(m)\times s(n)}$ y $\rho_{p_2^*[n]} = p_2 \circ i_{s(m)\times s(n)}$. La proposición se sigue ahora. ■

Corolario 5.3.7 *Una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ es aditiva si y sólo si para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$*

$$\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] + p_2^*[n]) = \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) + \eta_{s(m,n)}(p_2^*[n]).$$

Demostración. En efecto, la operación η es aditiva, si y sólo si el siguiente diagrama conmuta para cada $G \in \mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} A^+(G) \times A^+(G) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "(\eta,\eta)_G"'] & A^+(G) \arrow[r, "\eta_G"] & A(G) \\ A^+(G) \times A^+(G) \arrow[urr, "+"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $(\eta,\eta)_G : (X,Y) \longmapsto (\eta_G(X), \eta_G(Y))$. Por el teorema anterior, esto pasa si y sólo si

$$((+\circ(\eta,\eta))_{s(m,n)}(p_1^*[m], p_2^*[n]))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} = ((\eta\circ +)_{s(m,n)}(p_1^*[m], p_2^*[n]))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2},$$

luego η es aditiva si y sólo si para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$

$$\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] + p_2^*[n]) = \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) + \eta_{s(m,n)}(p_2^*[n]).$$

■

Definición 5.3.8 *Una operación η es* ***multiplicativa*** *si para todo $G \in \mathcal{G}$ y para cualesquier $X, Y \in A^+(G)$, tenemos que $\eta_G(X \smile Y) = \eta_G(X) \smile \eta_G(Y)$.*

Corolario 5.3.9 *Una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ es multiplicativa si y sólo si para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$*

$$\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] \smile p_2^*[n]) = \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) \smile \eta_{s(m,n)}(p_2^*[n]),$$

donde " $\smile$ " denota el producto en el anillo $A(s(m)\dot{\times}s(n))$.

Demostración. La demostración es análoga a la dada en el corolario anterior. ■

Sea $\eta : A^+ \longrightarrow A$ una operación, $\sum_{k=0}^{\infty} F(b_k)$ su desarrollo de Taylor y $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la sucesión asociada a η (dada por $a_n = \eta_{s(n)}([n])$).

Teorema 5.3.10 *Una operación $\eta : A^+ \longrightarrow A$ es aditiva si y sólo si para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$*

$$Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(a_{m+n}) = p_1^*(a_m) + p_2^*(a_n). \tag{5.1}$$

Demostración. Por el corolario 5.3.7, η es aditiva si y sólo si para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] + p_2^*[n]) = \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) + \eta_{s(m,n)}(p_2^*[n])$$

pero, $\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) = p_1^*\eta_{s(m)}([m]) = p_1^*(a_m)$. Análogamente $\eta_{s(m,n)}(p_2^*[n]) = p_2^*(a_n)$.

Por otra parte, por 5.2.9 tenemos que $p_1^*[m] = s(m,n)/s(m-1,n)$ y $p_2^*[n] = s(m,n)/s(n-1,m)$. Más aún, por el teorema de Mackey (1.3.7) tenemos que $Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}([m+n]) = \sum_g s(m,n)/(s(m,n) \cap gs(m+n-1)g^{-1})$, donde g corre sobre un conjunto completo de representantes de las clases dobles $s(m,n)\backslash s(m+n)/s(m+n-1,1)$. Se tiene, entonces, del teorema 5.3.3 que

$$\begin{aligned} Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}([m+n]) &= s(m,n)/s(m-1,n) + s(m,n)/s(n-1,m) \\ &= p_1^*[m] + p_2^*[n]. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned} \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] + p_2^*[n]) &= \eta_{s(m,n)}(Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}([m+n])) \\ &= Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(\eta_{s(m,n)}([m+n])) \\ &= Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(a_{m+n}). \end{aligned}$$

■

Observación 5.3.11 *Sea η una operación aditiva, entonces $a_0 = 0$. En efecto, para cada G*

$$\eta_G(0) = \eta_G(0+0) = \eta_G(0) + \eta_G(0),$$

así $a_0 = 0$. En particular, $b_0 = 0$.

Teorema 5.3.12 ([Va2], teorema 2.9) *Sea $b \in As(k)$. Entonces la operación $F(b)$ es aditiva si y sólo si para cualesquier $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = k$, tenemos*

$$Res_{s(\alpha,\beta)}^{s(k)}(b) = 0 \tag{5.2}$$

Demostración. Supongamos que $F(b)$ es aditiva y sea $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$, la sucesión asociada a la operación $F(b)$, tenemos por la proposición anterior:

$$Res_{s(\alpha,\beta)}^{s(k)}(b_k) = p_1^*(\lambda_\alpha) + p_2^*(\lambda_\beta)$$

pero, por definición de la operación F tenemos que $p_1^*(\lambda_\alpha) = p_2^*(\lambda_\beta) = 0$.

Inversamente, probaremos que $F(b)$ es aditiva si se verifica 5.2. Sea $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$, la sucesión asociada a la operación $F(b)$. Tenemos cuatro casos:

1) $n = 0$. En este caso tenemos:

$$Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(\lambda_{m+n}) = \lambda_m$$

además, $p_1^* = 1_{s(m)}$ por lo que $p_1^*(\lambda_m) = \lambda_m$. También $p_2^*(\lambda_n) = p_2^*(\lambda_0) = 0$. Análogamente se ve el caso $m = 0$.

2) $m + n = k + r$, $r > 0$. Para $\gamma_1 = (m,n), \gamma_2 = (k,r)$ tenemos por el teorema de Mackey que:

$$\begin{aligned}
Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(\lambda_{k+r}) &= Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(b \bullet 1_r) \\
&= Res_{s(m,n)}^{s(m+n)} Ind_{s(r,k)}^{s(m+n)}(b \times 1_r) \\
&= \sum_{\substack{A \in \{\alpha,\beta\} \\ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}}} Ind_{s(a_1,a_3,a_2,a_4)}^{s(m,n)} c_A^* Res_{s(a_1,a_2,a_3,a_4)}^{s(r,k)}(b \times 1_r) \\
&= \sum_{A \in \{\alpha,\beta\}} Ind_{s(a_1,a_3,a_2,a_4)}^{s(m,n)} c_A^* (Res_{s(a_1,a_2)}^{s(k)}(b) \times Res_{s(a_3,a_4)}^{s(r)}(1_r)) \\
&= Ind_{s(k,a_3,0,n)}^{s(m,n)} c_{A_1}^*(b \times 1_0 \times 1_{a_3} \times 1_n) \\
&\quad + Ind_{s(0,m,k,a_4)}^{s(m,n)} c_{A_2}^*(1_0 \times b \times 1_m \times 1_{a_4})
\end{aligned}$$

donde $A_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ a_3 & n \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ m & a_4 \end{pmatrix}$. Además,

$$c_{A_1}^*(b \times 1_0 \times 1_{a_3} \times 1_n) = (b \times 1_{m-k}) \times (1_0 \times 1_n),$$

y

$$c_{A_2}^*(1_0 \times b \times 1_m \times 1_{a_4}) = (1_0 \times 1_m) \times (b \times 1_{n-k}),$$

así

$$\begin{aligned}
Res_{s(m,n)}^{s(m+n)}(\lambda_{k+r}) &= Ind_{s(k,m-k)}^{s(m)}(b \times 1_{m-k}) \times 1_n + 1_m \times Ind_{s(k,n-k)}^{s(n)}(b \times 1_{n-k}) \\
&= (b \bullet 1_{m-k}) \times 1_n + 1_m \times (b \bullet 1_{n-k}) \\
&= \lambda_m \times 1_n + 1_m \times \lambda_n \\
&= p_1^*(\lambda_m) + p_2^*(\lambda_n).
\end{aligned}$$

3) $m + n < r$. Este caso es trivial.
4) $m + n = r$. Esto se verifica por la hipótesis. ∎

Si $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} F(b_k)$, $b_k \in As(k)$, entonces tenemos la siguiente caracterización de las operaciones aditivas:

Teorema 5.3.13 ([Va2], teorema 2.11) *Una condición necesaria y suficiente para que η sea aditiva es que para cada k y para cualesquier $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = k$, tenemos*

$$Res_{s(\alpha,\beta)}^{s(k)}(b_k) = 0 \tag{5.3}$$

Demostración. En primer lugar probaremos que si $n = \sum_{k=0}^{\infty} F(b_k)$ es aditiva, entonces cada $F(b_k)$ es aditiva. Para cada k definimos

$$J_k := \bigcap_{\alpha+\beta=k} Nuc(Res_{s(\alpha,\beta)}^{s(k)}).$$

Así para probar que cada $F(b_k)$ es aditiva basta, por el teorema anterior, con probar que $b_k \in J_k$. Probaremos esto por inducción sobre k. Claramente se verifica para $k = 1$. Supongamos que $b_{n+j} \in J_{n+j}$ para $0 \leq j \leq l$. Entonces, por hipótesis, las operaciones $F(b_n), ..., F(b_{n+j})$ son aditivas. Sea

$$\xi_m := \eta - \sum_{i=0}^{m-1} F(b_i)$$

entonces, ξ_{n+l} es aditiva, de donde

$$\xi_{n+l}(p_1^*[s] + p_2^*[t]) = \xi_{n+l}(p_1^*[s]) + \xi_{n+l}(p_2^*[t]),$$

donde $s + t = n + l$ y $s > 0, t > 0$. Ahora bien ξ_m se anula en conjuntos de cardinalidad m (5.2.6) por lo que

$$\xi_{n+l}(p_1^*[s] + p_2^*[t]) = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \xi_{n+l}([n+l+1]) &= \eta([n+l+1]) - \sum_{i=0}^{n+l-1} F(b_i)([n+l+1] \\ &= a_{n+l+1} - \sum_{i=0}^{n+l+1} b_i \bullet 1_{l+1} = b_{n+l+1}. \end{aligned}$$

Luego, para $s > 0, t > 0$, $s + t = n + l + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} Res^{s(n+l+1)}_{s(s,t)}(b_{n+l+1}) &= \xi_{n+l}(Res^{s(n+l+1)}_{s(s,t)}([n+l+1])) \\ &= \xi_{n+l}(p_1^*[s] + p_2^*[t]) = 0. \end{aligned}$$

Esto es lo que queriamos demostrar. La implicación inversa es trivial. ∎

5.4 Caracterización de las operaciones multiplicativas

Ahora estudiaremos el caso en el una operación η es multiplicativa. Para esto tenemos la siguiente definición:

Observación 5.4.1 *Para m, n números natruales, sea $s(m) \times s(n)$ el producto directo externo de $s(n)$ y $s(m)$. Entonces $s(m) \times s(n)$ actúa en $[m] \times [n]$ diagonalmente:*

$$(\sigma, \tau)(i, j) = (\sigma(i), \tau(j)),$$

Luego tenemos una representación por permutaciones asociada:

$$\begin{aligned} f \ &: \ s(m) \times s(n) \longrightarrow s(mn) \\ &: \ (\sigma, \tau) \longmapsto \rho_{(\sigma,\tau)} \end{aligned}$$

donde $\rho_{(\sigma,\tau)} : (i, j) \longmapsto (\sigma(i), \tau(j))$ (1.1.16). Se sigue de la definición que f es inyectiva y denotamos por $s(m)\dot{\times}s(n)$ a la imagen de f.

Lema 5.4.2 *Sean m, n números naturales, entonces*

$$p_1^*[m] \smile p_2^*[n] = [m] \times [n].$$

donde " $\smile$ " denota el producto en el anillo $A(s(m) \times s(n))$

Demostración. En efecto, La acción de $s(m) \times s(n)$ en $p_1^*[m]$ (resp. $p_2^*[n]$) es $(\sigma, \tau)(i, j) = \sigma(i)$ (resp. $(\sigma, \tau)(i, j) = \tau(j)$), luego la acción de $s(m) \times s(n)$ en $p_1^*[m] \times p_2^*[n]$ es $p_1^*[m] \times p_2^*[n]$, la cual es la misma que en $[m] \times [n]$. ∎

Lema 5.4.3 *Para cada m y n números naturales, tenemos que*

$$f^*([mn]) = [m] \times [n], \text{ en } A(s(m) \times s(n)).$$

Demostración. Esto se sigue de la inyectividad de f. ■

Notación 5.4.4 *Para $x = n1_{s(0)} \in A(s(0)$, definimos*

$$\bar{x} = n1_{s(0)\times s(n)} \in A(s(0) \times s(n)).$$

Análogamente si $y = \sum \lambda_i(s(n)/H) \in A(s(n))$, definimos

$$\bar{y} = \sum \lambda_i((1 \times s(n))/(1 \times H)) \in A(s(0) \times s(n))$$

donde 1 es la identidad de $s(n)$.

Teorema 5.4.5 *Sea $\eta : A^+ \longrightarrow A$ una operación, y sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ su sucesión asociada, entonces η es multiplicativa si y sólo si para cualesquier $m, n > 0$,*

$$f^*((a_{mn})) = p_1^*(a_m) \smile p_2^*(a_n), \tag{5.4}$$

(donde " $\smile$ " denota el producto en el anillo $A(s(m) \times s(n))$ y f es el isomorfismo dado en 5.4.1). Más aún se verifican las formulas:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &\smile \bar{a}_n = \bar{a}_0 \text{ en } A(s(0) \times s(n)), \\ \bar{a}_n &\smile \bar{a}_0 = \bar{a}_0 \text{ en } A(s(n) \times s(0)), \end{aligned}$$

para todo número natural n.

Demostración. En efecto, η es multiplicativa, si y sólo si para todo $G \in \mathcal{G}$ y para cualesquier $X, Y \in A^+(G)$, tenemos que $\eta_G(X \smile Y) = \eta_G(X) \smile \eta_G(Y)$. Más aún esto pasa si y sólo si para cualesquier m, n tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] &\smile p_2^*[n]) = \eta_{s(m,n)}(p_1^*[m]) \smile \eta_{s(m,n)}(p_2^*[n]) \\ &= p_1^*(\eta_{s(m)}[m]) \smile p_2^*(\eta_{s(n)}[n]) \\ &= p_1^*(a_m) \smile p_2^*(a_n). \end{aligned}$$

Por otra parte, de los lemas 5.4.2 y 5.4.3, se tiene que

$$\eta_{s(m,n)}(p_1^*[m] \smile p_2^*[n]) = (f)^*(a_{mn}), \tag{5.5}$$

donde f es el isomorfismo dado en 5.4.1. Así,

$$f^*(a_{mn}) = p_1^*(a_m) \smile p_2^*(a_n).$$

que es lo que deseabamos probar.

Ahora veamos el caso $m = 0$ o $n = 0$. Supongamos que $m = 0$ y $n \neq 0$. Tenemos que

$$f^*(a_0) = p_1^*(a_0) \smile p_2^*(a_n).$$

Ahora bien, $a_0 \in As(0)$, es de la forma $k1_0$ para alguna k, así $p_1^*(a_0) = \bar{a}_0$, analogamente $f^*(a_0) = \bar{a}_0$ y como $p_2 : s(0) \times s(n) \longrightarrow s(n)$ esta dado por $p_2 : (e, \sigma) \longrightarrow \sigma$ (donde e es el único elemento de $s(0)$), tenemos que $p_2^*(a_n) = \bar{a}_n$, luego tenemos que

$$\bar{a}_0 \smile \bar{a}_n = \bar{a}_0.$$

De manera análoga, se tiene para $m \neq 0$ y $n = 0$ que

$$\bar{a}_m \smile \bar{a}_0 = \bar{a}_0$$

y para $m = 0, n = 0$, tenemos que

$$\bar{a}_0 \smile \bar{a}_0 = \bar{a}_0.$$

■

Observación 5.4.6 *Sea η una operación, entonces $\eta_G(G/G) = G/G$ para cada G si y sólo si $a_1 = b_1 = s(1)/s(1)$. Claramente, si $\eta_G(G/G) = G/G$ entonces $a_1 = b_1 = s(1)/s(1)$. Análogamente, si $a_1 = b_1 = s(1)/s(1)$, entonces por 5.2.5, se tiene que $\eta_G(G/G) = \rho^*_{G/G}(a_1) = \rho^*_{G/G}(s(1)/s(1)) = G/G$.*

Ejemplo 5.1 *Sea θ el endomorfismo natural asociado al residuo perfecto, $F_{20} :=< (1,2,3,4,5), (2,5)(3,4), (2,4,5,3) >$, $\mathbb{C}_4 :=< (2,3)(4,5), (2,4,3,5) >$ entonces dicho endomorfismo natural se corresponde con la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1_1, 21_2, 31_3, 41_4, 5[S(5)/S(2)] - 5[S(5)/\mathbb{C}_4] - 5[S(5)/ < (4,5), (2,3) >] - 5[S(5)/S(3)] + 5[S(5)/S(2) \times S(3)] + 5[S(5)/F_{20}] + 5[S(5)/S(4)], \ldots)$. Pero por el colorolario 5.2.8 se tiene que $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} F(b_m)$, donde $(b_m)_{m=0}^{\infty} = (1_1, -1[S(2)/1] + 21_2, [S(3)/1] - 3[S(3)/S(2)] + 31_3, -1[S(4)/1] + 4[S(4)/S(2)] -2[S(4)/ < (3,4), (1,2) >] - 4[S(4)/S(3)] + 41_4, [S(5)/1] - 5[S(5)/\mathbb{C}_4] + 5[S(5)/F_{20}], \ldots)$.*

Ejemplo 5.2 *Sea θ el endomorfismo natural asociado a los 2-grupos de Sylow, $\mathbb{C}_2 := < (4,5) >$, $\mathbb{C}_3 := < (1,2,3) >$, $\mathbb{C}_5 := (1,2,3,4,5)$ entonces este endomorfismo se corresponde con la sucesión* $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0,\ 1_1,\ [S(2)/1],\ [S(3)/\mathbb{C}_3] + 1_3,\ -1[S(4)/S(2)] + [S(4)/\mathbb{C}_3] + 2[S(4)/S(3)],\ -[S(5)/S(2)] + [S(5)/\mathbb{C}_5] + [S(5)/S(3)] + [S(5)/\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_3] + 1_5, \ldots)$. *Procediendo de manera análoga al ejemplo anterior tenemos que* $(b_m)_{m=0}^{\infty} = (1_1, 0, -1[S(3)/S(2)] + [S(3)/\mathbb{C}_3] + 1_3, 0,\ -[S(5)/S(2)] + [S(5)/\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2] + [S(5)/\mathbb{C}_5] + [S(5)/S(3)] - 1[S(5)/\mathbb{C}_2 \times S(3)] - 1[S(5)/S(4)] + 1_5, \ldots)$.

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo vamos a exponer una sintesís de los métodos tratados por Vallejo en ([Va1], [Va2]) y por Blass en [Bl], con el objetivo de entender mejor los endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside con respecto al marco dado por Vallejo. Cabe destacar que lo resultados de esta sección son nuevos y fueron obtenidos por Vallejo y los autores de esta tesis. Los resultados más importantes de este capítulo son 6.3.2, 6.3.5 y 6.4.1.

Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Denotaremos por $(H)_G$ como la clase de conjugancia de H en G.

Es claro que los teoremas 5.1.12 y 5.2.7 se cumplen cuando consideramos el funtor $A_{\mathbb{Q}}$ en el lugar de el funtor A.

6.1 Un Ejemplo

En esta sección presentamos un ejemplo de una sucesión asociada a un endomorfismo natural que se puede escribir de una manera sencilla, diferente a las dadas en [Va2].

Proposición 6.1.1 *Si η es un endomorfismo natural entonces:*

$$\begin{aligned} \eta_{S(n)}([n]) &= \sum_{(H)} \varphi_{\overline{\eta}_{s(n)}(H)}([n]) e_{s(n),H} \qquad (6.1) \\ &= \sum_{U \in Im(\overline{\eta}_{S(n)})} \varphi_U([n]) \sum_{K \in \overline{\eta}^{-1}_{S(n)}(U)} e_{S(n),K} \end{aligned}$$

donde $\overline{\eta}_{S(n)} : C(S(n)) \to C(S(n))$ (como se definió en 4.1.6).

Demostración. Sea $(H) \in C(s(n))$. Haciendo uso de 3.2.9 se llega a tener la siguiente igualdad:

$$\eta_{S(n)}([n]) = \sum_{(H)} \varphi_{(H)}(\eta_{S(n)}([n]))\; e_{S(n),H} \tag{6.2}$$

pero por la ecuación 4.2 se tiene que $\varphi_{(H)}(\eta_{S(n)}([n])) = \varphi_{\overline{\eta}_{S(n)}(H)}([n])$, luego entonces al sustituir la igualdad anterior en la ecuación 6.2 y factorizando se llega a la ecuación 6.1. ■

Corolario 6.1.2 *Sea π_n el conjunto de todos los números primos divisores de $n!$ y $P_{\pi_n}(S(n))$ el subconjunto de $C(S(n))$ que consta de las clases de conjugancia de subgrupos π_n-perfectos Entonces la sucesión:*

$$\left(\sum_{(H)\in P_{\pi_n}(S(n))} \varphi_H([n])\; e^{\pi_n}_{S(n),H} \right)_{n=0}^{\infty} \tag{6.3}$$

se encuentra en correspondencia con un endomorfismo natural.

Demostración. Si para cada grupo G, se considera la función:

$$\begin{aligned} \overline{\eta}_G &: C(G) \to C(G) \\ \overline{\eta}_G &: (U) \mapsto (V) \end{aligned}$$

donde V es el mínimo subgrupo normal de U tal que el cociente U/V, es un grupo soluble. Entonces la familia de funciones $\{\overline{\eta}_G\}$ induce por el corolario 6.2.4 un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside (al cual llamaremos η) tal que su sucesión asociada $\left(\eta_{S(n)}[n]\right)_{n=0}^{\infty}$ es igual a la sucesión 6.3 tras aplicarle la ecuación 6.1 y la igualdad 3.5, puesto que

$$Im(\overline{\eta}_{s(n)}) = \{H \leq s(n) : H \text{ es perfecto}\}.$$

■

6.2 Algunas propiedades de marcas

Lema 6.2.1 *Sea X un G-conjunto y $K \leq H \leq G$, entonces:*

$$\varphi_K(X) = \varphi_K\left(Res^G_H(X)\right) \tag{6.4}$$

Demostración. Basta con observar que la acción de K en X no depende de considerarlo como G conjunto o como H-conjunto. ■

Lema 6.2.2 *Sea G y H grupos y $p_1 : G \times H \longrightarrow G$ y $p_2 : G \times H \longrightarrow H$ las proyecciones, si $S \in A(G)$, $T \in A(H)$, y θ es un endomorfismo natural del funtor A, entonces*

$$\theta_{G\times H}(p_1^*(S) \smile p_2^*(T)) = p_1^*(\theta_G(S)) \smile p_2^*(\theta_H(T)).$$

Demostración. La igualdad se verifica inmediatamente, pues θ es un endomorfismo natural. ■

Lema 6.2.3 *Sean G y H grupos, $p_1 : G \times H \to G$ y $p_2 : G \times H \to H$ los homorfismos proyección. Si $U \leq G \times H, S \in A(G)$, $T \in A(H)$. Entonces*

$$\varphi_U\left(p_1^*(S) \smile p_2^*(T)\right) = \varphi_{p_1(U)}\left(S\right)\varphi_{p_2(U)}\left(T\right). \tag{6.5}$$

Demostración. La ecuación 6.5 se verifica, haciendo uso de la proposición 1.2.16 y del hecho, de que $\varphi_U : A(G \times H) \longrightarrow \mathbb{Z}$, es un homomorfismo de anillos. ■

Proposición 6.2.4 *Sean G, H grupos y $U \leq G \times H$. Si suponemos que $S \in A(G)$, $T \in A(H)$ y θ es un endomorfismo natural de el funtor A entonces*

$$\varphi_{\overline{\theta}_{G\times H}(U)}\left(p_1^*(S) \smile p_2^*(T)\right) = \varphi_{\overline{\theta}_G(p_1(U))}\left(S\right)\varphi_{\overline{\theta}_H(p_2(U))}\left(T\right)$$

donde $p_1 : G \times H \to G$ y $p_2 : G \times H \to H$ son los homorfismos proyección.

Demostración. Sea $U \leq G \times H$, entonces por el lema 6.2.2 se tiene

$$\varphi_U(\theta_{G\times H}(p_1^*(S) \smile p_2^*(T))) = \varphi_U(p_1^*(\theta_G(S)) \smile p_2^*(\theta_H(T))),$$

y por el lema 6.2.3 y la igualdad 4.2 se tiene que

$$\varphi_{\overline{\theta}_{G\times H}(U)}\left(p_1^*(S) \smile p_2^*(T)\right) = \varphi_{\overline{\theta}_G(p_1(U))}\left(S\right)\varphi_{\overline{\theta}_H(p_2(U))}\left(T\right).$$

■

6.3 Propiedades de endomorfismos y marcas

Recordamos que si η es un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside entonces por el teorema 5.1.12 se le puede hacer corresponder la sucesión $\left(\eta_{S(n)}([n])\right)_{n=0}^{\infty}$ y por la proposición 5.2.7 esta sucesión se puede ver como la suma $\sum_{n=0}^{\infty} F(b_k)$, donde $b_k \in A(S(k))$.

En este capítulo $p_1 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(m)$ y $p_2 : s(m) \times s(n) \longrightarrow s(n)$ son las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente.

El objetivo de la siguiente proposición es caracterizar los elementos b_k a partir de los elementos de la sucesión $\left(\eta_{S(n)}([n])\right)_{n=0}^{\infty}$.

Notación 6.3.1 *A partir de este momento denotaremos por a_n al elemento $\eta_{S(n)}([n])$, donde $n = 0, 1, 2, ..$*

Teorema 6.3.2 *Sea η un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside entonces:*

$$\varphi_{[H]_{S(n)}}(b_n) = \begin{cases} \varphi_{[H]_{S(n)}}(a_n) & \text{si } H \leq S(n) \text{ actúa transitivamente en } [n] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{6.6}$$

Demostración. Si suponemos que $H \leq S(n)$ no actúa transitivamente en $[n]_{S(n)}$, entonces esto nos asegura la existencia de por lo menos dos órbitas $\mathcal{O}_H(x)$ y $\mathcal{O}_H(z)$ donde x y $z \in [n]$, por lo que se puede considerar a el conjunto $[n]$ como unión disjunta de dos conjuntos A y B donde $\mathcal{O}_H(x) \subseteq A$ y $\mathcal{O}_H(z) \subseteq B$, por lo que H es un subgrupo de un conjugado en $S(n)$ a el subgrupo de Young S_π donde π es la partición de n dada por $\{|A|, |B|\}$.

Por otro lado, tenemos por el teorema 5.3.13 y por el inciso 3) de la proposición 1.3.6 la siguiente igualdad:

$$Res_H^{S_\pi}\left(Res_{S_\pi}^{S(n)}(b_n)\right) = Res_H^{S(n)}(0) = 0, \text{ donde } \pi \text{ es la partición } \{|A|, |B|\}$$

pero si aplicamos la ecuación 6.4 a la identidad anterior entonces se tiene que:

$$\varphi_{[K]_{S(n)}}(b_n) = \varphi_{[K]_H}\left(Res_H^{S(n)}(b_n)\right) = 0, \text{ donde } K \leq H$$

luego entonces $\varphi_{[H]_{S(n)}}(b_n) = 0$.

Ahora supongamos que $H \leq S(n)$ actúa transitivamente en $[n]$.

Si consideramos $p_1 : S(n-i) \times S(i) \to S(n-i)$ (la primera proyección), entonces por el teorema de descomposición para $G-$conjuntos de Mackey se tiene que:

$$Res_H^{S(n)} \circ Ind_{S(n-i,i)}^{S(n)} (p_1^*(b_{n-i})) =$$

$$= \sum_{HgS(n-i,i)} Ind_{H \cap gS(n-i,i)g^{-1}}^{H} \circ Res_{H \cap gS(n-i,i)g^{-1}}^{gS(n-i,i)g^{-1}} ({}^{g} (p_1^*(b_{n-i}))) =$$

$$= \sum_{HgS(n-i,i)} \sum_{U_i \leq H \cap gS(n-i,i)g^{-1}} \alpha_i \left[\frac{H}{U_i} \right] , \alpha_i \in \mathbb{Z} \; \forall i \tag{6.7}$$

Donde $HgS(n-i,i) \in H \backslash G / S(n-i,i)$ y $S(n-i,i)$ es el subgrupo de Young correspondiente a la partición $\{n-i,i\}$.

Por otro lado, si aplicamos la ecuación 6.4 en la identidad 6.7 se llega a lo siguiente:

$$\varphi_{[H]_{S(n)}} (b_{n-i} \bullet 1_i) = \varphi_{[H]_H} \left(Res_H^{S(n)} \circ Ind_{S(n-i,i)}^{S(n)} (p_1^*(b_{n-i})) \right) =$$

$$= \sum_{HgS(n-i,i)} \sum_{U_i \leq H \cap gS(n-i,i)g^{-1}} \alpha_i \, \varphi_{[H]_H} \left(\left[\frac{H}{U_i} \right] \right) \tag{6.8}$$

pero el inciso 4) de la proposición 1.1.23 nos dice que

$$\varphi_{[H]_H} \left(\left[\frac{H}{U_i} \right] \right) = 0, \forall U_i \leq H \cap gS(n-i,i)g^{-1},$$

pues $H \leq S(n)$ actúa transitivamente en $[n]$, luego entonces $n(H, U_i) = 0$.

Al substituir $\varphi_{[H]_H} \left(\left[\frac{H}{U_i} \right] \right) = 0$ en la igualdad 6.8 se obtiene

$$\varphi_{[H]_{S(n)}} (b_{n-i} \bullet 1_i) = 0$$

Pero $b_n = a_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i} \bullet 1_i$ por la proposición 5.2.7, por lo tanto al aplicarle marcas a b_n se tiene que:

$$\varphi_{[H]_{S(n)}} (b_n) = \varphi_{[H]_{S(n)}} \left(a_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i} \bullet 1_i \right) = \varphi_{[H]_{S(n)}} (a_n).$$

■

Proposición 6.3.3 *Una operación $\eta : A^{+} \longrightarrow A$ es aditiva si y sólo si para cualesquier m, n y para todo subgrupo U de $s(m) \times s(n)$, se tiene que*

$$\varphi_U(a_{m+n}) = \varphi_{p_1(U)}(a_m) + \varphi_{p_2(U)}(a_n).$$

Demostración. En efecto, por 5.3.10 η es aditiva si y sólo si, para cualesquier, m y n se tiene que

$$Res^{s(m+n)}_{s(m,n)}(a_{m+n}) = p_1^*(a_m) + p_2^*(a_n),$$

y por (4.2) esta pasa si y sólo si para todo subgrupo $U \leq s(m) \times s(n)$ se tiene que

$$\varphi_U(a_{m+n}) = \varphi_{p_1(U)}(a_m) + \varphi_{p_2(U)}(a_n).$$

■

Observación 6.3.4 *Sea $U \leq s(n)$, entonces U actúa en $[n]$ y así $[n] = P_1 \coprod ... \coprod P_k$, donde P_i son las órbitas en U. Luego si $|P_i| = l_i$, entonces $U \leq s(l_1) \times ... \times s(l_k) \leq s(n)$.*

Teorema 6.3.5 *Con la notación de la observación anterior, tenemos que*

$$\varphi_U(a_n) = \varphi_{p_1(U)}(b_{l_1}) + ... + \varphi_{p_k(U)}(b_{l_k}),$$

$\varphi_{p_1(U)}(b_{l_1})$*donde $p_i : s(l_1) \times ... \times s(l_k) \longrightarrow s(l_i)$ es la i-ésima proyección.*

Demostración. En efecto, tenemos por la observación anterior que

$$\varphi_U(a_n) = \varphi_{p_1(U)}(a_{l_1}) + ... + \varphi_{p_k(U)}(a_{l_k}).$$

Además, U es transitivo en P_i, por lo que $p_i(U)$ es transitivo en P_i. Entonces por el teorema 6.3.2 tenemos que $\varphi_{p_i(U)}(a_{l_i}) = \varphi_{p_i(U)}(b_{l_i})$, para $1 \leq i \leq k$, en consecuencia

$$\varphi_U(a_n) = \varphi_{p_1(U)}(b_{l_1}) + ... + \varphi_{p_k(U)}(b_{l_k}).$$

■

6.4 No existen endomorfismos con desarrollo de Taylor finito.

Teorema 6.4.1 *Sea θ un endomorfismo natural de el funtor anillo de Burnside. Si θ no es el endomorfismo natural identidad, entonces θ tiene desarrollo de Taylor infinito.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{k=0}^{\infty} F(b_k)$, donde $b_k \in A(s(k))$, es la sucesión asociada a θ. Como θ no es el endomorfismo identidad, se deduce que existe un b_k diferente de cero y de la identidad en $A(s(1))$. Entonces, por el teorema 6.3.2, existe un subgrupo U de $s(k)$ transitivo en $[k]$, tal que $\varphi_U(a_k) \neq 0$. Sea f el homomorfismo de grupos definido en 5.4.1, entonces definamos $U \dot{\times} U$, como $f(U \times U)$. Haciendo uso de 1.2.16 y de 5.4.5 se tiene que

$$\varphi_{U \dot{\times} U}(a_{k^2}) = \varphi_{U \times U}(f^*(a_{k^2})) = \varphi_{U \times U}(p_1^*(a_k) \smile p_2^*(a_k)),$$

pero por el lema 6.2.3, se concluye

$$\varphi_{U \times U}(p_1^*(a_k) \smile p_2^*(a_k)) = \varphi_U(a_k)\,\varphi_U(a_k),$$

puesto que $\varphi_U(a_k) \neq 0$, entonces $\varphi_{U \dot{\times} U}(a_{k^2}) \neq 0$, pero $U \dot{\times} U$ es transitivo en $[k^2]$, por lo tanto haciendo uso del teorema 6.3.2, se observa que $\varphi_{U \dot{\times} U}(a_{k^2}) = \varphi_{U \dot{\times} U}(b_{k^2}) \neq 0$, por lo tanto $b_{k^2} \neq 0$. ■

Apéndice A

Programas

0En este apéndice proponemos algúnos programas hechos en GAP 4 ([BrSt], [GAP1], [GAP2]) para facilitarle al lector de esta tesis algúnos cálculos referentes a anillos de Burnside y a endomorfismos naturales del funtor anillo de Burnside.

```
#------------------------------------------------
#En esta parte se declaran las variables globales
#-----------------------------------------------
#Se fija un grupo finito de permutaciones G.
#En este caso consideraremos al grupo de simetrías
#en tres símbolos (SymmetricGroup(3)).
BindGlobal(''g'',SymmetricGroup(3));
#Se crean las variables referentes a la tabla de
#marcas del grupo SymmetricGroup(3).
BindGlobal(''tm'',TableOfMarks(g));
BindGlobal(''gen'',TransposedMat(MatTom(tm)));
BindGlobal(''sgen'',Size(gen));
#-----------------------------------------------
#En esta parte se definen funciones, para verificar
#si un elemento esta en A(g) o en el encaje de A(g)
#en Z^(n), al cual llamaremos AZ(g) donde
#g:=SymmetricGroup(3).
#-----------------------------------------------
#Este procedimiento verifica si un elemento en Z^(n),
#también es elemento de AZ(g).
EsElementoDeAZ:=function(x)
```

```
 #x es una lista con entradas en los enteros
 #de longitud sgen.
  local tt,i,st,vv,uu,gr;
  gr:=ValueGlobal(''gen'');
  tt:=List(Inverse(gr)*x![1],IsInt);
  st:=Size(tt);
  uu:=true;
  for i in [1..st] do
     vv:=tt[i];
     uu:=uu and vv;
  od;
  return uu;
 end;
 #Este procedimiento verifica si los elementos de
 #la lista de coeficientes de un elemento en A(g)
 #son enteros.
 EsElementoDeA:=function(x)
 #Una lista de longitud sgen.
  local tt,i,st,vv,uu;
  st:=Size(x);
  tt:=List(x,IsInt);
  uu:=true;
  for i in [1..st] do
     vv:=tt[i];
     uu:=uu and vv;
  od;
  return uu;
 end;
 #-------------------------------------------
 #En esta parte se declara a AZ(SymmetricGroup(3))
 #como dominio en GAP.
 #-------------------------------------------
 DeclareCategory(''IsMyObject'',IsObject);
 DeclareRepresentation(''IsMyObjectListRep'',
  IsPositionalObjectRep,[1]);
 MyType:= NewType(NewFamily(''MyFamily''),
  IsMyObject and IsMyObjectListRep);
 MyObject:= val -> Objectify(MyType,
```

```
 [Immutable(val)]);
InstallMethod(ViewObj,
 ''Visualiza un objeto en 'IsMyObject'.'',
 true,
 [IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
 function(obj)
 if EsElementoDeAZ(obj)=true then
    Print(''<'',obj![1],''>'');
 else
    Print(fail);
 fi;
 end
);
InstallMethod(PrintObj,
 ''Imprimir un objeto en 'IsMyObject'.'',
 true,
 [IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
 function(obj)
 if EsElementoDeAZ(obj)=true then
    Print(''MyObject('',obj![1],'')'');
 else
    Print(fail,''\n'');
 fi;
 end
);
#-----------------------------------------------
#En esta sección se define la estructura
#multiplicativa de AZ(g).
InstallOtherMethod(\*,
 ''Definición del producto en AZ(g)'',
 true,
 [IsMyObject and IsMyObjectListRep,
 IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
 function(x,y)
 local a,i;
 if (EsElementoDeAZ(x) and EsElementoDeAZ(y))=true then
    a:=[];
    for i in [1..Size(x![1])] do
```

```
      a[i]:=x![1][i]*y![1][i];
    od;
    return MyObject(AsList(a));
 else
    return fail;
 fi;
 end
);
InstallTrueMethod(IsMultiplicativeElement,IsMyObject);
InstallOtherMethod(OneOp,
 ''Definición del neutro multiplicativo, en AZ(g)'',
 true,
 [IsMyObject and IsMyObjectListRep], 0,
 a -> MyObject(List([1..sgen],i->1)));
InstallTrueMethod( IsMultiplicativeElementWithInverse,
 IsMyObject );
#--------------------------------------------
#En esta sección se define la estructura aditiva de AZ(g).
InstallOtherMethod(\+,
 ''Define la suma en AZ(g).'',
 true,
 [IsMyObject and IsMyObjectListRep,
 IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
 function(x,y)
 local a,i;
 if (EsElementoDeAZ(x) and EsElementoDeAZ(y))=true then
    a:=[];
    for i in [1..Size(x![1])] do
       a[i]:=x![1][i]+y![1][i];
    od;
    return MyObject(AsList(a));
 else
    return fail;
 fi;
 end
);
InstallTrueMethod(IsAdditiveElement,IsMyObject);
InstallOtherMethod(ZeroOp,
```

```
  ''Definición del neutro aditivo, en AZ(g).'',
  true,
  [IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
  a -> MyObject(List([1..sgen],i->0)));
 InstallTrueMethod(IsAdditiveElement, IsMyObject );
 InstallOtherMethod(AdditiveInverseOp,
  ''Crea el inverso aditivo para algún elemento en AZ(g).'',
  true,
  [IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
  function(x)
  if EsElementoDeAZ(x)= true then
     return(MyObject(-1*x![1]));
  else
     return fail;
  fi;
  end
 );
 InstallTrueMethod(IsAdditiveElementWithInverse, IsMyObject);
 MyType:= NewType(NewFamily(''MyFamily''),
  IsMyObject and IsMyObjectListRep);
 #----------------------------------------
 #En esta sección se da un procedimiento para verificar si
 #dos elementos en AZ(g), son iguales.
 InstallOtherMethod(\=,
  ''Verifica si dos elementos en AZ(g), son iguales'',
  true,
  [IsMyObject and IsMyObjectListRep,
  IsMyObject and IsMyObjectListRep],0,
  function(x,y)
     return x![1]=y![1];
  end
 );
 #==============
 #Ejemplo:
 #gap> a:=MyObject([3,1,0,0]); b:=MyObject([2,0,2,0]);
 #<[ 3, 1, 0, 0 ]>
 #<[ 2, 0, 2, 0 ]>
 #gap> a*(b+a);
```

```
#<[ 15, 1, 0, 0 ]>
#===============
#---------------------------------------------
#En esta parte se definen algúnas funciones referentes tanto
#a A(G) como a AZ(G).
#---------------------------------------------
#---------------------------------------------
#En esta sección se definen funciones para convertir
#elementos de A(g) en elementos de AZ(g) y viceversa.
#Este procedimiento convierte un elemento de A(g) en un
#elemento de AZ(g).
####NOTA####
#En este programa los elementos del anillo de Burnside se
#van a dar como una lista, donde cada elemento de la lista
#es el coeficiente correspondiente a un g-conjunto
#transitivo. El orden total de los g-conjuntos transitivos
#es establecido por la instrucción de GAP
#List([1..Size(m)],i->RepresentativeTom(qq,i));.
AaAZ:=function(pp)
#pp un elemento de A(g).
 if EsElementoDeA(pp)=true then
    return MyObject(gen*pp);
 else
    return fail;
 fi;
end;
#Este procedimiento convierte un elemento de AZ(g) en un
#elemento de A(g).
AZaA:=function(x)
#x un elemento de AZ(g).
 if EsElementoDeAZ(x)=true then
    return Inverse(gen)*x![1];
 else
    return fail;
 fi;
end;
#===============
#Ejemplo:
```

```
#gap> a:=AaAZ([1,1,1,2,6,-1,8,2,1]);
#<[ 261, 25, 6, 9, 21, 0, 9, 3, 1 ]>
#gap> AZaA(a);
#[ 1, 1, 1, 2, 6, -1, 8, 2, 1 ]
#===============
#----------------------------------------------
#En esta sección se definen algunas funciones referentes
#a las clases de conjugacion de subgrupos de algún grupo G.
#La siguiente función genera una lista de todos los repre-
#sentantes de las clases de conjugancia de subgrupos de G.
####NOTA####
#El orden que le da esta función a las clases de conjugancia
#de subgrupos de un cierto grupo, es el orden total
#considerado en su tabla de marcas.
cc:=function(x)
#x es algún grupo.
 local i,a,ct;
 a:=[];
 ct:=TableOfMarks(x);
 for i in [1..Size(MatTom(ct))] do
    a[i]:=RepresentativeTom(ct,i);
 od;
 return AsList(a);
end;
#Esta función localiza la posición de un representante de
#la clase de conjugancia de algún subgrupo de G en la lista
#dada por la función cc.
EncEcc:=function(g,x,dd)
#g es algún grupo.
#x algún subgrupo de g.
#dd la lista dada por la función cc.
 local a,b,i,j,u;
 a:=List(ConjugacyClassSubgroups(g,x));
 for i in [1..Size(a)] do
    u:=Position(dd,a[i]);
    if u<>fail then
       return u;
    fi;
```

```
 od;
end;
#================
#Ejemplo:
#gap>a:=cc(AlternatingGroup(5));
#[ Group(()), Group([ (2,3)(4,5) ]),
#  Group([ (3,4,5) ]),
# Group([ (2,3)(4,5), (2,4)(3,5) ]),
# Group([ (1,2,3,4,5) ]),
# Group([ (3,4,5), (1,2)(4,5) ]),
#  Group([ (1,2,3,4,5), (2,5)(3,4) ]),
# Group([ (2,3)(4,5), (2,4)(3,5), (3,4,5) ]),
#  Alt( [ 1 ..  5 ] ) ]
#gap> EncEcc(AlternatingGroup(5),Group((1,4,2)),a);
#3
#================
#-------------------------------------------------
#En esta sección se define una función que genera los
#idempotentes primitivos y ortogonales de AZ(g) y de A(g),
#como un Record de GAP.
IdAZA:=function(tg)
#tabla de marcas de un grupo g.
 local bAZ,e,c;
 e:=IdempotentsTomInfo(tg);
 bAZ:=List(e.fixpointvectors, MyObject);
 c:=List(bAZ,AZaA);
 return rec(IdempEnAZ:=bAZ,IdempEnA:=c);
end;
#================
#Ejemplo:
gap> a:=IdAZA(TableOfMarks(AlternatingGroup(5)));;
gap> a.IdempEnAZ;
[ <[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0 ]>,
<[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]> ]
gap> a.IdempEnA;
[ [ 1, -2, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0 ],
[ -1, 2, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 1 ] ]
#================
```

```
#-----------------------------------------------
#En esta seccion se definirán las funciones Res e Ind
#para elementos de A(G).
#Definición de la restricción.
Res:=function(gr,sgr,ele,tmgr,tmsgr)
#gr grupo.
#sgr subgrupo de gr.
#ele elemento de A(G).
#tmgr tabla de marcas de gr.
#tmsgr tabla de marcas de sgr.
 local i,a,d,ggm,j,sigr,ssgr,ui,ggsm,k,uj,aj,ee;
 sigr:=Size(gr);
 ssgr:=Size(sgr);
 if IsSubgroup(gr,sgr)=false then
    return fail;
 else
    if ssgr=sigr then
       return ele;
    else
       ggm:=TransposedMat(MatTom(tmgr));
       ggsm:=TransposedMat(MatTom(tmsgr));
       d:=ggm*ele;
       a:=[];
       ee:=[];
       for i in [1..Size(ggm)] do
          a[i]:=RepresentativeTom(tmgr,i);
       od;
       aj:=AsList(a);
       uj:=[];
       for j in [1..Size(ggsm)] do
          uj[j]:=RepresentativeTom(tmsgr,j);
       od;
       ui:=AsList(uj);
       for k in [1..Size(ggsm)] do
          ee[k]:=d[EncEcc(gr,ui[k],aj)];
       od;
    fi;
 fi;
```

```
return Inverse(ggsm)*AsList(ee);
end;
#Esta función genera una lista de logitud me
#que lleva al escalar ec en la posición k
#y el resto de las posiciones tiene valor cero.
eles:=function(k,me,ec)
 local aa;
 aa:=IdentityMat(me);
 return ec*aa[k];
end;
#Esta función aplica la inducción a un elemento
#de A(G).
Ind:=function(sgr,gr,ele,tmsgr,tmgr)
#gr grupo.
#sgr subgrupo de gr.
#ele elemento de A(G).
#tmgr tabla de marcas de gr.
#tmsgr tabla de marcas de sgr.
 local a,i,ggm,aj,uj,ui,j,ggsm,ee,ed,ff,k;
 if IsSubgroup(gr,sgr)=false then
    return fail;
 else
    ggm:=TransposedMat(MatTom(tmgr));
    ggsm:=TransposedMat(MatTom(tmsgr));
    a:=[];
    for i in [1..Size(ggm)] do
       a[i]:=RepresentativeTom(tmgr,i);
    od;
    aj:=AsList(a);
    uj:=[];
    for j in [1..Size(ggsm)] do
       uj[j]:=RepresentativeTom(tmsgr,j);
    od;
    ui:=AsList(uj);
    ee:=[];
    ed:=0*[1..Size(ggm)];
    for k in [1..Size(ggsm)] do
       ee[k]:=eles(EncEcc(gr,ui[k],aj),Size(ggm),ele[k]);
```

```
    od;
    ff:=AsList(ee);
 fi;
return Sum(ff);
end;
#===============
#Ejemplo:
#gap> Res(SymmetricGroup(4),SymmetricGroup(3),
#> [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
#> TableOfMarks(SymmetricGroup(4)),
#> TableOfMarks(SymmetricGroup(3)));
#[ 4, 0, 0, 0 ]
#gap> Ind(SymmetricGroup(3),SymmetricGroup(4),
#> [4,0,0,0],
#> TableOfMarks(SymmetricGroup(3)),
#> TableOfMarks(SymmetricGroup(4)));
#[ 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
#===============
#----------------------------------------
#En esta parte se definen los endomorfismos naturales del
#funtor anillo de Burnside, en GAP.
#----------------------------------------
#Esta función calcula el residuo perfecto de un grupo.
EndRePerf:=function(x)
#x un grupo.
 return PerfectResiduum(x);
end;
#Esta función calcula el p-subgrupo de Sylow de un grupo.
EndSy:=function(x,p)
#x un grupo.
#p un número primo.
 return SylowSubgroup(x,p);
end;
#Si una lista x esta contenida en una lista ll entonces
#esta función crea una lista de longitud Size(ll) que
#contiene unos en las posiciones donde se encontraban
#los elementos de x en ll y ceros en los que no.
#en un cierto vector.
```

```
ConCL:=function(x,ll)
#x lista.
#ll es una lista tal que x esta contenida en ll.
 local a,b,i,c,j;
 a:=Size(x);
 b:=List([1..Size(x)],i->Position(ll,x[i]));
 c:=[];
 for i in [1..Size(ll)] do
    if (i in b)=true then
       c[i]:=1;
    else
       c[i]:=0;
    fi;
 od;
return AsList(c);
end;
#Esta función evalúa un endomorfismo natural de A(_)
#correspondiente a EndRePerf o a la función EndSy en un
#idempotente primitivo y ortogonal del álgebra de
#Burnside de A(G) para algún grupo G.
EvalEndId:=function(gr,tgr,qq,opti,pri)
#gr grupo.
#tgr tabla de narcas de gr.
#qq idempotente primitivo y ortogonal en el álgebra.
#de Burnside de A(gr).
#opti=1 si tomamos el endomorfimo natural de A(_)
#asociado a EndSy(_,pri) y opti=2 si es el asociado
#a EndRePerf.
 local a,ed,FpEndSy,FpEndRePerf;
 a:=Size(MatTom(tgr));
 ed:=List([1..a],i->RepresentativeTom(tgr,i));
 FpEndRePerf:=function(pp)
    return IsConjugate(gr,EndRePerf(pp),
                 ed[Position(qq,1)]);
 end;
 FpEndSy:=function(p)
    return IsConjugate(gr,EndSy(p,pri),
                ed[Position(qq,1)]);
```

```
 end;
 if opti=1 then
    if Size(Filtered(ed,FpEndSy))<>0 then
       return ConCL(Filtered(ed,FpEndSy),ed);
    else
       return 0*[1..a];
    fi;
 else
    if Size(Filtered(ed,FpEndRePerf))<>0 then
       return ConCL(Filtered(ed,FpEndRePerf),ed);
    else
       return 0*[1..a];
    fi;
 fi;
end;
#Esta función evalúa en x ( x elemento de A(G))
#al endomorfismo natural de A(_) correspondiente a EndSy si
#opci=1 o a EndRePerf si opci=2.
EvalEnd:=function(gg,tgg,x,opci,pri)
#gg un grupo.
#tgg tabla de marcas de gg.
#x elemento en A(gg).
#opci elemento de {1,2}.
#pri un número primo.
 local ma,b,c,sa,i;
 ma:=TransposedMat(MatTom(tgg));
 b:=ma*x;
 c:=[];
 sa:=Size(ma);
 for i in [1..sa] do
    c[i]:=b[i]*EvalEndId(gg,tgg,eles(i,sa,1),opci,pri);
 od;
return Inverse(ma)*Sum(AsList(c));
end;
#===============
#Ejemplo:
#gap> EvalEnd(AlternatingGroup(5),
#> TableOfMarks(AlternatingGroup(5)),
```

```
#> [0,0,0,0,0,0,0,0,1],
#> 2,2);
#[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]
#===============
#Esta función calcula los elementos an´s de un endomorfismo
#natural asociado a EndSy si opci=1 o a EndRePerf si opci=2.
an:=function(n,opci,pri)
#n un número natural.
#opci elemento del conjunto {1,2}.
#pri un número primo.
 local sn,tsn,stm,ed,ff,snm;
 sn:=SymmetricGroup(n);
 snm:=AsSubgroup(sn,SymmetricGroup(n-1));
 tsn:=TableOfMarks(sn);
 stm:=Size(MatTom(tsn));
 ed:=List([1..stm],i->RepresentativeTom(tsn,i));
 ff:=eles(EncEcc(sn,snm,ed),stm,1);
return rec(CoefEnA:=EvalEnd(sn,tsn,ff,opci,pri),TM:=tsn);
end;
#Esta función calcula los elementos bn´s de un endomorfismo
#natural asociado a EndSy si opci=1 o a EndRePerf si opci=2.
bn:=function(pp,qq,n)
#n el número dado en an.
#pp es el objeto dado por an(n,opci,pri).CoefEnA.
#qq es el objeto dado por an(n,opci,pri).TM.
 local i,a,ed,m,rr;
 m:=TransposedMat(MatTom(qq));
 rr:=m*pp;
 a:=[];
 ed:=List([1..Size(m)],i->RepresentativeTom(qq,i));
 for i in [1..Size(m)] do
 if IsTransitive(ed[i],[1..n])=true then
    a[i]:=rr[i];
 else
    a[i]:=0;
 fi;
 od;
return Inverse(m)*AsList(a);
```

```
end;
#===============
#Ejemplo:
#gap> a:=an(6,1,2);;
#gap> a.CoefEnA;
#[ 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1,
#    0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
# 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
#    0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0,
# 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0 ]
#gap> bn(a.CoefEnA,a.TM,6);
#[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
#0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
# 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
#0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
# 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
#===============
```

Índice de Materias

Bibliografía

[Bl] A. Blass, Natural endomorphisms of Burnside rings, Trans. Amer. Math. Soc. 253(1979)121-137.

[Bo] N. Bourbaki, Elements of mathematics, commutative algebra, chapters 1-7, Springer Verlag, (1989).

[BrSt] B. Thomas and S. Linton, The GAP 4 type system organizing algebraic algorithms, http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~gap/Info/talks.html.

[Cu 1] C. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation theory I, Wiley, New York, (1981).

[Cu 2] C. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation theory II, Wiley, New York, (1987).

[Di] T. tom Dieck, Transformation Groups, de Gruyter Studies in Mathematics 8, (1987).

[Dr] A. Dress, A characterization of solvable groups, Math. z. 110 (1969), 213-217.

[Fra] J.B. Fraleigh, A first course in abstract algebra, third edition, Addison Wesley, (1982).

[GAP1] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap.

[GAP2] The GAP Group. GAP-Groups, Algorithms and Programming, Version 4. Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany and School of Mathematical and Computational Sciences, U. St. Andrews, Scotland,1997.

[Ja] N. Jacobson, Basic Algebra I, second edition, W. H. Freeman and Company, (1985).

[Ka] G. Karpilovsky, Group Representations IV, North-Holland, Mathematics studies, 182 (1995).

[Ke 1] James, Gordon y Kerber, Adalbert, The representation theory of the simmetric group. Encyclopedia of Math.,Vol 16, Addison-Wesley, (1981).

[Ke 2] A. Kerber, Representations of permutation groups I, Lecture Notes in Mathematics 746 , Springer Verlag, (1979).

[Ro] J. Rotman, An introduction to the theory of groups, Springer Verlag, (1995).

[Row] Luis H. Rowen, Ring theory vol 1, Academic Press, (1988).

[Sta] Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics Vol. 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49, (1997).

[Va1] E. Vallejo. Polynomial operations from Burnside ring and stable cohomotopy, dissertation Heidelberg University,December, (1987).

[Va2] E. Vallejo. Polynomial operations from Burnside ring to representation functors, J. Pure Appl. Algebra,65(1990) 163-190.

[Yo] T. Yoshida, Idempotents of Burnside Ring and Dress Induction Theory, J. Algebra, 80 (1983) 90-105.