



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRIGONOMETRIA DE TRIANGULOS
HIPERBOLICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
ALEJANDRO MOZO CRUZ



DIRECTOR DE TESIS: DR ANTONIO LASCURAIN ORIVE



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

297684



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
 REPUBLICA NACIONAL
 ESTADÍSTICA DE
 MEXICO

EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
 a de la División de Estudios Profesionales de la
 Facultad de Ciencias
 presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

TRIGONOMETRIA DE TRIANGULOS HIPERBOLICOS

Elaborado por MOZO CRUZ ALEJANDRO

Identificación número de cuenta 08918153-7, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

Propietario DR. GUILLERMO JAVIER SIENRA LOERA

Propietario M. en C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ

Propietario M. en C. MARIA DEL PILAR MARTINEZ TELLEZ

Propietario DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO.

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Índice General

	iii
	v
Agradecimientos	vii
Introducción	ix
1 Preliminares	1
1.1 $PSL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{R})$	1
1.2 Densidades	3
1.3 Transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n	9
2 Métrica hiperbólica	13
2.1 Distancia y área hiperbólica	13
2.2 Las geodésicas	24
2.3 Isometrías	25
3 Convexidad	29
3.1 Modelo de Klein	29
3.2 Conjuntos convexos	30
4 Triángulos	39
4.1 Triángulos	39
4.2 El ángulo de paralelismo	42
4.3 Triángulos con un vértice al infinito	44
4.4 Triángulos con ángulos rectos	45
4.5 Ley de los senos y cosenos	49
4.6 Área de un triángulo	53
4.7 Círculo inscrito	57

“ Aquietate! – y SABE, – YO SOY – DIOS”.
Vida Impersonal.

A mis padres Gonzalo e Isabel, por su paciencia,
apoyo y comprensión.

A mis hermanas Cristina, Elvia y Gisela,
por confiar en mí.

A mi cuñado Daniel y a mis sobrinas Katy y Any.

A mis abuelos, tíos y primos.

A Gabriela, TE AMO.

Agradecimientos

Doy gracias a la Máxima casa de estudios de México, la UNAM y al Dr. Antonio Lascurain Orive, por su tiempo, dedicación y sus valiosas sugerencias para la realización del presente trabajo.

También quiero agradecer al Dr. Guillermo Sienna, al M. en C. Francisco Struck, Dr. Oscar Palmas y a la M. en C. Pilar Martínez por sus comentarios y sugerencias a este trabajo. En particular quiero agradecer a la M. en C. Pilar Martínez ya que gracias a ella tuve mi primer acercamiento a la geometría hiperbólica. Por otra parte también quiero expresar un reconocimiento sincero para Emilio Cabrera Castro por todo el apoyo que me brindo a lo largo de mi carrera.

A mis compañeros de la facultad "los pencas": Maggi, Liliana, Alexzina, Fernando y en especial a José Miguel Aguilar Alvarado por todo su apoyo, sinceridad y sencillez. Además de Juan, Hugo, Ricardo, Elsa, Griselda, Oscar, Ulises, Judith, Emilio, Lety.

A Francisco por toda la infinita paciencia, amistad y comprensión que ha mostrado a lo largo de todos estos años de auto-actualización y crecimiento, GRACIAS. A mis compañeros de IACOMESI, A. C.: Carmen, Vero, Paty, Tom, Ruben, Delfi, Martha, por esas largas horas de retroalimentación, diversión y crecimiento humanista, en especial al Honorable grupo de Instructores de Auto-Control Mental, Crecimiento Humanista, Religión y Vida impersonal, VAMOS ADELANTE.

A mis compañeros de UNIVERSUM: Manuel, Julio, Iván, Felipe, Ramón, Reyna, Irma, Miguel, Mary, Carlitos, Hector, Maricelita y toda la interminable lista de divulgadores, todavía recuerdo aquellas fiestas a morir.

No puedo dejar de mencionar a mis amigos y maestros de la Secundaria Of. # 20, "Niños Heroes": a las profesoras Guadalupe, Bellermina y Andrómeda porque gracias a ellas le encuentre el gusto a las Matemáticas, Ciencias Naturales y a la Historia, a mis amigos Hector Martín, Edgar, Aurora, Ana, Aris, Elvira y su hermana, Edgar Gerardo, Gaby, porque seguimos unidos y expresando ese sentimiento de camaradería. No quiero dejar en el olvido a Ernesto, Ángel, Francisco Benitez, Pepe, La "Fierros", Lalo y Carlos, Norma, Paty, la maestra Martha y su hermano Armando y todos aquellos que hicieron de esa etapa de mi vida de lo más agradable y maravillosa.

A mis amigos Chano, Ricardo, Miguel, por esos momentos agradables que pasamos juntos. También quiero agradecer a las amigas de Gaby la amistad

que han compartido conmigo, en particular a Elia, Jaina, Angélica, Alejandra y David.

A mis amigas del Consejo Juvenil: Rosy, Lety, Aris, Arby, Gris.

En todo caso quiero decir.... **SIMPLEMENTE GRACIAS.**

Introducción

En esta tesis se estudian principalmente las relaciones geométricas entre los ángulos y los lados de los triángulos hiperbólicos en el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

y en el disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Primeramente se desarrollan múltiples fórmulas de distancia y área hiperbólica (teoremas 2.1.1, 2.1.3 y 2.1.4), en ambos modelos usando las densidades hiperbólicas, así como la descripción de las isometrías (teorema 2.3.1), las geodésicas (teorema 2.2.1) y los círculos hiperbólicos (teorema 1.2.5).

Posteriormente se desarrollan propiedades de convexidad, usando el modelo de Klein, uno de los principales resultados (válido también en geometría Euclídea) demuestra que: Un conjunto cerrado es convexo si y sólo si es conexo y localmente convexo (teorema 3.2.2).

Para los triángulos hiperbólicos se prueban entre otros resultados, las ecuaciones de paralelismo (teorema 4.2.1), las relaciones de lados y ángulos en triángulos con un vértice al infinito (teorema 4.3.1), el teorema de Pitágoras hiperbólico (teorema 4.4.1), la ley hiperbólica de los senos y los cosenos (teorema 4.5.1), así como la fórmula de Gauss Bonnet (teorema 4.6.1).

Finalmente se demuestra otro de los principales resultados que exhibe una fórmula del radio hiperbólico del círculo inscrito en un triángulo hiperbólico en términos de una expresión simétrica de los ángulos del triángulo (teorema 4.7.2).

En [8] se puede consultar un tratamiento de la trigonometría hiperbólica usando el modelo del hiperboloide, cuyo grupo de isometrías es el de Lorentz.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 $PSL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{R})$

El grupo de transformaciones de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $ad-bc \neq 0$ es llamado el grupo de transformaciones de Möbius. Los coeficientes a, b, c, d están determinados salvo algún factor distinto de cero, es decir, si $ad-bc = k$, entonces la transformación T también se puede expresar como

$$z \rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}} + \frac{d}{\sqrt{k}}},$$

y en este caso $\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1$, por lo que se puede suponer que $ad-bc = 1$.

El grupo de matrices de 2×2 con entradas complejas y determinante 1 se denota por $SL(2, \mathbb{C})$ (Grupo Especial Lineal).

Se define la proyectivización del subgrupo $SL(2, \mathbb{C})$ como el cociente $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su centro $\pm Id$. Este grupo denotado por $PSL(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius, que provisionalmente denotamos por $\mu_{\mathbb{C}}$, esto se sigue ya que el producto de matrices se corresponde a la composición de transformaciones cf. [1] pág. 77 y por el primer teorema de isomorfismos [4] pág. 80.

$$\begin{array}{ccc} \pm Id \mapsto SL(2, \mathbb{C}) & \twoheadrightarrow & PSL(2, \mathbb{C}) \\ & \searrow \cong & \\ & & \mu_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Con base en esto identificaremos el grupo de las transformaciones de Möbius con $PSL(2, \mathbb{C})$.

Si T es de Möbius entonces T es composición de rotaciones, traslaciones, homotecias y $z \rightarrow \frac{1}{z}$ ya que si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, si $c = 0$, entonces T es la

transformación

$$z \rightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

que es claramente composición de las transformaciones descritas y si $c \neq 0$ entonces T es la transformación

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

Una propiedad fundamental de las transformaciones de Möbius es que dados 3 puntos distintos z_1, z_2, z_3 y otros 3 puntos distintos w_1, w_2, w_3 existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_i) = w_i$, cf. [5] pág. 23.

Denotaremos "círculos" para círculos y rectas. Las transformaciones de Möbius transforman "círculos" en "círculos" cf. [1] pág. 80.

Las transformaciones de Möbius se clasifican por sus puntos fijos, si $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ fija un punto entonces a T se le llama *parabólica*, si $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ es tal que fija exactamente 2 puntos, T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la transformación $S(z) = \alpha z$:

- a) Si $|\alpha| = 1$ se le llama *elíptica*.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se le llama *hiperbólica*.
- c) Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se le llama *loxodrómica*.

Si $\mu_{\mathbb{R}}$ denota el subgrupo de transformaciones de Möbius determinada por $SL(2, \mathbb{R})$, (el grupo de matrices de 2×2 con entradas reales y determinante 1) se tiene como en el caso de $SL(2, \mathbb{C})$ (usando el primer teorema de isomorfismos)

que $PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\pm Id} \simeq \mu_{\mathbb{R}}$, por lo que identificamos de ahora en adelante este subgrupo con $PSL(2, \mathbb{R})$.

$$\pm Id \mapsto SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

$$\searrow \simeq$$

$\mu_{\mathbb{R}}$

Teorema 1.1.1 *El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ consiste de las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{H}^2 .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, entonces $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. Ahora como

$$Im T(i) = Im \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = Im \left(\frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} = \frac{1}{c^2 + d^2} > 0$$

y por conexidad y continuidad se concluye que T preserva \mathbb{H}^2 .

Ahora sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, $T(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$ y sea $\bar{T}(z) = \frac{\bar{a}'z + \bar{b}'}{\bar{c}'z + \bar{d}'}$, entonces T y \bar{T} coinciden en la recta real y por lo tanto son iguales, ya que si $z \in \mathbb{R}$

$$T(z) = \overline{\bar{T}(z)} = \bar{T}(\bar{z}) = \bar{T}(z)$$

entonces $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$ o $a' = -a$, $b' = -b$, $c' = -c$, $d' = -d$ en el primer caso ya terminamos, de otra manera

$$Im T(i) = Im \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = Im \left(\frac{(ai + b)(-\bar{c}'i + \bar{d}')}{|ci + d|^2} \right) = \frac{-(\bar{a}'\bar{d}' - b'c')}{|ci + d|^2} < 0$$

lo cual es una contradicción ya que T preserva \mathbb{H}^2 . □

1.2 Densidades

Primero extenderemos el concepto de conformalidad de la variable compleja a cualquier dimensión.

Definición 1 Sea A abierto en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, se dice que f es conforme en $x_0 \in A$ si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por la matriz kI , $k \in \mathbb{R}^+$. Al número k se le llama factor de conformalidad y se le denota por $\mu(x_0)$.

Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dada una densidad λ en una región A y γ una curva de clase C^1 en A se define la λ -longitud de γ como:

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Esta definición se extiende de la manera usual a curvas de clase C^1 por tramos.

Definición 2 Sea λ una densidad en una región A , $z_1, z_2 \in A$, se define la distancia $\rho_\lambda(z_1, z_2)$ como

$$\rho_\lambda(z_1, z_2) = \inf_\gamma l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Resulta que la distancia ρ_λ define una métrica en A . cf. [2] pág 7. Nuestro principal ejemplo es el plano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | Im z > 0\}$ con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{Im z},$$

éste es el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama *la métrica hiperbólica*.

Exhibimos ahora un segundo modelo del plano hiperbólico, para esto probamos primero algo más general: Dadas A, B regiones en \mathbb{R}^n , $f: A \rightarrow B$ una biyección conforme y $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ una densidad, se define una densidad σ en B de tal manera que f sea una isometría, σ está dada por

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}, \quad (1.1)$$

donde $\mu(x)$ es el factor de conformalidad de f en x . Para probar que f es una isometría sea $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curva de clase C^1 entonces

$$l_\sigma(f \circ \gamma) = \int_a^b |(f \circ \gamma)'(t)| \sigma(f \circ \gamma(t)) dt = \int_a^b \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))} dt = l_\lambda(\gamma).$$

Esta observación implica de manera inmediata que $f: A \rightarrow B$ es una isometría de A con la densidad λ y B con la densidad σ .

Este hecho nos permite derivar una densidad en $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ de tal manera que el disco unitario sea el segundo modelo del plano hiperbólico. Con este objetivo sea $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ dada por

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

no es difícil probar que f es una biyección conforme de \mathbb{H}^2 en Δ , cf. [7] pág. 364, ahora

$$f^{-1}(w) = \frac{iw+i}{-w+1}, \quad f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

y $\mu(z) = |f'(z)|$ por lo cual $\mu(z) = \frac{2}{|z+i|^2}$ y podemos definir σ usando 1.1, entonces

$$\sigma(w) = \frac{\lambda(f^{-1}(w))}{\mu(f^{-1}(w))} = \frac{|f^{-1}(w)+i|^2}{2\text{Im}f^{-1}(w)} = \frac{(|1-w|^2) \left| \frac{iw+i}{1-w} + i \right|^2}{2(1-|w|)} = \frac{2}{1-|w|^2},$$

ya que

$$\text{Im}[f^{-1}(w)] = \text{Re}\left[\frac{w+1}{1-w}\right] = \text{Re}\left[\frac{(w+1)(1-\bar{w})}{|1-w|^2}\right] = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}.$$

De esta manera Δ es un segundo modelo del plano hiperbólico con la densidad $\sigma(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ y $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ es una isometría que llamamos *hiperbólica*.

Teorema 1.2.1 *El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $ad - bc = 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(z) &= \operatorname{Im} \left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} = \operatorname{Im} z \cdot |T'(z)| = \operatorname{Im} z \cdot \mu(z). \end{aligned}$$

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una curva de clase C^1 la longitud hiperbólica $l_h(T \cdot \gamma)$ está dada por

$$\begin{aligned} l_h(T \cdot \gamma) &= \int_a^b \frac{|(T \cdot \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}(T \cdot \gamma)(t)} dt = \int_a^b \frac{|T'(\gamma(t))\gamma'(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t) \cdot \mu(\gamma(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{\mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)|}{\mu(\gamma(t)) \operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = l_h(\gamma). \end{aligned}$$

Este argumento se generaliza a curvas C^1 por tramos, por lo que el resultado se sigue directamente de la definición de distancia y de la biyectividad de T . \square

Ahora se calcula la distancia de i a ik , $k > 0$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva de clase C^1 tal que $\gamma(a) = i$, $\gamma(b) = ki$ y $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ entonces

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\sqrt{\gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt \\ &= \log(\gamma_2(t)) \Big|_a^b = \log \gamma_2(b) - \log \gamma_2(a) = \log k - \log 1 = \log k, \end{aligned}$$

este argumento se generaliza a curvas C^1 por tramos.

Ahora la curva $\gamma : [1, k] \rightarrow \mathbb{H}^2$, dada por $\gamma(y) = iy$, alcanza esta cota

$$l_h(\gamma) = \int_1^k \frac{1}{y} dy = \log k$$

por lo que $\rho(i, ik) = \log k$ (donde ρ denota la distancia hiperbólica).

De este resultado es inmediato que si $z = ti$, $w = mi$, $t > m > 1$ entonces $\rho(z, w) = \log t - \log m$ o si $t < 1$, $\rho(z, i) = -\log t = \log \frac{1}{t}$ esto se sigue ya que la transformación $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ está en $PSL(2, \mathbb{R})$, transforma it en $\frac{i}{t}$ y fija i .

Teorema 1.2.2 *El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en "círculos" ortogonales a la recta real.*

DEMOSTRACIÓN: Por una parte las traslaciones $z \rightarrow z + m$, $m \in \mathbb{R}$ intercambian las rectas paralelas al eje imaginario.

También dado un círculo C que intersecta al eje real ortogonalmente en t_1, t_2 , es claro que éste se puede llevar mediante transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$

(traslación y homotecia) al círculo unitario, por lo que basta llevar este círculo mediante una transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ al eje imaginario.

Se quiere mandar 1 en 0 y -1 en ∞ lo cual sugiere tomar $z \rightarrow \frac{z-1}{z+1}$ que es una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$, que en efecto transforma el círculo unitario en el eje imaginario. \square

De lo anterior se sigue que si $z, w \in \mathbb{H}^2$ y C es el único círculo que pasa por z, w y que es ortogonal a la recta real entonces $\rho(z, w)$ se alcanza por la curva determinada por el segmento de círculo C que une z con w . (ver figura 1.1)

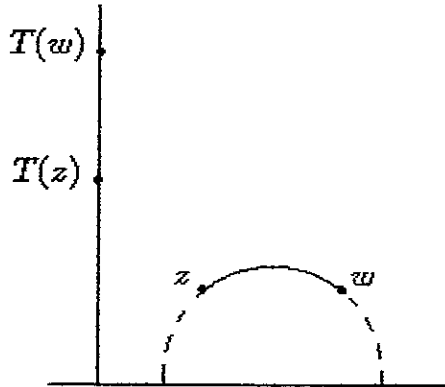


Figura 1.1: Geodésicas en \mathbb{H}^2 .

Por lo que las *geodésicas* o curvas que minimizan la distancia hiperbólica son precisamente estos "círculos". El segmento de geodésica que une z con w lo denotaremos por $[z, w]$, (z, w) etc. Antes de exhibir una fórmula general para la distancia hiperbólica se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.2.3 La expresión $\frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$ es invariante bajo $PSL(2, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$, usando la propiedad

$$\operatorname{Im} g(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}, \quad (1.2)$$

que se mostró en la prueba del teorema 1.2.1 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{|g(z) - g(w)|^2}{2 \operatorname{Im} g(z) \operatorname{Im} g(w)} &= \frac{\left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \right|^2 |cz+d|^2 |cw+d|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} \\ &= \frac{|(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} = \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad \square \end{aligned}$$

Podemos ahora exhibir una fórmula general de la distancia hiperbólica:

Teorema 1.2.4 Sean $z, w \in \mathbb{H}^2$ entonces

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la fórmula para el caso en que z, w están en el eje imaginario, es decir, $z = i, w = ki, k > 0$, ya que ambos miembros de la igualdad son invariantes bajo transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, w) &= \cosh \rho(i, ki) = \frac{e^{\log k} + e^{-\log k}}{2} = \frac{k + 1/k}{2} \\ &= \frac{(k-1)^2}{2k} + 1 = \frac{|i - ki|^2}{2 \operatorname{Im} i \operatorname{Im} ki} + 1 \end{aligned}$$

□

Esta fórmula nos permite determinar como son los círculos hiperbólicos:

Teorema 1.2.5 El círculo hiperbólico $C = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, z_0) = r\}$, z_0, r fijos es exactamente el círculo euclideo con centro $x_0 + iy_0 \cosh r$ y radio $y_0 \sinh r$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\rho(z, z_0) = r$ entonces

$$\cosh \rho(z, z_0) = \cosh r = 1 + \frac{|z - z_0|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

si $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$ se tiene

$$\cosh r = \frac{(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0},$$

esto es

$$2yy_0 \cosh r = (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2 [\cosh^2 r - \sinh^2 r]$$

es decir

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 \cosh r + y_0^2 \cosh^2 r = y_0^2 \sinh^2 r,$$

lo cual es equivalente a

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r.$$

Por lo cual el conjunto de puntos que equidistan una distancia r de z_0 en la métrica hiperbólica es un círculo euclideo con centro en $x_0 + iy_0 \cosh r$ y radio $y_0 \sinh r$. □

Obsérvese que el centro hiperbólico se encuentra “más abajo” que el centro euclideo, esto corresponde a que al estar un punto más cerca del eje real su distancia se hace más grande.

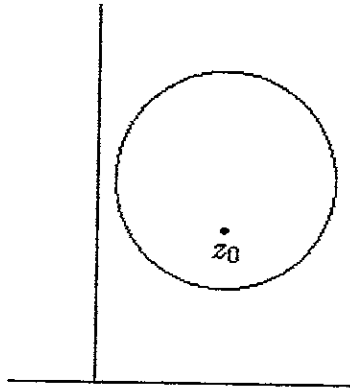


Figura 1.2: Círculo hiperbólico con centro z_0 .

En el caso de regiones R en \mathbb{H}^2 donde la función $z \rightarrow \frac{1}{(\text{Im } z)^2}$ es Riemann integrable se define el *área hiperbólica* como

$$\int_R \frac{dA}{(\text{Im } z)^2}.$$

En otras regiones como la descrita en la figura 1.3 se puede definir el área como una integral de Riemann impropia, cf. [3] pág. 471.

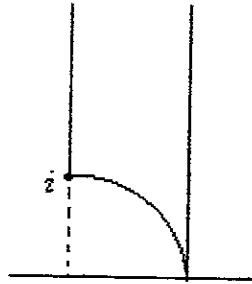


Figura 1.3: Región R no acotada.

Teorema 1.2.6 *El área hiperbólica es invariante bajo transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ i.e., si R es una región en \mathbb{H}^2 y $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces*

$$\int_R \frac{1}{|\text{Im } z|^2} dA = \int_{T(R)} \frac{1}{|\text{Im } z|^2} dA$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, entonces

$\text{Im } T(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2}$ y $|T'(z)|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}$ que es el cuadrado del determinante

del Jacobiano de T . Por lo cual usando el teorema de cambio de variable para integrales múltiples se tiene

$$\int_R \frac{dA}{[Im z]^2} = \int_R \frac{dA}{[Im T(z)]^2 |cz + d|^4} = \int_{T(R)} \frac{dA}{[Im z]^2}.$$

Este argumento se generaliza a integrales impropias. \square

1.3 Transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n

La esfera $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r, r > 0, a \in \mathbb{R}^n\}.$$

La reflexión (o inversión) en $S(a, r)$ es la función $\phi : \mathbb{R}^n - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a)$$

esta expresión está basada en la propiedad $|\phi(x) - a||x - a| = r^2$. Ahora como ϕ no está definida para $x = a$, se puede extender a $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ de la siguiente manera $\phi(a) = \infty$ y $\phi(\infty) = a$.

El plano $P(a, t) \subset \hat{\mathbb{R}}^n$ es el conjunto

$$P(a, t) = \{x \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid x \cdot a = t, a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, t \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\infty\}$$

y $(x \cdot a)$ es el producto escalar usual en \mathbb{R}^n .

La reflexión en $P(a, t)$ es la función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t] \frac{a}{|a|^2},$$

esta definición se basa en la propiedad $\frac{1}{2}(x + \psi(x)) \in P(a, t)$. Se extiende ψ a $\hat{\mathbb{R}}^n$ definiendo $\psi(\infty) = \infty$.

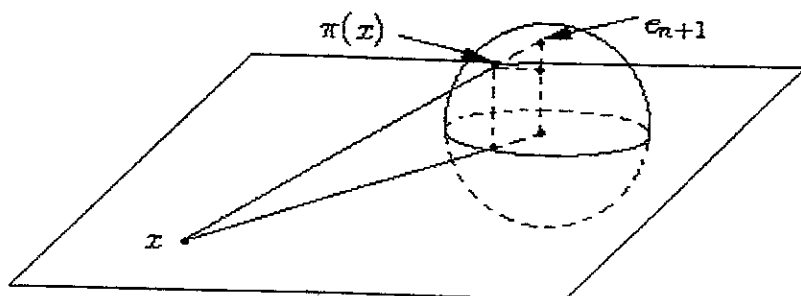
Para demostrar que la reflexión en la esfera y en el plano son continuas en $\hat{\mathbb{R}}^n$ se construye una métrica adecuada en $\hat{\mathbb{R}}^n$. Para esto, primero se identifica $\hat{\mathbb{R}}^n$ con $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mediante la *proyección estereográfica*, que consiste en proyectar desde e_{n+1} a $x \in \mathbb{R}^n$ (ver figura 1.4).

Si denotamos por $\pi(x)$ el punto de intersección de esta recta con la esfera, un cálculo muestra que

$$\pi(x) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

cf. [2] pág 21, si $x = \infty$ se define $\pi(\infty) = e_{n+1}$, se puede probar que π es biyectiva de $\hat{\mathbb{R}}^n$ sobre S^n y por lo tanto se puede heredar la métrica euclidea de S^n a una métrica d en $\hat{\mathbb{R}}^n$ dada por

$$d(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|, \quad x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$$

Figura 1.4: Proyección estereográfica de $\hat{\mathbb{R}}^n$.

a esta métrica se le llama *métrica cordal*.

La métrica cordal está dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2} + \sqrt{1+|y|^2}}, & \text{si } x, y \neq \infty, \\ \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}, & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

Se puede probar que con la métrica cordal las reflexiones en esferas y planos son continuas ver [2] pág. 22, más aún son conformes cf. [2] cap. 3.

Considerando el caso $n = 2$, si ϕ_0 es la reflexión en $S(e_3, \sqrt{2})$, está dada por

$$\phi_0(x) = e_3 + \frac{2(x - e_3)}{|x - e_3|^2} \quad (1.3)$$

entonces $\phi_0|_{\hat{\mathbb{R}}^2} = \pi$, donde π es la proyección estereográfica, esto se sigue ya que si $x \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (x, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \phi_0(\bar{x}) \cdot \phi_0(\bar{x}) &= \left(e_3 + \frac{2(x - e_3)}{|x - e_3|^2} \right) \cdot \left(e_3 + \frac{2(x - e_3)}{|x - e_3|^2} \right) \\ &= 1 - \frac{4}{|\bar{x} - e_3|^2} + \frac{4}{|\bar{x} - e_3|^2} = 1 \end{aligned}$$

es decir, $\phi_0(\bar{x})$ está en la esfera unitaria, además $\phi_0(\bar{x})$ está en la recta determinada por x y e_3 y como esta recta intersecta a la esfera $S(0, 1)$ en los puntos e_3 y $\pi(x)$ se tiene $\phi_0(\bar{x}) = \pi(x)$, como ϕ_0 es biyectiva y $\phi_0 = \phi_0^{-1}$ entonces $\phi_0(S(0, 1)) = \hat{\mathbb{R}}^2$.

Ahora como ϕ_0 está definida por 1.3 entonces si $x \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$|\phi_0(x)|^2 = 1 + \frac{4}{|x - e_3|^2} + \frac{4e_3(x - e_3)}{|x - e_3|^2} = 1 + \frac{4x_3}{|x - e_3|^2}$$

es decir, el semiplano $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 < 0\}$ se transforma en \mathbb{B}^3 . Por consiguiente si $s = \phi_0 \cdot \sigma$, donde σ es la reflexión en el plano $x_3 = 0$ se tiene que $s = \phi_0 \cdot \sigma$ transforma conformemente \mathbb{H}^3 en \mathbb{B}^3 .

Usaremos frecuentemente algunas relaciones de las funciones trigonométricas hiperbólicas.

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \quad (1.4)$$

$$\cosh(t + s) = \cosh t \cosh s + \operatorname{senh} t \operatorname{senh} s \quad (1.5)$$

$$\operatorname{senh}(t + s) = \operatorname{senh} t \cosh s + \cosh t \operatorname{senh} s \quad (1.6)$$

como

$$\cosh(2t) = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t = 2\cosh^2 t - 1$$

se tiene

$$2\cosh^2 \frac{t}{2} = \cosh t + 1 \quad (1.7)$$

también como

$$\operatorname{senh}^2 \frac{t}{2} = \cosh^2 \frac{t}{2} - 1$$

se tiene

$$2\operatorname{senh}^2 \frac{t}{2} = \cosh t - 1. \quad (1.8)$$

Además

$$\tanh(t + s) = \frac{\tanh t + \tanh s}{1 + \tanh t \tanh s} \quad (1.9)$$

Capítulo 2

Métrica hiperbólica

En este capítulo se discute la distancia y el área hiperbólica, así como las geodésicas, las isometrías y los conjuntos convexos.

2.1 Distancia y área hiperbólica

Se probó en los preliminares que si $z, w \in \mathbb{H}^2$, la distancia hiperbólica $\rho(z, w)$ está determinada por la siguiente fórmula:

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

Otras expresiones de esta distancia son:

Teorema 2.1.1 *Sea ρ la métrica hiperbólica, $z, w \in \mathbb{H}^2$ entonces*

i)

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

ii)

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}$$

iii)

$$\cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}$$

iv)

$$\tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$$

DEMOSTRACIÓN Para probar *ii)* usando la fórmula trigonométrica 1.8 se tiene

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \sqrt{\frac{\cosh \rho(z, w) - 1}{2}} = \sqrt{\frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}} = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}.$$

Para la parte *iii)* utilizando 1.4 y *ii)* se tiene:

$$\cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \sqrt{1 + \frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}} = \sqrt{\frac{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w + |z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}}.$$

Ahora si $z = x + iy$, $w = u + iv$, se tiene:

$$\begin{aligned} \cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \sqrt{\frac{4yv + (x - u)^2 + (y - v)^2}{4yv}} = \sqrt{\frac{(x - u)^2 + (y + v)^2}{4yv}} \\ &= \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

iv) es consecuencia directa de *ii)* y *iii)*, para probar *i)* basta mostrar que:

$$\cosh[\rho(z, w)] - 1 = \cosh \left(\log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \right) - 1.$$

El miembro derecho de esta igualdad es:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} + \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(|z - \bar{w}| + |z - w|)^2 + (|z - \bar{w}| - |z - w|)^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2|z - \bar{w}|^2 + 2|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right) - 1 = \frac{|z - \bar{w}|^2 + |z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} - 1 \\ &= \frac{2|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2}. \end{aligned}$$

Si $z = x + iy$ y $w = u + iv$, esta última expresión es:

$$\begin{aligned} &\frac{2((x - u)^2 + (y - v)^2)}{(x - u)^2 + (y + v)^2 - (x - u)^2 - (y - v)^2} = \frac{(x - u)^2 + (y - v)^2}{2yv} \\ &= \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} = \cosh[\rho(z, w)] - 1. \end{aligned}$$

□

Usando la biyección conforme $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$, dada por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

podemos obtener resultados similares en Δ . Antes probaremos un lema:

Lema 2.1.2 Sea $z, w \in \Delta$, entonces $\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$ es invariante bajo transformaciones en $M(\Delta)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$, $|a|^2 - |c|^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{|T(z) - T(w)|^2}{(1 - |T(z)|^2)(1 - |T(w)|^2)} &= \frac{\left| \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} - \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}} \right|^2}{\left(1 - \left| \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \right|^2\right) \left(1 - \left| \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}} \right|^2\right)} \\ &= \frac{|(az + \bar{c})(cw + \bar{a}) - (aw + \bar{c})(cz + \bar{a})|^2}{(|cz + \bar{a}|^2 - |az + \bar{c}|^2)(|cw + \bar{a}|^2 - |aw + \bar{c}|^2)} \\ &= \frac{|(z-w)(|a|^2 - |c|^2)|^2}{|[(cz + \bar{a})(\bar{c}\bar{z} + a) - (az + \bar{c})(\bar{a}\bar{z} + c)][(cw + \bar{a})(\bar{c}\bar{w} + a) - (aw + \bar{c})(\bar{a}\bar{w} + c)]|} \\ &= \frac{|z-w|^2}{[|z|^2(-|a|^2 + |c|^2) + 1][|w|^2(-|a|^2 + |c|^2) + 1]} = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}. \end{aligned}$$

□

Se probó en los preliminares que las geodésicas o curvas que minimizan la distancia hiperbólica en \mathbb{H}^2 son los "círculos" ortogonales a la recta real, también se mostró que $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ es una isometría hiperbólica, por lo que se deduce de la conformalidad de f que las geodésicas o curvas que minimizan la distancia en Δ son los círculos ortogonales a $\partial\Delta$ o los diámetros.

Teorema 2.1.3 Dados $z, w \in \Delta$ se tiene:

i)

$$\rho(z, w) = \log \left[\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right]$$

ii)

$$\operatorname{senh}^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

iii)

$$\operatorname{cosh}^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

iv)

$$\operatorname{cosh} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2 + |1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

v)

$$\tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}$$

vi) Si $0 < r < 1$, entonces

$$\rho(0, r) = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Probamos primero vi), por la observación antes del teorema, basta calcular la longitud hiperbólica del segmento $\gamma(t) = t$, $t \in [0, r]$ usando la densidad en Δ sección 1.2,

$$\begin{aligned} \rho(0, r) &= \int_0^r \frac{2dt}{1-t^2} = \int_0^r \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \log(1+r) - \log(1-r) = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right). \end{aligned}$$

Para probar ii) primero demostramos el caso particular $z = 0$, $w = r$, $r < 1$. En este caso

$$\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \sinh^2 \left(\frac{s}{2} \right),$$

donde $s = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ por lo que

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \sinh^2 \left(\frac{s}{2} \right) = \left(\frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^s - 2 + e^{-s}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1+r}{1-r} - 2 + \frac{1-r}{1+r} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{(1+r)^2 - 2(1-r^2) + (1-r)^2}{1-r^2} \right) = \frac{r^2}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Ahora se sigue de la transitividad en \mathbb{H}^2 de $PSL(2, \mathbb{R})$ que $M(\Delta)$ también es transitivo en Δ , por lo que existe $g \in M(\Delta)$ tal que $g(z) = 0$, más aún componiendo con una rotación podemos suponer que $g(w) = r$, $r > 0$. Finalmente usando el lema 2.1.2 se tiene

$$\frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} = \frac{r^2}{1 - r^2} = \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(0, r) \right] = \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right].$$

Para la parte iii) usaremos la identidad:

$$|1 - z\bar{w}|^2 = |z - w|^2 + (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) \quad (2.1)$$

Esta identidad se sigue ya que desarrollando el lado derecho obtenemos

$$|z - w|^2 + (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) = 1 - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2 = (1 - z\bar{w})(1 - \bar{z}w) = |1 - z\bar{w}|^2.$$

Usando 2.1 se tiene

$$\cosh^2 \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} = \frac{|1 - zw|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Para la parte *iv*) usando 1.5 se tiene

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, w) &= \cosh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] + \operatorname{senh}^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] \\ &= \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} + \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} = \frac{|z - w|^2 + |1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \end{aligned}$$

v) es consecuencia directa de *ii*) y *iii*).

Para *i*) basta demostrar que

$$\cosh \rho(z, w) = \cosh \left(\log \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right) \right)$$

desarrollando el lado derecho de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} + \frac{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}{|1 - z\bar{w}| + |z - w|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(|1 - z\bar{w}| + |z - w|)^2 + (|1 - z\bar{w}| - |z - w|)^2}{|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(|1 - z\bar{w}|^2 + |z - w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2} \right), \end{aligned}$$

usando 2.1 está identidad es

$$\frac{|1 - z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

□

Las fórmulas anteriores tienen una aplicación inmediata en el cálculo del área hiperbólica, así como en la longitud hiperbólica de un círculo.

Definición 3 Sea E una región en Δ , el área hiperbólica de E está dada por

$$A(E) = \iint_E \left(\frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 dx dy,$$

en el caso de una región E en \mathbb{H}^2 , el área hiperbólica se define como

$$A(E) = \iint_E \left(\frac{1}{y^2} \right) dx dy.$$

Obsérvese que esta área puede ser infinita y algunas veces se define mediante integrales impropias.

Definición 4 Sea γ una curva, $\gamma \subset \Delta$, la longitud hiperbólica de γ está dada por

$$l_h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|\gamma'(t)| dt}{1 - |\gamma|^2}.$$

Además, los discos euclidianos con centro en 0 y radios menores a 1 son discos hiperbólicos con centro en 0, en Δ , esto se sigue ya que las rotaciones son isometrías hiperbólicas en Δ .

Teorema 2.1.4 Sea $0 < R < 1$, $D = \{z \mid |z| \leq R\}$ el disco con centro en 0 y radio hiperbólico r , entonces:

i) El área hiperbólica de D es $4\pi \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{2}\right)$.

ii) La longitud hiperbólica de ∂D es $2\pi \operatorname{senh} r$.

DEMOSTRACIÓN: ii) Sea $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces

$$l_h(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1 - R^2} dt = \frac{4\pi R}{1 - R^2}.$$

Ahora usando el teorema 2.1.3 ii) y iii) se tiene que

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{\rho(0, R)}{2}\right) = \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{R^2}{1 - R^2}, \quad (2.2)$$

y

$$\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{1 - R^2}.$$

Por lo cual, en virtud de 1.6, se tiene

$$\operatorname{senh}^2 r = 4 \cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{4R^2}{(1 - R^2)^2}$$

y se sigue el resultado.

i) El área hiperbólica de D está dada por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{2}{1 - t^2}\right)^2 t dt d\theta = 2\pi \int_0^R \left(\frac{2}{1 - t^2}\right)^2 t dt$$

haciendo el cambio de variable $u = 1 - t^2$ se tiene

$$2\pi \int_1^{1-R^2} \frac{4}{u^2} \left(\frac{-1}{2}\right) du = 2\pi \left(\frac{2}{u}\right) \Big|_1^{1-R^2} = 2\pi \left(\frac{2}{1-R^2} - 2\right) = 4\pi \left(\frac{R^2}{1-R^2}\right)$$

y usando 2.2 se sigue el resultado.

De estas fórmulas se tiene $\tanh\left(\frac{r}{2}\right) = R$. □

Definición 5 Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, se define la razón cruzada como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

En el caso de que $z_j = \infty$ para alguna j , se omite el factor en donde aparece z_j .

Lema 2.1.5 La razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius.

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

como

$$\begin{aligned} g(z) - g(w) &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} = \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \\ &= \frac{(bc - ad)w + (ad - bc)z}{(cz + d)(cw + d)} = \frac{(z - w)(ad - bc)}{(cz + d)(cw + d)} \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] &= \frac{[g(z_1) - g(z_3)][g(z_2) - g(z_4)]}{[g(z_1) - g(z_2)][g(z_3) - g(z_4)]} \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}. \end{aligned}$$

□

La distancia hiperbólica se puede expresar en términos de la razón cruzada. Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$ y L la geodésica en \mathbb{H}^2 que los contiene, denotamos por z^*, w^* los puntos de L en la recta al ∞ . (Ver figura 2.1)

Teorema 2.1.6 Sea ρ la métrica hiperbólica, $z, w \in \mathbb{H}^2$, entonces

$$\rho(z, w) = \log[z^*, z, w, w^*].$$

DEMOSTRACIÓN: Como $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodésicas y tanto la distancia hiperbólica como la razón cruzada son invariantes bajo conjugación podemos suponer que z y w están en el eje imaginario. (Ver figura 2.1)

Ahora,

$$\rho(z, w) = \log\left(\frac{y}{v}\right) = \log[0, iv, iy, \infty]$$

Si $Im z < Im w$ se sigue el mismo razonamiento.

□

Denotaremos \tilde{E} la cerradura en \mathbb{H}^2 y \hat{E} la cerradura en $\hat{\mathbb{C}}$.

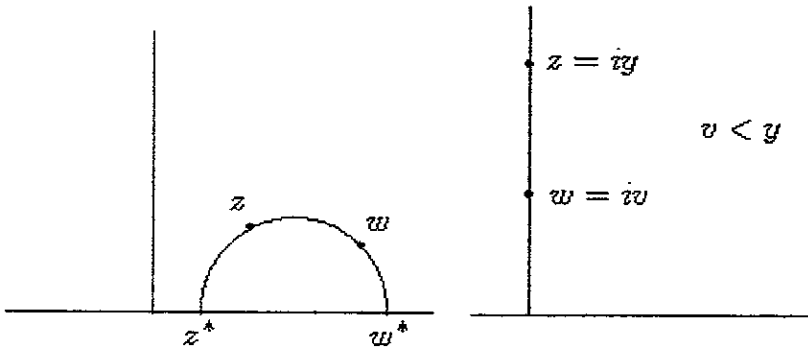


Figura 2.1:

Proposición 2.1.7 Sean $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$ tal que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, y supóngase también que L_1 es la geodésica determinada por $[x_1, x_3]$ y L_2 la geodésica determinada por $[x_1, x_4]$, si la línea $x = x_2$ intersecta L_1 y L_2 en los puntos z_3, z_4 respectivamente, entonces

$$\rho(z_3, z_4) = \frac{1}{2} \log[x_2, x_3, x_4, \infty].$$

DEMOSTRACIÓN: Las coordenadas de z_3 y z_4 son $x_2 + iy$, $x_2 + iw$ respectivamente (ver figura 2.2). Para determinar y , usamos la ecuación de la circunferencia con centro $\frac{x_3 + x_1}{2}$ y radio $\frac{x_3 - x_1}{2}$, entonces

$$y^2 = \left(\frac{x_3 - x_1}{2} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{x_3 + x_1}{2} \right)^2,$$

por lo que

$$y^2 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Análogamente, para v se usa la ecuación de la circunferencia con centro $\frac{x_4 + x_1}{2}$ y radio $\frac{x_4 - x_1}{2}$, obteniéndose como en el caso anterior,

$$v^2 = (x_4 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Finalmente, si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ traslada la geodésica por z_3, z_4 al eje imaginario se tiene:

$$\begin{aligned} \rho(z_3, z_4) &= \rho(g(z_3), g(z_4)) = \log \left(\frac{v}{y} \right) = \log \left[\frac{(x_4 - x_2)^{1/2} (x_2 - x_1)^{1/2}}{(x_3 - x_2)^{1/2} (x_2 - x_1)^{1/2}} \right] \\ &= \log \left[\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \log[x_2, x_3, x_4, \infty]. \end{aligned}$$

□

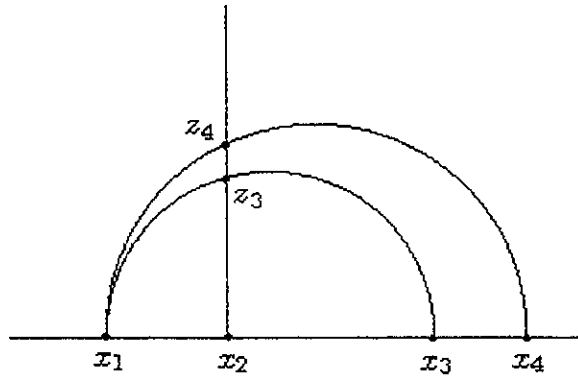


Figura 2.2:

Proposición 2.1.8 *El plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es un espacio métrico completo pero no compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{z_n\}$ una sucesión de cauchy, por lo que dada $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z_m, z_n) < \frac{\epsilon}{2}$, si $n, m > N_1$. Si $E_n = \{z_n, z_{n+1}, \dots\}$ entonces $D(z_N, \epsilon)$ contiene a todos los elementos de E_N .

Ahora $\overline{D(z_N, \epsilon)}$ es un conjunto compacto (ya que la topología inducida por las métricas hiperbólica y euclídeana es la misma), por lo que el conjunto E_N tiene un punto de acumulación, digamos z . Por lo que existe una subsucesión $\{z_{n_j}\}$ tal que $\{z_{n_j}\} \rightarrow z$, es decir, se tiene que $\rho(z_{n_j}, z) < \epsilon/2$ si $j > N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $j > N$ entonces

$$\rho(z_i, z) \leq \rho(z_i, z_{n_k}) + \rho(z_{n_k}, z) \leq \epsilon.$$

Por lo tanto $z_i \rightarrow z$ y \mathbb{H}^2 es completo.

Ahora \mathbb{H}^2 no es compacto porque no es acotado, por ejemplo, $\rho(i, ki) = \log k$, $k > 1$, si $k \rightarrow \infty$ entonces $\rho(i, ki) \rightarrow \infty$. \square

Lema 2.1.9 *Sea σ una métrica en un conjunto X , entonces dados z, v y w en X se tiene*

$$\tanh \sigma(z, w) \leq \tanh \sigma(z, v) + \tanh \sigma(v, w).$$

DEMOSTRACIÓN: Como σ es una métrica se cumple la desigualdad del triángulo,

$$\sigma(z, w) \leq \sigma(z, v) + \sigma(v, w)$$

por lo cual

$$\tanh \sigma(z, w) \leq \tanh (\sigma(z, v) + \sigma(v, w))$$

ahora utilizando 1.9 se tiene

$$\begin{aligned} \tanh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w)) &\leq (1 + \tanh \sigma(z, v) \tanh \sigma(v, w)) \tanh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w)) \\ &\leq \tanh \sigma(z, v) + \tanh \sigma(v, w) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.10 *Sea σ una métrica en un conjunto X , entonces $\tanh \sigma$ es una métrica en X .*

DEMOSTRACIÓN: Basta demostrar la desigualdad del triángulo, usando el lema anterior hay que probar que

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))}{\cosh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))} &\leq \frac{\sinh \sigma(z, v)}{\cosh \sigma(z, v)} + \frac{\sinh \sigma(v, w)}{\cosh \sigma(v, w)} \\ &= \frac{\sinh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w) + \cosh \sigma(z, v) \sinh \sigma(v, w)}{\cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w)}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$\frac{\sinh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))}{\cosh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))} \leq \frac{\sinh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))}{\cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w)},$$

esto es,

$$\frac{1}{\cosh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w))} \leq \frac{1}{\cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w)}$$

es decir,

$$\cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w) \leq \cosh(\sigma(z, v) + \sigma(v, w)).$$

Como

$$\cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w) \leq \cosh \sigma(z, v) \cosh \sigma(v, w) + \sinh \sigma(z, v) \sinh \sigma(v, w),$$

se sigue el resultado. □

Corolario 2.1.11 *Sea $\rho_0(z, w) = \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|$ entonces ρ_0 es una métrica en \mathbb{H}^2 . Además $\rho_0(z, w) = \rho_0(z, v) + \rho_0(v, w) \iff z = v$ ó $v = w$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ρ la métrica hiperbólica, entonces $\frac{\rho}{2}$ es una métrica y por la proposición 2.1.10 $\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)$ también lo es. Si denotamos por ρ_0 , a esta nueva métrica se sigue del teorema 2.1.3 v) que $\rho_0(z, w) = \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|$.

Para la última parte, un cálculo sencillo muestra que si

$$\tanh(a+b) = \tanh a + \tanh b$$

necesariamente

$$\operatorname{senh} a \operatorname{senh} b = 0.$$

Por lo que se concluye que si

$$\rho_0(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w),$$

necesariamente $z = v$ ó $v = w$. □

Proposición 2.1.12 Sea $L = \{x + iy \in \mathbb{H}^2 \mid x = y\}$, $w \in \mathbb{H}^2 - L$, entonces

$$\inf\{\rho(z, w) \mid z \in L\},$$

se alcanza en $\frac{|w|}{\sqrt{2}} + i\frac{|w|}{\sqrt{2}}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $z = x + ix$, $z_0 = x_0 + ix_0 \in L$, $w = \alpha + i\beta$ tal que $|z_0| = |w|$, es decir, $2x_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$, (ver figura 2.3)

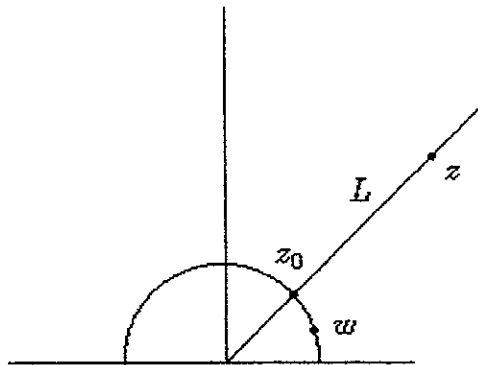


Figura 2.3: Geodésica que pasa por w ortogonal a L .

Basta probar que $\cosh \rho(z, w) \geq \cosh \rho(z_0, w)$. Esto sucede si y sólo si

$$\frac{(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2}{x\beta} \geq \frac{(x_0 - \alpha)^2 + (x_0 - \beta)^2}{x_0\beta}$$

$$\iff x_0[(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2] \geq x[(x_0 - \alpha)^2 + (x_0 - \beta)^2]$$

$$\iff 2x_0x^2 + x_0(\alpha^2 + \beta^2) \geq 2x_0^2x + x(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\iff 2x_0x^2 + x_0(2x_0^2) \geq 2x_0^2x + x(2x_0^2) \iff x^2 + x_0^2 \geq 2x_0x$$

lo cual evidentemente se cumple. □

2.2 Las geodésicas

En los preliminares se mostró que las geodésicas son círculos ortogonales al eje real o líneas paralelas al eje imaginario, en consecuencia:

- i) Existe una única geodésica que pasa por dos puntos distintos que están en el plano hiperbólico.
- ii) Dos geodésicas distintas se intersectan en a lo más un punto en el plano hiperbólico.

Proposición 2.2.1 a) *La reflexión en una geodésica es una isometría hiperbólica.*

b) *Dadas dos geodésicas L_1 y L_2 , existe una $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g(L_1) = L_2$.*

c) *Dada una geodésica L y cualquier punto w , existe una única geodésica que pasa por w ortogonal a L .*

DEMOSTRACIÓN: La parte b) se sigue del teorema 1.2.1.

Para a) se sigue de b) que basta probar que $z \rightarrow -\bar{z}$ es una isometría hiperbólica, esto se sigue ya que si $f(z) = -\bar{z}$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una curva C^1 , $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ entonces

$$l_h(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2} dt}{\gamma_2(t)} = \int_a^b \frac{\sqrt{(-\gamma_1')^2 + \gamma_2'^2} dt}{\gamma_2(t)} = l_h(-\bar{\gamma}).$$

Para probar c) primero se toma el caso particular donde L es el eje imaginario entonces

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = |w|\}$$

es una geodésica que contiene a w y es la única ortogonal al eje imaginario. Para el caso general se utiliza la transitividad de $PSL(2, \mathbb{R})$. \square

Teorema 2.2.2 *Sea $z, w \in \mathbb{H}^2$, entonces*

$$\rho(z, w) = \rho(z, \lambda) + \rho(\lambda, w) \iff \lambda \in [z, w].$$

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar la suficiencia sea $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$g(z) = ip, \quad g(w) = iq, \quad g(\lambda) = i,$$

entonces

$$\begin{aligned} \rho(z, \lambda) &= \rho(g(z), g(\lambda)) = \rho(ip, i) = \log p, \\ \rho(\lambda, w) &= \rho(g(\lambda), g(w)) = \rho(i, iq) = \log \frac{1}{q}, \end{aligned}$$

entonces

$$\rho(z, w) = \log p - \log q = \log \frac{p}{q}.$$

Para la necesidad se sigue de la definición de geodésica en los preliminares que la única curva que minimiza la distancia de z a w es el segmento $[z, w]$, por lo que se concluye que si $\lambda \notin [z, w]$ necesariamente $\rho(z, w) < \rho(z, \lambda) + \rho(\lambda, w)$. \square

Obsérvese que dadas dos geodesicas distintas L_1 y L_2 , éstas o se intersectan o son disjuntas o son paralelas. (Ver figura 2.4).

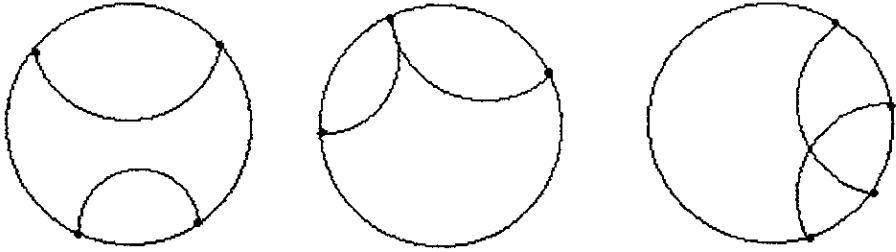


Figura 2.4: Geodésicas que son: disjuntas, paralelas o se intersectan.

Proposición 2.2.3 Sea $w = u + iv$, $w' = iv$ y $z = ri \in \mathbb{H}^2$, entonces

$$\rho(w, z) \geq \rho(w', z).$$

La igualdad se cumple si y sólo si $w = w'$.

DEMOSTRACIÓN: El resultado es válido si y sólo si

$$\cosh \rho(z, w) \geq \cosh \rho(w', z),$$

es decir,

$$\frac{|w - z|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} \geq \frac{|w' - z|^2}{2 \operatorname{Im} w' \operatorname{Im} z}$$

esto se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} |u + iv - ir|^2 &\geq |iv - ir|^2 \\ \iff u^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo que la igualdad se cumple si y sólo si $u = 0$, es decir, $w = w'$. (Ver figura 2.5). \square

2.3 Isometrías

Sea ϕ cualquier isometría, se afirma que ϕ transforma el segmento $[z, w]$ en $[\phi(z), \phi(w)]$, esto se sigue ya que si $\lambda \in [z, w]$ se tiene $\rho(z, \lambda) + \rho(\lambda, w) = \rho(z, w)$ y por lo tanto $\rho(\phi(z), \phi(\lambda)) + \rho(\phi(\lambda), \phi(w)) = \rho(\phi(z), \phi(w))$. Finalmente se sigue del teorema 2.2.2 que $\phi(\lambda) \in [\phi(z), \phi(w)]$.

Ahora estamos en condiciones de caracterizar el grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 .

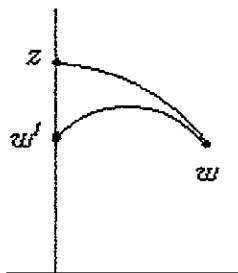


Figura 2.5:

Teorema 2.3.1 *El grupo de isometrías de (\mathbb{H}^2, ρ) consiste exactamente de las transformaciones de la forma*

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \rightarrow \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$.

DEMOSTRACIÓN:

Dada una isometría ϕ , existe $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g\phi$ deja invariante el eje imaginario, componiendo con una homotecia se puede suponer que $g\phi$ fija i , además componiendo si es necesario con $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ se puede suponer que $g\phi$ preserva los intervalos $[i, \infty)$, $(0, i]$. Más aún, como $g\phi$ es una isometría, $g\phi$ fija todos los puntos del eje imaginario positivo.

Se afirma que

$$g\phi(z) = z \quad \text{ó} \quad g\phi(z) = -\bar{z},$$

lo cual prueba el teorema.

Para probar esto sea $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ entonces si $g\phi(z) = u + iv$, se tiene $\forall t \in \mathbb{R}^+$ que

$$\rho(z, it) = \rho(u + iv, it).$$

Ahora utilizando la fórmula del teorema 2.1.1 ii) se tiene

$$\frac{|x + iy - it|^2}{4yt} = \frac{|u + iv - it|^2}{4vt}.$$

Esta igualdad se cumple si y sólo si

$$[x^2 + (y - t)^2]v = [u^2 + (v - t)^2]y,$$

desarrollando y dividiendo entre t^2 se obtiene

$$v + v \left(\frac{x^2 + y^2}{t^2} \right) = y + y \left(\frac{u^2 + v^2}{t^2} \right).$$

Como esta igualdad se cumple para todo t , tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene $v = y$, también $x^2 = u^2$, es decir, $x = \pm u$. Se sigue por continuidad que alguna de las 2 relaciones se cumple $\forall z$. \square

Para encontrar el grupo de isometrías en Δ , basta conjugar con $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, las isometrías en \mathbb{H}^2 , tomando $g(z) = -\bar{z}$ se tiene

$$\begin{aligned} fgf^{-1}(z) &= fg\left(\frac{iz+i}{-z+1}\right) = f\left(\frac{i\bar{z}+i}{-\bar{z}+1}\right) = \frac{\left(\frac{i\bar{z}+i}{-\bar{z}+1}\right) - i}{\left(\frac{i\bar{z}+i}{-\bar{z}+1}\right) + i} \\ &= \frac{i\bar{z}+i - i(-\bar{z}+1)}{i\bar{z}+i + i(-\bar{z}+1)} = \frac{2i\bar{z}}{2i} = \bar{z}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$ entonces $fgf^{-1}(z)$ es de la forma

$$z \rightarrow \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

ver [6].

Se concluye entonces el siguiente:

Teorema 2.3.2 *Las isometrías en Δ consisten de las transformaciones de la forma*

$$z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Además, si $g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$, $|a|^2 - |c|^2 = 1$ usando el teorema 2.1.3 ii) y iii) se tiene que

$$|c| = \operatorname{senh} \left[\frac{1}{2} \rho(0, g(0)) \right]$$

y

$$|a| = \cosh \left[\frac{1}{2} \rho(0, g(0)) \right].$$

También

$$\|g\|^2 = 2 \cosh \rho(0, g(0))$$

esto se sigue inmediatamente de la fórmula iv) del teorema 2.1.3.

Por otra parte se tiene una fórmula similar para el semiplano.

Teorema 2.3.3 *Si $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\|h\|^2 = 2 \cosh \rho(i, h i).$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que $h(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{ac+bd+i}{c^2+d^2}$, por otra parte

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Re} z \bar{w}}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \cosh \rho(h(i), i) &= 1 + \frac{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} + 1 - 2 \frac{1}{c^2+d^2}}{2} (c^2+d^2) \\ &= 1 + \frac{a^2+b^2+c^2+d^2-2}{2} = \|h\|^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.4 Sea $z_j, w_j, j = 1, 2, 3$ puntos en \mathbb{H}^2 , entonces existe una isometría g tal que

$$g(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, 3 \iff \rho(z_i, z_j) = \rho(w_i, w_j), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es inmediata. Para probar la suficiencia se puede suponer que z_1, z_2 son puntos del eje imaginario. Sea $r_i = \rho(z_i, z_3)$, $i = 1, 2$ y L la geodésica por w_1 y w_2 . Por transitividad existe una isometría ϕ tal que el eje imaginario se transforma en L , w_3 está en la intersección de los círculos hiperbólicos con radio r_i y centro $w_i, i = 1, 2$. Si $\phi(z_3) \neq w_3$ se compone con la isometría $z \rightarrow -\bar{z}$ y se obtiene el resultado. □

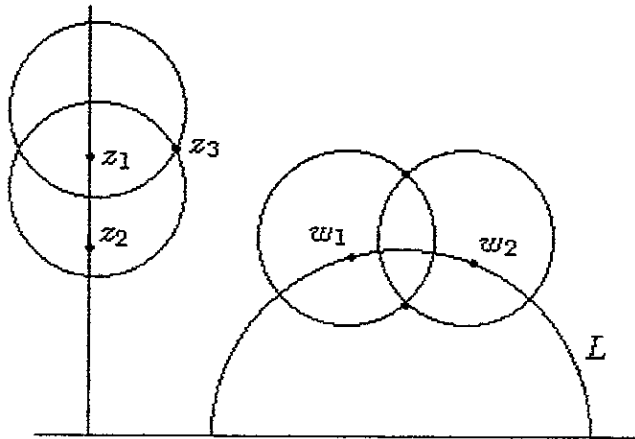


Figura 2.6:

Capítulo 3

Convexidad

3.1 Modelo de Klein

En esta sección se describirá el modelo de Klein para Δ , que es particularmente útil al trabajar con conjuntos convexos. Trabajaremos en \mathbb{R}^3 , sea σ la reflexión en el plano $x_3 = 0$ y ϕ_0 la reflexión en la esfera $S(e_3, \sqrt{2})$, entonces

$$s = \phi_0 \sigma$$

es una transformación de Möbius de $\hat{\mathbb{R}}^3$ en $\hat{\mathbb{R}}^3$ que transforma \mathbb{H}^3 en \mathbb{B}^3 , de hecho

$$\phi_0 \sigma|_{\hat{\mathbb{R}}^2}$$

es la proyección estereográfica (Veáse [2] pág. 27 ejercicio 8).

Esta transformación es conforme y manda “esferas” en “esferas” (Veáse [2], teorema 3.1.6 y 3.2.1) y además s deja fijo el círculo unitario en \mathbb{R}^2 (ecuador ver figura 3.1).

En particular, s transforma

$$\mathbb{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$$

en Δ , y se sigue de la conformalidad que semicírculos en \mathbb{Q} , ortogonales en $\partial\mathbb{H}^3$ son transformados en semicírculos en Δ ortogonales a $\partial\mathbb{B}^3$, es decir, al círculo unitario en \mathbb{R}^2 . (s manda “círculos” en “círculos” ya que un “círculo” es la intersección de dos “esferas”).

Ahora, sea $v : \mathbb{Q} \rightarrow \Delta$ dada por $v(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + ix_2)$ se tiene que $F = vs^{-1}$ es una transformación $F : \Delta \rightarrow \Delta$. Por el argumento anterior s^{-1} fija $\partial\Delta$ y dada L un semicírculo en Δ ortogonal a $\partial\Delta$, se tiene que $v(L)$ es el segmento de recta euclideo que une los puntos extremos de L . El modelo de Klein es el disco unitario Δ y las geodésicas son los segmentos euclideos (ver figura 3.2).

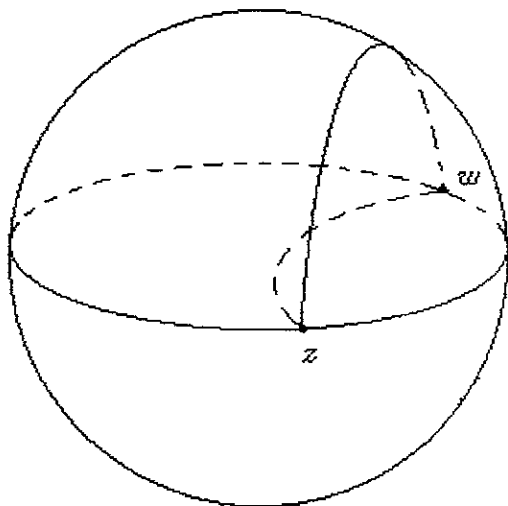


Figura 3.1: Geometría de la transformación $s = \phi_0 \sigma$.

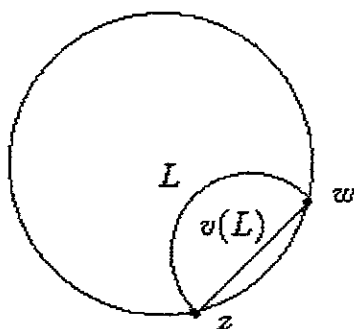


Figura 3.2: La geodésica L se transforma en el segmento euclidiano $v(L)$.

3.2 Conjuntos convexos

Definición 6 Un conjunto $E \subset \mathbb{H}^2$ es convexo si para todo $z, w \in E$ se tiene $[z, w] \subset E$.

Obsérvese que un subconjunto E de Δ es convexo en Δ con la métrica de Poincaré si y sólo si $F(E)$ es convexo en el sentido euclidiano donde $F = \nu s^{-1}$ es la transformación que define el modelo de Klein.

Algunas propiedades de la convexidad son las siguientes:

Proposición 3.2.1 Si E es un conjunto convexo entonces:

- $g(E)$ es convexo para toda isometría g .
- E° (el interior de E) y \tilde{E} son conjuntos convexos.

- c) Si $E_1, \dots, E_n \dots$ son conjuntos convexos y $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ entonces $\cup E_n$ es convexo.
- d) Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos convexos entonces $\cap_{i \in I} E_i$ es convexo.

DEMOSTRACIÓN: El inciso a) se sigue directamente de la definición ya que las isometrías mandan geodésicas en geodésicas. Los incisos c) y d) son también inmediatos.

Para probar b) sean $z, w \in E^\circ$, como E° es abierto existen R_z y R_w cuadrados de lado ϵ con centros en z y w respectivamente, tal que $R_z, R_w \subset E$. Se puede suponer $E \subset \Delta$ y usar el modelo de Klein (ver figura 3.3), por la convexidad de E se sigue que el interior del rectángulo euclideo generado por R_z, R_w está totalmente contenido en E° .

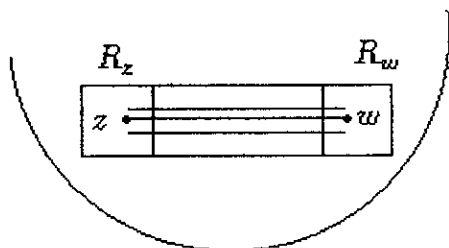


Figura 3.3:

Para demostrar que \tilde{E} es convexo, podemos trabajar de nuevo con el modelo de Klein (ver figura 3.4), si \tilde{E} no es convexo existe λ en el segmento z, w tal que $\lambda \notin \tilde{E}$ y $z, w \in \tilde{E}$, como $(\tilde{E})^\circ$ es abierto existe un cuadrado $R \subset (\tilde{E})^\circ$ con centro en λ de lado ϵ , ahora sea R_z y R_w cuadrados de lado ϵ con centros en z y w y sean $z', w' \in E$ tal que $z' \in R_z$ y $w' \in R_w$ entonces el segmento $[z', w'] \subset E$, sin embargo dicho segmento intersecta R lo cual es una contradicción. \square

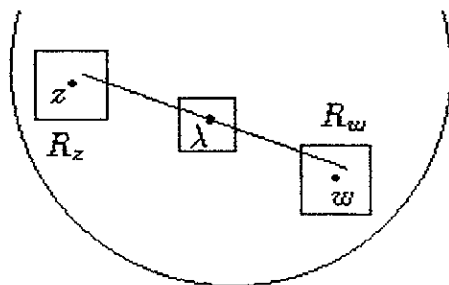


Figura 3.4:

Definición 7 Dada una geodésica l en \mathbb{H}^2 , a las componentes de $\mathbb{H}^2 - l$ se les llama *semiplanos*.

Cualquier semiplano es convexo ya que el semiplano

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

es evidentemente convexo, el caso general se sigue de la transitividad de las geodésicas. Además, se sigue de la proposición 3.2.1 b) que los semiplanos cerrados son también convexos.

A continuación se muestran algunos conjuntos convexos:

Un disco hiperbólico D es convexo ya que D se puede ver como intersección de semiplanos (ver figura 3.5).

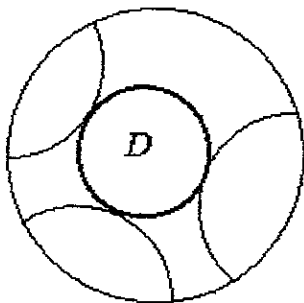


Figura 3.5: Convexidad del disco hiperbólico D .

Consideremos ahora la región

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Im} z > t, t > 0\}$$

(ver figura 3.6), esta región es convexa ya que

$$A = \bigcap_{x_0 \in \mathbb{R}} A_{x_0}$$

donde

$$A_{x_0} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - x_0| > t\}.$$

En general, cualquier región definida por el interior de un círculo euclideo (o delimitada por una recta euclidea) que toca en un sólo punto a la recta al infinito se le llama *región horocíclica* (ver figura 3.7). Estas regiones son convexas: si B es una región horocíclica basada en x_0 , $h(B)$ es de la forma

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Im} z > t > 0\}$$

donde $h(z) = \frac{-1}{z - x_0}$.

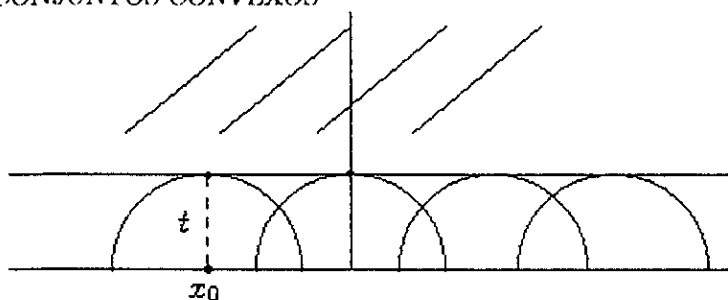
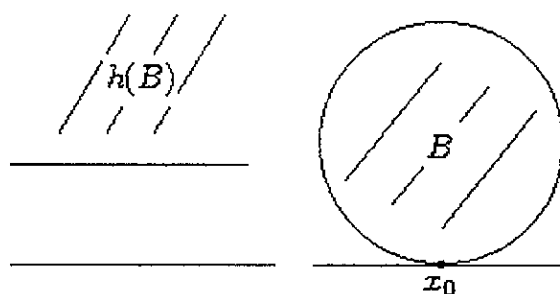


Figura 3.6: Región horocíclica.

Figura 3.7: Región horocíclica basada en ∞ y en x_0 .

Una región de la forma

$$A_\theta = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |\arg z - \pi/2| < \theta\}$$

para alguna $\theta \in (0, \pi/2)$ es convexa (ver figura 3.8), porque es intersección de semiplanos de la forma

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - x_0| > |x_0| \cos \theta, x_0 \text{ real}\}.$$

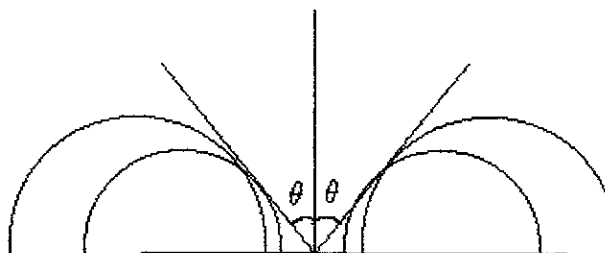


Figura 3.8: Región hipercíclica.

Se dice que una región es hipercíclica si es de la forma $T(A_\theta)$, donde $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, obsérvese que $T(A_\theta)$ es la región delimitada por 2 arcos de

círculo que forman un ángulo θ con L donde L es la imagen del eje imaginario bajo T . (Ver figura 3.9).

Como A_θ es convexo $\forall \theta \in (0, \pi/2)$, cualquier región hipercíclica es convexa.

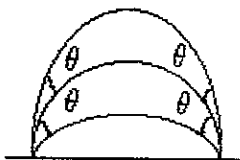


Figura 3.9: Región hipercíclica.

A la frontera de una región hipercíclica se le llama hiperciclo. □

El siguiente teorema relaciona la convexidad con la convexidad local.

Un subconjunto E del plano euclideo (o del plano hiperbólico) es *localmente convexo* si para toda $z \in E$, existe una vecindad N tal que $E \cap N$ es convexa.

Se dice que 2 puntos $z, w \in E$ son *poligonalmente conectables* en el sentido euclideo (o hiperbólico) si se puede unir por una poligonal euclidea (o hiperbólica) totalmente contenida en E . Esta definición induce una partición de E , que denotaremos por $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Teorema 3.2.2 *Sea P el plano euclideo o el plano hiperbólico cerrado y E un subconjunto cerrado de P , entonces E es convexo si y sólo si E es conexo y localmente convexo.*

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es inmediata. Para demostrar la suficiencia consideramos primero el caso del plano euclideo y con el modelo de Klein se concluye el resultado para el plano hiperbólico cerrado.

Se sigue de la definición de puntos poligonalmente conectables y de la convexidad local que cada A_i es un abierto relativo en E y como E es conexo se concluye que E es poligonalmente conectable.

Se afirma que si $[v, u]$, $[v, w]$ están en E entonces $[u, w]$ está en E , la afirmación implica el resultado ya que si $z_1, z_2 \in E$, z_1 y z_2 se pueden unir por medio de una poligonal y aplicando un número finito de veces este resultado se tiene que $[z_1, z_2] \subset E$.

Para probar la afirmación denotamos por $T(x, y, z)$ el triángulo generado por x, y, z . Sea $K = \{x \in [v, u] \mid \exists y \in (v, w) \text{ tal que } T(v, x, y) \subset E\}$, probamos ahora que $K = [v, u]$.

Supóngase que $K = [v, x_0]$ ó $K = [v, x_0]$, $x_0 \neq u$, sea N una vecindad de x_0 tal que $E \cap N$ es convexo y sean x_1, x_2 tales que $x_1 \in [v, x_0] \cap N$ y $x_2 \in [x_0, u] \cap N$. Como $x_1 \in K \exists y_1 \in (v, w)$ tal que $T(v, x_1, y_1) \subset E$; ahora sea $z \in N \cap (x_1, y_1)$ (ver figura 3.10)

Se sigue entonces que si y_2 es el punto donde la recta por z y x_2 intersecta el segmento $[v, w]$, se tiene que el triángulo $T(x_2, y_2, v) \subset E$ ya que

$$T(x_2, y_2, v) \subset T(v, x_1, y_1) \cup T(x_1, x_2, z) \subset E,$$

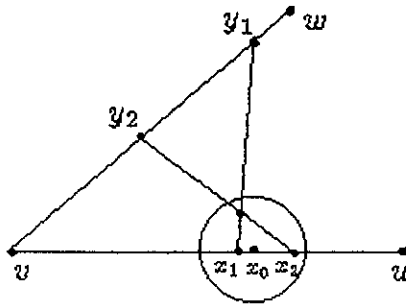


Figura 3.10:

($T(x_1, x_2, z) \subset E$ ya que $E \cap N$ es convexo), lo cual contradice $x_0 \neq u$. Por lo tanto, $x_0 = u$ y $K = [v, u]$.

Como $u \in K \exists y \in (v, w)$ tal que $T(v, u, y) \subset E$ (ver figura 3.11)

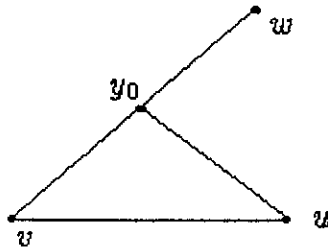


Figura 3.11:

Finalmente, sea $K_1 = \{y \in [v, w] \mid T(v, u, y) \subset E\}$, basta mostrar que $K_1 = [v, w]$. Supóngase que $K_1 = [v, y_0]$ ó $K_1 = [v, y_0)$, $y_0 \neq w$, sea

$$K_2 = \{s \in [y_0, u] \mid \exists y' \in (y_0, w) \text{ tal que } T(y_0, s, y') \subset E\},$$

aplicando el argumento anterior, donde se prueba que $K = [v, u]$, reemplazando el triángulo $T(v, u, w)$ por el triángulo $T(u, y_0, w)$; exactamente el mismo razonamiento muestra que $K_2 = [y_0, u]$ (ver figura 3.12).

En consecuencia como $u \in K_2 \exists y^* \in [y_0, w]$ tal que $T(v, u, y^*) \subset E$, esto contradice que $y_0 \neq w$. Por lo tanto $y_0 = w$, $K_1 = [v, w]$ lo cual termina la prueba.

Es fácil probar que si E es un subconjunto cerrado del plano hiperbólico los mismos argumentos se aplican. □

Sea

$$B = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -a < \operatorname{Re} z < a, \operatorname{Im} z > b\},$$

B es convexo porque es intersección de 3 conjuntos convexos:

$$B_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re} z < a\}, \quad B_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -a < \operatorname{Re} z\},$$

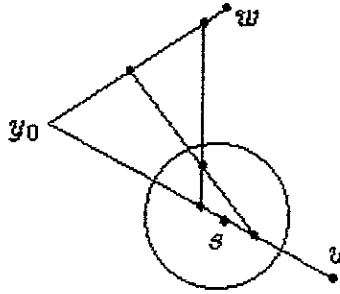


Figura 3.12:

$$B_3 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im } z > b\}.$$

Por otra parte sea

$$A = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -a < \text{Re } z < a, \text{Im } z < b\},$$

A no es convexo ya que tomando un punto w en la recta determinada por 0 y $a + ib$, tal que $|b| < |w| < |a + ib|$, la geodésica que une w con $-\bar{w}$ no está contenida en A (ver figura 3.13)

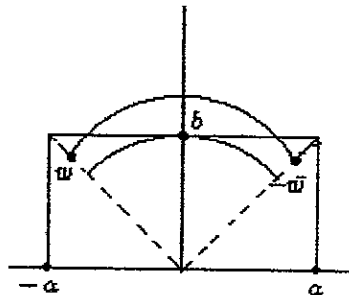


Figura 3.13: El rectángulo A no es convexo.

Este ejemplo muestra que la hipótesis de ser cerrado en el teorema anterior es muy importante ya que el conjunto A es localmente convexo y conexo pero no convexo.

Proposición 3.2.3 Sean $z_1, z_2, w, w' \in \mathbb{H}^2$, si $w \in [z_1, z_2]$ entonces

$$\rho(w, w') \leq \text{máx} \{ \rho(w', z_1), \rho(w', z_2) \}$$

DEMOSTRACIÓN: Se puede suponer que z_1, w, z_2 están en el eje imaginario (ver figura 3.14), es decir $z_1 = t_1 i, w = t_2 i, z_2 = t_3 i, t_1 < t_2 < t_3$ y $w = x + iy$ entonces

$$\cosh \rho(z_1, w) \leq \cosh \rho(w, w'),$$

$$1 + \frac{|t_1 i - (x + iy)|^2}{2t_1 y} \leq 1 + \frac{|t_2 i - (x + iy)|^2}{2yt_2},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + t_1^2}{2yt_1} \leq \frac{x^2 + y^2 + t_2^2}{2yt_2}.$$

Esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$t_2(x^2 + y^2 + t_1^2) \leq t_1(x^2 + y^2 + t_2^2)$$

lo cual equivale a

$$(t_2 - t_1)(x^2 + y^2) \leq (t_2 - t_1)(t_2 t_1),$$

es decir,

$$x^2 + y^2 \leq t_1 t_2. \quad (3.1)$$

Análogamente si

$$\cosh \rho(w, w') \leq \cosh \rho(z_2, w')$$

se tiene

$$x^2 + y^2 \leq t_2 t_3. \quad (3.2)$$

Si se cumple (3.2) ya terminamos, de otra manera

$$x^2 + y^2 \geq t_2 t_3 \geq t_1 t_2,$$

i.e., no se cumple (3.1) por lo cual

$$\cosh \rho(w, w') \geq \cosh \rho(z_1, w')$$

□

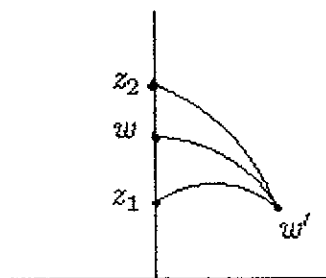


Figura 3.14:

Capítulo 4

Triángulos

En este capítulo se describen las fórmulas trigonométricas hiperbólicas de los triángulos como el teorema de Pitágoras, la ley de los senos y los cosenos, el ángulo de paralelismo, etc.

4.1 Triángulos

Definición 8 *Un ángulo en un punto z es un par sin orden, de dos rayos l_1, l_2 que surgen de z .*

Estos rayos son parte de geodésicas que denotamos por L_1 y L_2 , que dividen \mathbb{H}^2 en 2 semiplanos respectivamente. Sea Σ el semiplano determinado por L_1 y que contiene a l_2 , análogamente tomando L_2 , sea Σ' el semiplano que contiene a l_1 . (Ver figura 4.1).

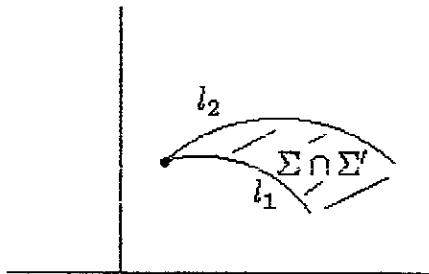


Figura 4.1: Interior de un ángulo.

Se dice que el *interior* de un ángulo es $\Sigma \cap \Sigma'$ y el *exterior* es $(\Sigma \cap \Sigma')^c$, de la convexidad de Σ y Σ' se sigue que el interior del ángulo es convexo. Los ángulos interiores toman valores en $[0, \pi)$ y los ángulos exteriores en $(\pi, 2\pi]$.

Ahora sean z_1, z_2, z_3 , 3 puntos distintos en \mathbb{H}^2 y L_1, L_2 geodésicas por z_1, z_2 y por z_1, z_3 respectivamente. A_1 es el ángulo interior definido por L_1 , y L_2 , análogamente se definen los ángulos A_2 y A_3 en z_2 y z_3 .

Definición 9 El triángulo $T(z_1, z_2, z_3)$ está dado por $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Se dice que z_1, z_2, z_3 son los vértices, $[z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_1]$ son los lados y $A_i, i = 1, 2, 3$ son los ángulos. Finalmente, como cada A_i es convexo entonces $T(z_1, z_2, z_3)$ también lo es. Para abreviar $T(z_1, z_2, z_3)$ se escribe T (nótese que cada ángulo es menor que π).

La frontera de T denotada por ∂T está dada por

$$\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1].$$

Teorema 4.1.1 Sea T un triángulo con vértices en \mathbb{H}^2 y L la geodésica que contiene al lado más largo, digamos $[z_2, z_3]$, sea L_1 la geodésica que pasa por z_1 y es ortogonal a L , entonces L_1 intersecta a L en $w \in [z_2, z_3]$.

DEMOSTRACIÓN: Se puede suponer que L es el eje imaginario, como L_1 es ortogonal a L entonces $w = |z_1|i$ (ver figura 4.2)

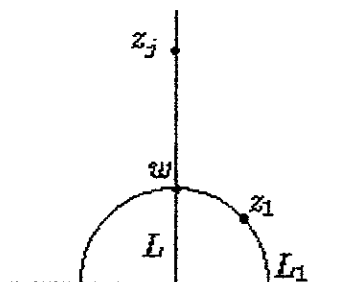


Figura 4.2:

Se afirma que

$$\rho(z_1, z_j) \geq \rho(w, z_j),$$

$j = 2, 3$, esto se satisface ya que si $z_1 = x + iy, z_j = si$, se tiene

$$\cosh \rho(z_1, z_j) \geq \cosh \rho(w, z_j)$$

si y sólo si

$$\frac{x^2 + (y - s)^2}{2ys} \geq \frac{(|z_1| - s)^2}{2|z_1|s}$$

si y sólo si

$$|z_1|(x^2 + y^2 - 2ys + s^2) \geq y(|z_1|^2 - 2|z_1|s + s^2)$$

si y sólo si

$$|z_1|(x^2 + y^2 + s^2) \geq y(|z_1|^2 + s^2),$$

si y sólo si

$$|z_1| \geq y.$$

Ahora como $[z_2, z_3]$ es el lado más largo se tiene que

$$\max \{ \rho(z_2, w), \rho(z_3, w) \} \leq \max \{ \rho(z_2, z_1), \rho(z_3, z_1) \} \leq \rho(z_2, z_3). \quad (4.1)$$

Finalmente como los puntos z_2, z_3 y w son colineales se concluye que $w \in [z_2, z_3]$, ya que de otra manera no se cumple la desigualdad (4.1) por ejemplo si $z_2 \in [w, z_3]$, $\rho(w, z_3) > \rho(z_2, z_3)$. \square

Cuando el triángulo tiene vértices no finitos por ejemplo, el triángulo $T(\infty, z, ti)$, $t > 1$, el teorema no es cierto. (Ver figura 4.3).

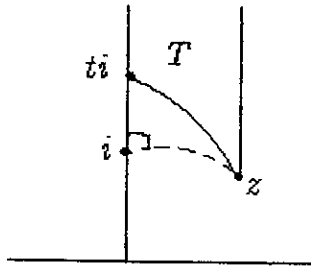


Figura 4.3: La geodésica ortogonal al eje imaginario no está contenida en T .

En las siguientes secciones se examinan relaciones trigonométricas en triángulos hiperbólicos. Dado un triángulo T , se denotan los vértices por v_a, v_b, v_c y los lados opuestos a los vértices por a, b, c , respectivamente, los ángulos interiores los denotaremos por α, β, γ . (ver figura 4.4)

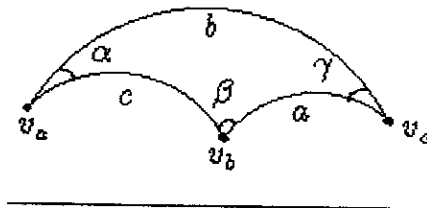


Figura 4.4: Triángulo hiperbólico.

En el caso en que alguno o algunos de los vértices del triángulo estén en el círculo al infinito, por ejemplo v_a (ver figura 4.5) entonces $\alpha = 0, b = c = \infty$.

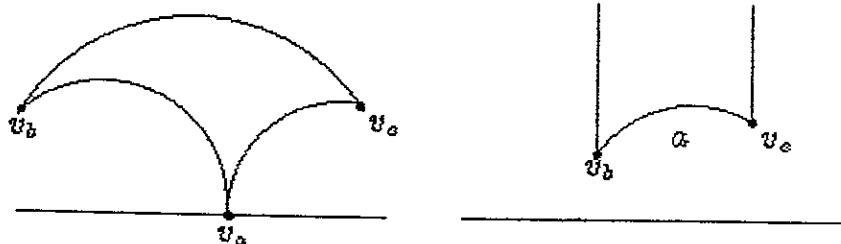


Figura 4.5: Triángulos hiperbólicos con un vértice al infinito.

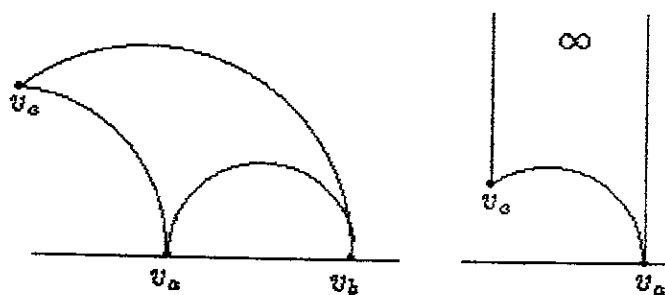


Figura 4.6: Triángulos hiperbólicos con 2 vértices al infinito.

Si dos vértices están en el círculo al infinito (ver figura 4.6) entonces todos los lados tienen longitud infinita.

4.2 El ángulo de paralelismo

En esta sección discutiremos triángulos con ángulos $\alpha, 0, \pi/2$ i.e., se tendrá dos parámetros α y b . (ver figura 4.7).

Teorema 4.2.1 *Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, 0, \pi/2$, $\alpha \neq 0$, entonces:*

- i) $\operatorname{senh} b \tan \alpha = 1$
- ii) $\cosh b \operatorname{sen} \alpha = 1$
- iii) $\tanh b \operatorname{sec} \alpha = 1$

DEMOSTRACIÓN: Usando transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ y la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$, se puede suponer que T es el triángulo con vértices $v_c = i$, $v_b = \infty$, $v_a = x + iy$, tal que $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$. Obsérvese que $y = \operatorname{sen} \alpha$ (ver figura 4.7)

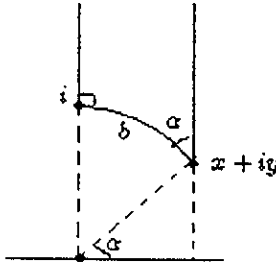


Figura 4.7: Triángulo con vértices i , $v_a = x + iy$, ∞ .

Para demostrar *ii*) por el teorema 2.1.1 se tiene

$$\cosh b = \cosh \rho(v_c, v_a) = 1 + \frac{x^2 + (y - 1)^2}{2y} = \frac{1}{y},$$

es decir

$$\cosh b = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Para probar *i*), usando *ii*) se tiene $\operatorname{senh}^2 b = \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1$, lo cual equivale a

$$(\operatorname{senh}^2 b)y^2 = 1 - y^2,$$

es decir

$$\operatorname{senh}^2 b \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

iii) es consecuencia inmediata de *i*) y *ii*). □

Obsérvese que la distancia de x al eje imaginario no depende de x sino solamente de α , otra manera de probarlo es aplicando una homotecia (ver figura 4.8).

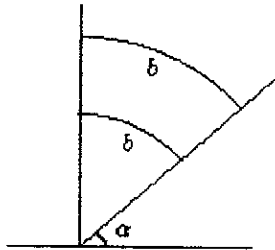


Figura 4.8: Ángulo de paralelismo.

4.3 Triángulos con un vértice al infinito

Estudiamos ahora triángulos en \mathbb{H}^2 con ángulos $\alpha, \beta, 0$, donde $\alpha, \beta \neq 0$, se tiene $a = b = +\infty$, $0 < c < \infty$, (ver figura 4.9). Los ángulos α, β y el lado c se relacionan en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, \beta, 0$, entonces:*

$$i) \cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

$$ii) \operatorname{senh} c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha}$$

DEMOSTRACIÓN: Nuevamente usando transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ y posiblemente $z \rightarrow -\bar{z}$, se puede suponer que T es el triángulo con vértices v_a, v_b en el círculo $|z| = 1$, es decir $v_a = e^{i\theta}, v_b = e^{i\phi}$, donde $0 < \theta < \phi < \pi$, (ver figura 4.9). (Esto se puede hacer ya que estas transformaciones son conformes y son isometrías).

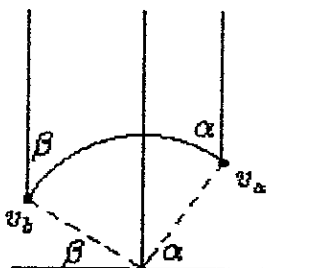


Figura 4.9: Triángulo con vértices $\infty, v_a = e^{i\theta}, v_b = e^{i\phi}$.

Usando el teorema 2.1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \cosh b &= \cosh \rho(v_a, v_b) = 1 + \frac{(\cos \theta - \cos \phi)^2 + (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \phi)^2}{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \\ &= 1 + \frac{2 - 2 \cos \theta \cos \phi - 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \\ &= \frac{1 - \cos \theta \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de parámetros $\alpha = \theta, \beta = \pi - \phi$ se tiene el resultado.

Para ii) se utiliza (1.4), es decir

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^2 c &= \left(\frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}, \end{aligned}$$

desarrollando $\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta$ como $(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)$ y eliminando se tiene

$$\operatorname{senh}^2 c = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta} = \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \right)^2$$

lo cual demuestra *ii*). □

4.4 Triángulos con ángulos rectos

En esta sección estudiamos triángulos con ángulos $\alpha, \beta, \pi/2$. Usando una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ se puede suponer que $v_c = i$ y con una transformación elíptica se puede rotar de tal manera que el segmento $[v_c, v_a]$ esté contenido en el círculo $|z| = 1$. Por lo que se puede suponer que $v_c = i, v_b = ik, v_a = s + it$ donde $k > 1, s^2 + t^2 = 1$, (ver figura 4.10).

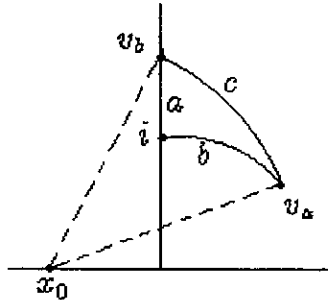


Figura 4.10: Triángulo con un ángulo recto.

El siguiente teorema es el teorema de Pitágoras en su forma hiperbólica:

Teorema 4.4.1 Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \pi/2$, entonces

$$\cosh c = \cosh a \cosh b \tag{4.2}$$

DEMOSTRACIÓN: Usando el teorema 2.1.1 se tiene

$$\cosh c = \cosh \rho(v_b, v_a) = 1 + \frac{s^2 + (t - k)^2}{2kt} = \frac{s^2 + t^2 + k^2}{2kt} = \frac{1 + k^2}{2kt},$$

también

$$\cosh b = \cosh \rho(v_c, v_a) = 1 + \frac{s^2 + (t - 1)^2}{2t} = \frac{s^2 + t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{t},$$

$$\cosh a = \cosh \rho(v_b, v_c) = 1 + \frac{(1 - k)^2}{2k} = \frac{1 + k^2}{2k}. \tag{4.3}$$

Por lo tanto se sigue el resultado. \square

Obsérvese también que

$$\tanh b = s \quad (4.4)$$

Esto se sigue ya que $\cosh b = \frac{1}{t}$, entonces

$$\sinh b = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \sqrt{\frac{s^2}{t^2}} = \frac{s}{t},$$

por lo que

$$\tanh b = \frac{\sinh b}{\cosh b} = \frac{s/t}{1/t} = s.$$

El siguiente teorema relaciona 2 lados y un ángulo:

Teorema 4.4.2 *Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \pi/2$, entonces:*

- i) $\tanh b = \sinh a \tan \beta$
- ii) $\sinh b = \sinh c \sen \beta$
- iii) $\tanh a = \tanh c \cos \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Como en el teorema (4.4.1) podemos suponer que el triángulo está definido por $i, ki, s + it$. En la figura 4.10 la geodésica que pasa por v_a y v_b tiene centro euclidean x_0 , igualando distancias de x_0 a v_a y v_b se tiene $|ki - x_0|^2 = |s + it - x_0|^2$, esto es $x_0^2 + k^2 = s^2 - 2sx_0 + x_0^2 + t^2$ por lo tanto,

$$k^2 = 1 - 2x_0s, \quad (4.5)$$

de esta igualdad se sigue que $x_0 < 0$, ya que $k > 1$. Obsérvese que el triángulo con vértices $x_0, ki, 0$ tiene ángulo β en x_0 (ver figura 4.10), por lo cual usando (4.5) se tiene

$$\tan \beta = \frac{k}{|x_0|} = \frac{2sk}{k^2 - 1},$$

es decir

$$\tan \beta \left(\frac{k^2 - 1}{2k} \right) = s.$$

Ahora se sigue de (4.3)

$$\sinh^2 a = \left(\frac{1+k^2}{2k} \right) - 1 = \frac{1+2k^2+k^4-4k^2}{4k^2} = \left(\frac{k^2-1}{2k} \right)^2.$$

Finalmente usando (4.4) se sigue i).

Para demostrar *ii*) usando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\operatorname{senh}^2 a = \left(\frac{\cosh c}{\cosh b} \right)^2 - 1.$$

Ahora usando *i*) se sigue

$$\operatorname{senh}^2 a = \left(\frac{\tanh b}{\tan \beta} \right)^2,$$

por lo que

$$\frac{\cosh^2 c - \cosh^2 b}{\cosh^2 b} = \frac{\tanh^2 b}{\tan^2 \beta},$$

esto es

$$\tan^2 \beta (\cosh^2 c - \cosh^2 b) = \tanh^2 b \cosh^2 b,$$

$$\tan^2 \beta (1 + \operatorname{senh}^2 c - 1 - \operatorname{senh}^2 b) = \operatorname{senh}^2 b,$$

$$\tan^2 \beta \operatorname{senh}^2 c = \operatorname{senh}^2 b (1 + \tan^2 \beta),$$

$$\tan^2 \beta \operatorname{senh}^2 c = \operatorname{senh}^2 b \left(\frac{1}{\cos^2 \beta} \right),$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 c = \operatorname{senh}^2 b,$$

por lo que se sigue *ii*).

Para demostrar *iii*) se sustituye *ii*) en *i*) obteniéndose

$$\frac{\operatorname{senh} c \operatorname{sen} \beta}{\cosh b} = \operatorname{senh} a \tan \beta$$

Ahora utilizando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\operatorname{senh} c \operatorname{sen} \beta = \operatorname{senh} a \tan \beta \frac{\cosh c}{\cosh a},$$

y el resultado se sigue inmediatamente. □

El siguiente teorema relaciona un lado con 2 ángulos:

Teorema 4.4.3 Sea T un triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \pi/2$, entonces

i) $\cosh a \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$

ii) $\cosh c = \cot \alpha \cot \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Intercambiando a por b y β por α en el teorema 4.4.2 *i*) se tiene

$$\operatorname{senh} b \tan \alpha = \tanh a. \tag{4.6}$$

Ahora tomando cuadrados en (4.6) se tiene

$$(\cosh^2 b - 1) \tan^2 \alpha = \tanh^2 a, \text{ i.e.,}$$

$$\cosh^2 b = \frac{\tanh^2 a}{\tan^2 \alpha} + 1.$$

Ahora usando 4.4.2 i) y esta última identidad se tiene

$$\operatorname{senh}^2 a \tan^2 \beta = \frac{\frac{\tanh^2 a}{\tan^2 \alpha}}{\frac{\tanh^2 a}{\tan^2 \alpha} + 1} = \frac{\tanh^2 a}{\tanh^2 a + \tan^2 \alpha},$$

despejando se tiene

$$\begin{aligned} (\tanh^2 a + \tan^2 \alpha)(\operatorname{senh}^2 a \tan^2 \beta) &= \tanh^2 a, \\ \frac{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2 a \tan^2 \beta + \tan^2 \alpha \operatorname{senh}^2 a \tan^2 \beta}{\tanh^2 a} &= 1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{senh}^2 a \tan^2 \beta + \tan^2 \alpha \cosh^2 a \tan^2 \beta = 1,$$

$$\tan^2 \beta (\operatorname{senh}^2 a + \cosh^2 a \tan^2 \alpha) = 1,$$

$$\tan^2 \beta (\cosh^2 a - 1 + \cosh^2 a \tan^2 \alpha) = 1,$$

$$\cosh^2 a - 1 + \cosh^2 a \tan^2 \alpha = \cot^2 \beta$$

$$\cosh^2 a (\tan^2 \alpha + 1) - 1 = \cot^2 \beta,$$

$$\cosh^2 a \sec^2 \alpha = \cot^2 \beta + 1,$$

$$\cosh^2 a = \frac{\csc^2 \beta}{\sec^2 \alpha},$$

lo cual prueba i).

Para ii) intercambiamos a por b en i) y se obtiene

$$\cosh b = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Ahora multiplicando por la identidad i) se tiene

$$(\cosh a)(\cosh b) = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \cot \beta \cot \alpha.$$

Finalmente se sigue el resultado del teorema de Pitágoras hiperbólico. \square

4.5 Ley de los senos y cosenos

Teorema 4.5.1 Dado un triángulo hiperbólico con vértices finitos, lados a, b, c y ángulos α, β, γ , se tiene:

$$\frac{\sinh a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sinh b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sen} \gamma} \quad (\text{Ley de los senos}).$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \quad (\text{Ley de los cosenos I}).$$

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \quad (\text{Ley de los cosenos II}).$$

DEMOSTRACIÓN: Primero demostramos la ley de los cosenos I.

Usando el modelo del disco podemos suponer (aplicando isometrías) que $v_c = 0$ y $v_a > 0$ como en la figura 4.11.

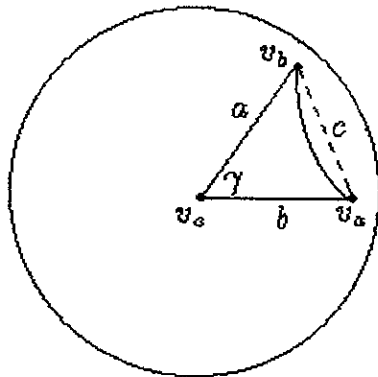


Figura 4.11: Triángulo con un vértice en el origen.

Usando las fórmulas de la distancia hiperbólica en el disco teorema 2.1.3 se tiene que:

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(0, v_a) \right) = \left| \frac{-v_a}{1-0} \right| = v_a$$

y

$$e^{i\gamma} \tanh \left(\frac{1}{2} \rho(0, v_b) \right) = e^{i\gamma} | -v_b | = v_b,$$

ahora usando la identidad (1.8), el teorema 2.1.3 y la ley de los cosenos euclídeana se tiene

$$\begin{aligned} \cosh c &= 2 \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(v_a, v_b) \right) + 1 = \frac{2|v_a - v_b|}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)} + 1 \\ &= \frac{2|v_a - v_b|^2 + (1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(|v_a|^2 + |v_b|^2 - 2|v_a||v_b|\cos\gamma) + 1 - |v_a|^2 - |v_b|^2 + |v_a|^2|v_b|^2}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)} \\
&= \frac{|v_a|^2 + |v_b|^2 - 4|v_a||v_b|\cos\gamma + 1 + |v_a|^2|v_b|^2}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)},
\end{aligned}$$

si denotamos \tanh por T , \cosh por C , \sinh por S se tiene

$$\cosh c = \frac{T^2(b/2) + T^2(a/2) - 4T(b/2)T(a/2)\cos\gamma + 1 + T^2(a/2)T^2(b/2)}{(1 - T^2(b/2))(1 - T^2(a/2))},$$

usando $1 - \tanh^2 r = \sec^2 r$ se tiene

$$\begin{aligned}
\cosh c &= C^2(a/2)C^2(b/2)[T^2(b/2) + T^2(a/2) - 4T(b/2)T(a/2)\cos\gamma + 1 \\
&\quad + T^2(a/2)T^2(b/2)] \\
&= S^2(b/2)C^2(a/2) + S^2(a/2)C^2(b/2) - 4S(b/2)C(b/2)S(a/2)C(a/2)\cos\gamma \\
&\quad + S^2(a/2)S^2(b/2) + C^2(a/2)C^2(b/2) \\
&= S^2(b/2)[C^2(a/2) + S^2(a/2)] + C^2(b/2)[S^2(a/2) + C^2(a/2)] \\
&\quad - 4S(b/2)C(b/2)S(a/2)C(a/2)\cos\gamma, \\
&= [C^2(a/2) + S^2(a/2)][S^2(b/2) + C^2(b/2)] - 4S(b/2)C(b/2)S(a/2)C(a/2)\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene $\cosh 2r = \cosh^2 r + \sinh^2 r$ y $\sinh 2r = 2\cosh r \sinh r$ por lo que

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh b \sinh a \cos\gamma.$$

Ahora probamos la ley de los senos: Usando la ley de cosenos I se tiene

$$\cos\gamma = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sinh c}{\sinh a}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh c \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}\right)^2} \\
&= \frac{\sinh^2 c \sinh^2 a \sinh^2 b}{\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2},
\end{aligned}$$

el denominador de esta última igualdad es

$$\begin{aligned}
&(\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 b - 1) - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2 \\
&= -\cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1 + 2\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c.
\end{aligned}$$

la cual es una expresión simétrica en a, b y c , como el numerador también es simétrico, esta última expresión también se obtiene al tomar b y β o a y α , por lo que se sigue la ley de los senos.

Por último se demuestra la ley de los cosenos II: Escribimos $A = \cosh a$, $B = \cosh b$, $C = \cosh c$, utilizando la ley de cosenos I se obtiene

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}}$$

por lo que

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = 1 - \frac{(AB - C)^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} = \frac{(A^2 - 1)(B^2 - 1) - (AB - C)^2}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)} = \frac{D}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)},$$

donde

$$D = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2),$$

obsérvese que D es una expresión simétrica con respecto a A, B, C . Análogamente

$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{D}{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}$ y $\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{D}{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}$. Aplicando de nuevo la ley de cosenos I para $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ y sustituyendo en

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

se obtiene

$$\frac{\frac{CB - A}{\sqrt{C^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}} \frac{CA - B}{\sqrt{C^2 - 1}\sqrt{A^2 - 1}} + \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}}}{\sqrt{C^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}\sqrt{A^2 - 1}},$$

simplificando esta expresión se tiene

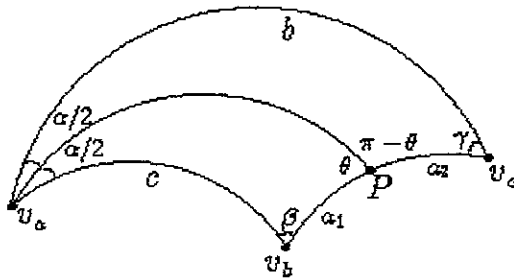
$$\begin{aligned} & \frac{(CB - A)(CA - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{D} \\ &= \frac{C(2ABC - A^2 - B^2 - C^2 + 1)}{D} = C. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \cosh c$. □

Proposición 4.5.2 Sea T un triángulo con lados a, b, c finitos entonces, la bisectriz del ángulo por v_a pasa por el punto medio de $[v_b, v_c]$ si y sólo si $b = c$, es decir, si T es un triángulo isósceles.

DEMOSTRACIÓN: Sea P el punto medio del lado $[v_b, v_c]$ y sean θ y $\pi - \theta$ los ángulos en P determinados por los triángulos $T(v_a, v_b, P)$ y $T(v_a, v_c, P)$, ver figura 4.12, aplicando la ley de los senos a este triángulo se tiene

$$\operatorname{sen} h c = \frac{\operatorname{sen} h(a/2)}{\operatorname{sen} \alpha/2} (\operatorname{sen} \theta) = \frac{\operatorname{sen} h(a/2)}{\operatorname{sen} \alpha/2} \operatorname{sen} (\pi - \theta) = \operatorname{sen} h b,$$

Figura 4.12: Bisectriz por u_a

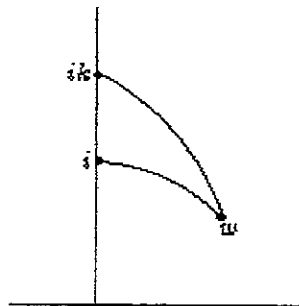
y entonces $b = c$.

Para probar el recíproco, denotamos también por P el punto de intersección de la bisectriz por u_a con el lado $[u_b, u_c]$, queremos probar que P es el punto medio, denotamos por a_1 la longitud de $[u_b, P]$ y por a_2 la longitud de $[u_c, P]$; de nuevo por la ley de los senos

$$\operatorname{senh} a_1 = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} (\alpha/2) = \frac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)} \operatorname{sen} (\alpha/2) = \operatorname{senh} a_2$$

□

Es claro que si ϕ es una isometría y T es un triángulo entonces $\phi(T)$ es otro triángulo con los mismos ángulos que T y cuyos lados tienen la misma longitud que los de T , ya que ϕ es conforme (y es isometría). El recíproco también es cierto, i.e., si T_1 y T_2 son dos triángulos con lados de longitud a, b, c y ángulos α, β, γ entonces existe una isometría que manda T_1 a T_2 . Para probar esto obsérvese que cualquier triángulo con dichas características se puede enviar a un triángulo con vértices i, ik, w , donde $k > 1$, $\operatorname{Re} w > 0$.

Figura 4.13: Triángulo con vértices i, ik, w .

Este se puede hacer enviando uno de los lados al eje imaginario y posteriormente aplicando homotecias y las transformaciones $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ y $z \rightarrow -\bar{z}$. Si se envía el

lado de longitud a al eje imaginario mandando v_b a i y v_c a ki es claro que v , ik , y w quedan determinados unívocamente.

Una observación interesante es que en geometría hiperbólica los vértices de un triángulo no necesariamente determinan un círculo, por ejemplo, considérese \mathbb{H}^2 y el triángulo T determinado por $\alpha/2$, α y 2α , donde $\alpha = e^{\pi/4}$, ver figura 4.14.

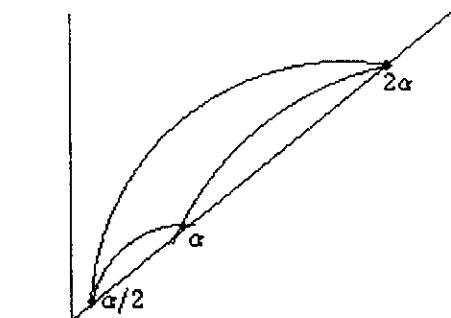


Figura 4.14: Triángulo cuyos vértices no determinan un círculo.

4.6 Área de un triángulo

A continuación se menciona un importante resultado que se conoce como el teorema de Gauss-Bonnet (ver [5] pág. 229.) Se denotará el área hiperbólica como $A(T)$.

Teorema 4.6.1 Sea T un triángulo con ángulos α, β, γ entonces

$$A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

DEMOSTRACIÓN: Considérese primero el caso de un triángulo T con un vértice al infinito y v_a, v_b en $|z| = 1$ (ver figura 4.15)

Calculamos primero el área de la región $T \cap W$, donde

$$W = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im } z \leq k\},$$

aplicando el teorema de Fubini el área de $T \cap W$ está dada por

$$\begin{aligned} \int_{\cos \pi - \alpha}^{\cos \beta} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^k \frac{dy}{y^2} \right) dx &= \int_{\cos \pi - \alpha}^{\cos \beta} \left(-\frac{1}{y} \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^k \right) dx \\ &= \int_{\cos \pi - \alpha}^{\cos \beta} \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \end{aligned}$$

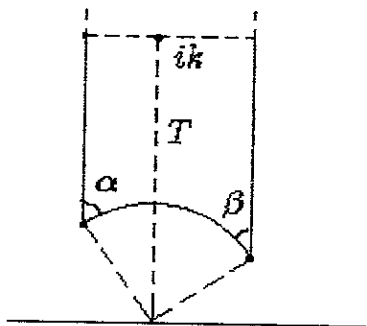


Figura 4.15:

$$= -\frac{1}{k}(\cos(\pi - \alpha) - \cos \beta) + \int_{\cos \pi - \alpha}^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

para el segundo sumando se hace el cambio de variable $x = \cos \theta$, entonces se tiene

$$\int_{\pi - \alpha}^{\beta} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} d\theta = \int_{\pi - \alpha}^{\beta} -d\theta = -[\beta - (\pi - \alpha)] = \pi - \alpha - \beta.$$

Por lo tanto $A(T \cap W) = -\frac{1}{k}(\cos(\pi - \alpha) - \cos \beta) + \pi - \alpha - \beta$, $\forall k > 1$ esta expresión está acotada. Finalmente tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene la integral impropia $A(T) = \pi - \alpha - \beta$, cf. [3] pág. 471.

Consideramos ahora el caso de un triángulo con vértices finitos v_a, v_b, v_c y prolongamos la geodésica por v_a y por v_c hasta intersectar la recta al infinito en un punto w (ver figura 4.16), entonces

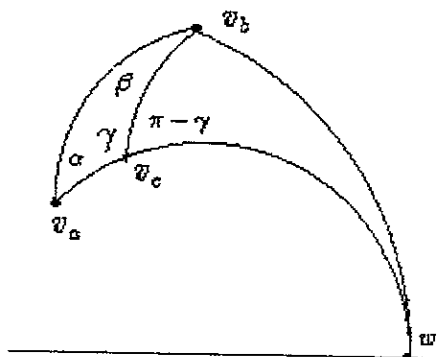


Figura 4.16:

$$\begin{aligned} A(T(v_a, v_b, v_c)) &= A(T(v_a, w, v_b)) - A(T(v_a, v_c, w)) \\ &= \pi - \alpha - \beta - \beta' - (\pi - \beta' - (\pi - \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

En el caso de 2 vértices al infinito podemos suponer que el triángulo está determinado por $0, w, \infty$, con $\operatorname{Re} w > 0$ y denotamos por β el ángulo en w (transformando el triángulo bajo un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ y la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$). Ver figura 4.17

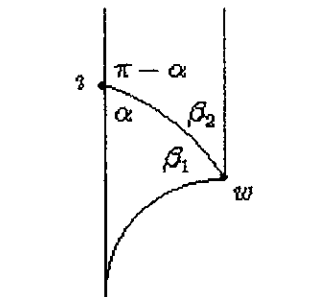


Figura 4.17:

Ahora trazamos una geodésica de w a i , por lo tanto se tiene (ver figura 4.16)

$$\begin{aligned} A(T(0, \infty, w)) &= A(T(0, i, w)) + A(T(i, w, \infty)) \\ &= \pi - (\alpha_1 + \beta_1 + \pi - (\beta_2 + \gamma_2)) = \pi - \alpha - \beta_1 + \pi - [(\pi - \alpha) + \beta_2] = \pi - \beta, \end{aligned}$$

donde α es el ángulo que forma el eje imaginario con la geodésica $[i, w]$, β_1 , el formado por las geodésicas por 0 y w y por $[w, i]$, etc. (ver figura 4.17).

En el caso de 3 vértices al infinito podemos suponer que uno de ellos es ∞ y también aplicar una traslación seguida de una homotecia de tal manera que el triángulo esté determinado por $-1, 1, \infty$ y trazar una geodésica como en la figura 4.18.

Finalmente sea T_1 el triángulo $T(-1, i, \infty)$ y $T_2 = T(i, 1, \infty)$, entonces se tiene

$$A(T) = A(T_1) + A(T_2) = \pi - \pi/2 + \pi - \pi/2 = \pi.$$

□

Corolario 4.6.2 Sea T un triángulo con ángulos α, β, γ entonces

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Proposición 4.6.3 Sea T un triángulo con vértices finitos y lados a, b, c entonces,

$$a \leq b \leq c \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

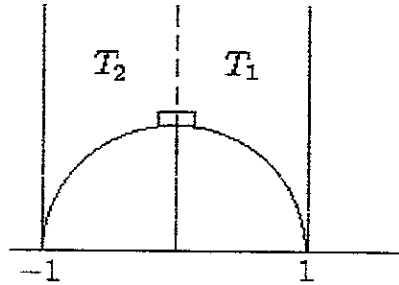


Figura 4.18:

DEMOSTRACIÓN: Primero probamos la necesidad. La ley de los senos dice

$$\operatorname{senh} a = \frac{\operatorname{senh} b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \quad (4.7)$$

ahora como $\operatorname{senh}(x)$ es creciente se tiene

$$\operatorname{senh} a \leq \operatorname{senh} b \leq \operatorname{senh} c, \quad (4.8)$$

usando (4.7) y (4.8) se sigue que

$$\frac{\operatorname{senh} b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \leq \operatorname{senh} b,$$

es decir, $\operatorname{sen} \alpha \leq \operatorname{sen} \beta$, análogamente se cumple $\operatorname{sen} \beta \leq \operatorname{sen} \gamma$. Si los 3 ángulos son agudos se sigue el resultado i.e., $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

En caso contrario se sigue del corolario anterior que 2 ángulos son agudos y el otro obtuso, debemos probar que γ es el ángulo obtuso. Para probar esto, se renombra el triángulo original por $T(z_1, z_2, z_3)$ donde $[z_1, z_2]$ es el lado opuesto al ángulo opuesto al ángulo obtuso. Ahora se construye una geodésica por z_3 que forme un ángulo $\pi/2$ con el lado $[z_2, z_3]$ y se denota w a la intersección de la geodésica con el lado $[z_1, z_2]$, ver figura 4.19

Se tiene por el corolario y por la primera parte $\rho(z_2, w) \geq \rho(z_3, z_2)$, por lo cual $\rho(z_1, z_2) \geq \rho(z_3, z_2)$. Análogamente se tiene $\rho(z_1, w') \geq \rho(z_1, z_3)$ y $\rho(z_1, z_2) \geq \rho(z_1, z_3)$, ver figura 4.19. Por consiguiente el ángulo obtuso es el opuesto al lado de mayor longitud i.e., γ . Por lo tanto $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Para demostrar la suficiencia supóngase lo contrario, por ejemplo, $a \leq b \leq c$. usando la primera parte se tendría $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ contradiciendo $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, etc. \square

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente

Corolario 4.6.4 *Un triángulo es equilátero si y sólo si sus ángulos interiores son iguales.*

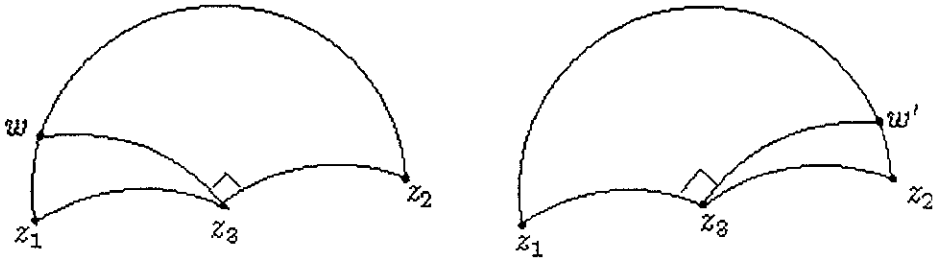


Figura 4.19: En un triángulo hiperbólico el lado opuesto al ángulo más grande es el mayor.

Proposición 4.6.5 Sea T un triángulo equilátero con lados de longitud a y ángulos internos α entonces

$$2 \cosh\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Usando la ley de cosenos II y (1.7) se tiene

$$\begin{aligned} 4 \cosh^2\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2(\cosh a + 1) \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right) \\ &= 2 \left(\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + 1\right) \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right) \\ &= \frac{2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos^2 \alpha) 2} + 1 - \cos \alpha = 1 \end{aligned}$$

□

4.7 Círculo inscrito

Teorema 4.7.1 Sea T un triángulo con lados de longitud finita, entonces las bisectrices por cada vértice se intersectan en un punto interior del triángulo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $T(v_a, v_b, v_c)$ el triángulo con ángulos internos α, β, γ y lados de longitud a, b, c respectivamente (ver figura 4.20)

Sin perder generalidad podemos suponer que $\gamma \leq \alpha, \beta$. Sean l_1 y l_2 las bisectrices por v_a y v_b respectivamente, por conexidad l_1 y l_2 se intersectan en un punto $\lambda \in \operatorname{Int} T$, el segmento $[v_c, \lambda]$ forma dos ángulos por v_c , digamos γ_1 y γ_2 , por hipótesis $\gamma < \pi/2$.

Sean w_a, w_b, w_c tales que los segmentos $[\lambda, w_a], [\lambda, w_b], [\lambda, w_c]$ son ortogonales (respectivamente) con los lados del triángulo $T(v_a, v_b, v_c)$ (ver figura 4.20).

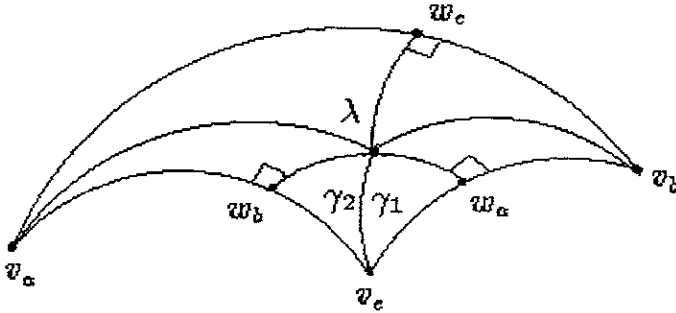


Figura 4.20: Las bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto interior λ .

Ahora aplicando la ley de los senos a los triángulos $T(\lambda, v_b, w_c)$ y $T(\lambda, v_b, w_a)$ se tiene

$$\operatorname{senh} \rho(\lambda, w_c) = \frac{\operatorname{senh} \rho(\lambda, v_b)}{\operatorname{sen} \pi/2} \operatorname{sen} \beta/2 = \operatorname{senh} \rho(\lambda, w_a),$$

por lo cual $\rho(\lambda, w_c) = \rho(\lambda, w_a)$.

Procediendo de la misma manera con los triángulos $T(\lambda, v_a, w_c)$ y $T(\lambda, v_a, w_b)$ se tiene

$$\operatorname{senh} \rho(\lambda, w_c) = \frac{\operatorname{senh} \rho(\lambda, v_a)}{\operatorname{sen} \pi/2} \operatorname{sen} \alpha/2 = \operatorname{senh} \rho(\lambda, w_b)$$

y entonces $\rho(\lambda, w_c) = \rho(\lambda, w_b)$.

Por lo tanto $[\lambda, w_a]$, $[\lambda, w_b]$, $[\lambda, w_c]$ tienen la misma longitud y w_a, w_b, w_c están en un círculo hiperbólico con centro λ .

Finalmente probamos que $\gamma_1 = \gamma_2$, esto se sigue de la ley de los senos aplicada a los triángulos $T(\lambda, v_c, w_b)$ y $T(\lambda, v_c, w_a)$, en efecto

$$\operatorname{sen} \gamma_1 = \frac{\operatorname{senh} \rho(\lambda, w_b)}{\operatorname{senh} \rho(\lambda, v_c)} \operatorname{sen} \pi/2 = \frac{\operatorname{senh} \rho(\lambda, w_a) \operatorname{sen} \pi/2}{\operatorname{senh} \rho(\lambda, v_c)} = \operatorname{sen} \gamma_2.$$

Por consiguiente como $\gamma < \pi/2$, se tiene $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Definición 10 El círculo con centro en λ que pasa por w_a, w_b, w_c se llama círculo inscrito de T .

Teorema 4.7.2 Sea T un triángulo con lados a, b, c finitos, el radio del círculo inscrito de T está dado por

$$\tanh^2 R = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1}{2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)} \quad (4.9)$$

DEMOSTRACIÓN: Sean v_a, v_b, v_c los vértices de T , obsérvese que

$$\operatorname{sen} \alpha = (1 + \cos \alpha) \tan(\alpha/2) \tag{4.10}$$

está igualdad es cierta ya que multiplicando $\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$ a la identidad

$$\cos \alpha + 1 = 2 \cos(\alpha/2)$$

se obtiene 4.10. Usaremos los símbolos w_a, w_b, w_c y λ como en la figura 4.20 y denotaremos $\rho(v_a, w_c) = x, \rho(w_c, v_b) = y$.

Ahora se sigue del teorema 4.4.2 aplicado al triángulo $T(v_a, w_c, \lambda)$ que

$$\operatorname{senh} x \tan(\alpha/2) = \tanh R, \tag{4.11}$$

usando 4.10 y 4.11 se tiene

$$\operatorname{senh} x \operatorname{sen} \alpha = \tanh R(1 + \cos \alpha), \tag{4.12}$$

el mismo razonamiento para β y y muestra que

$$\operatorname{senh} y \operatorname{sen} \beta = \tanh R(1 + \cos \beta). \tag{4.13}$$

Obsérvese que

$$\cosh c = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

y por la ley de los cosenos II

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

por lo tanto,

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

lo cual equivale a

$$\begin{aligned} & [(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) - (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)(\operatorname{senh} x \operatorname{senh} y)]^2 \\ & = (\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta)(\cosh^2 x \cosh^2 y), \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta (\operatorname{senh}^2 x + 1)(\operatorname{senh}^2 y + 1), \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & - 2 \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ & = \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta (\operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{senh}^2 y + 1), \end{aligned}$$

simplificando se tiene

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & - 2 \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & = \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta, \end{aligned}$$

ahora como

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$$

se tiene sustituyendo, cancelando y despejando

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 - 2 \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & = 2 \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 x \\ & \quad + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 y. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por otra parte usando 4.12 y 4.13, la identidad 4.9 se cumple si y sólo si

$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1}{2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y}{(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)},$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 - 2 \cos \gamma \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\ & = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y. \end{aligned}$$

Finalmente usando 4.14 se debe probar que

$$\begin{aligned} & 2 \cos \alpha \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{senh}^2 y \\ & = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y; \end{aligned}$$

y usando de nuevo 4.12 y 4.13, la identidad 4.9 es cierta si y sólo si

$$\begin{aligned} & 2(1 + \cos \alpha) \operatorname{tanh} R(1 + \cos \beta) \operatorname{tanh} R \cos \alpha \cos \beta + (1 + \cos \alpha)^2 \operatorname{tanh}^2 R \operatorname{sen}^2 \beta \\ & \quad + \operatorname{sen}^2 \alpha (1 + \cos \beta)^2 \operatorname{tanh}^2 R \\ & = 2(1 + \cos \alpha) \operatorname{tanh} R(1 + \cos \beta) \operatorname{tanh} R, \end{aligned}$$

está igualdad es cierta si y sólo si

$$\begin{aligned}
 & 2(1 + \cos \alpha) \tanh R(1 + \cos \beta) \tanh R \cos \alpha \cos \beta + (1 + \cos \alpha)^2 \tanh^2 R(1 - \cos^2 \beta) \\
 & \qquad (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos \beta)^2 \tanh^2 R \\
 & = 2(1 + \cos \alpha) \tanh R(1 + \cos \beta) \tanh R,
 \end{aligned}$$

cancelando $\tanh^2 R$, está igualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}
 & 2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta) \cos \alpha \cos \beta + (1 + \cos \alpha)^2(1 - \cos^2 \beta) + (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos \beta)^2 \\
 & \qquad = 2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta),
 \end{aligned}$$

lo cual se cumple ya que

$$2 \cos \alpha \cos \beta + (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta) + (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta) = 2$$

□

El teorema 4.7.2 se generaliza para el caso en que hay algún vértice infinito. antes se muestra una manera de encontrar la bisectriz en el caso de ángulos cero: Consideramos primero el caso cuando el vértice es infinito y las geodésicas L_1 y L_2 equidistan euclideanamente del eje imaginario (ver figura 4.21)

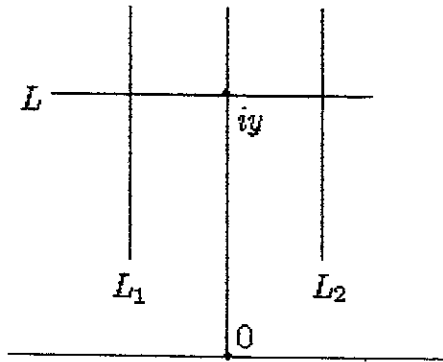


Figura 4.21:

Sea L cualquier horociclo, si $z = L \cap L_1$ y $-\bar{z} = L \cap L_2$ son los puntos de intersección, sea A_1 el segmento de L que une z con iy , donde $z = x + iy$ y A_2 es el segmento de L que une $-\bar{z}$ con iy . Como $z \rightarrow -\bar{z}$ es una isometría hiperbólica se tiene $l_h(A_1) = l_h(A_2)$. Como esto es cierto para cualquier horociclo es natural definir en este caso al eje imaginario positivo como la bisectriz.

Otro caso es cuando el vértice es infinito y las geodésicas L_1 y L_2 equidistan euclideanamente de una geodésica $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, (ver figura 4.22)

Usando traslaciones y la isometría $z \rightarrow -\bar{z}$, se aplica el mismo argumento y se define la bisectriz como la recta $x = a$.

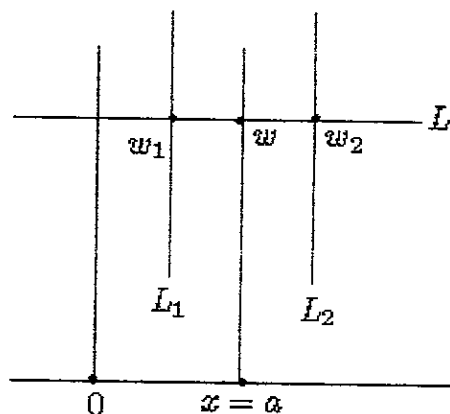


Figura 4.22:

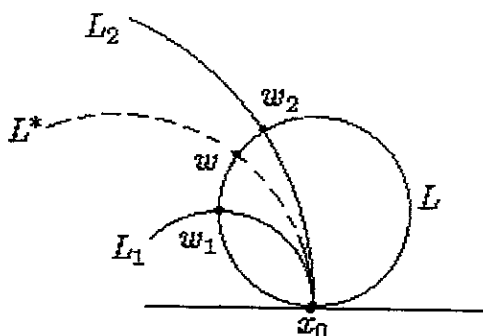


Figura 4.23:

El caso general es cuando el vértice es x_0 , $x_0 \in \mathbb{R}$ (ver figura 4.23)

Mediante una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ se puede enviar x_0 a ∞ y se define la bisectriz en x_0 , que denotamos por L^* , como la preimagen de la bisectriz en ∞ , ver figura 4.23, obsérvese que si L es un horociclo basado en x_0 , tomando

$$w_1 = L \cap L_1, \quad w_2 = L \cap L_2, \quad w = L \cap L^*.$$

y A_1 el segmento de L que une w_1 con w y A_2 el segmento de L que une w con w_2 se tiene que $l_h(A_1) = l_h(A_2)$. Esto se sigue ya que las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías y mandan horociclos en horociclos y por lo tanto L^* satisface la misma propiedad que las bisectrices en ∞ .

Corolario 4.7.3 Sea T un triángulo con ángulos $(\alpha, \beta, 0)$ entonces el radio del

círculo inscrito está dado por

$$\tanh^2 R = \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)^2}{4(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea T un triángulo con vértices v_a, v_b , que sin perder generalidad podemos suponer están en el círculo unitario como en la figura 4.24

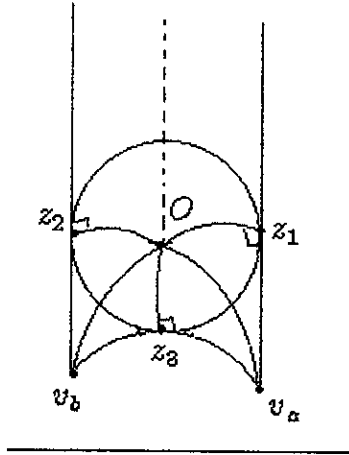


Figura 4.24:

Sea O el punto de intersección de las bisectrices por v_a y v_b . También sean z_1, z_2, z_3 tales que $[O, z_1], [O, z_2], [O, z_3]$ son los segmentos ortogonales a los lados $[v_a, \infty), [v_b, \infty), [v_a, v_b]$ respectivamente. Ahora utilizando la ley de los senos, primero para los triángulos $T(O, z_1, v_a), T(O, v_a, z_3)$ y después para los triángulos $T(O, z_3, v_b), T(O, z_2, v_b)$ se tiene

$$\rho(O, z_1) = \rho(O, z_2) = \rho(O, z_3).$$

Por lo que existe un círculo inscrito tangente a $[v_a, \infty), [v_b, \infty), [v_a, v_b]$. Para la demostración de la fórmula se intercambia la ley de los cosenos II por el teorema 4.3.1 i) (fórmula con un vértice al infinito) en la demostración del teorema 4.7.2 y exactamente los mismos argumentos se aplican. \square

Corolario 4.7.4 Sea T un triángulo con ángulos $(\alpha, 0, 0)$ entonces el círculo inscrito está dado por

$$4 \tanh^2 R = \cos^2(\alpha/2).$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que T es un triángulo tal que $v_a = i, v_b = x, x > 0, v_c = \infty$ como en la figura 4.25

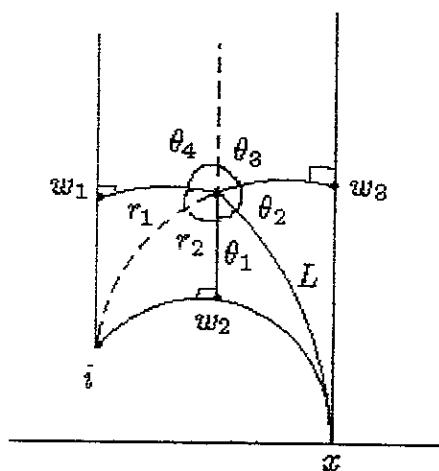


Figura 4.25:

Sea O la intersección de la bisectriz por i y por ∞ . Sean w_1, w_2, w_3 tales que $[O, w_1], [O, w_2], [O, w_3]$ son ortogonales a $[i, \infty), [i, x], [x, \infty)$ respectivamente. Ahora por la ley de los senos aplicada a los triángulos $T(w_1, i, O)$ y $T(i, w_2, O)$ se tiene que $\rho(O, w_1) = \rho(w_2, O)$, además como la reflexión en la bisectriz por el vértice ∞ es una isometría, se tiene que $\rho(O, w_1) = \rho(O, w_3)$.

Por lo que se concluye que existe un círculo inscrito tangente a los lados $[i, \infty), [i, x], [x, \infty)$. Resulta que la geodésica L por O y x es precisamente la bisectriz ya que si φ es la reflexión por la geodésica L , φ preserva el círculo C con centro en O que pasa por w_2 y w_3 (el círculo inscrito) ya que φ es una isometría (φ es una isometría puesto que φ es conjugada en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $z \rightarrow -\bar{z}$) además φ intercambia las geodésicas por x , en particular hay dos geodésicas tangentes a C , por lo cual φ transforma una tangente en la otra (ver figura 4.26).

Sean $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ángulos en el centro como en la figura 4.25, utilizando el teorema 4.4.2 iii) para los triángulos $T(w_1, O, i)$ y $T(i, w_2, O)$ se tiene que

$$\tanh \rho(i, O) \cos r_1 = \tanh R \quad \text{y} \quad \tanh \rho(i, O) \cos r_2 = \tanh R$$

por lo que $\cos r_1 = \cos r_2$ es decir, $r_1 = r_2$.

También utilizamos el teorema 4.2.1 iii) (Ángulo de paralelismo) para los triángulos $T(\infty, w_1, O), T(\infty, O, w_3), T(O, w_3, x), T(O, w_2, x)$ se tiene que

$$\cos \theta_i = \tanh R, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.15)$$

por lo que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$.

Por lo tanto $4\theta + 2r = 2\pi$ es decir, $r = \pi - 2\theta$, ahora usando el teorema 4.4.3 i) para el triángulo $T(i, w_1, O)$ se tiene

$$\cosh R \operatorname{sen} r = \cos(\alpha/2)$$

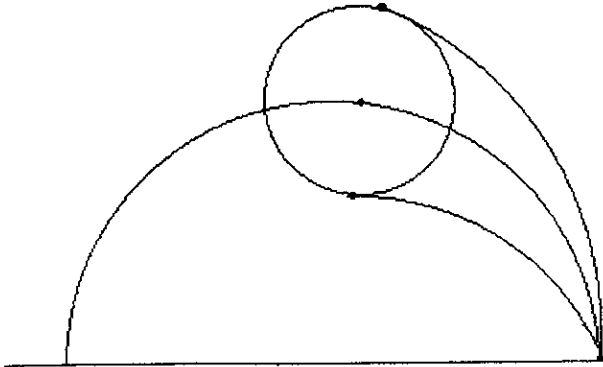


Figura 4.26:

si y sólo si

$$\cosh R \operatorname{sen} 2\theta = \cos(\alpha/2)$$

lo cual equivale a

$$2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cosh R = \cos(\alpha/2)$$

es decir

$$4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\cosh^2 R}.$$

Ahora usando 4.15 se tiene

$$4 \tanh^2 R (1 - \tanh^2 R) = \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\cosh^2 R}$$

si y sólo si

$$4 \tanh^2 R = \cos^2(\alpha/2)$$

□

Para el caso de un triángulo T con 3 ángulos cero, se tiene que el radio del círculo inscrito es constante, para probar esto primero obsérvese que mediante traslación y homotecia, el triángulo T se puede transformar en el triángulo con vértices $-1, 1, \infty$ (ver figura 4.27)

El círculo inscrito tiene centro euclideo $2i$ y radio 1, el centro hiperbólico it esta sobre el eje imaginario y satisface que

$$\rho(3i, ti) = \rho(it, i) \quad \text{es decir,} \quad \log \frac{3}{t} = \log t$$

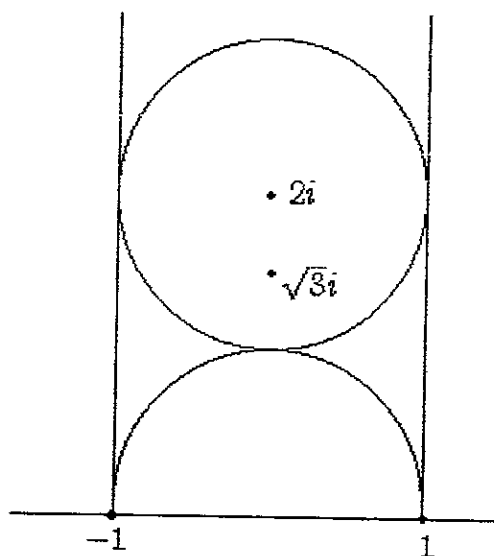


Figura 4.27:

y $t^2 = 3$, $t = \sqrt{3}$ i.e., el centro hiperbólico es $\sqrt{3}i$, el radio hiperbólico es $\rho(\sqrt{3}i, i) = \log \sqrt{3}$, por lo que basta observar que

$$\tanh^2(\log \sqrt{3}) = \left(\frac{e^{\log \sqrt{3}} - e^{-\log \sqrt{3}}}{e^{\log \sqrt{3}} + e^{-\log \sqrt{3}}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^2 = \left(\frac{3-1}{3+1} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

lo cual coincide con la fórmula 4.9 cuando se tienen 3 ángulos cero.

Bibliografía

- [1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [2] A.F. BEARDON, *The geometry of Discrete groups*, Springer Verlag, 1983.
- [3] R. COURANT, *Introducción al cálculo y al análisis Matemático Vol. II*, Limusa, 1979.
- [4] I. N. HERSTEIN *Topics in Algebra*, Xerox Co., 1964.
- [5] G. A. JONES & D. SINGERMAN, *Complex Funtions, An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
- [6] J. LEHNER, *A short Course in Automorphic Functions*, Holt, Renhart and Wilson, 1966.
- [7] J. E. MARSDEN *Basic Complex Analysis*, W.h. Freeman Company, 1987.
- [8] JOHN G. RATCLIFFE, *Foundations of Hiperbolic Manifols*, Springer Verlag, 1994.