21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

MANUAL DE CONCEPTOS Y EJERCICIOS SOBRE TEORIA DEL RIESGO

292913

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

D A V I D I G L E S I A S N A V A

ASESOR: ACT. MARIO ARRIAGA PARRA.

ACATLAN, EDO. DE MEX., SEPTIEMBRE DE 2001.

BAJO EL SIGUIENTE
JURADO:

Presidente:	Act. Luz María Lavín Alanis	Suplente: Dr. Pablo Pérez Akaki
Vocal:	Act. Mario Arriaga Parra	Suplente: Act. Alberto Sánchez Aldana
Secretario:	Act. Víctor M. Acosta Leanos	

Te doy Gracias Dios mío por ponerme retos en mi camino que te ayudan a crecer como persona y a ver la vida de una manera diferente.

Agradezco a:

A mis padres,
Que durante toda mi vida me han sabido orientar y decir que es lo bueno y lo malo, dejándome la libertad de escoger lo que yo considere lo más conveniente.

A mis hermanas,
En las cuales he encontrado un apoyo incondicional y son mi ejemplo espiritual a seguir.

A mi cuñado Jaime,
Por haberme dado muy buenos consejos a través de la realización de este trabajo.

A mi familia,
Que me han acompañado durante todas las etapas de mi vida y que me motivan para seguir adelante.

A mis amigos y compañeros
Que durante toda la carrera me alegraron con su manera de ser, y en especial a Tania Cabello por brindarme su amistad durante muchos años.

A los Act. Mario Arriaga
y al **Act. Alberto Sánchez,**
Que me corrigieron, me sugirieron
ideas, me asesoraron y me
brindaron su amistad durante la
realización de esta tesina.

A todos los sinodales
Por el tiempo y dedicación que
invirtieron en la revisión y análisis
de este trabajo.

A la Sra. Graciela Almazán
Por su amistad y su interés en que
me titulara.

A la Act. Cinthia Olivares
Por haberme sugerido el tema
principal y hacerme ver la utilidad
que tenía este trabajo.

A la Actuaría,
que me formó durante cuatro años
en la universidad y me sigue
formando en la vida laboral..

A todas y cada una de las
personas que me ayudaron
para que pudiera llevar a
cabo este trabajo.

INDICE

Pág.

Introducción ii

Capítulo I. Generalidades de la Teoría del Riesgo

1.1. Definición 1
1.2. Propósito de la Teoría del Riesgo 2
1.3 Desarrollo de la Teoría del Riesgo. 3
1.4. Teoría Colectiva e Individual del Riesgo 4
1.5. Otros comentarios adicionales 5

Capítulo II. Elementos básicos de cálculo y probabilidad para el desarrollo de la Teoría del Riesgo

2.1. Series de Maclaurin 7
2.2. Variable Aleatoria y función de distribución 8
2.3 Funciones de frecuencia 8
2.3.1. Clasificación 9
2.4. Momentos o valores esperados de una variable aleatoria 10
2.4.1. Propiedades de los valores esperados 11
2.5. Variables aleatorias condicionales 14
2.5.1 Ley de Probabilidad Total 14
2.5.2 Esperanza y varianza condicionales 17
2.6. Suma de variables aleatorias independientes 19
2.7. Función generadora de momentos 22
2.7.1. Propiedades 23
2.8. Otros métodos para la determinación de la suma de variables aleatorias 26
2.9. Momentos centrales, función generadora de momentos y función de distribución de algunas leyes de probabilidad 27

Ejercicios, Capítulo II 32

Capítulo III. Teoría del Riesgo Individual

3.1. Introducción 36
3.2. Conceptos básicos 36
3.3. Aproximación Normal y factor de seguridad 41
3.4. Reaseguro y reclamaciones retenidas 44

Ejercicios, Capítulo III 47

Pág.

Capítulo IV. Teoría del Riesgo Colectivo
4.1. Introducción 50
4.2. El número de reclamaciones 51
4.2.1. Distribución Poisson 51
4.2.2. Distribución Binomial Negativa 53
4.2.3. Distribución Binomial 54
4.3. El monto de reclamaciones 55
4.3.1. Distribución Lognormal 55
4.3.2. Distribución Pareto 57
4.3.3. Distribución Gamma 58
4.4. Distribución del costo total de reclamaciones 60
4.4.1. Modelos compuestos de riesgo 60
4.4.2. Propiedades de las distribuciones compuestas 63
4.5. Métodos para obtener la función de densidad del costo total de reclamaciones 68
4.5.1. Método de recursión 68
4.5.2. Aproximación Normal 73
4.5.3. Métodos basados en momentos 74
4.6. Distribución Poisson compuesta 76
4.7. Combinación de riesgos de Poisson 78

Ejercicios, Capítulo IV 83

Capítulo V. Teoría de la Ruina
5.1. Descripción del problema 88
5.2. Cálculo de la probabilidad de ruina 90
5.3. Modelo de Riesgo Colectivo sobre un periodo de tiempo discreto 100
5.4. Modelo autoregresivo para la reserva de riesgo 102
5.5. Existencia del coeficiente de ajuste 104

Ejercicios, Capítulo V 109

Capítulo VI. Aplicaciones
6.1 Aproximación del Modelo de Riesgo Individual por medio de un Modelo de Riesgo Poisson Compuesto 114
6.2. Reaseguro Stop Loss 119
6.2.1. Fórmula recursiva para la esperanza del reaseguro Stop Loss 121
6.3. Dividendos 122
6.4. Efecto del reaseguro sobre el factor de seguridad relativo y el coeficiente de ajuste Dividendos 124

Ejercicios, Capítulo VI 130

Pág.

Respuestas a Ejercicios, Capítulo II 135

Respuestas a Ejercicios, Capítulo III 144

Respuestas a Ejercicios, Capítulo IV 148

Respuestas a Ejercicios, Capítulo V 156

Respuestas a Ejercicios, Capítulo VI 166

Bibliografía

INTRODUCCION

Las matemáticas actuariales surgidas al final del siglo XVII, se basaron en un enfoque completamente determinístico. Ejemplo de ello fue la construcción de las primeras tablas de mortalidad, las cuales representaban la probabilidad de muerte o supervivencia basadas en la experiencia observada. Asimismo, las primas que se cobraban con el fin de cubrir posibles adversidades, en un principio se calculaban con base en el criterio del suscriptor.

Sin embargo, la incertidumbre es una característica fundamental que se presenta en todo tipo de negocio, tal como en una compañía de seguros, en donde el número y monto de las reclamaciones[1] a menudo varían de manera aleatoria, o como en un banco en donde el comportamiento en las inversiones es también variable.

La necesidad de cambiar las técnicas determinísticas por las probabilísticas que analizaran la variabilidad de este tipo de situaciones, se reconoció hace casi un siglo dando surgimiento a la Teoría del Riesgo.

El siglo XX ha sido testigo del desarrollo de diversas herramientas que facilitan el buen funcionamiento de una empresa y constituyen una forma de medir las posibles eventualidades que pueden surgir en un negocio. Ejemplo de éstas son: la probabilidad, la estadística, las técnicas de simulación, los procesos estocásticos, sofisticados paquetes de computación, así como la Teoría del Riesgo.

Este trabajo expone los conceptos fundamentales de dicha teoría enfocados principalmente al sector asegurador. El objetivo principal del desarrollo de esta tesina es lograr que sirva como un libro de apoyo para los estudiantes de la Licenciatura de Actuaría, en donde se dan los elementos matemáticos y teóricos necesarios para la comprensión y punto de partida hacia futuras investigaciones.

En el primer capítulo se tratan con las generalidades de la Teoría del Riesgo, entre las cuales se encuentran: su definición, la manera en la que surge, las principales metodologías que se utilizan en el análisis de una cartera de seguros, el objetivo que se persigue y algunas aplicaciones que se desprenden de la misma.

El segundo capítulo abarca los conceptos matemáticos de probabilidad y cálculo diferencial e integral que son necesarios para la comprensión de los modelos que se desarrollarán a través de este trabajo.

El tercer y cuarto capítulo tratan con los modelos fundamentales en el estudio de las reclamaciones que se desprenden de una cartera de seguros, los cuales reciben el nombre de Modelo de Riesgo Individual y Modelo de Riesgo Colectivo. Se profundiza en cada uno de sus elementos y se proporciona una idea general de como podrían ser usados en la práctica.

[1] *En el medio asegurador al número de reclamaciones se le da el nombre de frecuencia, y al monto de las reclamaciones recibe el nombre de severidad.*

El quinto capítulo se enfoca al estudio de la teoría de la ruina, es decir la probabilidad de que la empresa no tenga los recursos suficientes para hacer frente a las obligaciones adquiridas, lo cual proporciona una herramienta para el estudio del comportamiento del negocio a largo plazo.

En el último capítulo se desprenden algunos resultados basados en los conceptos de capítulos anteriores. Asimismo, se asignaron diferentes secciones de ejercicios, las cuales tienen como tarea reforzar los conceptos estudiados sobre un tema específico.

CAPITULO I

GENERALIDADES DE LA TEORIA DEL RIESGO

El éxito de las compañías de seguros a través del tiempo, está relacionado básicamente con dos hechos principales. El primero, se debe al juicio y habilidad de generaciones de suscriptores quienes fueron capaces de valuar distintas clases de riesgos sin tener en ese momento los datos necesarios que les permitiera establecer bases estadísticas para encontrar primas que fueran suficientes para enfrentar el riesgo. El segundo, esta relacionado con el desarrollo de la profesión actuarial cuyas herramientas matemáticas se utilizan para resolver problemas que se presentan en esta y otras clases de negocios, los cuales se encuentran sujetos a variación aleatoria.

En los últimos años, los actuarios de muchas partes del mundo, se han dedicado a estudiar los procesos de riesgo involucrados en la actividad aseguradora, para lo cual han tenido que desarrollar técnicas matemáticas que les permitan valuar este tipo de procesos. Para ello, la Teoría del Riesgo resulta ser una herramienta muy útil y acertada.

De esta manera y con el fin de introducirse a dicha teoría, se introducen los siguientes conceptos:

1.1. Definición.

Desde los inicios de la Teoría del Riesgo, se han dado diversas definiciones de la misma. La mayoría de ellas se han basado en el problema de estudio que era de interés para el investigador en ese momento. Ejemplo de ello, es la definición que da Hans Bühlmann[1], la cual trata directamente con la temática del seguro de vida y dice: "La Teoría del Riesgo estudia las desviaciones que se esperan sean producidas por fluctuaciones en las reclamaciones de pólizas individuales".

Por otro lado, algunas definiciones hacen mención a la Teoría del Riesgo basándose no solo en el problema que era de interés en ese momento, sino viéndola como una forma para administrar una empresa de seguros. Esto se puede observar en la definición que da Gerber[2], la cual dice: "la Teoría del Riesgo es un conjunto de ideas entrelazadas que sirven para diseñar, organizar y regular una empresa por medio de ciertos modelos matemáticos".

Teivo Pentikäinen y Martti Pesonen[3] la describen como sigue: "La Teoría del Riesgo, es la rama de las matemáticas actuariales que se encarga del análisis de rasgos aleatorios de cualquier tipo de negocio" [4].

[1] *Hans Bühlmann,* *Mathematical Methods in Risk Theory*
[2] *Gerber Hans,* *An Introduction to Mathematical Risk Theory*
[3] *Beard R. E., et. al.* *Risk Theory*
[4] *Aunque la Teoría del Riesgo estudia estos rasgos en cualquier tipo de negocio, las investigaciones y la mayoría de las publicaciones se han enfocado principalmente a las compañías de seguros.*

Esta definición surge, cuando Pentikäinen y Pesonen encontraron que los fundamentos de la Teoría del Riesgo sirven para detectar variaciones o irregularidades dentro del negocio, antes de que estas se presenten, lo cual permite tomar las medidas que son necesarias para evitar posibles desviaciones en los resultados esperados.

Por lo anterior se puede decir que la Teoría del Riesgo es una rama de las matemáticas actuariales que se encarga del estudio de rasgos aleatorios que se presentan en una empresa de seguros y que proporciona las herramientas necesarias para evaluar posibles desviaciones en resultados esperados.

1.2. Propósito de la Teoría del Riesgo.

Las operaciones financieras de un asegurador, pueden ser vistas en términos de una serie de ingresos y egresos de dinero.

Dentro de los ingresos de dinero se pueden nombrar los siguientes: las primas, el interés generado por inversiones realizadas, los rescates por reaseguro, nuevo capital invertido por los accionistas, etc.

Por su parte dentro de los egresos se encuentran: las reclamaciones, los gastos de administración, los gastos de operación, las primas pagadas por la compra de reaseguro, los dividendos pagados a los accionistas, etc.

Cada una de estas operaciones, presentan un comportamiento variable, el cual depende de diversos factores. Algunas de las razones de esta variación, son:

1. Las reclamaciones son a menudo sujetas al cambio en la propensión al riesgo, lo cual significa que no son las mismas de un tiempo a otro. Esto se debe a diferentes razones, por ejemplo cuando el asegurador suscribe nuevas pólizas o cuando las condiciones de la póliza cambian con la finalidad de proveer protección contra nuevos riesgos anteriormente excluidos.
2. Las fluctuaciones en las primas, pueden ser causadas por estrategias competitivas, en donde las primas que teóricamente son suficientes pueden ser ignoradas.
3. Los cambios en la tasa de inflación, afectan directamente a las primas, a las reservas y a la distribución del monto de reclamaciones.
4. Las variaciones en las tasas de interés y en el valor de los activos, pueden también tener un impacto directo en los márgenes de suscripción. Si la tasa de interés en las reservas técnicas es alta, la compañía podría disminuir sus primas. En el caso contrario, se tomarían medidas correctivas a través del aumento de primas.
5. La capacidad financiera de una compañía de seguros, puede tener impacto directo en el mercado, en donde la capacidad para suscribir nuevos negocios se determina por el capital y las reservas.

6. Los resultados obtenidos por la compra de reaseguro, se pueden reflejar directamente en los precios del asegurador. Por ejemplo, si se tienen contratados altos niveles de reaseguro, se pueden vender pólizas del seguro directo a un menor precio, ya que gran parte de ese riesgo es cedido.

Debido a lo anterior, se producen fluctuaciones en el mercado de seguros que afectan a la mayoría de los aseguradores, los cuales se ven obligados a tomar decisiones con el fin de mantenerse en el mercado a un nivel competitivo.

El propósito de la Teoría del Riesgo, consiste en estudiar y corregir los diferentes tipos de variaciones que surgen en una compañía de seguros, las cuales afectan su situación financiera.

1.3. Desarrollo de la Teoría del Riesgo.

En sus comienzos (1909), la Teoría del Riesgo se asoció principalmente con el seguro de vida, y se basó en considerar a cada persona como una unidad asegurada. De esta manera era posible tratar las reclamaciones de cada una de las personas de manera individual.

El comportamiento de las reclamaciones del grupo de personas se deducía por medio de la suma de los resultados individuales. A este modelo se le dio el nombre de "Modelo de Riesgo Individual".

Una nueva fase del desarrollo de la Teoría del Riesgo empieza con los estudios de Lundberg y de otros autores suizos a los que se les conocía como la colectividad de la Teoría del Riesgo, los cuales trataron a las reclamaciones en conjunto, sin hacer mención a pólizas individuales, dando surgimiento al llamado "Modelo de Riesgo Colectivo".

Hasta los años cincuenta, la mayoría de las investigaciones se enfocaron a encontrar distribuciones de probabilidad para el monto y número de reclamaciones, así como a investigar posibles aproximaciones de la probabilidad de ruina[(5)] sobre un intervalo de tiempo infinito[(6)]. Sin embargo, desde aquel tiempo, la teoría ha sido desarrollada en numerosas direcciones, las cuales se mencionan a continuación:

- El desarrollo de la teoría de la verosimilitud, comenzando con un artículo realizado por Hans Bülmann en 1967, el cual trata del ajuste sistemático que debe de existir en las primas de seguros en la medida en la que se comprende el comportamiento en las reclamaciones.
- El cálculo de reservas para siniestros ocurridos y no reportados, por medio de los llamados "Run-Off Triangles" en 1968, donde se expone que el ajuste en las reclamaciones es siempre sujeto a un retraso y por ello es necesario para el asegurador establecer provisiones para aquellas reclamaciones que ya ocurrieron durante el periodo de cobertura, pero las cuales no han sido todavía ajustadas.

(5) La probabilidad de ruina es una medida de riesgo en la operación de una compañía de seguros. Refiérase al Cap. 5, Sección 5.2.

(6) Entendiéndose como intervalo de tiempo infinito, un periodo de varios años. En la literatura se toman generalmente más de 5 años.

- El cálculo del monto total de reclamaciones y probabilidades de ruina para un horizonte de tiempo finito, con la ayuda de métodos numéricos tales como la transformada de Fourier en 1978.[7]
- El desarrollo de modelos usando simulación o programación dinámica en 1982. La idea principal es imitar separadamente cada uno de los elementos que afectan al problema de interés. De esta manera el problema se vuelve relativamente fácil de manejar. Un generador de números aleatorios es utilizado para obtener cada variable requerida y el proceso es repetido las veces que sean necesarias.
- El estudio extenso sobre principios para el cálculo de primas en 1984, los cuales se basan en la hipótesis de que la experiencia en las reclamaciones puede ser compensada por pagos fijos. La prima es entonces calculada bajo la base de diversos principios de equivalencia, como lo son: el valor esperado, la desviación estándar, la varianza y el principio de cero utilidad.[8]

El campo de la Teoría del Riesgo ha crecido velozmente. En la actualidad se pueden encontrar artículos, libros de texto, publicaciones e incluso cursos por Internet, los cuales tratan con diferentes temas que se desprenden del estudio de esta teoría y que siguen un lineamiento teórico bastante rígido.

A pesar de que la Teoría del Riesgo se ha desarrollado bastante en los últimos años, el crecimiento y los límites de la misma están aún lejos de ser alcanzados, como se puede observar en las publicaciones hechas sobre el tema[9].

Por otro lado, existe una necesidad enorme de desarrollar la teoría de manera que pueda ser útil para la práctica. Si se quiere que la teoría del riesgo sea una herramienta útil para administrar, entonces habrá que concentrarse más en aquellos problemas prácticos que son importantes para la industria del seguro.

1.4. Teoría Colectiva e Individual del Riesgo.

Existen dos enfoques diferentes desde los cuales se puede estudiar a la Teoría del Riesgo: el individual y el colectivo. Ambos enfrentan el problema de modelar la distribución del total de reclamaciones ó pérdidas, sobre un periodo de tiempo, asociada a una cartera heterogénea de riesgos asegurados.

El primero de ellos, consiste en encontrar una expresión para la ganancia o pérdida que surge en cada una de las pólizas, en un periodo de tiempo determinado, para posteriormente sumar todas estas expresiones con el fin de obtener información relativa a la cartera. El segundo, considera a la cartera de pólizas como un todo y las conclusiones del problema se obtienen con base a características específicas de la colectividad.

[7] *Bohman, H. Esscher, F.*, Studies in Risk Theory with numerical illustrations concerning distribution functions and Stop Loss Premium.
[8] *M. Goovaerts et. al.*, Insurance Premiums. Theory and Applications.
[9] *Goovaerts M.*, Insurance and Risk Theory.

Con el fin de facilitar la comprensión y entender las diferencias que existen entre estos dos enfoques, en la página siguiente se muestra una tabla comparativa de los principales rasgos de cada uno de ellos (véase la tabla No. 1).

1.5. Otros comentarios adicionales.

La Teoría del Riesgo considera diferentes hipótesis con el único propósito de que las matemáticas con las cuales se trabaja, sean más fáciles de utilizar.

Algunos de estos supuestos se mencionan a continuación:

- El comportamiento del monto total de las reclamaciones dentro de una cartera de seguros, en general es estable, es decir, dado que se presenta un escenario en particular, el número y monto de las reclamaciones se pueden considerar como variables aleatorias independientes. Debido a lo anterior, el costo de reclamación o pérdida de un riesgo no tiene influencia sobre cualquier otro riesgo. La condición de independencia usualmente es aproximada en la práctica. Existen a menudo ciertos factores que pueden causar que las reclamaciones en diferentes periodos de tiempo se encuentren correlacionadas, sin embargo, la presencia de este tipo de factores no evitan que el modelo sea aplicable. La influencia de estos factores a menudo puede cuantificarse introduciendo un modelo auxiliar que controle la propensión en el riesgo.

  Asimismo, la hipótesis de independencia entre el número de reclamaciones y el monto de reclamaciones puede ser contradictoria a la realidad. Por ejemplo, si el número de reclamaciones por la ocurrencia de un terremoto se incrementa dramáticamente, entonces el monto de las reclamaciones también aumenta.[10]

- Las reclamaciones son reportadas y ajustadas rápidamente dentro del año en el que ocurren. Esto no se cumple para ciertas clases de seguros en donde las reclamaciones pueden tomar varios años para ser ajustadas. Por ejemplo, en un seguro de responsabilidad civil, en donde pueden haber reclamaciones que se encuentran en un proceso de litigio y por lo tanto todavía no se han pagado. Por lo anterior, los pagos por reclamación en un año, son la mezcla de pagos con respecto a reclamaciones que surgen en diferentes años. Este problema se puede resolver, definiendo el costo de reclamaciones como el valor presente, a una cierta fecha de reclamaciones que surgen en el periodo.

Estas y otras muchas de las hipótesis que son esenciales para el funcionamiento de los modelos aquí desarrollados, se introducirán a través del desarrollo de este trabajo.

Finalmente, es importante mencionar que tanto el Modelo de Riesgo Colectivo como el Modelo de Riesgo Individual, son utilizados de manera complementaria, es decir, existen aplicaciones sobre las cuales es más sencillo utilizar alguno de los dos modelos[11].

[10] Se han realizado pocos análisis formales de una posible dependencia entre el número y monto de reclamaciones.
[11] A través de los capítulos 3 y 4 se exponen cada una de sus propiedades, con la finalidad de que se tengan las herramientas necesarias para poder decidir cuando utilizar cualquiera de los dos.

Tabla 1. Comparativo entre el Modelo de Riesgo Individual y el Colectivo.

Modelo Individual	Modelo Colectivo
Existe un número conocido de variables aleatorias (número de pólizas), con su correspondiente probabilidad de reclamación. Se asume que éstas son independientes[12] y a menudo idénticamente distribuidas.	El monto total de reclamaciones es visto como una suma de un número aleatorio de montos aleatorios, en donde se considera a la cartera como un todo.
El monto total de reclamaciones, que ocurren en una cartera de riesgos independientes y heterogéneos, es modelado como la suma de las pérdidas sobre las que incide la unidad asegurada i, existiendo n unidades aseguradas. Expresando lo anterior en términos matemáticos se tiene: $$S=\sum_{i=1}^{n} X_i$$ En donde, S: Monto total de reclamaciones. n: Número de unidades aseguradas. X_i: Monto de pérdida sobre la unidad asegurada i.	Basa su desarrollo en dos características fundamentales de la cartera: • Variable aleatoria del monto de reclamaciones (Severidad). • Variable aleatoria del número de reclamaciones (Frecuencia). La fórmula del modelo de riesgo colectivo es la siguiente: $$S=\sum_{i=1}^{N} X_i$$ En donde: N: Variable aleatoria que denota el número de reclamaciones. X_i: monto de pérdida correspondiente a la i-ésima reclamación.
Se caracteriza por ser un grupo cerrado[13], es decir, el número de unidades en riesgo, es conocido y fijado al principio del período. Debido a esto, con el paso del tiempo, existe una disminución del tamaño de la cartera.	Grupo abierto[14] estacionario puesto que se basa en distribuciones teóricas[15].
Se asume que la variable aleatoria para el monto total de reclamaciones, se distribuye como una v.a. normal[16]. Cada riesgo puede experimentar a lo más una reclamación[17].	Presenta buen comportamiento en la cola de la distribución de reclamaciones.
Fácil manejo en montos de reclamación iguales.	Manejo satisfactorio con montos desiguales.
La variable aleatoria de interés es el costo total de todas las reclamaciones que surgen del riesgo bajo consideración.	La variable aleatoria de interés es el costo total de todas las reclamaciones que surgen del riesgo bajo consideración.

(12) El principio que rige ambos modelos es el de "independencia" y significa que la probabilidad de ocurrencia de una reclamación y el monto de esta, para un solo miembro del grupo, no puede ser afectada por otro miembro del mismo. Se dice que el costo de reclamación o pérdida de un riesgo, no tiene influencia sobre cualquier otro riesgo de la cartera.

(13) Un grupo cerrado es aquel en el cual la tasa de crecimiento del grupo es decreciente, es decir, si algún miembro del mismo sale de éste por cualquier causa, no se verá reemplazado por la entrada de otro miembro.

(14) Un grupo abierto, es aquel en el cual, la salida de algún miembro del grupo por cualquier causa, se ve reemplazada por el ingreso de otro.

(15) En el desarrollo de la teoria se supone que las funciones de distribución de probabilidad son conocidas, sin embargo en la práctica hay que estimarlas.

(16) Debido a que cuando se modela la variable aleatoria para el monto total de reclamaciones, la función de distribución normal presenta inconvenientes, surge la Teoria Colectiva, pudiéndose encontrar aproximaciones más cercanas y resultados más satisfactorios.

(17) Ya sea que ocurra o no ocurra una sola reclamación para cada riesgo, todas los costos por reclamación que surgen en particular para ese riesgo, son amalgamados y tratados como si fueran una única reclamación..

CAPITULO II

ELEMENTOS BASICOS DE CALCULO Y PROBABILIDAD PARA EL DESARROLLO DE LA TEORIA DEL RIESGO

Para introducirse en el estudio de la Teoría del Riesgo, es esencial proporcionar los elementos de la teoría de probabilidad y estadística, los cuales proporcionan las bases suficientes para su desarrollo. El propósito de este capítulo es facilitar la referencia que se obtenga de estos conceptos en secciones posteriores y en particular, introducir la notación que se va a utilizar a través de este trabajo.

Cabe mencionar que se trata en la medida de lo posible, evitar demostraciones matemáticas de los conceptos teóricos y por ende no profundizar en ellos, debido a que no es el objetivo fundamental de este trabajo. A continuación se exponen tales conceptos.

2.1. Series de Maclaurin.

La serie de Maclaurin ó la serie de Taylor alrededor del origen para una función $f(t)$ lo suficientemente diferenciable, es dada por:

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots \tag{1}$$

Donde: $f^{(n)}(0)$, se interpreta como la n-ésima derivada de f valuada en el origen.

La expresión (1) puede verificarse haciendo $t = 0$ en ambos lados de dicha ecuación y diferenciando sucesivamente.

A continuación se da una lista de aquellas series que son de uso extremo, las cuales pueden verificarse por medio de ecuación (1).

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots \tag{2}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots \tag{3}$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots - \frac{(-t)^n}{n!} + \ldots \tag{4}$$

$$(1+t)^r = 1 + rt + \frac{r(r-1)t^2}{2!} + \ldots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)t^n}{n!} + \ldots \tag{5}$$

Si $r = n$, un entero positivo, la última serie es finita y tenemos que:

$$\begin{aligned}(1+t)^n &= 1 + nt + \frac{n(n-1)t^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)t^3}{3!} + \ldots + t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k\end{aligned} \tag{6}$$

A la serie (2) es conocida como la serie geométrica, la serie (3) como la serie exponencial, la serie (5) como la binomial y a la ecuación (6) se le conoce como el teorema del binomio.

2.2. Variable Aleatoria y función de distribución.

X es una variable aleatoria (que en lo subsecuente se denotará como v.a.), si la probabilidad del evento $X \leq x$, está definida para toda $x \in \Re$, es decir, X es una v.a. si:
$\Pr(X \leq x) \exists \; \forall x \in \Re$

Una v.a. X, asume ciertos valores numéricos de acuerdo con definidas probabilidades, refiriéndonos así a la ley de probabilidad que gobierna a una v.a. dada. Esta ley es descrita por medio de la función de distribución acumulativa (que en lo subsecuente se denotará f.d.a.) $F_X(x)$. La cual es definida para cualquier número real x por:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr[x \in (-\infty, x)]^{(1)} \qquad (7)$$

Donde: $F_X(x)$, representa la probabilidad de que X asuma un valor menor o igual a x.

Ejemplos de variables aleatorias.

1. Sea $X(t)$ la variable aleatoria que denota el costo total de reclamaciones pagadas en un intervalo de tiempo $(0,t]$. Entonces $\Pr[X(t) \leq x] = F_{X(t)}(x)$, representa la función de distribución acumulativa de $X(t)$, la cual representa la probabilidad de que el monto total de reclamaciones en este intervalo de tiempo sea menor o igual a x.
2. Sea $N(t)$ la v.a. que denota el número de reclamaciones en un intervalo de tiempo $(0,t]$. Entonces $\Pr[N(t) \leq x] = F_{N(t)}(x)$, es la función de distribución acumulada de $N(t)$ y representa la probabilidad de que el número de reclamaciones en ese intervalo de tiempo sea menor o igual a x.

2.3. Funciones de frecuencia.

Llamaremos funciones de frecuencia, a aquellas que nos dan la probabilidad de que la variable aleatoria, adquiera un valor específico.

Ejemplo 2.3.1.
$g(n) = \Pr(N = n)$, representa la función de frecuencia para la v.a. N y se lee como: la probabilidad de que la variable aleatoria N adquiera el valor de n.

La función de frecuencia para una v.a. continua se denota generalmente como $f_X(x)$, mientras que en el caso de una v.a. discreta es denotada por $p(x)$.

(1) *El símbolo $-\infty$, se entiende como el valor más pequeño que puede tomar una variable aleatoria.*

En el caso continuo a la función de frecuencia se le da el nombre de función de densidad y se caracteriza por $\Pr(X = x) = 0$, es decir, la probabilidad de que una v.a. X tome un valor específico es cero, puesto que la integral ó el área bajo la curva en un solo punto es cero.

Por su parte en el caso de una v.a. discreta, a la función de frecuencia se le conoce como función de masa de probabilidad.

Diferentes distribuciones de probabilidad van a ser usadas. Algunas van a ser continuas, otras discretas y todavía otras de tipo mixto.

2.3.1 Clasificación.

Una v.a. X se dice que es continua si su función de distribución tiene derivada, es decir, si $F'_X(x) = f_X(x)$. A la derivada se le conoce como función de densidad. Su función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \Pr(X \leq x) \tag{8}$$

Una función continua, a menudo es usada para representar el monto de reclamaciones individuales, donde todos los montos de cero a una cantidad muy grande pueden ocurrir.

Una variable aleatoria X es discreta, si su función de distribución es una función a pasos[2], con un número contable de discontinuidades o puntos de salto. Su función de distribución, puede ser escrita como:

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} \Pr(X = y) \tag{9}$$

Un.ejemplo de una v.a. discreta es el caso de un seguro de vida con suma asegurada fija, en donde la v.a. que representa el monto de la reclamación toma el valor de la suma asegurada en el momento que esta ocurre. En adición a lo anterior se podría pensar que la cobertura de robo total en un seguro de automóviles o la doble indemnización por muerte accidental en el caso de un seguro de accidentes personales, son ejemplos de variables aleatorias discretas ya que la suma asegurada que se paga en la ocurrencia de cualesquiera de estos eventos es una cantidad previamente fijada de antemano.

Una v.a. X es de tipo mixto, si es una combinación de ambos tipos de variables aleatorias. Este tipo de distribución puede surgir por ejemplo, en aplicaciones de reaseguro o cuando una póliza comprende diversos tipos de beneficios, por ejemplo, sumas aseguradas fijas en el caso de muerte, invalidez permanente ó indemnización por seguro de gastos médicos. Su función de distribución acumulada es denotada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx + \sum_{x_i \leq x} p(x_i)^{(3)} \tag{10}$$

[2] *Unicamente puede tomar un número finito de valores* $x_1, x_2, x_3 \ldots$

[3] *En todas las integrales o sumas, el límite inferior, significa el valor más pequeño que puede tomar la distribución.*

2.4. Momentos o valores esperados de una variable aleatoria.

La esperanza o valor esperado de una v.a. X, es definida por:

$$E(X) = \int x \, dF_X(x) = \int x f_X(x) dx \tag{11}$$

Donde la integral es tomada sobre todos los valores posibles de X.

En el caso de una v.a. discreta, esto se reduce a:

$$E(X) = \sum x \, p(x) \tag{12}$$

Donde la suma es tomada sobre los puntos de saltos de la función de distribución $F_X^{(x)}$.

El valor esperado (también conocido como valor medio teórico), mide el centro de gravedad de la distribución.

Los momentos alrededor del origen de la v.a. X, denotados por μ_k', son obtenidos por medio de las siguientes fórmulas:

$\mu_k' = E(x^k) = p_k = \int x^k f_X(x) dx$ (caso continuo)

$\mu_k' = E(x^k) = p_k = \sum x^k \; p(x)$ (caso discreto)

Por lo que $\mu_1' = \mu = E(X)$, representa la esperanza de X, $\mu_2' = E(X^2)$, etc.

De manera análoga, los momentos alrededor de la media[4] son denotados por:

$$\mu_k = E[(x-\mu)^k]$$

La varianza de una v.a. X es un caso especial de la fórmula anterior, cuando $k = 2$,

$$Var(X) = E[(x-\mu)^2] = \mu_2' - \mu'^2 \tag{13}$$

A la raíz cuadrada de la varianza se le conoce como desviación estándar y se denota por σ. Se puede decir que la varianza representa el momento de inercia alrededor del valor esperado. La varianza simplemente es una medida de dispersión o esparcimiento del valor esperado.

Dos índices de la forma de una distribución, son:

a) El sesgo el cual se denota por :

$$\gamma = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\mu_3' - 3\mu_1\mu_2' + 2\mu_1^3}{\sigma^3} \tag{14}$$

Representa la extensión a la cual la masa de la distribución de probabilidad se extiende a la izquierda o a la derecha del valor esperado.

[4] *Se conocen también como momentos centrales.*

Si la distribución se extiende hacia a la izquierda entonces su sesgo es negativo, si se extiende hacia la derecha entonces el sesgo es positivo. El sesgo es una medida de asimetría de la distribución[5].

b) El otro índice es la curtosis, el cual es la medida del ancho de la cola de la distribución. Es el grado en el cual la distribución tiene picos. Este índice está denotado por:

$$\gamma_2 = \frac{E\left[(x-\mu)^4\right]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6\mu_1'^2\mu'_2-3\mu'^4_1}{\sigma^4} \qquad (15)$$

Si γ_2 es una cantidad positiva, entonces la distribución es más puntiaguda (leptocúrtica). Si γ_2 es negativa implica que es más aplastada (platicúrtica).

2.4.1. Propiedades de los valores esperados.

Basándose en la definición de valor esperado, podemos ver que las siguientes propiedades se cumplen:

a) La esperanza de una constante es igual a la constante.
$E[c] = c$
b) La esperanza de la suma de una v.a. y una contante es igual a la esperanza de la v.a. más la constante.
$E[X+c] = E[X]+c$
c) La esperanza de una constante por una v.a. es igual a la constante por la esperanza de la v.a.
$E[cX] = cE[X]$
d) La varianza de una constante por una v.a. es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable aleatoria
$Var(kX) = k^2 Var(X)$
e) La varianza de una constante (a) por una v.a. X, mas una constante (b), es igual a la constante (a) al cuadrado por la varianza de la v.a.
$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Si en adición a lo anterior X y Y son variables aleatorias independientes, se tienen las siguientes propiedades:

f) La media de la suma de un número de v.a.´s es igual a la suma de sus medias. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
g) Si $X \le Y$ entonces,
$E(X) \le E(Y)$.
h) La varianza de la suma de dos v.a.´s independientes, es la suma de las varianzas de esas v.a.´s.
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

[5] *El sesgo es un indicador de la desviación de una forma totalmente simétrica. (Muchos modelos de pérdida son sesgados)*

A continuación se dan una serie de ejemplos, con el propósito de utilizar los conceptos aquí revisados.

Ejemplo 2.4.1

Encontrar el valor esperado de la distribución geométrica, la cual se denota por:
$\Pr(N=n) = q^n p$, $n = 0,1,2,\cdots$, donde $p = 1-q$

Solución.
Para calcular el valor esperado de la v.a. N se usa fórmula (12), debido a que se trata de una distribución discreta, obteniéndose lo siguiente:

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nq^n p = pq\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

Derivando ambos lados de la ecuación (2) y reemplazando t por $-t$ uno obtiene que:

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + \ldots + nt^{n-1} + \ldots \qquad (16)$$

lo cual es exactamente igual a la suma que aparece en este ejemplo (con $t=q$), así se tiene que:

$$E[N] = \frac{pq}{(1-q)^2}$$

Ya que $p = 1-q$, entonces

$$E[N] = \frac{q}{p} \qquad (17)$$

Ejemplo 2.4.2

Una v.a. X, la cual asume únicamente valores no-negativos, tiene función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y función de distribución acumulativa $F_X(x)$. El valor esperado de X es definido como:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

Demostrar que una expresión equivalente está dada por:

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx \qquad (18)$$

Solución.
La equivalencia de las dos formas puede ser vista resolviendo la última expresión por integración por partes (con $u = 1 - F_X(x)$ y $v' = 1$, tal que $v(x) = x$)[6].

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(x)](x)'\,dx = (1 - F_X(x))\,x\big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x[1 - F_X(x)]'\,dx$$

[6] *Recordar que la integración por partes implica que:* $\int uv' = uv - \int u'v$.

Asumiendo, que $x\,[1 - F_X(x)]$ tiende a cero cuando x se aproxima a ∞.

$$= 0 + \int_0^{\infty} x f_X(x)dx = E(X)$$

Un resultado a menudo muy útil, es el siguiente:

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$, para n entero positivo. (19)

Esta fórmula puede verificarse por medio de integración por partes.

Ejemplo 2.4.3

Si X es una v.a. exponencialmente distribuida, es decir, si $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}, \beta > 0$, $x \geq 0$. Encontrar el $n-$*ésimo* momento no central de X, μ_n' (denotado también como p_n).

Solución.

Al $n-$*ésimo* momento de la función de densidad también se le conoce como momento alrededor del origen y es definido como:

$E(X^n) = \int x^n f_X(x)dx$. Así se tiene que:

$$p_n = \mu_n' = \int_0^{\infty} x^n \beta e^{-\beta x} dx$$

Usando la sustitución $\beta x = u$,

$$\beta dx = du \qquad x = \frac{u}{\beta}$$

$$dx = \frac{du}{\beta}$$

$$\Rightarrow \mu_n' = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\beta}\right)^n e^{-u} du = \beta^{-n} \int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du$$

Usando el resultado (19) se obtiene que:

$$\mu_n' = \beta^{-n}\, n!$$

Por ejemplo:

$$\mu_1' = E(X) = \frac{1}{\beta} \tag{20}$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \tag{21}$$

2.5. Variables aleatorias condicionales.

Existen aplicaciones donde la función de distribución de una v.a. X, puede depender de algunos factores precedentes (se denotará a este factor por Y).
Por ejemplo, el desembolso de una reclamación por seguro de incendio (X), a menudo depende de las condiciones del clima (Y). Entonces se dice que X [7] es condicionado a un factor precedente (Y) [8]. Si X puede ser descrito por la v.a. Y y las dependencias pueden ser cuantificadas, es decir, la distribución conjunta de X y Y es conocida, entonces la función de distribución de X dado Y puede ser derivada.

La función de distribución condicional de X sujeto a Y, teniendo el valor fijo y, es denotada por:

$$F_X(x_i Y = y) = \Pr(X \leq x | Y = y) = F_{X|Y}(x, y) \tag{22}$$

La función de distribución condicional, es relacionada a la función de distribución acumulativa, por medio de la Ley de Probabilidad Total.

2.5.1. Ley de probabilidad total.

Una versión simple de esta puede ser explicada intuitivamente como sigue. Supóngase que X y Y son v.a.'s y $\Pr(X = x | Y = y)$ denota la probabilidad condicional de que X sea igual a x dado que Y es igual a y. Entonces la probabilidad de que X sea igual a x es la suma ponderada de todas las probabilidades condicionales conforme Y toma todos sus posibles valores.

En otras palabras,

$$\Pr(X = x) = \sum_y \Pr(X = x | Y = y)\Pr(Y = y) \tag{23}$$

En el caso continuo esta probabilidad toma la forma de:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) dy \tag{24}$$

En donde $f_{X|Y}(x, y)$, representa la probabilidad condicional de X dado $Y = y$ y $f_Y(y)$ es la función de densidad de Y. Similarmente si $F_X(x)$ denota la correspondiente función de distribución acumulativa, entonces:

$$\Pr(X \leq x) = \sum_y \Pr(X \leq x | Y = y)\Pr(Y = y) \tag{25}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y}(x, y) f_Y(y) dy \tag{26}$$

[7] X : *v.a. que denota el costo de la reclamación.*
[8] Y : *v.a. de la temperatura promedio durante el periodo de observación.*

Ejemplo 2.5.1.

Suponga que B es una v.a. con $\Pr(B=1) = 0.9$ y $\Pr(B=2) = 0.1$. Para dada $B=\beta$, la distribución de X es $\Pr(X \le x) = 1 - e^{-\beta x}$; $x > 0$. Encontrar la probabilidad de que $X \le 1$.

Solución.

Asuma que B es dado igual a β. Entonces $\Pr(X \le 1\, B = \beta) = 1 - e^{-\beta}$. Ahora $\beta = 1$ con probabilidad 0.9 y $\beta = 2$ con probabilidad 0.1. Utilizando la fórmula (25)

$$\Pr(X \le 1) = \Pr(X \le 1 | B = 1)\Pr(B=1) + \Pr(X \le 1\, B = 2)\Pr(B=2) =$$
$$(1-e^{-1})(0.9) + (1-e^{-2})(0.1) = 0.655$$

Ejemplo 2.5.2.

En ejemplo 2.5.1 si B tiene una distribución uniforme sobre (1,2), encontrar $\Pr(X \le 1)$.

Solución.

Dado que $B=\beta$, $\Pr(X \le 1 | B = \beta) = 1 - e^{-\beta}$, usando fórmula (26):

$$\Pr(X \le 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(X \le 1 | B = \beta) f_B(\beta)\, d\beta = \int_1^2 \left(1 - e^{-\beta}\right) d\beta = 1 - e^{-1} + e^{-2} = 0.7674$$

Ejemplo 2.5.3.

En el ejemplo 2.5.2. encontrar la función de distribución de X.

Solución.

Dado que $B=\beta$, $F_{X|B}(x,\beta) = \Pr(X \le x | B = \beta) = 1 - e^{-\beta x}$ y $f_{X|B}(x,\beta) = \beta\, e^{-\beta x}$

Usando fórmula (26), $F_X(x) = \int_1^2 \left(1 - e^{-\beta x}\right) d\beta = 1 - \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$

Uno puede obtener la función de densidad diferenciando la expresión anterior con respecto a x o directamente usando la expresión para $f_{X|B}(x,\beta)$ en ecuación (24)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x,y) f_Y(y)\, dy = \int_1^2 \beta e^{-\beta x} d\beta = \frac{e^{-x} - 2e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}$$

Ejemplo 2.5.4.

Sea Λ una v.a. con función de densidad $f_\Lambda(\lambda)=2e^{-2\lambda}$. Dado $\Lambda=\lambda$, N es una v.a. con distribución Poisson, es decir, $\Pr(N=n)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Encontrar la probabilidad de que $N=2$

Solución.

La probabilidad de que $N=2$,

$$\Pr(N=2)=\int_0^\infty \Pr(N=2\mid\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda$$

Dado que $\Lambda=\lambda$, N es una v.a. Poisson , entonces:

$$\Pr(N=2\mid\Lambda=\lambda)=\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}2e^{-2\lambda}d\lambda$$

$$=\int_0^\infty e^{-3\lambda}\lambda^2 d\lambda$$

Haciendo $\lambda=u/3$ y usando ecuación (19)

$$=2/27$$

Ejemplo 2.5.5.

Una caja contiene 300 monedas cargadas. Doscientas de las monedas son de 1 peso y el resto de 2 pesos. Si una moneda es escogida de forma aleatoria y lanzada, la probabilidad P de que vaya a caer sol es un número aleatorio. Para las monedas de 1 peso P es una v.a. uniformemente distribuida sobre (0.495,0.51). Para las monedas de 2 pesos P es uniformemente distribuida sobre (0.49,0.505). Si una moneda es escogida de manera aleatoria y lanzada 2 veces, encontrar la probabilidad de que obtenga 2 soles.

Solución.

Empezando por asumir que P es dado igual a p, entonces la probabilidad de obtener dos soles es p^2. Existen dos tercios (200/300) de probabilidad de sacar una moneda que sea de 1 peso y un tercio (100/300) que sea de dos. Para cada caso, la distribución de P es dada. Si N es el número de caras en 2 lanzamientos, entonces por la ley de probabilidad total:

$$\Pr(N=2)=(2/3)(1/0.015)\int_{0.495}^{0.51}p^2dp+(1/3)(1/0.015)\int_{0.49}^{0.505}p^2dp$$

$$=(2/3)(1/0.015)(1/3)(0.51^3-0.495^3)+(1/3)(1/0.015)(1/3)(0.505^3-0.49^3)=0.25086$$

Una explicación de la solución un poco más formal es la siguiente:

$$\Pr(N=2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(N=2 \; P=p) f_P(p)dp$$

$$f_P(p) = f_{P\,|\,Peso}(p)\Pr(1 \text{ peso}) + f_{P\,\,2\,pesos}(p)\Pr(2 \text{ pesos})$$

$$= (2/3)u_1(p) + (1/3)u_2(p)$$

Donde u_1 y u_2, son las distribuciones uniformes dadas para las monedas de 1 y 2 pesos, respectivamente.

Así, $\Pr(N=2) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \left[(2/3)u_1(p) + (1/3)u_2(p)\right] dp$

Substituyendo u_1 y u_2, uno obtiene la primera ecuación en la solución anterior.

2.5.2. Esperanza y varianza condicionales.

Dadas dos v.a.'s X y Y, la esperanza y varianza condicionales de X dado $Y = y$, son obtenidas por medio de la función de densidad condicional de f asumiendo que Y es dado igual a y. En otras palabras,

$$E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y)dx \qquad (27)$$

$$Var[X|Y] = E\left[X^2|Y\right] - \left[E(X\,Y)\right]^2 \qquad (28)$$

Notar que estas entidades condicionales son funciones de Y.

Se puede calcular el valor esperado y la varianza de X haciendo que Y tome todos sus valores. Primero hay que notar que:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Usando la ecuación (24) para $f_X(x)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x,y) f_Y(y)dxdy$$

Intercambiando el orden de integración y usando ecuación (27) se obtiene:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E(X|Y=y)dy \\ &= E(E(X|Y)) \end{aligned}$$

Se puede usar este resultado para encontrar la varianza.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E[E(X^2|Y)] - E[E(X|Y)]^2 \\ &= E[E(X^2|Y) - E^2(X|Y) + E^2(X|Y)] - E[E(X|Y)]^2 \\ &= E[Var(X|Y)] + E[E(X|Y)^2] - E[E(X|Y)]^2 \\ &= E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)] \end{aligned}$$

Ya que las fórmulas anteriores son muy importantes a través del desarrollo de este trabajo, se repiten aquí para hacer referencia de ellas en ocasiones posteriores:

$$E(X) = E[E(X|Y)] \tag{29}$$

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)] \tag{30}$$

Cuando X no depende de Y, $E[X|Y]$ es igual a la esperanza de X.

La fórmula $E[X] = E[E(X|Y)]$ describe su iteratividad, lo cual significa que la esperanza de la v.a. puede ser calculada primero tomando en cuenta su esperanza con respecto a la v.a. condicionada.

En el caso de que la v.a. Y sea discreta, la fórmula puede reducirse a la forma elemental $E[X] = \sum_{y_i} \Pr(Y = y_i) E(X|Y = y_i)$, donde y_i corre a través de todos los valores posibles de Y.

A continuación se dan algunos ejemplos. Se comenzará con un ejemplo sencillo, cuyo propósito es introducir un método de solución que puede ser aplicado a situaciones más generales.

Ejemplo 2.5.6.

Un juego se practica como sigue. Una moneda es lanzada. Si el resultado es cara, un monto de 2 pesos va a pagarse. Si el resultado es cruz, nada se pagará. Encontrar el valor esperado y la varianza del pago.

Solución.

El pago, el cual se denotará por X, es 2 si al lanzar la moneda se obtiene una cara y es 0 si se obtiene cruz. Se puede escribir este hecho en una manera más sencilla, llamemos $X = 2I$, donde $I = 1$ si el resultado es cara y 0 si el resultado es cruz. Ya que la moneda no está cargada e I puede asumir únicamente los dos valores 0 y 1, I es una v.a. Bernoulli con $\Pr(I = 1) = p = 1/2$ y $\Pr(I = 0) = 1 - p = 1/2$.

Recordando que para la v.a. Bernoulli, el valor esperado es p y la varianza es pq[9], donde $p = 1 - q$, se tiene que:

[9] $E(I) = (1)p + (0)q = p$. Ya que $I^2 = I$, $E(I^2) = E(I) = p$ y $Var(I) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$E(I) = 1/2$; $Var(I) = 1/4$
Por lo que la varianza y esperanza de X están dadas por:
$Var(X) = Var(2I)$
Por las propiedades de los valores esperados $Var(aX + b) = a^2 \; Var(X)$
$= 4Var(I) = 4(1/4) = 1$
$E(X) = E(2I) = 2E(I) = 2(I) = 1$

Ejemplo 2.5.7.

En ejemplo 2.5.6., suponga que el monto pagado no es un monto fijo, sino una v.a., la cual es uniformemente distribuida sobre (0,4), tal que su media es 2. Encontrar el valor esperado y la varianza del pago.

Solución.
Sea X la v.a. que denota el pago. Entonces X es 0 si se obtiene una cruz como resultado. Si el resultado es cara, el monto pagado no es un número fijo sino una v.a. Denotemos esta v.a. por B. Así $X = B$, si el resultado es cara y $X = 0$ si es cruz. Como se hizo en el ejemplo anterior podemos escribir el pago como $X = IB$, donde $I = 1$ si se obtiene cara y 0 si es cruz.
De nueva forma I es una v.a. Bernoulli con $p = 1/2$. Utilizando las ecuaciones (29) y (30) se obtiene:
$E(X) = E(IB) = E[E(IB|I)]$
$Var(X) = Var(IB) = E[Var(IB|I)] + Var[E(IB|I)]$
Si I es dado, entonces $E(IB|I) = IE(B)$ y $Var(IB|I) = I^2 Var(B) = IVar(B)$[10]
Debido a que B es una v.a uniforme sobre $(0,4)$ entonces:
$E(B) = 2$ y $Var(B) = 4^2/12 = 4/3$[11]
Por lo tanto se obtiene:
$E(X) = E(IE(B)) = E(2I) = 2E(I) = 1$
$Var(X) = E[IVar(B)] + Var[IE(B)] = E(4/3\,I) + Var(2I) = (1/2)(4/3) + 4(1/2)(1/2) = 5/3$

2.6. Suma de variables aleatorias independientes.

Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes las cuales admiten únicamente valores enteros no negativos con función de densidad de probabilidad dada por: $\Pr(X = k) = f_X(k)$ y $\Pr(Y = k) = f_Y(k)$, respectivamente.

[10] $I^2 = I$ *ya que* I *toma únicamente los valores 0 y 1*

[11] *Recordar que el valor esperado y varianza de una v.a. uniformemente distribuida sobre* $(0,a)$ *son* $a/2$ *y* $a^2/12$, *respectivamente.*

Sea $S = X + Y$. Se desea encontrar la función de densidad de probabilidad de S. Si S es dado igual a s ó $S = s$, las únicas combinaciones posibles para X y Y, son: $X = 0$ y $Y = s$, $X = 1$ y $Y = s - 1$, . . ., $X = k$ y $Y = s - k$, ..., $X = s$ y $Y = 0$.

Usando la propiedad de independencia entre X y Y,

$$f_S(s) = \Pr(S = s) = \sum_{k=0}^{s} \Pr(X = k)\Pr(Y = s - k) = \sum_{k=0}^{s} f_X(k) f_Y(s - k) \tag{31}$$

Se pudo haber hecho el análisis con X y Y intercambiados, el resultado es el mismo. De esta manera,

$$f_S(s) = \Pr(S = s) = \sum_{k=0}^{s} f_X(k) f_Y(s - k) = \sum_{k=0}^{s} f_Y(k) f_X(s - k) \tag{32}$$

Para encontrar la función de distribución de S, es decir $\Pr(S \le s)$, notar el siguiente hecho: S es menor o igual a s si y solo si $X = k$ y $Y \le s - k$, con k variando desde 0 hasta s.
Por lo que:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{k=0}^{s} \Pr(X = k)\Pr(Y \le s - k) \\ &= \sum_{k=0}^{s} f_X(k) F_Y(s - k) \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, X y Y pueden invertirse en esta fórmula, resultando en lo siguiente:

$$= \sum_{k=0}^{s} f_Y(k) F_X(s - k) \tag{33}$$

Debido a que $S \le s$, $f_S(s)$ y $F_S(s)$ pueden ser intercambiados en cada expresión. Unicamente si $X \le k$ y $Y = s - k$.

En otras palabras $F_S(s)$ es también igual a:

$$= \sum_{k=0}^{s} F_Y(k) f_X(s - k)$$

A la última expresión se le denota por $F_X * F_Y(s)$ y es llamada: convolución de 2 distribuciones de probabilidad.
La convolución de dos funciones de densidad es denotada como $f_X * f_Y(s)$.

Ejemplo 2.6.1.

Sea X y Y v.a.'s independientes con función de masa dada por:

$f_X(0)=\frac{1}{2}$, $f_X(1)=f_X(2)=\frac{1}{4}$ y $f_Y(i)=\frac{1}{3}$ para $i=1,2,3$.

Sea $S=X+Y$. Encontrar la función de distribución acumulada de S.

Solución.

Vamos a utilizar ecuación (32) para unos cuantos valores de s.

$f_S(0)=f_X(0)f_Y(0)$

$f_S(1)=f_X(0)f_Y(1)+f_X(1)f_Y(0)$

$f_S(2)=f_X(0)f_Y(2)+f_X(1)f_Y(1)+f_X(2)f_Y(0)$

y así sucesivamente.

Este calculo es ilustrado en la Tabla No. 2.

Tabla 2. Cálculo de la función de distribución acumulada $F_S(s)$.

t	$f_X(t)$	$f_Y(t)$	$f_S(t)$	$F_S(t)=\sum_{k=0}^{s} f_S(k)$	$F_X(t)$	$\sum_{k=0}^{s} F_X(k)f_Y(s-k)$
0	½	0	0	0	½	0
1	¼	1/3	1/6	1/6	¾	1/6
2	¼	1/3	¼	5/12	1	5/12
3	0	1/3	1/3	9/12	1	9/12
4	0	0	1/6	11/12	1	11/12
5	0	0	1/12	12/12	1	12/12

Por ejemplo, $f_S(3)=f_X(0)f_Y(3)+f_X(1)f_Y(2)+f_X(2)f_Y(1)+f_X(3)f_Y(0)$. De igual forma $F_S(t)$ se obtiene sumando las $f_S(s)$ desde $s=0$ hasta t. También se puede calcular $F_S(t)$ usando ecuación (33), es decir

$F_S(3)=F_X(0)f_Y(3)+F_X(1)f_Y(2)+F_X(2)f_Y(1)+F_X(3)f_Y(0)$, como se demuestra en las dos últimas columnas.

En el caso continuo, ecuaciones (32) y (33) son iguales a:

$$f_S(s)=\int_0^{\infty} f_X(t)f_Y(s-t)dt \tag{34}$$

$$=\int_0^{\infty} f_Y(t)f_X(s-t)dt \tag{35}$$

$$F_S(s)=\int_0^{s} F_X(t)f_Y(s-t)dt \tag{36}$$

$$=\int_0^{s} f_X(t)F_Y(s-t)dt \tag{37}$$

De igual manera que en el caso de una v.a. discreta en cada de las ecuaciones se pueden intercambiar f y F.

Si X y Y son v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F_X(x)$, entonces $F_X * F_Y$ es denotado por F^{*2} y la función de densidad por f^{*2}.

Inductivamente, lo anterior puede extenderse a n variables. La $n-$ésima convolución de F consigo misma es F^{*n} y la correspondiente función de densidad es f^{*n}.

La convolución es una operación conmutativa y asociativa, es decir: $F*G=G*F$ y $F*(G*H)=(F*G)*H$.

Cuando la v.a. S representa el monto total de reclamaciones (como se verá en el Capítulo IV, $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$), su distribución basada en la convolución no es fácilmente evaluada cuando el número de variables involucradas en la suma es grande, debido a que el tiempo de cálculo crece rápidamente cuando este último incrementa.

2.7. Función Generadora de Momentos.

Se puede describir una distribución de probabilidad usando una función generadora de momentos.

La función generadora de momentos de una v.a. (que en lo sucesivo se denotará como f.g.m.) es definida por:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx \tag{38}$$

Por la expansión en serie de potencias de e^{tx}

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}\right)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^n}{n!}\right)f_X(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}x^n f_X(x)dx$$

Debido a que $\mu'_n = \int x^n f_X(x)dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mu'_n \tag{39}$$

μ'_n (a veces también denotado como p_n), representa el $n-$ésimo momento de la función de densidad de probabilidad.

Si se observa la ecuación anterior el n-ésimo momento es el coeficiente de $t^n/n!$ en la serie de Maclaurin para $M_X(t)$.

Nota: μ'_n ó p_n, *a menudo es expresado como la* $n-$*ésima derivada de* $M_X(t)$ *valuada en 0. Esto es equivalente a decir que es el coeficiente de* $t^n/n!$, *un hecho que se vuelve claro por medio de ecuación (39). Existen situaciones en las cuales las derivadas pueden llegar a ser muy complicadas. Cuando es el caso, se recomienda usar alguna de las series expuestas en la sección 2.1, donde* μ'_n *puede encontrarse como el coeficiente de* $t^n/n!$.

2.7.1. Propiedades.

A continuación se exponen algunas de las propiedades de las funciones generadoras de momentos.

- La función generadora de momentos valuada en cero es:
  $M_X(0) = E(1) = 1$ (40)
- Si X y Y son v.a.'s independientes y $S = X + Y$, entonces:
  $M_S(t) = M_X(t)M_Y(t)$
  Esto se puede confirmar por medio del siguiente razonamiento:
  $E(e^{tS}) = E(e^{t(X+Y)})$
  Por independencia de v.a.'s
  $E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$ (41)
  De manera más general, si X_i, $i = 1,2,\dots,n$, son v.a.'s independientes y $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces:
  $M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$ (42)

  La ecuación anterior expresa que la función generadora de momentos de la suma de n v.a.'s es el producto de las funciones generadoras de momentos de cada v.a. En particular si todas las X_i's son distribuidas idénticamente con una función de densidad común $f_X(t)$ y $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces:
  $f_S(t) = f_X^{*n}(t)$ y $M_S(t) = [M_X(t)]^n$ (43)
- En el caso de una v.a. discreta X, donde X asume los valores $x_1, x_2, \cdots$

  $$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tx_n} \Pr(X = x_n) \quad (44)$$

  $f_X(x_n)$ representa el coeficiente de e^{tx_n} en la expresión anterior.
  Este resultado a menudo es útil, porque si la f.g.m. es conocida, entonces $\Pr(X = x_n)$ puede ser obtenida de ésta como el coeficiente de e^{tx_n}.
- $M_{aX+c}(t) = e^{ct} M_X(at)$
- $M_{\bar{X}}(t) = M_{\frac{1}{n}\sum X_i}(t) = M_{\sum X_i}(t/n)$
  Si todas las X_i's son independientes e idénticamente distribuidas entonces la ecuación anterior es igual a:
  $[M_X(t/n)]^n$,
- Si una v.a. X tiene f.g.m. $M_X(t)$ igual a la f.g.m. de otra v.a. Y, $M_Y(t)$, es decir $M_X(t) = M_Y(t)$, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Ejemplo 2.7.1.

El ejemplo 2.6.1 puede ser resuelto por medio del uso de la función generadora de momentos.
$M_S(t) = M_X(t)M_Y(t)$

Solución.
Utilizando ecuación (44)
$M_X(t) = \sum_{n=0}^{2} e^{tx_n} \Pr(X = x_n) = e^{t(0)} \Pr(X = 0) + e^{t(1)} \Pr(X = 1) + e^{t(2)} \Pr(X = 2)$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$
De la misma manera
$M_Y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$
Sustituyendo $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ en la ecuación anterior
$= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\right)\left(\frac{e^t}{3} + \frac{e^{2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3}\right)$
Multiplicando ambos términos y factorizando términos comunes.
$= e^t \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + e^{2t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\right] + e^{3t}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right] + e^{4t}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
$+ e^{5t}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)$
$= \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{4t} + \frac{1}{12}e^{5t}$
Tomando los coeficientes de e^{kt}, se encuentra que:
$f_S(0) = 0\,; f_S(1) = 1/6\,; f_S(2) = 1/4\,;\ldots$, etc.
Esta forma de resolver el problema conduce al mismo resultado que en el ejemplo 2.6.1.

Ejemplo 2.7.2.

Supóngase que X_i, $i = 1,2,\ldots,6$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la misma función de densidad, $f_X(1) = 1/4; f_X(2) = 3/4$.
Si $S = \sum_{i=1}^{6} X_i$, encontrar $F^{*6}(8)$.

Solución.
Este problema se puede resolver mediante una tabla de convoluciones, sin embargo, abarcaremos el problema usando la f.g.m.
Utilizando ecuación (44),
$M_X(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{2t} = \left(\frac{1}{4}\right)e^t(1 + 3e^t)$

Se tiene que calcular $F^{*6}(8)$. Primero se obtiene $M_S(t)$,

$M_s(t) = M_{\sum_{i=1}^{6} X_i}(t)$

Debido a la suposición de independencia

$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_6}(t)$

Ya que todas las X_i, se distribuyen igual,

$= [M_X(t)]^6$

Sustituyendo el valor de $M_X(t)$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 e^{6t}(1+3e^t)^6$$

Usando el teorema del binomio, ecuación (6),

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 e^{6t}\left\{1 + 6(3e^t) + \frac{(6)(5)}{2!}(9e^{2t}) + \cdots + (729e^{6t})\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left[e^{6t} + 18e^{7t} + 135e^{8t} + \ldots + (729e^{6t})\right]$$

Tomando en cuenta los coeficientes de e^{kt}:

$$f^{*6}(k) = \begin{cases} 0 & \\ (\frac{1}{4})^6 & \\ (\frac{1}{4})^6(18) & \text{si} \\ (\frac{1}{4})^6(135) & \end{cases} \quad \begin{matrix} k < 6 \\ k = 6 \\ k = 7 \\ k = 8 \end{matrix}$$

Notar que no se tiene que expandir la f.g.m. más allá de e^{8t}. Por lo que, $F^{*6}(8)$ es la suma de estos números: $\left(\frac{1}{4}\right)^6 + \left(\frac{1}{4}\right)^6(18) + \left(\frac{1}{4}\right)^6(135) = \left(\frac{1}{4}\right)^6(154) = 0.6015$

Ejemplo 2.7.3.

Sea I_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\Pr(I_i = 1) = q$ y $\Pr(I_i = 0) = 1 - q = p$. Si $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$, encontrar la función de densidad de probabilidad de X.

Solución.

Por ecuación (44), $M_{I_i}(t) = qe^t + p$. De ecuación (43),

$M_X(t) = (qe^t + p)^n$

Usando la expansión binomial, ecuación (6).

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k e^{tk} p^{n-k}$$

$\Pr(X = k)$ es el coeficiente de e^{kt}.

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}. \quad (45)$$

A esta ecuación se le conoce como distribución binomial.
Debido a que es la distribución de la suma de n variables independientes Bernoulli,

$$E(X) = nq \quad (46)$$

$$Var(X) = npq \quad (47)$$

2.8. Otros Métodos para la determinación de la suma de variables aleatorias.

Tanto la convolución como la función generadora de momentos son métodos exactos para calcular la suma de variables aleatorias. Existen también métodos aproximados para obtener la función de densidad de la v.a. S. A continuación se mencionan dos de ellos:

a) Método de recursión.

Para un cierto número n se puede calcular la distribución de S recursivamente en algunos casos mediante el siguiente procedimiento.

Sea $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$ denota la suma de las primeras k variables aleatorias.
Entonces, para $k = 1,2,...,n$, la función de probabilidad de la suma parcial S_k es $f_{S_k}(x) = \Pr[X_1 + X_2 + ... + X_k = x]$, para $x = 0,1,2,...$.
Si $k = 1$, la ecuación anterior es $f_{S_1}(x) = \Pr[X_1 = x] = f_{X_1}(x)$
Si $k > 1$, $f_{S_k}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_{S_{k-1}}(x-y) f_{X_k}(y)$; $x = 0,1,...$
De esta manera se puede calcular $f_{S_2}(x)$, después $f_{S_3}(x)$ y así sucesivamente hasta obtener $f_{S_k}(x) = f_S(x)$. Este método es recomendado si existe una estructura especial inherente en la distribución de las X_k's. Si las X_k's tienen una distribución continua, la suma S_k llega a ser menos conveniente de calcular. El uso de este procedimiento en cada etapa de cálculo puede llegar a complicarse.

b) Teorema del Límite Central

Este poderoso teorema, introducido por De Moivre a inicios del s. XVII, dice lo siguiente: "sea S la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas[12], cada una teniendo media μ y desviación estándar σ.

[12] *El TLC se extiende a secuencias de variables aleatorias que no tienen la misma distribución.*

Entonces la distribución de $Z = \frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ tiende a una distribución normal estándar ($N(0,1)$) cuando n tiende a ∞, cualquiera que sea la distribución de cada una de las n v.a.'s independientes".

En otras palabras, aún si no se conoce la distribución de una v.a. cualquiera X, se sabe que la distribución de la suma de un gran número de tales variables, se aproxima a una distribución normal estándar.

Si un asegurador fuere a experimentar un número muy grande de reclamaciones con respecto a una clase particular de negocios, se espera que su pago total se distribuya como aproximadamente normal, siendo la suma de un gran número de reclamaciones individuales.

Este teorema establece que la distribución de la suma $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es aproximadamente normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

El TLC se aplica independientemente del tipo de v.a., es decir si es continua ó discreta. Esta aproximación es muy útil cuando la distribución exacta es difícil de obtener.

2.9. Momentos Centrales, función generadora de momentos y función de distribución de algunas leyes de probabilidad.

Una manera de obtener la media, varianza y tercer momento central (TMC) es desarrollar la serie de Maclaurin para $\ln M_X(t)$. La media, varianza y TMC, son obtenidos como los coeficientes de t, $\frac{t^2}{2!}$ y $\frac{t^3}{6!}$, en dicha expansión.

Este hecho puede ser demostrado por medio del siguiente cálculo. Si se escribe ecuación (39) como:

$M_X(t) = 1 + R$

Donde: $R = p_1 t + p_2 t^2/2 + p_3 t^3/6 + \ldots,$

Tomando logaritmos en ambas partes de la ecuación y utilizando ecuación (4) se obtiene la siguiente expansión en serie de potencias:

$$\begin{aligned}
\ln M_X(t) &= \ln(1 + R) \\
&= R - R^2/2 + R^3/3 + \ldots \\
&= \left[p_1 t + (p_2/2)t^2 + (p_3/6)t^3 + \ldots\right] - \frac{1}{2}\left[p_1 t + (p_2/2)t^2 + \ldots\right]^2 + \frac{1}{3}\left[p_1 t + \ldots\right]^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Agrupando términos comúnes

$$= p_1 t + (p_2 - p_1^2)t^2/2 + (p_3 - 3p_1 p_2 + 2p_1^3)t^3/6 + \ldots$$

El coeficiente de t en la serie de Maclaurin para $\ln M_X(t)$ es p_1 ó $E(x)$, el coeficiente de $t^2/2$ es $p_2 - p_1^2$ ó $Var(X)$ y el coeficiente de $t^3/6$ representa el tercer momento central ó $E\left[(X-p_1)^3\right]$(13)

A continuación se obtienen los momentos centrales para algunas de las variables aleatorias más conocidas, por medio del desarrollo en serie de potencias para $\ln M_X(t)$

1. Para la distribución Poisson, su función de densidad y su f.g.m. están dadas por:

$$f_P(n) = \left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)e^{-\lambda} \tag{48}$$

$$M_P(t) = E\left(e^{Nt}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)e^{-\lambda}\right]e^{tn} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda e^t\right)^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} = \exp(\lambda e^t - \lambda) \tag{49}$$

Tomando logaritmos en ambas partes de la ecuación (49) y usando posteriormente la ecuación (3) se obtiene:

$$\ln M_P(t) = \lambda\left(e^t - 1\right)$$
$$= \lambda\left(t + t^2/2 + t^3/6 + \ldots\right)$$

Tomando en cuenta los coeficientes de t, $\frac{t^2}{2!}$ y $\frac{t^3}{6!}$ se tiene que:

$$E(X) = \lambda\,;\ Var(X) = \lambda\,;\ TMC(X) = \lambda \tag{50}$$

2. Para la distribución exponencial, $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}, \beta > 0$,

$$M_X(t) = \int_0^{\infty}\left(\beta e^{-\beta x}\right)e^{tx}dx = \beta\int_0^{\infty} e^{tx}e^{-\beta x}dx = \frac{\beta}{\beta - t} = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-1};\ t < \beta \tag{51}$$

Tomando logaritmos y usando la serie de la ecuación (4)

$$\ln M_X(t) = -\ln\left(1 - \frac{t}{\beta}\right)$$
$$= \left(\frac{t}{\beta}\right) + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2 \Big/ 2 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^3 \Big/ 3 + \ldots$$

Tomando en cuenta únicamente los coeficientes de t, $\frac{t^2}{2!}$ y $\frac{t^3}{6!}$ se tiene que:

$$E(X) = \beta^{-1};\ Var(X) = \beta^{-2};\ TMC(X) = 2\beta^{-3} \tag{52}$$

(13) $E\left[(X-p_1)^3\right] = E\left[X^3 - 3X^2p_1 + 3Xp_1^2 - p_1^3\right]$
$= p_3 - 3p_2p_1 + 3p_1^3 - p_1^3$
$= p_3 - 3p_2p_1 + 2p_1^3$

Supóngase que las X_i's son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad $f_{X_i}(x) = \beta e^{-\beta x}$. Sea $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces:

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-n}$$

Cuando n es un número real positivo, es decir α, entonces S tiene una distribución Gamma. Su función generadora de momentos es:

$$\ln M_{Ga}(t) = \alpha \ln M_X(t) \tag{53}$$

La media, varianza y tercer momento central de X son dados por:

$$E(X) = \alpha\beta^{-1};\ Var(X) = \alpha\beta^{-2};\ TMC(X) = 2\alpha\beta^{-3} \tag{54}$$

3. Suponga que uno hace un experimento repetidas veces (tal como el lanzamiento de una moneda). En cada prueba existen únicamente 2 resultados, es decir, éxito o fracaso. Sea q la probabilidad de éxito y $1-q$, la probabilidad de fracaso. Entonces la probabilidad de que se presenten n éxitos consecutivos antes de que se presente un fracaso es:

$$f_{Ge}(n) = q^n(1-q),\ n = 0,1,2,... \tag{55}$$

A esta distribución se le conoce como geométrica. Su función generadora de momentos es dada por:

$$M_{Ge}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} q^n (1-q)$$

Suma de series geométricas

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} (e^t q)^n$$

Utilizando la ecuación (2)

$$= \frac{1-q}{1-qe^t}$$

$$= \frac{p}{1-qe^t} \tag{56}$$

Los tres momentos centrales se pueden obtener expandiendo $\ln M_{Ge}(t)$ en series de potencias de t. Estos son los siguientes:

$$E(X) = \frac{q}{p};\ Var(X) = \frac{q}{p^2};\ TMC(X) = \frac{q(1+q)}{p^3} \tag{57}$$

Suponiendo que existen n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución geométrica, entonces la f.g.m. de su suma es:

$$M_S(t) = \left[p/\left(1-qe^t\right)\right]^n$$

Este resultado se puede generalizar reemplazando n por un número real positivo r. La distribución resultante es llamada distribución Binomial Negativa con f.g.m.:

$$M_{BN}(t) = \left[\frac{p}{\left(1 - qe^t\right)}\right]^r \tag{58}$$

Tomando logaritmos en ambas partes de la ecuación,

$$\ln M_{BN}(t) = r\ln\left[\frac{p}{\left(1 - qe^t\right)}\right] = r\ln M_{Ge}(t)$$

Por lo que para la v.a. binomial negativa,

$$E(X) = \frac{rq}{p}\ ; Var(X) = \frac{rq}{p^2}\ ;\ TMC(X) = \frac{rq(1+q)}{p^3} \tag{59}$$

4. La distribución normal, es por supuesto una de las distribuciones de probabilidad más conocida. Su función de densidad y f.g.m. están dadas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{60}$$

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \tag{61}$$

Tomando logaritmos se encuentra que:

$E(X) = \mu$; $Var(X) = \sigma^2$; $TMC(X) = 0$

5. La distribución Gaussiana inversa surge en el estudio del movimiento Browniano y en matemáticas financieras. La función de densidad de probabilidad es:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}}x^{-3/2}\exp\left[-\frac{(\beta x - \alpha)^2}{2\beta x}\right] \tag{63}$$

Donde: α y β son parámetros positivos. La función generadora de momentos es

$$M_X(t) = \exp\left[\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}}\right)\right] \tag{64}$$

De esto se obtiene lo siguiente:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta};\ Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}\ ;\ TMC(X) = \frac{3\alpha}{\beta^3} \tag{65}$$

Notar que la f.g.m. no está definida para $t > \beta/2$ y $M_X(\beta/2) = e^{\alpha}$.

6. La distribución Gamma trasladada surge en el estudio de la aproximación a la distribución del total de reclamaciones[14]. Su función de distribución esta dada por:

$$F_X(x - x_0) = \int_0^{t - x_0}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \tag{66}$$

[14] *La cual posteriormente se verá en la Sección 4.5.3. del Capítulo 4.*

Donde: α y β son parámetros positivos.

x_0, representa la cantidad por la cual una distribución Gamma con parámetros α y β se trasladada

De lo anterior, se puede demostrar que :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \,;\; Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \,;\; TMC(X) = \frac{2\alpha}{\beta^3} \tag{67}$$

Ejemplo 2.9.1.

Una v.a. Λ tiene función de distribución Gaussiana inversa con media 2 y varianza 4. Para $\Lambda = \lambda$, la variable aleatoria N tiene una distribución Poisson con media λ. Encontrar $\Pr(N = 0)$.

Solución.

Ya que para la distribución Gaussiana inversa, la media es igual a 2 ó $E(\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta} = 2$ y varianza es igual a 4 ó $Var(\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta^2} = 4$, se tiene que $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Dado λ, la probabilidad de que no sucedan reclamaciones es $e^{-\lambda}$. Por la ley de probabilidad total,

$$\Pr(N = 0) = \int_0^\infty e^{-\lambda} f_\Lambda(\lambda) d\lambda = M_\Lambda(-1) = \exp\left(1 - \sqrt{1+4}\right) = 0.29$$

Ejercicios, Capítulo II

1. Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad $f_X(x) = e^{-2x} + 1.5e^{-3x}$, $x \geq 0$. Encontrar los primeros dos momentos no centrales de X.
Resp. $\left(\frac{5}{12};\frac{13}{36}\right)$

2. Una variable aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad tal que $f_X(x) = 0$ para $x < 0$, $f_X(x) = x^2$ para $0 \leq x < 1$ y $f_X(x) = 0$ para $x > 1$. Encontrar $E(X)$.
Resp. $\left(\frac{11}{12}\right)$

3. Una variable aleatoria X tiene función de distribución $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ para $0 \leq x < 1$ y $F_X(x) = 1$ para $x \geq 1$. Encontrar el valor esperado de X.
Resp. $\left(1 - e^{-1}\right)$

4. Una variable aleatoria B es uniformemente distribuida sobre $(1, a)$. Para dado $B = \beta$, la distribución del monto de reclamación es $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$; $x \geq 0$. Encontrar $\Pr(X \leq 2)$.
Resp. $\left(1 - \frac{e^{-2} - e^{-2a}}{2(a-1)}\right)$

5. Una variable aleatoria X tiene distribución Gaussiana inversa con media 2 y varianza 6. Para dada $X = x$ otra variable aleatoria Y tiene una distribución exponencial con media $1/x$. Encontrar la probabilidad de que Y vaya a tomar un valor entre $3/32$ y $1/2$.
Resp. $\left(e^{-1/6} - e^{-2/3}\right)$

6. La función de densidad de probabilidad para una cierta pérdida X es $f_X(x) = ce^{-cx}$ para toda $x > 0$, donde c es una constante positiva. Una póliza de seguro no va a pagar nada si $X \leq d$ y va a pagar $X - d$ si $X > d$. d representa el deducible arriba del cual se van a pagar las pérdidas. Encontrar la varianza del pago.
Resp. $\left(\frac{2e^{-cd} - e^{-2cd}}{c^2}\right)$

7. Una variable aleatoria A tiene la función de densidad de probabilidad $\Pr(A = 0.8) = 0.3$ y $\Pr(A = 1.2) = 0.7$. Dada una cierta A otra variable aleatoria X es uniformemente distribuida sobre $(0, A)$. Encontrar $\Pr(X \leq 0.5)$.
Método de resolución.
Asumir que A es dada. Encontrar $\Pr(X \leq 0.5 | A)$ y usar la función de densidad de probabilidad de A.
Resp. $\left(\frac{23}{48}\right)$

8. Una variable aleatoria X, tiene la función de densidad de probabilidad $\Pr(X=1)=0.25$ y $\Pr(X=2)=0.75$. Otra variable aleatoria Q, es tal que:
si $X=1$, Q es uniformemente distribuida sobre el intervalo de tiempo $(0,1)$.
si $X=2$, $Q=0.2$ con probabilidad 1.
Una tercer variable aleatoria N es distribuida tal que dado $Q=q$, $\Pr(N=n|Q=q)=(1-q)q^n$, $n=0,1,2,\ldots$, es decir, N es geométrica con parámetro q. Encontrar $\Pr(N=2)$.
Método de solución.
Para dada $Q=q$ encontrar $\Pr(N=2|Q=q)$.
Obtener $f_Q(q)$ de la siguiente manera:
$f_Q(q)=f_{Q|X=1}(q)\Pr(X=1)+f_{Q\,X=2}(q)\Pr(X=2)$
Una de las funciones es uniforme y la otra degenerada.
Resp. (0.045)

9. Para cierta póliza, la probabilidad de que ocurra una muerte debida a cualquier causa es q_1 y la probabilidad de muerte debida a un accidente es q_2. En el evento de muerte no accidental, la póliza va a pagar \$1 y en el evento de muerte accidental, la póliza pagará \$10. Encontrar la varianza de la reclamación.
Resp $\left(99q_2+q_1-(9q_2+q_1)^2\right)$

9. Para el problema 4, calcular $E(X)$ y $Var(X)$.
Resp. $\left(\frac{\ln a}{a-1};\frac{2}{a}-\left(\frac{\ln a}{a-1}\right)^2\right)$

10. Una variable aleatoria N tiene una distribución Poisson con $E(N)=5$. Para dada $N=n$, otra variable aleatoria X tiene distribución binomial con parámetros n y $1/3$, es decir, su función de frecuencia de probabilidad es:
$\Pr(X=x|N=n)=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}$
Encontrar $E(X)$ y $Var(X)$.
Resp. $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$

11. X y Y son variables aleatorias independientes, con las siguientes funciones de frecuencia de probabilidad.
$f_X(n)=2^{-n-1}$; $n=0,1,2,\ldots$
$f_Y(0)=p$ y $f_Y(1)=1-p$
Sea Z la v.a. que denota la suma de las variables aleatorias X y Y, es decir, $Z=X+Y$.
Si $f_Z(3)=\frac{5}{48}$. Encontrar p.
Resp. $\left(\frac{1}{3}\right)$

12. X es una v.a. uniforme distribuida sobre $(0,1)$. Y es otra v.a. con la siguiente función de probabilidad: $f_Y(y) = ny^{-n-1}, n \geq 1$, si $y \geq 1$ y $f_Y(y) = 0$ en otro caso.
X y Y son v.a.'s independientes. Sea $S = X + Y$. Encontrar $F_S(3)$.

Resp. $F_s(3) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n-1}\left(2^{-n+1} + 3^{-n+1}\right) & \text{si } n > 1 \\ 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \text{si } n = 1 \end{cases}$

13. X es una v.a. uniforme sobre $(0,2)$ y

$$f_Y(y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{si } 1 < y \leq 2 \\ 1/4 & \text{si } 2 < y \leq 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

X y Y son v.a.'s independientes. Si $Z = X + Y$, encontrar $F_Z(3)$.

Resp. $\left(\frac{13}{16} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$

14. X_1, X_2 y X_3 son v.a.'s independientes que pueden asumir valores entre 0 y 3. Sus funciones de masa de probabilidad se muestran en el siguiente cuadro:

x	$f_{X_1}(x)$	$f_{X_2}(x)$	$f_{X_3}(x)$
0	0.40	0.25	p
1	0.40	0.25	0
2	0.10	0.25	$1-p$
3	0.10	0.25	0

Sea $S = X_1 + X_2 + X_3$. Si $f_S(6) = 0.10$, Encontrar p.
Resp. (0.4)

15. Sean X_i, para $i = 1$ hasta $i = 6$; variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\Pr(X = 0) = \frac{2}{3}$ y $\Pr(X = 1) = \frac{1}{3}$. Si $S = \sum_{i=1}^{6} X_i$, encontrar $\Pr(S = 3)$

Resp. (0.219)

16. Para una distribución Gaussiana inversa encontrar la media, varianza y tercer momento central.

Resp. $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{3\alpha}{\beta^3}\right)$

17. Si Λ es una v.a Gaussiana inversa con parámetros α y β; y N es una v.a. Poisson Gaussiana Inversa. Encontrar $E(N)$ y $Var(N)$.
Método de resolución.
Encontrar $E(N|\Lambda)$, $Var(N|\Lambda)$ y usar las ecuaciones (29) y (30) del capítulo 2.
Resp. $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right)$

18. Sea N una v.a. Poisson con media Λ, la cual es por si misma una v.a. Expresar la f.g.m. de N en términos de la f.g.m. de Λ.
Resp. $\left[M_\Lambda(e^t - 1)\right)$

19. Un proceso de reclamaciones tiene distribución Poisson Gaussiana Inversa con media 4 y varianza 12. Encontrar la probabilidad de que vayan a existir cero reclamaciones.
Método de resolución.
Encontrar los parámetros de la correspondiente distribución Gaussiana-Inversa, usar la ley de probabilidad total (sección 2.5.1) y relacionar la f.g.m. de la distribución Gaussiana Inversa con la probabilidad de vayan a existir cero reclamaciones.
Resp. (0.0844)

20. Sean X_i, $i = 1,2,\ldots,100$; v.a.'s mutuamente independientes e idénticamente distribuidas cada una con media μ y varianza σ^2. Si $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. Calcular la esperanza y la varianza de S.
Donde: S, es conocida como la v.a que denota el costo total de reclamaciones.
Resp. $\left[E(S) = 100\mu,\ Var(S) = 100\sigma^2\right]$

21. Sea N una v.a. Poisson con parámetro Λ, el cual es por si mismo una v.a Gamma con parámetros α y β. ¿Cuál es la distribución de N?.
Resp. Distribución binomial negativa con $r = \alpha$ y $q = \frac{1}{(\beta + 1)}$

23. Para el problema 11, encontrar la f.g.m. de X
Resp. $\left(M_X(t) = \exp\left[\left(\frac{5}{3}\right)(e^t - 1)\right]\right)$

24. Para el problema 23, encontrar $\Pr(X \le 2)$
Resp. $\left(\left(\frac{73}{18}\right)\exp\left[-\left(\frac{5}{3}\right)\right]\right)$

CAPITULO III

TEORIA DEL RIESGO INDIVIDUAL

3.1. Introducción.

El primer problema práctico el cual hubo de enfrentar la Teoría del Riesgo, fue el de encontrar una expresión para la ganancia o pérdida de cada póliza individual y poder así determinar información relativa a la cartera.

El modelo de riesgo individual, merece una atención especial, debido al hecho de que es ampliamente usado en ciertas aplicaciones, especialmente en el seguro de vida y de accidentes y enfermedades.

Este modelo de riesgo, se caracteriza por las siguientes hipótesis:

- Independencia. Se asume que los riesgos son estadísticamente independientes, tal que el costo de reclamación o pérdida de un riesgo no tiene influencia sobre el costo de cualquier otro riesgo. Esta hipótesis puede parecer apropiada en algunos tipos de seguros (por ejemplo, un seguro de vida vendido sobre una base de riesgo individual) pero inapropiada en otros, como por ejemplo un seguro para una flotilla de automóviles, donde la ocurrencia de una reclamación para cualquiera de las unidades aseguradas, afecta directamente el monto total de reclamación para la flotilla.
- Exclusión de múltiples reclamaciones. La posibilidad de dos o más reclamaciones por una misma póliza es excluida (cada riesgo en la cartera, puede experimentar a lo más una reclamación). Ya sea que ocurra o no una reclamación para cada riesgo, las reclamaciones son amalgamadas y tratadas como una única reclamación. Lo primero es apropiado para un seguro de vida grupo en donde no más de una reclamación por riesgo puede ocurrir. Lo segundo es deseable en otros tipos de seguros, como el de gastos médicos con deducible.

3.2. Conceptos básicos.

Con el fin de introducir el modelo, se dará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1.

La probabilidad de que un individuo muera durante el año es q. En el evento de muerte, un monto de B será pagado. B es una v.a. que representa el monto total de reclamaciones ocurridas durante el año con media μ y varianza σ^2. Encontrar el valor esperado y la varianza del pago.

Solución.

Sea X la v.a. que denota el pago por reclamaciones durante el período de estudio.
Entonces $X = 0$ si no ocurre la muerte, en caso contrario el monto a pagar es una v.a. B. Así se tiene que $X = B$ si la muerte ocurre y $X = 0$ si no ocurre. Se puede escribir este hecho de una manera más clara, (como se hizo en el ejemplo 2.5.7), como $X = BI$, donde I puede tomar únicamente dos valores 0 y 1.

I representa una v.a. Bernoulli[1] con $\Pr(I = 1) = q$ y $\Pr(I = 0) = p$ (probabilidad de que no ocurra la muerte).
$p = 1 - q$ dado que se considera que ocurre o no el pago y no existe otra posibilidad.

Lo que se busca es encontrar $E(X)$ y $Var(X)$, los cuales representan el valor esperado y varianza del pago, respectivamente.

Como se vió en las fórmulas (29) y (30) del capítulo anterior, existen algunas fórmulas que relacionan los momentos de v.a.'s a ciertas esperanzas condicionales, a las cuales se les conoce como esperanza y varianza condicionales.

En diversos modelos actuariales, las distribuciones condicionales son usadas.
Esto hace de las fórmulas (29) y (30) del capítulo anterior que sean directamente aplicables.

Para el ejemplo que nos concierne:
$E(X) = E(IB) = E[E(IB \mid I)]$
$Var(X) = Var(IB) = E[Var(IB \mid I)] + Var[E(IB \mid I)]$

Si I es dado, entonces $E(IB \mid I) = IE(B)$ y $Var(IB \mid I) = I^2 Var(B)$
Dado que I toma únicamente los valores 0 y 1, entonces se puede decir que $I^2 = I$, por lo tanto $Var(IB|I) = IVar(B)$.
Por otro lado, $E(B) = \mu$ y $Var(B) = \sigma^2$.
Por la propiedades de los valores esperados, se tiene que:
$E(X) = E[E(BI \mid I)] = E[IE(B)]$
como $E(B)$, es constante con respecto a la v.a. I.

$$E(X) = E(B)E(I) \tag{1}$$

Sustituyendo $E(B)$
$= \mu E(I)$
Sustituyendo $E(I)$

$$= \mu q \tag{2}$$

De la misma manera evaluando la varianza de X, se encuentra que:

$$Var(X) = Var(IB) = E[Var(IB \mid I)] + Var[E(IB \mid I)] = E[IVar(B)] + Var[IE(B)] \tag{3}$$

[1] *También conocida como v.a. indicador, (ya que determina la ocurrencia o no de un evento dado) ó v.a. Binomial para una sola prueba.*

Por las propiedades de las varianzas y esperanzas, se obtiene:

$$= Var(B)E(I) + E(B)^2 Var(I)$$

Sustituyendo cada uno de estos valores

$$= \sigma^2 q + \mu^2 q(1-q) \qquad (4)$$

En el caso particular, donde el "monto de beneficio" B no es una v.a. sino una cantidad fija $B = b$, entonces $\mu = b$ y $\sigma^2 = 0$. Por lo tanto fórmulas (2) y (4), respectivamente cambian a:

$E(X) = qb$

$Var(X) = q(1-q)b^2$

En el modelo individual, n pólizas etiquetadas de 1 a n son consideradas, donde la $i-ésima$ póliza va a pagar un monto B_i en el evento de una reclamación y 0 en otro caso.

Como se hizo en el ejemplo anterior, se puede denotar este pago para la $i-ésima$ reclamación individual por $X_i = I_i B_i$, donde $I_i = 1$ si la reclamación ocurre y $I_i = 0$ en caso contrario.

La pérdida total asociada con una cartera de n riesgos, es la suma de las pérdidas por cada riesgo. Así se puede escribir:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (5)$$

Donde:

- X_i, representa el costo total de reclamaciones producidas por la i-ésima póliza sobre un periodo de tiempo.
- S, representa las pérdidas totales ó total de reclamaciones para la cartera. Se asume que las X_i's son mutuamente independientes[2].
- n, es el número de unidades de riesgo aseguradas (o número de pólizas en vigor en el periodo de estudio).

Existen tres expresiones de gran interés para el actuario, llamadas: $E(S)$, $Var(S)$ y función de frecuencia para la v.a. S.

Si se conoce la función de distribución de la v.a. S se pueden obtener su valor esperado y su varianza. En general, es difícil encontrar la función de frecuencia de S. Sin embargo, los modelos de riesgo individual y colectivo ofrecen diversas técnicas para dicho efecto, entre las cuales se encuentran: estimación, aproximación o simulación.

En esta sección se desarrollarán las primeras dos primeras expresiones.
De ecuación (5) se tiene:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

[2] *A menudo se asume que las variables aleatorias son idénticamente distribuidas.*

Tomando el valor esperado en ambas partes de la ecuación y usando la propiedad de independencia entre variables aleatorias, se tiene que:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \tag{6}$$

Haciendo lo mismo para la varianza de la v.a. S, resulta lo siguiente:

$$Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Var(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

Por la propiedad de independencia

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \tag{7}$$

Si se puede encontrar $E(X_i)$ y $Var(X_i)$, se suman estas cantidades para obtener $E(S)$ y $Var(S)$. Tanto $E(X_i)$ como $Var(X_i)$ fueron calculadas en el ejemplo anterior, ver ecuaciones (2) y (4).

Si q_i representa la probabilidad de que la i-ésima reclamación ocurra, $E(B_i) = \mu_i$ y $Var(B_i) = \sigma_i^2$, entonces:

$$E(X_i) = \mu_i q_i \tag{8}$$

$$Var(X_i) = q_i \sigma_i^2 + q_i p_i \mu_i^2 \tag{9}$$

Aplicando fórmulas (6) y (7), se obtiene:

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i q_i \tag{10}$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma^2_i + q_i p_i \mu_i^2 \tag{11}$$

En particular, si los montos de reclamaciones son constantes, es decir, $B_i = b_i$, entonces $\mu_i = b_i$ y $\sigma_i^2 = 0$, con lo cual las ecuaciones anteriores cambian a:

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} b_i q_i \tag{12}$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i b_i^2 \tag{13}$$

Ejemplo 3.2.2.

Suponga que existen 100 pólizas cada una de las cuales paga un monto de \$6 en el evento de una reclamación. Si la probabilidad de reclamación es 0.02, encontrar el valor esperado y la varianza del total de reclamaciones.

Solución.
El monto de reclamación es fijo, por lo que para resolver el problema se utilizarán ecuaciones (12) y (13). Todas las 100 pólizas son idénticas.
Para toda i, $q_i = 0.02$, $b_i = 6$ y $E(X_i) = b_i q_i = (6)(0.02) = 0.12$.
Con base en lo anterior:

$$E(S) = \sum_{i=1}^{100} 0.12 = 100(0.12) = 12$$

Similarmente, $q_i p_i b_i^2 = (0.02)(0.98)(6^2) = 0.7056$ y por lo tanto $Var(S) = (100)(0.7056) = 70.56$.

Ejemplo 3.2.3.

Si el monto de reclamación en el problema anterior, en vez de ser fijo es una v.a. uniformemente distribuida sobre $(0,12)$. Encontrar la media y la varianza del total de reclamaciones.

Solución.
Recordar que para una v.a. uniformemente distribuida sobre (a,b), la media es $\frac{(a+b)}{2}$ y la varianza es $\frac{(b-a)^2}{12}$. Así $\mu_i = 6$ y $\sigma_i^2 = 12$ para toda i. También se sabe que $q_i = 0.02$.
Usando la ecuación (8), $E(X_i) = (0.02)(6) = 0.12$, para toda i y $E(S) = 12$. De la misma forma usando la ecuación (9), $Var(X_i) = 0.02(12) + (0.02)(0.98)(36) = 0.9456$ para toda i.

Notar que la varianza en este ejemplo es más grande que la del ejemplo 3.2.2. debido al término adicional $(q_i \sigma_i)$. La varianza del total de reclamaciones es $100(0.9456) = 94.56$

Ejemplo 3.2.4.

Considere la siguiente cartera de pólizas independientes.

Número de pólizas (n)	Probabilidad de reclamación (q_i)	Monto del beneficio (b_i)
100	0.02	1
200	0.01	2
100	0.02	3

Encontrar el valor esperado y la varianza del total de reclamaciones.

Solución. Observando que $B_i = b_i$ es un monto fijo y que $Var(B_i) = \sigma_i^2 = 0$ para toda i, entonces $E(X_i) = q_i b_i$ y $Var(X_i) = b_i^2 q_i p_i$. Notar que todas las pólizas en cualquier renglón son idénticas.
Por lo que se tiene lo siguiente:

$E(S) = 100(0.02) + 200(0.01)(2) + 100(0.02)3 = 12$

$Var(S) = 100(0.02)(0.98)(1^2) + 200(0.01)(0.99)2^2 + 100(0.02)(0.98)(3^2) = 27.52$

Ejemplo 3.2.5.

Supóngase que en el ejemplo 3.2.4, los montos del beneficio son variables aleatorias uniformemente distribuidas sobre $(0, a)$ con medias 1, 2 y 3 respectivamente. Encontrar el valor esperado y la varianza del total de reclamaciones.

Solución.
El valor esperado de S va a ser el mismo que en el ejemplo 3.2.4. ya que las μ_i's son las mismas que las b_i's, pero existirá un término adicional para la varianza de X_i, llamado $q_i \sigma_i^2$. De esta forma se obtiene lo siguiente:

μ_i	σ_i^2	$q_i \sigma_i^2 \; + \; q_i p_i \mu_i^2$	$= Var(X_i)$
1	$\frac{2^2}{12}$	$\frac{(0.02)(2^2)}{12} + (0.02)(0.98)1^2$	0.0263
2	$\frac{4^2}{12}$	$\frac{(0.01)(4^2)}{12} + (0.01)(0.99)(2^2)$	0.0529
3	$\frac{6^2}{12}$	$\frac{(0.02)(6^2)}{12} + (0.02)(0.98)(3^2)$	0.2364

Por lo tanto, $Var(S) = 100(0.0263) + 200(0.0529) + (100)0.2364 = 36.85$

3.3. Aproximación Normal y factor de seguridad

En muchas aplicaciones, no es posible reconocer la función generadora de momentos de una distribución en particular ni tampoco obtener la convolución de variables aleatorias debido a que el procedimiento se vuelve complicado.

Sin embargo, si se tiene un número considerable de pólizas, el modelo individual puede ser aproximado por medio de una distribución normal con media igual a $E(S)$ y varianza igual a $Var(S)$, es decir, se puede aplicar el Teorema del Límite Central para aproximar la distribución del total de reclamaciones S.

En este caso,

$$Z = \frac{S - E(S)}{Var(S)} \tag{14}$$

es una variable aleatoria estandarizada (o v.a. normal con media cero y varianza 1)

En términos de probabilidad se tendría que:

$$\Pr\left\{ \frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \le x \right\} \cong \Phi(x) = N(0,1) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{15}$$

En el caso especial donde la distribución es discreta, esta aproximación se puede mejorar usando un término de corrección, reflejando el hecho de que una distribución discreta esta siendo aproximada por una continua. En este caso, se ajusta el valor de S por $1/2$ del intervalo, tal que:

$$\Pr\left\{ \frac{S + 1/2 - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \le x \right\} \cong \Phi(x)^{(3)} \tag{16}$$

Por otra parte, el asegurador tiene que cobrar una prima G [4], la cual es más grande que $E(S)$. En otras palabras $G = E(S)(1+\theta), \theta > 0$. Al monto $\theta E(S)$, se le conoce como factor de seguridad y θ es llamado factor de seguridad relativo.

[3] *Hogg Robert V. et. al., Introduction to Mathematical Statistics, p. 249, Cfr. Parzen, Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones.*

[4] *Con el fin de tener una idea general del proceso que se sigue para obtener las primas que cobra un asegurador, se menciona lo siguiente:*

La compañía de seguros establece objetivos financieros, los cuales se dividen principalmente en dos categorías:

- *Objetivos operacionales, tales como las ganancias que se desean obtener, el posicionamiento en el mercado que se desea alcanzar.*
- *Objetivos de seguridad, los cuales sirven para determinar las reservas necesarias para cubrir los riesgos, las coberturas de reaseguro para hacer frente a posibles eventualidades catastróficas, las inversiones a realizar y el nivel de solvencia deseada.*

Existe una interrelación muy complicada entre ellos, los cuales si se juntan dictan las estrategias operacionales como lo son: el diseño de pólizas, los métodos de distribución y suscripción de pólizas, la administración de reclamaciones y la tarificación.

El desarrollo de la determinación de los objetivos operacionales y los precios resultantes es conocido como el proceso de tarificación. Existen dos aspectos importantes en el establecimiento de este proceso:

- *El establecimiento de primas o tarifas propuestas y*
- *La determinación de los precios que en la práctica se van a cobrar.*

Las primas propuestas, son aquellas que se necesitan para alcanzar el objetivo planteado a largo plazo. Estas se basan en diferentes principios y consideran a la cartera suscrita y el cambio en factores sociales, económicos, legislativos y tecnológicos. Ellas proveen un punto de partida desde las cuales se pueden hacer juicios comerciales. Los precios cobrados, toman en cuenta la existencia de un ambiente competitivo y el posicionamiento del asegurador en el mercado. Estos precios pueden ser más dinámicos y su relación con respecto a los precios propuestos puede variar en el tiempo con la situación del mercado y con las expectativas de los administradores y los accionistas.

A $E(S)$ se le conoce como prima neta y G como la prima total que cobra el asegurador [5]. θ, es escogido de tal manera que la probabilidad de que la prima total vaya a poder cubrir el monto total de reclamaciones, sea grande.

Ejemplo 3.3.1.

Para el ejemplo 3.2.4., determinar el factor de seguridad relativo tal que la probabilidad de que el total de reclamaciones no vaya a ser más grande que la prima total es igual a 0.95. Usar aproximación normal.

Solución.

Por los resultados del problema 3.2.4, se sabe que: $E(S)=12, \; Var(S)=27.52$

La prima total está dada por:

$G = (1+\theta)E(S).$

Se está interesado en calcular:

$$\Pr(\text{Total de primas} \geq \text{Total de reclamaciones}) = \Pr[S \leq (1+\theta)E(S)]$$

Restando a ambas partes de la desigualdad $E(S)$ y después dividiendo entre $\sqrt{Var(S)}$

$$= \Pr\left\{\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right\}$$

Usando aproximación normal (fórmula (15))

$$= \Phi\left\{\frac{\theta\, E(S)}{Var(S)}\right\} = 0.95$$

Es decir, se necesita encontrar un valor de $\Phi(x)$ (v.a. normal estandarizada) para el cual su probabilidad sea 0.95. Consultando este valor en tablas de la normal, se obtiene 1.645.

Por lo anterior,

$$\theta \frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645$$

Despejando θ, $\theta = 1.645 \dfrac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$

Sustituyendo los valores para $E(S)$ y $Var(S)$

$$\theta = 1.645 \frac{\sqrt{27.52}}{12} = 0.72 = 72\%$$

Por lo tanto la prima total que el asegurador deberá cobrar es $G = 12(1+0.72) = 20.64$

[5] *A esta prima se le conoce como prima de riesgo. Cuando la prima incluye gastos operativos y de administración, entonces se conoce como prima de tarifa.*

3.4. Reaseguro y reclamaciones retenidas.

El riesgo asegurado puede ser reducido por el uso de reaseguro, en el cual otro asegurador conocido como reasegurador actúa como asegurador de la compañía que originalmente cubre el riesgo, conocida como la compañía cedente o reasegurado. La función del seguro es transferir variabilidad del asegurado al asegurador. En las manos del asegurador, la variabilidad del total de reclamaciones es reducida transfiriendo el riesgo de reasegurado a reasegurador. Es decir, el asegurador se protege asimismo contra pérdidas que surgen de reclamaciones numerosas, grandes o catastróficas; reasegurando grandes montos de reclamación, con una o más de una compañía aseguradora o reaseguradora.

La razón por la cual se desea asumir un riesgo a una cierta prima y después comprar una cobertura de reaseguro a una prima mayor será explicada posteriormente. Esto produce que el asegurador incremente su nivel de seguridad.

Para introducir algunos conceptos, se usará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.1.

Supóngase que en el ejemplo 3.3.1, el asegurador compra reaseguro para cubrir reclamaciones individuales que excedan a \$2. El factor de seguridad relativo para el reasegurador es 100%.

a) Encontrar la varianza de las reclamaciones retenidas (es decir, las reclamaciones asumidas por el asegurador).
b) Encontrar el factor de seguridad relativo para la compañía cedente después de contratar reaseguro.

Solución.

a) Un monto de 1 por cada póliza (como se puede observar en el último renglón de la siguiente tabla) es reasegurado y el resto es retenido. La cartera es dividida como se ve a continuación:

Número de pólizas (n)	Probabilidad de reclamación (q_i)	Monto de reclamación	Monto retenido por la aseguradora	Monto Cedido por la aseguradora
100	0.02	1	1	0
200	0.01	2	2	0
100	0.02	3	2	1

Calculamos $Var(X_i) = q_i p_i \mu_i^2$ para cada una de las pólizas retenidas.

La varianza de reclamaciones retenidas es:

$$Var(S_{ret}) = 100(0.02)(0.98)1 + 200(0.01)(0.99)2^2 + 100(0.02)(0.98)2^2 = 17.72$$

b) Antes de reaseguro, el valor esperado del total de reclamaciones es:
$E(S) = (100)(0.02)(1) + (200)(0.01)(2) + (100)(0.02)(3) = 12$
Ya que el factor de seguridad relativo es 0.72 (ejemplo 3.3.1), la prima total cobrada por el asegurador es $G = 12(1 + 0.72) = 20.64$
Este monto representa el ingreso del asegurador.

En este caso el asegurador compra reaseguro que representa un gasto. El monto reasegurado es \$1 para 100 pólizas con probabilidad de reclamación 0.02. El valor esperado del riesgo reasegurado es $100(0.02)(1) = 2$.

El factor de seguridad relativo del reasegurador es 1. El costo de reaseguro es $2(1+1) = 4$. El ingreso neto para el reasegurador es $20.64 - 4 = 16.64$.

El valor esperado de reclamaciones que el asegurador tiene que pagar es $12 - 2 = 10$ (valor esperado del total de reclamaciones menos el valor esperado de reclamaciones por el riesgo reasegurado). Por lo que, para su valor esperado de reclamaciones, el asegurador obtiene \$16.64 netos. Si θ' es el factor de seguridad relativo después de reaseguro, $10(1+\theta') = 16.64$ ó $\theta' = 0.664$.

De manera general supóngase que θ es el factor de seguridad relativo antes de reaseguro y $\text{Re}(S)$ es el monto reasegurado con un factor de seguridad relativo para el reasegurador de ξ [6].

Entonces se puede deducir lo siguiente:

$$\underbrace{G}_{\text{total de primas}} = E(S)(1+\theta) \tag{17}$$

$$\underbrace{G_{\text{Re}}}_{\textit{Costo de reaseguro}} = E[\text{Re}(S)](1+\xi) \tag{18}$$

$$\text{Ingreso neto para el reasegurado} = G - G_{\text{Re}} \tag{19}$$

$$\text{Pérdida esperada para el reasegurado} = E(S) - E[\text{Re}(S)] \tag{20}$$

Si θ' es el factor de seguridad relativo después de reaseguro, entonces:

(Pérdida esperada para el asegurador) (1+factor de seguridad relativo después de reaseguro) = Ingreso Neto para el Asegurador

$$\left(E(S) - E[\text{Re}(S)]\right)(1+\theta') = E(S)(1+\theta) - E[\text{Re}(S)](1+\xi) \tag{21}$$

[6] *Usualmente el factor de seguridad relativo para el reasegurador va a ser más grande que aquel para el asegurador.*

Despejando θ' se tiene:

$$\theta' = \frac{\theta E(S) - \xi E[\mathrm{Re}(S)]}{E(S) - E[\mathrm{Re}(S)]} \tag{22}$$

Como ejemplo, para el reaseguro proporcional es decir $\mathrm{Re}(S) = \alpha S$, se tiene que:

$$\theta' = \frac{\theta - \xi\alpha}{1 - \alpha} \geq 0 \text{; para } \alpha \leq \theta\ \xi \text{ y } \alpha \neq 1 \tag{23}$$

Notar que α debe ser menor a θ/ξ, ya que si $\alpha > \theta\ \xi$ significaría que el asegurador va a estar cargando una prima que es menor a la pérdida esperada.

Nota: La función $\mathrm{Re}(S)$, puede tomar diferentes formas. Si los tratados de reaseguro son arreglados sobre una base de reclamación por reclamación, entonces $\mathrm{Re}(S)$ puede ser un reaseguro de exceso de pérdida ó cuota parte. Si $\mathrm{Re}(S)$ se aplica directamente al monto total de reclamaciones, se puede hablar de un reaseguro Stop Loss.

Ejercicios, Capítulo III

1. Considérese un grupo de 100 pólizas, cada una de la cuales tiene probabilidad de reclamación igual a 0.02 y el monto de reclamación es igual a 6. Supóngase que dos de las 100 pólizas no son independientes. Debido a que estas dos pólizas son dependientes, si sucede una reclamación para una de ellas también ocurre para la otra. Encontrar el valor esperado y la varianza del total de reclamaciones.
   Resp (12,71.97)

2. En un grupo de 100 personas, algunas son catalogadas como de "alto riesgo" (A) y el resto como de "riesgo normal o promedio" (M). La probabilidad de que un individuo, escogido de manera aleatoria, pertenezca al grupo de alto riesgo es 0.25. El monto de reclamación para cualquiera de los individuos en los dos grupos es exponencialmente distribuido, pero las medias son diferentes. La media de la distribución del monto de reclamación para el grupo de alto riesgo es tres veces mayor a la del otro grupo. Asumiendo que todos los riesgos son independientes, encontrar la razón del valor esperado a la desviación estándar del costo total de reclamaciones.
   Resp. (7.746)

3. Considérese la siguiente cartera de pólizas independientes:

Número	Probabilidad de Reclamación	Monto de Reclamación
200	0.1	4
100	0.2	2
100	0.1	5

   Encontrar la varianza del costo total de reclamaciones.
   Resp. (577)

4. Si en el problema 3, la última columna es la media y la desviación estándar del monto total de reclamaciones, encontrar la varianza del costo total de reclamaciones.
   Resp. (1,227)

5. Encontrar la varianza del costo total de reclamaciones para una compañía de seguros con las siguientes características: La probabilidad de que una persona vaya a ser hospitalizada es 0.1. Si la persona es hospitalizada, los honorarios médicos se van a distribuir uniformemente sobre (2000,4000) y los otros gastos (tales como los gastos del cuarto, hospital, etc.) van a ser distribuidos uniformemente sobre (400,600). La covarianza entre los honorarios médicos y los otros gastos es 100,000. La póliza de seguro va a reembolsar 100% de los honorarios médicos y 80% de los otros gastos.
   Resp. (1,089,946)

6. En el problema 2, usar la aproximación normal para determinar el mínimo factor de seguridad relativo necesario para el asegurador tal que la probabilidad de que el total de reclamaciones no exceda la prima total es al menos 0.95.
Resp. (0.2124)

7. En el problema 6, el asegurador considera reasegurar una fracción α de cada reclamación individual. El factor de seguridad relativo para el reasegurador es 0.4. Determinar el máximo valor de α tal que el factor de seguridad relativo del asegurador después de la compra de reaseguro vaya a ser al menos 0.15
Resp. (0.2496)

8. En el problema 3, encontrar el factor de seguridad relativo necesario para asegurar que la probabilidad de que el total de reclamaciones no vaya a exceder el total de primas cobradas es 0.90. Usar aproximación normal.
Resp. (0.1811)

9. En el problema 3, suponga que el asegurador reasegura los montos de reclamación individual en exceso de 3. Asumiendo que el factor de seguridad relativo para el reasegurador es 20%.
   a) Encontrar la varianza y esperanza de las reclamaciones retenidas.
   Resp. $(307{,}130)$
   b) Encontrar el costo por contratar reaseguro.
   Resp. (48)
   c) Encontrar la probabilidad de que el total de reclamaciones retenidas no vaya a exceder el ingreso neto del asegurador (prima cobrada menos costo del reaseguro).
   Resp. $\Phi(1.3)$

10. El asegurador compra reaseguro para cubrir una porción α de cada reclamación individual. Los factores de seguridad relativo para el reasegurador y el asegurador son de 38% y 20%, respectivamente. Después de reaseguro el factor de seguridad relativo para el asegurador es 18%. Encontrar α.
Resp. (0.1)

11. Un asegurador tiene una reserva inicial de $5. El asegurador cubre la siguiente cartera de riesgos independientes:

Número	Probabilidad de Reclamación	Monto de Reclamación
500	0.02	2
1000	0.01	4
500	0.01	3

a) Usar una aproximación normal para determinar el mínimo factor de seguridad relativo, necesario para asegurar que la probabilidad de que el asegurador no vaya a caer en bancarrota sea 90%.
Resp. (0.1993)

b) El asegurador decide comprar reaseguro que va a cubrir el exceso de 3 sobre cada reclamación individual. El factor de seguridad relativo del reasegurador es 25%.
   i) Encontrar la varianza de las reclamaciones retenidas.
   Resp. (172.85)

   ii) Encontrar el factor de seguridad relativo después de reaseguro.
   Resp. (0.1915)

   iii) Encontrar la probabilidad de que el asegurador no vaya a caer en bancarrota.
   Resp. $\Phi(1.327)$

CAPITULO IV

MODELO DE RIESGO COLECTIVO

4.1. Introducción

Históricamente, la Teoría de Riesgo Individual surge como primera fase en el desarrollo de la Teoría del Riesgo. En la práctica, este modelo presenta inconvenientes cuando se tratan grandes colectividades de riesgo y usualmente es reemplazado por un enfoque colectivo. Es cuestión de probar cuando, en la introducción de los fundamentos de la Teoría del Riesgo, es preferible empezar con las unidades de riesgo individual y los eventos que aleatoriamente surgen en ellas o moverse directamente a la descripción colectiva del proceso de reclamación.

El proceso de reclamaciones se puede describir de forma general en las siguientes etapas:
- La primera, en la cual un evento aleatorio causa una pérdida inesperada, provocando un problema tanto para los individuos afectados como para la sociedad.
- La segunda, en la que el asegurado da aviso a la compañía de seguros de la pérdida sufrida, con el fin que se le repare del daño.
- La tercera, en donde la compañía aseguradora evalúa la gravedad del daño ocurrido.
- Finalmente, la compañía de seguros establece la cantidad que habrá que pagar para reparar el daño.

Cada uno de estas reclamaciones es registrada en los archivos de la aseguradora, por lo que cuando el actuario tiene la necesidad de estudiar la distribución de probabilidad de las pérdidas indeterminadas, cuenta con dos fuentes principales de información:
- El número de reclamaciones.[1]
- Los montos de reclamación.[2]

Este estudio llega a ser importante por diferentes razones, entre las cuales se encuentran:

1. Ganar una mayor comprensión de como se distribuyen las pérdidas y en particular, el impacto que provocan las grandes reclamaciones.
2. Estimar el efecto de deducibles.
3. Calcular el costo de distintos contratos de reaseguro
4. Combinar las distribuciones del monto y número de reclamaciones, para estimar el costo total de reclamaciones.
5. Comprender el efecto de los sistemas para tarificar.

[1] *Entendiéndose como número de reclamaciones, el número de accidentes sobre los cuales la aseguradora tiene que pagar un monto por la reclamación ocurrida.*
[2] *El monto del daño es lo que le costaría al asegurado resarcir la pérdida por su propia cuenta. El monto de reclamaciones es lo que acordó el asegurado con la aseguradora que se le habría que pagar el momento de la ocurrencia de un evento asegurado.*

El propósito principal de este capítulo es el estudio del costo total de reclamaciones, el cual se representa por la siguiente fórmula:

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Donde:

S, es la v.a. que representa el costo total de reclamaciones.

X_i, es la v.a. que representa el monto de reclamaciones.

N, es la v.a. que representa el número de reclamaciones.

4.2. El número de reclamaciones.

El comportamiento de la variable del número de reclamaciones "N" se puede describir en términos de su distribución de probabilidad, la cual es determinada por las probabilidades:

$f_N(n) = \Pr(N = n)$

Las tres distribuciones más comúnmente utilizadas para el número de reclamaciones son la distribución Poisson, la distribución Binomial Negativa y la distribución Binomial, ya que ellas son las más fáciles de trabajar y tanto sus propiedades como sus características son conocidas. A continuación se da una breve explicación de cada una de ellas.

4.2.1. Distribución Poisson (Ley de probabilidad Poisson).

Las reclamaciones de seguros ocurren como una secuencia de eventos aleatorios de manera tal que no es posible pronosticar el tiempo exacto de ocurrencia ni el número exacto de las mismas.

Si se puede asumir que las reclamaciones ocurren independientemente una de otra, entonces el número de reclamaciones en un período de tiempo dado es distribuido como una v.a. Poisson.

Una variable aleatoria X (la cual toma valores no-negativos) se dice que tiene una distribución Poisson con parámetro λ si:

$$\Pr(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots; \ \lambda > 0 \qquad (1)$$

- Parámetros. λ, el cual representa el número esperado de éxitos por unidad de tiempo.

- Características.

La media, varianza, sesgo, curtosis y función generadora de momentos son definidos por las siguientes relaciones:

$$E(N) = \mu = p_1 = \lambda \text{ [3]} \qquad (2)$$

$$Var(N) = \lambda \qquad (3)$$

[3] *λ, puede representar la tasa de mortalidad, la tasa de siniestralidad, la tasa de ocurrencia de un accidente ó el número de llamadas telefónicas en una hora para cierta compañía.*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{4}$$

$$\gamma_2 = \frac{1+3\lambda}{\lambda} \tag{5}$$

$$M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)] \tag{6}$$

Si se requiere una distribución en la cual la media sea igual a la varianza, entonces la v.a. Poisson es la adecuada

- Propiedades.

La distribución Poisson tiene dos propiedades importantes:

1. Existe un único parámetro (λ), denominado "número medio de reclamaciones", el cual se tiene que estimar y caracteriza por completo a la distribución.
   La distribución del número de reclamaciones puede así ser proyectada rápida y fácilmente.
2. Aditividad. La suma de variables aleatorias Poisson se distribuye como una v.a. Poisson. Si $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son variables aleatorias independientes, entonces su suma $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$ es Poisson con parámetro igual a la suma de los parámetros, es decir, si la distribución para cada riesgo en una cartera es Poisson, entonces el número de reclamaciones para la cartera es también una v.a. Poisson.

Tres condiciones[4] son el fundamento para la hipótesis de que la v.a. del número de reclamaciones es Poisson:

a. El número de reclamaciones que pueden ocurrir en dos intervalos de tiempo disjuntos, son independientes (Independencia de incrementos).
b. No más de una reclamación puede surgir del mismo evento (exclusión de múltiples reclamaciones).[5]
c. La probabilidad de una reclamación en cualquier intervalo de tiempo, es proporcional a la longitud de ese intervalo.

Si se cumplen estas condiciones, entonces el número de reclamaciones que ocurren en un intervalo de tiempo fijo es Poisson.

Existe un punto importante que hay que notar, si se relaja la tercera condición y se asume que el parámetro Poisson λ, es una v.a. con una distribución Gamma, entonces se puede demostrar que la distribución resultante es una distribución Binomial Negativa[6], la cual a continuación se describe.

[4] *Con el fin de considerar estas condiciones, es necesario enfatizar la diferencia entre eventos y reclamaciones. Un evento puede generar un número de reclamaciones; por ejemplo, cuando dos vehículos chocan o cuando un incendio se extiende a edificios adyacentes.*

[5] *La condición (b), puede expresarse como: "la probabilidad de que una reclamación ocurra en un punto del tiempo fijo, es igual a cero." (Exclusión de puntos en el tiempo especiales)*

[6] *Cfr. J.H. Pollard, Introductory statistics with aplicaciones in general insurance.*

4.2.2. Distribución Binomial Negativa.

Cuando la varianza del número de reclamaciones excede su media, la distribución Poisson no es apropiada. En esta situación, el uso de la distribución binomial negativa es sugerido.

Una variable aleatoria discreta N se dice que tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p, si:

$\Pr(N = n) = \Pr$ (n es el número de pruebas antes de que r éxitos sean obtenidos)

$$= \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n ; n = 0,1,2,... \qquad (7)$$

- Parámetros. $r > 0$

  $0 < p < 1$.

  Donde p, representa la probabilidad de que ocurra un éxito.

  r, es el parámetro que determina el número de éxitos obtenidos en n intentos.

- Caracterísiticas.

La media, la varianza y la función generadora de momentos son dadas por:

$$E(N) = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{rq}{p} \qquad (8)$$

$$Var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2} \qquad (9)$$

$$TMC(N) = \frac{rq}{p^2}\left(1 + 2\frac{q}{p}\right)$$

$$\mu_4 = \frac{rq}{p^2}\left(1 + (6+3r)\frac{q}{p^2}\right)$$

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r \qquad (10)$$

- Propiedades.

La distribución Binomial Negativa tiene también propiedades muy útiles. La suma de n variables aleatorias independientes Binomial Negativas, cada una con parámetros p y r, es por sí misma una v.a. binomial negativa, con parámetros p y nr.

A menudo la aplicación más importante de esta distribución, en lo que concierne a las aplicaciones de seguros, se relaciona con la distribución de la frecuencia de reclamaciones donde los riesgos no son homogéneos.

4.2.3. La distribución Binomial.

Otra distribución que surge en muchas aplicaciones prácticas es la distribución binomial. Se podría definir como el número de éxitos en n pruebas, con probabilidad p de que ocurra un éxito.

Su función de probabilidad esta dada por:

$$\Pr(N = n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{11}$$

- Parámetros. La distribución binomial tiene 2 parámetros n y p ; $n = 0,1,2,...$ $0 < p < 1$.
- Características.

La media, varianza y f.g.m. de la distribución binomial, son dadas por:

$$E(N) = np \tag{12}$$

$$Var(N) = np(1-p) \tag{13}$$

$$TMC(N) = npq(q-p)$$

$$\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

$$M_N(t) = (pe^t + q)^n$$

Ya que $0 < p < 1$, la binomial tiene varianza menor a la media.

- Propiedades.

Si una secuencia de variables aleatorias independientes $\{X_i; i = 1,2,...,n\}$ son tales que cada X_i, tiene una distribución binomial con parámetros m_i y p, entonces la suma $X_1 + X_2 + ... + X_n$ es una variable binomial con parámetros $m_1 + m_2 + ... + m_n$ y p. Esto significa que para una n grande, la v.a. binomial es aproximadamente normal por medio del Teorema del Límite Central.
En el caso especial de que $n = 1$ (expresión (11)), la variable aleatoria resultante se le conoce como variable aleatoria Bernoulli o variable Indicador.

La v.a. binomial puede surgir en algunas aplicaciones de seguros. Por ejemplo, suponga que una cartera de n riesgos es tal que cada riesgo tiene una probabilidad p de que suceda una reclamación y probabilidad $1-p$ de que no sucedan reclamaciones. Entonces el número de reclamaciones es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p.
Otra propiedad importante de la distribución binomial es que para n grande y p muy pequeña, la media de la distribución binomial y la varianza llegan a ser iguales por lo que la distribución tiende hacia una v.a. Poisson.

A continuación se estudian los modelos correspondientes al monto de reclamaciones.

4.3. El monto de reclamaciones

Considérese la situación donde los montos de reclamación pueden variar. El monto de reclamación es la suma de lo que el asegurador tiene que pagar en la ocurrencia de un incendio, un accidente, la muerte de una persona o algún evento asegurado. (En el seguro de vida el monto de reclamaciones es usualmente fijo en vez de ser aleatorio).

Se puede decir que el monto de reclamación varia conforme a ciertas leyes de probabilidad, las cuales difícilmente siguen formas únicas. No existe una regla o principio que sugiera que el monto de una pérdida debe de distribuirse de una forma en particular[7]. Se trata de una cuestión de encontrar una distribución que provee un ajuste satisfactorio[8].

Diversas distribuciones han sido utilizadas bajo fundamentos empíricos, ninguna de las cuales ha proporcionado un excelente ajuste posiblemente debido a las distorsiones producidas por el agrupamiento de los datos y a las condiciones de la póliza. Sin embargo, a partir de ellas se pueden hacer deducciones que son de gran utilidad.

Los rasgos más notables de las distribuciones del monto de reclamación son los siguientes:
- Son unilaterales: no pueden surgir montos de reclamación negativos[9].
- Son altamente sesgadas: generalmente se extienden hacia la derecha[10].

Las tres distribuciones para el monto de reclamaciones más comúnmente encontradas en la literatura son: la distribución lognormal, la distribución Pareto y la distribución Gamma, de las cuales se habla a continuación.

4.3.1 Distribución Lognormal.

Una distribución frecuentemente usada para el monto de reclamaciones es la distribución normal-logarítmica o brevemente llamada lognormal. Esta distribución es positivamente sesgada, lo cual representa un rasgo importante de las distribuciones del tamaño de reclamación.

La distribución lognormal es una transformación logarítmica de la distribución normal.

Una v.a. X se dice que tiene una distribución log-normal con parámetros μ y σ, si $Y = \ln X$ tiene distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

[7] *La determinación de la distribución del tamaño de la reclamación puede ser considerada como una disciplina separada en su propio derecho, aplicando los métodos de estadística. Cfr. Robert V. Hogg et. al., Loss Distributions.*

[8] *Puede existir un grado justo alrededor de la forma de la curva, pero la forma de la cola de reclamaciones es usualmente vaga debido a la ausencia de un número suficiente de reclamaciones. Se carece de información sobre reclamaciones excesivamente grandes, las cuales se pueden observar como los puntos de probabilidad sobre la cola derecha de la distribución*

[9] *A pesar de que pueden surgir en los archivos de las computadoras o en ciertas líneas de seguro.*

[10] *El sesgo es el grado de asimetría o falta de asimetría, de una distribución. Si la distribución es asimétrica y la cola de la distribución se extiende en la dirección de los valores positivos a lo largo de la recta de los número reales, la distribución tiene un sesgo positivo. En el caso contrario se dice que la distribución tiene un sesgo negativo.*

La función de densidad de probabilidad luce algo imponente, afortunadamente rara vez se tiene que usar:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right];\ x > 0 \tag{14}$$

- Parámetros. $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$
- Características.

La media y varianza de la distribución log-normal son:

$$E(X) \quad = \exp\left(\mu + \tfrac{\sigma^2}{2}\right) \tag{15}$$

$$Var(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) \tag{16}$$

$$\mu'_r = \exp\left(r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\right)$$

$M_X(t)$, no es útil debido a que se convierte en una expresión muy complicada de manejar matemáticamente.

En la figura 4.1 se ilustra la distribución log-normal con parámetros $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.4$ en un rango de valores para x de 0 a 12. Las diferentes formas de la curva de la función log-normal son trazadas en la siguiente figura para diferentes valores del sesgo. Ver figura 4.2

Esta distribución cubre muy bien el rango principal de montos de reclamación, pero tiende a dejar de funcionar rápidamente en los valores más altos de la distribución.

Algunos actuarios prefieren ajustar el monto de reclamaciones a la distribución Pareto, la cual se explica a continuación.

Fig. 4.1 Distribución lognormal con parámetros $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.4$

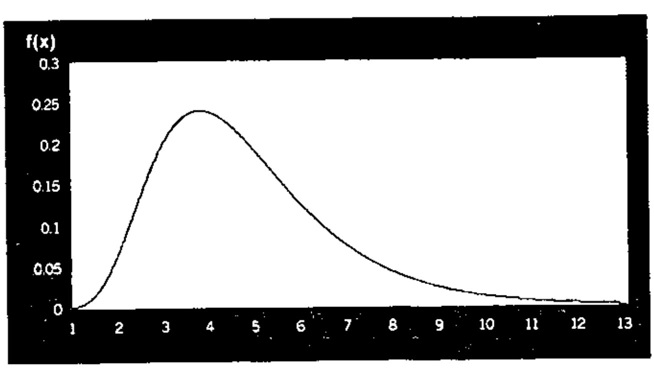
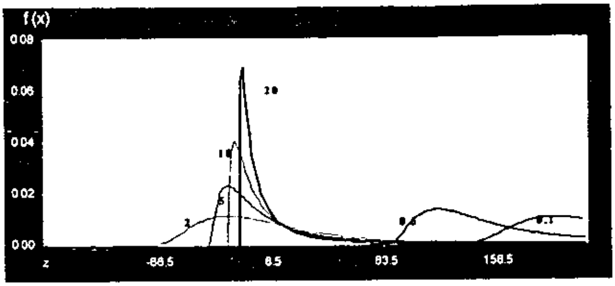


Fig. 4.2 Formas de la gráfica de la distribución lognormal con $\mu = 10$, $\sigma = 50$ para diferentes valores del sesgo.



4.3.2 Distribución Pareto.

Otra de las distribuciones más frecuentemente usadas para la distribución del monto de reclamación es la Pareto.(11)

La experiencia ha demostrado que la fórmula de Pareto es a menudo un modelo apropiado para la distribución del monto de reclamación, particularmente donde grandes montos de reclamaciones ocurren.

Un reasegurador no puede errar en ajustar la distribución de los datos de la reclamación y en estimar la probabilidad de que ocurran montos de reclamación grandes. El reasegurador necesita una distribución que no se acerque a cero rápidamente y para este propósito la cola de la distribución Pareto es a menudo más satisfactoria que la cola de la distribución log-normal. Ver figura 4.3.

La distribución Pareto, la cual es positivamente sesgada, tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \ ;x > \beta \qquad (17)$$

- Parámetros. $\alpha > 0$ y $\beta > 0$
- Características.

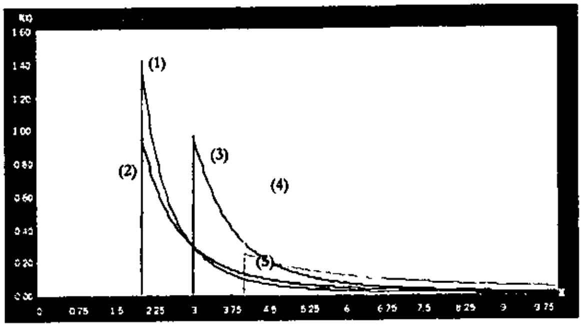
La media y varianza de la distribución Pareto son dadas por:

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}, \text{ si } \alpha > 1 \qquad (18)$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)} + \left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)}\right]^2 ,\text{si } \alpha > 2 \qquad (19)$$

(11) *Esta distribución también ha encontrado aplicación en modelar problemas que involucran la distribución de ingresos cuando los ingresos exceden un cierto límite.*

Fig. 4.3 Función de distribución Pareto



(1) Distribución Pareto con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 2$
(2) Distribución Pareto con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 2$
(3) Distribución Pareto con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 3$
(4) Distribución Pareto con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 4$
(5) Distribución Pareto con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 4$

$\mu'_r = \dfrac{\alpha\beta^r}{\alpha - r}$, para toda $\alpha > r$

$M_X(t)$, no existe.

Para que la media exista $\alpha > 1$ y para que la varianza exista $\alpha > 2$. Estas restricciones significan que en la práctica, la distribución es más difícil de usar que la distribución log-normal.

La distribución Pareto se acerca a cero mucho más lentamente que la distribución log-normal y así es mucho más segura de usar[12] para estimar primas de reaseguro con respecto a reclamaciones muy grandes.

4.3.3. Distribución Gamma.

Otra distribución del monto de reclamaciones que es apropiada en ciertas circunstancias, es la distribución Gamma. Esta distribución cuenta con una flexibilidad muy buena sobre el rango principal de los montos de reclamaciones, pero al igual que la distribución log-normal, tiende a no estimar de forma correcta la cola derecha de las reclamaciones.

La distribución Gamma es una distribución continua, la cual encuentra aplicación en numerosas áreas del seguro. Su función de densidad de probabilidad está dada por:

[12] *Sin embargo, debe de notarse que esta distribución no da un ajuste satisfactorio sobre el rango total de los montos de reclamaciones.*

$$f_X(x) = = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}\exp(-\beta x);\ 0 \le x \le \infty \qquad (20)$$

Donde los parámetros α y β deben de ser más grandes que cero y $\Gamma(\alpha)$es un número que depende de α, el cual cumple con la siguiente relación $\Gamma(\alpha) = \alpha!$

- Parámetros. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, en donde α es un número entero positivo.
- Características.

La media y la varianza son respectivamente:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (21)$$

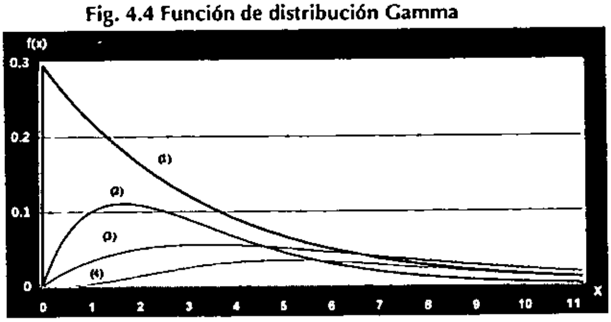
$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad (22)$$

$$\mu_r' = E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^r\Gamma(\alpha)}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha} \text{ para } t < \beta$$

La versatilidad de la distribución es evidente en la figura 4.4, la cual demuestra a la función de densidad de probabilidad para combinaciones diferentes de parámetros α y β.

Fig. 4.4 Función de distribución Gamma



(1) Distribución Gamma con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 0.3$
(2) Distribución Gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0.6$
(3) Distribución Gamma con parámetros $\alpha = 4$ y $\beta = 0.6$
(4) Distribución Gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0.3$

Cuando $\alpha = 1$, la función de densidad toma su valor más grande en $x = 0$ y declina posteriormente. Para otros valores de α, $f(x)$ es cero en $x = 0$, crece a su máximo y después cae. La distribución no es simétrica y es positivamente sesgada. En la medida que α incrementa, el sesgo decrece y la distribución se vuelve más simétrica.

La suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como gamma tiene parámetros $n\alpha$ y β.

4.4. Distribución del costo total de reclamación.

En términos estadísticos la distribución del número de reclamaciones y la distribución del monto de reclamaciones se combinan para dar la distribución del costo total de reclamaciones.[13] A continuación se estudiará el modelo de Riesgo Colectivo, el cual trata del estudio de dicha distribución.

4.4.1. Modelos Compuestos de Riesgo.

El modelo de Riesgo Colectivo es caracterizado en términos de una cartera como un todo en lugar de en términos de pólizas individuales comprendidas en la cartera.

Bajo este enfoque el costo total de reclamaciones bajo el período de estudio (S), es visto como una suma aleatoria de la siguiente manera:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (23)$$

Donde:

X_i, representa el monto de la i - ésima reclamación (distribución que refleja la severidad de reclamaciones)

N, representa el número de reclamaciones producidas por una cartera de pólizas en un periodo de tiempo dado (distribución que refleja la frecuencia de reclamaciones).

Interpretando la fórmula (23), el costo total de reclamaciones es la suma de un número aleatorio de montos de reclamación aleatorios.

El objetivo de esta sección será encontrar una expresión para la función de probabilidad del costo total de reclamaciones S en términos de las probabilidades para el número de reclamaciones y la distribución del monto de reclamaciones, lo cual se hace a continuación[14].

El evento $[S \leq s]$ puede ocurrir cuando se presenta una de las siguientes posibilidades:

Si: $n = 0$, entonces no existen montos de reclamación.

$n = 1$, $X_1 \leq s$

$n = 2$, $X_1 + X_2 \leq s$

$n = 3$, $X_1 + X_2 + X_3 \leq s$

etc.

Asumiendo que los montos de reclamaciones individuales X_i son independientes de la variable para el número de reclamaciones N y aplicando las reglas para la suma y multiplicación de probabilidades, la función de distribución de S puede ser escrita como:

(13) A este proceso se le conoce como combinación o composición. La distribución compuesta resultante se le nombra en términos de la distribución del número de reclamaciones.

(14) Hay que distinguir claramente entre el monto de una reclamación individual y el monto total de reclamaciones. El monto de una reclamación individual es lo que se paga por póliza en el evento de una reclamación. El total de reclamaciones es lo que se paga para el grupo de pólizas.

$$F_S(s) = \Pr(S \leq s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k) \Pr\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq s\right) \tag{24}$$

Para que este resultado se sostenga, es necesario que las variables del monto de la reclamación individual, sean independientes de la variable aleatoria para el número de reclamaciones. Las hipótesis de independencia entre el número y el monto de reclamaciones así como la independencia mutua entre los montos de las reclamaciones puede ser contradictoria en la realidad[15].

Además de la independencia entre el número de reclamaciones (N) y el tamaño de reclamaciones (X_i), se asume que las variables aleatorias para el monto de reclamaciones son también mutuamente independientes e idénticamente distribuidas cada una teniendo la misma función de distribución: [16]

$$F_{X_i}(x) = F_X(x)$$

La independencia mutua de las variables del tamaño de reclamaciones X_i y la variable del número de reclamaciones N significa que la probabilidad de una reclamación individual siendo de un monto particular, no es afectada por el número de reclamaciones que han ocurrido y tampoco por los montos de otras reclamaciones. Como consecuencia, la función de distribución F, de una variable aleatoria compuesta S, es completamente determinada por la distribución del número de reclamaciones y la distribución del tamaño de la reclamación.

Más precisamente, para una v.a. S la fórmula (24) se puede escribir como:

$$F_S(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) F_X^{*k}(s) \tag{25}$$

Donde:

$\Pr(N = n)$, representa la probabilidad de que n reclamaciones surjan en un periodo específico de tiempo fijo.

$F^{*k}(s) = \Pr\left\{\sum_{i=1}^{k} X_i \leq s\right\}$ [17] es la k-ésima convolución de $F_X(x)$ evaluada en el punto s.

Supóngase que si una reclamación ocurre, el monto de reclamación es positivo. Entonces S puede ser cero únicamente si no existen reclamaciones. También se puede suponer que hay reclamaciones de monto cero, en cuyo caso para propósitos de facilitar los cálculos no se considerarán[18]. De esta forma se tiene que:

[15] *Para mayor referencia véase la nota al pie de página 10 del Capítulo 1.*

[16] *Una v.a. S que satisface estas hipótesis es llamada una v.a. compuesta y su distribución es llamada distribución compuesta.*

[17] *Dado que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cuentan con la misma distribución, entonces se tiene que:*

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq s\right) = \Pr(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq s) = F * F * \ldots * F(s) = F^{*n}(s)$$

, lo cual representa la n-ésima convolución de $F_X(x)$ evaluada en el punto s.

[18] *Las reclamaciones de monto cero surgen en algunos contextos de seguros. Si una compañía registra todas las reclamaciones que le son presentadas y algunas de ellas son rechazadas, el costo neto de la reclamación es cero. Otra situación similar surge cuando a una reclamación se le aplica un deducible, para el cual el asegurador únicamente paga la porción de la reclamación en exceso del deducible. Cuando no se pagan las reclamaciones debido a la existencia de un deducible, surge una reclamación de monto cero. Este tipo de*

$$\Pr(S=0)=\Pr(N=0) \tag{26}$$

De la misma manera que se obtuvo $F_S(x)$ se puede obtener la función de densidad de la variable aleatoria S,

$$f_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_X^{*n}(x)\Pr(N=n) \tag{27}$$

Donde:

$$f_X^{*n}(x)=f*f*\ldots*f_X(x)=\Pr(X_1+X_2+\ldots+X_n=x)$$

y

$$f_X^{*0}(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

Ejemplo 4.4.1.

En un seguro de gastos médicos el cual cubre a los empleados y a sus familias, la prima para cada empleado es la misma independientemente del número de miembros en la familia. La compañía de seguros ha compilado estadísticas demostrando que el costo anual de los gastos médicos para los beneficios proporcionados por el plan tiene la siguiente distribución (dado en múltiplos de $250):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_X(x)$	0.150	0.200	0.250	0.125	0.075	0.050	0.050	0.050	0.025	0.025

Además, la distribución del número de personas por certificado de seguro (es decir, por empleado) que reciben seguro de gastos médicos en cualquier año tiene distribución:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Pr(N=n)$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.15	0.06	0.03	0.01

Calcular la distribución del costo total de reclamaciones por año de los empleados en el grupo asegurado.

Solución.

Usando ecuación (27), el costo por empleado es:

$$f_S(x)=\sum_{n=0}^{8}\Pr(N=n)f_X^{*n}(x)$$

La distribución hasta montos de $5,250 es dada en la tabla 4.1. Para obtener $f_S(x)$, cada renglón de la matriz de convoluciones es multiplicado por las probabilidades del último renglón de la tabla 4.1. y los productos son sumados.

Tabla 4.1. Matriz de convoluciones de $f_S(s)$.

x	$f_X^{*0}(x)$	$f_X^{*1}(x)$	$f_X^{*2}(x)$	$f_X^{*3}(x)$	$f_X^{*4}(x)$	$f_X^{*5}(x)$	$f_X^{*6}(x)$	$f_X^{*7}(x)$	$f_X^{*8}(x)$	$f_S(x)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05000
1	0	0.150	0	0	0	0	0	0	0	0.01500
2	0	0.200	0.02250	0	0	0	0	0	0	0.02338
3	0	0.250	0.06000	0.00338	0	0	0	0	0	0.03468
4	0	0.125	0.11500	0.01350	0.00051	0	0	0	0	0.03258
5	0	0.075	0.13750	0.03488	0.00270	0.00008	0	0	0	0.03579
6	0	0.050	0.13500	0.06144	0.00878	0.00051	0.00001	0	0	0.03981
7	0	0.050	0.10750	0.08569	0.01999	0.00198	0.00009	0.00000	0	0.04356
8	0	0.050	0.08813	0.09750	0.03580	0.00549	0.00042	0.00002	0.00000	0.04752
9	0	0.025	0.07875	0.09841	0.05266	0.01194	0.00136	0.00008	0.00000	0.04903
10	0	0.025	0.07063	0.09338	0.06682	0.02138	0.00345	0.00031	0.00002	0.05190
11	0	0	0.06250	0.08813	0.07597	0.03282	0.00726	0.00091	0.00007	0.05138
12	0	0	0.04500	0.08370	0.08068	0.04450	0.01305	0.00218	0.00022	0.05119
13	0	0	0.03125	0.07673	0.08266	0.05486	0.02060	0.00448	0.00060	0.05030
14	0	0	0.01750	0.06689	0.08278	0.06314	0.02930	0.00808	0.00138	0.04818
15	0	0	0.01125	0.05377	0.08081	0.06934	0.03826	0.01304	0.00279	0.04576
16	0	0	0.00750	0.04125	0.07584	0.07361	0.04677	0.01919	0.00505	0.04281
17	0	0	0.00500	0.03052	0.06811	0.07578	0.05438	0.02616	0.00829	0.03938
18	0	0	0.00313	0.02267	0.05854	0.07552	0.06080	0.03352	0.01254	0.03575
19	0	0	0.00125	0.01673	0.04878	0.07263	0.06573	0.04084	0.01768	0.03197
20	0	0	0.00063	0.01186	0.03977	0.06747	0.06882	0.04775	0.02351	0.02832
21	0	0	0	0.00800	0.03187	0.06079	0.06982	0.05389	0.02978	0.02479
$\Pr(N=n)$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.15	0.06	0.03	0.01	
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

4.4.2. Propiedades de las distribuciones compuestas.

a) Función generadora de momentos.

El propósito de este apartado es encontrar una expresión para la f.g.m. de la v.a. compuesta S en términos de las funciones generadoras de momentos del número de reclamaciones y del monto de la reclamación, dado que todas las variables aleatorias para el monto de reclamación se distribuyen igual.

Si S es una v.a. compuesta con una variable del número de reclamaciones N, entonces bajo la condición de que $N = n$, la f.g.m. condicional de S es:

$$M_S(s \mid N=n) = M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s)$$

Si todas las X_i tienen la misma distribución.

$$= [M_X(s)]^n \tag{28}$$

Donde:

$M_X(t)$, denota la función generadora de momentos de la distribución del monto de la reclamación.

La función generadora de momentos de S se puede expresar como sigue:

$$M_S(t) = E[e^{St}] = E[E(e^{St}|N)] = E\left[E\left(\prod_{i=1}^{N} e^{X_i t}; N\right)\right] = E[M_X(t)^N] = E[e^{N \ln M_X(t)}]$$

$$= M_N(\ln M_X(t)) \tag{29}$$

Aquí $M_X(t)$ es la función generadora de momentos para la función de densidad de probabilidad para los montos de reclamación individual.

La varianza y la esperanza se pueden obtener de la última expresión. A continuación se ve una forma alterna para encontrar la esperanza y varianza de S.

b) *Esperanza y Varianza.*

El valor esperado de cualquier variable del total de reclamaciones S es simplemente el producto del número esperado de reclamaciones $E(N)$ y el monto medio de reclamaciones $E(X)$, lo cual se demuestra a continuación.

Demostración.

El primer punto a notar es que dada una $N = n$, entonces S es una suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como X, es decir:

$$(S|N = n) = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Esto implica que $E(S | N = n) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = nE(X)$ y por lo tanto se tiene que:

$$E(S) = E[E(S|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n)E(S | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n)[nE(X)]$$

$$= E(X)\sum_{n=0}^{\infty} n \Pr(N = n) = E(X)E(N) \tag{30}$$

Asimismo, la varianza de la v.a. para el costo total de las reclamaciones es igual a la varianza en el número de reclamaciones multiplicado por el valor esperado del monto de reclamaciones elevado al cuadrado mas el producto del valor esperado en el número de reclamaciones por la varianza en el monto de las reclamaciones individuales.

Demostración.

Usando el hecho de que las X_i's son idénticamente distribuidas e independientes, se tiene que:

$$Var[S | N = n] = Var(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

Por la propiedad de independencia

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

Dado que son variables aleatorias idénticamente distribuidas

$$= nVar(X)$$

De manera general se tiene:

$$Var(S \mid N = n) = nVar(X)$$

Aplicando la fórmula para la varianza condicional de S:

$$Var(S) = Var[E(S \mid N)] + E[Var(S \mid N)] = Var[NE(X)] + E[NVar(X)]$$

$$= E(X)^2 Var(N) + Var(X)E(N) \qquad (31)$$

La expresión (31) para la varianza del total de reclamaciones es la suma de dos componentes, donde el primero se atribuye a la variabilidad en el número de reclamaciones y el segundo a la variabilidad de los montos de reclamaciones individuales.

Ejemplo 4.4.2.

Suponiendo que la distribución del monto de reclamación es exponencial con media 2 y el número de reclamaciones es distribuido geométricamente con media $\frac{1}{5}$; encontrar $E(S)$, $Var(S)$ y $M_S(t)$

Solución.

La distribución del monto de reclamación es exponencial con $E(X) = p_1 = 2$ y $Var(X) = 4$.

Para una distribución geométrica (ver fórmula (57), capítulo 2), $E(N) = \frac{q}{p}$ y $Var(N) = \frac{q}{p^2}$.

Se sabe que $\frac{q}{p} = \frac{1}{5}$

Ya que $q + p = 1$, entonces

$$q = \frac{1}{6},\ p = \frac{5}{6} \text{ y } Var(N) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{36}{25}\right) = \frac{6}{25}$$

De ecuaciones (30) y (31) de este capítulo

$$E(S) = E(X)E(N) = \frac{2}{5}\ ;\ Var(S) = E^2(X)Var(N) + Var(X)E(N) = 4\left(\frac{1}{5}\right) + \left(2^2\right)\left(\frac{6}{25}\right) = \frac{44}{25}$$

Para calcular $M_S(t)$, primero utilizamos la ecuación (51) del capítulo 2 para obtener $M_X(t)$. Ya que $E(X) = 2$, el valor de β es $\frac{1}{2}$, así:

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) = \frac{1}{(1 - 2t)}$$

Utilizando la ecuación (29) de este capítulo,

$$M_S(t) = M_N(\ln M_X(t))$$

Debido a que N, es una distribución geométrica , por ecuación (56) capítulo 2.

$$= \frac{p}{1 - qe^{\ln M_X(t)}}$$

$$= \frac{p}{1 - qM_X(t)}$$

Sustituyendo el valor de $M_X(t)$

$$= \frac{p}{1 - \frac{q}{(1-2t)}} = \frac{p(1-2t)}{1-2t-q}$$

$$= \frac{p(1-2t)}{p-2t} = \frac{1-2t}{1-\frac{2t}{p}}$$

Ya que $p = \frac{5}{6}$

$$M_S(t) = \frac{1-2t}{1-\frac{12t}{5}}$$

Otra forma de obtener no solo la media y la varianza sino también el tercer momento central del total de reclamaciones es por medio de la serie de Maclaurin para $\ln M_S(t)$.

$$\ln M_S(t) = \ln(1-2t) - \ln\left[1 - \left(\frac{12}{5t}\right)\right]$$

Usando la serie (4) del capítulo 2

$$= -2t - \frac{(-2t)^2}{2} + \frac{(-2t)^2}{3} + \dots + \left(\frac{12}{5}\right)t + \left(\frac{12}{5}\right)^2\frac{t^2}{2} + \left(\frac{12}{5}\right)^3\frac{t^3}{3} + \dots$$

Factorizando términos comunes

$$= \left(\frac{2}{5}\right)t + \left(\frac{44}{25}\right)\frac{t^2}{2} + \left(\frac{1456}{125}\right)\frac{t^3}{6} + \dots$$

El coeficiente de t es $E(S)$, el coeficiente de $\frac{t^2}{2}$ es la varianza y el coeficiente de $\frac{t^3}{6}$ es el tercer momento central.

Ejemplo 4.4.3.

Si en el ejemplo anterior, la distribución del monto de reclamación, en vez de ser exponencial, es discreta con la siguiente distribución $f_X(1)=\frac{1}{2}$ y $f_X(2)=\frac{1}{2}$. Encontrar la probabilidad de que el total de reclamaciones sea menor o igual a 2.

Solución.

Esta probabilidad se obtendrá por medio del uso de la f.g.m. de S.

La f.g.m. para N, es dada por fórmula (57) del capítulo 2

$$M_N(t)=\frac{p}{1-qe^t}$$

La f.g.m. de X se obtiene por medio de la fórmula (44) del capítulo 2.

$$M_X(t)=\left(\frac{1}{2}\right)e^t+\left(\frac{1}{2}\right)e^{2t}$$

Usando la fórmula (29) de este capítulo.

$$M_S(t)=M_N[\ln M_X(t)]$$

$$=\frac{p}{1-qM_X(t)}=\frac{5}{6-\left(\frac{1}{2}\right)e^t-\left(\frac{1}{2}\right)e^{2t}}$$

$$=\frac{5}{6}\left\{1-\frac{1}{12}e^t-\frac{1}{12}e^{2t}\right\}^{-1}$$

Usando la serie geométrica, ecuación (2), capítulo 2

$$=\frac{5}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{12}e^t+\frac{1}{12}e^{2t}\right)+\left(\frac{1}{12}e^t+\frac{1}{12}e^{2t}\right)^2+\ldots\right\}$$

Para calcular las probabilidades de que el costo total de reclamaciones sea menor o igual a 2, no se necesitan aquellos términos mayores a e^{2t}, por lo que:

$$M_S(t)=\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{12}e^t+\frac{1}{12}e^{2t}+\frac{1}{144}e^{2t}+\ldots\right)$$

$$=\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{12}e^t+\frac{13}{144}e^{2t}+\ldots\right)$$

De esta forma se tienen los siguientes resultados:

$$f_S(0)=\frac{5}{6};\ f_S(1)=\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{12}\right);\ f_S(2)=\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{13}{144}\right)$$

Sumando $f_S(i)$ desde $i=0$ hasta 2, se obtiene el resultado deseado: $F_S(2)=\frac{5}{6}\left(\frac{169}{144}\right)=\frac{845}{864}$

Mientras que el proceso de composición es relativamente fácil de enunciar, todos hasta los casos más simples, involucran cálculos muy laboriosos.

En la práctica, la convolución y la composición no pueden ser utilizados muy fácilmente y las formas analíticas de convoluciones y distribuciones compuestas no se pueden tratar, para lo cual se utilizan métodos recursivos o de aproximación. Aún si las formas de las distribuciones básicas son asumidas, es usualmente necesario usar aproximaciones para obtener resultados numéricos.

Los cálculos numéricos de la función de distribución compuesta del costo total de reclamaciones, pueden sobrepasar las capacidades de almacenamiento y de proceso de una computadora. Sin embargo, existen otros métodos alternos para el cálculo de la función de distribución, los cuales se discuten continuación.

4.5. Métodos para obtener la función de densidad del costo total de reclamaciones.

4.5.1. Método de recursión.

La técnica más importante para calcular la función de densidad de probabilidad del costo total $f_S(x)$ de reclamaciones adicional a la composición y a la convolución, es la de recursión.

El método de recursión mas comúnmente usado es la formula de recursión de Panjer, la cual se estudiará a continuación.

- *Fórmula de recursión de Panjer.*

Panjer ha demostrado que las probabilidades de la función compuesta pueden ser calculadas usando el siguiente algoritmo:

$$f_S(x) = \sum_{k=1}^{x}\left[a+\left(\frac{bk}{x}\right)\right]p(k)f_S(x-k)^{(19)} \qquad (32)$$

Donde:

$f_S(0) = \Pr(N = 0)$

$p(k)$ es la probabilidad de que el monto de reclamación sea k.

$f_S(x)$ es la probabilidad de que el costo total de reclamaciones sea x.

a y b, son constantes que dependen de la distribución de frecuencia de la reclamación.

- Hipótesis de la fórmula de recursión.

La familia más importante para la distribución del monto total de reclamación para la cual el método de recursión es aplicable, puede ser especificada por las siguientes condiciones:

(19) *Esta fórmula puede verse como la convolución de $p(x)$ y f_S, con algunos coeficientes adicionales.*

a) Las probabilidades del número de reclamaciones obedecen la fórmula de recursión:

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1} \text{ para } n = 1,2,3,\ldots$$

Donde a y b son constantes las cuales varían conforme a la distribución del número de reclamaciones.

Es importante aclarar que solo tres distribuciones del número de reclamaciones satisfacen esta hipótesis, las cuales son la distribución binomial, la poisson y la binomial negativa.

Los valores de a y b son mostrados en la siguiente tabla, de cada una de las distribuciones más usadas para el número de reclamaciones.

Tabla 4.2

Distribución	a	b
Poisson	0	λ
Binomial Negativa	$1-p$	$(r-1)(1-p)$
Binomial	$-\dfrac{p}{(1-p)}$	$\left(\dfrac{n+1}{1-p}\right)p$

b) La distribución del monto de la reclamación es no-negativa, discreta y equidistante[20]. Explícitamente, equidistante significa que únicamente montos de reclamación $X_i = iC$ $(i = 0,1,2,\ldots,r)$, son posibles. Donde C, es una constante positiva.

Una condición general es que $S = 0$ corresponde a que no hayan reclamaciones, es decir $N = 0$.

Si N es una v.a. Poisson:

$$f_S(0) = \Pr(N = 0) = e^{-\lambda} \tag{33}$$

Para $x > 0$, se tiene la fórmula de recursión:

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{k=1}^{x} k\, p(k)\, f_S(x-k) \tag{34}$$

[20] *Cuando la distribución de reclamaciones no es equidistante se puede discretizar de tal forma que sea equidistante. Existen diversos métodos para ello, entre los cuales se encuentran:*
- *Método de redondeo. Es el más fácil de utilizar, pero una de las desventajas que presenta es que la media de la distribución aproximada no es la misma a la de la distribución original.*
- *Método de preservación de la media. Asegura que la distribución aproximada tenga el mismo valor esperado.*

Cualquier distribución del monto de reclamaciones puede ser discretizada.

Ejemplo 4.5.1.

Si $\lambda = 2$ y la distribución del monto de reclamación es: $f_X(1) = \frac{1}{2}$; $f_X(2) = \frac{1}{4}$; $f_X(3) = \frac{1}{4}$.

Encontrar $F_S(3)$ usando el método de recursión.

Solución.

Ya que $\lambda = 2$, $f_S(0) = \Pr(N = 0) = e^{-2}$, $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = p(3) = \frac{1}{4}$; la relación de recursión puede ser escrita como:

$$f_S(x) = \frac{2}{x}\left\{\frac{1}{2} f_S(x-1) + 2\left(\frac{1}{4}\right) f_S(x-2) + 3\left(\frac{1}{4}\right) f_S(x-3)\right\}$$

Haciendo $x = 1,2$ y 3 sucesivamente, se obtiene:

$$f_S(1) = \frac{2}{1}\frac{1}{2} f_S(0) = e^{-2}$$

$$f_S(2) = \frac{2}{2}\left\{\frac{1}{2} f_S(1) + \frac{1}{2} f_S(0)\right\} = e^{-2}$$

$$f_S(3) = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2} f_S(2) + \frac{1}{2} f_S(1) + \frac{3}{4} f_S(0)\right\} = \frac{7}{6} e^{-2}$$

Por lo tanto: $F_S(3) = \sum_{i=0}^{3} f_S(i) = \left(\frac{25}{6}\right) e^{-2}$

En el caso de una v.a. Poisson N, se puede observar que $f_S(x)$ es proporcional a $e^{-\lambda}$.

Para propósitos de cálculo es conveniente hacer:

$$f_S(x) = e^{-\lambda} g(x) \tag{35}$$

tal que la relación de recursión llega a ser:

$$g(0) = 1, \text{ para } x = 0 \tag{36}$$

$$g(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{k=1}^{x} kp(x) g(x-k), \text{ para } x \geq 1 \tag{37}$$

A continuación se dará una observación útil relacionada a la fórmula de recursión para una v.a. Poisson compuesta.

La ecuación (34) puede ser escrita en la forma

$$x f_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_S(x-k) \tag{38}$$

Teniendo en mente que $f_S(x)=0$ si $x<0$

$$a_k=\lambda kp(k) \tag{39}$$

Supóngase que todos los coeficientes a_k son conocidos. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\lambda\sum_{k=1}^{x} kp(k)=\lambda E(X)=E(S) \tag{40}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty} p(k)=\lambda \tag{41}$$

Si la fórmula de recursión es dada en la forma (38), uno puede sumar los coeficientes para obtener el valor esperado del total de reclamaciones. Dividiendo a_k por k y sumándolos, uno obtiene el número esperado de reclamaciones. Notar que esto se cumple únicamente para una v.a. Poisson Compuesta.

La fórmula de recursión puede hacerse ligeramente más general para incluir tales distribuciones como la binomial negativa y la binomial para N.

Para la v.a. binomial negativa:

$$f_S(0)=p^r \tag{42}$$

y para $x\geq 1$,

$$f_S(x)=(1-p)\sum_{k=1}^{x}\left\{\frac{r-1}{x}k+1\right\}p(k)f_S(x-k) \tag{43}$$

Para la v.a. binomial con parámetros n y p:

$$f_S(0)=(1-p)^n \tag{44}$$

y para $x\geq 1$, $$f_S(x)=\left(\frac{p}{1-p}\right)\sum_{k=1}^{x}\left\{\frac{n+1}{x}k-1\right\}p(k)f_S(x-k) \tag{45}$$

Bajo el método de recursión, podrían surgir problemas en la computadora si el número esperado de reclamaciones es grande. Esta situación puede ser superada calculando el logaritmo de $\Pr(N=0)$ y cambiando la escala si es necesario.

El siguiente ejemplo ilustra la evaluación recursiva de la distribución $f_S(x)$

Ejemplo 4.5.2.

Un asegurador espera 0.2 reclamaciones por año de un riesgo que se distribuye como Poisson compuesto. Para cualquier reclamación, existe un 80% de probabilidad de que la pérdida del asegurador sea \$10,000 y 20% de probabilidad de que la pérdida sea \$20,000. Las probabilidades de posibles pérdidas totales del riesgo son calculadas usando la fórmula de recursión (34) (en unidades de \$10,000).

Solución.

Por los datos del problema.

$p(1) = 0.80$, $p(2) = 0.2$, $\lambda = 0.2$

Utilizando fórmula (34) para diferentes valores de s, se encuentra lo siguiente:

$f_S(0) = e^{-\lambda} = 0.818731$

$f_S(1) = \lambda f_X(1) f_S(0) = (0.2)(0.8)(0.818731) = 0.130997$

$f_S(2) = \frac{\lambda}{2}[f_X(1) f_S(1) + 2 f_X(2) f_S(0)] = 0.043229$

$f_S(3) = \frac{\lambda}{3}[f_X(1) f_S(2) + 2 f_X(2) f_S(1)] = 0.005799$

$f_S(4) = \frac{\lambda}{4}[f_X(1) f_S(3) + 2 f_X(2) f_S(2)] = 0.001097$

Nótese que existen únicamente dos términos y no se requiere de convoluciones para calcular cada punto de la distribución de S. La función de frecuencia de probabilidad y la función de distribución del total de reclamaciones hasta $60,000 (en unidades de $10,000) se muestran en la tabla 4.3.

Tabla 4.3.

x	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	0.818731	0.818731
1	0.130997	0.949728
2	0.043229	0.992957
3	0.005799	0.998755
4	0.001097	0.999852
5	0.000128	0.999980
6	0.000018	0.999998

Ejemplo 4.5.3.

Para una distribución Poisson compuesta, la función de probabilidad del total de reclamaciones es dada por la fórmula de recursión:

$$f_S(x) = \frac{1}{x}[0.25 f_S(x-1) + f_S(x-2) + c f_S(x-3) + 1.5 f_S(x-6)]$$

Si el número esperado de reclamaciones es 1, encontrar c y $E(S)$.

Solución.

De ecuación (41), $\lambda = 1 = \sum \frac{a_k}{k} = 0.25 + \frac{1}{2} + \frac{c}{3} + \frac{1.5}{6} = 1 + \frac{c}{3}$

Despejando c, $c = 0$.

Por otro lado $E(S)$ es la suma de los coeficientes a_k, por lo que

$E(S) = 0.25 + 1 + 1.5 = 2.75$

Ejemplo 4.5.4.

Encontrar $F_S(2)$ en el ejemplo 4.4.3. usando el método de la fórmula de recursión.

Solución.

Ya que N es geométrica con $q = \frac{1}{6}$, es decir, es binomial negativa con $r = 1$. La ecuación (43) llega a ser igual a:

$$f_S(x) = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2} f_S(x-1) + \frac{1}{2} f_S(x-2)\right\}$$

Comenzando con $f_S(0) = \Pr(N = 0) = p = \frac{5}{6}$,

$f_S(1) = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$ y $f_S(2) = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}\frac{5}{72} + \frac{1}{2}\frac{5}{6}\right\} = \frac{65}{864}$

Sumando $f_S(i)$ para $i = 0{,}1$ y 2 se obtiene que $F_S(2) = \frac{845}{864}$ lo cual es lo mismo que el resultado del ejemplo 4.4.3.

4.5.2. Aproximación Normal

Una manera clásica de abarcar el problema de encontrar la distribución del total de reclamaciones, es aproximar la distribución F, por medio de una distribución normal[21].
Por el teorema del límite central del cálculo de probabilidades[#], la función de distribución F es asintóticamente normal. Desafortunadamente, su área de aplicación es bastante angosta, ya que la función de distribución del costo total de reclamaciones es usualmente sesgada, mientras la función de distribución normal no lo es.

Discusión sobre aplicabilidad.

La aproximación normal simplifica los cálculos y a menudo hace posible analizar problemas que involucran numerosas variables e interrelaciones de una forma en la cual no sería posible de otra manera o pudiera ser hecho únicamente con considerable dificultad.

Valores numéricos se pueden encontrar en libros de texto basados en el cálculo de probabilidades. De esta forma se tiene que la fórmula para aproximar una v.a. S a una distribución normal es:

$$F_S(x) = \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sigma_S}\right) \qquad (46)$$

[21] *Esta aproximación es muy satisfactoria para aquellos valores cuya distancia de la media no excede una desviación estándar de la media y para distribuciones con sesgo cercano a cero.*

Donde $E(S)$ y σ_S, representan la media y la desviación estándar de $F_S(x)$, respectivamente y están dadas por: $E(S) = E(N)E(X)$ y $Var(S) = Var(X)E(N) + E(X^2)Var(N)$

La aproximación se vuelve más exacta cuando el número esperado de reclamaciones es grande, es decir cuando $E(N) \to \infty$, por ejemplo, en el caso de una v.a. Poisson compuesta cuando $\lambda \to \infty$ y en el de una v.a. binomial negativa, cuando $r \to \infty$

Desafortunadamente la distribución normal no es suficientemente exacta y únicamente es aceptable si el sesgo de S es muy pequeño. Por ejemplo si se encuentra entre –0.5 y 0.5.

Debido a este sesgo buscamos una aproximación más general a la distribución del monto total de reclamaciones, lo cual se ve a continuación.

4.5.3. Métodos basados en momentos (Distribución Gamma Trasladada).

Una familia de funciones de distribución aproximada es obtenida por medio de la aplicación de una transformación al total de reclamaciones, con el fin de eliminar su sesgo y poder así aplicarle una aproximación normal.

El método de momentos consiste en aproximar la función de distribución por otra, escogida de una familia conocida de distribuciones, igualando sus características menores, usualmente la media, desviación estándar y el sesgo. Una condición necesaria es que la función de distribución aproximada debe de tender a la distribución normal conforme el sesgo tiende a cero.

La distribución Gamma es usada por muchos autores, porque ofrece la posibilidad de tratar a F analíticamente y sus propiedades son conocidas y están disponibles en los libros de texto.

Dicha elección es motivada por el hecho de que la distribución Gamma tiene un tercer momento central positivo, como lo tiene la Poisson compuesta y la binomial negativa compuesta con una distribución del monto de reclamación positivo.

Ya que existen 3 parámetros x_o, α, β, se puede requerir que la media, varianza y TMC de la gamma trasladada y la distribución compuesta sean iguales. El valor esperado, varianza y TMC para la distribución Gamma trasladada son respectivamente:

$$E(S) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + x_o \tag{47}$$

$$Var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2} \tag{48}$$

$$E\left[\{s - E(S)\}^3\right] = \frac{2\alpha}{\beta^3} \tag{49}$$

Igualando estos valores a los de la distribución compuesta se tiene que:

$$\beta = \frac{2Var(S)}{E(S-E(S))^3} \tag{50}$$

$$\alpha = \frac{4Var(S)^3}{\left[E(S-E(S))^3\right]^2} \tag{51}$$

$$x_o = E(S) - \frac{2Var(S)^2}{E(S-E(S))^3} \tag{52}$$

Ejemplo 4.5.5.

Supóngase que la distribución compuesta es Poisson, la cual es aproximada por una distribución Gamma Trasladada. Encontrar α, β y x_o.

Solución.

Utilizando las fórmulas (47), (48) y (49) se tiene que:

$$x_o + \frac{\alpha}{\beta} = \lambda p_1$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda p_2$$

$$2 \cdot \frac{\alpha}{\beta^3} = \lambda p_3$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentran los valores de α, β y x_o.

$$\alpha = \frac{4\lambda p_2^3}{p_3^2}, \; \beta = 2\frac{p_2}{p_3} \text{ y } x_o = \lambda\left(p_1 - \frac{2p^2{}_2}{p_3}\right)$$

Ejemplo 4.5.6.

Sea S una distribución Poisson compuesta con $E(N)=5$ y distribución del monto de reclamación $F_X(x) = \frac{x^2}{8}$, $0 \le x < 2$ y $F_X(x) = 1$ para $x \ge 2$. Encontrar los parámetros para la distribución aproximada Gamma trasladada.

Solución.

Notar que la distribución del monto de reclamación tiene un punto de masa de probabilidad en 2.

$$f_X(x) = \frac{x}{4} \text{ para } 0 \le x < 2 \text{ y } f_X(2) = \frac{1}{2}$$

Calculando los tres primeros momentos no centrales de X,

$$p_1 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} \right) dx + 2\left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}$$

$$p_2 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} dx \right) + 2^2 \left(\frac{1}{2} \right) = 3$$

$$p_3 = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{2} dx \right) + 2^3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{28}{5}$$

Por lo tanto, utilizando estos resultados y el hecho de que $E(N) = 5$

$$E(S) = 5\left(\frac{5}{3} \right) = \frac{25}{3}, \; Var(S) = 15 \text{ y } TMC(S) = 28.$$

Usando las fórmulas (47) a (49), se tiene que:

$$x_o + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{25}{3}$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = 15$$

$$\frac{2\alpha}{\beta^3} = 28$$

Resolviendo las dos últimas ecuaciones, se encuentran los parámetros β y α,

$\beta = \frac{15}{4} = 1.75; \quad \alpha = \frac{15^3}{14^2} = 17.2193$ y usando estas dos en la primera ecuación,

$$x_o = \frac{25}{3} - \frac{15^2}{4} = -47.91$$

Finalmente, cabe aclarar que los métodos exactos y aproximados se complementan muy bien. Los métodos exactos pueden ser usados para colectividades pequeñas, las cuales a menudo son sesgadas y donde las aproximaciones son de valor limitado. Los segundos son mejores para grandes colectividades las cuales típicamente tienen un sesgo moderado.

Es un problema de juicio personal saber cuando usar las aproximaciones, la f.g.m. o la fórmula de recursión.

4.6. Distribución Poisson Compuesta.

Si la distribución del número de reclamaciones N es Poisson, entonces la distribución del costo total de reclamaciones S es llamada distribución Poisson compuesta. Como se vió anteriormente (sección 4.2.1) la función de probabilidad y algunas de las propiedades de la distribución Poisson son las siguientes:

$$\Pr(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}; \lambda > 0$$
$$\Pr(N=0) = e^{-\lambda}$$
$$E(N) = Var(N) = \lambda$$
$$M_N(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right]$$

Para la distribución Poisson compuesta se tiene que su f.g.m. está dada por:

$$M_S(t) = M_N(\ln M_X(t)) = \exp\left[\lambda\left(e^{\ln M_X(t)} - 1\right)\right] = \exp\left[\lambda\left(M_X(t) - 1\right)\right] \tag{53}$$

Para obtener la media, esperanza y TMC, se utiliza el método desarrollado en la sección 2.9:

$$\ln M_S(t) = \lambda\left[M_X(t) - 1\right]$$
$$\ln M_S(t) = \lambda\left[1 + p_1 t + p_2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + p_3\left(\frac{t^3}{3!}\right) + \ldots - 1\right] \tag{54}$$

De los coeficientes de la serie anterior para $\ln M_S(t)$, se puede ver que:

$$E(S) = \lambda p_1 \tag{55}$$
$$Var(S) = \lambda p_2 \tag{56}$$
$$TMC(S) = \lambda p_3 \tag{57}$$

Ejemplo 4.6.1.

Si $\lambda = 2$ y la distribución del monto de reclamación es: $f_X(1) = \frac{1}{2}$;

$f_X(2) = f_X(3) = \frac{1}{4}$, encontrar $E(S)$ y $Var(S)$.

Solución.

$$p_1 = E(X) = \sum_{x=1}^{3} x f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)2 + \left(\frac{1}{4}\right)3 = \frac{7}{4}$$
$$p_2 = E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)1 + \left(\frac{1}{4}\right)4 + \left(\frac{1}{4}\right)9 = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto $E(S) = \lambda p_1 = 2\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)$ y $Var(S) = \lambda p_2 = 2\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{2}$

Ejemplo 4.6.2.

En el ejemplo 4.6.1, encontrar la probabilidad de que el total de reclamaciones sea menor o igual a 2.

Solución.

Se va a utilizar la ecuación (44) del capítulo 2, para obtener la f.g.m. de X:

$$M_X(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$$

Usando la ecuación (53) para la función generadora de momentos de S

$$M_S(t) = \exp[\lambda(M_X(t)-1)] = \exp\left\{2\left[\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} - 1\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} - 2\right\} = e^{-2}\left[\exp\left\{e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right\}\right]$$

$$= e^{-2}\left[1 + \left\{e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right\} + \left\{e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right\}^2 / 2 + \ldots\right]$$

$$= e^{-2}\left[1 + e^t + e^{2t} + \ldots\right]$$

Aquí se ha usado la serie de Maclaurin (ecuación (3) de capítulo 2) para la función exponencial, escribiendo sólo los términos hasta e^{2t}, debido a que se necesita encontrar $F_S(2)$. Entonces $f_S(k)$ es el coeficiente de e^{kt}, de tal manera que:

$f_S(0) = e^{-2}$, $f_S(1) = e^{-2}$, $f_S(2) = e^{-2}$

Por lo tanto, $F_S(2) = \sum_{j=0}^{2} f_S(j) = 3e^{-2}$

4.7. Combinación de riesgos de Poisson.

No es lógico pensar que todos los riesgos en una cartera de seguros tienen exactamente la misma distribución del monto de reclamaciones.

De hecho, por una variedad de propósitos asociados con el cálculo de la distribución del costo total de reclamaciones, es usual considerar su distribución para varios subconjuntos de las reclamaciones.

Los subconjuntos pueden ser basados en el monto (o tamaño) de reclamaciones individuales; con base a combinación de coberturas o ramos independientes; combinación de un número de carteras de seguros independientes, una única cartera para un periodo de varios años, etc.

Esto resulta ser muy usual en todos los tipos de aplicaciones de seguros y es una de las razones por las cuales el modelo Poisson compuesto es de gran interés para el actuario. Esto nos permite combinar varios riesgos de Poisson y tratar el total como un único riesgo del mismo tipo.

Uno de los principales rasgos atractivos de la distribución Poisson compuesta es que la suma de dos distribuciones poisson compuestas es también Poisson compuesta.
Esto es más fácilmente visto usando la f.g.m.

Sean S_1 y S_2 v.a.'s Poisson compuestas independientes con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente y funciones del monto de reclamación individual $f_{X_1}(x)$ y $f_{X_2}(x)$.

Sea $S = S_1 + S_2$.

Entonces, $M_S(t) = M_{S_1}(t)M_{S_2}(t)$

$$= \exp[\lambda_1(M_{X_1}(t)-1)]\exp[\lambda_2(M_{X_2}(t)-1)]$$
$$= \exp[\lambda_1 M_{X_1}(t) + \lambda_2 M_{X_2}(t) - (\lambda_1+\lambda_2)]$$
$$= \exp\left\{(\lambda_1+\lambda_2)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}M_{X_1}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}M_{X_2}(t) - 1\right]\right\}$$

Si se hace $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda} f_{X_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f_{X_2}(x) = f_X(x)$

Resulta que $M_S(t) = \exp[\lambda(M_X(t)-1)]$, la cual es la f.g.m. para una v.a. Poisson compuesta con $E(N) = \lambda$ y la distribución del monto de reclamación $f_X(x)$.

Los resultados anteriores son fácilmente generalizados. Si S_i, $i = 1,\dots,n$ son distribuciones independientes Poisson compuestas con parámetros λ_i y funciones del monto de reclamación individual $f_{X_i}(x)$ respectivamente, entonces $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ es una v.a. poisson compuesta con parámetro

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{58}$$

y distribución del monto de reclamación individual:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda} f_{X_i}(x) \tag{59}$$

Ejemplo 4.7.1.

Sean S_1 y S_2 v.a.'s Poisson compuestas con $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y distribución del monto de reclamación como se muestra en la siguiente tabla:

x	$f_{X_1}(x)$	$f_{X_2}(x)$
1	2/3	0
2	1/3	½
3	0	½

Sea $S = S_1 + S_2$. Encontrar el número esperado de reclamaciones y la distribución del monto de reclamación para S.

Solución.

Usar ecuaciones (58) y (59). Ya que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, S es Poisson compuesta con $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3$.

La distribución del monto de reclamación es: $f_X(x) = \frac{1}{3} f_{X_1}(x) + \frac{2}{3} f_{X_2}(x)$

Denotando por $p(k)$ la probabilidad de que $X = k$, la distribución del monto de reclamación para S es dado por:

$$p(1) = f_X(1) = \frac{1}{3} f_{X_1}(1) + \frac{2}{3} f_{X_2}(1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}(0) = \frac{2}{9}$$

$$p(2) = f_X(2) = \frac{1}{3} f_{X_1}(2) + \frac{2}{3} f_{X_2}(2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9}$$

$$p(3) = f_X(3) = \frac{1}{3} f_{X_1}(3) + \frac{2}{3} f_{X_2}(3) = \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

A continuación se da un ejemplo, donde la distribución del monto de reclamación no es discreta.

Ejemplo 4.7.2.

Sea S_1 una v.a. Poisson compuesta con $\lambda_1 = 2$ y distribución del monto de reclamación uniforme sobre $(1,3)$, Sea S_2 otra distribución poisson compuesta con $\lambda_2 = 3$ y distribución del monto de reclamación uniforme sobre $(2,6)$. Sea $S = S_1 + S_2$. Encontrar la probabilidad de que la reclamación individual para S no sea más grande que 4.

Solución.

S es una v.a. Poisson compuesta con $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$ y distribución del monto de reclamación:

$$f_X(x) = \left(\frac{2}{5}\right) f_{X_1}(x) + \left(\frac{3}{5}\right) f_{X_2}(x)$$

Por lo que:

$$F_X(4) = \left(\frac{2}{5}\right)\int_0^4 f_{X_1}(x)dx + \left(\frac{3}{5}\right)\int_0^4 f_{X_2}(x)dx$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\int_1^3 dx + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\int_2^4 dx = \frac{7}{10}$$

Para poner lo anterior en forma de resumen, las λ_i's se suman para dar λ (número esperado de reclamaciones) y la distribución del monto de reclamación para S es una suma ponderada de las distribuciones del monto de reclamación para las S_i's.

Un caso especial es cuando los montos de reclamación son fijos, es decir, las distribuciones de los montos de reclamación son degeneradas.

Sean S_i, $i = 1,2,\dots,m$ v.a's Poisson compuestas independientes con un número esperado de reclamaciones λ_i y distribución del monto de reclamación, $f_{X_i}(x_i) = 1$, con x_i's distintas, es decir, los montos de reclamación distintos son fijos. Entonces, por lo visto anteriormente, $S = \sum_{i=1}^m S_i$ es también una v.a. Poisson compuesta con $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ y distribución del monto de reclamación individual, $f_X(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) f_{X_i}(x)$.

Pero $f_{X_i}(x_i) = 1$ si $x = x_i$ y 0 en otro caso. Así $f_X(x)$ toma la forma de: $\Pr(x = x_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$

Esto se puede expresar de otra forma. Por definición, $S_i = \sum_{k=0}^{N_i} X_k$. Si las X_k's son todas fijas e iguales a x_i, entonces $S_i = x_i N_i$. De esta manera N_i, es una v.a. la cual es el número de reclamaciones de monto x_i.

Si $S = \sum_{i=1}^m S_i$ entonces S se puede escribir como:

$$S = \sum_{i=1}^m x_i N_i$$

Suponga que S es una v.a. Poisson compuesta con $E(N) = \lambda$ y distribución del monto de reclamación, $f_X(x_i) = \pi_i$, $i = 1,2,\dots,m$. Entonces se puede dividir a S como:

$$S = \sum_{i=1}^m S_i$$

Donde:

S_i's, son v.a.'s independientes Poisson compuestas con $\lambda_i = \lambda\pi_i$ y distribución del monto de reclamación degenerada, $f_{X_i}(x_i) = 1$.

Ejemplo 4.7.3.

Sea S una v.a. Poisson compuesta con número esperado de reclamaciones 5 y distribución del monto de reclamación $f_X(1) = 0.5$; $f_X(2) = 0.2$; $f_X(4) = 0.2$ y $f_X(7) = 0.1$.
Podemos escribir a S como una suma de variables aleatorias Poisson compuestas, es decir, $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, con las siguientes propiedades:

Poisson Compuesta	λ_i	f_{X_i}
S_1	$5(0.5) = 2.5$	1 si $X_1 = 1$, 0 en otro caso
S_2	$5(0.2) = 1$	1 si $X_2 = 2$, 0 en otro caso
S_3	$5(0.5) = 2.5$	1 si $X_3 = 4$, 0 en otro caso
S_4	$5(0.1) = 0.5$	1 si $X_4 = 7$, 0 en otro caso

Se puede interpretar a las λ_i's como el número esperado de reclamaciones de tamaño x_i. Tal que S, se puede expresar como:
$S = 1N_1 + 2N_2 + 4N_3 + 7N_4$

Ejemplo 4.7.4.

S_1 es una v.a. Poisson compuesta con función de densidad de probabilidad del monto de reclamación $f_{X_1}(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}, x > 0$, y número esperado de reclamaciones $\lambda_1 = 20$. S_2 es una v.a. Poisson compuesta con función de densidad de probabilidad para el monto de reclamaciones $f_{X_2}(x) = \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}}, x > 0$, y número esperado de reclamaciones $\lambda_2 = 50$
Encontrar la distribución de S. Explicar que significa la distribución del número de reclamaciones y la distribución del monto de reclamaciones.

Solución.
La teoría de suma de variables aleatorias Poisson compuestas implica que,
$S = S_1 + S_2$, es una v.a. Poisson compuesta .

a) La distribución del número de reclamaciones para S. Se espera que sucedan 20 reclamaciones debidas a la v.a. S_1 y 50 reclamaciones debidas a la v.a. S_2. Implica 70 reclamaciones esperadas en S, tal que N es Poisson con número esperado de reclamaciones $\lambda = 70$.
b) La distribución del monto de reclamaciones para S. 20 de 70 reclamaciones esperadas son debidas a la v.a. S_1 y 50 de 70 reclamaciones esperadas son debidas a la v.a. S_2, esto implica que la función de densidad de X esta dada por $f_X(x) = \frac{20}{70} f_{X_1}(x) + \frac{50}{70} f_{X_2}(x)$.

Ejercicios, Capítulo IV

1. N_2 es la v.a. que denota el número de reclamaciones de monto igual a 2. N denota la v.a. de una distribución compuesta binomial negativa con parámetros $r = 5$ y $p = \frac{2}{3}$. La distribución del monto de reclamación es $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{1}{4}$; $f(3) = \frac{1}{4}$. Encontrar $Var(N_2)$.
   Resp. $\left(\frac{45}{64}\right)$

2. Un proceso de reclamaciones es definido por las siguientes distribuciones del número y monto de reclamaciones:
   $\Pr(N = n) = \binom{n+2}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$ $n = 0,1,2,\ldots$
   $f_X(x) = e^{-x}$
   Determinar la media y la varianza del total de reclamaciones.
   Resp. $(3,9)$

3. Para un cierto proceso de reclamaciones, los números de reclamaciones pueden ser 0,1,2 con igual probabilidad y el monto de reclamación X tiene distribución exponencial con media 0.5. Si S es el total de reclamaciones, calcular $E(e^{S})$.
   Resp. $\left(\frac{7}{3}\right)$

4. Para un proceso compuesto binomial negativo, la distribución del monto de reclamación es exponencial con media 2. El valor esperado y la varianza del total de reclamaciones són 8 y 64 respectivamente. Encontrar la probabilidad de que vayan a existir exactamente 2 reclamaciones.
   Resp. $\left(\frac{4}{27}\right)$

5. El número de reclamaciones tiene una distribución Poisson-Gaussiana inversa, con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0.1$. La distribución del monto de reclamación es lognormal con parámetros $m = 1$ y $\sigma^2 = 1$. Encontrar la varianza del costo total de reclamaciones.
   Resp $(5{,}109.69)$

6. En el problema anterior, el costo total de reclamaciones es aproximado por una distribución normal. Determinar el mínimo factor de seguridad relativo necesario para asegurar que la probabilidad de que el total de primas vaya a cubrir las reclamaciones sea al menos 0.95.
   Resp. (1.3118)

7. S es una v.a. con distribución Poisson compuesta con $\lambda = 0.6$ y montos de reclamación individual que son 1, 2 o 3 con probabilidades 0.2, 0.3 y 0.5, respectivamente. Determinar $\Pr(S \geq 3)$.
Resp. (0.2826)

8. Para una distribución binomial negativa con parámetros $r = 4.5$, $p = 0.5$ y otra distribución de reclamaciones dada por: $f(1) = 0.7$ y $f(2) = 0.3$. Calcular $f_S(3)$.
Resp. (0.1082)

9. Para una distribución Poisson con montos de reclamación enteros positivos, la función de densidad de probabilidad del costo total de reclamaciones es dada por:
$f_S(x) = \frac{1}{x}\left[1.25 f_S(x-1) + b f_S(x-2) + c f_S(x-3)\right]$, $x = 1,2,3,\ldots$
El valor esperado del total de reclamaciones es 3 y el número esperado de reclamaciones es 2. Encontrar b y c.
Resp. $(1; 0.75)$

10. Para una distribución compuesta-geométrica, el número esperado de reclamaciones es 2. Los posibles montos de reclamación son 1 y 2. Si el costo total de reclamaciones es menor o igual a 2, la probabilidad de que no existan reclamaciones es $\frac{12}{23}$. Encontrar la distribución del monto total de reclamaciones.
Resp. $f_X(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \phantom{\text{si }} x = 2 \end{cases}$

11. Para un proceso compuesto el número esperado de reclamaciones es 2. La distribución del monto de reclamaciones individuales es dada como sigue: $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$ y $f(3) = \frac{1}{4}$. En cada uno de los siguientes casos encontrar la probabilidad de que el total de reclamaciones vaya a ser menor que 3.
a) N es Poisson.
Resp. (0.406)

b) N es geométrica.
Resp. (0.537)

c) N es binomial negativa con $r = 2$
Resp. (0.4844)

d) N es binomial con $n = 4$
Resp $\left(\frac{11}{32}\right)$

12. Una distribución Poisson compuesta presenta montos de reclamación enteros positivos. La distribución satisface la siguiente fórmula de recursión.

$f_S(x) = \frac{1}{x}[6f(x-2)+8f(x-4)], x = 1,2,3,...$

Calcular el número esperado de reclamaciones.

Resp. (5)

13. Una distribución Poisson compuesta tiene $E(S) = 4$, $Var(S) = \frac{28}{3}$ y $TMC(S) = 24$. La distribución del monto de reclamación individual tiene únicamente los valores de 1, 2 y 3. Encontrar $\Pr(S = 3)$.

Resp. (0.157)

14. Una distribución Poisson compuesta tiene parámetro $\lambda = 2$. La distribución del monto de reclamación individual es $f(6) = 0.4$ y $f(12) = 0.6$. Encontrar la probabilidad de que el costo total de reclamaciones no exceda de 20.

Resp. (0.591)

15. Para una cartera de pólizas, el total de reclamaciones S tiene una distribución Poisson con $\lambda = 5$. La distribución del monto de reclamación individual es uniforme sobre $(0,10)$.

La prima es $G = 1.2E(S)$. Determinar $Var\left(\frac{S}{G}\right)$

Resp. (0.185)

16. Un maestro de música cobra \$50 por una hora de clases y \$25 por media hora. En promedio, 2 adultos y un niño toman lecciones por las tardes. Setenta y cinco por ciento de los adultos toman una hora de clase mientras que el resto solo media hora. Asumiendo que el número de adultos y el número de niños que toman clases tienen distribuciones Poisson y que las variables aleatorias son independientes. Determinar la probabilidad de que en una cierta tarde el maestro vaya a ganar al menos 75.

Resp. (0.745)

17. Sea $F_X(x)$ la distribución del monto de reclamación de $S = S_A + S_B$. Si se tienen dos variables aleatorias independientes Poisson compuestas S_A y S_B, donde $\lambda_A = \lambda_B = 1$; $f_A(1) = 1$; $f_B(1) = f_B(2) = 0.5$. Calcular $F^{*4}(6)$.

Resp. (0.9492)

18. S_1 es una v.a. Poisson compuesta con $\lambda_1 = 2$ y distribución uniforme sobre $(0,2)$. S_2 es otra v.a. Poisson compuesta con $\lambda_2 = 1$ y distribución del monto de reclamación Gaussiana inversa con $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$ Sea $S = S_1 + S_2$. Encontrar $Var(S)$.

Resp. $\left(\frac{32}{3}\right)$

19. S_1 es una v.a. Poisson compuesta con $\lambda_1 = 2$ y distribución del monto de reclamación exponencial con media 2. S_2 es una v.a. Poisson compuesta con $\lambda_2 = 1$ y distribución del monto de reclamación uniforme sobre $(1,5)$. S_1 y S_2 son independientes y $S = S_1 + S_2$. Sea X la v.a. que denota el monto de reclamación individual para S. Encontrar $\Pr(X \leq 2)$.
Resp. (0.9261)

20. S_1 es una v.a. Poisson compuesta con $\lambda_1 = 2$ y distribución del monto de reclamación exponencial con media $\frac{1}{M}$. S_2 es una v.a. Poisson Compuesta con $\lambda_2 = 3$ y distribución del monto de reclamación también exponencial pero con media $\frac{1}{2M}$. M es una v.a. con distribución Gaussiana inversa con media 2 y varianza 4. S_1 y S_2 son v.a.'s independientes y $S = S_1 + S_2$. Sea X el monto de reclamación individual para S. Encontrar $\Pr(X > 1)$.
Resp. (0.197)

21. En un cierto día un doctor proporciona atención médica para N_A adultos y N_N niños. N_A y N_N tienen distribuciones Poisson compuestas con parámetros 3 y 2, respectivamente. La distribución del tiempo utilizado para la atención médica es dada por la siguiente tabla:

Duración (hrs)	Adultos	Niños
1 hora	0.4	0.9
2 horas	0.6	0.1

N_A, N_N y los tiempos de atención médica para todos los individuos son independientes. El médico cobra \$200 por hora de atención al paciente. Encontrar la probabilidad de que el ingreso en un cierto día, sea menor o igual a \$800.
Resp. (0.238)

22. La variable aleatoria Λ tiene una distribución Gaussiana Inversa con media $\frac{5}{2}$ y varianza igual a $\frac{25}{16}$. Dado $\Lambda = \lambda$, el número de reclamaciones tiene una distribución Poisson con $E(N) = \lambda$. Encontrar $\Pr(N = 0)$.
Resp. (e^{-2})

23. En un proceso de reclamaciones, para toda $\Lambda = \lambda$, el número de reclamaciones tiene una distribución Poisson compuesta con media igual a λ. La variable aleatoria Λ tiene una distribución Gamma con media 4 y varianza 16. Encontrar la probabilidad de que exista exactamente 1 reclamación.

Resp. $\frac{4}{25}$

24. El total de reclamaciones para una cartera de pólizas es sujeta a una distribución Poisson compuesta con $\lambda = 10$ y distribución del monto de reclamación $f_X(x) = e^{-x}$. El total de reclamaciones es aproximado por medio de una distribución Gamma-trasladada. Encontrar x_0.

Resp. $\left(-\dfrac{10}{3}\right)$

CAPITULO V

TEORIA DE LA RUINA

A menudo cuando se examina la naturaleza del riesgo asociado con una cartera de seguros, se corre la dificultad de cuantificarlo, aún habiéndose modelado la distribución del total de reclamaciones.

El modelo que se discutirá en este capítulo, trata de medir el riesgo de una cartera de seguros en el largo plazo. Es de interés para el asegurador, valuar como la cartera se comporta durante este periodo. Un enfoque para resolver este y otras problemas trata con la teoría de la ruina. Se entiende por ruina, el hecho de que la reserva[1] de riesgo de la aseguradora formada por capital y excedentes, alcance una cuota inferior específica.

Dicho límite es establecido por los reguladores de seguros en la mayoría de los países (aquí se asumirá como cero). Si llega a caer por debajo de tal límite, la ocurrencia de una posible bancarrota está muy próxima.

El propósito de este capítulo es presentar modelos para las variaciones en el monto de la reserva de riesgo del asegurador sobre un periodo de tiempo de varios años.

5.1. Descripción del problema.

Un proceso desde el cual comienza el estudio de la Teoría de la Ruina, es el flujo que existe por el ingreso en las primas y los egresos con respecto a las reclamaciones ocurridas. El balance de la reserva de riesgo al tiempo t es denotado por $U(t)$, el cual representa el beneficio acumulado por suscripción.

Suponga que un asegurador comienza sus operaciones con fondos u (denominados reserva inicial) y cobra primas a una tasa constante c por unidad de tiempo. En el transcurso del tiempo, las reclamaciones pueden ocurrir repentinamente y provocarán una reducción de la reserva acumulada por las primas reunidas y los fondos iniciales.
Para cualquier tiempo t[2], $N(t)$ denota el número de reclamaciones reportadas hasta el tiempo t y $S(t)$ es el total de reclamaciones pagadas hasta el tiempo t.

[1] *Una reserva es un conjunto de fondos que se utilizan para ciertos propósitos específicos, especialmente para:*

- *Primas que no se han cobrado.*
- *Reclamaciones pendientes de pagar (incluyendo aquellas todavía no reportadas).*
- *Fluctuaciones en los resultados técnicos.*

Estamos interesados únicamente con la reserva para fluctuación en los resultados técnicos.
La reserva que permanece para nuestro tratamiento, se entiende como la porción de los recursos de un asegurador que están disponibles para absorber las fluctuaciones en las operaciones técnicas, en la práctica los modelos de ruina con la reserva de riesgos en curso.

[2] *Como primera etapa se asumirá un modelo en el cual se estudia a $U(t)$ sobre un intervalo de tiempo $(0,T]$*

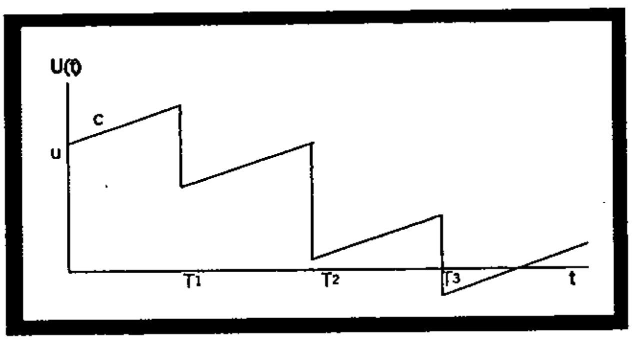
La posición financiera del asegurador en cualquier punto en el tiempo t es medida por la reserva, $U(t)$, definida como:

$$\underbrace{U(t)}_{\text{Reserva}} = \underbrace{u + ct}_{\substack{\text{fondos disponibles} \\ \text{hasta el tiempo } t}} - \underbrace{S(t)}_{\substack{\text{fondos necesarios} \\ \text{hasta el tiempo } t}} \qquad (1)$$

Es decir, la reserva es igual al balance que existe entre los fondos disponibles sobre los necesarios.

La gráfica de $U(t)$ se ve en la fig. 5.1

Fig. 5.1 Reserva de riesgo $U(t)$ a través del tiempo



Se asume que el ingreso por primas[3] se recibe continuamente. Esto se acumula a una cantidad inicial u, constituyendo así la reserva de riesgo $U(t)$, de esta forma la utilidad se representa por una línea recta inclinada hacia la derecha con pendiente positiva, que intersecta al eje de las $y's$ en u.

Las reclamaciones, las cuales son consideradas como egresos, son pagadas de esta reserva y se representan por líneas verticales hacia abajo.

La diferencia $U(t) - u = ct - S(t)$, nos da la utilidad o pérdida obtenida durante el intervalo de tiempo $(0,t)$[4].

La primera ocasión en que la reserva cae por debajo de cero, se dice que la ruina ha ocurrido. Una medida de riesgo es la probabilidad de un evento como este, reflejando claramente la volatilidad inherente en el negocio.

[3] *En la Teoría del Riesgo, el ingreso de las primas en el periodo (0,t] es definido como:*
$ct = P(t) = (1+\lambda)Pt$, *donde* $P = E[S(t)]$ *es la prima pura de riesgo por unidad de tiempo,* λ *es el factor de seguridad y* t *representa la unidad de tiempo.*
[4] *Los efectos de intereses, gastos operativos y de administración, dividendos obtenidos y tarificación por experiencia propia de la compañía no se incluyen.*

La probabilidad de ruina es una medida del riesgo que se presenta en la operación de una compañía de seguros. Por ejemplo, en la fig. 5.1 la ruina ocurre en el instante en el tiempo T_3.

El interés de este capítulo, es encontrar una expresión para la probabilidad de que la ruina ocurra en algún tiempo.[5]

La probabilidad de ruina es denotada por:
$\psi(u) = \Pr(\textit{ruina ocurra}) = \Pr(U(T) < 0,\ \text{para alguna } T > 0)$ (2)

Donde:

u representa la reserva inicial.
$T = \min\{t. t \geq 0, U(t) < 0\}$ y definimos $T = \infty$ si $U(t) \geq 0$ para toda t.
$\psi(u) = \Pr(T < \infty)$, denota la probabilidad de que la ruina ocurra, la cual es considerada como función de la reserva inicial u.
$U(T)$ es la reserva al tiempo de ruina.

De la misma forma la probabilidad que suceda la ruina antes de tiempo t, se puede denotar por la siguiente expresión:
$\psi(u,t) = \Pr(T < t)$ (3)

Un enfoque adoptado frecuentemente en la Teoría del Riesgo es hacer que el horizonte de tiempo t crezca a infinito y usar la probabilidad de ruina como medida de inestabilidad.
Es decir, vamos a tomar el límite cuando $t \to \infty$
$\lim_{t \to \infty} \psi(u,t) = \psi(u)$ (4)

El cálculo de la probabilidad de ruina, denotada por $\psi(u)$ es una de las tareas centrales de la Teoría del Riesgo. A continuación se dará una explicación de cómo obtener la probabilidad de ruina.

5.2. Cálculo de la probabilidad de ruina.[6]

Para calcular la probabilidad de ruina se sugiere la siguiente idea. (Ver fig. 5.2)

Supóngase que se cuenta con una reserva inicial $u \geq 0$.

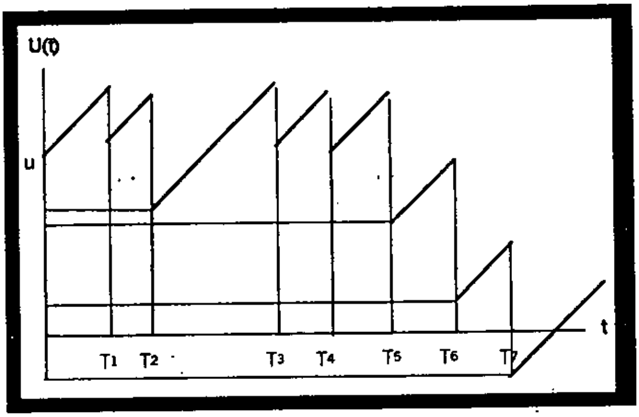
Mientras la reserva de riesgo $U(t)$ no caiga por debajo de su nivel inicial, no existe razón alguna por la cual el asegurador se tuviere que preocupar. Si así sucediera, entonces a la primera ocasión que esto ocurriése, registramos el monto por el cual $U(t)$ cae por debajo de u como una pérdida, lo denotamos como L_1 y reinicializamos el nivel de la reserva al monto más bajo que ésta haya alcanzado hasta ese momento.

[5] *Es intuitivamente obvio que la probabilidad de ruina depende de la reserva inicial* u. *En la medida en la que se cuente con una mayor reserva inicial en esa medida disminuirá la probabilidad de ruina.*
[6] *Cfr. Newton L. Bowers, et. al., Actuarial Mathematics with Applications, Cap. 13.*

Como se muestra en la fig. 5.2, la reserva cae por debajo del nivel inicial u por primera ocasión en T_2. El monto por el cual ésta cae por debajo es la pérdida L_1.

En ese momento, la reserva alcanza un nuevo nivel, el cual es igual a $u - L_1$. Si la reserva cae por debajo de este nuevo nivel, registramos como pérdida al monto por la cual ésta cae por debajo de su nivel inicial y reinicializamos por segunda ocasión la reserva.

Fig. 5.2. Cálculo de la Probabilidad de Ruina



En la fig. 5.2, la primera ocasión en que la reserva cae por debajo de la "nueva" reserva inicial es en T_5. El monto por el cual ésta cae por debajo es L_2. Así en T_5 reinicializamos la reserva a $u - L_1 - L_2$. Hacemos esto cada vez que la reserva cae por debajo del nuevo nivel inicial (es decir, por debajo de la reserva "reinicializada"). Si durante el tiempo que nos mantengamos haciendo este proceso, la reserva reinicializada no es negativa, entonces la ruina no ocurre.

La primera ocasión en que la reserva se vuelve negativa, se dice que la ruina ocurre.

En la fig. 5.2, la ruina ocurre en T_7. Esto significa que $u-(L_1+L_2+L_3+L_4)<0$ ó expresándolo de otra forma $L_1+L_2+L_3+L_4>u$.

Lo anterior quiere decir que la suma de todas las pérdidas causadas debido a que la reserva cae por debajo de su nivel reinicializado llega a ser más grande que la reserva inicial.

Supóngase que el evento de que la reserva cae por debajo de su nivel inicial ocurre N veces hasta que se presenta la ruina. Entonces el evento de que la ruina ocurra se puede expresar como:

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i > u \qquad (5)$$

El número L, es conocido como la máxima pérdida total[7]. La probabilidad de ruina es igual a la probabilidad de que $L > u$, es decir, $\psi(u) = \Pr(L > u)$.

Por las propiedades de los eventos complementarios de probabilidades la expresión anterior es idéntica a:

$$\Pr(L \le u) = 1 - \psi(u) \tag{6}$$

Lo cual quiere decir que si se conoce la función de distribución de L, se puede encontrar $\psi(u)$.

L es expresado como la suma de las L_i's. Un punto importante a notar es que cada L_i es la pérdida debida a que la reserva cae por debajo de su nivel inicial. Es razonable asumir que todas las L_i's son variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad $f_{L_1} = f_{L_n}$ y que las L_i's y N son mutuamente independientes.

De la ecuación (5), se puede ver que se tiene una expresión igual a la del modelo de riesgo colectivo para L. Se puede escribir la f.g.m. de L como fue hecho para S (ecuación (29) del capítulo (4))

$$M_L(r) = M_N(\ln M_{L_1}(r)) \tag{7}$$

Donde M_{L_1} representa la f.g.m. de la función de densidad de probabilidad común de las L_i's. Si se conocen las funciones de densidad de probabilidad de L_1 y N, se puede calcular la función de L[8].

A continuación se asumirán dos resultados y se obtendrá de ellos la f.g.m. para L.

- El primero concierne a f_{L_1}, es decir, a la función de densidad de L_1.

Suponga que la reserva cae por abajo del nivel inicial, u.

Cuando esto sucede por primera ocasión, el monto por el cual ésta cae por debajo de u es L_1. Esto es provocado por la ocurrencia de una reclamación en ese momento. De aquí podemos inferir que la probabilidad de que la variable de pérdida L_1 vaya a tomar un valor entre y y $y + dy$ es proporcional a la probabilidad de que una reclamación individual vaya a ser más grande que y. En términos matemáticos lo anterior se puede expresar como:

$$\Pr(y \le L_1 \le y + dy) \propto [1 - F_X(y)]dy$$

[7] Newton L. Bowers, et. al., op.cit., define la máxima pérdida total como:

$$L = \max_{t \ge 0}[S(t) - ct]$$

Esto es, como el máximo exceso del total de reclamaciones sobre primas cobradas. Ya que $S(t) - ct = 0$ *para* $t = 0$, *se sigue que* $L \ge 0$.

[8] Newton Bowers, et al., op. cit., Cap. 13.

De aquí se puede inmediatamente ver que:

$f_{L_1}(y) = k\left[1 - F_X(y)\right]$

Como $f_{L_1}(y)$ representa la función de densidad de L_1 entonces debe integrar a 1. Así se obtiene el valor de la constante k.

$1 = \int_0^{\infty} f_{L_1}(y)dy$

$= \int_0^{\infty} k\left[1 - F_X(y)\right]dy = kp_1$

Por lo tanto, $k = \dfrac{1}{p_1}$

Donde:

p_1, representa el primer momento no central de la distribución del monto de reclamación, es decir, $E(X)$.

Sustituyendo k en la ecuación para $f_{L_1}(y)$

$$f_{L_1}(y) = \frac{1 - F_X(y)}{p_1} \tag{8}$$

Con esta función de densidad, se puede obtener la f.g.m. de L_1 la cual se calcula como sigue:

$M_{L_1}(t) = E\left[e^{ty}\right] = \int_0^{\infty} e^{ty} f_{L_1}(y)\,dy = \dfrac{1}{p_1}\int_0^{\infty} e^{ty}\left(1 - F_X(y)\right)dy$

Utilizando el método de integración por partes

$= \dfrac{1}{p_1}\left[\dfrac{e^{ty}}{t}\left[1 - F_X(y)\right]\Big|_0^{\infty} + \dfrac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{ty} f_X(y)dy\right]$

Valuando los límites de la integral

$= 0 - \dfrac{1}{p_1 t} + \dfrac{1}{p_1 t} M_X(t)$

Por lo que:

$$M_{L_1}(t) = \frac{M_X(t) - 1}{p_1 t} \tag{9}$$

Con esta expresión se obtiene una parte de la ecuación (7).

El siguiente paso es conocer cómo se distribuye N ó la variable aleatoria que denota el número de veces que la reserva cae por debajo del nivel reinicial[9]. Como ejemplo véase la Fig. 5.2, en la cual la reserva cae 4 veces por debajo del nivel reajustado.

Para obtener la función de N, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que vayan a existir exactamente n de tales ocurrencias antes de que suceda la ruina?

[9] "Al número N se le conoce como el número de nuevas alturas de la gráfica del número de reclamaciones (número de nuevos picos)", *cit. pos.* Newton L. Bowers, *et. al. op. cit.*.

La manera de plantear el problema nos lleva a decir que la v.a. N tiene una distribución geométrica, es decir:

$$\Pr(N = n) = q^n (1 - q)$$

Su f.g.m. está dada por (ecuación (56) del Capítulo 2)

$$M_N(r) = \frac{1 - q}{1 - qe^r}$$

Sustituyendo este resultado en ecuación (7) :

$$M_L(r) = \frac{1 - q}{1 - qM_{L_1}(r)} \qquad (10)$$

Lo que faltaría es encontrar q, la probabilidad de que la reserva caiga por debajo de su nivel inicial. El evento de que la reserva caiga por debajo de su nivel inicial es el mismo de que si la reserva inicial es cero, la reserva se vuelva negativa, esto es, dado que la reserva inicial es cero, la ruina ocurra. Esta probabilidad se expresa como:

$$q = \psi(0)$$

- En este punto se necesita el segundo resultado.

Supóngase que la reserva inicial es cero. Si el factor de seguridad relativo (θ) es también cero, la probabilidad de ruina es cierta[10]. Si las primas incrementan, la probabilidad de ruina disminuye proporcionalmente. Esto nos conduce a una segunda hipótesis. Para un proceso Poisson compuesto[11], la probabilidad de que la reserva caiga por abajo de su nivel inicial es:

$$q = \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}\ ^{(12)} \qquad (11)$$

[10] Esto significa que si el asegurador cuya reserva inicial es cero vende seguros y los cobra a primas netas, es decir, sin cobrar ningún factor de seguridad, su probabilidad de ruina es 1.

[11] Proceso Poisson Compuesto. Considérese la situación donde la prima se cobra a una tasa c (constante) y las reclamaciones ocurren aleatoriamente.

Sea $N(t)$, el número de reclamaciones hasta el tiempo t ($N(0) = 0$) y sea $S(t)$ el total de reclamaciones hasta el tiempo t. Entonces $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ donde las X_i's se asumen que son variables aleatorias idénticamente distribuidas. Las X_i's y $N(t)$ son variables aleatorias mutuamente independientes.

Esto es similar a lo que fue considerado en el último capítulo, pero N depende de t y esta dependencia tiene que ser especificada. Una manera de hacer esto es asumir que el número de reclamaciones en un intervalo de tiempo $(t, t + h)$, es dada por:

$$\Pr[N(t + h) - N(t) = n] = \frac{(\lambda h)^n}{n!}\exp(-\lambda h)$$

Bajo esta hipótesis, el proceso de la reserva es conocido como un proceso Poisson compuesto.

[12] Es remarcable que $\psi(0)$ depende únicamente del factor de seguridad relativo θ y no de la forma específica de la distribución del monto de reclamación.

Usando este resultado, se obtiene lo siguiente:

$$M_L(r) = \frac{1-q}{1-qM_{L_1}(r)}$$

Usando la ecuación (11)

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{1+\theta}\right)}{1-\left(\frac{1}{1+\theta}\right)M_{L_1}(r)} = \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{\frac{1+\theta-M_{L_1}(r)}{1+\theta}}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta-M_{L_1}(r)}$$

Usando la ecuación (9)

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta-\left(\frac{M_X(r)-1}{p_1 r}\right)} = \frac{r\theta\, p_1}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \qquad (12)$$

Lo cual nos da la f.g.m. de L

Con el fin de encontrar la función de distribución de L se tiene que encontrar la inversa de esta relación, es decir, se tiene que encontrar la función de probabilidad de L cuya función generadora de momentos este dada por ecuación (12).

Notar un punto importante.
$\Pr(L=0) = 1-\psi(0)$

Usando ecuación (11)

$$= 1-\frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta} \geq 0 \qquad (13)$$

Por lo anterior se puede ver que la función de distribución de L tiene un punto de masa de probabilidad en 0.

Esto significa que:

$$M_L(r) = E\left[e^{Lr}\right] = e^0 \Pr(L=0) + \int_0^\infty e^{rl} f_L(l)dl \qquad (14)$$

De ecuación (6) observamos que para $u > 0$,
$f_L(u) = F_L'(u) = -\psi'(u)$

Entonces usando ecuaciones (12) y (13) se obtiene:

$$\int_0^\infty \left[-\psi'(u)\right]e^{ru}du = M_L(r) - \frac{\theta}{1+\theta} \qquad (15)$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta}\,\frac{M_X(r)-1}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \qquad (16)$$

Si la distribución del monto de reclamación y el factor de seguridad relativo son conocidos, la parte derecha de la ecuación puede ser calculada. Entonces el problema se reduce a encontrar la función $-\psi'(u)$ la cual satisface la ecuación anterior. Esto puede hacerse de forma exacta si la distribución del monto de reclamación es exponencial[13], lo cual se ve a continuación.

Distribución del monto de reclamación exponencial.

Como se vió del capítulo 2, se dice que la v.a. X se distribuye como exponencial si tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$$

La esperanza y f.g.m. de X están dadas por:

$$E(X) = p_1 = \frac{1}{\beta}$$

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$$

Con el fin de encontrar la función de densidad de $\psi(u)$, se pueden sustituir estas características directamente en la ecuación (15) y evaluar su lado derecho. Sin embargo, primero se calculará M_{L_1} y después se usará el hecho de que L es la suma de las L_i's. De esta manera se encontrará una propiedad importante de f_{L_1}.

Por la ecuación (9), la f.g.m. de L_1 es igual a:

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) &= \frac{M_X(r) - 1}{r p_1} \\ &= \frac{\frac{\beta}{(\beta - r)} - 1}{\frac{r}{\beta}} \\ &= \frac{\beta}{\beta - r} \end{aligned} \qquad (17)$$

La ecuación anterior es idéntica a la f.g.m. de una distribución exponencial, ecuación (51) capítulo 2.
Por lo que si la distribución del monto de reclamación es exponencial, entonces $f_{L_1} = f_X$.

Sustituyendo la f.g.m. de la distribución exponencial y $p_1 = 1/\beta$ en ecuación (16), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[-\psi'(u)\right] e^{ru} du &= M_L(r) - \frac{\theta}{1+\theta} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \frac{\frac{\beta\theta}{1+\theta}}{\frac{\beta\theta}{1+\theta} - r} \end{aligned} \qquad (18)$$

[13] *Newton L. Bowers, et. al., op. cit.*

Si se hace la sustitución:

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta} \tag{19}$$

entonces el lado derecho de la ecuación (18) es $1/(1+\theta)$ veces la f.g.m. para la distribución exponencial con función de densidad de probabilidad Re^{-Ru}, donde el lado izquierdo de la ecuación es la f.g.m. para $-\psi'(u)$.

De esta manera, se tiene que:

$$-\psi'(u) = \frac{Re^{-Ru}}{1+\theta}$$

Integrando la ecuación anterior y usando el hecho de que $\psi(u) \to 0$ cuando $u \to \infty$ ó que $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, se encuentra que:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}$$

Donde: $R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$ (14) (20)

Ejemplo 5.2.1.

En un proceso Poisson Compuesto, la probabilidad de que la reserva vaya a caer por debajo de su nivel inicial es $\frac{2}{3}$. La distribución de los montos de reclamación es $f_X(x) = 2e^{-2x}$, $x > 0$.

Encontrar:

1. El coeficiente de ajuste,
2. La probabilidad de ruina
3. El valor esperado de la máxima pérdida total.
4. El valor esperado del número de la v.a. que denota el número de veces en que al reserva cae por debajo de su nivel inicial hasta que ocurre la ruina.

Solución.

La probabilidad de que la reserva vaya a caer debajo de su nivel inicial es:

$$\psi(0) = \frac{1}{(1+\theta)} = \frac{2}{3}$$

Por lo cual, $\theta = \frac{1}{2}$

Debido a que la distribución del monto de reclamación es exponencial con $\beta = 2$, entonces sus primeros dos momentos no centrales son dados por las siguientes expresiones:

(14) *Al número R, se le conoce como coeficiente de ajuste y determina un factor por el cual la probabilidad de ruina se puede acotar. Refiérase al ejemplo 5.2.2.*

$$p_1 = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = \frac{2}{\beta^2} = \frac{1}{2}$$

Utilizando estos datos se obtienen los siguientes resultados:

1. Por ecuación (19), $R = \dfrac{\beta\theta}{1+\theta} = \dfrac{2}{3}$
2. Haciendo uso de ecuación (20), $\psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{(1+\theta)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)e^{-\frac{2}{3}u}$
3. De la ecuación (5) y (9) se pueden derivar los valores esperados de L_1 y L

   Por ecuación (9),

   $$M_{L_1}(t) = \frac{1}{p_1 t}\left(M_X(t) - 1\right)$$
   $$= \frac{1}{p_1 t}\left(1 + p_1 t + \frac{p_2 t^2}{2} + \ldots - 1\right)$$
   $$= 1 + \frac{p_2}{2p_1}t + \ldots$$

   Usando el hecho de que el coeficiente de t es la esperanza, se encuentra que:

   $$E[L_1] = \frac{p_2}{2p_1}$$

   Ya que $L = \sum_{i=1}^{N} L_i$

   $$E[L] = E[E(L|N)]$$
   $$= E[NE(L_1)]$$
   $$= E(N)E(L_1)$$
   $$= E(N)\frac{p_2}{2p_1}$$

   Debido a que N es una v.a. geométrica con $q = \dfrac{1}{1+\theta}$,

   $$E(N) = \frac{1}{\theta}$$

   Por lo que $E(L)$ es igual a:

   $$E(L) = \frac{p_2}{2p_1\theta}$$

   Usando estos resultados con los valores dados en el problema se obtiene:

   $$E(L) = \frac{p_2}{(2p_1\theta)} = 1$$

4. Por el resultado anterior, $E(N) = \dfrac{1}{\theta} = 2$

Ejemplo 5.2.2.

Para un proceso Poisson compuesto, se tiene que:

$$M_L(r) - \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{3-1.2r}{6-5r+r^2}$$

Encontrar:

1. La probabilidad de ruina.
2. El coeficiente de ajuste.
3. El factor de seguridad relativo.

Solución.

1. De ecuación (15) se sabe que:

   $$\int_0^\infty \left[-\psi'(u)\right] e^{ru} du = \frac{3-1.2r}{(3-r)(2-r)}$$

   Lo que se tiene que hacer, es reexpresar esta ecuación de manera que pueda ser fácil invertirla. Primero se expresa el lado derecho en fracciones parciales,

   $$\frac{3-1.2r}{(3-r)(2-r)} = \frac{A}{(3-r)} + \frac{B}{(2-r)}$$

   Multiplicando por $(3-r)(2-r)$ ambos lados de la ecuación,

   $$3-1.2r = A(2-r) + B(3-r)$$

   Haciendo $r=2$ y $r=3$ sucesivamente, se puede ver que $A=0.6$ y $B=0.6$, es decir:

   $$\int_0^\infty \left[-\psi'(u)\right] e^{ru} du = \frac{0.6}{3-r} + \frac{0.6}{2-r}$$

   Por otro lado, se sabe que: $\int_0^\infty e^{-\beta u} e^{ru} du = \frac{1}{(\beta - r)}$, si $r < \beta$.

   Entonces por simple inspección, $-\psi'(u) = 0.6e^{-3u} + 0.6e^{-2u}$.

   Integrando con la condición de que $\psi(u) \to 0$ cuando $u \to \infty$, se obtiene el resultado deseado:

   $$\psi(u) = \frac{0.6}{3} e^{-3u} + \frac{0.6}{2} e^{-2u}$$

2. El coeficiente de ajuste es el número positivo más pequeño para el cual el denominador de la expresión para $M_L(u)$ se desvanece, es decir se vuelve cero. Ese número es la más pequeña de las raíces de la ecuación $6-5r+r^2$, lo cual es igual a 2.
3. De ecuación (11), se sabe que $\psi(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\theta}$. Por lo tanto, $\theta = 1$

En este punto se va a considerar un importante hecho matemático. Sea R la raíz más pequeña del denominador en el lado derecho de la ecuación (16), es decir, R es el número positivo más pequeño tal que:

$$1 + (1+\theta)p_1 R - M_X(R) = 0 \tag{21}$$

Existe una conexión importante entre esta cantidad denominada "el coeficiente de ajuste" y la probabilidad de ruina.

Se puede probar que la probabilidad de ruina es aproximadamente e^{-Ru}
La expresión exacta (aquí no se prueba, únicamente se menciona) se da en Bowers et al. y es

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left(e^{-RU(T)}\,T < \infty\right)} \qquad (22)$$

Donde:

$U(T)$ es la reserva al tiempo de ruina.

Al número R se le conoce como el coeficiente de ajuste.
Ya que la reserva al tiempo de la ruina tiene que ser negativa, se sigue de la ecuación anterior que:

$$\psi(u) < e^{-Ru} \qquad (23)$$

5.3. Modelo de Riesgo Colectivo sobre un periodo de tiempo discreto.

Desde el punto de vista del asegurador, la estabilidad a largo plazo del negocio es crucial. El horizonte de tiempo tiene que extenderse de un periodo (generalmente de un año) a una secuencia de los mismos.

Si la posición financiera (representada por $U(t)$) se asume que se revisa únicamente en los puntos de tiempo (equidistantes) $t = 1,2,3,\ldots,T$ [15], una versión discreta del modelo se obtiene.
El problema de la ruina es así transformado a estimar la probabilidad de que la reserva $U(t)$ (reserva al tiempo t) vaya a caer por debajo de una cierta barrera de ruina en cualquiera de los puntos del tiempo $t = 1,2,3,\ldots,T$.

En este modelo se divide el intervalo de tiempo en periodos discretos. Si W_i, representa la suma de las reclamaciones en el i-ésimo periodo, en vez de $S(t)$, se tiene que:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \qquad (24)$$

Asumiendo que las W_i's son v.a's independientes e idénticamente distribuidas, un análisis análogo al del modelo de tiempo continuo se puede hacer.

La expresión para la probabilidad de ruina es de la misma forma que la del modelo para un intervalo de tiempo continuo.

El coeficiente de ajuste para el proceso Poisson compuesto[16] es dado por:

$$1 + (1+\theta)p_1 r - M_X(r) = 0$$

[15] *Estos puntos de observación pueden representar el final de los años calendario en una compañía de seguros.*
[16] *Únicamente se estudia la expresión para el coeficiente de ajuste de un proceso Poisson compuesto y nos damos cuenta que es válida de forma más general.*

Si se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por λ y se observa que
$\lambda p_1(1+\theta) = E(S)(1+\theta) = c$, se obtiene:
$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$
$cr = \lambda(M_X(r)-1)$

Elevando la expresión anterior, se obtiene que:
$e^{cr} = e^{\lambda(M_X(r)-1)}$

El lado derecho de la ecuación es igual a la f.g.m. para el monto total de reclamaciones (ecuación (53) capítulo 4), la cual en el caso discreto es denotada por la v.a. W_i. Ya que las W_i's son idénticamente distribuidas con función de distribución común $f_W(w)$, entonces:

$$e^{cr} = M_W(r) \tag{25}$$

La raíz positiva $\tilde{R}$ de esta ecuación, es igual al coeficiente de ajuste. La probabilidad de ruina es dada por una expresión similar a la del caso continuo:

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E\left(e^{-\tilde{R}U(T)} \mid T < \infty\right)} \tag{26}$$

Por la desigualdad de Jensen, la ecuación (25) implica que $e^{cr} = E\left[e^{Wr}\right] > \exp[rE(W)]$, de tal forma que $c > E(W)$, requerimiento que se asume en el análisis.

Ejemplo 5.3.1.

Suponga que W_i asume únicamente valores 0 y 2, $\Pr(W=0) = \frac{3}{4}$ y $\Pr(W=2) = \frac{1}{4}$ y $c = 1$.

Encontrar:
1. $U(T)$, donde T representa el momento en que por primera ocasión la reserva se vuelve negativa.
2. El coeficiente de ajuste R.
3. La probabilidad de ruina cuando la reserva inicial es 1.

Solución.
1. Ya que las reclamaciones tienen que ser \$0 ó \$2, mientras que la prima al cobro es de \$1, la reserva, cuando se vuelve negativa por primera ocasión, tiene que ser necesariamente de –\$1, es decir, $U(T) = -1$.
2. Se necesita encontrar la raíz positiva más pequeña de la ecuación $e^{cr} = M_W(r)$.
   Debido a que $c = 1$, entonces $e^r = M_W(r)$.
   Por otro lado, si se calcula la función generadora de momentos de W,
   $M_W(r) = E(e^{rW}) = e^0\left(\frac{3}{4}\right) + e^{2r}\left(\frac{1}{4}\right)$

Combinando las dos ecuaciones anteriores:

$4e^r = 3 + e^{2r}$ ó $(e^r - 3)(e^r - 1) = 0$

La raíz positiva r más pequeña que satisface esta ecuación es $e^r = 3$ y por lo tanto $R = \ln 3$

3. Sustituyendo las respuestas de los puntos (1) y (2) anteriores en la ecuación (26) se obtiene:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-R\,U(T))]}$$

$$= \exp[-R(u+1)] = \exp(-2\ln 3) = \frac{1}{9}$$

A continuación se deriva una aproximación para $\tilde{R}$. Se sabe que para una v.a. X,

$$\frac{d}{dt}\log M_W(t)\Big|_{t=0} = E(W) = \mu$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log M_W(t)\Big|_{t=0} = Var(W) = \sigma^2$$

Usando la expansión en serie de potencias de Maclaurin, se obtiene:

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + \ldots \tag{27}$$

Si utilizamos únicamente los primeros dos términos de la ecuación (27) se tiene la siguiente aproximación:

$$\overline{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2} \tag{28}$$

Además si W tiene una distribución compuesta y el factor de seguridad relativo θ es dado por $c = (1+\theta)\mu$, entonces resulta que la ecuación (24), es igual a:

$$\overline{R} \cong \frac{2\theta\, p_1 E(N)}{(p_2 - p_1^2)E(N) + p_1^2 Var(N)} \tag{29}$$

Esta aproximación es muy útil cuando se requiere de un estimado para el coeficiente de ajuste.

5.4. Modelo autoregresivo para la reserva de riesgo.

En la última sección se asumió que las reclamaciones W_t's eran independientes. En la práctica esto no siempre se cumple. Con el fin de tomar en cuenta su dependencia mutua, se desarrollará un modelo autorregresivo. Se postula que las W_t's pueden ser escritas como una suma de dos componentes o términos, una parte dependiente y una parte independiente, es decir:

$$W_i = Y_i + aW_{i-1} \tag{30}$$

Donde:

a, es una constante, que mide la correlación y $|a| < 1$.

Además se asume que las Y_i's son independientes y que $W_o = w$ es dado.

Se puede reducir este problema a uno considerado en la última sección haciendo la siguiente modificación.

La reserva en el año n es la reserva inicial más las ganancias sobre los n periodos. Esto es dado por:

$$U_n = u + (c - W_1) + (c - W_2) + \dots + (c - W_n)$$

$$= u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i \tag{31}$$

En la última sección se asumió que las W_i's son mutuamente independientes. Ahora se asume que ellas están relacionadas por medio de la ecuación (30).

Sumando ambos lados de (ecuación (30)) desde $i = 1$ hasta n se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i + a\sum_{i=1}^{n} W_{i-1}$$

Separando el primer término de la segunda suma

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i + aW_o + a\sum_{i=1}^{n-1} W_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i + aw + a\sum_{i=1}^{n} W_i - aW_n$$

Despejando el término $\sum_{i=1}^{n} W_i$

$$(1-a)\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i + aw - aW_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{(1-a)}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \frac{a}{(1-a)}w - \frac{a}{(1-a)}W_n \tag{32}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (31) se tiene que:

$$U_n = u + nc - \left\{\frac{1}{(1-a)}\sum_{i=1}^{n} Y_i + \frac{a}{(1-a)}w - \frac{a}{(1-a)}W_n\right\} \tag{33}$$

Si se define:

$\hat{U}_n = U_n - \frac{a}{1-a}W_n$, y

$$\hat{u} = u - \frac{a}{1-a}w$$

Entonces la ecuación (33) se puede escribir como:

$$\hat{U}_n = \hat{u} + nc - \frac{1}{1-a}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (34)$$

Esta ecuación es de la misma forma que la ecuación (31) con W_i reemplazado por $\frac{Y_i}{1-a}$ y las v.a.'s Y_i son mutuamente independientes, lo cual resulta nuevamente en un modelo como el de la última sección.

Todo lo que se tiene que hacer es reemplazar W_i por $\frac{Y_i}{1-a}$ y u por $\hat{u}$ en los resultados de la sección anterior.

Así por el ejemplo, el coeficiente de ajuste $\hat{R}$ está dado por:

$$e^{c\hat{R}} = M_{\frac{Y}{1-a}}(\hat{R}) = E\left[\exp\left(\frac{Y}{1-a}\hat{R}\right)\right]^{(17)} \qquad (35)$$

Como antes, la desigualdad de Jensen implica que $c > E\left(\frac{Y}{1-a}\right)$ lo cual es un hecho que se asume en el análisis.

La probabilidad de ruina que ahora depende de w, se puede expresar como $\psi(u,w)$ y está dada por:

$$\psi(u,w) = \frac{e^{-\hat{R}\hat{u}}}{E\left[e^{-\hat{R}\hat{U}(T)} \middle| T < \infty\right]} \qquad (36)$$

Lo cual es análogo a la ecuación (26)[18]

5.5. Existencia del coeficiente de ajuste.

Existen situaciones en las cuales el coeficiente de ajuste no existe.
Considérese un proceso Poisson compuesto, en el cual el coeficiente de ajuste es la raíz positiva más pequeña de la ecuación:

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r) \qquad (37)$$

Denotemos el lado izquierdo de la ecuación por $g(r)$, es decir, $g(r) = 1 + (1+\theta)p_1 r$.

En este análisis se asume que el factor de seguridad relativo θ es positivo. Notar que $g(0) = M_X(0) = 1$ y que $g'(0) = (1+\theta)p_1 > p_1 = M_X'(0)$

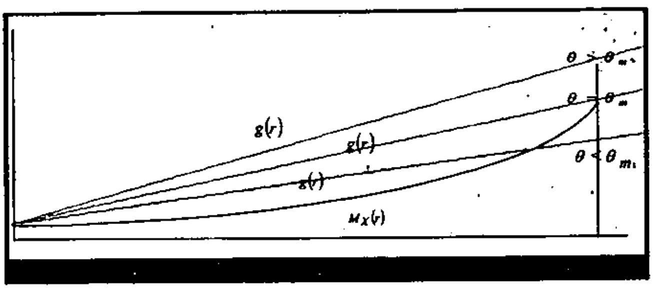
[17] *Lo cual es análogo a la fórmula de la ecuación (25)*
[18] *Notar que el modelo autorregresivo, generaliza el modelo previamente visto que corresponde al caso especial* $a = 0$.

De esta manera, cerca del origen, la gráfica de $M_X(r)$ crece más lentamente que la de $g(r)$. Puede presentarse que $M_X(r)$ este acotada en su dominio, en cuyo caso θ puede también ser grande y como resultado la pendiente de la gráfica $g(r)$ y $M_X(r)$ no se intersectan para cualquier r positiva. Ver fig. 5.3. Un ejemplo de esto se puede ver si la distribución del monto de reclamación es Gaussiana Inversa.

Como se vió en la ecuación (64) del capítulo 2 , la f.g.m. de la distribución Gaussiana inversa es dada por:

$$M_X(r)=\exp\left[\alpha\left(1-\sqrt{1-\frac{2r}{\beta}}\right)\right]$$

Fig. 5.3 Posibles Alternativas entre $g(r)$ y $M_X(r)$



El punto importante a notar es que la f.g.m. no existe si $r>\dfrac{\beta}{2}$, debido a que la expresión bajo la raíz cuadrada se vuelve negativa. Cuando $r=\dfrac{\beta}{2}$,

$$M_X\left(\frac{\beta}{2}\right)=e^{\alpha}$$

Como se puede observar en la fig. 5.3, si θ es tal que $g\left(\dfrac{\beta}{2}\right)>e^{\alpha}$, entonces no existe el coeficiente de ajuste. En otras palabras el más grande valor de θ para el cual el coeficiente de ajuste existe es dado por:

$$1+(1+\theta_m)p_1\left(\frac{\beta}{2}\right)=e^{\alpha}$$

Ya que para la distribución Gaussiana Inversa su esperanza es igual $p_1=E(X)=\alpha/\beta$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\theta_m=\frac{2(e^{\alpha}-1)}{\alpha}-1$$

Notar dos importantes puntos que se desprenden de la ecuación anterior:

1. θ_m no depende de β
2. Si α es un número positivo se cumple que $e^{\alpha} > 1+\alpha$, por lo tanto $\theta_m > 1$

Ejemplo 5.5.1.

Para un proceso Poisson Compuesto la distribución del monto de reclamación es Gaussiana Inversa con media 2 y varianza 6. Encontrar el máximo valor del factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe.

Solución.

Por los datos del problema, se sabe que la media y la varianza de la distribución Gaussiana Inversa, son dados por:

$E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta} = 2$ y $Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} = 6$.

De lo anterior se obtiene que $\alpha = \dfrac{2}{3}$, lo que implica que el máximo factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe es:

$$\theta_m = \frac{2\left(e^{2/3}-1\right)}{2/3} - 1 = 1.843$$

Ejemplo 5.5.2.

Dos compañías de seguros presentan procesos de reclamaciones Poisson Compuesto. Para la compañía A, el número esperado de reclamaciones es 1 y el monto de reclamación individual es Gaussiana inversa con media 1 y varianza 2. Para la compañía B el número esperado de reclamaciones es 2 y el monto de reclamación individual es Gaussiana inversa con media 2 y varianza 9.

Las dos compañías se fusionan. Después de la fusión, ¿cuál es el más grande valor que puede tomar el factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe?

Solución.

Denotemos por f_A y f_B las funciones de distribución de los montos de reclamación para la compañía A y la compañía B, respectivamente. Después de la fusión, el total de reclamaciones es Poisson con $\lambda = 3$ y distribución del monto de reclamación individual: $f(x) = \frac{1}{3} f_1(x) + \frac{2}{3} f_2(x)$.

Para la compañía A, $\dfrac{\alpha_A}{\beta_A} = 1$ y $\dfrac{\alpha_A}{\beta^2_A} = 2$. Por lo que $\beta_A = \dfrac{1}{2}$ y $\alpha_A = \dfrac{1}{2}$

Para la compañía B, $\dfrac{\alpha_B}{\beta_B} = 3$ y $\dfrac{\alpha_B}{\beta_B^2} = 9$. Por lo cual $\beta_B = \dfrac{1}{3}$ y $\alpha_B = 1$.

Para la nueva compañía $p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{2}{3}\right)3 = \left(\frac{7}{3}\right)$

El coeficiente de ajuste es la solución más pequeña a:

$$1 + (1+\theta_m)\left(\frac{7}{3}\right)r = \left(\frac{1}{3}\right)\exp\left[0.5\left(1 - \sqrt{1-4r}\right)\right] + \left(\frac{2}{3}\right)\exp\left[\left(1 - \sqrt{1-6r}\right)\right]$$

Notar que el valor más grande de r para el cual el lado derecho de la ecuación es definido es $\frac{1}{6}$. Tal que el valor más grande de θ para el cual una solución positiva existe para esta ecuación es aquella para la cual ambos lados son iguales, esto es:

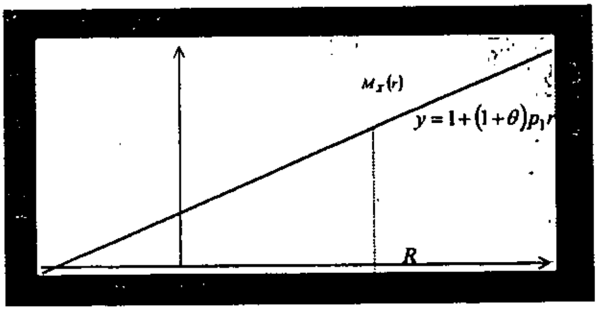
$$1 + (1+\theta_m)\left(\frac{7}{18}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\exp\left[0.5\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + \left(\frac{2}{3}\right)e$$

Despejando θ_m, de esta ecuación se obtiene:

$\theta_m = 2.147$

Para ver la aplicabilidad de este resultado, notar que $M_X(0) = 1$, $M'_X(0) = \mu$ y $M''_X(0) > 0$. Así las curvas $y = M_X(t)$ y $y = 1 + (1+\theta)\mu t$ se pueden intersectar. Ver fig. 5.4

Fig. 5.4. Cálculo del coeficiente de ajuste



En general, va a ser necesario calcular r numéricamente. Este es normalmente un problema directo que puede resolverse utilizando el método de Newton-Raphson.

El lado izquierdo de la ecuación (37) es una función lineal de r, el lado derecho es una función creciente. Además la segunda derivada del lado derecho es positiva por lo que su gráfica es concava hacia arriba. La hipótesis de que $c > \lambda p_1$, (equivalente a $\theta > 0$), significa que la pendiente $(1+\theta)p_1$ del lado izquierdo de ecuación (37) excede la pendiente, $(M'_X(0) = p_1)$, del lado derecho en $r = 0$.

La ecuación (37) tiene dos posibles soluciones. Aparte de la solución trivial $r = 0$, existe una solución positiva $r = R$, la cual se define como el coeficiente de ajuste.[19]
Conforme θ incrementa, la pendiente de la línea se incrementa, tal que el punto de intersección de la línea y la curva se mueve a la derecha y hacia arriba.

[19] *En general el coeficiente de ajuste es una función creciente del factor de seguridad relativo* θ

Ejercicios, Capítulo V

1. Un asegurador asume un riesgo cuya pérdida X tiene la siguiente función de distribución $f_X(100) = f_X(120) = 0.5$. La probabilidad de que la pérdida no vaya a ocurrir antes del tiempo t es $e^{-0.1t}$. El asegurador tiene una reserva inicial de \$80. Encontrar la prima mínima que vaya a asegurar que la probabilidad de ruina sea menor a 0.10.
   Resp. (28.27)

2. Para un cierto riesgo se puede presentar únicamente una reclamación determinando así una pérdida. La probabilidad de que dicha reclamación no ocurra antes de tiempo t es $\frac{1}{1+t}$. Si la reclamación ocurre, la distribución del monto de reclamaciones es $f_X(100) = 0.6$ y $f_X(200) = 0.4$. La reserva inicial es \$60 y la prima cobrada por unidad de tiempo es de \$20. Encontrar la probabilidad de ruina.
   Resp. $\left(\frac{3}{4}\right)$

3. Un asegurador acuerda pagar \$100 en el evento de que ocurra una pérdida, el cual es un evento cierto. La probabilidad de que la pérdida no vaya a ocurrir antes del tiempo t es e^{-t}. El asegurador tiene una reserva inicial de \$20 y cobra una prima de \$40 por unidad de tiempo. Determinar la probabilidad de ruina.
   Resp. $\left(1-e^{-2}\right)$

4. En un proceso de riesgo Poisson, la probabilidad de que el tiempo de ocurrencia entre reclamaciones (T) sea más grande que 0.2 es e^{-1}. La distribución del monto de reclamación individual es exponencial con media 2. La prima al cobro por unidad de tiempo es de \$15. Encontrar la probabilidad de ruina en términos de la reserva inicial, si la distribución para la v.a. de los tiempos de espera T es dada por:
   $\Pr(T > h) = e^{-\lambda h}$
   Donde: h, es el tiempo que transcurre entre dos reclamaciones.
   λ, denota el número esperado de reclamaciones por unidad de tiempo.
   Resp. $\left(\frac{2}{3}\right)e^{-\frac{u}{6}}$

5. Para el problema 4, encontrar la varianza de L_1
   Resp. (4)

6. En el problema 5, encontrar la varianza de la máxima pérdida total.
   Resp. (32)

7. Para un proceso PC, la distribución del monto de reclamación es $f_X(1) = f_X(2) = 0.50$. El coeficiente de ajuste es 0.6. Encontrar el factor de seguridad relativo.
Resp. (0.746)

8. Un proceso de reclamaciones PC tiene una distribución del monto de reclamaciones exponencial con media 0.50. Si la reserva inicial se incrementa en 1, la probabilidad de ruina se reduce a la mitad. Encontrar la probabilidad de que la reserva vaya a caer por debajo del nivel inicial.
Resp. (0.65)

9. En problema 8, encontrar la varianza de la v.a. que denota el número de veces que la reserva cae por debajo de su nivel inicial, en el proceso del total de reclamaciones.
Resp. (5.44)

10. En un proceso de reclamaciones PC la probabilidad de ruina es dada por la siguiente ecuación:
$(u) = (0.1)e^{-2u} + (0.02)e^{-1.5u} + (0.03)e^{-u}$
a) Encontrar el factor de seguridad relativo.
Resp. $\left(\frac{17}{3}\right)$
b) Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp. (1)

11. Un proceso de reclamaciones es PC con $\lambda = 19$, $f_X(1) = 0.25$ y $f_X(2) = 0.75$
a) Encontrar $E(L_1)$
Resp. (0.9286)
b) Encontrar $Var(L_1)$
Resp. (0.328)

12. Para un proceso PC, $\lambda = 2$. La distribución del monto de reclamación individual es una v.a. exponencial con media 2 y la prima cobrada por unidad de tiempo es 7. ¿Cuál es el valor más pequeño de la reserva inicial que va a garantizar que la probabilidad de ruina no vaya a ser mayor que 0.1?
Resp. (8.1338)

13. En un proceso PC el número esperado de reclamaciones es 2 y la distribución del monto de reclamación es exponencial con media ½. La prima al cobro por unidad de tiempo es 1.5. Encontrar el valor esperado de la máxima pérdida total.
Resp. (1)

14. G_i es la ganancia del asegurador entre los tiempos $i-1$ e i, para $i = 1,2,3,\ldots$. Las variables aleatorias G_i's son independientes e idénticamente distribuidas con $\Pr(G_i = -1) = 0.1$ y $\Pr(G_i = 1) = 0.9$. Determinar el coeficiente de ajuste.
Resp. $(\ln 9)$

15. Para un proceso de reclamaciones PC la ganancia del asegurador G sobre un periodo de tiempo, tiene distribución normal con media 10 y varianza 5. Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp. (4)

16. Si W es una v.a. normalmente distribuida, encontrar una expresión para R.
Resp. $\frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}$

17. Para un proceso de riesgo que se valúa sobre intervalos de tiempo discretos, la suma de las reclamaciones sobre el $i-$*ésimo* periodo W_i, tiene una distribución geométrica con valor esperado del número de reclamaciones 2 y distribución del monto de reclamación individual, $\Pr(X=1)=0.1$, $\Pr(X=0)=0.9$. Las W_i's son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas y la prima al cobro por unidad de tiempo es de 1. Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp. $(\ln 5)$

18. En un modelo autoregresivo, la prima que cobra el asegurador es 1, la constante que mide la correlación es 0.1 y además se asume que la v.a. Y tiene la siguiente distribución de probabilidad:
$\Pr(Y=0)=0.8$ y $\Pr(Y=1.8)=0.2$.
Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp. $(\hat{R}=\ln 4)$

19. En un modelo autoregresivo, la suma de las reclamaciones en el $i-$*ésimo* periodo (W_i) es dada por la siguiente ecuación:
$W_i = Y_i + 0.1W_{i-1}$
Donde: 0.1, es la constante de correlación.
Las v.a.´s Y_i's son mutuamente independientes y tienen distribución de probabilidad común que es una v.a. normal con media 9 y varianza 1.8.
La prima al cobro por unidad de tiempo es 18. Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp (7.2)

20. En un modelo autoregresivo, la suma de las reclamaciones en el $i-$*ésimo* periodo es dada por:
$W_i = Y_i + 0.25W_{i-1}$.
Las Y_i's son variables aleatorias mutuamente independientes e idénticamente distribuidas. Su distribución común es una v.a. geométrica compuesta con número esperado de reclamaciones $\frac{1}{2}$ y distribución del monto de reclamación:
$\Pr(X=1)=0.1$, $\Pr(X=0)=0.9$.
La prima al cobro por unidad de tiempo es $\frac{4}{3}$. Encontrar el coeficiente de ajuste.
Resp. $(0.75\ln 20)$

21. En un proceso de reclamaciones PC, la distribución del monto de reclamación individual es Gaussiana inversa. El máximo valor del factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe es 2. ¿Cuál de los siguientes incisos es verdadero?
    a) $\alpha > 0.8$
    b) $0.75 < \alpha < 0.8$
    c) $\alpha < 0.75$
    Resp. (inciso b)

22. En un proceso PC la distribución del monto de reclamación individual tiene una distribución Gaussiana Inversa tal que la media es igual a 1.2 veces la desviación estándar. ¿cuál es es el factor de seguridad relativo máximo de manera tal que el coeficiente de ajuste existe?
    Resp. (3.4731)

23. En un proceso PC la distribución del monto de reclamación tiene distribución Gaussiana Inversa. El más grande valor del factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe es: $e^2 - 2$. El valor del coeficiente de ajuste es 0.25. Encontrar la varianza para la distribución del monto de reclamación.
    Resp. (8)

24. Dos compañías de seguros A y B presentan procesos de reclamaciones PC. Ambas tienen número esperado de reclamaciones igual a 1. La distribución del monto de reclamación individual para la compañía A es Gaussiana inversa con media 2 y varianza 6. La distribución del monto de reclamación para la compañía B es exponencial con media 2. Las dos compañías se fusionan. Después de la fusión, ¿cuál es el más grande valor del factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe?
    Resp. (1.172)

25. En un proceso PC la distribución del monto de reclamación individual es Gaussiana Inversa. La f.g.m. $M_X(r)$, no existe para $r > 0.25$ y $M_X(0.25) = 4$. Encontrar el más grande valor del factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe.
    Resp (3.33)

CAPITULO VI

APLICACIONES

6.1. Aproximación del modelo de Riesgo Individual por medio de un Modelo de Riesgo Poisson Compuesto.

Todo proceso de reclamaciones puede ser expresado ya sea por medio del modelo de riesgo individual o el modelo de riesgo colectivo. Dichos modelos son construcciones alternas, diseñadas para capturar aspectos claves de los sistemas de seguros.
En el modelo de riesgo individual, la función de distribución para el costo total de reclamaciones, generalmente es difícil de calcular. Debido a esto se tiene la necesidad de encontrar la distribución del costo total de reclamaciones por medio de un modelo alterno que sea fácil de utilizar y que además aproxime a la distribución de S de manera exacta.

Por otro lado en el capítulo 4 (ver sección 4.6. y 4.7) se vió el modelo Poisson Compuesto, el cual se caracteriza por tener las propiedades de aditividad y facilidad analítica. En este capítulo se desarrollará un método para aproximar el modelo de riesgo individual por medio de un modelo Poisson Compuesto, con la condición de que la probabilidad de reclamación sea pequeña.

Para desarrollar el modelo se supondrá lo siguiente.

Considérese una póliza X la cual paga un monto de B en el caso de que ocurra una reclamación. El monto esperado de reclamación es denotado por $\mu = E(B)$ y la varianza del pago de la reclamación es denotada por $\sigma^2 = Var(B)$. Sea q la probabilidad de que suceda la reclamación., entonces:
X = IB

Donde:

X, representa la v.a. del costo total de reclamaciones.
I, es la variable aleatoria que indica la ocurrencia o no ocurrencia de la reclamación.
B, representa el monto de reclamación.

I toma el valor de 1, si la póliza produce una reclamación y el valor de 0 en caso contrario. B es el monto de la reclamación, dado que ésta ocurre. Bajo la hipótesis de que I y B, son mutuamente independientes, se desarrolla este modelo.

La f.g.m. de X estará dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{tIB}] = E[E(e^{tIB} \cdot I)] = \sum_I E(e^{tIB}\ I)\Pr(I = i)$$
$$= E[e^{tIB} \cdot I = 0]\Pr(I = 0) + E[e^{tIB} \cdot I = 1]\Pr(I = 1)$$
$$= E(1)\Pr(I = 0) + E(e^{tB})\Pr(I = 1)$$
$$= 1 - q + q\,E(e^{tB}) = 1 + q(E[e^{tB}] - 1)$$

Dado que $E\left(e^{tB}\right)=M_B(t)$
$$=1+q\left(M_B(t)-1\right) \tag{1}$$

Si q es un número muy pequeño, se puede hacer la siguiente aproximación:
$$M_X(t)=1+q\left(M_B(t)-1\right)\approx \exp\left[q\left(M_B(t)-1\right)\right]^{(1)} \tag{2}$$

Observando esta ecuación, el lado derecho representa la función generadora de momentos de una distribución Poisson Compuesta con parámetro $\lambda=q$ y distribución del monto de reclamación $f_B(x)$.

Para el modelo de riesgo individual, cada v.a. para el costo total de reclamaciones X_i puede aproximarse por medio de una v.a. Poisson Compuesta con parámetro $\lambda_i=q_i$ y función de densidad de probabilidad $f_{X_i}=f_{B_i}$.
Por los resultados del capítulo 4, ecuaciones (58) y (59), S es también un modelo Poisson Compuesto con:
$$\lambda=\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{3}$$
$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\lambda} f_{B_i}(x) \tag{4}$$

La interpretación de la ecuación (3) es que el número esperado de reclamaciones en el modelo Poisson Compuesto (λ) es el mismo que en el modelo de riesgo individual donde dicho número de reclamaciones es una v.a. Bernoulli.
Sumando las reclamaciones para cada póliza, se obtiene:
$$\sum E(I_i)=\sum q_i \;^{(2)}$$

Asimismo, la interpretación para $f_X(x)$ es la siguiente.
Si una reclamación ocurre, la probabilidad de que esta provenga de la póliza i es aproximadamente igual a:
$$\frac{q_i}{\left(q_1+q_2+\ldots+q_n\right)}$$

Al multiplicar y sumar cada una de estas probabilidades por $f_{B_i}(x)$, es decir $\sum\frac{q_i}{\lambda} f_{B_i}(x)$, se obtiene un promedio ponderado de la probabilidad de que si una reclamación ocurre, esta

(1) *Por la serie de Mc Laurin para* e^x, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$, *entonces* e^x *es aproximadamente igual a* $1+x+residuo\left(orden\ x^2\right)$. *Este resultado se aplica en la ecuación anterior con* $x=q\left[M_B(t)-1\right]$

(2) *Los parámetros* q_i *pueden ser diferentes.*

La esperanza y la varianza de cada una de las variables S_i, pueden determinarse de la misma manera como se hizo en el capitulo 4 por ecuaciones (55) y (56), obteniendo así:

$$E(S_i) = \lambda_i p_1 = \lambda_i \mu_i = q_i \mu_i$$

$$Var(S_i) = \lambda_i p_2 = \lambda_i E(B_i^2) = q_i E(B_i^2) = q_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2)$$

Por lo tanto, la esperanza y la varianza del método I para la v.a. S, son dadas por:

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(S_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i \tag{5}$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(S_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i(\sigma_i^2 + \mu_i^2) \tag{6}$$

Como se puede observar del capítulo 3 (ecuaciones (8) y (9)), la media y la varianza en el modelo individual, para cada X_i son:

$$E(X_i) = q_i \mu_i \quad \text{y} \quad Var(X_i) = q_i(\sigma_i^2 + p_i \mu_i^2)$$

Comparando esta esperanza y varianza con las aquí obtenidas para cada v.a. S_i, se concluye que:

1) $E(S_i) = E(X_i)$, la esperanza en la aproximación Poisson compuesta es la misma que la esperanza en el modelo individual.
2) $Var(S_i) \geq Var(X_i)$[3], es decir la varianza en la aproximación Poisson compuesta es mayor que la del modelo de riesgo individual.

A esta aproximación que iguala los valores esperados de ambos modelos se le conoce como método I ó primer método para aproximar el modelo de riesgo individual por medio del modelo de riesgo Poisson Compuesto. El hecho de que la varianza en este modelo sea más grande que en el modelo de riesgo individual, representa un rasgo conservador de la estimación, es decir, sobre-estima la varianza con el fin de tener la certeza de que los valores obtenidos en el cálculo, son correctos. Si las probabilidades q_j's son pequeñas, las dos varianzas son aproximadamente iguales.

Ejemplo 6.1.1.

Para la cartera de pólizas dada por la tabla 6.1, aproximar la distribución del total de reclamaciones por medio del método I y encontrar $E(S)$ y $Var(S)$.

Tabla 6.1

Número de pólizas	Probabilidad de reclamación	Monto del beneficio
100	0.02	1
200	0.01	1
100	0.02	2

[3] *Debido a que* $p_i \leq 1$

Solución.
Se obtienen los valores de λ y $f_X(x)$, utilizando las fórmulas (3) y (4), respectivamente.

$\lambda = 100(0.02) + 200(0.01) + 100(0.02) = 6$

$f_X(1) = \frac{[100(0.02) + 200(0.01)]}{\lambda} = \frac{2}{3}$

$f_X(2) = \frac{100(0.02)}{\lambda} = \frac{1}{3}$

Para la aproximación Poisson Compuesta, $E(X) = p_1 = \frac{4}{3}$, $E(X^2) = p_2 = 2$

Por lo tanto, $E(S_t) = \lambda p_1 = 8$ y $Var(S_t) = \lambda p_2 = 12$

Se puede verificar que la media y la varianza en el modelo individual son 8 y 11.78[4] respectivamente, confirmando lo anteriormente dicho: "la esperanza es la misma en los dos modelos y la varianza es mas grande en el modelo Poisson Compuesto".

Ejemplo 6.1.2.

En un modelo de riesgo individual, existen 100 pólizas cada una con probabilidad de que ocurra una reclamación igual a 0.02 y distribución del monto de reclamación individual uniforme, distribuida sobre $(1,3)$ y 200 pólizas con probabilidad de reclamación 0.005 y monto de reclamación distribuido exponencialmente con media 2. Esta cartera es aproximada por medio del método I. Encontrar la probabilidad de que el monto de reclamación para la v.a. PC vaya a encontrarse entre 2 y 4.

Solución.
Para determinar la probabilidad de que el monto de reclamaciones vaya a estar entre 2 y 4 , se tiene que encontrar la función de frecuencia $f_X(x)$ y después integrar sobre el intervalo $(2,4)$.

$\lambda = 100(0.02) + 200(0.005) = 2 + 1 = 3$

La función de frecuencia del monto de reclamación es:

$f_X(x) = \left(\frac{2}{3}\right)$ (distribución uniforme $(1,3)$) $+ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

$\Pr(2 < X \le 4) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \int_2^3 dx + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \int_2^4 e^{-\frac{x}{2}} dx$

$\Pr(2 < X \le 4) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(1 + e^{-1} - e^{-2}\right)$

[4] *Para el modelo de Riesgo Individual,* $E(X) = 100(0.02)(1) + 200(0.01)(1) + 100(0.02)(2) = 8$
$Var(X) = 100(0.02)(0.98)(1) + 200(0.01)(0.99)(1) + 100(0.02)(0.98)(4) = 11.78$

Para tener una mejor referencia de las diferencias entre el modelo de riesgo individual y la aproximación PC, se muestra la siguiente tabla, la cual resume los conceptos analizados en este apartado.

Tabla 6.2.

Concepto	Modelo de Riesgo Individual	Aproximación Poisson Compuesta
Media	$E(S)=\sum_j E(X_j)=\sum_j q_j\mu_j$	$E(S)=\lambda p_1=\lambda\sum_j \frac{q_j}{\lambda}\mu_j = \sum_j q_j\mu_j$
Varianza	$Var(S)=\sum_j Var(X_j) = \sum_j \left(q_j(1-q_j)\mu_j^2+q_j\sigma_j^2\right)$	$Var(S)=\lambda p_2 = \sum_j (q_j\mu_j^2+q_j\sigma_j^2)$

A continuación se discutirá otro tipo de aproximación del modelo PC al modelo de riesgo individual.

Este enfoque se basa en comparar la probabilidad de que no ocurran reclamaciones en ambos modelos.

Para la aproximación PC se tiene que la probabilidad de que no ocurran reclamaciones es igual:

$$\Pr(N=0)=e^{-\lambda} \tag{7}$$

Si λ, es definido como se hizo en la ecuación (3), es decir $\lambda=\sum_{i=1}^{n} q_i$, entonces

$$\Pr(N=0)=e^{-\lambda}=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} q_i\right\}=\exp[-(q_1+q_2+\ldots+q_n)]$$

$$=\exp(-q_1)\exp(-q_2)\ldots\exp(-q_n)=\prod_{i=1}^{n} e^{-q_i} \tag{8}$$

De la misma manera, la probabilidad de que no hayan reclamaciones en el modelo individual, esta dada por:

$$\Pr\left(\text{No existan reclamaciones}\right)=\Pr(N=0)=\Pr\left(\text{todas las } I_j=0\right)=$$

$$\Pr(I_1=0)\Pr(I_2=0)\ldots\Pr(I_n=0)=(1-q_1)(1-q_2)\ldots(1-q_n)=\prod_{j=1}^{n}(1-q_j) \tag{9}$$

Donde $(1-q_i)$, representa la probabilidad de que no ocurran reclamaciones para la póliza i. Ya que $e^{-q_i}\geq 1-q_i$ [5], la probabilidad de que no existan reclamaciones en el modelo PC es más grande que la del modelo de riesgo individual.

[5] *Ver serie de MacLaurin para e^x, ecuación (3) del Capítulo 2.*

Se puede hacer que ambos modelos tengan la misma probabilidad de que no ocurran reclamaciones. Comparando las ecuaciones (8) y (9) se ve que:

$$e^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{n}(1-q_i) \text{ ó } \lambda = \sum_{i=1}^{n} -\ln(1-q_i) \tag{10}$$

Denotemos a $-\ln(1-q_i)$ como q_i de tal manera que:

$$q_i = -\ln(1-q_i) \tag{11}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \tag{12}$$

La función de densidad de probabilidad se puede expresar como:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{q}_i}{\lambda} f_{X_i}(x) \tag{13}$$

A esta aproximación que iguala las probabilidades de que no ocurran reclamaciones se le conoce como método II ó segundo método para aproximar el modelo de riesgo individual por medio del modelo de riesgo Poisson Compuesto.
Lo único que se tiene que hacer en el método II, es reemplazar las q_i's, como se acaban de definir en (11), para finalmente utilizar el método I.

La esperanza $E(S_{II})$ y la varianza $Var(S_{II})$ del método II, son dadas por las siguientes ecuaciones:

$$E(S_{II}) = \lambda p_1 \tag{14}$$

$$Var(S_{II}) = \lambda p_2 \tag{15}$$

Ya que $q_i = -\ln(1-q_i) > q_i$ [6] se concluye que:

$$E(S) = E(S_I) < E(S_{II}) \tag{16}$$

Es decir, la esperanza del total de reclamaciones bajo la suposición del método II, es más grande que la esperanza del total de reclamaciones bajo el modelo de riesgo individual y la esperanza bajo el modelo PC del método I.

En el caso de la varianza se tiene que:

$$Var(S) \le Var(S_I) \le Var(S_{II}) \tag{17}$$

Lo cual significa que la varianza del total de reclamaciones bajo el método II es mayor a la varianza del total de reclamaciones bajo la suposición del modelo de riesgo individual.

Si todas las q_j's para el modelo de riesgo individual son pequeñas (lo cual puede ser el caso cuando se habla de probabilidades de muerte de una persona), los dos métodos producen resultados similares.

$$\bar{q}_j = \lambda_j = -\log(1-q_j) = q_j + \frac{1}{2}q_j^2 + \ldots \approx q_j$$

[6] *Ver ecuación (4), Capítulo 2*

Ejemplo 6.1.3.

Rehacer el problema 6.1.1, usando el método II.

Solución.
Cambiar todas las q_i's a $-\ln(1-q_i)$ como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 6.3.

q_i	$\ln(1-q_i)$
0.02	$\ln(0.98)$
0.01	$\ln(0.99)$
0.02	$\ln(0.98)$

Utilizar fórmula (10) para obtener λ y fórmula (13) para obtener $f_X(x)$.
De esta forma

$$\lambda = 100(-\ln 0.98) + 200(-\ln 0.99) + 100(-\ln 0.98) = 6.0506$$

$$f_X(1) = \frac{[100(-\ln 0.98) + 200(-\ln 0.99)]}{6.05} = 0.6661$$

$$f_X(2) = \frac{[100(-\ln 0.98)]}{6.05} = 0.3339$$

Calculando p_1 y p_2

$p_1 = 1.3339$; $p_2 = 2.0117$

Aplicando fórmulas (14) y (15).

$$E(S) = 6.0506(1.3339) = 8.07$$

$$Var(S) = 6.0506(2.0117) = 12.11$$

6.2. Reaseguro Stop Loss

Un asegurador puede decidir reasegurar una porción de los riesgos sobre los cuales es responsable. Existen diversas formas de reaseguro. Una de ellas es la llamada "Stop Loss", la cual consiste en que el asegurador va a pagar el monto total de pérdidas hasta un cierto límite denominado algunas veces "deducible".

El reaseguro Stop Loss es definido por:

$$I_d = \begin{cases} 0 & \text{si } S \le d \\ S-d & S > d \end{cases} \tag{18}$$

Donde:

d, representa el monto de deducible o límite.

S, representa el monto total de reclamaciones

En el caso especial de que $d = 0$ se tiene que $I_o = S$, es decir, se reasegura toda la cartera de pólizas por las que inicialmente el asegurador era responsable.

Si se tiene una v.a. continua, el valor esperado de I_d se encuentra dado por:

$$E(I_d) = \int_0^\infty I_d(x) f_S(x)dx \tag{19}$$

Usando la ecuación (18)

$$= \int_d^\infty (x-d)\frac{d}{dx}\left[-(1-F_S(x))\right] \tag{20}$$

Si utilizamos el método de integración por partes

$$= -(x-d)\left[1-F_S(x)\right]\Big|_d^\infty + \int_d^\infty \{1-F_S(x)\}dx$$

$$= \int_d^\infty (1-F_S(x))dx^{(7)} \tag{21}$$

Las diversas formas de escribir a la $E(I_d)$ (prima pura o neta de reaseguro) se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 6.4.

X **v.a. continua**	X **v.a. discreta**
(a) $E(I_d) = \int_d^\infty (x-d)f_S(x)dx$	(b) $E(I_d) = \sum_{x=d}^{\infty}(x-d)f_S(x)$
(c) $E(I_d) = E(S) - d + \int_0^d (d-x)f_S(x)dx$ Integral con rango finito, óptimo para métodos numéricos	(d) $E(I_d) = E(S) - d + \sum_{x=0}^{d-1}(d-x)f_S(x)$
(e) $E(I_d) = E(S) - \int_0^d \left[1-F_S(x)\right]dx$	(f) $E(I_d) = E(S) - \sum_{x=0}^{d-1}\left[1-F_S(x)\right]$
(g) $E(I_d) = \int_d^\infty \left[1-F_S(x)\right]dx$ Integración por partes	(h) $E(I_d) = \sum_{x=d}^{\infty}\left[1-F_S(x)\right]$

El objetivo de escribir las diversas formas del valor esperado de la v.a. I_d es, contar con diferentes fórmulas para obtener dicha esperanza, dependiendo de los elementos con los que se cuente, es decir, se puede tener la forma analítica de la función de distribución, o contar con la esperanza del monto total de reclamaciones, la integral sobre un cierto rango, etc.

(7) *En caso de v.a. discretas, en vez de tener integrales se tienen sumas.*

Por ejemplo, cuando se requiera realizar una integración numérica, si $E(S)$ es conocida, las ecuaciones (c) y (e) de la tabla anterior, son preferibles a las demás. Estas fórmulas son más fáciles de utilizar, ya que el rango de integración es finito.
Si se cuenta con la forma analítica de la distribución de S la expresión (a) y (b) pueden ser las más adecuada.

La esperanza de I_d, típicamente es una cuota inferior de la prima de Stop-Loss. La prima va a contener un factor que refleja la variabilidad del pago del reasegurador. Una medida de esta variabilidad es la varianza de I_d, $Var(I_d) = E(I_d^2) - E(I_d)^2$

6.2.1. Fórmula recursiva para la esperanza del reaseguro Stop Loss.

En particular, suponiendo que la v.a. S puede tomar únicamente valores enteros no negativos, si d es un número entero no negativo, de la ecuación (h) de la tabla 6.4 para el caso de una v.a. discreta, se obtiene la siguiente fórmula recursiva:

$$E(I_d) = \sum_{x=d}^{\infty}[1 - F_S(x)] = 1 - F_S(d) + \sum_{x=d+1}^{\infty}[1 - F_S(x)]$$
$$= 1 - F_S(d) + E(I_{d+1}) \qquad (22)$$

En el caso de que $d = 0$, se tiene:
$E(I_0) = E(S)$
Para $d = 1,2,\ldots$, la fórmula (22) es igual a:
$$E(I_{d+1}) = E(I_d) - [1 - F_S(d)] \text{ para } d = 0,1,2,\ldots \qquad (23)$$

Observar que $E(I_d)$ es una función decreciente, es decir, entre más grande sea el deducible menor es la prima.
Para calcular $E(I_d)$ mediante la fórmula (23) se debe conocer la función de distribución para el total de reclamaciones $F_S(x)$.

Ejemplo 6.2.1.

Para una v.a. Poisson Compuesta, $\lambda = 2$; $f_X(1) = f_X(2) = \frac{1}{2}$. Calcular $E(I_2)$.

Solución.
Primero se calcula la distribución del total de reclamaciones recursivamente, como se hizo en el capítulo 4 sección 4.5.1.
Con el fin de obtener $E(I_{d+1})$, es necesario calcular únicamente hasta $F_S(d)$ (ver ecuación (23)).

Haciendo $f_S(x) = e^{-2}g(x)$[8], entonces:
$g(0) = 1$[9],
$$g(x) = \frac{2}{x}\left\{\frac{1}{2}g(x-1) + \frac{2}{2}g(x-2)\right\}$$[10]
Tal que $g(1) = g(0) = 1$, $F_S(0) = e^{-2}$ y $F_S(1) = 2e^{-2}$.
Ya que $p_1 = \binom{1}{2}1 + \binom{1}{2}2 = \binom{3}{2}$, se obtiene lo siguiente:
$E(I_o) = E(S) = \lambda\, p_1 = 3,$
$E(I_1) = 3 - (1 - F_S(0)) = 2 + e^{-2}$
$E(I_2) = E(I_1) - [1 - F_S(1)] = 1 + 3e^{-2}$

Ejemplo 6.2.2.

Un contrato paga 80% de cualquier monto de reclamación en exceso de $10 pero no paga más de $40. Expresar los pagos en términos de contratos de reaseguro Stop Loss (I_d).

Solución.
Un contrato que paga 80% de cualquier reclamación en exceso de $10, es expresado como: $0.8\,I_{10}$. Este contrato pagará $0.8(S-10)$ si $S > 10$. Cuando $S = 60$ se alcanza el monto de $40.
Por lo cual $d = 10, d' = 60$ y el pago es $0.8(I_{10} - I_{60})$

Este ejemplo muestra la siguiente propiedad para I_d
Suponiendo que $d' > d$. Entonces
$$I_d - I_{d'} = \begin{cases} 0 & si \quad S \le d \\ S-d & si \quad d < S \le d' \\ d'-d & si \quad S > d' \end{cases}$$

6.3. Dividendos

Un asegurador provee cobertura para el total de reclamaciones S, generada por un grupo de empleados en una organización. El asegurador cobra una prima única G, con un factor sustancial, $G - E(S)$, para tener la seguridad de que las primas van a ser suficientes para cubrir el riesgo. Si la experiencia en las reclamaciones es favorable, una gran parte de este factor es regresado como dividendo al asegurado.

[8] *Ver ecuación (35) del capítulo 4.*
[9] *Ver ecuación (36) del capítulo 4.*
[10] *Ver ecuación (37) del capítulo 4.*

Un asegurador puede ofrecer un dividendo de la siguiente manera.
Si el total de las reclamaciones resulta ser menor a un k % de la prima total (denotada por "G"), entonces la diferencia es pagada como dividendo. Esto se expresa de la siguiente manera,

$$D = \begin{cases} kG - S & si \ S \leq kG \ ^{(11)} \\ 0 & S > kG \end{cases} \tag{24}$$

La primera de estas condiciones significa que la experiencia en las reclamaciones es favorable. La segunda lo contrario.

Comparando esta definición con la del reaseguro Stop Loss (ecuación (18)) se ve que:

$$\begin{aligned} \underbrace{S + D}_{\substack{\text{total recibido} \\ \text{por el asegurado}}} &= S + \begin{cases} kG - S & kG \geq S \\ 0 & kG < S \end{cases} \\ &= \begin{cases} kG & kG \geq S \\ S & kG < S \end{cases} = kG + \begin{cases} 0 & kG \geq S \\ S - kG & kG < S \end{cases} \\ &= \underbrace{\text{kG}}_{\text{monto fijo}} + \underbrace{\text{I}_{\text{kG}}}_{\text{beneficio de STOP LOSS}} \end{aligned} \tag{25}$$

La interpretación de la fórmula anterior es la siguiente. Al grupo asegurado es pagado al menos la cantidad de kG en cualquier caso. En el caso de que las reclamaciones excedan kG, se recibe un beneficio adicional $S - kG$.

Por su parte, el asegurador debe estimar a G de la siguiente manera:
pagos al asegurado hechos de kG y $(1-k)G$ es la prima que el asegurador recibe para pagar el beneficio de Stop Loss, I_{kG}

Otra forma de poner lo anterior es tomando valores esperados y despejando para $E(D)$, así se tiene que:

$$E(D) = kG - E(S) + E(I_{kG}) \tag{26}$$

De la fórmula (26) se puede observar que $E(D)$ puede obtenerse si calculamos $E(I_{kG})$, $E(S)$ y kG. kG y $E(S)$ generalmente son dados, mientras que para $E(I_{kG})$, se tiene un método recursivo para su cálculo.

Ejemplo 6.3.1.

Un asegurador carga una prima total de \$5 y va a pagar un dividendo igual a un medio del exceso, si es que hay, del 80% de la prima sobre reclamaciones. Los montos totales de reclamaciones pueden ser únicamente números enteros pares. Se conoce que $\Pr(S = 0) = 0.1$; $E(I_4) = 1$ y $E(I_1) = 3.1$. Encontrar el valor esperado del dividendo.

(11) *Donde k representa el porcentaje de la prima que debe exceder las reclamaciones.*

Solución.
$D = 0.5(4 - S)$ si $S \leq 4$ y 0 en otro caso.
Ya que S puede tomar únicamente valores enteros pares, si se puede encontrar $f_S(0)$ y $f_S(2)$, se puede obtener el resultado deseado.

Notar que $D = 0$ cuando $S = 4$. Conocemos $\Pr(S = 0) = f_S(0) = 0.1$. Se necesita encontrar $f_S(2)$. Para esto se hace uso del resto de la información, teniendo en mente que S puede tomar únicamente valores enteros pares.
$1 = E(I_4)$
Usando la fórmula recursiva para I_d ecuación (23)
$= E(I_3) - [1 - F_S(3)]$
Ya que $f_S(3) = 0$
$= E(I_3) - [1 - F_S(2)]$
$= E(I_2) - [1 - F_S(2)] - [1 - F_S(2)]$
$= E(I_2) - 2[1 - F_S(2)]$
$= E(I_1) - [1 - F_S(1)] - 2[1 - F_S(2)]$
Ya que $f_S(1) = 0$
$= E(I_1) - [1 - F_S(0)] - 2[1 - F_S(2)]$
$= 3.1 - (1 - 0.1) - 2[1 - F_S(2)]$

De lo anterior se sigue que $F_S(2) = 0.4$ y que $f_S(2) = 0.3$
Por lo tanto, $E(D) = \sum_S (0.5)(4 - s) f_S(s)$
$= 0.5(4 - 0) f_S(0) + 0.5(4 - 2) f_S(2) + 0.5(4 - 4) f_S(4) = 0.5(4)(0.1) + 5(4 - 2)(0.3) = 0.5$

6.4. Efecto del reaseguro sobre el factor de seguridad relativo y el coeficiente de ajuste.

El reaseguro es comprado por el asegurador con el fin de reducir el riesgo. Como se vió en el capítulo 5, una medida de riesgo en un proceso de reclamaciones es la probabilidad de ruina. Con cualquier plan de reaseguro y siempre y cuando el factor de seguridad relativo del asegurador sea igual al del reasegurador, $\theta = \xi$, la ganancia esperada del asegurador es disminuida. A pesar de este hecho, puede estar en el interés del asegurador comprar reaseguro. La razón es que el reaseguro tiende a incrementar el coeficiente de ajuste (R) y por lo tanto disminuir la probabilidad de ruina.

Sin embargo, si el factor de seguridad del reasegurador es mayor que aquel del asegurador, entonces existe un punto en el cual entre más grande tiende a ser el grado de reaseguro, se tiende a disminuir el nivel de seguridad.

A continuación se considera un ejemplo que ilustra el hecho de cómo el factor de seguridad relativo del asegurador es afectado por la compra de reaseguro y la forma en que el coeficiente de ajuste se incrementa.

Considérese un asegurador que es responsable de una pérdida S y cobra una prima con un factor de seguridad relativo "θ". El ingreso para el asegurador por la prima es de $E(S)(1+\theta)=c$.[12]

Suponga que el asegurador reasegura una porción $h(S)$ del riesgo y que el factor de seguridad relativo del reasegurador es ξ [13]. El costo por el reaseguro será de $E[h(S)](1+\xi)=c_h$ [14].
Este costo representa cuanto tiene que pagar el asegurador para que el reasegurador corra el riesgo. El ingreso neto para el asegurador después de la compra de reaseguro es $c-c_h$.
El monto esperado de reclamaciones por el cual el asegurador es responsable es:
$E[S-h(S)]$.

El factor de seguridad relativo para el asegurador después de la compra de reaseguro (θ') se obtiene de la siguiente ecuación:
$E[S-h(S)](1+\theta')=c-c_h$
Despejando θ' se tiene que:

$$\theta'=\frac{[c-E(S)]-(c_h-E[h(S)])}{E(S)-E[h(S)]}$$

Sustituyendo los valores de c y c_h, en la ecuación anterior finalmente se encuentra:

$$\theta'=\frac{\theta E(S)-\xi E[h(S)]}{E(S)-E[h(S)]} \tag{27}$$

Existen 3 tipos de reaseguro que bajo este contexto cobran importancia. El primero es el reaseguro Stop Loss, el cual va a pagar un monto de $I_d(s)$ sobre el total de reclamaciones. El segundo es llamado exceso de pérdida que va a pagar $I_d(x)$ sobre cada uno de los montos de reclamación individual[15]. El tercero es el reaseguro proporcional en el cual se va a pagar una fracción α de cada reclamación individual.

[12] *θ no incluye factor alguno para gastos..*
[13] *Debido al factor de seguridad relativo contenido en la prima de reaseguro, se reduce la ganancia esperada del asegurador. Por otro lado, un adecuado contrato de reaseguro tiende a incrementar el nivel de seguridad.*
[14] *En este trabajo, se supondrá que la prima de reaseguro, como es determinada por el reasegurador, ya contiene un margen para gastos, seguridad y utilidad.*
[15] *Notar que $I_d(S)$ se aplica sobre el monto total de reclamaciones mientras que $I_d(x)$ se hace sobre una base de reclamaciones individuales.*

En el caso especial de que el reaseguro sea proporcional, es decir $h(x) = \alpha x$, la ecuación (27) se reduce a:

$$\theta' = \frac{\theta E(S) - \xi\alpha E(S)}{E(S) - \alpha E(S)} = \frac{\theta - \xi\alpha}{1 - \alpha} \qquad (28)$$

De esta ecuación se pueden notar dos restricciones.

a) α no puede ser más grande que $\frac{\theta}{\xi}$.[16]

b) ξ debe ser más grande que θ de otra forma el asegurador tendría la intención de reasegurar todos sus riesgos obteniendo de ello 2 cosas:
   - Una utilidad o ganancia en cada uno de sus riesgos, debido a que ξ es menor que θ y por lo tanto para el asegurador es más barato colocar pólizas en reaseguro que vender sus propios seguros.
   - El reasegurador correría con todos los riesgos del asegurador, debido a que éste último los cedería todos.

Teniendo en cuenta estas restricciones, se concluye de la ecuación (28) que $\theta' \leq \theta$, confirmando así lo que se mencionó anteriormente "la compra del reaseguro disminuye el factor de seguridad relativo".

A primera vista pareciera que el nivel de seguridad ha disminuido, sin embargo no es así.

Una mejor medida para valuar el nivel de seguridad involucrada en una cartera de riesgos, es calcular el número de desviaciones estándar k por la cual la prima excede el total de reclamaciones esperadas. Matemáticamente se tiene lo siguiente:

$$k = \frac{G - E(S)}{\sigma_S} = \frac{\frac{E(Ganancia)}{E(reclamaciones)}}{\frac{\sigma_{reclamaciones}}{E(reclamaciones)}} = \frac{\theta}{C.V.(reclamaciones)} \qquad (29)$$

Donde: $C.V.(Y)$, representa el coeficiente de variación de la v.a. Y, definido como $\frac{\sigma_y}{\mu_y}$

Para una cartera de riesgos sin reaseguro se sabe que:

$$k = \frac{\theta}{\frac{\sigma_S}{E(S)}} = \gamma$$

Es decir, el factor de seguridad es γ veces una desviación estándar del total de reclamaciones.

De la misma forma para una cartera reasegurada, se tiene que:

$$k_{ret} = \frac{\theta_{ret}}{\frac{\sigma_{ret}}{E(S_{ret})}}$$

[16] *Si* $\alpha > \frac{\theta}{\xi}$ *el factor de seguridad relativo sería negativo.*

En la cartera de riesgos sin reaseguro, la prima esta k desviaciones estándar arriba de las reclamaciones esperadas, para la cartera reasegurada, la prima retenida es k_{ret} desviaciones arriba de las reclamaciones esperadas retenidas, siempre se cumple que $k_{ret} > k$. Por lo que el reaseguro incrementa el nivel de seguridad.

Ejemplo 6.4.1.

Para un proceso Poisson Compuesto con número esperado de reclamaciones igual a 1 y distribución del monto de reclamación individual exponencial con media 1, el factor de seguridad relativo del asegurador es θ. El asegurador compra un reaseguro de exceso de pérdida con deducible d. El factor de seguridad relativo del reasegurador es ξ. Encontrar el factor de seguridad relativo del asegurador después de la compra de reaseguro.

Solución.

La prima total antes de reaseguro es

$c = (1+\theta)\lambda p_1$

Ya que $\lambda = 1$ y $p_1 = 1$

$= (1+\theta)(1)(1)$

La esperanza para la porción de riesgo $h(S)$, es dada por:

$$E[h(S)] = E(I_d) = \int_d^{\infty} (x-d)e^{-x}dx = e^{-d}$$

De ecuación (27) se obtiene:

$$\theta' = \frac{\theta - \xi e^{-d}}{1-e^{-d}} \tag{30}$$

Coeficiente de ajuste después de reaseguro.

Si se supone un proceso PC, la ecuación del coeficiente de ajuste antes de reaseguro es:

$$1+(1+\theta)p_1 R = M_X(R) = E(e^{Rx}) \tag{31}$$

Multiplicando ambas partes de esta ecuación por λ y notando que $(1+\theta)\lambda p_1 = c$, se obtiene lo siguiente:

$$\lambda + cR = \lambda E(e^{Rx}). \tag{32}$$

Si el asegurador compra reaseguro sobre una base de reclamaciones individuales $0 \le h(x) \le x$, es decir si se paga cierto monto sobre cada reclamación, entonces el ingreso neto para el asegurador es $c - c_{h(x)}$. Asimismo, el monto por el cual el asegurador es responsable es dado por $x - h(x)$.

Si R' denota el coeficiente de ajuste después de reaseguro, entonces se puede ver que:

$$\lambda + (c - c_h)R' = \lambda E\left[e^{(R'[x-h(x)])}\right] \tag{33}$$

Ejemplo 6.4.2.

Para un proceso Poisson Compuesto, $\lambda = 1$ y la distribución del monto de reclamación individual es exponencial con media 1. El factor de seguridad relativo del asegurador es 0.50. Un reaseguro proporcional ($h(x) = \alpha x$) es comprado y el factor de seguridad relativo para el reasegurador es 0.8.

a) Encontrar el factor de seguridad relativo del asegurador después de la compra de reaseguro, cuando $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

b) Encontrar el coeficiente de ajuste antes de reaseguro.

c) Encontrar el coeficiente de ajuste después de reaseguro cuando (i) $\alpha = \dfrac{1}{3}$, (ii) $\alpha = \dfrac{1}{2}$, (iii) $\alpha = 0.6$

Solución.

$\lambda = 1$, $p_1 = 1$, $\theta = 0.5$. Por lo que $c = \lambda_1 p_1 (1+\theta) = 1.5$. Se sabe que $\xi = 0.8$

a) De ecuación (28), con $\alpha = \dfrac{1}{3}$, se obtiene $\theta' = \dfrac{0.5 - \dfrac{0.8}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} = 0.35$

b) Ya que el monto de distribución es exponencial con $\beta = 1$, el coeficiente de ajuste antes de reaseguro es $R = \dfrac{\beta\theta}{(1+\theta)} = \dfrac{1}{3}$

c) Debido a que $\xi = 0.8$, $c_h = 1.8(1)(1)\alpha$ y $f_X(x) = e^{-x}$

$$E\{\exp R'[X - h(X)]\} = E\left[e^{R'(1-\alpha)X}\right] = \int_0^\infty e^{R'(1-\alpha)x} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-[1-R'(1-\alpha)]x}\,dx = \frac{1}{1 - R'(1-\alpha)}$$

Notar que con el fin de que la integral exista, $R'(1-\alpha)$ debe de ser menor a 1. Asumiendo este caso y si se hace $c = 1.5$, $c_h = 1.8\alpha$ y $\lambda = 1$ en la ecuación (33), se obtiene:

$$1 + (1.5 - 1.8\alpha)R' = \frac{1}{1 - R'(1-\alpha)}$$

Despejando R', se encuentra que:

$$R' = \frac{0.5 - 0.8\alpha}{(1.5 - 1.8\alpha)(1-\alpha)} \tag{34}$$

(i) Cuando $\alpha = \frac{1}{3}$, $R' = \frac{7}{18}$, lo cual es más grande que el coeficiente de ajuste antes de reaseguro

(ii) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, $R' \doteq \frac{1}{3}$, que es igual al coeficiente de ajuste antes de reaseguro.

(iii) Cuando $\alpha = 0.6$, $R' = \frac{1}{8.4}$, que es mucho menor que el coeficiente de ajuste antes de reaseguro.

El ejemplo anterior muestra que comprando reaseguro, el asegurador puede incrementar el coeficiente de ajuste y por lo tanto disminuir la probabilidad de ruina. Entonces surge una pregunta. Para cierto riesgo reasegurado y para cierta prima de reaseguro, ¿qué tipo de reaseguro maximiza el coeficiente de ajuste? ó la pregunta equivalente, ¿qué tipo de reaseguro minimiza la probabilidad de ruina?

Un plan de reaseguro va a ajustar a R lo suficiente con el fin de que la probabilidad de ruina decrezca. Los ejemplos muestran que cuando $\theta = \xi$, es decir el asegurador y el reasegurador tienen el mismo factor de seguridad relativo, entre más grande sea el reaseguro, se producen valores más grandes de R y por lo tanto valores más pequeños de la probabilidad de ruina.

Sin embargo cuando $\xi > \theta$, a mayor grado de reaseguro, se tiende a incrementar R, hasta un cierto punto después del cual R empieza a decrecer. Escoger el grado de reaseguro es cuestión de la experiencia que tenga el asegurador. Se demuestra en el libro de "Actuarial Mathematics" de Newton Bowers, et. al., que el reaseguro de exceso de pérdida es el plan óptimo es decir, aquel que produce el más grande incremento en el coeficiente de ajuste bajo ciertas clases comparables de esquemas de reaseguro (aquellas con las mismas reclamaciones esperadas de reaseguro y con el mismo factor de seguridad relativo).

Ejercicios, Capítulo VI

1. A la cartera de riesgos del ejemplo 3.2.4 capítulo 3, un grupo de 100 pólizas con probabilidad de reclamación 0.03 y monto de reclamación 2 es añadido. Encontrar la distribución del monto de reclamación por medio de la aproximación PC bajo el método II.

   Resp. ($f_X(1) = f_X(3) = 0.222$, $f_X(2) = 0.556$)

2. Un modelo de riesgo individual tiene las siguientes características:

Número de Asegurados (n)	Probabilidad de Reclamación (q_i)	Función de distribución del monto de reclamaciones $F_X(x)$
100	$1-e^{-0.2}$	$x^2/2$ si $0 \le x < 1$; 1 si $x \ge 1$
200	$1-e^{-0.1}$	x^2 si $0 \le x < 1$; 1 si $x \ge 1$
100	$1-e^{-0.2}$	$1-e^{-x}$ si $x \ge 0$

   Esta cartera de riesgos es aproximada por un modelo PC que iguala la probabilidad de que no existan reclamaciones. Encontrar el valor esperado y la varianza de la distribución del monto de reclamación individual para el modelo PC aproximado.

   Resp. $\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{18}\right)$

3. Una cartera de vida está constituida por n pólizas independientes, cada una con probabilidad de reclamación $q < 1$. La distribución del total de reclamaciones es aproximada por una distribución PC.

   λ_1 es el parámetro de la distribución Poisson en la aproximación por medio del método I.

   λ_2 es el parámetro de la distribución Poisson en método II.

   Determinar $\lambda_2 - \lambda_1$.

   Resp. $\left(n\sum_{i=2}^{\infty} \frac{q_i}{i!}\right)$

4. La cartera de seguros de automóvil para una compañía de seguros consiste en 2 clases de riesgos. Para cada clase, la distribución del monto de reclamación es definida por la función de distribución:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & x_i < 0 \\ (x_i/\theta)^2 & 0 < x_i < L,\ \theta \geq L \\ 1 & x_i \geq L \end{cases}$$

Una distribución PC es escogida para aproximar la distribución del total de reclamaciones tal que el número esperado de reclamaciones sea igual en el modelo individual y en la aproximación Poisson Compuesta. Determinar la probabilidad de que el monto de reclamación individual vaya a ser menor que 18, para la distribución aproximada. Los datos de cada una de las dos clases, se muestran en la siguiente tabla.

Clase (i)	Número de riesgos en la clase (n)	Probabilidad de Reclamación (q_i)	θ	L
1	1,000	0.60	30	20
2	2,000	0.40	24	15

Resp. (0.7257)

5. Una distribución del total de reclamaciones toma únicamente valores enteros no negativos. El valor esperado del reaseguro Stop Loss es igual a:

$E(I_d) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^d$, para $d = 0,1,2,\ldots$

Determinar $f(2)$.

Resp. $\left(\frac{12}{125}\right)$

6. Una cierta póliza cubre los gastos médicos y dentales de un grupo de personas. Los gastos médicos y dentales se asumen ser independientes con distribución PC como se muestra a continuación:

Tipo de Gastos	Distribución del monto de reclamaciones	λ
Médicos	Uniforme sobre $(0,1000)$	2
Dentales	Uniforme sobre $(0,200)$	3

X representa la v.a. de una cierta reclamación

Determinar $E(I_{100})$.

Resp. (177)

7. Los primeros dos valores de la distribución del total de reclamaciones son los siguientes: $f(0) = 0.1$, $f(1) = 0.2$. Si $E(S) = 3$ y $Var(S) = 9.64$. Encontrar la varianza de I_2.

Resp. (8.08)

8. Para un proceso compuesto-geométrico, el número esperado de reclamaciones por unidad de tiempo es 2. La distribución del monto de reclamación es $p(1)=\frac{1}{4}$, $p(2)=\frac{1}{2}$ y $p(3)=\frac{1}{4}$. Encontrar $E(I_{22})$.
Resp. (2.624)

9. Un asegurador cobra una prima de $12. De esta prima el asegurador espera que $3 alcancen para cubrir gastos y utilidad. El asegurador desea pagar un dividendo del exceso, si es que existe, de una fracción k de la prima total sobre reclamaciones. Dado que:
(a) $I_7 = 1.6$
(b) $I_8 = 1.2$
(c) no existen reclamaciones entre 7 y 8
Encontrar el máximo valor para k.
Resp. $\left(\frac{23}{36}\right)$

10. La distribución del total de reclamaciones es Poisson compuesta con $\lambda = 2$, $p(1) = 0.4$ y $p(2) = 0.6$. Un asegurador cobra una prima de 4.5 y regresa un dividendo del exceso, si es que existe, de 2.7 sobre reclamaciones. Determinar el exceso de la prima sobre reclamaciones esperadas y dividendos. Es decir, obtener $E(G-S-D)$.
Resp. (0.607)

11. La distribución del total de reclamaciones es aproximada por una distribución normal con media 2 y varianza 1. El factor de seguridad relativo para el asegurador es 1. Un dividendo del exceso, si existe, del 80% de la prima sobre el total de reclamaciones es pagado (es decir, $0.8G-S$ si esta cantidad es positiva). Encontrar el valor esperado del dividendo.
Resp. (1.199)

12. Un asegurador cobra una prima total de 5 y paga un dividendo de la mitad del exceso, si existe, del 80% de la prima total sobre reclamaciones. Si la distribución del total de reclamaciones es tal que:
$f_S(0) = 0.1$
$f_S(x) = 0.5e^{-x}$ para $0 < x \leq 5$
$f_S(x) = f(x)$ para $x > 5$.
Determinar el valor esperado del dividendo.
Resp. $\left(0.95 + 0.25e^{-4}\right)$

13. Los valores que puede tomar la distribución del total de reclamaciones S, son números enteros positivos. Algunos valores de la distribución son dados a continuación:
$f(0)=0.8$, $f(1)=0.12$, $f(2)=0.05$, $f(3)=0.005$
Un dividendo del 80% del exceso de 2.5 sobre reclamaciones es pagado.
Encontrar la varianza del dividendo.
Resp. (0.26)

14. Un asegurador presenta un proceso del total de reclamaciones que es PC con parámetro $\lambda=1$ y distribución del monto de reclamación exponencial con media igual a 1. Sin la compra de reaseguro, el factor de seguridad relativo para el asegurador es 0.5. El asegurador compra un reaseguro proporcional $h(x)=\alpha x$, a un costo de dos veces el valor esperado de $h(x)$. Determinar el valor de α para el cual el coeficiente de ajuste después del reaseguro sea máximo.
Resp. (0.146)

15. Un proceso de reclamaciones PC, tiene parámetro $\lambda=2$ y distribución del monto de reclamaciones exponencial con media igual a 1. El factor de seguridad relativo para el asegurador es 0.5. El asegurador compra reaseguro proporcional $h(x)=\alpha x$ y el factor de seguridad relativo para el reasegurador es 0.8. Determinar el número "α" que vaya a maximizar el valor esperado de la máxima pérdida total para el asegurador.
Resp. $\left(\frac{1}{4}\right)$

16. Un asegurador tiene un proceso de reclamaciones PC con $\lambda=1$ y la distribución del monto de reclamación individual es exponencial con media 1. El factor de seguridad relativo para el asegurador es 0.5. El asegurador compra un reaseguro de exceso de pérdida el cual cuesta 1.8 veces la prima neta. El asegurador quiere incrementar el coeficiente de ajuste en 50% ¿Cuál es el deducible que debe de tomar el asegurador, con el fin de aumentar el coeficiente de ajuste?
Resp. (1.9362)

17. Un asegurador tiene un proceso PC en el cual la distribución del monto de reclamación individual es exponencial con media $1/\beta$. El asegurador compra un reaseguro de exceso de pérdida. El factor de seguridad relativo del reasegurador es 50% mayor que el factor de seguridad relativo del asegurador antes de reaseguro. Encontrar el monto de deducible abajo del cual el factor de seguridad relativo al asegurador se vuelve negativo.
Resp. $\left(\frac{1}{\beta}\right)\ln 1.5$

18. En un proceso PC, $\lambda=1$ y la distribución del monto de reclamación individual es exponencial con media 1. El factor de seguridad relativo para el asegurador es 1. El asegurador compra reaseguro proporcional para cubrir ¼ de todas las reclamaciones individuales. El factor de seguridad relativo para el reasegurador es 1.4.

(a) Encontrar el factor de seguridad relativo para el asegurador después de reaseguro.
Resp. (0.8667)
(b) Encontrar el coeficiente de ajuste del asegurador antes de reaseguro
Resp. (0.5)
(c) Encontrar el coeficiente de ajuste del asegurador después de reaseguro.
Resp. (0.619)

19. Para un grupo de pólizas idénticamente distribuidas e independientes, la distribución del costo total de reclamaciones es exponencial con media 1. Antes de reaseguro el factor de seguridad relativo es 0.5. El asegurador compra reaseguro de exceso de pérdida con un deducible que cubre $1 por cada reclamación. El factor de seguridad relativo para el reasegurador es 1. Calcular el factor de seguridad relativo para el asegurador después de reaseguro.
Resp. (0.21)

Soluciones a Ejercicios, Capítulo II

1. Se sabe que el n-ésimo momento no central de una v.a. continua X es dado por:
$E(X^n) = \int_{I_x} x^n f_X(x)dx$
Donde: I_x, representa la v.a. indicador ó v.a. que denota el rango de valores que puede tomar la v.a. X

Si se sustituye la función de densidad $f_X(x)$ en esta ecuación, se tiene:
$$E(X^n) = \int_{I_x} x^n\left(e^{-2x} + 1.5e^{-3x}\right)dx$$
$$= \int_0^\infty x^n e^{-2x}dx + 1.5\int_0^\infty x^n e^{-3x}dx$$
Utilizando el método de integración por sustitución, haciendo la sustitución $x = u/2$ en la primera integral y $x = u/3$ en la segunda,
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{u}{2}\right)^n e^{-2\left(\frac{u}{2}\right)}du + \frac{1.5}{3}\int_0^\infty \left(\frac{u}{3}\right)^n e^{-3\left(\frac{u}{3}\right)}du$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}du + \frac{1.5}{3^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}du = \left[\frac{1}{2^{n+1}} + 1.5\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right]\int_0^\infty u^n e^{-u}du$$
Dado que $\int_0^\infty u^n e^{-u}du = \Gamma(n) = n!$ (ecuación (19), capítulo 2)
$$= \left[2^{-n-1} + (1.5)3^{-n-1}\right]n!$$
Si $n = 1$, se obtiene la esperanza de X. $E(X) = \dfrac{5}{12}$

Si $n = 2$, se obtiene el segundo momento de X. $E(X^2) = \dfrac{13}{36}$

2. <u>Primer método para la resolución del problema.</u>
Existe un punto de masa de probabilidad en 1, lo cual puede verificarse integrando la función de densidad sobre sus posibles valores y observando que la integral da 1/3, por lo que para ser función de densidad de probabilidad le faltarían 2/3 de probabilidad, tal que:
$$E(X) = \int x f_X(x)dx + (1)\Pr(X = 1)$$
$$= \int_0^1 x^3 dx + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$
<u>Segundo método.</u>
$F_X(x) = \dfrac{x^3}{3}$ para $0 \le x < 1$ y $F_X(x) = 1$ para $x \ge 1$.
Si aplicamos la ecuación (18) del capítulo 2, se obtiene el mismo resultado.
$$E(X) = \int_0^\infty[1 - F_X(x)]dx = \int(1 - x^3\ 3)dx = \frac{11}{12}$$
Nota: El hecho de que $F_X(x)$ es discontinua en 1 no provoca diferencia en la integral.

3. Ya que existe un punto de masa de probabilidad en 1, el valor esperado de X se puede obtener de la misma manera que el ejercicio anterior. Utilizando el segundo método se obtiene:

$$E(X) = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - e^{-x}\right)dx\right]$$

$$= \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}$$

4. Primero se encuentra la función de distribución para X, la cual es dada por:

$$F_X(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta u} du = -e^{-\beta u}\Big|_0^x = 1 - e^{-\beta x}$$

Usando la ley de probabilidad total, se obtiene:

$$F_X(X = 2|B = \beta) = 1 - e^{-2\beta}$$

$$F_X(2) = \int_{I_B} F_X(2\,B = \beta) f_B(\beta) d\beta$$

$$= \int_1^a F_X(2\,B = \beta)\left(\frac{1}{a-1}\right)d\beta$$

$$= \frac{1}{a-1}\int_1^a \left(1 - e^{-2\beta}\right)d\beta$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\beta + \frac{1}{2}e^{-2\beta}\right]\Bigg|_1^a = \frac{1}{a-1}\left[a + \frac{1}{2}e^{-2a} - 1 - \frac{1}{2}e^{-2}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2(a-1)}\left(e^{-2} - e^{-2a}\right)$$

5. Ya que la media de la distribución Gaussiana Inversa es 2 y la varianza es 6, por ecuación (65) del capítulo 2 se obtienen: $\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$.

Notase que para dada $X = x$, Y es exponencial y $\Pr(Y \le y|X = x) = 1 - e^{-xy}$

La probabilidad de que Y vaya a tomar un valor entre $3/32$ y $1/2$ es:

$$\Pr(3/32 \le Y < 1/2) = \int_0^\infty \Pr\left[\frac{3}{32} \le y < \frac{1}{2}\,X = x\right] f_X(x)dx = \int_0^\infty \left(e^{-3/32x} - e^{-1/2x}\right) f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(3/32)x} f_X(x)dx - \int_0^\infty e^{-(1/2)x} f_X(x)dx$$

Obsérvese que cada uno de los términos en esta expresión, son iguales a la f.g.m. de la v.a. X valuados en diferentes valores de t, por lo cual se tiene:

$$= M_X(-3/32) - M_X(-1/2)$$

Debido a que X se distribuye como una v.a. Gaussiana inversa, su f.g.m. es dada por ecuación (64) del capítulo 2, por lo tanto la ecuación anterior es igual a:

$$= e^{-1/6} - e^{-2/3}$$

6. Si P es la v.a. que denota el pago, entonces P puede escribirse como:

$$P = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < d \\ x - d & \text{si } \quad x > d \end{cases}$$

Para determinar la varianza de P se calculan $E(P)$, $E\left(P^2\right)$ y después se utilizan para determinar $Var(P)$.

$E(P) = \int_d^{\infty}(x-d)f_X(x)dx$

$= c\int_d^{\infty}(x-d)e^{-cx}dx$

Utilizando integración por partes, con $u=(x-d)$ y $dv = e^{-cx}dx$

$= -e^{-cx}(x-d)\Big|_d^{\infty} + \int_d^{\infty} e^{-cx}dx = \dfrac{e^{-cd}}{c}$

$E(P^2) = c\int_d^{\infty}(x-d)^2 e^{-cx}dx$

Utilizando integración por partes con $u=(x-d)^2$ y $dv = e^{-cx}dx$

$= -(x-d)^2 e^{-cx}\Big|_d^{\infty} + 2\left[\int_d^{\infty}(x-d)e^{-cx}dx\right]$

Usando el resultado anterior para el segundo término de esta ecuación:

$= \dfrac{2e^{-cd}}{c^2}$

$Var(P) = E(P^2) - E^2(P)$

Por lo tanto:

$Var(P) = \dfrac{(2e^{-cd} - e^{-2cd})}{c^2}$

7. Los valores que la v.a. A puede tomar son: 0.8 o 1.2, por lo que $A > 0.5$. Así

$\Pr(X \le 0.5|A) = \dfrac{0.5}{A}$ y

$\Pr(X \le 0.5) = \Pr(X \le 0.5|A=0.8)\Pr(A=0.8) + \Pr(X \le 0.5|A=1.2)\Pr(A=1.2)$

$= (0.5/0.8)(0.3) + (0.5/1.2)(0.7) = \dfrac{23}{48}$

8. $\Pr(N=2|Q=q) = (1-q)q^2$

$f_Q(q) = 0.25U(q) + 0.75D(q)$

Donde: $U(q)$ es la distribución uniforme sobre $(0,1)$ y $D(q)$ es la distribución degenerada con $\Pr(Q=0.2)=1$.

Por lo tanto:

$\Pr(N=2) = \int \Pr(N=2|Q=q)f_Q(q) = 0.25\int_{f_U(q)}(1-q)q^2U(q)dq + 0.75(0.8)(0.2)^2$

$= 0.25\int_0^1(1-q)q^2dq + 0.75(0.8)(0.2)^2 \sim 0.045$

9. Si X es la v.a. que denota el pago, se tiene lo siguiente:

- Para el evento de muerte accidental:

  $\Pr(X=10) = q_2$

- Para el evento de muerte por cualquier otra causa:

  $\Pr(X=1) = q_1 - q_2$

Se sabe que la varianza de cualquier v.a. X es dada por:

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Calculando $E(X)$ y $E(X^2)$ se encuentra que:

$E(X^2) = \sum x^2 \Pr(X = x) = (1)^2 \Pr(X = 1) + (10)^2 \Pr(X = 10) = (1)^2 (q_1 - q_2) + (10)^2 (q_2) = 99q_2 + 1q_1$

$E(X) = \sum x \Pr(X = x) = (1)\Pr(X = 1) + (10)\Pr(X = 10)\ (1)(q_1 - q_2) + (10)(q_2) = 9q_2 + 1q_1$

Por lo tanto, $Var(X) = 99\,q_2 + q_1 - (9\,q_2 + q_1)^2$

10. Se sabe que la v.a. X dada cierta v.a. B, se distribuye como v.a. exponencial, por lo que: $E(X\ B) = B^{-1}$ y $Var(X\ B) = B^{-2}$

Por lo tanto $E(X)$ y $Var(X)$ son dados por:

- Para la $E(X)$, $E(X) = E[E(X\ B)] = E(B^{-1}) = \dfrac{1}{a-1}\int_1^a \dfrac{d\beta}{\beta} = \dfrac{1}{a-1}(\ln \beta)\Big|_1^a = \dfrac{(\ln a)}{(a-1)}$

-Para la $Var(X)$,

$E[Var(X\ B)] = E[B^{-2}] = \dfrac{1}{a-1}\int_1^a \beta^{-2} d\beta = \dfrac{1}{a-1}\left(-\beta^{-1}\right)\Big|_1^a = \dfrac{1}{a-1}\left(1 - \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{a}$

$Var[E(X\ B)] = Var[B^{-1}] = E[B^{-2}] - [E(B^{-1})]^2$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[Var(X\ B)] + Var[E(X\ B)] \\
&= E(B^{-2}) + E(B^{-2}) - [E(B^{-1})]^2 \\
&= 2E(B^{-2}) - [E(B^{-1})]^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{a}\right) - \left[\frac{\ln a}{a-1}\right]^2
\end{aligned}$$

$$Var(X) = \left(\frac{2}{a}\right) - \left[\frac{\ln a}{(a-1)}\right]^2$$

11. Ya que N es Poisson, $Var(N)$ es igual a $E(N)$, es decir $Var(N) = 5$. Para dada $N = n$, X se distribuye como una v.a. binomial con parámetros n y $1/3$, donde la media y varianza están dadas por:

$E[X|N] = n(1/3) = n/3$

$Var[X\ N] = n(1/3)(2/3) = (2/9)n$

Por lo tanto la $E(X)$ y $Var(X)$ se pueden calcular por medio de fórmulas (29) y (30), capítulo 2.

- $E(X) = E[E(X|N)] = E[N/3] = (1/3)E(N) = \dfrac{5}{3}$

- $$\begin{aligned}
Var(X) &= E[Var(X|N)] + Var[E(X|N)] = E(2/9\,N) + Var(N/3) \\
&= (2/9)E(N) + (1/9)Var(N) \\
&= \left(\frac{10}{9}\right) + \left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{15}{9}\right) = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

12. Se hace una tabla de convoluciones para obtener el valor de p

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(Y = x)$
0	1/2	p
1	1/4	$1-p$
2	1/8	0
3	1/16	0
Etc.	0	0

Por la fórmula (31) se sabe que:
$f_Z(3) = (1/8)(1-p) + (1/16)(p) = (1/8) - (1/16)p$
Por los datos del problema $f_Z(3)$ es igual a $5/48$, entonces $(1/8)-(1/16)p = 5/48$
Despejando p se encuentra el resultado deseado.
$p = 1/3$

13. Notar que $f_X(x)$ es uniforme sobre $(0,1)$ y por lo tanto es cero para $x > 1$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 1 \\ \int_1^y n t^{-n-1} dt = 1 - y^{-n} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Aplicando fórmula (37), capítulo 2:

$$F_S(3) = \int_0^1 f_X(t) F_Y(3-t)dt = \int_0^1 F_Y(3-t)dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = 3-t$, para resolver esta integral, la ecuación anterior es igual a:

$$= \int_2^3 F_Y(u)du = \int_2^3 \left(1-u^{-n}\right)du = 1 - \frac{1}{n-1}\left(2^{-n+1} - 3^{-n+1}\right) \text{ si } n>1 \text{ y } 1 - \ln\frac{3}{2}, \text{ si } n = 1$$

14. Ya que X es una v.a. uniforme sobre $(0,2)$, su función de distribución es dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ x/2 & si \quad 0 < x \le 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

De la misma forma la función de densidad de probabilidad para Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{si } 1 < y \le 2 \\ 1/4 & \text{si } 2 < y \le 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que encontrar $F_Z(3)$, la cual es dada por la ecuación (36) del capítulo 2.

$$F_Z(3) = \int_0^3 F_X(t) f_Y(3-t)dt$$

Notar que $f_Y(3-t) = 0$ si $3 - t \le 1$ ó $t \ge 2$.
Por lo que la expresión anterior se puede expresar como:

$$F_Z(3) = \int_0^2 F_X(t) f_Y(3-t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t f_Y(3-t)dt$$

Haciendo $3-t=u$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (3-u) f_Y(u)du$$

Sustituyendo el valor de $f_Y(y)$ en esta ecuación

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{3-u}{u^2}du + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(3-u)}{4}du$$

Resolviendo la integral

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}-\ln 2\right\} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16} - \frac{1}{2}\ln 2$$

15. Completando la tabla de convoluciones, se obtiene lo siguiente:

x	$f_{X_1}(x)$	$f_{X_2}(x)$	$f_{X_3}(x)$	$f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x)$	$f_S(x)$
0	0.4	0.25	p	$(0.4)(0.25)$	
1	0.4	0.25	0	$2(0.4)(0.25)$	
2	0.1	0.25	$1-p$	$2(0.4)(0.25)+(0.1)(0.25)$	
3	0.1	0.25	0	$2(0.4)(0.25)+2(0.1)(0.25)$	
4				$(0.4)(0.25)+2(0.1)(0.25)$	
5				$2(0.25)(0.1)$	
6				$(0.1)(0.25)$	$p(0.1)(0.25)+$ $(1-p)[(0.4)(0.25)+2(0.1)(0.25)]$

De tal forma que $p(0.1)(0.25)+(1-p)[(0.4)(0.25)+2(0.1)(0.25)]=0.1$. Resolviendo para p, se obtiene el valor de $p=0.4$

16. La forma más simple de hacer esto, es observando que la suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas, es una v.a. binomial. Por lo tanto,

$$\Pr(S=3) = \binom{6}{3}(1/3)^3(2/3)^3 = 0.219$$

Alternativamente, primero se calcula la f.g.m. de X y después se utiliza el teorema del binomio, (Ecuación (6), Capítulo 2), para expandir la f.g.m. de S

$$M_S(t) = [M_X(t)]^6 = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^t\right)^6$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^6\left(1+\frac{e^t}{2}\right)^6$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^6\left\{1+(6)\frac{1}{2}e^t + \frac{(6)(5)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{2t} + \frac{(6)(5)(4)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{3t} + \ldots + \left(\frac{e^t}{2}\right)^6\right\}$$

$\Pr(S=3)$ es el coeficiente de e^{3t}, el cual es igual a: $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{(6)(5)(4)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.219$

17. Usar la serie binomial, (Ecuación (5), Capítulo 2), para expandir $\ln M_X(t)$, donde $M_X(t)$ es la f.g.m. de una distribución Gaussiana inversa.

$$\ln M_X(t) = \alpha\left\{1-\left(1-\frac{2t}{\beta}\right)^{1/2}\right\}$$

$$= \alpha\left[1-\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{2t}{\beta}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{2t}{\beta}\right)^3+\ldots\right\}\right]$$

$$= \alpha\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{\beta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{2t}{\beta}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{2t}{\beta}\right)^3-\ldots\right]$$

$$= \alpha\left[\left(\frac{1}{\beta}\right)t+\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{t^2}{2!}+\left(\frac{3}{\beta^3}\right)\frac{t^3}{3!}-\ldots\right]$$

De aquí se puede observar de los coeficientes de t, $\frac{t^2}{2}$ y $\frac{t^3}{3!}$ que la media es igual a $\frac{\alpha}{\beta}$, la varianza es igual a $\frac{\alpha}{\beta^2}$ y que el TMC $= 3\frac{\alpha}{\beta^3}$

18. Usar el hecho de que la media y la varianza de la distribución Poisson, son iguales a λ.

$E(N|\Lambda) = \Lambda$

$Var(N|\Lambda) = \Lambda$

$E(N) = E[E(N|\Lambda)] = E(\Lambda)$

Debido a que Λ es una v.a. Gaussiana Inversa

$E(\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$

$Var(N) = E[Var(N|\Lambda)] + Var[E(N|\Lambda)]$

$= E(\Lambda) + Var(N)$

$= \alpha/\beta + \alpha/\beta^2$

19. Usar la f.g.m. de una v.a. Poisson. Sea $f_\Lambda(\lambda)$ la función de densidad de probabilidad del parámetro (Λ).

Entonces:

$M_N(t) \quad = E[e^{tN}]$

Usando la fórmula (29) del capítulo 2

$= E[E(e^{tN}|\Lambda)]$

Dado que N se distribuye como Poisson, entonces $E[e^{tN}|\Lambda=\lambda] = \exp[\lambda(e^t-1)]$

$= E[\exp\lambda(e^t-1)]$

Usando la definición de f.g.m., $M_X(u) = E[\exp(ux)]$, con $u = e^t - 1$ y $x = \lambda$, se ve que la ecuación anterior es igual a:

$= M_\Lambda(e^t-1)$

20. De ejercicio 18, la media y la varianza de N con distribución Poisson inversa Gaussian son $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta^2}$, respectivamente. Por lo que $\frac{\alpha}{\beta}=4$ y $\frac{\alpha}{\beta^2}=8$.

De las ecuaciones anteriores se encuentra que $\alpha = 2$ y $\beta = \frac{1}{2}$.

$\Pr(N=0|\Lambda)$, representa la probabilidad de que ocurran cero reclamaciones dada una cierta
v.a. $\Lambda=\lambda$, la cual se distribuye como una v.a. Gaussiana Inversa.

$\Pr(N=0|\Lambda) = \frac{\exp(-\Lambda)(\Lambda)^0}{0!}$
$= \exp(-\Lambda)$

Por lo tanto, $\Pr(N=0) = \int_0^\infty \Pr(N=0\,\Lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \exp(-\Lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = M_\Lambda(-1)$

Donde: $M_\Lambda(-1)$, representa la f.g.m. de una v.a. Gaussiana Inversa valuada en -1.

$M_\Lambda(-1) = \exp\left[2\left(1-\sqrt{1+4}\right)\right] = 0.0844$

21. El valor esperado y la varianza de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, son dados por:

$E(S) = E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = E(X_1 + \ldots + X_{100})$

Por independencia
$= E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_{100})$

Debido a que todas las v.a.'s tienen media μ
$= 100\mu$

Para el caso de la varianza, se tiene que:

$Var(S) = Var\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = Var(X_1+\ldots+X_{100})$

Por independencia
$= Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_{100})$

Ya que todas las v.a.'s tienen varianza σ^2,
$= 100\sigma^2$

22. Por el resultado del ejercicio 19,

$M_N(t) = M_\Lambda(e^t-1)$

Ya que Λ tiene una distribución Gamma con f.g.m.

$$M_\Lambda(t) = \left[\frac{\beta}{(\beta-t)}\right]^\alpha$$

$$\Rightarrow M_N(t) = \left\{\frac{\beta}{\beta-e^t+1}\right\}^\alpha$$

Dividiendo el numerador y el denominador por $\beta+1$ y posteriormente haciendo

$\frac{\beta}{(\beta+1)} = p$, $\frac{1}{(\beta+1)} = q$ y notando que $p+q=1$, se obtiene $M_N(t) = \left\{\frac{p}{1-qe^t}\right\}^{\alpha}$, la cual es la f.g.m. para una distribución binomial negativa. Observando esta ecuación N tiene distribución binomial negativa con $r=\alpha$ y $q = \frac{1}{(\beta+1)}$

23. Para dada $N=n$ se puede pensar en la distribución binomial como la suma de n pruebas de v.a.'s independientes de Bernoulli. $X = \sum_1^n I_i$

Entonces:

$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[E\left(e^{Xt}\middle|N\right)\right] = E\left[E\left(e^{Xt}\middle|N=n\right)\right] = E\left[E\left(e^{(I_1+I_2+\dots+I_n)t}\right)\right]$

Dado que I_i se distribuye de la misma manera, se puede poner a cada I_i como I, por lo que:

$= E\left[E\left(e^{(nI)t}\right)\right] = E\left[M_I(t)^N\right] = E[\exp(N\ln M_I(t))]$

$= M_N[\ln M_I(t)]$

Ya que N es una v.a. Poisson, su f.g.m. es dada por: (ver ecuación (49))

$M_N(t) = \exp\left[\lambda\left(e^t-1\right)\right]$

Usando este resultado en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$M_X(t) = M_N[\ln M_I(t)] = \exp[\lambda(M_I(t)-1)]$

Debido a que I se distribuye como una v.a. Bernoulli, su f.g.m. es dada por:

$M_I(t) = 1 + q\left(e^t-1\right)$

Por lo cual $M_X(t)$ es igual a:

$M_X(t) = \exp\left[\lambda\left(1-q+qe^t-1\right)\right] = \exp\left[\lambda q\left(e^t-1\right)\right]$

Se sabe por el enunciado del problema que:

$\lambda = 5$ y $q = \frac{1}{3}$

Por lo tanto, $M_X(t) = \exp\left[\frac{5}{3}\left(e^t-1\right)\right]$

24. Observar que en la solución al problema 23, $M_X(t)$ resulta ser la función generadora de momentos de una distribución Poisson con parámetro λq. Tal que si N es una v.a. Poisson y para cierta $N=n$, X es Binomial con parámetros n y q; entonces X es una v.a. Poisson con media λq. Si se expande $M_X(t)$ en series de potencias de e^t:

$$M_X(t) = \exp(-\lambda q)\exp\left[\lambda q e^t\right] = e^{-\lambda q}\left(1 + \lambda q e^t + \frac{\left(\lambda q e^t\right)^2}{2!} + \dots\right)$$

$\Pr(X=k)$ es el coeficiente de e^{tk}. Sustituyendo los valores de $\lambda=5$ y $q=1/3$, en la ecuación anterior, se tiene:

$$M_X(t) = e^{-\frac{5}{3}}\left(1 + \frac{5}{3}e^t + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}e^t\right)^2 + \dots\right)$$

Por lo tanto, $\Pr(X \le 2) = e^{-5/3}\left\{1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\} = \frac{73}{18}e^{-5/3}$

Soluciones a Ejercicios, Capítulo III

1. Se puede interpretar la cartera de 100 pólizas como otra equivalente que consiste en:
   - 98 pólizas individuales con probabilidad de reclamación 0.02 y monto de beneficio 6
   - 1 póliza individual con probabilidad de reclamación 0.02 y monto de reclamación 12.

   Teniendo en cuenta lo anterior,
   $E(S) = (98)(0.02)(6) + 1(0.02)(12) = 12$
   $Var(S) = 98(0.02)(0.98)(6^2) + 1(0.02)(0.98)(12^2) = 71.97$

2. Sea N la v.a. que denota el número de individuos en el grupo de alto riesgo (A) y $100 - N$ el número en el grupo de riesgo moderado o promedio (M).
   La esperanza y la varianza de la v.a. N, son:
   $E(N) = 100(0.25) = 25$
   $Var(N) = 100(0.25)(0.75) = 75/4$
   Sea μ la media de la distribución del monto de reclamación para un individuo en el grupo M, tal que la media de la distribución para un individuo del grupo A es 3μ. Ya que las distribuciones son exponenciales, la varianza de la reclamación para un individuo del grupo M es μ^2 y para uno del grupo A es $9\mu^2$.
   Entonces la esperanza y la varianza del costo total de reclamaciones S es igual a:
   $E(S|N = n) = N(3\mu) + (100 - N)\mu = \mu(100 + 2N)$
   $E(S) = E[E(S|N)] = E[\mu(100 + 2N)]$
   $= \mu(100 + 2E(N))$
   $= \mu(100 + 50) = \mu(150)$
   $Var(S|N) = N(9\mu^2) + (100 - N)\mu^2 = \mu^2(100 + 8N)$
   $Var(S) = E[Var(S|N)] + Var[E(S|N)]$
   $= E[\mu^2(100 + 8N)] + Var[\mu(100 + 2N)]$
   $= \mu^2[100 + 8E(N)] + \mu^2(4)Var(N)$
   $= 375\mu^2$
   Por lo tanto, la razón del valor esperado a la desviación estándar es:
   $E(S)/\sqrt{Var(S)} = 150\mu/\sqrt{375\mu^2} = 7.746$

3. Utilizando fórmula (13) de este capítulo, se tiene:
   $Var(S) \quad = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i b_i^2$
   $= 200(0.1)(0.9)(16) + 100(0.2)(0.8)(4) + 100(0.1)(0.9)(25) = 577$

4. Por ecuación (11) de este capítulo, se puede ver que al resultado anterior habría que sumarle el término relacionado a la varianza del monto de reclamaciones, es decir, $\sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2$. Por lo tanto,
   $Var(S) = 200(0.1)(16) + 100(0.2)(4) + 100(0.1)(25) + 577 = 1227$

5. Sea X la v.a. que denota al costo total de reclamaciones.
Entonces $X = IB$, donde I es una v.a. Bernoulli que denota si ocurre o no la hospitalización; con probabilidad de que ocurra la reclamación igual a 0.1.
Sea Y la v.a. que denota el gasto por concepto de honorarios médicos y sea Z aquella que denota los otros gastos, los cuales se distribuyen como v.a.'s uniformes.
Entonces B, la v.a. que denota del monto del pago de reclamaciones es igual a: $B = Y + 0.8Z$

$$E(B) = E(Y + 0.8Z) = E(Y) + 0.8E(Z) = \frac{6000}{2} + \frac{8}{10}\left(\frac{1000}{2}\right) = 3000 + 400 = 3400 = (3.4)10^3$$

$$Var(B) = Var(Y + 0.8Z) = Var(Y) + 0.64Var(Z) + 1.6Cov(Y,Z)$$

$$= \frac{(2000)^2}{12} + 0.64\frac{(200)^2}{12} + 1.6(100,000) = \frac{4'000,000}{12} + 0.64\left(\frac{40000}{12}\right) + 1.6(100,000) = 495466.66$$

$$= (0.495466)10^6$$

Por fórmula (30) Capítulo 2, se sabe que:

$$Var(X) = E[Var(X|I)] + Var[E(X|I)] = E[Var(IB|I)] + Var[E(IB|I)]$$

Si I es dado, entonces $E[IB|I] = IE(B)$ y $Var[IB|I] = I^2Var(B)$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación anterior se tiene:

$$Var(X) = E[IVar(B)] + Var[IE(B)] = Var(B)E(I) + E^2(B)Var(I)$$

Debido a que I es una v.a. Bernoulli, su esperanza y la varianza son dadas por:
$E(I) = q$, $Var(I) = qp$

Por lo tanto, $Var(X) = 0.1(0.495466)10^6 + 0.1(0.9)[(3.4)10^3]^2 = 1,089,946.6$

6. (Ver ejemplo 3.3.1) $\theta = 1.645\dfrac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$.
Sustituyendo los resultados obtenidos en el problema 2, se obtiene:

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{375\mu^2}}{150\mu} \geq 0.21236$$

7. De ecuación (23), el factor de seguridad relativo después de la compra de reaseguro, es igual a:

$$\theta' = \frac{\theta - \xi\alpha}{1-\alpha}$$

Ya que θ' debe ser al menos 0.15

$$\theta' = \frac{\theta - \xi\alpha}{1-\alpha} \geq 0.15$$

Sustituyendo los valores de θ y ξ en la ecuación anterior:

$$\theta' = \frac{0.2124 - 0.4\alpha}{1-\alpha} \geq 0.15$$

Despejando el valor de α, se obtiene que:
$\alpha \leq 0.2496$

8. En problema 3 se calculó la varianza de S, la cual es igual a 577. Lo único que falta por calcular es $E(S)$.

Por los datos dados en el problema 3,

$E(S) = 200(0.1)4 + 100(0.2)2 + 100(0.1)5 = 170$,

Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 3.3.1,

$$\theta = 1.282\,\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)} = 1.282\,\frac{\sqrt{577}}{170} = 0.1811$$

9.

Número de reclamaciones	Probabilidad de reclamación	Monto Retenido	Monto Cedido
200	0.1	3	1
100	0.2	2	-
100	0.1	3	2

a. $Var(S_{ret}) = 300(0.1)(0.9)9 + 100(0.2)(0.8)4 = 307$;

$E(S_{ret}) = 300(0.1)(3) + 100(0.2)2 = 130$

b. $c_h = E[h(S)](1+\xi) = [200(0.1)(1) + 100(0.1)(2)]\,(1+0.2) = 48$

c. El ingreso neto del asegurador es igual a lo que se va a cobrar menos lo que se va a gastar, es decir:

$c - c_h = 170(1.1811) - 48 = 152.787$

Pr(total de reclamaciones retenidas no exceda el ingreso neto del asegurador) =

$\Pr(S_{ret} < c - c_h)$

$$= \Pr\left(\frac{S_{ret} - E(S_{ret})}{\sqrt{Var(S_{ret})}} < \frac{c - c_h - E(S_{ret})}{\sqrt{Var(S_{ret})}}\right) = \Pr\left(Z < \frac{c - c_h - E(S_{ret})}{\sqrt{Var(S_{ret})}}\right)$$

$$= \Pr\left(Z \le \frac{152.787 - 130}{\sqrt{307}}\right) = \Phi\left(\frac{22.787}{\sqrt{307}}\right) = \Phi(1.3)$$

10. Utilizando el hecho de que $\theta' = \left(\frac{\theta - \xi\alpha}{1-\alpha}\right)$

Entonces, $0.18 = \frac{0.2 - 0.38\alpha}{1-\alpha}$

Por lo tanto despejando α, se tiene $\alpha = 0.1$

11.

a. $E(S) = 500(0.02)(2) + 1000(0.01)(4) + 500(0.01)3 = 75$,

$Var(S) = 500(0.02)(0.98)(4) + 1000(0.01)(0.99)(16) + 500(0.01)(0.99)(9) = 242.15$

La probabilidad de que el asegurador no vaya a caer en bancarrota es:

$\Pr(S \le 75(1+\theta) + 5) = \Pr\left(Z \le \frac{75(1+\theta)+5-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = \Pr\left(Z \le \frac{75\theta+5}{\sqrt{242.15}}\right) = 0.9$.

Tal que $\frac{(75\theta + 5)}{242.15} = 1.282$ y $\theta = 0.1993$

b.

i) Sea G la prima cobrada por un asegurador y G_{re} el costo de reaseguro. Se sabe que $G = E(S)(1+\theta)$ y $G_{re} = E[h(S)](1+\xi)$, entonces $G = 75(1.1993) = 89.9475$ y $G_{re} = 10(1.25) = 12.5$.

Tal que el ingreso neto para el asegurador es:

$G - G_{re} = 89.948 - 12.5 = 77.449$.

Sea S_{ret} la v.a. que denota las reclamaciones retenidas

$E(S_{ret}) = 500(0.02)(2) + 1000(0.01)(3) + 500(0.01)(3) = 65$

$Var(S_{ret}) = 500\,(0.02)(0.98)(4) + 1000(0.01)(0.99)(9) + 500(0.01)(0.99)(9) = 172.85$

ii) $(G - G_{re}) = E(S_{ret})(1+\theta')$

Entonces $77.449 = 65(1+\theta')$ y $\theta' = 0.1915$

iii) $\Pr(S_{ret} \le G - G_{re} + 5) = \Pr\left(\frac{S_{ret} - E(S_{ret})}{\sqrt{Var(S_{ret})}} \le \frac{(G - G_{re}) + 5 - E(S_{ret})}{\sqrt{Var(S_{ret})}}\right) = \Pr\left(Z \le \frac{82.449 - 65}{\sqrt{172.85}}\right) = \Phi(1.327)$

Soluciones a Ejercicios, Capítulo IV

1. Se asume que el número de reclamaciones N es dado y que el monto de reclamación es 2. La probabilidad de que el monto de reclamación sea 2 es igual a ¼.
Para dado N, N_2 es una v.a. binomial con parámetros N y ¼.
Así, $E(N_2|N) = N/4$ y $Var(N_2|N) = (N)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 3N/16$

Ya que N es una v.a. binomial negativa con parámetros $r = 5$ y $p = 2/3$
$E(N) = rq/p = 5/2$ y $Var(N) = rq/p^2 = 15/4$

Aplicando la fórmula (30) del capítulo 2

$$\begin{aligned} Var(N_2) &= E[Var(N_2|N)] + Var[E(N_2|N)] \\ &= E(3N/16) + Var(N/4) \\ &= \tfrac{3}{16}E(N) + \tfrac{1}{16}Var(N) \\ &= \left(\tfrac{3}{16}\right)\left(\tfrac{5}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{16}\right)\left(\tfrac{15}{4}\right) = \tfrac{45}{64} \end{aligned}$$

2. Observar que la distribución de N es una v.a. binomial negativa con $r = 3$ y $p = q = 1/2$.
De tal manera que:
$E(N) = 3$ y $Var(N) = 6$
Para la distribución de $p(x)$, la esperanza y la varianza son:
$E(X) = Var(X) = 1$
Aplicando las fórmulas (30) y (31) de este capítulo, se obtienen la media y varianza del total de reclamaciones.

$$\begin{aligned} E(S) &= E[E(S|N)] \\ &= E[NE(X)] = E(N)\ E(X) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= E[Var(S|N)] + Var[E(S|N)] \\ &= E[NVar(X)] + Var[NE(X)] \\ &= E(N)Var(X) + E^2(X)Var(N) \\ &= E(N) + Var(N) = 9 \end{aligned}$$

3. $E(e^S) = M_S(1)$
Por ecuación (29) de este capítulo:
$M_S(1) = M_N(\ln M_X(1))$.
Ya que X tiene distribución exponencial con media 0.5, $1/\beta = 0.5$ tal que $\beta = 2$ y la f.g.m es igual a $M_X(1) = \dfrac{\beta}{\beta - 1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$
La f.g.m. para la v.a. N es dada por ecuación (44) del capítulo 2:
$M_N(t) \quad = (1/3)(1 + e^t + e^{2t})$
Valuando para $t = \ln M_X(1) = \ln 2$, se tiene:

$$\begin{aligned} M_N(\ln 2) &= (1/3)(1 + e^{\ln 2} + e^{2\ln 2}) \\ &= (1/3)(1 + 2 + 4) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

4. Por las fórmulas (30) y (31) del capítulo 4, se tiene lo siguiente:
$E(S) = E(N)E(X) = \left(rq\ \ p\right)(2) = 8$
$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X) = \left(rq\ \ p\right)(4) + \left(rq/p^2\right)(4) = 64.$
Resolviendo estas dos ecuaciones, se encuentran los valores de p y r, tal que:
$p = 1/3$, $q = 2/3$ y $r = 2$.
Así la función de probabilidad para la v.a. N , es:
$$\Pr(N = n) = \binom{2+n-1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Por lo tanto,
$\Pr(N = 2) = 3(1/3)^2(2/3)^2 = 4/27.$

5. La esperanza y la varianza del número de reclamaciones son:
$E(N) = \alpha/\beta = 20,\ Var(N) = (\alpha/\beta) + (\alpha/\beta^2) = 20 + 200 = 220$
La esperanza y varianza para la distribución del monto de reclamaciones es igual a:
$E(X) = e^{1.5} = 4.482$, $Var(X) = (e-1)e^3 = 34.513$
Aplicando fórmula (31) del capítulo 4,
$Var(S) \quad = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X)$
$= (20)\,(34.513) + \ (220)\,(4.482)^2 = 5109.69$

6. Usando la fórmula (30) para la $E(S)$:
$E(S) = E(N)E(X) = 20\ (4.482)\ = 89.64.$
El mínimo factor de seguridad relativo necesario es calculado como sigue (ver ejemplo 3.3.1):
$\theta = 1.645\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)} = \ 1.645\sqrt{5110}/89.64 = 1.3118$

7. Usar las fórmulas de recursión, ecuaciones (35)-(37).
Sea $f_S(x) = e^{-0.6}g(x)$.
Entonces $g(0) = 1$ y para $x \geq 1$,
$$g(x) = \frac{0.6}{x}\left[0.2g(x-1) + 2(0.3)g(x-2) + 3(0.5)g(x-3)\right]$$
Tal que $g(1) = 0.12$, $g(2) = 0.3\left[0.2(0.12) + 0.6\right] = 0.1872.$
Entonces, $\Pr(S \leq 2) = e^{-0.6}\left[g(0) + g(1) + g(2)\right] = 0.7174$.
Por lo tanto, $\Pr(S \geq 3) = 1 - \Pr(S \leq 2) = 1\text{-}0.7174 = 0.2826$

8. Se resolverá este problema de dos maneras diferentes. Primero mediante la fórmula de recursión (ecuación (43) de este capítulo) y posteriormente mediante el uso de la f.g.m. de S .
a) $f_S(0) = p^r = (0.5)^{4.5}$
Ya que para un proceso Poisson Compuesto la relación de recursión es lineal, se puede hacer $f_S(x) = (0.5)^{4.5}g(x)$. Entonces $g(0) = 1$ y para $x \geq 1$,

$$g(x) = 0.5\left[\left(\frac{3.5}{x}+1\right)(0.7)g(x-1)+\left(\frac{7}{x}+1\right)(0.3)g(x-2)\right]$$

Haciendo $x = 1, 2$ y 3 sucesivamente en la ecuación anterior, se obtienen los valores de $g(1), g(2)$ y $g(3)$.

Así $g(1) = 1.575$, $g(2) = 2.191$ y $g(3) = 2.449$

Por lo tanto, $f_S(3) = 2.449(0.5)^{4.5} = 0.1082$

b) Como se mencionó anteriormente, se puede resolver el problema por medio de la f.g.m. Para una v.a. Binomial Negativa N, su f.g.m. es dada por ecuación (58) del Capítulo 2.

$$M_N(t) = \left\{\frac{p}{1-qe^t}\right\}^r$$

Por otro lado se sabe que (ecuación (44), Capítulo 2):

$$M_X(t) = 0.7e^t + 0.3e^{2t}$$

De esta forma, por ecuación (44) del Capítulo 4

$$M_S(t) = M_N(\ln M_X(t)) = \left\{\frac{p}{1-qM_X(t)}\right\}^r = 0.5^{4.5}\left[1-\left(0.35e^t+0.15e^{2t}\right)\right]^{-4.5}$$

Usando ecuación (5) de capítulo 2, se encuentra lo siguiente:

$$=(0.5)^{4.5}\left\{1+4.5\left(0.35e^t+0.15e^{2t}\right)+\frac{(4.5)(5.5)}{2!}\left(0.35e^t+0.15e^{2t}\right)^2+\frac{(4.5)(5.5)(6.5)}{3!}\left(0.35e^t+0.15e^{2t}\right)^3\right\}$$

Agrupando los coeficientes de e^{3t}, se obtiene el resultado deseado

$$f_S(3) = 0.5^{4.5}\left\{\frac{(4.5)(5.5)}{2!}(2)(0.35)(0.15)+\frac{(4.5)(5.5)(6.5)}{3!}(0.35)^3\right\} = 0.1082$$

9. De ecuaciones (40) y (41),

$\sum a_k = 1.25 + b + c = E(S) = 3$ y $\sum \frac{a_k}{k} = 1.25 + (b/2) + (c/3) = E(N) = 2.$

Resolviendo estas ecuaciones para b y c, se obtiene el resultado. ($b = 1$ y $c = 0.75$)

10. Ya que el número de reclamaciones es 2, para una v.a. geométrica $q = 2/3$ y $p = 1/3$. La v.a. binomial negativa es una distribución geométrica cuando tiene parámetro $r = 1$. La fórmula de recursión para el total de reclamaciones es (ver ecuación (43)):

$f(0) = 1/3$ y para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{3}\left[p(1)f(x-1)+p(2)f(x-2)\right]$$

Sea $p(1) = p$. Entonces $p(2) = 1-p$. Haciendo $x = 1$ y 2 sucesivamente en la fórmula de recursión anterior, se obtiene: $f(1) = 2/9\,p$, $f(2) = (4/27)p^2 - 2/9\,p + 2/9$

De esta manera:

$$F(2) = \sum_{i=0}^{2} f(i) = (4/27)p^2 + (5/9)$$

La probabilidad de que no existan reclamaciones dado que el total de reclamaciones es menor o igual a 2, es igual a:

$$\Pr(S=0|S\leq 2)=\frac{\Pr(S=0)}{\Pr(S\leq 2)}=\frac{1}{3F(2)}=\frac{9}{4p^2+15}$$

Por los datos del problema se sabe que esta probabilidad es igual a 12/23.
Despejando p se obtiene el resultado.
$p = 0.75$

11. Usando las fórmulas de recursión para cada uno de estos casos y encontrando la probabilidad de que el total de reclamaciones vaya a ser menor a 3, se tiene lo siguiente:

a) Si N es una v.a. Poisson, entonces:

$\lambda = 2$,

$f(0) = e^{-2}$ y para $x \geq 1$,

$$f(x)=\frac{2}{x}\left[(1\ 2)f(x-1)+(1\ 2)f(x-2)+(3\ 4)f(x-3)\right]$$

$f(1) = e^{-2}$

$f(2) = e^{-2}$

$F(2) = 3e^{-2} \sim 0.406$

b) Si N es una v.a. geométrica con $q/p=2$

Por lo tanto $p = 1/3$,

$f(0) = 1/3$, y para $x \geq 1$,

$$f(x)=\frac{2}{3}\left[(1\ 2)f(x-1)+(1\ 4)f(x-2)+(3/4)f(x-3)\right]$$

$f(1) = 1/9$

$f(2) = 5/54$

$F(2) = 29/54 \sim 0.537$

c) Para N binomial negativa con $r=2$,

$rq/p = 2, q = p = 1/2$,

$f(0) = (1/2)^2 = 1/4$, y para $x \geq 1$,

$$f(x)=(1/2)\left[\frac{x+1}{x}\left(\frac{1}{2}\right)f_s(x-1)+\frac{x+2}{x}\left(\frac{1}{4}\right)f_s(x-2)+\frac{x+3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)f_s(x-3)\right]$$

$f(1) = 1/8$

$f(2) = 7/64$

$F(2) = 31/64 \sim 0.4844$

d) Finalmente en el caso de que N es una v.a. binomial con parámetros $n=4$ y $p=q=1/2$.

$f(0) = (1/2)^4 = 1/16$, y para $x \geq 1$,

$$f(x)=\left[\binom{5-x}{x}(1\ 2)f(x-1)+\binom{10-x}{x}(1\ 4)f(x-2)+\binom{15-x}{x}(1\ 4)f(x-3)\right]$$

$f(1) = 1/8$

$f(2) = 5/32$

$F(2) = 11/32$

12. Usando ecuación (41), $\lambda = \sum\left(\frac{u_k}{k}\right) = (6/2)+(8/4) = 5$

13. Si $p(x) = \Pr(X = x)$ representa la distribución del monto de reclamación, entonces

$$E(S) = E(N)E(X) = \lambda E(X) = \lambda[p(1) + 2p(2) + 3p(3)] = 4$$
$$Var(S) = \lambda p_2 = \lambda E(X^2) = \lambda[p(1) + 4p(2) + 9p(3)] = 28/3,$$
$$TMC(S) = \lambda p_3 = \lambda E(X^3) = \lambda[p(1) + 8p(2) + 27p(3)] = 24$$

Resolviendo estas ecuaciones, se observa que: $\lambda p(1) = \lambda p(2) = \lambda p(3) = 2/3$
Sumando y observando que $p(1) + p(2) + p(3) = 1$, se obtiene que:
$\lambda = 2$ y $p(1) = p(2) = p(3) = 1/3$.

Finalmente usando las fórmulas de recursión, ecuaciones (33) y (34) se encuentra $\Pr(S = 3)$

$$f(0) = e^{-2}$$
$$f(x) = \frac{2}{x}\frac{1}{3}\left(f(x-1) + 2f(x-2) + 3f(x-3)\right)$$
$$f(1) = (2\ 3)e^{-2}$$
$$f(2) = (8\ 9)e^{-2}$$
$$f(3) = (94/81)e^{-2} \sim 0.157$$

14. Para resolver este problema, contamos en múltiplos de 6 de tal forma que $p(6) = f_X(1) = 0.4$ y $p(12) = f_X(2) = 0.6$.
Se necesita encontrar:
$\Pr(S \leq 3.3) = \Pr(S \leq 3)$.
Utilizando las fórmulas de recursión (33) y (34), $f(0) = e^{-2}$ y para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{x}[0.4f(x-1) + 1.2f(x-2)]$$

Por lo que se obtienen los siguientes valores:
$f(1) = 0.8e^{-2}$, $f(2) = 1.52e^{-2}$, $f(3) = 1.0453e^{-2}$
Por lo tanto $F(3) = 0.5907$

15. $Var(S/G) = (1/G^2)Var(S)$.
Para la distribución del monto de reclamaciones $p_1 = 5$, $p_2 = 100/3$
Por lo que:
$Var(S/G) = \frac{1}{G^2}Var(S) = \frac{1}{[1\ 2E(S)]^2}Var(S)$
Aplicando ecuación (56)
$= \frac{1}{[1\ 2E(X)E(N)]^2}[\lambda p_2] = \frac{1}{[1\ 2(5)(5)]^2}\left[5\left(\frac{100}{3}\right)\right] = [(1.2)(5)(5)]^{-2}(5)\left(\frac{100}{3}\right) = 0.1851$

16. Denotar las dos distribuciones PC's por S_A (adultos) y S_N (niños).
El ingreso por clases se va a contar en múltiplos de 25 es decir, el tiempo de clase en múltiplos de media hora.

Para un adulto, $\lambda_A = 2$ con distribución del monto de reclamación:
$p_A(1) = 0.25$, $p_A(2) = 0.75$
Para los niños se tiene $\lambda_N = 1$ y distribución del monto de reclamaciones igual a:
$p_N(1) = 1$, $p_N(2) = 0$.
Con el propósito de obtener la suma $S = S_A + S_N$, se utilizan las ecuaciones (58) y (59), las cuales se muestran a continuación:
$\lambda = \lambda_A + \lambda_N = 3$
$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) f_{X_i}(x)$
Usando las dos ecuaciones anteriores se encuentran los siguientes resultados:
$p(1) = (2/3)0.25 + (1/3)1 = 1/2$; $p(2) = (2/3)(0.75) = 1/2$
Se tiene que encontrar $\Pr(S \geq 3) = 1 - F_S(2)$.
Usando las fórmulas de recursión ecuaciones (35) a (37):
$f_S(x) = e^{-3} g(x)$, con $g(0) = 1$ y para $x \geq 1$, $g(x) = \frac{3}{x}[0.5g(x-1) + g(x-2)]$
Haciendo $x = 1$ y $x = 2$ sucesivamente en la ecuación de recursión anterior:
$g(1) = \frac{3}{2} = 1.5$; $g(2) = 1.5(0.75 + 1) = 2.625$
Sumando $g(i)$ de $i = 0$ hasta 2, se obtiene $F_S(2)$:
$F_S(2) = (1 + 1.5 + 2.625)e^{-3} = 0.255158$
Por lo tanto, $\Pr(S \geq 3) = 1 - F_S(2) = 0.7448$

17. S es una v.a. Poisson con parámetro $\lambda = 2$ y distribución del monto de reclamación: $p(1) = (1)(1/2) + (1/2)(1/2) = 3/4$, $p(2) = 1/4$.
Para encontrar $P^{*4}(6)$ se puede utilizar el método de convoluciones o alternativamente, usar la función generadora de momentos. Si se opta por la segunda opción:
$M_X(t) = (3/4)e^t + (1/4)e^{2t} = (3/4)e^t\left(1 + \frac{e^t}{3}\right)$
$P^{*4}(k)$ es el coeficiente de e^{kt} en $[M_X(t)]^4$.
Debido a que se quiere obtener $P^{*4}(6)$, se necesita calcular únicamente hasta e^{6t} en la expansión en serie de potencias de la f.g.m. de X.
$[M_X(t)]^4 = (3/4)^4 e^{4t}(1 + e^t/3)^4$
(usando el teorema del binomio, ecuación (6) del capítulo 2)
$$= (3/4)^4 e^{4t}\left[1 + 4(e^t/3) + 6(e^t/3)^2 + \ldots\right]$$
$$= (3/4)^4\left[e^{4t} + (4/3)e^{5t} + (2/3)e^{6t} + \ldots\right]$$
$P^{*4}(6)$ es la suma de todos los coeficientes hasta e^{6t}.
Por lo tanto, se tiene que:
$P^{*4}(6) = (3/4)^4[1 + (4/3) + (2/3)] = 0.9492$

18. El segundo momento no central de la distribución uniforme es $p_2^{(1)} = E(X^2) = 4/3$

Por su parte, para la distribución Gaussiana inversa esto es igual a:

$p_2^{(2)} = E(X^2) = \alpha/\beta^2 + (\alpha/\beta)^2 = 8$.

Por lo tanto, $Var(S) = \lambda_1 p_2^{(1)} + \lambda_2 p_2^{(2)} = 2(4/3) + 8 = 32/3$.

19. Para $S = S_1 + S_2$, $\lambda = 3$ y la distribución del monto de reclamación es:

$f_X(x) = (2/3)f_1(x) + (1/3)f_2(x)$

Por lo tanto:

$$\Pr(X \le 2) = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx\right) + \frac{1}{3}\left(\int_1^2 \frac{1}{4} dx\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left[2\left(1 - e^{-1}\right)\right] + \frac{1}{3}\frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{3}\left(1 - e^{-1}\right) + \frac{1}{12} \sim 0.9261$$

20. Para S, $\lambda = 5$. La probabilidad de que $X > 1$ dada una cierta $M = m$ es:

$\Pr(X > 1 \mid M = m) = (2/5)e^{-M} + (3/5)e^{-2M}$.

Aplicando la ley de probabilidad total, se tiene lo siguiente:

$$\Pr(X > 1) = \int_0^\infty \Pr(X > 1 \mid M) f_M(m)dm = \int_0^\infty \left[(2/5)e^{-m} + (3/5)e^{-2m}\right] f_M(m)dm$$

$$= (2/5)\int_0^\infty e^{-m} f_M(m)dm + (3/5)\int_0^\infty e^{-2m} f_M(m)dm$$

$$= (2/5)M_M(-1) + (3/5)M_M(-2)$$

Debido a que M es una v.a. Gaussiana inversa, entonces $M_M(t)$ es dada por ecuación (64) del Capítulo 2, con $\alpha = 1$ y $\beta = 1/2$

$$= (2/5)\exp\left[1 - \sqrt{5}\right] + 3/5\exp(-2) \sim 0.197$$

21. Es conveniente en este tipo de problema que se escojan las unidades con las cuales se va a trabajar. En este caso se utilizarán "horas".

Existen dos v.a´s. PC's, cuyas características se describen a continuación.

Para S_A: $\lambda = 3$, $p(1) = 0.4$ y $p(2) = 0.6$

Para S_N: $\lambda = 2$, $p(1) = 0.9$ y $p(2) = 0.1$.

Si $S = S_A + S_N$, por ecuaciones (58) y (59) se tiene lo siguiente:

$\lambda = 5$, $p(1) = (3/5)(0.4) + (2/5)(0.9) = 3/5$ y $p(2) = (3/5)(0.6) + (2/5)(0.1) = 0.4 = 2/5$

Utilizando las fórmulas de recursión (33) y (34),

$f(0) = e^{-5}$ y para $x \ge 1$,

$f(x) = (5/x)[(3/5)f(x-1) + (4/5)f(x-2)]$

Se necesita obtener $F(4)$.

Haciendo $x = 1, 2, 3$ y 4 sucesivamente en la ecuación anterior, se encuentra lo siguiente:

$f(1) = 3e^{-5}$, $f(2) = (13/2)e^{-5}$, $f(3) = (21/2)e^{-5}$, $f(4) = (115/8)e^{-5}$

Por lo tanto, $F(4) = 0.23835$

22. La Probabilidad de que el número de reclamaciones sea cero, es dada por:

$\Pr(N=0)=\int_0^\infty \Pr(N=0|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda$

Debido a que si $\Lambda=\lambda$, el número total de reclamaciones es una v.a. Poisson, entonces:

$\Pr(N=0|\Lambda=\lambda)=e^{-\lambda}$

De esta manera:

$\Pr(N=0)=\int_0^\infty e^{-\lambda}f_\Lambda(\lambda)d\lambda = M_\Lambda(-1)$

Ya que $f_\Lambda(\lambda)$ es una distribución Gaussiana inversa, su f.g.m. valuada en -1, es dada por: (ecuación (64) capítulo 2)

$M_\Lambda(-1) = \exp\left[\alpha\left(1-\sqrt{1+2/\beta}\right)\right]$

Por otro lado, se sabe que la media y la varianza de la distribución Gaussiana inversa están dadas por:

$E(\Lambda)=\alpha/\beta=5/2$ y $Var(\Lambda)=\alpha/\beta^2=25/16$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que surge de las dos ecuaciones anteriores, se obtienen los valores de α y β, los cuales dan $\alpha=4$ y $\beta=8/5$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación para la f.g.m. de Λ:

$M_\Lambda(-1)=e^{-2}$

23. Por el enunciado del problema, se sabe que $E(\Lambda)=\alpha/\beta=4$, $Var(\Lambda)=\alpha/\beta^2=16$.

Resolviendo estas ecuaciones, encontramos los valores de α y β,

Ya que $\alpha=1$ y $\beta=1/4$, la distribución Λ es exponencial con parámetro ¼.

$\Pr(N=1|\Lambda=\lambda)=\lambda e^{-\lambda}$.

Por la ley de probabilidad total:

$\Pr(N=1)=\int_0^\infty \Pr(N=1\ \Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda}(1\ 4)e^{-\lambda/4}d\lambda = \int_0^\infty (1/4)\lambda e^{-5/4\lambda}d\lambda$

Para resolver esta integral, hacer el cambio de variable $u=(5/4)\lambda$ con $du=(5\ 4)d\lambda$ e integrar por partes.

Por lo tanto, $\Pr(N=1)=(1/4)\int_0^\infty \lambda e^{-\left(\frac{5}{4}\right)\lambda}d\lambda = \frac{4}{25}$

24. $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=6$, $E(S)=10$, $Var(S)=20$, $TMC(S)=60$. Tal que

$x_0+\alpha/\beta=10$

$\alpha/\beta^2=20$

$2\alpha/\beta^3=60$

Usar la segunda y tercera ecuación para obtener β y α, después usar la primera para obtener x_o.

Soluciones a Ejercicios, Capítulo V

1. Sea T el tiempo de ocurrencia de la pérdida y sea c, la prima que se cobra por unidad de tiempo.
La reserva al tiempo T es dada por la siguiente ecuación:
$U(t) = u + ct - X = 80 + cT - X$.
La ruina ocurre si $80 + cT < X$.
Esto quiere decir que se presente alguna de siguientes posibilidades:
- $80 + cT < 100$, para cualquier monto de reclamación
- $100 \leq 80 + cT < 120$ y el monto de reclamación es igual a $X = 120$.

Por otro lado, se sabe que $\Pr(T \geq t) = e^{-0.1t}$
Calculando las probabilidades para cada uno de los casos anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones:
$-\Pr(80 + cT < 100) = \Pr(T < 20/c) = 1 - \Pr(T \geq 20/c) = 1 - e^{-0.1(20/c)} = 1 - e^{-2/c}$ y
$$\begin{aligned} -\Pr[(100 \leq 80 + cT < 120) \text{ y } X = 120] &= \Pr(20/c \leq T < 40/c) \Pr(X = 120) \\ &= \Pr(X = 120)[\Pr(T < 40/c) - \Pr(T < 20/c)] \\ &= 0.5(1 - e^{-4/c} - (1 - e^{-2/c})) \\ &= (1/2)(e^{-2/c} - e^{-4/c}) \end{aligned}$$
De esta forma, la probabilidad de ruina es dada por la suma de las ecuaciones anteriores:
$$\Pr(\text{ ruina }) = 1 - e^{-2/c} + \frac{1}{2}(e^{-2/c} - e^{-4/c}) = 1 - 0.5e^{-2c} - 0.5e^{-4c}$$
Por el enunciado del problema se tiene que encontrar una prima "c" de tal forma que la probabilidad de ruina sea menor que 0.1, es decir, de tal manera que la ecuación anterior cumpla con esta restricción.
Haciendo $e^{-2/c} = a$, en la ecuación anterior, se tiene:
$1 - (a/2) - (a^2/2) < 0.1$
Resolviendo esta ecuación para a.
$a > (-1 + \sqrt{8.2})/2$
Sustituyendo el valor de a:
$e^{-2/c} > 0.9317$
$-2/c > -0.0707$
Por lo tanto $c > 28.2727$

2. Siguiendo un razonamiento similar al ejemplo anterior, se tienen las siguientes conclusiones.
La reserva al tiempo T es:
$U(t) = 60 + 20T - X$
La ruina ocurre si:
- $60 + 20T < 100$, si cualquier monto de reclamación ocurre
- $100 \leq 60 + 20T < 200$, si $X = 200$

Calculando las probabilidades de cada uno de los casos anteriores

- $\Pr(60+20T<100)=\Pr(T<2) = 1-\Pr(T\geq 2)=1-1/3=2/3$
- $\Pr(100<60+20T<200 \text{ y } X=200)=\Pr(X=200)\Pr(2<T<7)$
  $=(0.4)[\Pr(T<7)-\Pr(T<2)]=0.4[1-\Pr(T\geq 7)-(1-\Pr(T\geq 2))]$
  $=(0.4)[\Pr(T\geq 2)-\Pr(T\geq 7)]=0.4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right]=0.4\left[\frac{5}{24}\right]=\frac{1}{12}$

Por lo tanto, la probabilidad de ruina es dada por la suma de las probabilidades anteriores, es decir:

$\Pr(Ruina) = \Pr(60+20T<100) + \Pr[(100+60+20T<200) \text{ y } X=120]$
$= (2/3) + (1/12) = 3/4$

3. Sea T el tiempo cuando la ruina ocurre. La reserva al tiempo T es dada por la siguiente ecuación:
$U(t)=20+40t-100$
La ruina ocurre en el tiempo T si la reserva es negativa, es decir, si $20+40T-100<0$ ó $T<2$.
La probabilidad de que la pérdida no vaya a ocurrir antes del tiempo t es :
$\Pr(T>t)=e^{-t}$
Por lo que la probabilidad de ruina es igual a:
$\Pr(T<2)=1-e^{-2}$

4. La distribución para la v.a. T es dada por:
$\Pr(T>h)=e^{-\lambda h}$
La probabilidad de que el tiempo que transcurre entre 2 reclamaciones sea más grande que 0.2, es igual a:
$\Pr(T>0.2)=e^{-\lambda(0.2)}$
Por los datos del problema, esta probabilidad es igual a e^{-1}, de tal forma que:
$e^{-\lambda(0.2)}=e^{-1}$
Despejando λ de la ecuación anterior se obtiene que $\lambda=5$.
El coeficiente de ajuste para una v.a. exponencial es dado por la ecuación (19). β es dado por los resultados del problema, θ hay que calcularlo.
Se sabe que la prima al cobro "c" para un proceso de reclamaciones Poisson es dada por:
$c=\lambda p_1(1+\theta)$
De tal forma que sucede lo siguiente:
$15=5(2)(1+\theta)$
Despejando θ,
$\theta=1/2$
Por lo cual el coeficiente de ajuste R, es igual a:
$$R=\frac{\beta\theta}{(1+\theta)}=\frac{(1/2)(1/2)}{1+1/2}=\frac{1}{6}$$
Por lo tanto, la probabilidad de ruina es igual a (Ecuación (20)):
$\psi(u)=e^{-Ru}/(1+\theta) = (2/3)e^{-u/6}$

5. Ya que la distribución del monto de reclamación es exponencial con media 2, L_1 tiene la misma distribución de X, por lo que $Var(L_1) = Var(X) = \beta^{-2} = 4$

Una expresión general para $Var(L_1)$ de la distribución PC puede ser derivada como sigue:

$M_{L_1}(r) = (M_X(r) - 1)/(rp_1)$

$$= \frac{1}{rp_1}\left(1 + rp_1 + \frac{r^2}{2}p_2 + \frac{r^3}{6}p_3 ... - 1\right) = 1 + r\frac{p_2}{2p_1} + r^2\frac{p_3}{6p_1} + ...$$

De los coeficientes de r y $r^2/2$, se tiene $E(L_1) = p_2/2p_1$, $E(L_1^2) = p_3/3p_1$

Por lo tanto,

$$Var(L_1) = \frac{p_3}{(3p_1)} - \left[\frac{p_2}{(2p_1)}\right]^2$$

6. Se tiene que encontrar L, la cual es dada por la siguiente ecuación (ecuación (5)):

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

N es una v.a. cuya función de distribución es geométrica con parámetro $q = 1/(1+\theta)$.

Aplicando la ecuación (31), Capítulo 4:

$$Var(L) = E[NVar(L_1)] + Var[NE(L_1)]$$

$$= E(N)Var(L_1) + Var(N)E^2(L_1)$$

Sustituyendo el valor de $E(N)$ y $Var(N)$

$$= Var(L_1)(q/p) + [E(L_1)]^2\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)$$

Reemplazando el valor de q

$$= Var(L_1)(1/\theta) + [E(L_1)]^2\left(\frac{1+\theta}{\theta^2}\right)$$

Por los resultados del ejercicio anterior, se sustituye la $Var(L_1)$ y $E(L_1)$

$$= \left[\frac{p_3}{(3p_1)} - \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2\right]\frac{1}{\theta} + \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2\left(\frac{1+\theta}{\theta^2}\right)$$

$$= \frac{p_3}{3p_1\theta} + \left(\frac{p_2}{2p_1\theta}\right)^2$$

Notar que aunque la expresión para $Var(L_1)$ y $Var(L)$, parecen ser similares excepto por θ (ver ejemplo anterior), los signos son diferentes.

Sustituyendo los valores de las p_i's, debido a que X es una v.a. del monto de reclamaciones, se obtiene:

$$Var(L) = \frac{p_3}{3p_1(\theta)} + \left(\frac{p_2}{2p_1\theta}\right)^2 = \frac{6\beta^{-3}}{3\beta^{-1}(\theta)} + \left(\frac{\beta^{-2}}{\beta^{-1}\theta}\right)^2 = \frac{2\beta^{-2}}{\theta} + \frac{\beta^{-2}}{\theta^2} = 32$$

Otra manera alternativa de resolver el problema es la siguiente.

Ya que la distribución del monto de reclamación es exponencial, por el problema 5 se ve que:

$$\psi(u) = 1 - F_L(u) = \frac{2}{3}e^{-u/6}$$

Para $u > 0$, la función de densidad de la v.a. L es igual a:

$$f_L(u) = -\psi'(u) = \frac{1}{9}e^{-u/6}$$

Calculando los primeros momentos no centrales de L,

$E(L) = \frac{1}{9}\int_0^{\infty} ue^{-u/6}du = 4$

$E(L^2) = \frac{1}{9}\int_0^{\infty} u^2e^{-u/6}du = 48$

Por lo tanto,

$Var(L) = E\left(L^2\right) - E^2(L) = 48 - 16 = 32$

7. Con el fin de encontrar el factor de seguridad relativo, se resuelve la ecuación (21):

$1 + p_1(1+\theta)R = M_X(R)$

Primero se calcula p_1 y $M_X(R)$, de la siguiente manera:

$p_1 = E(X) = \sum xf_X(x) = (1)f_X(1) + (2)f_X(2) = (1)(0.5) + 2(0.5) = 1.5$

$M_X(R) = 0.5e^R + 0.5e^{2R}$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación anterior y usando el hecho de que $R = 0.6$, se tiene:

$1 + 1.5(1+\theta)0.6 = 0.5e^{0.6} + 0.5e^{(2)0.6}$

Despejando θ, se encuentra el resultado deseado:

$\theta = 0.7456$

8. Se sabe que la probabilidad de ruina para una v.a. exponencial es:

$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru}$

El hecho de que la reserva se incremente en 1 y por ello se reduzca la probabilidad de ruina a la mitad, se puede expresar como:

$\psi(u+1) = 0.5\psi(u)$

$e^{-R(u+1)} = 0.5e^{-Ru}$

Por lo anterior se ve que $e^{-R} = 0.5$ ó $R = \ln 2$.

Debido a que X es una v.a. exponencial, su coeficiente de ajuste es dado por la ecuación (19)

$R = \frac{\beta\theta}{(1+\theta)}$

Sustituyendo el valor de R y el valor de β en la ecuación anterior:

$\ln 2 = \frac{2\theta}{(1+\theta)}$ ó $\frac{\theta}{(1+\theta)} = \frac{\ln 2}{2}$

Por lo tanto, la probabilidad de que la reserva caiga por debajo de su nivel inicial es dada por la ecuación (11):

$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} = 1 - \frac{\theta}{(1+\theta)} = 1 - 0.5\ln 2 = 0.6534$

9. La v.a que denota el número de veces que la reserva cae por debajo de su nivel inicial es N

La distribución de N es geométrica con $q = 1/(1+\theta)$ y $p = \theta/(1+\theta)$

De esta manera por ecuación (57) del capítulo 2,

$Var(N) = q/p^2 = (1+\theta)/\theta^2$

Por el problema anterior se sabe que:

$\frac{\theta}{(1+\theta)} = \frac{\ln 2}{2}$ ó lo que es igual a $\theta = \frac{\ln 2}{2-\ln 2}$

Por lo tanto:

$Var(N) = 5.44$

10.

a) Para encontrar el factor de seguridad relativo "θ", se hace lo siguiente.
   Primero se calcula $\psi(0)$:
   $\psi(0) = (0.1) + (0.02) + (0.03) = 0.15$
   Por otra parte se sabe (de la ecuación (11)) que $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$
   Igualando ambas ecuaciones,
   $\psi(0) = 0.15 = \frac{1}{1+\theta}$
   Despejando θ, se obtiene el resultado $\theta = 17/3$
b) R es el más pequeño de los exponentes en la ecuación para la probabilidad de ruina, lo cual es igual a 1.

11. El dato de λ en este problema es irrelevante.
$E(L_1) = p_2/(2p_1)$ y $Var(L_1) = (p_3/3p_1) - (p_2/2p_1)^2$
Dado que la distribución del monto de reclamación es dada por: $f_X(1) = 0.25$ y $f_X(2) = 0.75$, entonces:
$p_1 = 1.75$, $p_2 = 3.25$ y $p_3 = 6.25$.
Por lo tanto:
$E(L_1) = 0.92857$ y $Var(L_1) = 0.32823$

12. Por los datos del enunciado: $c = 7$, $\lambda = 2$ y $p_1 = 2$.
Se sabe que $c = \lambda p_1(1+\theta)$, entonces:
$\lambda p_1(1+\theta) = 7$
$(2)(2)(1+\theta) = 7$.
Despejando el valor de θ:
$\theta = 0.75$
El coeficiente de ajuste para una v.a. exponencial es (ecuación (19)):

$$R = \frac{\beta\theta}{(1+\theta)}$$

Sustituyendo los valores de β y θ, se obtiene:
$R = 3/14$
La probabilidad de ruina para la v.a. del monto de reclamación exponencial es (ecuación (20)):

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-Ru} = (4/7)e^{-3u/14}$$

Se tiene que encontrar la u, tal que $\psi(u) \le 0.1$.
Resolviendo esta desigualdad se encuentra que
$u \ge 8.1338$

13. El valor esperado de la máxima pérdida total es igual a:

$E(L)=\dfrac{p_2}{2p_1\theta}$

Por lo que se necesita encontrar p_2 y θ. De los datos del problema

$p_1=1/2$, $E(N)=2$ y $c=1.5$

Por otra parte $c=E(N)E(X)(1+\theta)$

$c=2\left(\dfrac{1}{2}\right)(1+\theta)$

$1.5=1+\theta$

Por lo que $\theta=0.5$

p_2, representa el segundo momento no central de la v.a. del monto de reclamaciones, el cual es igual a ½.

Por lo tanto, $E(L)=\dfrac{p_2}{(2p_1\theta)}=1$

14. La ganancia del asegurador es igual al exceso de las primas sobre reclamaciones, es decir:

$G_t=c-W_t$

El coeficiente de ajuste R es la raíz positiva de la siguiente ecuación:

$e^{cr}=M_{W_t}(r)=E\left(e^{W_t r}\right)$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por e^{-cr}:

$e^{-cr}e^{cr}=e^{-cr}E\left(e^{W_t r}\right)$

Debido a que e^{-cr} es constante con respecto a la $E\left[e^{W_t r}\right]$, entonces:

$1=E\left[e^{-r(c-W_t)}\right]$

Sustituyendo del valor de G_t

$1=E\left[e^{-rG_t}\right]$ ó $1=M_{G_t}(-r)$

Usando la distribución de probabilidad para la v.a. que denota la ganancia (G_t), se obtiene:

$1=0.1e^{r}+0.9e^{-r}$

Multiplicando ambas partes de la ecuación por e^{r}

$0.1e^{2r}-e^{r}+0.9=0$

Factorizando la última expresión:

$\left(e^{r}-1\right)\left(0.1e^{r}-0.9\right)=0$

La raíz positiva que satisface esta ecuación es dada por $e^{r}=9$ ó $R=\ln 9$, lo cual determina el coeficiente de ajuste.

15. El coeficiente de ajuste es el número R que satisface la ecuación (25):

$e^{cr}=M_W(r)=E\left[e^{Wr}\right]$

La ganancia del asegurador sobre un periodo de tiempo es $G=c-W$

Si multiplicamos ambas partes de la ecuación por e^{-cr}, se obtiene lo siguiente:

$\left(e^{-cr}\right)e^{cr}=E\left[e^{Wr}\right]\left(e^{-cr}\right)$

$1=E\left[e^{Wr}\right]\left(e^{-cr}\right)=E\left[e^{-cr}e^{Wr}\right]=E\left[e^{(-c+W)r}\right]=E\left[e^{(G)r}\right]=M_G(-r)$

Debido a que G se distribuye como una v.a. normal con media 10 y varianza 5, su f.g.m. es:

$M_G(-r) = \exp\left[-10r + 2.5r^2\right]$

Reemplazando la f.g.m. en la ecuación anterior:

$1 = \exp\left[-10r + 2.5r^2\right]$

Despejando el valor de R para encontrar el coeficiente de ajuste, se encuentra que:

$R = 4$

16. Utilizando la ecuación (25) y el hecho de que la f.g.m. de una v.a. normal es:

$M_W(r) = \exp\left(\mu r + \sigma^2 r^2 / 2\right)$

Se encuentra que:

$e^{cr} = M_W(r) = \exp\left(\mu r + \sigma^2 r^2/2\right)$. Tal que el valor de R, es igual a: $R = 2(c-\mu)/\sigma^2$

17. Ya que el número esperado de reclamaciones es 2, $q = 2/3$ y $p = 1/3$.

El coeficiente de ajuste R es dado por :

$$e^{(1)R} = M_W(R) = M_N(\ln M_X(R)) = \frac{1/3}{1-2/3M_X(R)} = \frac{1}{3-2\left(0.1e^R + 0.9\right)} = \frac{1}{1.2-0.2e^R}$$

Esto produce la ecuación cuadrática:

$0.2e^{2R} - 1.2e^R + 1 = 0$

La raíz positiva de la ecuación anterior corresponde al coeficiente de ajuste, por lo tanto $R = \ln 5$

18. El coeficiente de ajuste es la raíz positiva $\hat{R}$ de la siguiente ecuación:

$$e^{c\hat{R}} = E\left[\exp\left(\frac{Y}{1-a}\hat{R}\right)\right]$$

Sustituyendo los valores de a y c

$$e^{\hat{R}} = E\left[\exp\left(\frac{Y}{1-0.1}\hat{R}\right)\right]$$

$$e^{\hat{R}} = E\left[\exp\left(\frac{Y}{0.9}\hat{R}\right)\right]$$

El lado derecho de la ecuación equivale a la f.g.m. de la v.a. Y valuada en $\hat{R}/0.9$, de tal manera que:

$$M_Y\left(\frac{\hat{R}}{0.9}\right) = e^0(0.8) + e^{1.8\left(\frac{\hat{R}}{0.9}\right)}(0.2) = 0.8 + 0.2e^{2\hat{R}}$$

Sustituyendo este resultado y despejando $\hat{R}$, se encuentra que la raíz positiva de esta ecuación es igual a:

$e^{\hat{R}} = 4$ y por lo tanto $\hat{R} = \ln 4$

19. En este problema $a = 0.1$ y el coeficiente de ajuste es dado por: (Ecuación (35) capítulo 5)

$$e^{1.8\hat{R}} = E\left[\exp\left(\frac{Y}{0.9}\hat{R}\right)\right]$$

Debido a que Y es una v.a. normal,

$$E\left[\exp\left(\frac{Y}{0.9}\hat{R}\right)\right] = M_Y\left(\frac{\hat{R}}{0.9}\right) = \exp\left(\mu\left(\frac{\hat{R}}{0.9}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\hat{R}}{0.9}\right)^2\right)$$

Resolviendo para $\hat{R}$, se tiene la siguiente ecuación:

$$18\hat{R} = 10\hat{R} + \frac{\hat{R}^2}{0.9}$$

Por lo tanto, $\hat{R} = 7.2$

20. El coeficiente de ajuste es dado por la siguiente ecuación:

$$e^{c\hat{R}} = M_{\frac{Y}{1-\alpha}}\left(\hat{R}\right)$$

$$e^{\frac{4}{3}\hat{R}} = E\left(e^{\frac{4}{3}\hat{R}Y}\right)$$

Por el enunciado del problema $E(N) = 1/2$, por lo que $p = 2/3$ y $q = 1/3$

La f.g.m. de una v.a. geométrica compuesta es:

$$M_Y(t) = \frac{p}{1 - qM_X(t)}$$

$$M_Y(t) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}M_X(t)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\left(0.1e^t + 0.9\right)}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación para el coeficiente de ajuste:

$$e^{\frac{4}{3}\hat{R}} = \frac{2}{3 - \left[0.1\exp\left(\frac{4}{3}\hat{R}\right) + 0.9\right]}$$

Despejando y simplificando, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$e^{8/3\hat{R}} - 21e^{4/3\hat{R}} + 20 = 0$$

El valor positivo de $\hat{R}$ que satisface esta ecuación es dado por:

$$e^{\frac{4}{3}\hat{R}} = 20 \text{ ó } \hat{R} = \frac{3}{4}\ln 20$$

21. Para una distribución Gaussiana Inversa, el máximo factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe es: (Ver ecuación (39))

$$\theta_m = \frac{2\left(e^{\alpha} - 1\right)}{\alpha} - 1$$

El lado derecho de esta ecuación se puede denotar como $g(\alpha)$

Donde: $g(\alpha)$ es una función creciente de α.

Sustituyendo los valores de $\alpha = 0.75$ y $\alpha = 0.8$ en el lado derecho de la ecuación, se obtiene:

$g(0.75) \sim 1.9786$ y $g(0.8) \sim 2.0638$

Por lo tanto el valor de $\alpha = 2$ se encuentra entre $\alpha = 0.75$ y $\alpha = 0.8$

22. El hecho de que la media para una distribución Gaussiana Inversa sea igual a 1.2 veces la desviación estándar se puede expresar como sigue:

$$E(X) = 1.2\sqrt{Var(X)}$$

$$\alpha/\beta = 1.2\sqrt{\alpha}/\beta$$

Por lo que $\alpha = 1.44$

Utilizando la ecuación para el máximo factor de seguridad relativo (ecuación (39)):

$$\theta_m = \frac{2\left(e^{1.44}-1\right)}{1.44} - 1 = 3.4731$$

23. El más grande valor de r para el cual la f.g.m. de la Gaussiana Inversa existe es $\beta/2$.

Por los datos del problema se sabe que R es igual a 0.25, tal que $\beta = 0.5$.

Por otro lado el máximo factor de seguridad relativo para el cual el coeficiente de ajuste existe es:

$$\theta_m = \frac{2\left(e^{\alpha}-1\right)}{\alpha} - 1 = e^2 - 2.$$

El lado izquierdo de la expresión anterior tiene únicamente una raíz que es positiva, $\alpha = 2$, un hecho que puede verificarse sustituyendo el valor de α en la ecuación. Por lo tanto la varianza de la distribución del monto de reclamación es igual a:

$$Var(X) = \alpha/\beta^2 = 8$$

24. Por los datos de la sección 4.7, fórmulas (58) y (59), el parámetro y la función de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias, es decir la función de probabilidad para la fusión, son:

$$\lambda = 2\,,\quad f_S(x) = (1/2)f_A(x) + (1/2)f_B(x)$$

La media p_1 para dicha distribución de probabilidad es igual a:

$$p_1 = (1/2)(2+2) = 2.$$

Ya que la media y la varianza de la distribución Gaussiana Inversa son 2 y 6, respectivamente:

$\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$.

El coeficiente de ajuste es la raíz positiva más pequeña que satisface la siguiente ecuación:

$$1 + p_1 r(1+\theta_m) = M_S(r)$$

$$1 + (1+\theta_m)(2)(r) = (1/2)\exp\left[2/3\left(1-\sqrt{1-6r}\right)\right] + (1/2)\left(\frac{(1/2)}{(1/2)-r}\right)$$

El valor más grande de R para el cual el lado derecho de la ecuación existe es $1/6$.

Sustituyendo el valor de $R = 1/6$,

$$1 + (1+\theta_m)(2)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1/2-1/6}\right)$$

Resolviendo para θ_m, se obtiene el resultado:

$$\theta_m = 1.1716$$

25. El más grande valor de r para el cual la f.g.m. de X es definida es $r = \beta/2$ y en ese punto, el valor de $M_X(r)$ es igual a e^{α}.
Se sabe que este valor es 4.
Por lo que $\alpha = \ln 4$.
De ecuación (39), $\theta_m = \frac{2(e^{\alpha} - 1)}{\alpha} - 1 = \frac{6}{\ln 4} - 1 = 3.3280$

Soluciones a Ejercicios, Capítulo VI

1. Cuando se utiliza el método II, se cambian todas las $q's$ a $\ln(1-q)$.
Agrupando las pólizas que tengan el mismo monto de reclamación individual, se obtiene:
$\tilde{\lambda}_1 = -100 \ln 0.98 = 2.02$; $\tilde{\lambda}_2 = -200 \ln 0.99 - 100 \ln 0.97 = 5.056$; $\tilde{\lambda}_3 = -100 \ln 0.98 = 2.02$
Utilizando la fórmula (10):
$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 = 9.096$
Finalmente, la distribución del monto de reclamaciones es igual a:
$f_X(1) = \tilde{\lambda}_1 / \tilde{\lambda} = 2.02/9.096 = 0.222$;
$f_X(2) = \tilde{\lambda}_2 / \tilde{\lambda} = 5.06/9.096 = 0.556$;
$f_X(3) = \tilde{\lambda}_3 / \tilde{\lambda} = 2.02/9.096 = 0.222$

2. Para el método II reemplazamos todas las probabilidades q_i por $-\ln(1-q_i)$, de manera tal que para la segunda columna de la tabla se obtienen los valores:
$\tilde{\lambda}_1 = 0.2$, $\tilde{\lambda}_2 = 0.1$ y $\tilde{\lambda}_3 = 0.2$
Para la distribución PC aproximada,
$\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{\lambda}_i = 100(0.2) + 200(0.1) + 100(0.2) = 20 + 20 + 20 = 60$
Si se denotan las funciones de distribución de la última columna de la tabla por F_1, F_2 y F_3, respectivamente, entonces la función de la distribución del monto de reclamación es igual a:
$F_X(x) = (20/60)F_1(x) + (20/60)F_2(x) + (20/60)F_3(x)$
Existen dos maneras de encontrar $E(X)$ y $Var(X)$:
1) La primera consiste en determinar la función de densidad de probabilidad y después simplemente aplicar las definiciones de la esperanza y varianza de X.
Siguiendo esta forma de resolver el problema, se ve que existe un punto de masa de probabilidad para F_1 en el valor de 1, con probabilidad $1/2$.
Así se tiene que $f_{X_1}(1) = 1/2$.
La parte continua es dada por la siguiente función de densidad:

$$f_c(x) = \begin{cases} (1/3)x + (1/3)(2x) + (1/3)e^{-x} & si \quad 0 < x < 1 \\ (1/3)e^{-x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$E(X) = (2/6) f_{X_1}(1) + \int_{I_c} x\, f_c(x)\, dx$$

$$= (1/6) + \int_0^1 x^2\, dx + (1/3)\int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 5/6$$

$$E(X^2) = (1/6) + \int_0^1 x^3\, dx + (1/3)\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = 13/12$$

Por lo tanto la $Var(X) = (13/12) - (5/6)^2 = 7/18$

2) La segunda manera, consiste en utilizar la técnica del ejemplo 2.4.2.

$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx$

$= (1/3)\int_0^1 (1 - x^2/2)dx + (1/3)\int_0^1 (1 - x^2)dx + (1/3)\int_0^\infty e^{-x}dx = 5/6$

Para encontrar $E(X^2)$, notar que:

$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty x^2\{-[1 - F(x)]'\}dx$

Resolviendo esta integral por medio del método de integración por partes:

$= 2\int_0^\infty x[1 - F(x)]dx$

Aplicando este resultado con los datos del problema, se obtiene:

$E(X^2) = (2/3)\int_0^1 x(1 - x^2/2)dx + (2/3)\int_0^1 x(1 - x^2)dx + (2/3)\int_0^\infty x\,e^{-x}dx = 13/12$

Por lo tanto, $Var(X) = 7/18$

Nótese que esta manera de encontrar $E(X)$ y $Var(X)$, evita el problema de conocer la existencia de un punto de masa de probabilidad y permite trabajar directamente con las funciones de distribución de las variables aleatorias a evaluar.

3. Para el método I, $\lambda_1 = nq$.
Para el método II, $\lambda_2 = -n\ln(1-q)$
Usando la serie logarítmica (ecuación 4, capítulo 2),

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -n\ln(1-q) - nq = -n[\ln(1-q)+q] = -n\left[\left(-q - \frac{q^2}{2!} - \frac{q^3}{3!} - \dots\right) + q\right] = n\sum_{i=2}^{\infty} q^i/i!$$

4. Utilizando el método I de aproximación y las ecuaciones (3) y (4) de este capítulo, se tiene:
$\lambda = 1000(0.6) + 2000(0.4) = 1{,}400$
$F(x) = (3/7)F_1(x) + (4/7)F_2(x)$
Donde:

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{30}\right)^2 & 0 < x < 20 \\ 1 & x \geq 20 \end{cases} \quad \text{y} \quad F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{24}\right)^2 & 0 < x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

Por lo tanto la probabilidad de que el monto de reclamación individual vaya a ser menor a 18 es igual a:
$F(18) = (3/7)(18/30)^2 + (4/7)(1) = 0.7257$

5. De la fórmula de recursión (ecuación (23)):
$E(I_{d+1}) = E(I_d) - [1 - F(d)]$.
Despejando $1 - F(d)$,
$1 - F(d) = E(I_d) - E(I_{d+1})$.
Lo que se quiere encontrar es:
$f(2) = F(2) - F(1)$

Reexpresando esta ecuación,

$F(2)-F(1) = (1-F(1))-(1-F(2))$

Utilizando la fórmula de recursión:

$[1-F(1)]-[1-F(2)] =$

$[E(I_1)-E(I_2)]-[E(I_2)-E(I_3)] =$

$E(I_1)-2E(I_2)+E(I_3) =$

$(2/3)\left[(2/5)-2(2/5)^2+(2/5)^3\right] = 12/125$

De manera más general se puede probar que $f(k)$, es igual a:

$E(I_{k-1})-2E(I_k)+E(I_{k+1})$

6. Las dos distribuciones PC pueden ser combinadas como una sola distribución también PC (Sección 4.7 del Capítulo 4) con $\lambda = 2+3 = 5$ y distribución del monto de reclamación:

$f_X(x) = (2/5)f_M(x) + (3/5)f_D(x)$

Donde: f_M, es la función de densidad de una v.a. uniforme sobre $(0,1000)$

f_D, es la función de densidad de una v.a. uniforme sobre $(0,200)$

Por lo tanto la esperanza de I_{100}, es igual a:

$$E(I_{100}) = (2/5)(1/1000)\int_{100}^{1000}(x-100)dx + (3/5)(1/200)\int_{100}^{200}(x-100)dx$$

$$= (2/5)(1/1000)(1/2)(1000-100)^2 + (3/5)(1/200)(1/2)(200-100)^2 = 177$$

7. Por la fórmula de recursión:

$E(I_2) = E(I_1)-(1-F(1)) = E(I_0)-(1-F(0))-(1-F(1))$

Por los datos del problema se sabe que:

$E(I_0) = E(S) = 3$, $F(0) = 0.1$ y $F(1) = 0.1+0.2 = 0.3$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior:

$E(I_2) = 3-(1-0.1)-(1-0.3) = 1.4$

Esto también puede ser calculado directamente como se hace para la varianza a continuación. Notar que:

$$(S-2)^2 - I_2^2 = \begin{cases}(S-2)^2 & si\ S \le 2\\ 0 & si\ S > 2\end{cases}$$

Sacando la esperanza de ambos lados de la ecuación

$E\left[(S-2)^2\right] - E\left[I_2^2\right] = 2^2 f(0) + 1^2 f(1) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

Por las propiedades de los valores esperados de una v.a., se encuentra que:

$E\left[(S-2)^2\right] = E(S^2) - 4E(S) + 4$

$= Var(S) + E^2(S) - 4E(S) + 4$

$= 9.64 + 3^2 - (4)(3) + 4 = 10.64$

Tal que $E(I_2)^2 = 10.64 - 0.6 = 10.04$

Por lo tanto, $Var(I_2) = E(I_2^2) - E^2(I_2) = 10.04 - 1.4^2 = 8.08$

8. Debido a que el proceso es compuesto geométrico con $E[N]=2$, entonces $q=2/3$ y $p=1/3$.

El valor esperado de la distribución del monto de reclamaciones es igual a:

$p_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{3} ip(i) = 1p(1)+2p(2)+3p(3) = \frac{1}{4}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4} = 2$

Aplicando las fórmulas de recursión, ecuaciones (42) y (43) capítulo 4, se tiene:

$f(0)=1/3$

$f(x)=(2/3)[(1/4)f(x-1)+(1/2)f(x-2)]$, para $x \geq 1$

Sustituyendo los valores de $x=1$ y $x=2$, sucesivamente obtenemos lo siguiente:

$f(1)=1/18$, $f(2)=13/108$.

Utilizando la fórmula de recursión (ecuación (23)), se calcula $E(I_2)$.

$E(I_2)=E(I_1)-[1-F_S(1)]=[E(I_0)-(1-F_S(0))]-[1-F_S(1)]$

Por los datos del problema:

$1-F(0)=2/3, 1-F(1)=11/18$, $E(I_o)=E(S)=E(N)p_1 = 4$

Por lo que, $E(I_2)=10/3-11/18 = 49/18$

De la misma manera se calcula $E(I_3)$

$E(I_3) = E(I_2)-(1-F(2)) = 49/18-53/108 = 241/108$

Por lo tanto, $E(I_{22}) = E(I_2)(1-r)+E(I_3)(r) = (49/18)(0.8)+(241/108)(0.2) = 2.624$

De forma más general, se puede expresar lo anterior como:

$E(I_{a+r})=E(I_a)(1-r)+E(I_{a+1})r$

Donde: a, es un número entero

r, $0<r<1$

9. De ecuación (25), se cumple la siguiente relación.

$D-I_{kG}=kG-S$

El máximo valor de k es aquel en donde la prima menos gastos y utilidad, menos dividendos esperados, menos reclamaciones esperadas, sea igual a cero. Si k es mayor a este valor, entonces la utilidad va a reducirse.

Es decir, se desea encontrar el valor de k tal que la siguiente ecuación se cumpla:

$\text{Prima} - (\textit{Gastos y Utilidad}) - E(D) - E(S) = 0$

$12-3-E(D)-E(S)=0$

$9-E(I_{kG})-kG=0$

Si $kG=7$, la ecuación anterior es:

$9-E(I_7)-7=2-1.6>0$

Si $kG=8$, entonces:

$9-E(I_8)-8=1-1.2<0$

De tal forma que el valor de kG se encuentra entre 7 y 8.

A continuación, se utiliza una interpolación para obtener el valor de k.

$E(I_7)$	7
$E(I_{12k})$	$12k$
$E(I_8)$	8

$$\frac{E(I_{12k})-E(I_7)}{E(I_8)-E(I_7)} = \frac{12k-7}{8-7}$$

Despejando $E(I_{12k})$:
$E(I_{12k}) \; = (12k-7)[E(I_8)-E(I_7)]+E(I_7)$
$= 1.6-(12k-7)(0.4) = 4.4-4.8k$
El máximo valor de k es aquel que cumple con la siguiente ecuación:
$9-4.4+4.8k-12k=0$.
Por lo tanto, $k = 23/36$.

10. El dividendo es dado por:
$D = 2.7-S$, si $S < 2.7$ y 0 en otro caso.
Usando la fórmula de recursión para una v.a. Poisson Compuesta (ecuaciones (33) y (34)), se calcula lo siguiente:
$f(0)=e^{-2}$, $f(1)=0.8e^{-2}$, $f(2)=1.52e^{-2}$
Utilizando estos resultados se obtiene $E(D)$:
$$E(D) = \sum_{s=0}^{2}(2.7-s)f(s) = = 2.7f(0)+1.7f(1)+0.7f(2) = 0.693.$$
Por otra parte se conoce que: $E(S) = \lambda E(X) = \lambda\sum_{i=1}^{2} ip(i) = 2(0.4+2(0.6)) = 2(1.6) = 3.2$
Por lo tanto, $E(G-S-D) = E(G)-E(S)-E(D) = 4.5-3.2-0.693 = 0.607$

11. La prima al cobro es dada por $G = E(S)(1+\theta) = 2(1+1) = 4$ y el dividendo es igual al 80% de la prima:
$$D = \begin{cases} 0.8(4)-S & si \quad S<3.2 \\ 0 & si \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$
Por lo tanto:
$$E(D) = \int_{I_S} d f_S(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{3.2}(3.2-s)\exp\left[-\frac{(s-2)^2}{2}\right]ds$$
Sumándole cero es decir ± 2
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{3.2}(3.2-2+2-s)\exp\left[-\frac{(s-2)^2}{2}\right]ds$$
Reexpresando la integral
$$= (1.2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{3.2}\exp\left[-\frac{(s-2)^2}{2}\right]ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{3.2}(s-2)\exp\left[-\frac{(s-2)^2}{2}\right]ds$$

Haciendo el cambio de variable $s-2=x$, en la primera ecuación y resolviendo la segunda:
$$= (1.2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{1.2}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s-2)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3.2}$$
$$= 1.2[\Phi(1.2)-\Phi(-2)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-0.72}-e^{-2}\right)$$

El primer término de la ecuación se obtiene por medio de las tablas de la distribución normal unitaria.
Por lo tanto $E(D) = 1.199$

12. El dividendo de la mitad del exceso del 80% de las primas sobre reclamaciones es:

$$D=\begin{cases}0.5[80\%(5)-S]\\ 0\end{cases}=\begin{cases}0.5(4-S) & \text{si } S\le 4\\ 0 & \text{si } S>4\end{cases}$$

El valor esperado del dividendo es así dado por:

$$E(D)=0.1(0.5)(4-0)+0.5(0.5)\int_0^4(4-x)e^{-x}dx$$
$$=0.2+0.25\left(4-1+e^{-4}\right)=0.95+0.25e^{-4}=0.9545$$

13. El dividendo del 80% del exceso de 2.5 sobre reclamaciones es dado por la siguiente fórmula:

$D=0.8(2.5-S)$, si $S\le 2.5$ y 0 en cualquier otro caso.

Tal que la esperanza del dividendo es:

$$E(D)=\sum_{s=0}^{\infty} d f_S(s)=\sum_{s=0}^{\infty}0.8(2.5-s)f_S(s)=0.8[2.5f(0)+1.5f(1)+0.5f(2)]=1.764$$
$$E(D^2)=\sum_{s=0}^{\infty}d^2 f_S(s)=\sum_{s=0}^{\infty}\left[0.8(2.5-s)\right]^2 f_S(s)=$$
$$0.64\left[2.5^2f(0)+1.5^2f(1)+0.5^2f(2)\right]=3.3808$$

Por lo que la varianza del dividendo es igual a:

$$Var(D)=E\left[D^2\right]-E^2[D]=0.2691$$

14. Por los datos del problema $\lambda=1$ y la media de una v.a. exponencial es $p_1=1$.

La prima al cobro del asegurador es:

$$c=\lambda p_1(1+\theta)=(1+0.5)=1.5$$

La prima que tiene que pagar el asegurador por la compra de reaseguro a dos veces el valor esperado es:

$$c_h=E[h(s)](1+\xi)=E(\alpha S)(1+\xi)=\alpha(1+\xi)=\alpha(1+1)=2\alpha.$$

La parte del riesgo por la cual es responsable el asegurador es $(1-\alpha)x$. El coeficiente de ajuste R' es dado por la raíz positiva más pequeña de la siguiente ecuación:

$$1+(c-c_h)R'=\int_0^{\infty}e^{R'(1-\alpha)x}e^{-x}dx$$

Sustituyendo los valores de c y c_h en la ecuación anterior:

$$1+(1.5-2\alpha)R'=1/[1-R'(1-\alpha)]$$

Despejando R para obtener su valor

$$R'=\frac{0.5-\alpha}{1.5-3.5\alpha+2\alpha^2}$$

Para encontrar el valor de α que sea un máximo, se deriva la ecuación anterior y se iguala a cero resultando la siguiente ecuación:

$$2\alpha^2-2\alpha+0.25=0$$

Existen dos raíces para α, $\alpha_1=0.85355$ y $\alpha_2=0.1464$

Por ecuación (28) se sabe que α no puede ser mayor que θ/ξ, es decir, no puede ser mayor a $\frac{1}{2}$, por lo que de las dos raíces la que da la respuesta correcta es 0.1464.

15. Se sabe que el valor esperado de la máxima pérdida total es igual a:

$$E(L) = \frac{p_2}{2p_1\theta}.$$

Para encontrar α, se interpreta a que es igual cada uno de los miembros de esta ecuación.

El riesgo por el cual el asegurador es responsable es $(1-\alpha)X$.

Ya que la distribución del monto de reclamación es exponencial con media 1, $f_X(x) = e^{-x}$, el primero y segundo momento no centrales de X, son:

$p_1 = (1-\alpha)E(X) = (1-\alpha)$ y $p_2 = (1-\alpha)^2 E[X^2] = 2(1-\alpha)^2$.

El factor de seguridad relativo después de reaseguro es dado por ecuación (28).

$$\theta' = \frac{\theta - \xi\alpha}{1-\alpha} = \frac{0.5-0.8\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-1.6\alpha}{2-2\alpha} = \frac{1-1.6\alpha}{2(1-\alpha)}$$

Después de la compra de reaseguro, la esperanza de la máxima pérdida total es:

$$E(L) = \frac{p_2}{2p_1\theta} = \frac{2(1-\alpha)^2}{2(1-\alpha)}\left[\frac{2(1-\alpha)}{1-1.6\alpha}\right] = \frac{2(1-\alpha)^2}{1-1.6\alpha}$$

Diferenciando $E(L)$, con respecto a α

$$\frac{d}{d\alpha}E(L) = \frac{2(1-\alpha)(1.6\alpha-0.4)}{(1-1.6\alpha)^2}$$

El mínimo valor ocurre cuando $1.6\alpha - 0.4 = 0$ ó lo que es igual a $\alpha = 1/4$. Esto se puede verificar, observando que la derivada cambia de signo en $\alpha = 1/4$

16. Se sabe que $\lambda = 1, \beta = 1$ y $\theta = 0.5$.

El coeficiente de ajuste antes de reaseguro es (ecuación (19), Capítulo 5):

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta} = 1/3$$

La esperanza del reaseguro de exceso de pérdida, es igual a (ecuación (20), Capítulo 6):

$$E[I_d(X)] = \int_d^\infty (x-d)e^{-x}dx = e^{-d}$$

Ya que $\xi = 0.8$, $c_h = (1+\xi)E[I_d(X)] = 1.8e^{-d}$ y $c = \lambda p_1(1+\theta) = (1)(1)(1+0.5) = 1.5$

El coeficiente de ajuste R' después de reaseguro es dado por:

$$1 + (1.5 - 1.8e^{-d})R' = \int_0^\infty e^{(x - I_d(x))R'}e^{-x}dx$$

Aplicando la definición de exceso de pérdida:

$$= \int_0^d e^{(x-0)R'}e^{-x}dx + \int_d^\infty e^{[x-(x-d)]R'}e^{-x}dx$$

$$= \int_0^d e^{(R'-1)x}dx + \int_d^\infty e^{R'd-x}dx$$

$$= \frac{1-e^{-(1-R')d}}{1-R'} + e^{-d(1-R')}$$

El asegurador necesita incrementar el coeficiente de ajuste en 50%, tal que $R' = R + 0.5R = 1.5R = 1.5(1/3) = 0.5$.

Sustituyendo R' en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$1.75 - 0.9e^{-d} = 2 - e^{-d/2}$$

La expresión anterior es una ecuación cuadrática, la cual presenta dos raíces. Notar que entre más grande es el valor de d más pequeña es la prima por reaseguro y más pequeño es e^{-d}. Tal que se toma la más pequeña de las dos raíces.
La primera raíz es $e^{-d/2} = 0.3798$ y la segunda $e^{-d/2} = 0.7312$
Por lo tanto la raíz más pequeña de la ecuación es dada por:
$d = -2\ln(0.3798) = 1.9362$

17. El resultado obtenido en el ejemplo 6.4.1 es retomado para resolver este problema.
El valor esperado de las reclamaciones individuales es $1/\beta$, mientras que el deducible es βd.
Por lo que el factor de seguridad relativo después de reaseguro es:
$$\theta' = \frac{\theta - \xi e^{-\beta d}}{1 - e^{-\beta d}}$$
θ' va a volverse negativo si $\theta - \xi e^{-\beta d} < 0$.
Esto es si $e^{-\beta d} > \theta/\xi$ ó si $e^{\beta d} < \xi/\theta$.
Por lo tanto, el mínimo deducible es $d = 1/\beta \ln(\xi/\theta)$.
Debido a que el factor de seguridad relativo del reasegurador es 50% mayor que el del asegurador, es decir $\xi = \theta + 0.5\theta = 1.5\theta$, el mínimo deducible es
$$d = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1.5\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{\beta}\ln 1.5$$

18. La prima cobrada para el asegurador es $c = (1)(1)(1+1) = 2$ y el costo del reaseguro es $c_h = (1+1.4)(1/4) = (1/4)2.4 = 0.6$. Tal que $c - c_h = 1.4$
(a) Por ecuación (28), el factor de seguridad relativo después del reaseguro es
$$\theta' = \frac{\theta - \alpha\xi}{1-\alpha} = \frac{1-(1/4)(1.4)}{1-(1/4)} = 0.8667$$
(b) El coeficiente de ajuste del asegurador antes de reaseguro es $R = \beta\theta/(1+\theta) = 0.5$
(c) Para encontrar el coeficiente de ajuste después de reaseguro, se utiliza la siguiente fórmula:
$$1 + 1.4R' = \int_0^\infty e^{0.75R'x} e^{-x} dx = \frac{1}{1-0.75R'}$$
Despejando R' se obtiene: $R' = 0.6190$

19. La esperanza del monto de reclamaciones es $E(S) = 1$ y por póliza el asegurador cobra:
$c = E(S)(1+\theta) = 1.5$.
El monto de reclamación esperado por el reasegurador es:
$$E[h(S)] = E(I_1) = \int_1^\infty (x-1)e^{-x}dx = e^{-1}$$
El costo de reaseguro es:
$c_h = E[h(S)](1+\xi) = e^{-1}(1+1) = 2/e$.
La prima neta cobrada por el asegurador después de la compra de reaseguro es:
$c - c_h = 1.5 - 2/e$.
El riesgo por el cual el asegurador es responsable es $S - I_1$.

Lo que espera pagar el asegurador es:
$E(S-I_1)=1-1/e$.
Si el factor de seguridad relativo para el asegurador después de reaseguro es θ', entonces:
$E(S-I_1)(1+\theta')=c-c_h$
$(1-1/e)(1+\theta')=1.5-2/e$
Despejando θ', se obtiene el resultado deseado:
$\theta'=0.2090$

BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUCTORY STATISTICS WITH APPLICATIONS IN GENERAL INSURANCE
   I.B. Hossack, J.H. Pollard, B. Zehnwirth
   Cambridge University Press
   5ta Edición, 1983. Nueva York, USA.
   Páginas 268

2. ACTEX STUDY MANUAL FOR THE 151 EXAMINATION OF THE SOCIETY OF ACTUARIES
   Geoffrey Crofs, Michael A. Gauger
   Actex Publication
   1991. Winsted Connecticut, USA.
   Páginas 266

3. LOSS DISTRIBUTIONS
   Robert V. Hogg, Stuart A. Klugman
   Hohn Wiley & Sons, Inc.
   1984. USA.
   Páginas 213

4. PRACTICAL RISK THEORY FOR ACTUARIES
   D.C. Daykin, T. Pentikäinen & M.Pesonen
   Chapman & Hall
   Primera Edición 1994
   Páginas 539

5. MATHEMATICAL METHODS IN RISK THEORY
   Hans Buhlmann
   Springer-Verlay Berlin Heidelberg
   1970. Nueva York, USA
   Páginas 235

6. RISK THEORY
   Beard R.E., Pentikäinen T. & Pesonen E.
   Chapman & Hall,
   3ra Edición, 1969. Londres, Inglaterra.

7. ACTUARIAL MATHEMATICS
   Newton L. Bowers, J.R., Hans U. Gerber.
   The Society Of Actuaries
   2da. Edición, 1997. U.S.A.
   Capítulos 1, 2, 12, 13 Y 14

8. LOSS MODELS FROM DATA TO DECISIONS
Stuart A. Klugman, Hanrry H. Panjer, Gordon E. Willmot
Willey Series In Probability & Statistics, John Willey & Sons
1998 U.S.A.

9. ACTUARIAL PRACTICE OF GENERAL INSURANCE
Australian Actuarial Institute
Buchanan & Howe

10. COURSE 151 RISK THEORY, CONCEPT BASED STUDY GUIDE
G.V. Ramanathan
The Society Of Actuaries
3ra. Edición, 1998. USA
Paginas 127

11. INSURANCE RISK MODELS
Harry H. Panjer, Gordeon E. Willmot
Chicago, USA.
Páginas 439

12. INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS
Robert V. Hogg, Allen T. Craig.
Upper Saddle River, New Jersey
Prentice Hall
5ta. Edición, 1995
Páginas. 559

13. INSURANCE AND RISK THEORY
M. Goovaerts, F. de Vylder, J. Haezendonck
N.A.T.O. Actuarial Studies Institute Series
D. Reidel Publishing Company.
1986
Páginas. 487

14. INSURANCE PREMIUS, Theroy and Applications
M. J. Goovaerts, F. de Vylder, J. Haezendonck
North Holland Amsterdam Publishing Company
Páginas. 399

15. AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL RISK THEORY
Hans U. Gerber
University of Pennsylvania
1979

16. TEORIA MODERNA DE PROBABILIDADES Y SUS APLICACIONES
Emmanuel Parzen
Editorial Limusa
1982