

14



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES**

**CAMPUS ARAGÓN**

**“PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS EN ESTRUCTURAS”**

297113

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A N:**

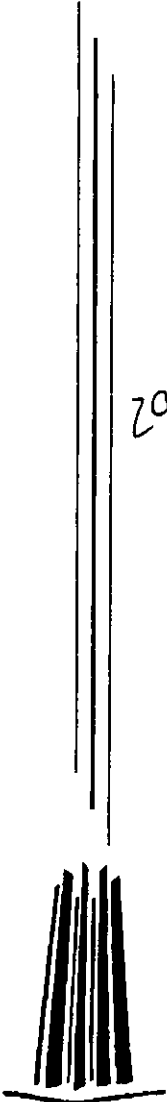
**JORGE HERNÁNDEZ DOMÍNGUEZ**

**ASESOR:**

**ING. ADOLFO T. ALMAZAN JARAMILLO**

**MÉXICO**

**2001.**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Contenido

---

	Página
• <b>Introducción</b>	1
• <b>Capítulo 1. Bases Teóricas.</b>	<b>4</b>
1.1 Esencia del análisis estructural	4
1.2 Equilibrio entre fuerzas internas y externas	7
1.3 Deformaciones	9
1.4 Relación Fuerza – Desplazamiento	10
• <b>Capítulo 2. Desarrollo del Método de Cross.</b>	<b>11</b>
2.1 Fundamentos de la distribución de momentos	12
2.2 Aplicación de la distribución de momentos	19
2.3 Marcos sin desplazamiento lateral	23
2.4 Marcos con desplazamiento lateral	26
2.5 Marcos con elementos inclinados	33
2.6 Marcos de varios niveles	35
• <b>Capítulo 3. Ejemplos Básicos.</b>	<b>37</b>
3.1 Vigas hiperestáticas	37
3.2 Marcos sin desplazamiento	75
3.3 Marcos con desplazamiento	101

---

• <b>Capítulo 4. Desarrollo y Manejo del Programa.</b>	<b>129</b>
4.1 Fases para la creación de un programa	131
4.2 Microsoft Excel	133
4.3 Análisis del método para desarrollar el programa	137
4.4 Establecer el modelo de solución	141
4.5 Ejecución y ajuste del modelo establecido	162
4.6 Mantenimiento y corrección del programa	169
• <b>Capítulo 5. Aplicación de los Programas.</b>	<b>170</b>
• <b>Apéndice</b>	<b>200</b>
Tabla 1. Momentos de Empotramiento para Vigas Uniformes	200
Tabla 2. Rigideces Angulares y Lineales para Desplazamientos Unitarios	202
Tabla 3. Vigas Simplemente Apoyadas	203
• <b>Conclusiones</b>	<b>205</b>
• <b>Bibliografía</b>	<b>209</b>

---

## **A DIOS.**

El primer agradecimiento, sin duda tiene que ser para quien nos ha permitido estar en donde ahora estamos. y mantenernos con vida.

GRACIAS

## **A MIS PADRES.**

Margarita Domínguez Espinoza.

Evodio Hernández Vázquez.

A ustedes que han sido mi principal soporte durante toda mi vida, Quiero brindarles este especial agradecimiento, y aunque puede parecer muy sencillo, la verdad es que no se puede agradecer en unas cuantas palabras lo que se ha ofrecido durante toda la vida. sobre todo el esfuerzo que han hecho para permitirme que yo pudiese terminar mi carrera.

GRACIAS

## **ING. ADOLFO ALMAZAN JARAMILLO.**

Mi cordial agradecimiento por la asesoría en este trabajo, además de la amistad que siempre existió.

GRACIAS

## **AL JURADO**

Ing. Oscar Valentín Paz.

ING Gilberto García Santamaría González.

Ing Ma. de los Angeles Sánchez Campos.

Ing Karla Ivonne Gutiérrez Vázquez.

---

**A MIS HERMANOS.**

María del Rocío.

María Antonieta y Pedro.

Alberto y Juanita.

David.

Gracias por lo que me pudieron ayudar durante mis estudios, y la culminación de ellos.

GRACIAS

**NOEMÍ GRISEL CARREON MORALES.**

Gracias por estar conmigo y motivarme para buscar la superación, tu sabes que eres una parte especial para mí.

GRACIAS.

**A MIS AMIGOS.**

Aunque no siempre he logrado estar en contacto con todos, les agradezco a todos y cada uno de ustedes el apoyo que me ofrecieron, además de su amistad.

GRACIAS.

---

# Introducción

---

El Análisis Estructural en la carrera de Ingeniería Civil, tiene gran importancia sobre todo para los futuros estructuristas; para llevar a cabo este análisis existen tres métodos de análisis para estructuras hiperestáticas que son los más comunes:

- 1) *Método de Flexibilidades*. El procedimiento general de este método se basa en la necesidad de que las deformaciones de la estructura deben satisfacer las condiciones de compatibilidad con los requisitos estructurales. Este método no es recomendable para la solución de estructuras como por ejemplo un marco continuo de varios pisos, sin embargo, se puede usar ventajosamente en el caso de marcos de una nave y un piso de formas poco usuales.
- 2) *Método de Rigideces*. En la aplicación de este método, los desplazamientos lineales y angulares de los nudos (o bien los extremos libres de los voladizos) se consideran como incógnitas. A los desplazamientos de juntas se les llama indeterminaciones cinemáticas o grados de libertad. Este procedimiento se aplica a estructuras linealmente elásticas que sufren pequeñas deformaciones.
- 3) *Método de Cross*. Este método es conocido también como de la distribución de momentos, debido a que en la solución del sistema de ecuaciones se utiliza el procedimiento de relajaciones. Puede aplicarse a piezas de sección transversal constante o variable, así como también para estructuras de eje recto o curvo. El procedimiento es usado para un número cualquiera de nudos, equilibrando momentos de nudo en nudo, primero para giros y después para desplazamientos lineales, hasta obtener la precisión deseada.

En este trabajo de tesis nos abocaremos al Método de Cross, explicándolo de una forma tal que no represente mayores dificultades, sobre todo con la ayuda de una herramienta fundamental en nuestros días "La Computadora".

En mayo de 1930, el profesor Hardy Cross dio a conocer el Método de Distribución de Momentos en las memorias de la American Society of Civil Engineers, luego de haber enseñado tal procedimiento a sus alumnos en la Universidad de Illinois desde el año de 1924. Su artículo marcó el comienzo de una nueva época en el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas, dando un mayor impulso al empleo de estos sistemas estructurales. El método de la distribución de momentos aplicado a vigas continuas y marcos, implica un poco más de trabajo que los métodos aproximados, pero proporciona una exactitud equivalente a la lograda con los métodos exactos.

El objetivo de desarrollar el tema y hacer énfasis en la computadora, es demostrar que existe la posibilidad de desarrollar un manejo básico del método dentro de una hoja de cálculo, en este trabajo de investigación utilizaremos Microsoft Excel. El empleo de este paquete de computo, además de ser el más comúnmente usado, se debe a que el Método en sí es de operaciones muy básicas, sumar, multiplicar, restar y dividir, esto cualquiera lo podría hacer, la dificultad del Método no se basa en las operaciones, si no en la comprensión de los resultados obtenidos una vez desarrollado el Método.

Como se dijo anteriormente, el método de análisis que se tratará, es de importancia fundamental para el ingeniero especialista en estructuras; sin embargo, debido a los refinados métodos de análisis de que se dispone, existe la tendencia a ponderar el análisis estructural en detrimento del proceso creativo del proyecto. Hardy Cross, el gran ingeniero y educador, dijo: *"Algunas veces existen causas para temer que la técnica científica, orgullosa servidora de las artes y de la ingeniería, este tratando de devorar a su amo"*.

Este trabajo de investigación se desarrollará en un capitulado basado en cinco temas principales, que son:

Como primer tema se desarrollará las Bases Teóricas, que será una síntesis de lo que es el Análisis Estructural, su importancia, así como los conceptos básicos para su comprensión.



Un segundo tema será el Desarrollo del Método, en el cual se explicará los fundamentos en los que esta basado el Método de Cross, se darán las definiciones básicas e indispensables para su comprensión.

En el tercer tema se trabajará para explicar el método con ejercicios sencillos explicados paso a paso; este capítulo tiene el fin de hacer comprender primeramente el Método, y así entender él ¿Porque? de los resultados que se irán obteniendo.

En el cuarto capítulo de este trabajo se explicará la metodología de los programas desarrollados, basado en el uso de una hoja de calculo (Microsoft Excel) sus alcances, las ventajas representadas, la interpretación de sus resultados, también las formulas empleadas para su realización, las dificultades que se presentaron, etc.

El capítulo quinto será de ejercicios realizados con los programas de análisis basados en el uso de una hoja de calculo, existirán varios ejemplos que considerarán diferentes grados de dificultades, desde un marco sencillo (dos columnas y una trabe), hasta un marco de tres claros por tres niveles sometido a diferentes cargas.

También existirá un apartado en el cual estarán una serie de tablas indispensables para el entendimiento y realización del Método.

Es necesario apuntar que el método de la distribución de momentos sigue siendo el más importante de los métodos "manuales" para analizar vigas continuas y marcos. El ingeniero de estructuras puede efectuar con él, rápidamente, análisis aproximados para diseños preliminares y también puede comprobar resultados de la computadora (lo que a veces es muy importante). El método de Cross, sólo es práctico para el análisis de las estructuras relativamente pequeñas.

---

# Capitulo 1

---

---

## BASES TEORICAS

---

### 1.1 ESENCIA DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

El propósito fundamental del Análisis Estructural es determinar en cada uno de los elementos de una estructura, las acciones internas resultantes de la aplicación de las sollicitaciones exteriores a la estructura total, así como también evaluar las deformaciones inducidas por dichas sollicitaciones. Así mismo, el objetivo primordial del diseño estructural es crear una estructura segura y que satisfaga también un conjunto de diversos requisitos impuestos por factores tales como:

- La función de la estructura
- Condiciones del lugar
- Aspectos económicos
- Estética
- Posibilidades de construir, y
- Restricciones legales.

El cálculo de las fuerzas internas y los desplazamientos es una parte integral del proceso de diseño de una estructura, por lo regular nos interesan los esfuerzos internos producidos por las cargas, porque la finalidad es diseñar la estructura de manera que los esfuerzos no excedan los valores límites de seguridad. Otro criterio que se usa con frecuencia es el de establecer un margen de seguridad con respecto a cargas de fallas previstas. En algunos casos, las limitaciones a los desplazamientos

regulan la funcionalidad de la estructura. Por tanto en el aspecto cuantitativo, los criterios principales que se deben considerar en el diseño estructural:

- Equilibrio entre las fuerzas internas y externas
- Límites de los esfuerzos en rangos razonables.
- Seguridad contra la falla.
- Deformaciones controladas.
- Desplazamientos relativos tendientes a cero.

Se analizan las estructuras para determinar las fuerzas internas y a menudo también las cargas que producen las fallas; si se conocen estas cantidades y las propiedades de los materiales de la estructura se puede valorar el margen de seguridad; también se analizan los desplazamientos. Aunque con frecuencia los análisis son meras rutinas, nunca se deben considerar como manipulaciones abstractas de números.

Para poder analizar una estructura es necesario idealizarla. En el caso del análisis de edificios, la idealización frecuente es considerar la estructura formada por series de marcos planos en dos direcciones, reduciendo el problema real tridimensional a uno de dos dimensiones. Se considera además, que las propiedades mecánicas de los elementos en cada marco están concentradas a lo largo de sus ejes.

El buen diseño, como el buen análisis, se basa en prever con certeza el comportamiento de una estructura en las condiciones de servicio. Toda estructura se deforma continuamente a causa de las cargas, los cambios de humedad, la temperatura y por otras causas. De hecho, en cierto grado, casi todas las estructuras son estáticamente indeterminadas. El proyectista debe evaluar el grado de indeterminación y elegir el método de análisis de acuerdo a la precisión con que se represente el comportamiento real de las estructuras.

La mayoría de las estructuras pertenece a esta clase, sin embargo el análisis de las estructuras indeterminadas o redundantes es más complicado y con frecuencia mucho más complejo que el análisis de las estructuras determinadas. En las estructuras indeterminadas, las reacciones y/o las fuerzas internas, no se pueden calcular valiéndose únicamente de la estática, sino que se deben considerar también las deformaciones.

La indeterminación puede ser el resultado de las muchas reacciones existentes, de las barras adicionales en una armadura, de los apoyos empotrados en los marcos, o de la forma geométrica de la estructura.

Las estructuras de concreto reforzado, como las de edificios de varios pisos, casi siempre se construyen como estructuras indeterminadas continuas. No resulta factible ni práctico construir edificios de concreto reforzado como series de elementos estáticamente determinados, a menos que éstos se hayan sido precolados y se una entre sí en la obra. Aun cuando se empleen elementos precolados, es preferible tener continuidad en la estructura final.

Existen muchas formas estructurales que son de por sí indeterminadas, incluyendo la amplia gama de estructuras continuas de muy poco espesor (cascarones curvos y placas plegadas) y la mayor parte de los sistemas que cubren claros en dos direcciones, como las armaduras tridimensionales, etc. Así, al elegir ciertas formas automáticamente se necesita del diseño y construcción de una estructura indeterminada.

A menudo en el análisis estructural surge la necesidad de la precisión en la idealización. Se hacen muchas suposiciones cuando se idealizan estructuras antes del análisis, cada suposición tiende a reducir la verdadera precisión que se obtenga en cálculos subsecuentes. No todas las estructuras se pueden analizar con precisión, algunas son tan complicadas que los métodos suelen resultar inadecuados; en estos

casos, la estructura se simplifica de manera aproximada antes del análisis. o se construyen modelos estructurales y se prueban en laboratorio; dentro de esta categoría están algunos tipos de estructuras de cascarón, de conjunto de placas y de estructuras tridimensionales complicadas.

## 1.2 EQUILIBRIO ENTRE FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS.

Al considerar una estructura sometida a la acción de un sistema de cargas externo, si la misma en su conjunto se encuentra en equilibrio, cualquier elemento que forme parte de la estructura lo estará de igual forma.

El análisis de estructuras, se realizará considerando que tanto los sistemas de fuerzas internas como externas se encuentran en el mismo plano, por lo que las ecuaciones disponibles para el análisis son:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Considerando la estructura de la Fig. 1.1, de la que se ha aislado el nudo C, mostrado en la Fig. 1.2, que representa las fuerzas externas actuantes al igual que las acciones internas desarrolladas por la acción de las primeras en su conjunto.

Las fuerzas referidas, mantienen el equilibrio al nudo porque este forma parte de una estructura que se encuentra en equilibrio, este equilibrio recibe el nombre de *Equilibrio Nodal*.

De igual manera se hace el corte de entrepiso, indicado en la Fig. 1.3, la parte aislada por el corte deberá permanecer en equilibrio debido a que pertenece a una estructura que se encuentra en equilibrio, dicho sistema se conoce como *Equilibrio de entrepiso*.

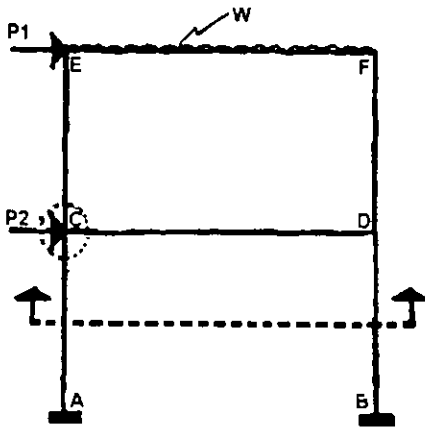


Figura 1.1

ESTRUCTURA EN EQUILIBRIO

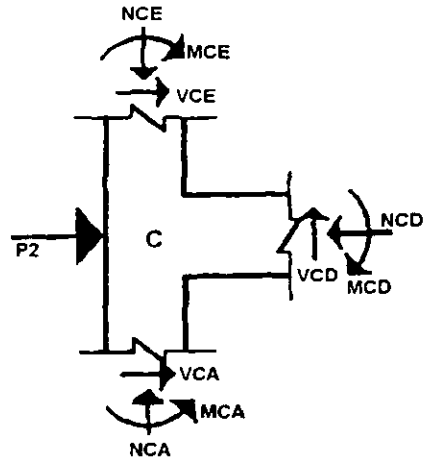


Figura 1.2

EQUILIBRIO NODAL

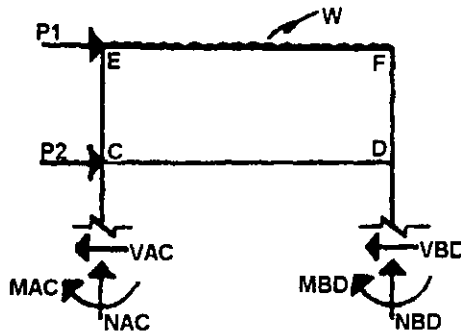


Figura 1.3

EQUILIBRIO DE ENTREPISO

De lo anterior se puede concluir que las fuerzas aplicadas exteriormente a un lado del corte arbitrario tienen que estar en equilibrio con las fuerzas internas desarrolladas en la sección del corte, o sea las fuerzas externas son equilibradas por las fuerzas internas.

### 1.3 DEFORMACIONES

Las fuerzas externas a las que se somete la estructura, le provocan una deformación, teniendo lugar en los miembros que la componen, estas deformaciones pueden ser rotaciones y/o desplazamientos lineales, pero siempre deben conservar las condiciones de continuidad iniciales de la estructura, es decir que todos los elementos de las estructura deformada permanezcan unidos entre si durante todas las etapas de la carga.

En general, se denomina *Unión* a los elementos que constituyen la liga de una barra con otra barra del mismo sistema, o de la cimentación. Su función es restringir algunos o todos los desplazamientos entre los elementos que une.

Como *Grado de Libertad* de un punto, de una recta o de un cuerpo, se define el número de posibilidades de desplazamientos independientes que tienen, sean lineales o angulares. Por lo tanto, los desplazamientos finales en la estructura serán congruentes con los grados de libertad que tienen los diferentes tipos de uniones exteriores e interiores.

Observando la Fig. 1.4, el marco sufre la deformación mostrada, en donde los nudos C y D sufren dos desplazamientos lineales, así como el giro de los mismos. El apoyo A tienen restringidos toda clase de desplazamientos, tanto lineales como angulares. Sin embargo, el apoyo B permite el giro, pero impide los desplazamientos lineales.

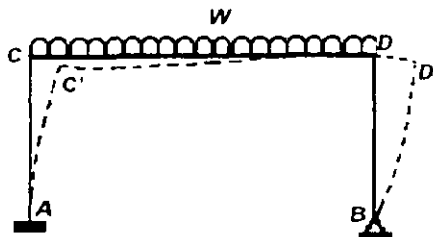


Figura 1.4 CONGRUENCIA DE DEFORMACIONES

## 1.4 RELACION FUERZA - DESPLAZAMIENTO

Cuando una estructura tiene demasiadas uniones para su estabilidad, se denomina hiperestática y el problema de su equilibrio puede resolverse considerando la elasticidad del material empleado, es decir su *deformabilidad*.

De acuerdo con esto es necesario conocer la relación entre la fuerza y desplazamiento, para lo cual existen dos teorías, la Elástica y la Plástica. En la teoría elástica se supone que las fuerzas son proporcionales a los desplazamientos es decir, existe una relación lineal. Fig. 1.5. Debido a que casi todos los materiales utilizados en la ingeniería tales como el acero, concreto, madera, etc., cumplen con el requisito de la elasticidad lineal (Ley de Hooke), se puede aplicar el principio fundamental en el análisis de las estructuras indeterminadas, dicho principio es "*la superposición de causas y efectos*", que establece:

"El efecto producido por varias fuerzas o momentos que actúan simultáneamente sobre una estructura, es igual a la suma de los efectos producidos por las fuerzas o momentos aisladas, suponiendo que actúan separadamente".

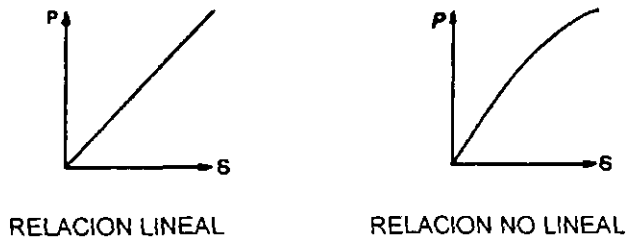


Figura 1.5



---

# Capitulo 2

---

## DESARROLLO DEL

## MÉTODO DE CROSS

---

---

El método de Hardy Cross es conocido también como de la Distribución de Momentos; la solución del sistema de ecuaciones, utiliza el método de relajaciones. El método comprende ciclos de cálculos sucesivos que van aproximando los resultados, para hacerlos cada vez más precisos.

La mayor parte de los métodos de análisis se basan en la solución de sistemas de ecuaciones generadas por diferentes procesos, pero la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas puede ser un trabajo tedioso, si no se cuenta con un equipo electrónico. La distribución de momentos es una técnica valiosa porque con ella se elimina la resolución de ecuaciones simultáneas y se obtienen los resultados deseados por el método de aproximaciones sucesivas, con el cual se converge a la solución correcta con el grado de precisión que se desee.

En 1922, K. A. Calisev publicó un artículo alemán que describía un método de aproximaciones sucesivas para el análisis de estructuras reticulares; los sistemas grandes de ecuaciones y, por tanto las ecuaciones reales se pueden resolver de esta manera con cálculos de mano. Sin embargo el artículo de Calisev paso casi inadvertido hasta que publico unas versiones posteriores en las *Publicaciones IABSE*, en 1936.

La teoría de las estructuras indeterminadas recibió su gran impulso hasta que en 1930 Hardy Cross presentó su método de distribución de momentos, después de usarlo varios años en sus clases. La versión más accesible en su trabajo es su "*Análisis de marcos continuos por medio de la distribución de los momentos de empotramiento*",

(Cross, 1936). El hecho de que este artículo constaba de 10 páginas escritas por Cross y que iba seguido de una discusión de 146 páginas, ilustra el gran interés que dicho artículo produjo.

El interés suscitado por el artículo es una indicación del impacto que Cross tuvo en el análisis de las estructuras indeterminadas. En ese tiempo, el concreto reforzado se estaba popularizando, y la posibilidad de analizar marcos continuos dio un impulso a su desarrollo. En la actualidad existen otros métodos de análisis, pero ninguno es tan popular como el de la distribución de momentos.

## 2.1 FUNDAMENTOS EN LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS

El atractivo del método de distribución de momentos estriba en su sencillez teórica y de aplicación. Cualquier persona puede comprender rápidamente los principios básicos y entender con claridad en qué consiste el procedimiento.

Los siguientes análisis se refieren a estructuras con elementos de sección transversal uniforme en toda su longitud (elementos prismáticos). Se supone que no existe traslación del nudo donde se juntan dos o más elementos de un marco; sin embargo, sí puede haber una rotación (es decir, los elementos pueden girar en conjunto, pero no moverse entre sí). Además, se ignora la deformación axial de los elementos.

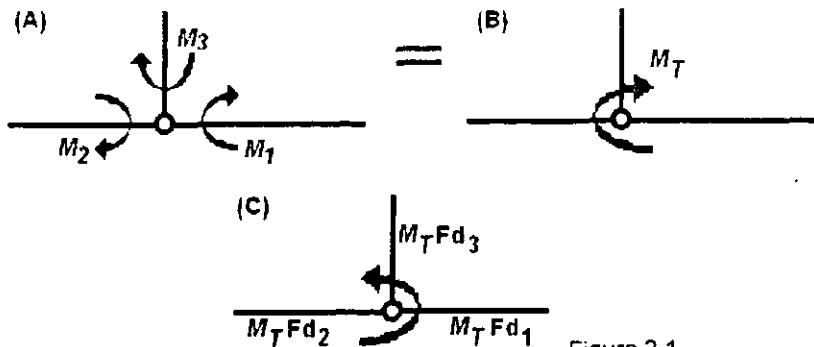


Figura 2.1

Una ejemplificación global del método estriba en la figura 2.1, en (A), se muestra la existencia de momentos que concurren en un nudo, donde cada barra puede o no aportar un momento; en (B), la suma algebraica de todos los momentos que concurren al nudo está representada por un momento total ( $M_T$ ); finalmente en (C), el  $M_T$ , se distribuye entre todas las barras que concurren al nudo aporten o no un momento, la forma en que lo distribuye es a manera de reacción (de sentido contrario), y la parte que le corresponde a cada barra estará definida por su factor de distribución ( $F_d$ ), que se definirá más adelante.

Ahora consideremos el marco de la fig. 2.2 (a); sus nudos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  están empotrados. El nudo  $E$  no está empotrado y las cargas sobre la estructura harán que gire ligeramente; tal rotación se indica en la fig. 2.2 (b) por medio del ángulo  $\theta_E$ .

Si se aplica una sujeción imaginaria al nudo  $E$ , inmovilizándolo de modo que no pueda desplazarse en forma alguna, la estructura tomará la forma que se indica en la fig. 2.2(c). Para esta situación, en donde todos los extremos se encuentran fijos, los momentos de empotramiento se pueden calcular de manera más o menos fácil por medio de las fórmulas usuales. (Ver Tabla 1 del Apéndice).

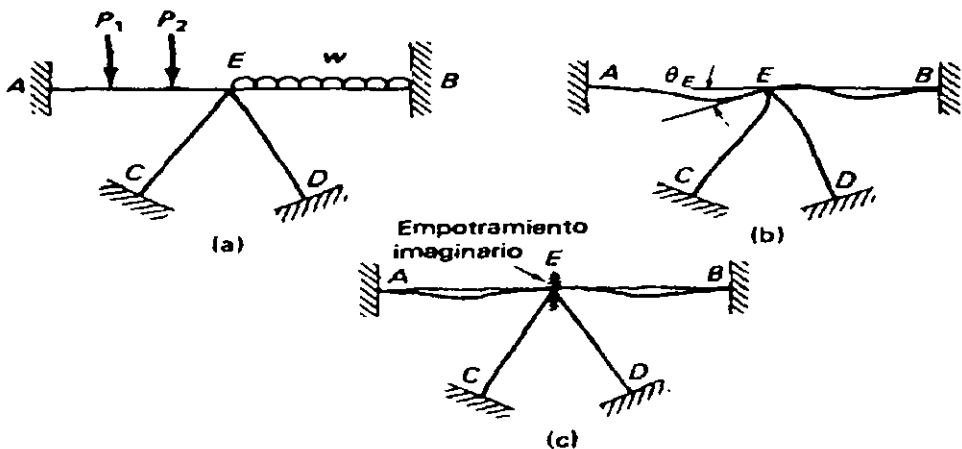


Figura 2.2

Si la sujeción  $E$  se elimina, el nudo rotará un poco, flexionando los extremos de los miembros que concurren a él y originando una redistribución de los momentos en los extremos de los miembros. Los cambios en los momentos o en las rotaciones de los extremos  $E$  de los miembros  $AE$ ,  $BE$ ,  $CE$  Y  $DE$  causan cierto efecto en los otros extremos. Cuando en el extremo de una barra se aplica un momento estando empotrada en el otro, existe cierto efecto de transmisión del momento aplicado hacia el extremo fijo.

Una vez calculados los momentos de empotramiento perfecto (se les llama perfectos porque se hace la consideración de que cada barra es una sola y esta empotrada en el extremo en que se une con otras barras, esto se definirá en el apartado 2.1.1), la resolución del problema puede enunciarse así:

1. Calcular los momentos producidos en los extremos  $E$  de los miembros causados por rotación en el nudo  $E$ ,
2. Hallar la magnitud de los momentos transmitidos o transportados a los otros extremos de las barras, y
3. Realizar la suma o resta de estos últimos momentos a los momentos originales de empotramiento.

Estos pasos pueden expresarse simplemente como la suma de los momentos de empotramiento perfecto, más los momentos debidos a la rotación del nudo  $E$ :

$$M = M_{\text{Fijo}} + M_{\text{ifE}}$$

Antes de aplicar el método y por conveniencia primero se discutirán algunos términos importantes que se usan en el proceso de la distribución de momentos.

### 2.1.1 MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO ( $M_E$ )

Los momentos de empotramiento en un miembro cargado, son los momentos que se desarrollan en los extremos cuando se les impide la rotación. Estos momentos se pueden determinar por cualquier método estándar de análisis indeterminado, y por

conveniencia a menudo se tabulan. En la tabla 1 del Apéndice existen formulas para la obtención de Momentos de Empotramiento, de varios casos comunes de carga.

Si son necesarios los momentos de empotramiento para una barra sujeta a diferentes condiciones de carga, se calculan los momentos por separado para después sumarlos, esto es de acuerdo al principio de la superposición de causas y efectos.

### 2.1.2 FACTOR DE RIGIDEZ ANGULAR ( $K$ )

La relación fuerza-desplazamiento entre el momento y la rotación en el extremo de un miembro se usa constantemente en la distribución de momentos. Esta relación se puede escribir como  $M = K\theta$ , en la que  $K$  se llama Factor de Rigidez Angular. Para un miembro prismático con el extremo lejano empotrado, se tiene un valor de

$K_{Angular} = \frac{4I}{L}$ . En otros casos se obtienen valores diferentes para  $K_{Angular}$ , como se

muestra en la tabla 2 del Apéndice.

### 2.1.3 FACTOR DE DISTRIBUCIÓN ( $F_d$ )

Por lo general, un grupo de elementos estructurales conectados en un nudo tienen diferente rigidez. Cuando un nudo se libera y comienza a girar debido al momento desequilibrado, la resistencia a la rotación varía de miembro a miembro. El problema consiste en determinar que parte del momento de desequilibrio tomará cada uno de los elementos. Parece lógico suponer que el momento desequilibrado será resistido en proporción a la resistencia a la rotación en el extremo de cada elemento.

Considérese una junta en la que se unen varios miembros. Está sujeta de manera que no puede girar y tiene aplicado un momento externo  $M$ .

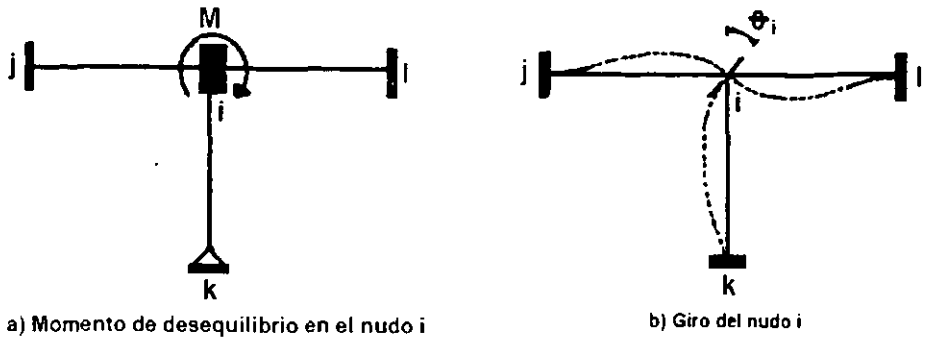


Figura 2.3

Cuando se suelta la junta ésta gira un ángulo  $\theta_i$  y cada uno de los momentos extremos cambia según las cantidades:

$$m_{ij} = K_{ij} \theta_i$$

El cambio del momento para un miembro en particular se determina con la proporción:

$$\frac{m_{ij}}{\sum m_{ij}} = \frac{K_{ij} \theta_i}{\sum K_{ij} \theta_i}$$

Simplificando  $\theta$  en la expresión y definiendo, se tiene:

$$Fd_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}} = \frac{m_{ij}}{\sum m_{ij}}$$

donde:

i = Nudo liberado

j = Nudo subsiguiente de la misma barra

Para cumplir con el equilibrio se requiere  $\sum m_{ij} + M = 0$ ; por lo tanto  $\sum m_{ij} = -M$ , y

$$m_{ij} = -M Fd_{ij}$$

Nótese que en un miembro el Factor de Distribución  $Fd$  depende sólo de los factores de rigidez en cualquier nudo en particular, y no de la carga. Indica la proporción del momento total que actúa en el nudo y que hay que asignar a un miembro en particular localizado en una posición particular del nudo.

Por lo tanto, para el Factor de Distribución se puede dar la siguiente definición:

*El factor de distribución para cualquier miembro de un nudo es igual a la rigidez angular del miembro dividida por la suma de las rigideces angulares de las barras que concurren a dicho nudo. Algo importante es que la suma de los factores de distribución en el nudo debe ser siempre igual a la unidad.*

#### 2.1.4 FACTOR DE TRANSPORTE ( $F_T$ )

Cuando se introduce un momento  $m_j$  en el extremo cercano de un miembro, se desarrolla un momento  $m_j$  en el extremo lejano si éste no puede girar libremente. El factor de transporte  $F_T$  se define simplemente como la relación  $m_p / m_j$

Por lo tanto un momento aplicado en un extremo empotrado de una viga prismática y que este empotrada en el otro extremo, transmitirá a este último un momento de magnitud igual a la mitad del valor del primero. Así que el valor de  $F_T$  es  $\frac{1}{2}$  en el caso de un miembro prismático con el extremo lejano empotrado, y en caso de que el extremo lejano sea un apoyo articulado el  $F_T = 0$ .

#### 2.1.5 DEFINICIONES

Los términos siguientes se emplean constantemente al analizar el método de Cross, por lo que se requiere su conocimiento:

- **MOMENTO DE DESEQUILIBRIO.**

Los nudos de una estructura se consideran inicialmente fijos. Cuando un nudo se libera, este rotará si la suma de los momentos de empotramiento en el nudo no es cero. La suma algebraica de los momentos de extremo será el momento de desequilibrio.

- MOMENTOS DISTRIBUIDOS.

Después de eliminar la sujeción que restringe un nudo, el momento desequilibrado la hará girar en un sentido (por ejemplo en la fig. 2.4(a) se muestra positivo, solo por ejemplificar). La rotación desviará los extremos de los elementos reunidos en la junta, cambiando sus momentos flexionantes. En otras palabras, el giro del nudo es resistido por los elementos estructurales y se producen momentos resistentes, a medida que se deforman, (fig. 2.4(b) que son de sentido contrario al momento de desequilibrio). Esta es la definición del cambio de signo al distribuir el momento total actuante.

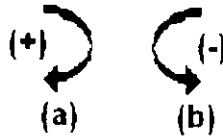


Figura 2.4

La rotación continua hasta que se alcanza el equilibrio (cuando la suma de los momentos resistentes es igual al momento desequilibrado) o sea, cuando es nula la suma de los momentos en el nudo. Los momentos que se desarrollan en los miembros estructurales que resisten la rotación, son los momentos distribuidos.

- MOMENTOS TRANSPORTADOS.

Los momentos distribuidos en los extremos de las barras originan momentos flexionantes en los extremos opuestos, que supuestamente están fijos. Estos últimos son los llamados momentos transportados.

Los momentos transportados serán la mitad del momento distribuido en el otro extremo, para casos de doble empotramiento; y para casos que tienen un apoyo articulado no existen momentos transportados.

- CONVENCION DE SIGNOS.

Los momentos en el extremo de un elemento se consideran negativos cuando tienden a girarlo con respecto al nudo, en sentido de las manecillas del reloj por lo tanto *el momento resistente en el nudo será de signo contrario*. La viga continua de la fig. 2.5,



con sus 2 nudos fijos, tiene un momento en sentido de las manecillas del reloj en el extremo izquierdo del tramo, y un momento contrario en el extremo derecho. Por lo tanto el *momento reaccionante* será el extremo izquierdo negativo y en el derecho positivo. (La convención de signos comúnmente utilizada en Resistencia de materiales asigna a las vigas doblemente empotradas, sujetas a cargas verticales hacia abajo, momentos negativos en uno y otro extremo, debido a que en estos puntos se manifiesta tensión en las fibras superiores de las vigas).

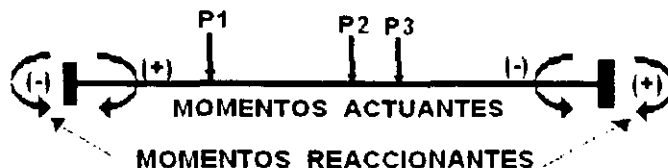


Figura 2.5

Para los cortantes, normales y las fuerzas de aplicación la convención a utilizar será:

- Positivos en dirección de izquierda a derecha y abajo hacia arriba.
- Por lo tanto los negativos serán de derecha a izquierda y arriba hacia abajo.



## 2.2 APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS

Disponiendo ahora de los pocos conceptos necesarios para utilizar el método de distribución de momentos, hay que comenzar por considerar restringidas todas las libertades en los nudos. Se ignoran los efectos axiales y se considera solamente la flexión. Las restricciones son en forma de empotramientos imaginarios aplicados a los nudos para impedir la rotación y la traslación. Las "fuerzas" requeridas para efectuar las restricciones son las llamadas "fuerzas de empotramiento en los extremos".

En el método de distribución de momentos, estas fuerzas de empotramiento se liberan sistemáticamente de modo que permitan a la estructura llegar a un estado de equilibrio bajo la acción de la carga aplicada. El procedimiento se basa por costumbre en la relajación de las restricciones a la rotación y en efectuar la liberación de las restricciones a la traslación mediante un desarrollo especial del método general que involucra una aplicación del principio de superposición de causas y efectos. Su aplicación se describe con las siguientes figuras

La fig.2.6 muestra una viga continua sujeta a la acción de varias cargas.

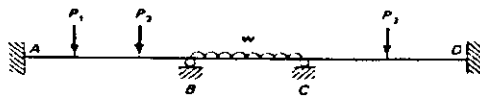


Figura 2.6

En la Figura 2.7 los nudos interiores B y C se suponen fijos y los momentos de empotramiento correspondientes son calculados.

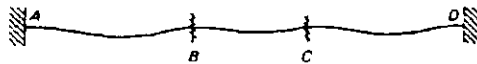


Figura 2.7

Para el nudo B se calcula el momento de disequilibrio, liberándose virtualmente después dicho nudo, como se ve en la siguiente figura. El nudo gira, distribuyendo de esta manera el momento de disequilibrio entre los extremos B de las barras BA y BC, en proporción directa a sus factores de distribución. Los valores de estos momentos distribuidos se transmiten a razón de la mitad a los extremos opuestos de los elementos.



Figura 2.8

Cuando se alcanza el equilibrio, el nudo B se sujeta en su nueva posición girada, soltando luego el C, como se muestra en la Fig. 2.9. El nudo C gira debido a su

momento desequilibrado hasta alcanzar el equilibrio, y la rotación produce momentos en los extremos  $C$  de los miembros  $CB$  y  $CL$ , así como los correspondientes momentos transportados.

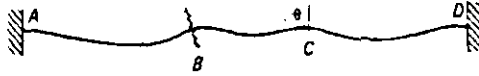


Figura 2.9

Luego se fija el nudo  $C$  y se libera  $B$ , como se muestra.

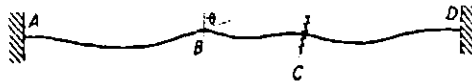


Figura 2.10

Se repite el procedimiento una y otra vez para los nudos  $B$  y  $C$ , disminuyendo rápidamente el valor del momento desequilibrado hasta que toda la liberación adicional de un nudo solo produce una rotación insignificante. Este sencillo proceso constituye el método de la distribución de momentos o método de Cross.

## 2.2.1 MODIFICACION PARA APOYOS SIMPLES

El factor de transporte fue ideado para transportar momentos hacia los extremos empotrados, pero puede aplicarse en los extremos simplemente apoyados, en donde los momentos finales deben ser nulos. Este procedimiento repetido una y otra vez, es absolutamente correcto, pero implica un trabajo innecesario que puede eliminarse estudiando la rigidez de los elementos con extremos simplemente apoyados.

En la fig. 2.11 (a) y (b) se compara la rigidez relativa de un elemento sujeto a la acción de un momento  $M$ , cuando el extremo lejano está empotrado, con la que tiene, cuando dicho extremo es un apoyo simple. En la parte (a) se carga la viga conjugada con el diagrama  $M/EI$  para el caso de empotramiento en el extremo lejano, determinándose luego las reacciones. La pendiente en el extremo izquierdo se

representa por  $\theta_1$ , y es igual a la fuerza cortante, cuando la viga conjugada se carga con el diagrama  $M/EI$ . Su valor es  $M_1L/4EI$ .

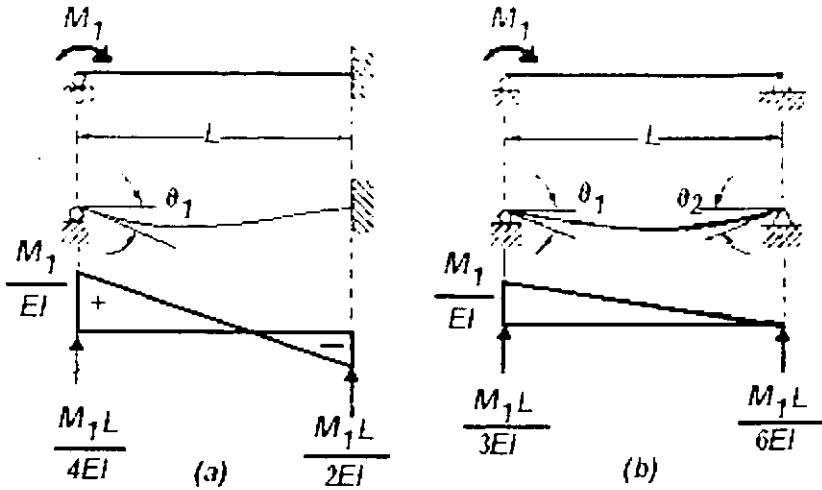


Figura 2.11

La viga conjugada para la viga simplemente apoyada se carga con el diagrama  $\frac{M}{EI}$  y sus reacciones se determinan en la fig. 2.11 (b). El momento  $M_1$  causa una

rotación  $\theta_1 = \frac{M_1L}{3EI}$ ; por tanto, la rotación que provoca el momento  $M_1$ , cuando el extremo lejano se encuentra empotrado, tiene una magnitud igual a las tres cuartas partes de la

rotación en la viga de extremo lejano con apoyo simple  $\left[ \begin{matrix} (M_1L) \\ (4EI) \\ (M_1L) \\ (3EI) \end{matrix} \right] = \frac{3}{4}$ . La viga

simplemente apoyada en el extremo lejano sólo tiene  $\frac{3}{4}$  de la rigidez de la viga con el extremo lejano empotrado. Si los factores de rigidez se modifican según un factor de  $\frac{3}{4}$  en el caso de extremos simplemente apoyados, el extremo simple se equilibra en cero y no se efectúa ya ningún transporte hasta tal punto, por lo que se tendrán los mismo resultados.

## 2.3 MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL.

El método de Cross se aplica también a marcos, si se impide en éstos el movimiento lateral o ladeo. Una estructura hiperestática se considera sin desplazamiento lineal cuando existe simetría tanto en geometría como en el sistema de cargas aplicado exteriormente, o bien, cuando los apoyos son colocados de tal manera que se restrinja la posibilidad de que se produzca dicha traslación. Sin embargo, cuando el ladeo es posible, debe tomarse en consideración, ya que los movimientos o deflexiones ocasionan rotaciones que afectan la magnitud de los momentos de los elementos en donde ocurren.

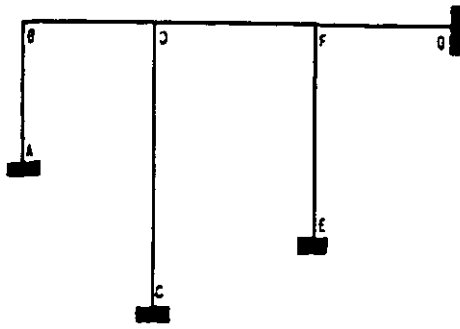
Anteriormente se estudió el efecto de aplicar un momento exterior a una junta y también se vio que los miembros absorben el momento de acuerdo a un conjunto de "factores de distribución". Inversamente, si se quita un momento exterior de una junta, los "cambios" en los momentos flexionantes interiores en los miembros pueden determinarse exactamente en la misma forma.

Esto es lo que sucede en el proceso de distribución de momentos, las juntas de la estructura descargada se empotran mediante empotramientos exteriores (imaginarios). Se aplican las cargas induciendo efectos de extremos empotrados en los miembros; y momentos y fuerzas exteriores desequilibradas en los empotramientos. Se sueltan los momentos desequilibrados permitiendo que la junta gire. Puede suponerse que esto se lleva a cabo aplicando a la junta un momento igual y opuesto, distribuido entre los miembros que concurren en ella. Después de soltar la junta, y producir un estado de equilibrio de momentos, se le empotra nuevamente y se lleva a cabo el proceso en otra junta. El proceso total se continúa hasta que los momentos desequilibrados residuales sean suficientemente pequeños para despreciarse. Usualmente las juntas se sueltan una a la vez, pero algunas ocasiones el proceso puede acelerarse soltando más de una junta a la vez.

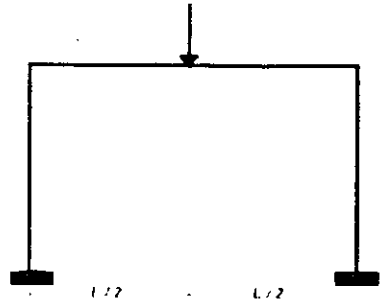
Si la acción de empotrar induce fuerzas transversales en las juntas, estas pueden absorberse mediante los apoyos (como en el caso de una viga continua), pero si no existe apoyo transversal, entonces habrá una falta de equilibrio. El fenómeno se llama, usualmente, "ladeo" y puede manejarse mediante una distribución de momentos, como se verá posteriormente.

Antes de estudiar un ejemplo, el procedimiento se resume como sigue:

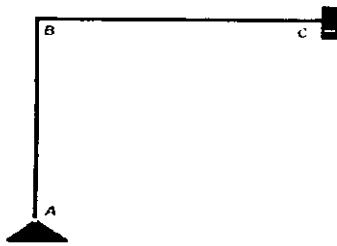
1. Impedir la rotación de las juntas, empotrando los nudos donde concurren dos o más barras.
2. Se calculan los momentos de empotramiento en los extremos de cada miembro de la estructura.
3. Permitiendo que los nudos giren determinar los factores de distribución en cada uno y para cada uno de los miembros que concurren al nudo.
4. Establecer los factores de transporte respectivos.
5. Se calcula el momento de desequilibrio en cada nudo, este momento con signo invertido (esto se explico en la sección 2.1.5 en la definición de Momentos Distribuidos), y se distribuye a los miembros que se interceptan en el nudo de acuerdo a los factores de distribución.
6. Se transportan los momentos a los extremos opuestos multiplicando los valores obtenidos en el paso anterior por los correspondientes factores de transporte.
7. Se repite el proceso de equilibrar todos los nudos y transportar los momentos hasta que los momentos de desequilibrio sean despreciables comparados con los momentos de empotramiento originales.
8. Se procede al calculo de los elementos mecánicos restantes y el dibujo de los diagramas.



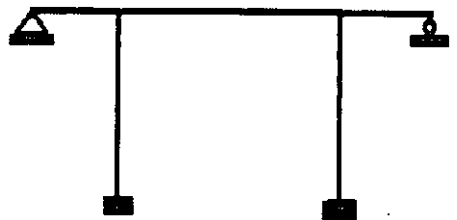
(A)



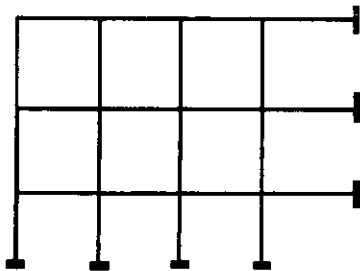
(B)



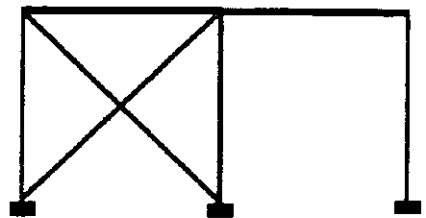
(C)



(D)



(E)



(F)

Figura 2.12  
MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

## 2.4 MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Para la solución de este tipo de estructuras utilizando el método de Cross, es necesario recurrir al principio de superposición de las causas y efectos de desplazamientos separados en las juntas.

El proceso de la distribución de momentos que se ha estudiado hasta ahora esta encaminado a establecer el equilibrio de las juntas en un sentido *rotacional*; es decir, las juntas se sueltan y se les permite girar, "distribuyéndose" así cualquier momento desequilibrado en la junta, entre los miembros que concurren en ella.

Cualquier desplazamiento transversal en el extremo de un miembro con respecto al otro extremo se llama "ladeo" y éste debe permitirse en el método de la distribución de momentos. Las relaciones entre los momentos extremos y la traslación lateral de la junta (sin rotación) se indican en la Fig. 2.13 (a) para miembros con ambos extremos empotrados, y en la Fig. 2.13 (b) para miembros con un extremo articulado. Esta es la rigidez lineal, que se define como el momento que produce un desplazamiento unitario aplicado en los extremos de una barra.

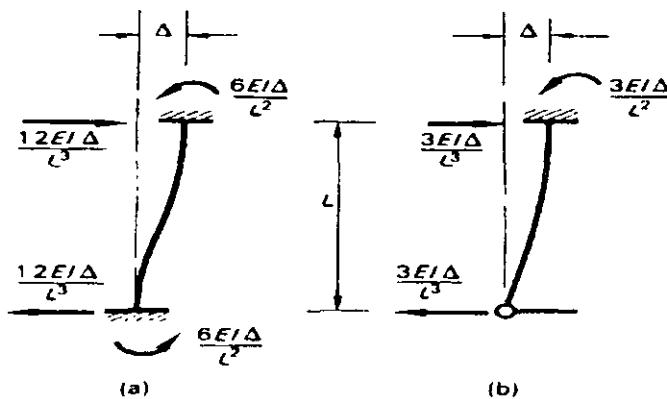


Figura 2.13

RELACIÓN ENTRE MOMENTOS EXTREMOS Y TRASLACIÓN DE LAS JUNTAS  
RIGIDEZ LINEAL



Estas relaciones se usaran para analizar los efectos del lado en las estructuras. Cuando se conoce la magnitud del desplazamiento lateral, puede imaginarse la junta como restringida en la posición desplazada y pueden usarse los efectos estándar de extremos empotrados de la Fig. 2.13 para efectuar esto. Después estos efectos extremos empotrados se suman a los que vienen de las cargas aplicadas y la distribución de momentos se efectúa en la forma usual.

Considerando el marco de la siguiente figura, se tendrá lo siguiente:

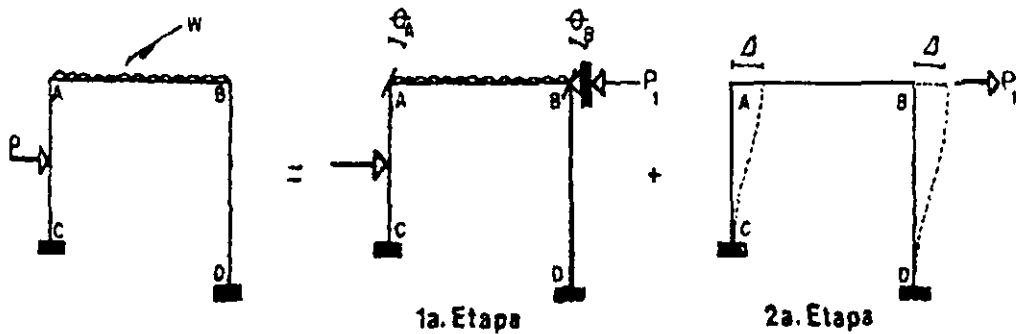


Figura 2.14

El primer paso es el de desarrollar la distribución usual de momentos considerando que los nudos giran pero sin permitir el desplazamiento lineal de los mismos.

Como se ve en la figura existe una tendencia de la fuerza horizontal a inclinar el marco hacia la derecha, con objeto de evitar el movimiento lateral que permitiría la existencia de estos momentos (1ª etapa), es necesario considerar una fuerza horizontal imaginaria, actuando hacia la izquierda ( $P_1$ ).

La fuerza  $P_1$ , sin embargo no puede permanecer, por lo que deben anularse sus efectos, esto se logra aplicando dicha fuerza en sentido opuesto al inicial y aplicándola al cabezal. Es obvio que no se satisface la condición de equilibrio para los nudos A y B, por lo tanto, estos nudos deberán girarse hasta que se logre el equilibrio (2ª etapa).

Antes de proceder a aplicar el método anterior a estructuras, será útil reflexionar sobre las características esenciales del método:

1. El proceso de la distribución de momentos permite girar las juntas sin efectuarse ninguna traslación (ladeo).
2. Después de soltar la junta, ésta se encuentra en equilibrio rotacional, es decir  $\Sigma M=0$ .
3. Impedir el desplazamiento lateral da por resultado una falta de equilibrio de fuerzas transversales; la fuerza desequilibrada  $P_1$  (1ª Etapa) puede calcularse considerando las fuerzas cortantes interiores y las fuerzas exteriores en la junta (o en las juntas donde va desarrollarse el desplazamiento lateral). Esta fuerza puede considerarse en un sentido físico como "La fuerza que impide el desplazamiento".
4. Los momentos interiores debidos al desplazamiento pueden obtenerse induciendo un desplazamiento arbitrario usando momentos de empotramiento a partir de la figura 2.13 y efectuando una distribución por separado. La fuerza correspondiente en la misma dirección que  $P_1$  pero de signo contrario es  $P_2$  (2ª Etapa), y está se calcula en una forma semejante a la que se uso para calcular  $P_1$ . El conjunto de momentos correspondientes a  $P_2$  ahora sé factoriza por "C" para asegurar que:

$$P_1 = C P_2$$

5. El sistema final de momentos flexionantes se obtiene por superposición de causas y efectos:

$$M_{Final} = M_{Etapa 1} + C M_{Etapa 2}$$

## 2.4.1 MOMENTOS DEBIDOS AL DESPLAZAMIENTO LATERAL.

En caso de que todas las columnas de un marco tengan la misma longitud, momento de inercia y modulo de elasticidad, los momentos por desplazamiento lateral supuestos serán los mismos en todas las columnas. Sin embargo, si difieren las longitudes de las columnas, sus momentos de inercia y/o su modulo de elasticidad, lo anterior no sucederá.

Si la carga  $P$  que actúa sobre el marco de la Fig. 2.15 desplazará a éste una distancia  $\Delta$ , el marco tomaría la configuración deformada que se muestra en la Fig. 2.16.

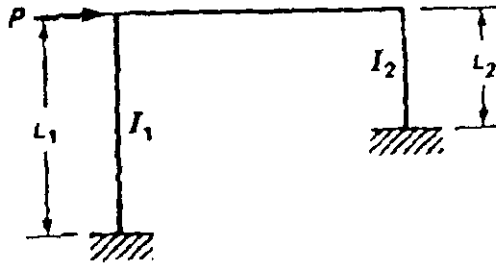


Figura 2.15

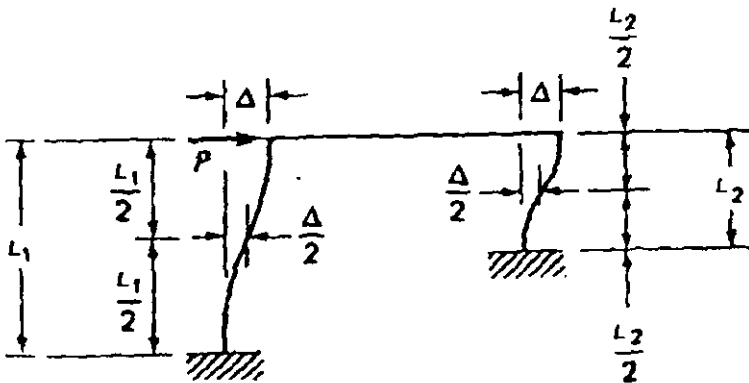


Figura 2.16

Teóricamente, ambas columnas se deforman según curvas S perfectas en tanto que la viga se desplaza como cuerpo rígido sin flexión. En los puntos medios de las columnas, la deflexión será igual a  $\Delta/2$ . Tales puntos pueden considerarse entonces como puntos de inflexión, y las mitades inferiores como vigas en voladizo. La expresión para la deflexión en una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre, es  $PL^3/3EI$ . Como las deflexiones son las mismas en ambas columnas, pueden escribirse las siguientes expresiones:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{(P_1)(L_1/2)^3}{3EI_1} = \frac{P_1 L_1^3}{24EI_1}$$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{(P_2)(L_2/2)^3}{3EI_2} = \frac{P_2 L_2^3}{24EI_2}$$

Despejando de estas expresiones  $P_1$  y  $P_2$ , que son las fuerzas que actúan en los voladizos, se tiene:

$$P_1 = \frac{12EI_1\Delta}{L_1^3}$$

$$P_2 = \frac{12EI_2\Delta}{L_2^3}$$

Los momentos producidos por las dos fuerzas en los extremos de sus voladizos respectivos, son iguales a la fuerza multiplicada por la longitud del voladizo correspondiente. Escribiendo las expresiones para estos momentos y sustituyendo en estas los valores de  $P_1$  y  $P_2$ , se tiene que

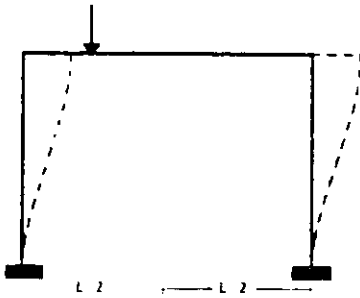
$$M_1 = P_1 \frac{L_1}{2} = \left( \frac{12EI_1\Delta}{L_1^3} \right) \frac{L_1}{2} = \frac{6EI_1\Delta}{L_1^2}$$

$$M_2 = P_2 \frac{L_2}{2} = \left( \frac{12EI_2\Delta}{L_2^3} \right) \frac{L_2}{2} = \frac{6EI_2\Delta}{L_2^2}$$

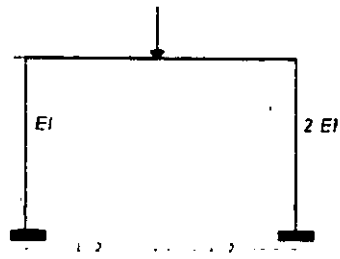
De estas expresiones se puede tener la relación entre los momentos, como se indica enseguida:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{6EI_1\Delta}{6EI_2\Delta} = \frac{EI_1}{EI_2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}$$

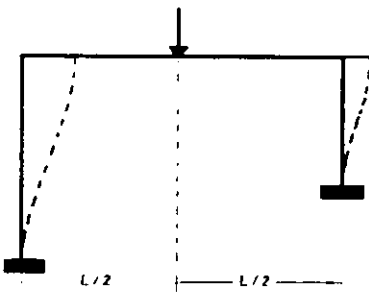
Debe emplearse esta relación para suponer valores de los momentos originados en las columnas de un marco por desplazamiento lateral. Pueden suponerse cualesquiera valores para los momentos, siempre que éstos sean proporcionales a las magnitudes  $\frac{EI}{L^2}$ . Si los valores de  $EI$  y de  $L$  fueran iguales, los momentos supuestos tendrían idéntico valor.



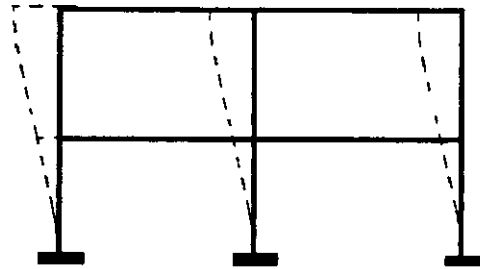
(A)



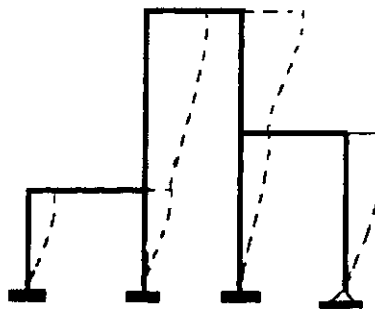
(B)



(C)



(D)



(E)

Figura 2.17  
MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

## 2.5 MARCOS CON ELEMENTOS INCLINADOS

Los marcos considerados hasta ahora han estado compuestos de elementos horizontales y verticales. En la sección 2.4.1 se demostró que cuando en dichos marcos se presenta el ladeo, en las columnas se producen momentos de empotramiento proporcionales a sus valores  $6EI\Delta/L^2$ . Además, los desplazamientos laterales no produjeron momentos de empotramiento en las vigas.

El marco de la fig. 2.18, con un elemento inclinado, puede analizarse de modo muy semejante a como se procedió con los marcos de columnas verticales previamente considerados. Los momentos de empotramiento debidos a las cargas externas se calculan y se distribuyen; se determinan las reacciones horizontales (un poco más difícil que en los casos anteriores) así como la fuerza horizontal necesaria en el soporte imaginario.

Puesto que los valores  $\Delta$  normalmente serán distintos en los diferentes elementos, se suponen momentos por ladeo en proporción a los valores  $EI\Delta/L^2$ . A continuación se realiza la distribución de los momentos supuestos, se calculan las reacciones horizontales y los momentos necesarios para lograr el equilibrio. Por último, estos valores de momento se superponen a los anteriormente distribuidos.

Para este análisis, considérese el marco de la fig. 2.18 (a) y supóngase que se ladea hacia la derecha como se muestra en la parte (b) de la figura. Se puede ver que el movimiento lateral del marco producirá ciertos valores  $\Delta$ , así como momentos tanto en las columnas como en la viga. Para determinar los valores  $EI\Delta/L^2$  para cada elemento es necesario tener los valores  $\Delta$  relativos en cada uno de ellos.

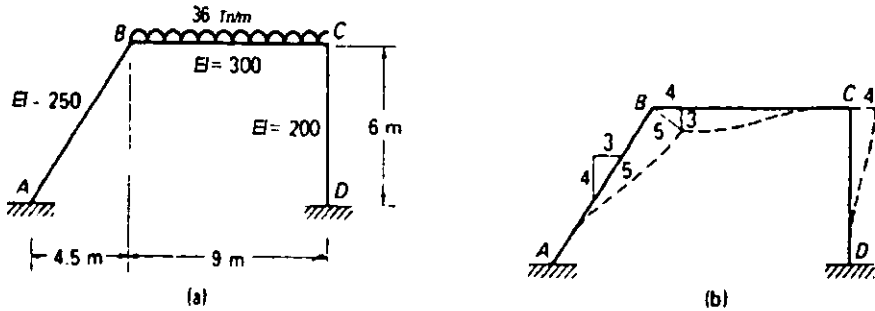


Figura 2.18

Al desplazarse el marco hacia la derecha, el nudo  $B$  describe un arco de centro en  $A$ , en tanto que el nudo  $C$  lo hace siguiendo un arco cuyo centro está en  $D$ . Como tales arcos son muy cortos, se considera que son líneas rectas perpendiculares a los elementos respectivos. En vez de desarrollar fórmulas trigonométricas complicadas para determinar los valores relativos de  $\Delta$ , los autores han dibujado apenas los triángulos de desplazamientos en la figura.

La columna  $AB$  tiene una pendiente de  $6/4.5 = 4/3$ , o sea, la determinada por 4 unidades verticales, 3 unidades horizontales y 5 unidades a lo largo. Si el movimiento relativo del nudo  $B$  perpendicular a  $AB$  se supone igual a 5 unidades, su desplazamiento vertical será de 3 y su desplazamiento horizontal será de 4.

El nudo  $C$  se mueve perpendicularmente a  $CD$ , es decir, en dirección horizontal. Si se ignora el cambio de longitud del elemento  $BC$ , el nudo  $C$  debe desplazarse horizontalmente la misma distancia que la  $B$ , o sea, 4 unidades. Ahora se dispone de los siguientes valores relativos  $\Delta_{AB} = 5$ , girando en sentido de las manecillas del reloj;  $\Delta_{BC} = 3$ , girando en sentido contrario y  $\Delta_{CD} = 4$ , girando en sentido de las manecillas. La rotación en sentido de las manecillas del reloj origina un momento resistente negativo, o de sentido contrario.



Valores $\Delta$ relativos	Momentos relativos de ladeo $EI \cdot \Delta L^2$
$\Delta_{AB} = -5$	$M_{AB} = \frac{(250)(-5)}{(25)^2} = -2$
$\Delta_{BC} = +3$	$M_{BC} = \frac{(300)(+3)}{(30)^2} = +1$
$\Delta_{CD} = -4$	$M_{CD} = \frac{(200)(-4)}{(20)^2} = -2$

## 2.6 MARCOS DE VARIOS NIVELES

El marco de la figura 2.19 puede desplazarse lateralmente de dos maneras posibles. Obviamente, las cargas  $P_1$  y  $P_2$  harán que ambos pisos se ladeen hacia la derecha, pero no se sabe la magnitud del desplazamiento en el piso superior (condición  $x$ ), o su valor para el piso inferior (condición  $y$ ). Es necesario entonces considerar dos condiciones de desplazamiento lateral.

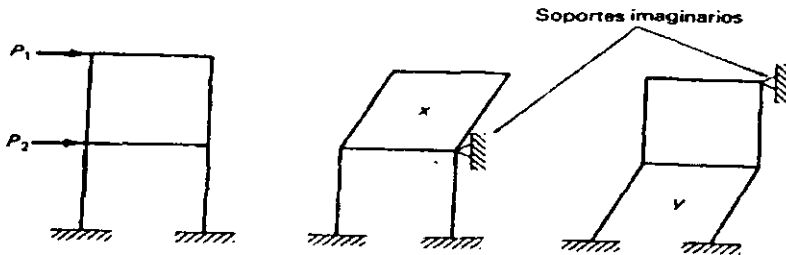


Figura 2.19

Para analizar el marco mediante el procedimiento normal para desplazamiento lateral se necesita:

1. Suponer valores de los momentos en el piso superior para la condición  $x$ , así como la distribución de estos momentos en toda la estructura, y
2. Suponer valores de los momentos en el piso inferior para la condición  $y$ , así como su distribución en todo el marco.

Se podría escribir una ecuación para el piso superior igualando la suma del producto de  $x$  por las fuerzas horizontales originadas por los momentos de condición  $x$ , y el de  $y$  por las fuerzas horizontales producidas por los momentos de condición  $y$ , a la fuerza cortante total en este piso,  $P_1$ . Después, se formula una ecuación semejante para el piso inferior igualando las fuerzas horizontales producidas por los momentos supuestas, a la fuerza cortante en este piso,  $P_1 + P_2$ . La solución simultánea de ambas ecuaciones daría, entonces, los valores de  $x$  y de  $y$ . Los valores finales de los momentos en el marco serían la suma del producto de  $x$  por los momentos distribuidos según  $x$ , y el de  $y$  por los momentos distribuidos según  $y$ .

El método no es difícil de aplicar a un marco de dos pisos; pero en los marcos que tengan más de dos, lo anterior se vuelve más difícil, pues cada piso adicional presenta una condición de desplazamiento lateral también adicional, y por tanto, una ecuación simultánea más.

# Capitulo 3

## EJEMPLOS

### BASICOS

Para hacer una explicación más clara del método, en el siguiente capítulo se realizarán ejercicios de diferente dificultad, tratando de que estos sean comprendidos con la suficiente claridad para poder entender posteriormente el desarrollo del programa.

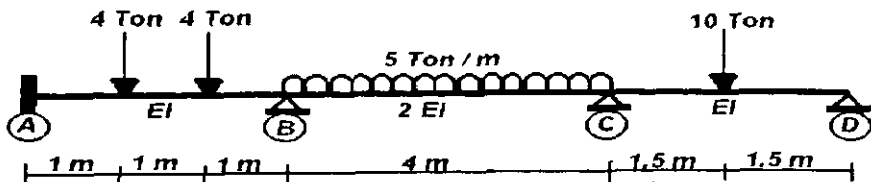
A continuación resolveremos problemas en los que presentaremos varias simplificaciones del método, así como convenciones de signos.

### 3.1 VIGAS HIPERESTATICAS

Haremos explicaciones a las vigas continuas que por tener nudos con dos piezas como máximo, son las estructuras continuas hiperestáticas más simples.

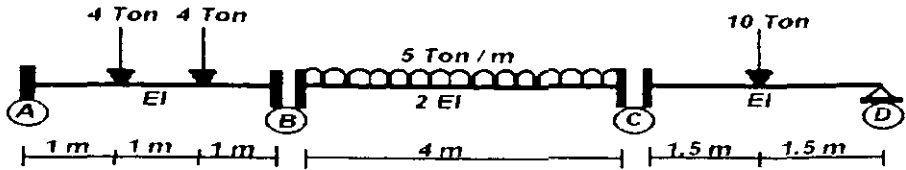
#### EJEMPLO 3.1.1

Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga:



• *RESTRICCION DE GIRO EN LOS NUDOS.*

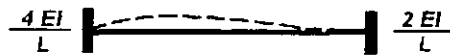
El primer paso será considerar empotrados todos los nudos donde existe unión de barras; los extremos de la viga conservaran su tipo de apoyo.



• *OBTENCION DE LAS RIGIDECES*

De la tabla 2 del Apéndice se obtienen las formulas para obtener las rigideces angulares de cada miembro, según su tipo de apoyo.

Las vigas AB y BC tienen un doble empotramiento, por lo tanto su rigidez angular estará definida por  $\frac{4EI}{L}$ , para ambos extremos del tramo.



La utilización de solo esta formula y no  $\frac{2EI}{L}$  en la rigidez, se debe a que el Método se basa en la aplicación del momento en el nudo en donde permite un giro unitario; la formula del extremo opuesto se empleará para obtener el factor de transporte. En otros métodos, por ejemplo en el de rigideces donde se permite el giro en un extremo, pero también se observa la aplicación simultanea en el otro nudo, y ahí sí se aplican ambas ecuaciones simultáneamente en un mismo tramo.

Para la viga CD, la ecuación a utilizar para su rigidez angular será  $\frac{3EI}{L}$  en el extremo empotrado, y cero en el apoyo fijo. En los apoyos donde el giro es libre (articulados) la rigidez siempre será igual a cero.

La nomenclatura que se utilizará, se basa en subíndices que se refieren solo al sentido de cada barra, es decir, si se visualiza el nudo  $B$ , existen dos opciones: una ver hacia la izquierda en donde se encuentra el nudo  $A$  y este extremo se definirá como  $BA$ ; y la segunda opción es ver hacia la derecha en donde esta el nudo  $C$ , y por lo tanto este extremo será  $BC$ ; en caso de existir mas barras que se unan en un mismo nudo se seguirá la misma forma de nombrarlos.

Resumiendo:

$K_{AB}$  : Rigidez del extremo  $A$  que ve hacia  $B$

$K_{BA}$  : Rigidez del extremo  $B$  que ve hacia  $A$

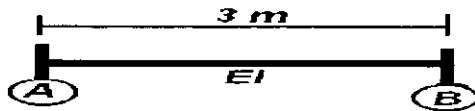
$K_{BC}$  : Rigidez del extremo  $B$  que ve hacia  $C$

$K_{CB}$  : Rigidez del extremo  $C$  que ve hacia  $B$

$K_{CD}$  : Rigidez del extremo  $C$  que ve hacia  $D$

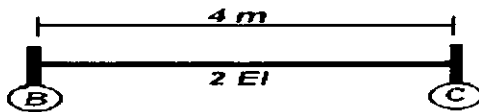
$K_{DC}$  : Rigidez del extremo  $D$  que ve hacia  $C$

Por lo tanto:



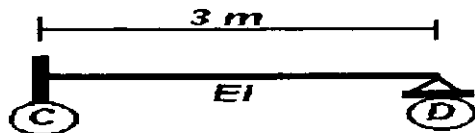
$$K_{AB} = \frac{(4)(EI)}{3} = 1.33EI$$

$$1.33EI = \frac{(4)(EI)}{3} = K_{BA}$$



$$K_{BC} = \frac{(4)(2EI)}{(4)} = 2.00EI$$

$$2.00EI = \frac{(4)(2EI)}{(4)} = K_{CB}$$



$$K_{CD} = \frac{(3)(EI)}{(3)} = 1.00EI$$

$$0EI = K_{DC}$$

- OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

La definición más sencilla del factor de distribución se dio en el apartado 2.1.3, y dice que: *El factor de distribución para cualquier miembro de un nudo es igual a la rigidez del miembro dividida por la suma de las rigideces angulares de las barras que concurren a dicho nudo.* La suma de los factores de distribución en el nudo debe ser siempre igual a la unidad.

$$Fd_n = \frac{K_n}{\sum K_i}$$

Por lo tanto:

$$Fd_{AB} = \frac{1.33EI}{(1.33 + \infty)EI} = 0$$

$$Fd_{BA} = \frac{1.33EI}{(1.33 + 1)EI} = 0.57$$

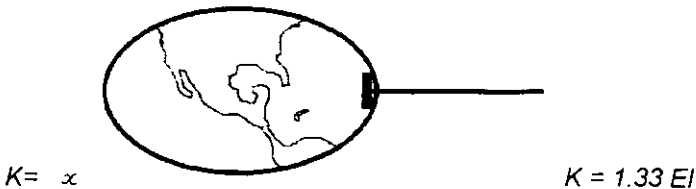
$$Fd_{m'} = \frac{1.00EI}{(1.33 + 1)EI} = 0.43$$

$$Fd_{CB} = \frac{1.00EI}{(1 + 1)EI} = 0.50$$

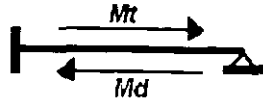
$$Fd_{CD} = \frac{1.00EI}{(1 + 1)EI} = 0.50$$

$$Fd_{DC} = 1$$

En el  $Fd$  de  $AB$ , el valor de infinito " $\infty$ ", se debe a que el empotramiento esta en la superficie terrestre o en su caso en una estructura donde la rigidez es mucho mayor comparada con la rigidez del extremo de la barra.



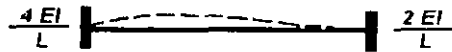
En el  $Fd$  de  $DC$ , el valor de 1 se establece debido a que el tipo de apoyo no puede absorber ningún tipo de momento, y con el valor de 1 todo momento recibido es anulado al distribuir, es decir se regresa todo momento recibido.



$$K = 0, \text{ por lo tanto } Fd = 1$$

• FACTOR DE TRANSPORTE.

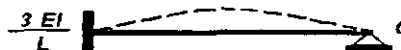
El factor de transporte se puede definir tomando la tabla 2 del Apéndice en donde las rigideces angulares para los casos de doble empotramiento, son:



Por lo tanto el factor de transporte para esta condición sería:

$$FT = \frac{\frac{2EI}{L}}{\frac{4EI}{L}} = \frac{2EI/L}{4EI/L} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Y para el tramo  $CD$  que tiene en su extremo derecho un apoyo articulado, se definiría como:



$$FT = \frac{0}{\frac{3EI}{L}} = 0$$

Por lo tanto:

$$FT_{AB} = FT_{BA} = 0.5$$

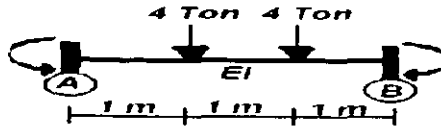
$$FT_{BC} = FT_{CB} = 0.5$$

$$FT_{CD} = FT_{DC} = 0.0$$

• MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Para obtener los momentos de empotramiento, se hará referencia a la tabla 1 del Apéndice, en donde se encuentran varias formulas que son las mas usadas.

Para la viga AB:

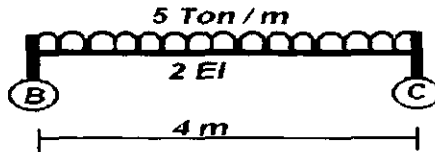


Tiene una doble carga puntual, por lo tanto su momento de empotramiento estará definida por  $M = \frac{Pa(L-a)}{L}$ , esta formula será para los dos extremos del tramo, solo se tendrá que considerar el sentido del giro; para  $M_{AB}$  será negativo, por ir en contra de las manecillas del reloj, y para  $M_{BA}$  será positivo ya que el giro es en sentido contrario.

Así que:

$$M_{AB} = -\frac{(4)(1)(3-1)}{(3)} = -2.67 \qquad M_{BA} = 2.67$$

Para la viga BC:



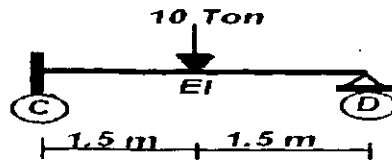
La ecuación a utilizar será  $M = \frac{WL^2}{12}$  en ambos extremos, debido a que la carga es simétrica, si está fuera cargada hacia un lado los momentos en los extremos no serían iguales, la convención de signos es semejante al tramo anterior.

Por lo tanto:

$$M_{BC} = -\frac{(5)(4)^2}{(12)} = -6.67 \qquad M_{CB} = 6.67$$



Para el tramo CD:



La formula para CD es:  $M = \frac{3Pl}{16}$ , siendo negativo y para DC es cero.

Por lo tanto:  $M_{CD} = -\frac{(3)(10)(3)}{(16)} = -5.63$        $M_{DC} = 0.00$

Como se mencionó en el apartado 2.1.1, en caso de que exista un sistema de cargas que no aparezca en la tabla se puede calcular separando las cargas y aplicando la formula correspondiente, se hace lo mismo con todas las cargas y se suman los momentos parciales de cada carga para obtener el momento de empotramiento final.

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

Para la aplicación del método, su manejo y entendimiento claro, primero se tendrá que llevar un orden para realizar las operaciones; existen varias formas en las cuales se puede tabular el método, en este trabajo se presenta una propuesta que para fines de entendimiento y claridad puede ser mucho más manejable, posteriormente se vera el porqué de esta tabulación.

Esta tabulación comprenderá de 6 renglones que siempre deberán existir, ya que contienen los datos básicos:

1		NUDO A	NUDO B		NUDO C		NUDO D
2		AB	BA	BC	CB	CD	DC
3	RIGIDEZ	K					
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>d</sub>					
5	FAC. DE TRANSP	F <sub>t</sub>					
6	MOM. DE EMPOTR.	M <sub>E</sub>					

Otro bloque cuyo numero de renglones dependerá del grado de precisión que se requiera (en este caso será de 9) y un renglón mas para la suma de momentos:

			NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D
			AB	BA	BC	CB	CD	DC	
1									
2									
3	RIGIDEZ	K							
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>d</sub>							
5	FAC. DE TRANSP	F <sub>r</sub>							
6	MOM. DE EMPOTR.	M <sub>e</sub>							
7	1a DISTRIBUCION	1d							
8	1er TRANSPORTE	1T							
9	2a DISTRIBUCION	2d							
10	2do TRANSPORTE	2T							
11	3a DISTRIBUCION	3d							
12	3er TRANSPORTE	3T							
13	4a DISTRIBUCION	4d							
14	4to TRANSPORTE	4T							
15	5a DISTRIBUCION	5d							
16	MOMENTO FINAL	MF							

Y existirán tres más que serán para los cortantes:

			NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D
			AB	BA	BC	CB	CD	DC	
1									
2									
3	RIGIDEZ	K							
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>d</sub>							
5	FAC. DE TRANSP	F <sub>r</sub>							
6	MOM. DE EMPOTR.	M <sub>e</sub>							
7	1a DISTRIBUCION	1d							
8	1er TRANSPORTE	1T							
9	2a DISTRIBUCION	2d							
10	2do TRANSPORTE	2T							
11	3a DISTRIBUCION	3d							
12	3er TRANSPORTE	3T							
13	4a DISTRIBUCION	4d							
14	4to TRANSPORTE	4T							
15	5a DISTRIBUCION	5d							
16	MOMENTO FINAL	MF							
17	CORT HIPERESTAT	V <sub>H</sub>							
18	CORT ISOSTATICO	V <sub>I</sub>							
19	CORTANTE FINAL	VF							

El número de columnas será muy variable, este dependerá de la cantidad de elementos (trabes y columnas) que existan, la única que no cambiará será la primera columna, en donde se encontrarán los nombres de lo que significa cada renglón.

Para ser más claros:

- En el 1er. renglón se colocará el **Nudo**.
- En el 2º se colocará la indicación de la **Barra**, considerando la dirección que tendrá.
- En el 3º se colocarán las **Rigideces Angulares**
- En el 4º el **Factor de Distribución**
- En el 5º el **Factor de Transporte**
- En el 6º los **Momentos de Empotramiento** tomando en cuenta el sentido del miembro (AB ó BA).
- En el 7º se realizará la **Primera Distribución**. Esta consistirá en (1) Obtener la suma de los momentos que existen en un mismo nudo, (2) Este momento total se multiplicará por el factor de distribución (renglón 4) correspondiente al mismo miembro (misma columna), y (3) El resultado se tomará de sentido contrario, es decir se multiplicará por  $-1$ , y ese será el momento distribuido.
- En el 8º se realizará el **Primer Transporte**. Para realizar el transporte se multiplicará el momento distribuido (renglón 7) por el factor de transporte, colocando el resultado en la misma barra pero en su extremo contrario. (Si es AB, entonces en BA).
- Del 9º al 15º se repetirán las operaciones de los renglones 7 y 8, solo que ahora se considerará la suma de momentos con los momentos transportados (renglón 8), así sucesivamente hasta que el valor se aproxime a cero o sea insignificante en comparación con el momento de empotramiento inicial; estos renglones tendrán que terminar con momentos distribuidos.
- En el 16º estará la suma **Total de los Momentos**. La suma se realizara por columna desde el momento de empotramiento hasta la última distribución (renglón anterior).
- En el renglón 17 se calcularán los **Cortantes Hiperestáticos**. Estos se calculan (1) Se suman los momentos hiperestáticos finales de cada barra de sus dos direcciones, (2) La suma se divide entre la longitud total de la barra (de eje a eje), y (3) el sentido de los dos cortantes será de sentido contrario en relación de uno con otro, es decir el sentido que tomarán los cortantes será el que provoque un giro a la barra en sentido contrario al que provoca la suma de los Momentos Finales de la barra

- El 18 será para los **Cortantes Isostáticos**, que son calculados como normalmente se hace a una viga Isostática.
- El último renglón, será para los **Cortantes Finales**. Estos se obtienen con la suma de los cortantes Isostáticos e Hiperestáticos obtenidos en los renglones 17 y 18.

El ejercicio resuelto queda:

		NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D
		AB	BA	BC	CB	CD	DC	
1								
2								
3	RIGIDEZ	K	1.33	1.33	2.00	2.00	1.00	0.00
4	FAC. DE DISTR.	$F_D$	0.00	0.40	0.60	0.67	0.33	1.00
5	FAC. DE TRANSP	$F_T$	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.00
6	MOM. DE EMPOTR.	$M_E$	-2.67	2.67	-6.67	6.67	-5.63	0.00
7	1a DISTRIBUCION	$1d$	0.00	1.60	2.40	-0.69	-0.35	0.00
8	1er TRANSPORTE	1T	0.80	0.00	-0.35	1.20	0.00	0.00
9	2a DISTRIBUCION	2d	0.00	0.14	0.21	-0.80	-0.40	0.00
10	2do TRANSPORTE	2T	0.07	0.00	-0.40	0.10	0.00	0.00
11	3a DISTRIBUCION	3d	0.00	0.16	0.24	-0.07	-0.03	0.00
12	3er TRANSPORTE	3T	0.08	0.00	-0.03	0.12	0.00	0.00
13	4a DISTRIBUCION	4d	0.00	0.01	0.02	-0.08	-0.04	0.00
14	4to TRANSPORTE	4T	0.01	0.00	-0.04	0.01	0.00	0.00
15	5a DISTRIBUCION	5d	0.00	0.02	0.02	-0.01	0.00	0.00
16	<b>MOMENTO FINAL</b>	<b>MF</b>	<b>-1.72</b>	<b>4.60</b>	<b>-4.60</b>	<b>6.46</b>	<b>-6.46</b>	<b>0.00</b>
17	CORT HIPERESTAT	$V_H$	-0.96	0.96	-0.46	0.46	2.15	-2.15
18	CORT ISOSTATICO	$V_I$	4.00	4.00	10.00	10.00	5.00	5.00
19	<b>CORTANTE FINAL</b>	<b>VF</b>	<b>3.04</b>	<b>4.96</b>	<b>9.54</b>	<b>10.46</b>	<b>7.15</b>	<b>2.85</b>

Nota: Los signos para cortante y para momento son:



Con el cuadro se pueden resumir los resultados, pero para hacerlos más claros todavía se requiere realizar los diagramas con los valores obtenidos, estos los realizaremos más adelante, primero explicaremos la obtención de los valores del renglón 7 en adelante, estos ya fueron descritos pero ahora haremos algunas de las operaciones.

- En la 1ª. Distribución:

$$Md = (\sum ME_{nudo.})(Fd_{nudo.})(-1)$$

Para el nudo A

1			NUDO A	
2			AB	
4	FAC. DE DISTR.	$F_d$		0.00
6	MOM. DE EMPOTR.	$ME$		-2.67
7	1a DISTRIBUCION	$Id$		0.00

$$Md_{1A} = (-2.67)(0.00)(-1) = 0.00$$

Para el nudo B

1			NUDO B	
2			BA	BC
4	FAC. DE DISTR.	$F_d$	0.40	0.60
6	MOM. DE EMPOTR.	$ME$	2.67	-6.67
7	1a DISTRIBUCION	$Id$	1.60	2.40

$$Md_{1B} = [2.67 + (-6.67)](0.40)(-1) = 1.60$$

$$Md_{1B'} = [2.67 + (-6.67)](0.60)(-1) = 2.40$$

Para el nudo C

1			NUDO C	
2			CB	CD
4	FAC. DE DISTR.	$F_d$	0.67	0.33
6	MOM. DE EMPOTR.	$ME$	6.67	-5.63
7	1a DISTRIBUCION	$Id$	-0.69	-0.35

$$Md_{1C} = [6.67 + (-5.63)](0.67)(-1) = -0.69$$

$$Md_{1C'} = [6.67 + (-5.63)](0.33)(-1) = -0.35$$

Para el nudo D

1			NUDO D	
2			DC	
4	FAC. DE DISTR.	$F_d$		1.00
6	MOM. DE EMPOTR.	$ME$		0.00
7	1a DISTRIBUCION	$Id$		0.00

$$Md_{1D} = (0.00)(1.00)(-1) = 0.00$$

- En el 1er. Transporte:

Para la barra AB

2			AB	BA
5	FAC. DE TRANSP	F-	0.50	0.50
7	1a DISTRIBUCION	1d	0.00	1.60
8	1er TRANSPORTE	1T	0.80	0.00

$$M_{iA} = Md_{iA} F_{iA} = (1.60)(0.5) = 0.80$$

$$M_{iB} = Md_{iB} F_{iB} = (0.00)(0.5) = 0.00$$

Para la barra BC

2			BC	CB
5	FAC. DE TRANSP	F-	0.50	0.50
7	1a DISTRIBUCION	1d	2.40	-0.69
8	1er TRANSPORTE	1T	-0.35	1.20

$$M_{iB} = Md_{iB} F_{iB} = (-0.69)(0.5) = -0.35$$

$$M_{iC} = Md_{iC} F_{iC} = (2.40)(0.5) = 1.20$$

Para la barra CD

2			CD	DC
5	FAC. DE TRANSP	F+	0.00	0.00
7	1a DISTRIBUCION	1d	-0.35	0.00
8	1er TRANSPORTE	1T	0.00	0.00

$$M_{iC} = Md_{iC} F_{iC} = (0.00)(0.0) = 0.00$$

$$M_{iD} = Md_{iD} F_{iD} = (-0.35)(0.0) = 0.00$$

- Este proceso se repite hasta la 5ª distribución, solo que ahora los momentos que se distribuyen son los momentos que van siendo transportados.

Por ejemplo en la 2ª distribución de la barra BA:

1			NUDO B	
2			BA	BC
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>b</sub>	0.40	0.60
8	1er TRANSPORTE	1T	0.00	-0.35
9	2a DISTRIBUCION	2d	0.14	0.21

$$M_{B4} = [(0.00) + (-0.35)](0.40)(-1) = 0.14$$

- Los **Momentos Finales** son la suma algebraica de los momentos que se van produciendo en cada barra, desde el momento de empotramiento inicial hasta la última distribución.

$$MF_{1B} = -2.67 + 0 + 0.80 + 0 + 0.07 + 0 - 0.08 + 0 - 0.01 + 0 = -1.72$$

- Para obtener los **Cortantes Hiperestáticos** ( $V_H$ ), primero se sumarán algebraicamente los momentos finales de los extremos de cada barra, para obtener el momento que provoca giro a la barra:

$$M_u = MF_u + MF_v$$

En AB  $M_{1B} = -1.72 + 4.60 = 2.88$

En BC  $M_{1C} = -4.60 + 6.46 = 1.86$

En CD  $M_{1D} = -6.46 + 0.00 = -6.46$

Después los momentos obtenidos serán divididos entre la longitud de la barra, para obtener los cortantes en los extremos, el sentido que tendrán será el que provoque un giro que anule al  $M$  que fue obtenido.

$$V_{1B} = V_{BA} = \frac{M_{1B}}{L_{1B}} = \frac{2.88 \text{ Ton m}}{3.00 \text{ Mts}} = 0.96 \text{ Ton}$$

$$V_{1C} = V_{CB} = \frac{M_{1C}}{L_{1C}} = \frac{1.86 \text{ Ton m}}{4.00 \text{ Mts}} = 0.46 \text{ Ton}$$

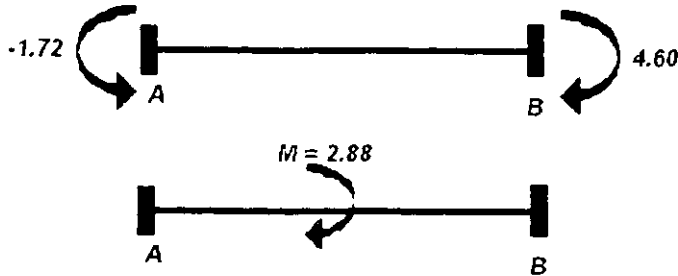
$$V_{1D} = V_{DC} = \frac{M_{1D}}{L_{1D}} = \frac{-6.46 \text{ Ton m}}{3.00 \text{ Mts}} = 2.15 \text{ Ton}$$

Nota: La definición de este cortante se basa en la definición de momento  $M = F d$ , por

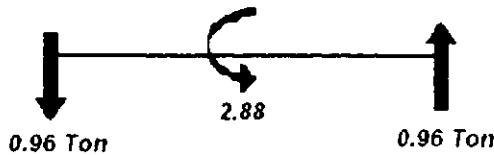
lo tanto  $F = \frac{M}{d}$ , donde  $d$  es la distancia

El sentido será:

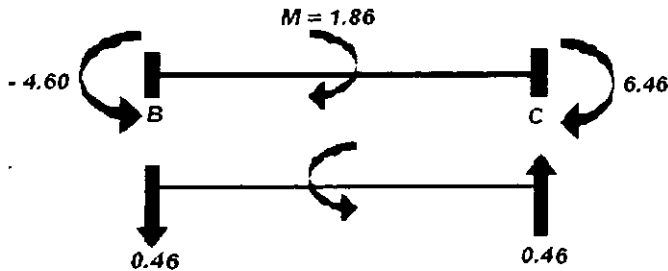
Para AB: Como el momento resultante de los momentos finales es positivo, el giro que provoca es en sentido de las manecillas del reloj;



Para anular este giro que provoca la suma algebraica de los momentos extremos, existen los cortantes, que provocarán el giro en sentido contrario; para este caso los cortantes serán: en A negativo y en B positivo, según la convención de signos.



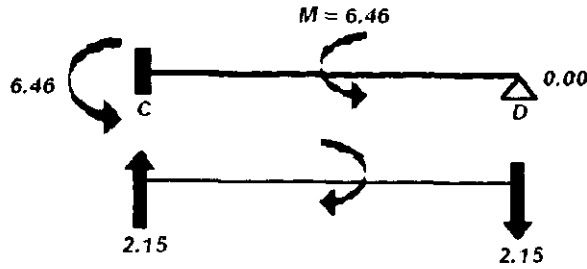
Para BC: En esta barra el momento también es positivo y el giro que provoca es en sentido de las manecillas del reloj;



Para anular el giro los cortantes conservaron el mismo sentido que los de la barra anterior.

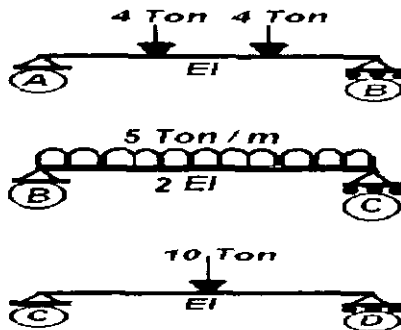


Para CD: En esta barra el momento es negativo por lo que el giro es en contra del sentido las manecillas del reloj:



En esta barra los cortantes cambiaron de dirección por el giro que tendrían que provocar para anular el giro que tendría la barra.

- Los **cortantes isostáticos** se obtienen tomando a la barra como si fuera isostática, es decir simplemente apoyada, si separáramos el tramo, estos cortantes serían solo sus reacciones. En este ejemplo y para los tres tramos, las cargas son simétricas, por lo que las reacciones son iguales, se obtienen solo con dividir la carga total entre dos apoyos.



- Los **cortantes finales** se obtienen solo con la suma de los cortantes hiperestáticos y los isostáticos:

$$IF_{iB} = -0.96 + 4.00 = 3.04$$

$$IF_{Bt} = 0.96 + 4.00 = 4.96$$

$$IF_{Bc} = -0.46 + 10.00 = 9.54$$

$$IF_{cB} = 0.46 + 10.00 = 10.46$$

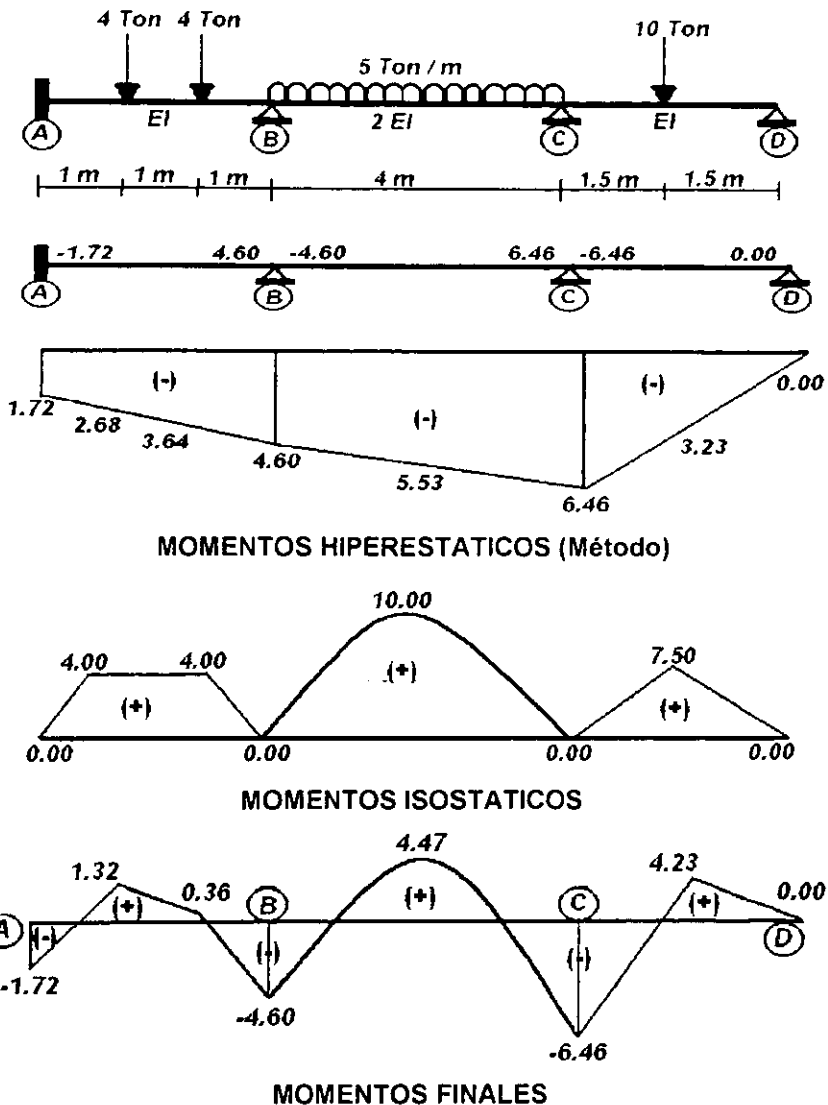
$$IF_{cD} = 2.15 + 5.00 = 7.15$$

$$IF_{Dc} = -2.15 + 5.00 = 2.85$$

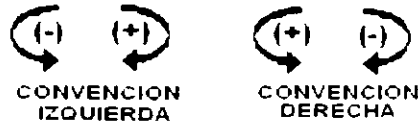
• DIAGRAMAS FINALES

Para que sean más claros los resultados del ejercicio se requiere trazar los diagramas de Momentos y Cortantes.

Según los Momentos Finales obtenidos en el desarrollo del Método, el Diagrama de Momentos queda:



Para obtener los momentos en los apoyos, se debe considerar la convención de signos que toman los momentos de la derecha de cada tramo, es decir *para el trazo del diagrama* se toman los momentos de sentido contrario en el extremo derecho de cada barra; esto se debe a la misma convención de signos que se aplica en estructuras isostáticas, donde para el trazo de los diagramas se considera:



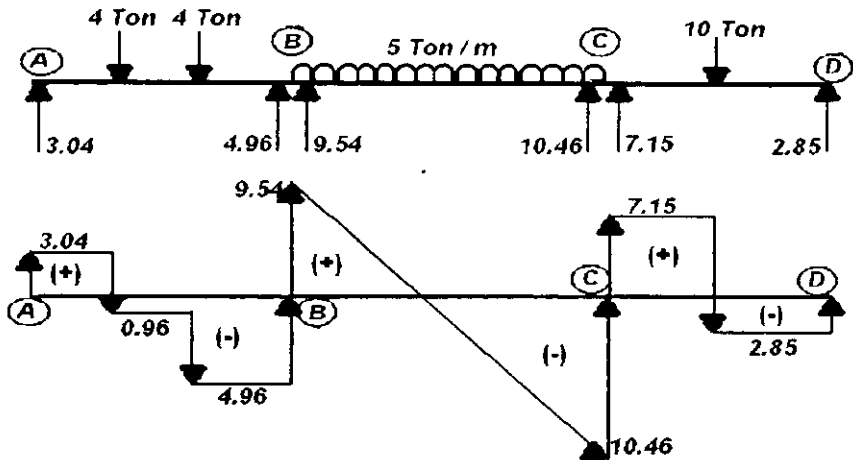
Los momentos intermedios de cada tramo, se obtuvieron aplicando el principio de la superposición de causas y efectos, donde partiendo de la línea recta que forman los momentos finales, se suman en esos puntos los momentos isostáticos de cada tramo.

El **Diagrama de Cortantes** se obtienen tomando los valores de los cortantes finales de los extremos de cada barra con su respectivo sentido, aquí no aplica la convención de derecha, a menos que el trazo del diagrama comience por la derecha, los cortantes intermedios se obtienen considerando la fuerza que actúa en ese punto, ya sea positiva o negativa.

Por ejemplo en el tramo AB, existen dos fuerzas de 4 Ton separadas a cada metro, y el trazo es el siguiente:

1. El cortante inicial en A, indica que la fuerza sube 3.04 Ton
2. Este se mantiene constante hasta un metro donde actúa la primera fuerza de 4Ton, por lo tanto  $3.04 - 4.00 = -0.96$  que es el cortante en ese punto.
3. Se vuelve a mantener constante otro metro hasta la segunda fuerza de 4 Ton, por lo tanto  $-0.96 - 4.00 = -4.96$
4. Del segundo metro al final de la barra, se mantiene en  $-4.96$ , hasta que existe la reacción en el nudo B de la barra AB, por lo tanto:  $-4.96 + 4.96 = 0.00$ ; pero en ese punto existe la reacción de la barra BC, así que  $0.00 + 9.54 = 9.54$ , que es el cortante en ese punto.

5. Debido a que en la barra BC, existe una carga repartida en toda la barra, el cortante bajara también constantemente una fuerza de 5 Ton por cada metro, así que a lo largo de la barra, por lo tanto el cortante bajara 20 Ton; así que:  $9.54 - 20.00 = -10.46$ , que es el cortante en el nudo C.
6. En el nudo C, al igual que en el nudo B, existen dos reacciones que son de las dos barras que concurren en él, así que:  $-10.46 + 10.46 + 7.15 = 7.15$ , que es el siguiente punto en el mismo nudo.
7. En la barra CD, existe solo una carga puntual, así que el cortante se mantendrá constante hasta 1.50 mts de esa barra, que es donde esta aplicada la fuerza, y ahí será:  $7.15 - 10.00 = -2.85$ .
8. Finalmente, se mantendrá constante hasta la última reacción que esta en D, ahí se cerrará el diagrama en cero,  $-2.85 + 2.85 = 0.00$

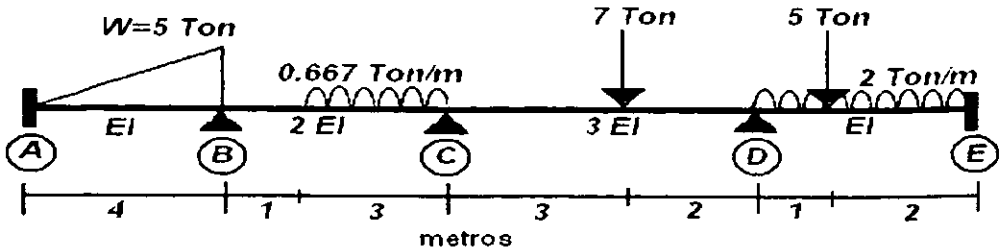


CORTANTES FINALES

El cortante se puede iniciar de la derecha, pero la convención que se aplicará será la de la derecha, es decir cambian los signos al igual que en momentos. Nuevamente se hace la nota de que estas convenciones solo se aplicarán para el trazo de los diagramas.

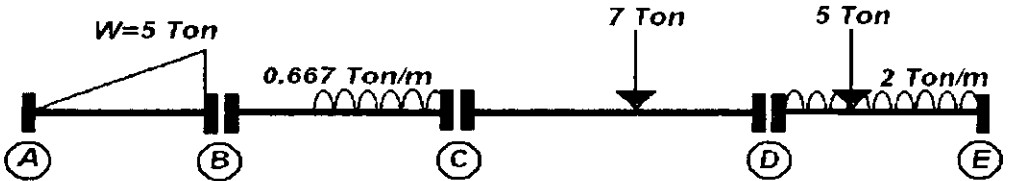
EJEMPLO 3.1.2

Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga:



- *RESTRICCIÓN DE GIRO EN LOS NUDOS.*

Nuevamente en primer lugar se considerarán empotrados todos los nudos donde existe unión de barras.



- *OBTENCIÓN DE LAS RIGIDECES*

De la tabla 2 del Apéndice se obtienen las formulas para obtener las rigideces angulares para cada miembro.

Por lo tanto, como los cuatro tramos se consideran empotrados en sus dos extremos la ecuación es la misma para todos:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

The diagram shows a horizontal beam of length  $L$  and stiffness  $EI$ , fixed at both ends. The formula  $K = \frac{4EI}{L}$  is shown on both sides of the beam.

$$K_{uv} = K_{vu} = \frac{(4)(EI)}{4} = 1.00EI$$

$$K_{uw} = K_{wu} = \frac{(4)(2EI)}{(4)} = 2.00EI$$

$$K_{vw} = K_{wv} = \frac{(4)(3EI)}{(5)} = 2.40EI$$

$$K_{va} = K_{av} = \frac{(4)(EI)}{(3)} = 1.33EI$$

- OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

Los factores de distribución son:

$$Fd_{uv} = \frac{1.00EI}{(1.00 + \infty)EI} = 0$$

$$Fd_{ua} = \frac{1.00EI}{(1.00 + 2.00)EI} = 0.33$$

$$Fd_{uw} = \frac{2.00EI}{(2.00 + 1.00)EI} = 0.67$$

$$Fd_{wb} = \frac{2.00EI}{(2.00 + 2.40)EI} = 0.45$$

$$Fd_{wd} = \frac{2.40EI}{(2.40 + 2.00)EI} = 0.55$$

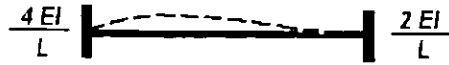
$$Fd_{wa} = \frac{2.40EI}{(2.40 + 1.33)EI} = 0.64$$

$$Fd_{wb} = \frac{1.33EI}{(1.33 + 2.40)EI} = 0.36$$

$$Fd_{wd} = \frac{1.33EI}{(1.33 + \infty)EI} = 0$$

- FACTOR DE TRANSPORTE.

El factor de transporte se definirá nuevamente basándose en la tabla 2 del Apéndice en donde las rigideces angulares para los casos de doble empotramiento, son:



Por lo tanto el factor de transporte para todos los tramos será:

$$FT = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$FT_{AB} = FT_{BA} = 0.5$$

$$FT_{BC} = FT_{CB} = 0.5$$

$$FT_{CD} = FT_{DC} = 0.5$$

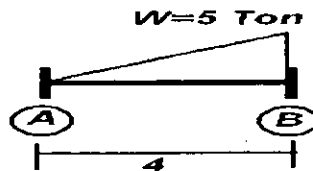
$$FT_{DE} = FT_{ED} = 0.5$$

Por lo tanto:

- MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Para obtener los momentos de empotramiento, se tomará como referencia la tabla 1 del Apéndice:

Para la viga AB:

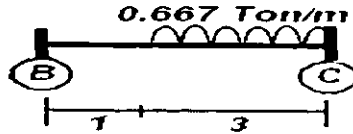


Tiene una carga triangular con su centroide cargado hacia B, por lo tanto sus momentos de empotramiento, serán:

$$\text{Así que: } M_{AB} = -\frac{WL}{15} = -\frac{(5)(4)}{(15)} = -1.33$$

$$M_{BA} = \frac{WL}{10} = \frac{(5)(4)}{(10)} = 2.00$$

Para la viga BC:



Esta barra tiene una carga repartida, pero solo en un tramo de ella, por lo tanto sus momentos de empotramiento serán:

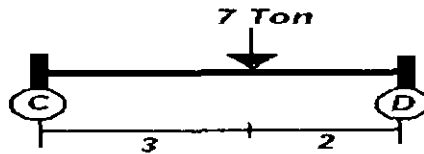
Por lo tanto:

$$W = w \cdot c = (0.667)(3m) = 2.00$$

$$M_{BC} = -\frac{W}{12L^2} [12ab^2 + c^2(a-2b)] = -\frac{2}{12(4)^2} [(12)(2.5)(1.5)^2 + (3)^2(2.5 - (2)(1.5))] = -0.66$$

$$M_{CB} = \frac{W}{12L^2} [12a^2b + c^2(b-2a)] = \frac{2}{12(4)^2} [(12)(2.5)^2(1.5) + (3)^2(1.5 - (2)(2.5))] = 0.84$$

Para el tramo CD:



Tiene una carga puntual que no esta al centro, por lo tanto las formulas para la obtención de los momentos, serán:

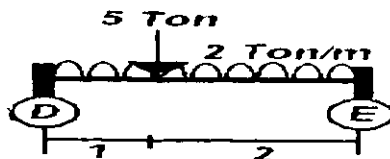
Por lo tanto:

$$M_{CD} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(7)(3)(2)^2}{(5)^2} = -3.36$$

$$M_{DC} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(7)(3)^2(2)}{(5)^2} = 5.04$$



Para el tramo DE:



En este tramo existen dos tipos de carga: Una que es repartida en toda la trabe y otra puntual que no es simétrica; por lo tanto para obtener los momentos de empotramiento, se aplicará el principio de superposición de causas y efectos:

Para la carga repartida:

$$M1_{DE} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(2)(3)^2}{12} = -1.5$$

$$M1_{ED} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(3)^2}{12} = 1.5$$

Para la carga puntual:

$$M2_{DE} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(5)(1)(2)^2}{(3)^2} = -2.22$$

$$M2_{ED} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(5)(1)^2(2)}{(3)^2} = 1.11$$

Por lo tanto, los momentos de empotramiento totales serán:

$$M_{DE} = M1_{DE} + M2_{DE} = -1.5 - 2.22 = -3.72$$

$$M_{ED} = M1_{ED} + M2_{ED} = 1.5 + 1.11 = 2.61$$

#### • APLICACIÓN DEL MÉTODO

La tabulación será la misma que se utilizó en el ejercicio anterior, lo único que cambiara será el número de columnas, ya que en este ejercicio existen cuatro claros, por lo tanto cinco nudos.

1			NUDO A	NUDO B		NUDO C		NUDO D		NUDO E
2			AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
3	RIGIDEZ	K	1.00	1.00	2.00	2.00	2.40	2.40	1.33	1.33
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>r</sub>	0.00	0.33	0.67	0.45	0.55	0.64	0.36	0.00
5	FAC. DE TRANSP	F <sub>t</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
6	MOM. DE EMPOTR.	M <sub>r</sub>	-1.33	2.00	-0.66	0.84	-3.36	5.04	-3.72	2.61
7	1a DISTRIBUCION	1d	0.00	-0.45	-0.89	1.15	1.37	-0.85	-0.47	0.00
8	1er TRANSPORTE	1T	-0.22	0.00	0.57	-0.45	-0.42	0.69	0.00	-0.24
9	2a DISTRIBUCION	2d	0.00	-0.19	-0.38	0.40	0.48	-0.44	-0.25	0.00
10	2do TRANSPORTE	2T	-0.10	0.00	0.20	-0.19	-0.22	0.24	0.00	-0.12
11	3a DISTRIBUCION	3d	0.00	-0.07	-0.13	0.19	0.22	-0.15	-0.08	0.00
12	3er TRANSPORTE	3T	-0.03	0.00	0.09	-0.07	-0.08	0.11	0.00	-0.04
13	4a DISTRIBUCION	4d	0.00	-0.03	-0.06	0.06	0.08	-0.07	-0.04	0.00
14	4to TRANSPORTE	4T	-0.02	0.00	0.03	-0.03	-0.04	0.04	0.00	-0.02
15	5a DISTRIBUCION	5d	0.00	-0.01	-0.02	0.03	0.04	-0.02	-0.01	0.00
16	MOMENTO FINAL	MF	-1.70	1.25	-1.25	1.93	-1.93	4.57	-4.57	2.19
17	CORT HIPERESTAT	V <sub>r</sub>	0.11	-0.11	-0.17	0.17	-0.53	0.53	0.79	-0.79
18	CORT ISOSTATICO	V <sub>i</sub>	3.33	6.67	0.75	1.25	2.80	4.20	6.33	4.67
19	CORTANTE FINAL	VF	3.44	6.56	0.58	1.42	2.27	4.73	7.12	3.88

Nota: Los signos para cortante y para momento son:



- En la 1ª. Distribución:

$$Md = (\sum M_{nudo})(F_{d_{barra}})(-1)$$

Para AB  $Md_{1B} = (-1.33)(0.00)(-1) = 0.00$

Para BA  $Md_{BA} = [2.00 + (-0.66)](0.33)(-1) = -0.45$

Para BC  $Md_{BC} = [2.00 + (-0.66)](0.67)(-1) = -0.89$

Para CB  $Md_{CB} = [0.84 + (-3.36)](0.45)(-1) = 1.15$

Para CD  $Md_{CD} = [0.84 + (-3.36)](0.55)(-1) = 1.37$

Para DC  $Md_{DC} = [5.04 + (-3.72)](0.64)(-1) = -0.85$

Para DE  $Md_{DE} = [5.04 + (-3.72)](0.36)(-1) = -0.47$

Para ED  $Md_{ED} = (2.61)(0.00)(-1) = 0.00$

## - En el 1er. Transporte:

$$\text{Para AB} \quad M_{i_{AB}} = Md_{i_{AB}} F_{i_{AB}} = (-0.45)(0.5) = -0.22$$

$$\text{Para BA} \quad M_{i_{BA}} = Md_{i_{BA}} F_{i_{BA}} = (0.00)(0.5) = 0.00$$

$$\text{Para BC} \quad M_{i_{BC}} = Md_{i_{BC}} F_{i_{BC}} = (1.15)(0.5) = 0.57$$

$$\text{Para CB} \quad M_{i_{CB}} = Md_{i_{CB}} F_{i_{CB}} = (-0.89)(0.5) = -0.45$$

$$\text{Para CD} \quad M_{i_{CD}} = Md_{i_{CD}} F_{i_{CD}} = (-0.85)(0.5) = -0.42$$

$$\text{Para DC} \quad M_{i_{DC}} = Md_{i_{DC}} F_{i_{DC}} = (1.37)(0.5) = 0.69$$

$$\text{Para DE} \quad M_{i_{DE}} = Md_{i_{DE}} F_{i_{DE}} = (0.00)(0.5) = 0.00$$

$$\text{Para ED} \quad M_{i_{ED}} = Md_{i_{ED}} F_{i_{ED}} = (-0.47)(0.5) = -0.24$$

- Este proceso se repite hasta la 5ª distribución, solo que ahora los momentos que se distribuyen son los momentos que van siendo transportados.

En la 2ª distribución de la barra BC:

$$Md_{i_{BC}} = [(0.57) + (-0.45)](0.67)(-1) = -0.38$$

- Los **Momentos Finales**, como ya se menciona, son la suma de los momentos que se van produciendo en cada barra, desde el momento de empotramiento inicial hasta la última distribución.

$$M_{f_{CB}} = 0.84 + 1.15 - 0.45 + 0.40 - 0.19 + 0.19 - 0.07 + 0.06 - 0.03 + 0.03 = 1.93$$

- Los **Cortantes Hiperestáticos** ( $V_H$ ),

Se obtienen primero el momento que provoca un giro a cada barra:

$$M_g = M_{i_g} + M_{f_g}$$

$$\text{En la barra AB} \quad M_{i_{AB}} = -1.70 + 1.25 = -0.45$$

$$\text{En la barra BC} \quad M_{i_{BC}} = -1.25 + 1.93 = 0.68$$

$$\text{En la barra CD} \quad M_{i_{CD}} = -1.93 + 4.57 = 2.64$$

$$\text{En la barra DE} \quad M_{i_{DE}} = -4.57 + 2.19 = -2.38$$

Ahora los momentos obtenidos se dividen entre la longitud de la barra, para obtener los cortantes en los extremos, el sentido que tendrán será el que provoque un giro que anule al  $M$  que fue obtenido.

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{M_{AB}}{L_{AB}} = \frac{-0.45 \text{ Ton m}}{4.00 \text{ Mts}} = 0.11 \text{ Ton}$$

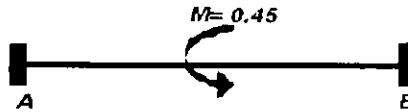
$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{M_{BC}}{L_{BC}} = \frac{0.68 \text{ Ton m}}{4.00 \text{ Mts}} = 0.17 \text{ Ton}$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{M_{CD}}{L_{CD}} = \frac{2.64 \text{ Ton m}}{5.00 \text{ Mts}} = 0.53 \text{ Ton}$$

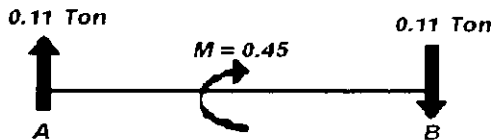
$$V_{DE} = V_{ED} = \frac{M_{DE}}{L_{DE}} = \frac{-2.38 \text{ Ton m}}{3.00 \text{ Mts}} = 0.79 \text{ Ton}$$

El sentido será:

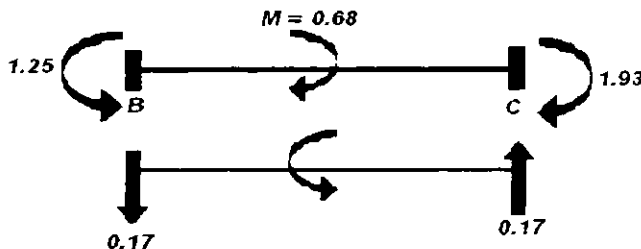
Para AB: Como el momento es negativo, el giro que provoca es en sentido contrario a las manecillas del reloj:



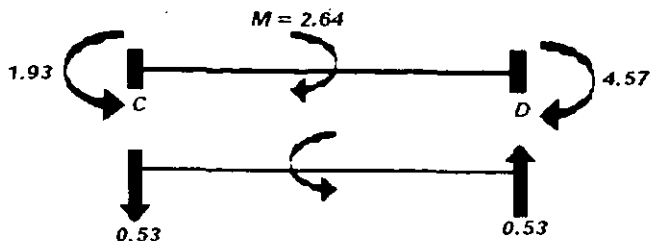
Para anular este giro que provoca la suma algebraica de los momentos extremos, los cortantes serán: en A positivo y en B negativo, según la convención de signos.



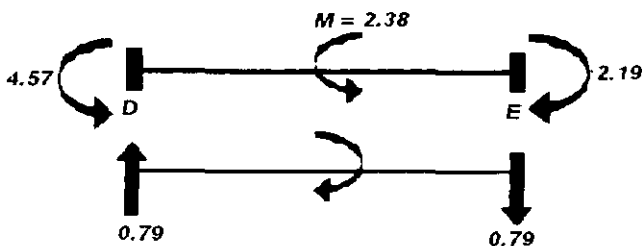
Para BC: En esta barra el momento es positivo y el giro que provoca es en sentido de las manecillas del reloj:



Para CD: En esta barra el momento también es positivo



Para DE. Esta barra tiene un momento negativo por lo que también el giro es en contra del sentido las manecillas del reloj:



- Los **cortantes isostáticos** se obtienen tomando a la barra como simplemente apoyada (Isostática), es decir, se resuelve basándose en las tres ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

- Los **cortantes finales** se obtienen solo con la suma de los cortantes hiperestáticos y los Isostáticos:

$$VF_{AB} = 0.11 + 3.33 = 3.44$$

$$VF_{BA} = -0.11 + 6.67 = 6.56$$

$$VF_{BC} = -0.17 + 0.75 = 0.58$$

$$VF_{CB} = 0.17 + 1.25 = 1.42$$

$$VF_{CD} = -0.53 + 2.80 = 2.27$$

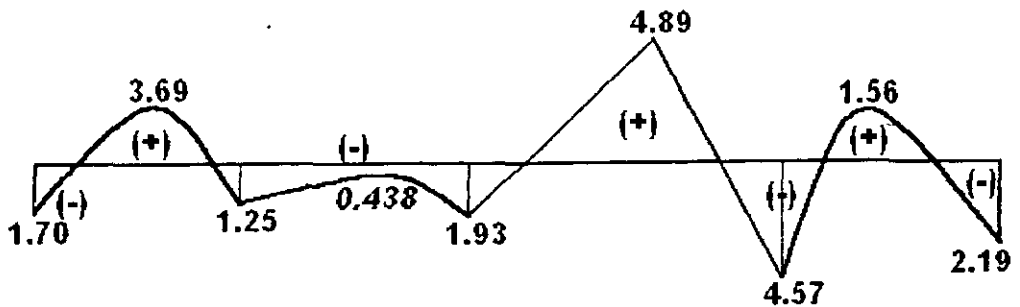
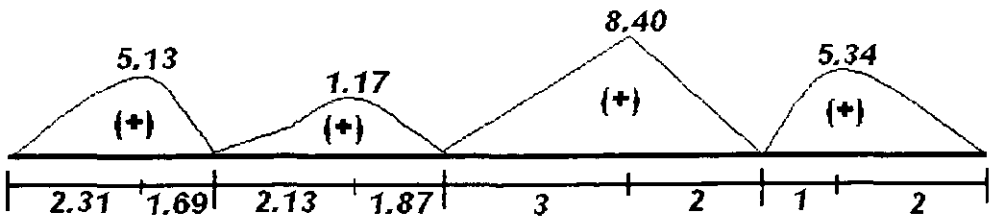
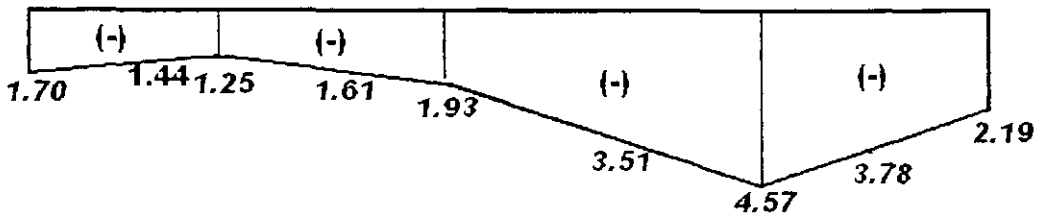
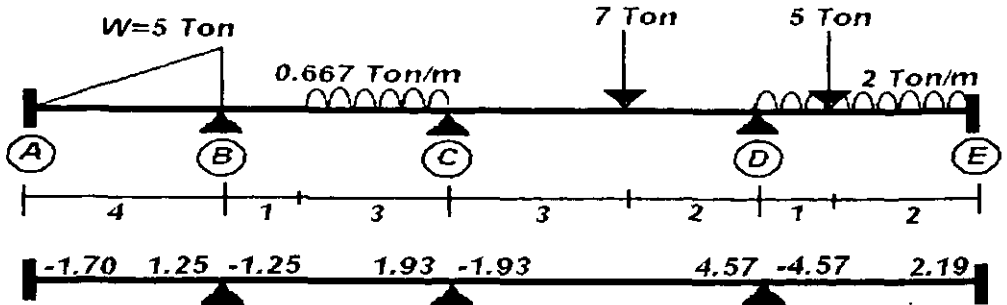
$$VF_{DC} = 0.53 + 4.20 = 4.73$$

$$VF_{DE} = 0.79 + 6.33 = 7.12$$

$$VF_{ED} = -0.79 + 4.67 = 3.88$$

• DIAGRAMAS FINALES

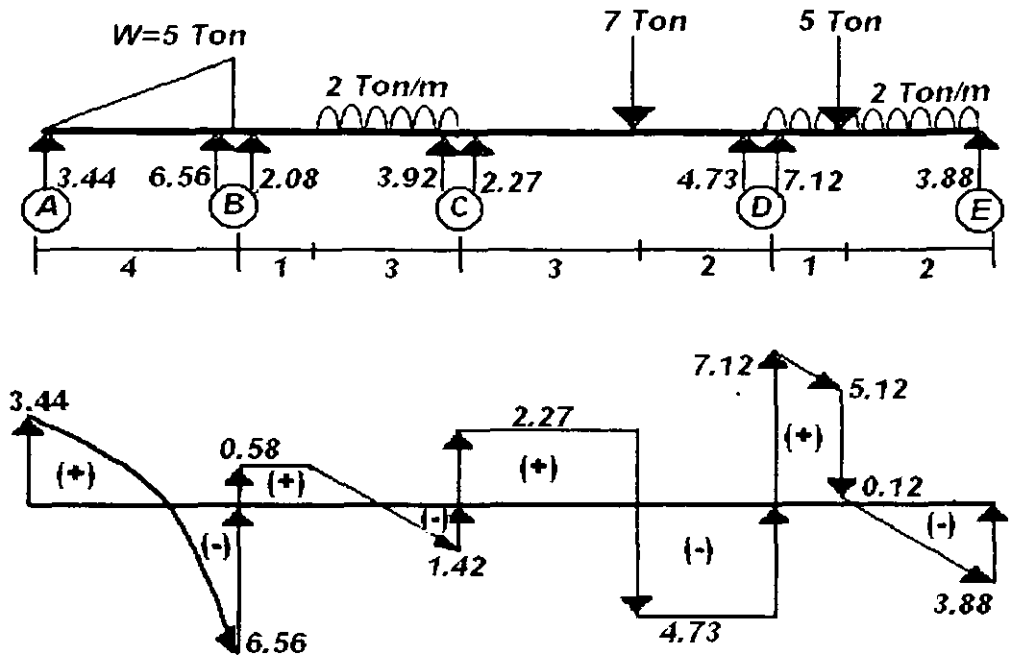
Según los resultados obtenidos, el Diagrama de Momentos queda:



El Diagrama de Cortantes se define así:

1. El cortante inicial en A, indica que la fuerza sube 3.44 Ton
2. En el tramo AB existe una carga triangular por lo que el cortante desarrolla una parábola de segundo grado, y que en el total del tramo baja 10 Ton. Por lo que:  $3.44-10= -6.56$ . Debe recordarse que en el punto en donde el cortante es cero, el momento es máximo.
3. En el nudo B, existen dos reacciones, una que hace el equilibrio en AB que es de 6.56, y la otra que es de 0.58, las dos son positivas, por lo que según la convención utilizada, suben.
4. De él punto B hasta un metro de distancia se mantiene constante 0.58, a partir de ahí existe la carga repartida, por lo tanto desde ahí hasta el nudo C, el cortante bajara constantemente 0.667Ton por cada metro, así que al llegar a C se encontrará en  $- 1.42$ .
5. Nuevamente en el nudo C existen dos reacciones pertenecientes a los dos tramos que concurren al nudo, si sumamos las dos, tenemos:  $1.42+2.27 = 3.69$ , que es la fuerza que tendrá que subir el cortante; así que  $3.69-1.42 = 2.27$ , que será la fuerza con la que arranque el tramo CD.
6. Otra vez se mantiene constante hasta que una fuerza externa actúa, está fuerza se encuentra a 3 metros y es de 7 Ton, por lo tanto  $2.27-7.00= - 4.73$ ; de aquí hasta el nudo D se mantendrá constante debido a que no existe fuerza alguna que actúe.
7. En el nudo D, como se menciona en el paso 5, se pueden sumar las dos fuerzas, siempre una será la que equilibre el tramo y otra con la que inicie el siguiente; así que:  $-4.73+4.73+7.12 = 7.12$ .
8. En el tramo DE, existen dos tipos de carga una uniformemente repartida y otra puntual, así que el desarrollo del cortante es el siguiente: hasta el primer metro del tramo que es donde actúa la fuerza puntual, el cortante bajará solo la carga repartida, es decir 2 Ton en este metro:  $7.12 - 2.00 = 5.12$  positivo.
9. En este punto es donde actúa la fuerza puntual, así que:  $5.12 - 5.00 = 0.12$

10. De aqui hasta E, solo actúa nuevamente la carga repartida bajando 4 Ton en estos 2 metros, por lo tanto:  $0.12 - 4.00 = -3.88$ , y finalmente existe la fuerza que equilibra que es de 3.88 Ton, para terminar en cero

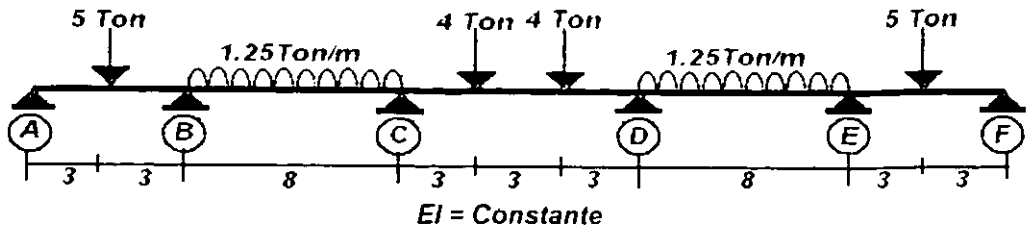


CORTANTES FINALES

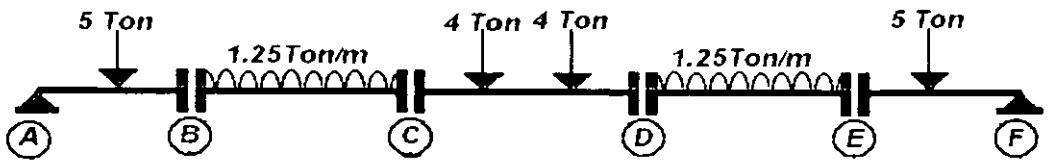


EJEMPLO 3.1.3

Calcular los momentos en los apoyos de la siguiente viga



- RESTRICCIÓN DE GIRO EN LOS NUDOS.



- OBTENCIÓN DE LAS RIGIDECES

De la tabla 2 del Apéndice tenemos para las rigideces angulares:

$$K_{AB} = 0$$

$$K_{BA} = \frac{(3)(EI)}{6} = 0.50EI$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{(4)(EI)}{(8)} = 0.50EI$$

$$K_{CD} = K_{DC} = \frac{(4)(EI)}{(9)} = 0.44EI$$

$$K_{DE} = K_{ED} = \frac{(4)(EI)}{(8)} = 0.50EI$$

$$K_{EF} = \frac{(3)(EI)}{6} = 0.50EI$$

$$K_{FE} = 0$$

- FACTOR DE DISTRIBUCION

$$Fd_{m} = 1$$

$$Fd_{n} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.50)EI} = 0.50$$

$$Fd_{m'} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.50)EI} = 0.50$$

$$Fd_{n'} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.44)EI} = 0.53$$

$$Fd_{n''} = \frac{0.44EI}{(0.50 + 0.44)EI} = 0.47$$

$$Fd_{n'''} = \frac{0.44EI}{(0.44 + 0.50)EI} = 0.47$$

$$Fd_{DE} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.44)EI} = 0.53$$

$$Fd_{ED} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.50)EI} = 0.50$$

$$Fd_{EF} = \frac{0.50EI}{(0.50 + 0.50)EI} = 0.50$$

$$Fd_{FE} = 1$$

- FACTOR DE TRANSPORTE.

$$FT_{m} = FT_{n} = \frac{0}{3} = 0$$

$$FT_{BC} = FT_{CB} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$FT_{CD} = FT_{DC} = \frac{2}{4} = 0.5$$

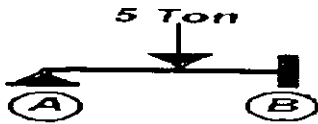
$$FT_{DE} = FT_{ED} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$FT_{EF} = FT_{FE} = \frac{0}{3} = 0$$

• MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

De la tabla 1 del Apéndice:

Para la viga AB.



$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{3PL}{16} = \frac{(3)(5)(6)}{(16)} = 5.625$$

Para la viga BC:



$$M_{BC} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(1.25)(8)^2}{12} = -6.67$$

$$M_{CB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(1.25)(8)^2}{12} = 6.67$$

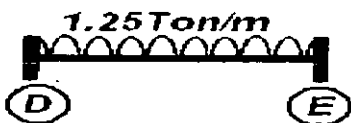
Para el tramo CD:



$$M_{CD} = -\frac{Pa(L-a)}{L} = -\frac{(4)(3)(9-3)}{(9)} = -8.00$$

$$M_{DC} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{(4)(3)(9-3)}{(9)} = 8.00$$

Para el tramo DE:



$$M_{DE} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(1.25)(8)^2}{12} = 6.67$$

$$M_{ED} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(1.25)(8)^2}{12} = 6.67$$

Para la viga EF:



$$M_{EF} = \frac{3Pl}{16} = -\frac{(3)(5)(6)}{(16)} = -5.62$$

$$M_{FE} = 0$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

		NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D		NUDO E		NUDO F
		AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED	EF	FE	
1												
2												
3	K	0.00	0.50	0.50	0.50	0.44	0.44	0.50	0.50	0.50	0.00	
4	F <sub>d</sub>	1.00	0.50	0.50	0.53	0.47	0.47	0.53	0.50	0.50	1.00	
5	F <sub>r</sub>	0.00	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.00	
6	M <sub>E</sub>	0.00	5.62	-6.67	6.67	-8.00	8.00	-6.67	6.67	-5.62	0.00	
7	id	0.00	0.53	0.53	0.70	0.63	-0.63	-0.70	-0.53	-0.53	0.00	
8	1T	0.00	0.00	0.35	0.26	-0.31	0.31	-0.26	-0.35	0.00	0.00	
9	2d	0.00	-0.18	-0.18	0.03	0.02	-0.02	-0.03	0.18	0.18	0.00	
10	2T	0.00	0.00	0.01	-0.09	-0.01	0.01	0.09	-0.01	0.00	0.00	
11	3d	0.00	-0.01	-0.01	0.05	0.05	-0.05	-0.05	0.01	0.01	0.00	
12	3T	0.00	0.00	0.03	0.00	-0.02	0.02	0.00	-0.03	0.00	0.00	
13	4d	0.00	-0.01	-0.01	0.01	0.01	-0.01	-0.01	0.01	0.01	0.00	
14	4T	0.00	0.00	0.01	-0.01	-0.01	0.01	0.01	-0.01	0.00	0.00	
15	5d	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	
16	MF	0.00	5.95	-5.95	7.64	-7.64	7.64	-7.64	5.95	-5.95	0.00	
17	V <sub>H</sub>	-0.99	0.99	-0.21	0.21	0.00	0.00	0.21	-0.21	0.99	-0.99	
18	V <sub>i</sub>	2.50	2.50	5.00	5.00	4.00	4.00	5.00	5.00	2.50	2.50	
19	VF	1.51	3.49	4.79	5.21	4.00	4.00	5.21	4.79	3.49	1.51	

• CORTANTES HIPERESTÁTICOS (V<sub>H</sub>).

Los momentos que provocan un giro en cada barra, son:

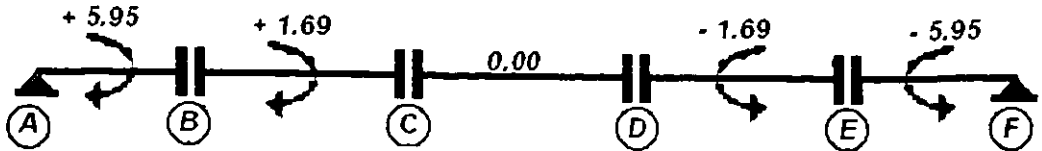
En la barra AB  $M_{AB} = 0.00 + 5.95 = 5.95$

En la barra BC  $M_{BC} = -5.95 + 7.64 = 1.69$

En la barra CD  $M_{CD} = -7.64 + 7.64 = 0.00$

En la barra DE  $M_{DE} = -7.64 + 5.95 = -1.69$

En la barra EF  $M_{EF} = -5.95 + 0.00 = -5.95$



Las fuerzas de los cortantes que impedirán estos giros, son:

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{M_{AB}}{L_{AB}} = \frac{5.95 \text{ Ton m}}{6.00 \text{ Mts}} = 0.99 \text{ Ton}$$

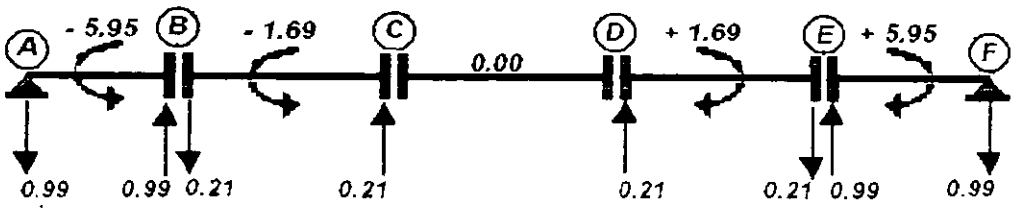
$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{M_{BC}}{L_{BC}} = \frac{1.69 \text{ Ton m}}{8.00 \text{ Mts}} = 0.21 \text{ Ton}$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{M_{CD}}{L_{CD}} = \frac{0.00 \text{ Ton m}}{9.00 \text{ Mts}} = 0.00 \text{ Ton}$$

$$V_{DE} = V_{ED} = \frac{M_{DE}}{L_{DE}} = \frac{-1.69 \text{ Ton m}}{8.00 \text{ Mts}} = -0.21 \text{ Ton}$$

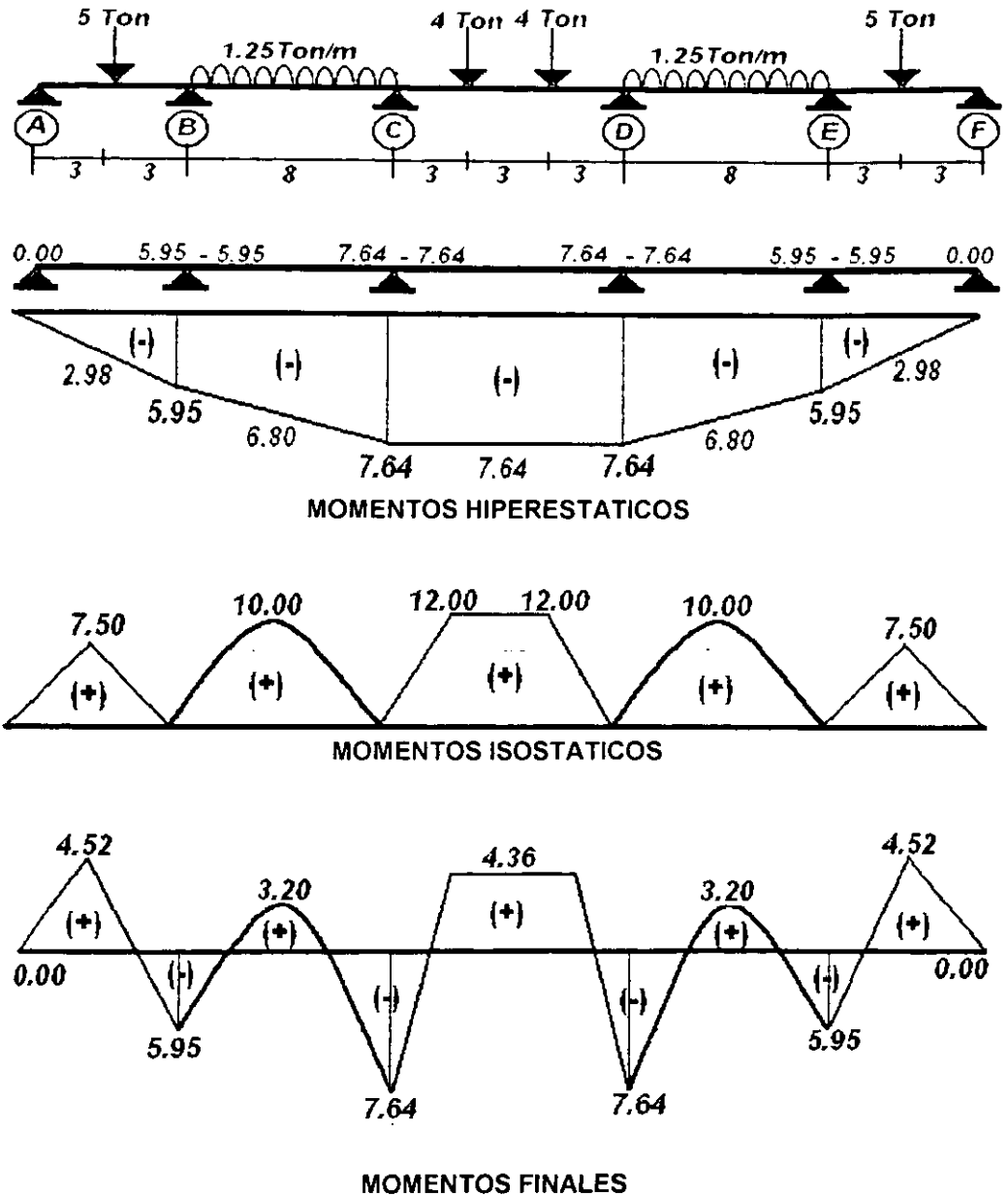
$$V_{EF} = V_{FE} = \frac{M_{EF}}{L_{EF}} = \frac{-5.95 \text{ Ton m}}{6.00 \text{ Mts}} = -0.99 \text{ Ton}$$

Aplicando el sentido a cada cortante que anulará el giro, entonces quedaran:

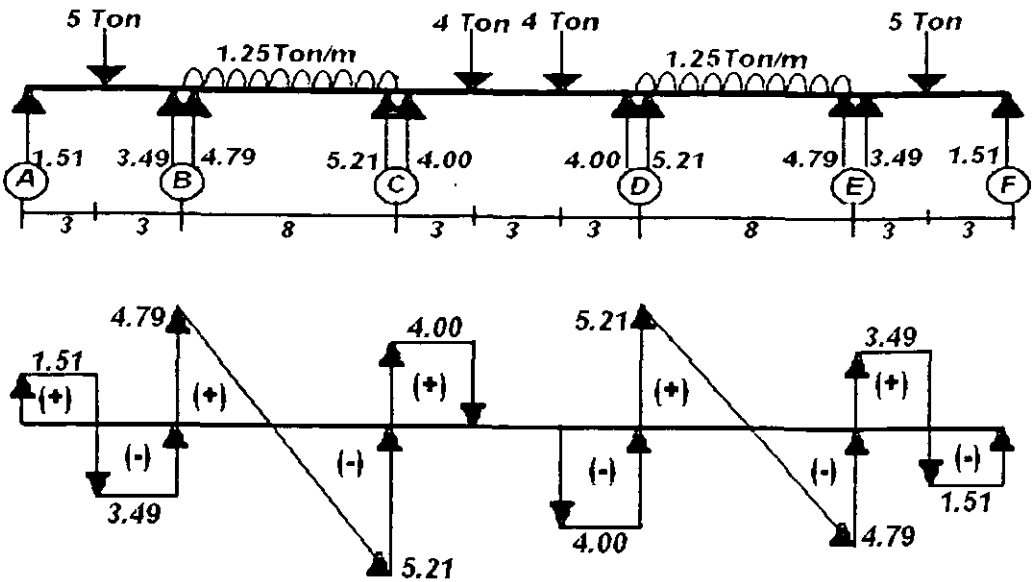


DIAGRAMAS FINALES

Según los resultados obtenidos, el Diagrama de Momentos queda:



El Diagrama de Cortantes se define así:



**CORTANTES FINALES**

El desarrollo fue el siguiente:

1. El cortante en A, sube 1.51 Ton
2. A la mitad del tramo existe la fuerza puntual de 5 Ton, por lo tanto en ese punto baja:  $1.51 - 5.00 = -3.49$ . De ahí se mantendrá constante hasta llegar a B, donde se encuentra la reacción, entonces el tramo se cierra:  $-3.49 + 3.49 = 0.00$ .
3. Para el segundo tramo, la mecánica es semejante sube 4.79, luego baja en él total del tramo constantemente una fuerza de 1.25 Ton/mt. Llegando a  $-5.21$ . El tramo se vuelve a cerrar con su reacción.
4. En el tramo CD, hay dos cargas, así que inicia con +4, se mantiene constante hasta la primera carga que es de 4 por lo tanto baja para llegar a cero, de ahí se sigue constante hasta la siguiente carga, así que en ese punto al cortante es  $-4$ , se mantiene constante y se cierra con su reacción.
5. Para los siguientes tramos, el procedimiento es semejante.

*Nota: Las consideraciones que se hacen, con respecto a que sube o baja, es solo una expresión para el sentido de la flecha del cortante: el hecho de subir significa que existe una fuerza en sentido positivo, y por lógica el bajar significa una fuerza en sentido negativo.*

Para el trazo del diagrama, se requiere ir siguiendo una secuencia desde un extremo hasta el otro, e ir considerando todas las fuerzas que van apareciendo en el recorrido. Si se inicia desde la izquierda que es como lo hemos hecho, los signos se respetarán, pero en caso de iniciar por la derecha se tendrá que aplicar la convención derecha, es decir el signo cambia. Pero el trazo es semejante.



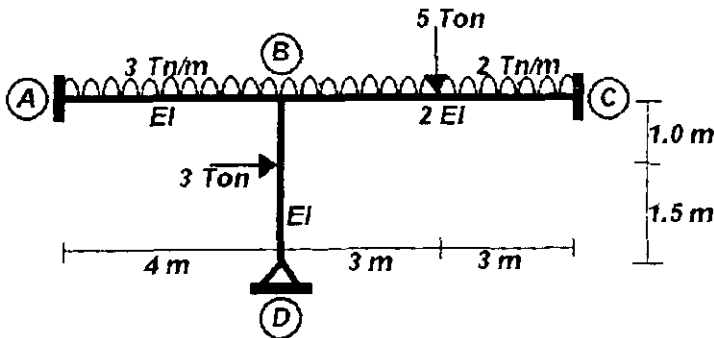
### 3.2 MARCOS SIN DESPLAZAMIENTO

El método de Cross se aplica también a marcos, si se impide en éstos el movimiento lateral o ladoeo. El análisis de los marcos sin desplazamiento se ilustrará en los siguientes ejercicios. Sin embargo, cuando el ladoeo es posible, deben tomarse en consideración, ya que los movimientos o deflexiones ocasionan rotaciones que afectan la magnitud de los momentos en los elementos en donde ocurren. Más adelante se hará referencia al trato que deben tener los marcos que si tienen desplazamiento lateral

La solución del método es semejante de cómo se aplico en las travesas sólo que se deben realizar otras consideraciones, pero el método en sí es el mismo. Por ejemplo existen marcos que son muy complejos y se requiere llevar un estricto orden con los números. la tabulación que aqui estamos usando presenta esa ventaja sobre otras formas de manipular el método; pero esto no indica que no existan mejores, ya que variará el grado de entendimiento de cada persona con la tabulación.

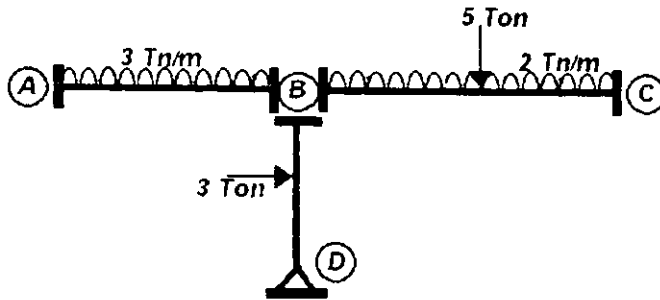
#### EJEMPLO 3.2.1

Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



• *RESTRICCION DE GIRO EN LOS NUDOS.*

Al igual que en vigas, el primer paso será considerar empotrados todos los nudos donde existe unión de barras, y los nudos que sean apoyos conservaran su tipo de apoyo.



• *OBTENCION DE LAS RIGIDECES*

De la tabla 2 del Apéndice se obtienen las formulas para obtener las rigideces angulares de cada miembro, según su tipo de apoyo.

Las vigas AB y BC tienen un doble empotramiento, por lo tanto su rigidez angular estará definida por  $\frac{4EI}{L}$ , para ambos extremos del tramo.

Para la viga BD, la ecuación a utilizar para su rigidez angular será  $\frac{3EI}{L}$  en el extremo empotrado, y cero en el apoyo fijo.

Por lo tanto:

$$K_{AB} = \frac{(4)(EI)}{4} = 1.00EI$$

$$K_{BA} = \frac{(4)(EI)}{4} = 1.00EI$$

$$K_{BC} = \frac{(4)(2EI)}{(6)} = 1.33EI$$

$$K_{CB} = \frac{(4)(2EI)}{(6)} = 1.33EI$$

$$K_{BD} = \frac{(3)(EI)}{(2.5)} = 1.20EI$$

$$K_{DB} = 0$$

• OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

Para obtener el factor de distribución en marcos, al realizar la suma de las rigideces en un nudo, existirán en ciertos casos mas de dos barras que se unan en el mismo nudo, es decir, ahora la rigidez total del nudo será la suma algebraica total de las rigideces de cada miembro que concurren en el nudo, sea columna, viga o diagonal.

$$Fd_n = \frac{K_n}{\sum K_i}$$

Nota: "Aunque existan mas barras que se unan en el nudo, la suma de los factores de distribución en ese nudo seguirá siendo igual a uno"

Por lo tanto:

$$Fd_{m'} = \frac{1.00EI}{(1.00 + \infty)EI} = 0$$

$$Fd_{m''} = \frac{1.00EI}{(1.00 + 1.20 + 1.33)EI} = 0.28$$

$$Fd_{m'''} = \frac{1.33EI}{(1.00 + 1.20 + 1.33)EI} = 0.38$$

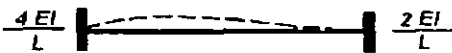
$$Fd_{c''} = \frac{0.67EI}{(0.67 + \infty)EI} = 0$$

$$Fd_{m''''} = \frac{1.20EI}{(1.00 + 1.20 + 1.33)EI} = 0.34$$

$$Fd_{p''} = 1$$

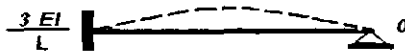
• FACTOR DE TRANSPORTE.

El factor de transporte se definió de una manera general para los casos de doble empotramiento, este es:



$$FT = \frac{1}{2}$$

Y para el tramo que tiene en un extremo un apoyo articulado, se definiría como:



$$FT = 0$$

Por lo tanto:

$$FT_{AB} = FT_{BA} = 0.5$$

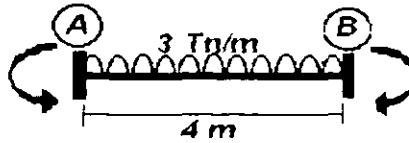
$$FT_{BC} = FT_{CB} = 0.5$$

$$FT_{BD} = FT_{DB} = 0.0$$

• MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

En la tabla 1 del Apéndice, se encuentran las formulas que son mas usadas para obtener los momentos de empotramiento.

Para la viga AB:

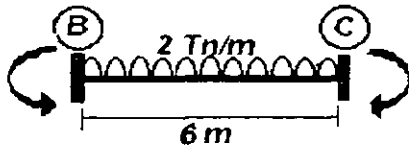


$$M_{AB} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(3)(4)^2}{(12)} = -4.00$$

$$M_{BA} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(3)(4)^2}{(12)} = 4.00$$

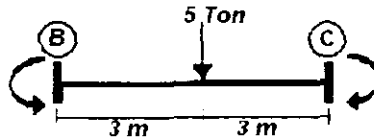
Para la viga BC

Se tienen dos tipos de carga, por lo tanto se recurrirá al principio de la superposición de causas y efectos:



$$M_{BC} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(2)(6)^2}{(12)} = -6.00$$

$$M_{CB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(6)^2}{(12)} = 6.00$$



$$M_{BC} = -\frac{PL}{8} = -\frac{(5)(6)}{(8)} = -3.75$$

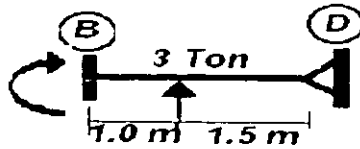
$$M_{CB} = \frac{PL}{8} = \frac{(5)(6)}{(8)} = 3.75$$

Por lo tanto, los momentos de empotramiento totales serán:

$$M_{B'} = -6.00 - 3.75 = -9.75$$

$$M_{C'} = 6.00 + 3.75 = 9.75$$

Para la columna BD:



$$M_{mb} = \frac{Pab(b+l)}{2l^2} = \frac{(3)(1)(1.5)(1.5+2.5)}{(2)(2.5)^2} = 1.44$$

$$M_{DB} = 0$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

Como se puede observar este es un trabajo muy repetitivo, por lo que esta es otra ventaja del llevar una tabulación adecuada, para su manipulación más ágil; más adelante se resolverán los ejercicios basándose solo en las tabulaciones. Por lo pronto los resultados obtenidos se anotarán en la tabulación que hemos estado manejando.

		NUDO A		NUDO B		NUDO C	NUDO D	
		AB	BA	BD	BC	CB	DB	
3	RIGIDEZ	K	1.00	1.00	1.20	1.33	1.33	1.20
4	FAC. DE DISTR.	F <sub>D</sub>	0.00	0.28	0.34	0.38	0.00	1.00
5	FAC. DE TRANSP	F <sub>T</sub>	0.50	0.50	0.00	0.50	0.50	0.00
6	MOM. DE EMPOTR.	M <sub>E</sub>	-4.00	4.00	1.44	-9.75	9.75	0.00
7	1a DISTRIBUCION	1d	0.00	1.21	1.47	1.64	0.00	0.00
8	1er TRANSPORTE	1T	0.60	0.00	0.00	0.00	0.82	0.00
9	2a DISTRIBUCION	2d	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	MOMENTO FINAL	MF	-3.40	5.21	2.91	-8.11	10.57	0.00
17	CORT HIPERESTAT	V <sub>H</sub>	-0.46	0.46	-1.16	-0.41	0.41	1.16
18	CORT ISOSTATICO	V <sub>I</sub>	6.00	6.00	-1.80	8.50	8.50	-1.20
19	CORTANTE FINAL	VF	5.54	6.46	-2.96	8.09	8.91	-0.04

Nota: Los signos para cortante y para momento son:



En este ejercicio como se puede notar, al llegar a la segunda distribución, los valores llegaron a cero, por lo que es innecesario continuar realizando operaciones, por lo tanto se omiten los renglones restantes de ese bloque. El numero de distribuciones variará

muy frecuentemente, pero se recomienda realizar distribuciones hasta que los valores se aproximen a cero esto por lo regular sucede de la 4ª a la 6ª distribución y entonces se puede estar mas seguro de que los resultados son más precisos.

### En la 1ª. Distribución:

$$Md = (\sum M \cdot F_{med}) / (Fid_{barra}) (-1)$$

Para AB  $Md_{AB} = (-4.00)(0.00)(-1) = 0.00$

Para BA  $Md_{BA} = [4.00 + 1.44 - 9.75](0.28)(-1) = 1.21$

Para BD  $Md_{BD} = [4.00 + 1.44 - 9.75](0.34)(-1) = 1.47$

Para BC  $Md_{BC} = [4.00 + 1.44 - 9.75](0.38)(-1) = 1.64$

Para CB  $Md_{CB} = [9.75](0.00)(-1) = 0.00$

Para DB  $Md_{DB} = (0.00)(1.00)(-1) = 0.00$

### - En el 1er. Transporte:

Para la barra AB

$$Mt_{AB} = Md_{BA} \cdot Ft_{BA} = (1.21)(0.5) = 0.60$$

$$Mt_{BA} = Md_{AB} \cdot Ft_{AB} = (0.00)(0.5) = 0.00$$

Para la barra BC

$$Mt_{BC} = Md_{CB} \cdot Ft_{CB} = (0.00)(0.5) = 0.00$$

$$Mt_{CB} = Md_{BC} \cdot Ft_{BC} = (1.64)(0.5) = 0.82$$

Para la barra BD

$$Mt_{DB} = Md_{BD} \cdot Ft_{BD} = (1.47)(0.0) = 0.00$$

$$Mt_{BD} = Md_{DB} \cdot Ft_{DB} = (0.00)(0.0) = 0.00$$

- Este proceso se repite en la 2ª distribución, solo que ahora los momentos que se distribuyen son los momentos que se transportaron, y en este ejercicio los momentos distribuidos resultan cero en esta distribución.

- Los **Momentos Finales** son la suma de los momentos que se van produciendo en cada barra, desde el momento de empotramiento inicial hasta la última distribución.

$$MF_{ih} = -4.00 + 0 + 0.60 + 0 = -3.40$$

$$MF_{hi} = 4.00 + 1.21 + 0 + 0 = 5.21$$

$$MF_{hd} = 1.44 + 1.47 + 0 + 0 = 2.91$$

$$MF_{dh} = -9.75 + 1.64 + 0 + 0 = -8.11$$

$$MF_{di} = 9.75 + 0 + 0.82 + 0 = 10.57$$

$$MF_{db} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.00$$

- Para obtener los **Cortantes Hiperestáticos** ( $V_H$ ), primero se suman los momentos finales de los extremos de cada barra y así determinar el momento que provoca un giro a la barra:

$$M_{ij} = MF_{ij} + MF_{ji}$$

$$\text{En AB} \quad M_{ih} = -3.40 + 5.21 = 1.81$$

$$\text{En BC} \quad M_{hc} = -8.11 + 10.57 = 2.46$$

$$\text{En BD} \quad M_{hd} = 2.91 + 0 = 2.91$$

Después los momentos obtenidos son divididos por la longitud de la barra, y así obtener los cortantes hiperestáticos en los extremos, el sentido que tendrán será el que provoque un giro que anule al  $M$  que fue obtenido.

$$V_{ABi} = V_{hiA} = \frac{M_{ih}}{L_{AB}} = \frac{1.81 \text{ Ton m}}{4.00 \text{ Mts}} = 0.46 \text{ Ton}$$

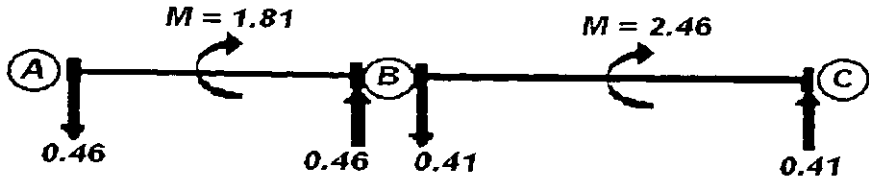
$$V_{BCc} = V_{cbC} = \frac{M_{hc}}{L_{BC}} = \frac{2.46 \text{ Ton m}}{6.00 \text{ Mts}} = 0.41 \text{ Ton}$$

$$V_{BDd} = V_{dbD} = \frac{M_{hd}}{L_{BD}} = \frac{2.91 \text{ Ton m}}{2.50 \text{ Mts}} = 1.16 \text{ Ton}$$

Para obtener el sentido de los cortantes, se realiza el mismo análisis que para las vigas, por lo tanto:

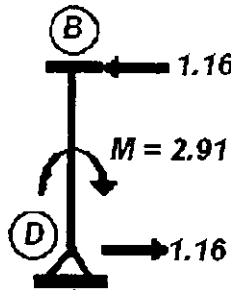
Para las 2 traves AB y BC:

El momento es positivo por lo tanto el giro que se provoca es en sentido de las manecillas del reloj, y para anular este giro los cortantes tomarán los sentidos que provoquen un giro en sentido contrario y así anular el giro:



Para la columna BD:

La columna se analizará del mismo modo, es decir, los cortantes hiperestáticos tomarán la dirección que provoque un giro en sentido contrario al momento de desequilibrio, y como el momento es positivo, los cortantes quedan:



- Los **Cortantes Isostáticos** se obtienen considerando a la barra como isostática (simplemente apoyada), si separásemos cada tramo y lo consideráramos individual, estos cortantes serían solo sus reacciones.
- Los **Cortantes Finales** se obtienen solo con la suma algebraica de los cortantes Hiperestáticos y los Isostáticos, respetando la dirección de cada uno de ellos.

$$VF_{AB} = -0.46 + 6.00 = 5.54$$

$$VF_{BA} = 0.46 + 6.00 = 6.46$$

$$VF_{BC} = -0.41 + 8.50 = 8.09$$

$$VF_{CB} = 0.41 + 8.50 = 8.91$$

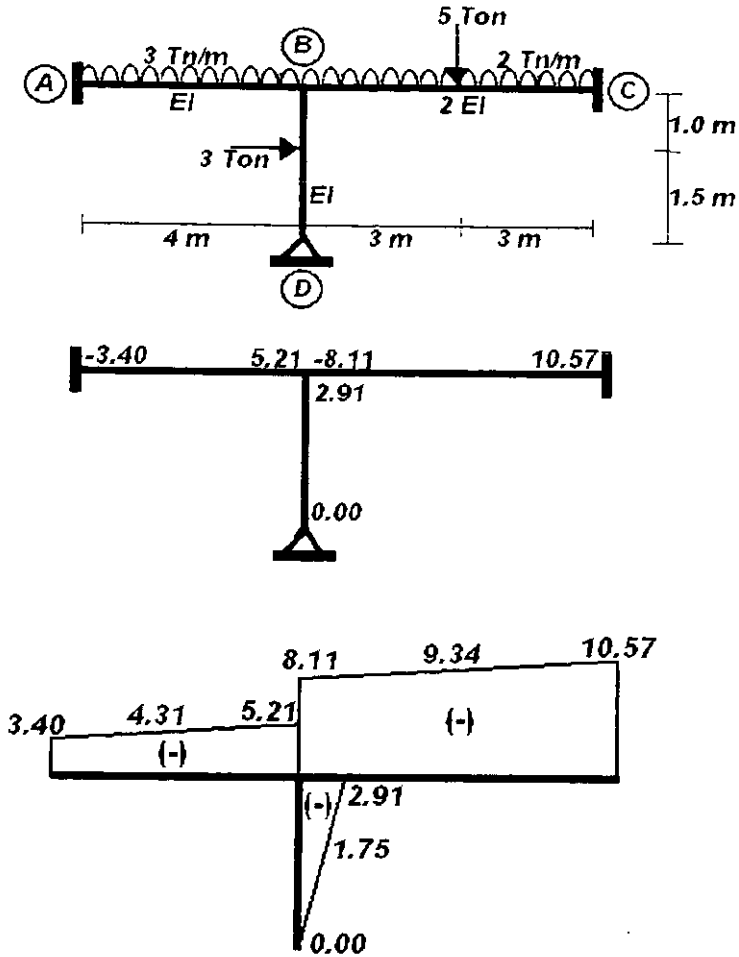
$$VF_{BD} = -1.16 - 1.80 = -2.96$$

$$VF_{DB} = 1.16 - 1.20 = -0.04$$

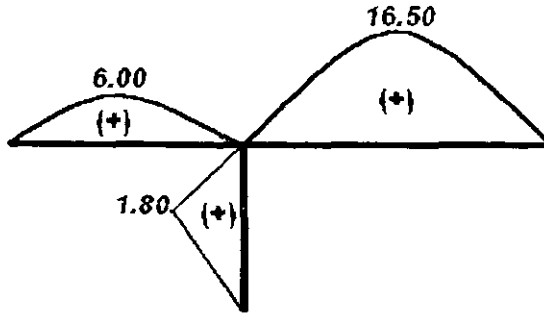


• DIAGRAMAS FINALES

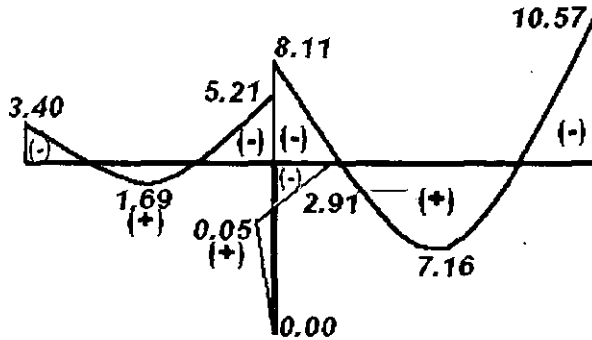
Según los Momentos Finales obtenidos en el desarrollo del Método, el Diagrama de Momentos queda:



MOMENTOS HIPERESTATICOS



MOMENTOS ISOSTATICOS



MOMENTOS FINALES


Para obtener los momentos en los apoyos, también se debe considerar la convención de signos que toman los momentos de la derecha de cada tramo; esta columna, como es "central" se toma el nudo D como izquierda y el nudo B como derecha, y entonces se aplica la convención derecha e izquierda



Los momentos intermedios de cada tramo, se obtuvieron aplicando el principio de la superposición, donde partiendo de la línea recta que toman los momentos finales, se suman en esos puntos los momentos isostáticos de cada tramo.

El **Diagrama de Cortantes** se obtienen tomando los valores de los cortantes finales de los extremos de cada barra considerando el sentido, en las vigas no aplicará la convención derecha, a menos que el trazo del diagrama comience por la derecha, en las columnas el extremo izquierdo siempre será el extremo superior; los cortantes intermedios se obtienen considerando la fuerza que actúa en ese punto, ya sea positiva o negativa.

El trazo es el siguiente:

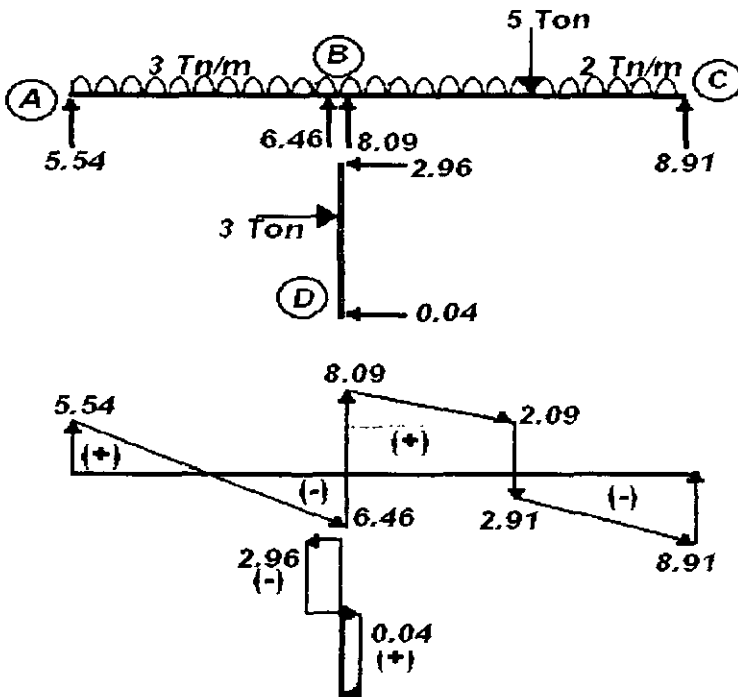
1. Comenzando por las trabes, el cortante inicial en A, indica que la fuerza sube 5.54
2. En este tramo existe una carga uniformemente repartida de 3 Ton/m, y dado que existen 4 m, bajará 12 ton en total, así que  $5.54-12.00=-6.46$ ; por lo que al llegar a B, el cortante será de  $-6.46$ .
3. En B como existen dos trabes, existirán también dos cortantes, que son:  $6.46+8.09=+14.55$ . por lo tanto se tenía  $-6.46+14.55=+8.09$ .
4. En el tramo BC existen dos cargas, una uniformemente repartida y una puntual al centro del claro, así que en la mitad de la trabe el cortante será:  $8.09-(2\text{ton/m})(3\text{m})-5\text{Ton}=-2.91$ .
5. En el nudo C, el cortante será:  $-2.91-(2\text{ton/m})(3\text{m}) = -8.91$ , y con el cortante obtenido en ese punto se llega a cero.
6. Terminadas las trabes ahora se continuará con las columnas, para realizar el trazo de los cortantes y considerar la convención izquierda (no cambian los signos) es necesario comenzar el trazo por los cabezales, es decir el nudo B que será el tramo izquierdo y el Nudo D el tramo derecho.
7. Para hacerlo mas claro comenzaremos por la izquierda que es el nudo B; según los resultados del desarrollo del método, se obtuvo un cortante de  $-2.96$  en BD, así que según la convención usada, su sentido sería de derecha a izquierda. 
8. De B al punto de aplicación de la fuerza puntual se mantendrá constante, y en ese punto la fuerza puntual es positiva, por lo que:  $-2.96+3 = 0.04$
9. De ahí al nudo D, la carga seguirá constante con 0.04, y en el nudo D observando la tabla, se tiene un cortante negativo que cerrará el tramo:  $-0.04+0.04=0.00$ .

Nota:

**Para la traves:** Es recomendable seguir una secuencia en el trazo del diagrama, ya que si se comienza por la izquierda, todas las fuerza conservarán su sentido, pero en caso de iniciar por la derecha, debe recordarse que los signos cambiarán.

**En las columnas:** El tramo izquierdo será siempre el cabezal de la columna, si se deseará comenzar por el apoyo de la columna, entonces se aplicaría la convención derecha.

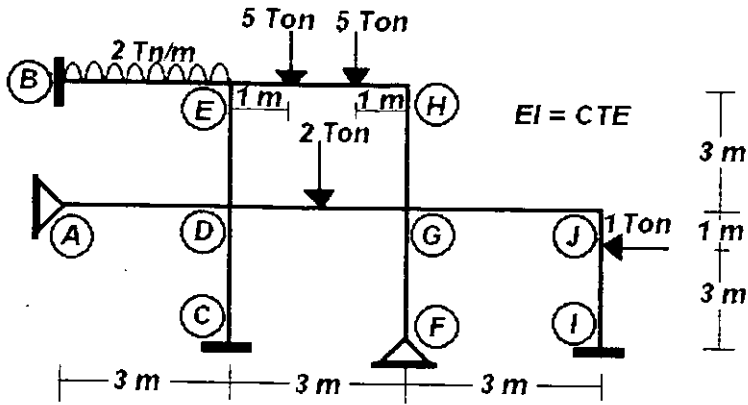
La diferencia de la aplicación de Convenciones con respecto al diagrama de momentos, radica en que en Momentos las convenciones se utilizan conjuntamente; y en el Diagrama de Cortantes solo se aplica una y esta dependerá del extremo que se elija para comenzar el trazo (también se llegan a usar las dos convenciones para el trazo de un tramo comenzado por sus dos extremos, pero esto se desarrollará sobre la base de la practica de realizar varios ejercicios).



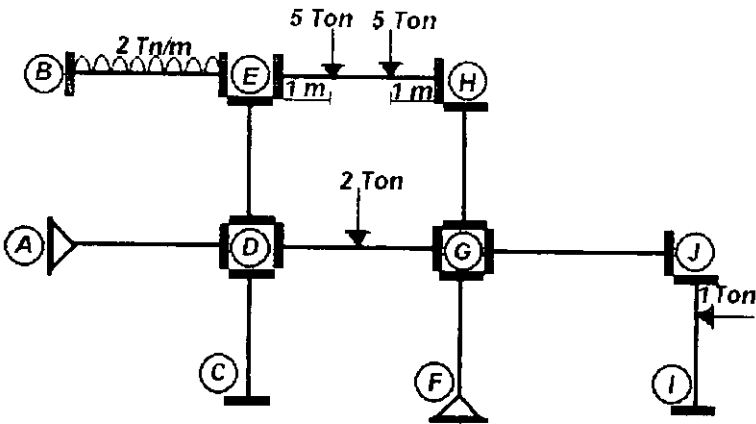
CORTANTES FINALES

EJEMPLO 3.2.2

Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



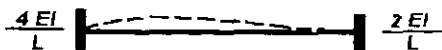
- *RESTRICCION DE GIRO EN LOS NUDOS.*



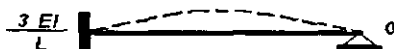
• OBTENCION DE LAS RIGIDECES

Como hasta ahora se ha mencionado, la rigidez angular solo variará para dos condiciones, una barra doblemente empotrada y una barra con un extremo empotrado y el otro articulado (apoyo fijo).

Recordando una vez mas las formulas (Apéndice tabla 2)



Para las barras que tienen doble empotramiento, su rigidez angular estará definida por  $\frac{4EI}{L}$ , para ambos extremos del tramo.



Para los barras que tengan un tramo articulado, la ecuación a utilizar para la rigidez angular será  $\frac{3EI}{L}$  en el extremo empotrado y cero en el apoyo fijo.

En este ejercicio todas las barras son doblemente empotradas exceptuando a la viga AD y la columna FG.

Estos primeros pasos del método se pueden ir simplificando si se tabula los valores para copiarlos posteriormente en la tabla general que hemos usado anteriormente. Esto es opcional y con la practica se verá que se llega a omitir esta tabulación ya que se podrán realizar todas las operaciones desde la tabla general.

VIGAS	LONGITUD	EI	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
BE	3.00	1	4	1.33
EH	3.00	1	4	1.33
DG	3.00	1	4	1.33
GJ	3.00	1	4	1.33

La rigidez angular para todas estas vigas es igual para sus dos sentidos, es decir para BE y para EB.

En el caso de la viga AD se tendrá que analizar en sus dos sentidos, debido a que su rigidez será evaluada diferente en cada extremo ya que son diferentes sus dos apoyos.

VIGAS	LONGITUD	EI	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
AD	3.00	1	0	0.00
DA	3.00	1	3	1.00

Tomando este análisis, será el mismo que aplicaremos para las columnas.

VIGAS	LONGITUD	EI	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
CD y DC	4.00	1	4	1.00
DE y ED	3.00	1	4	1.33
GH y HG	3.00	1	4	1.33
IJ y JI	4.00	1	4	1.00
FG	4.00	1	0	0.00
GF	4.00	1	3	0.75

#### • OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

Para obtener el factor de distribución en marcos, obtendremos primeramente la suma algebraica total de las rigideces de cada nudo, sea columna o viga; y así obtendremos la rigidez del nudo.

$$K_{\text{Nudo A}} = K_{AD} = 0$$

$$K_{\text{Nudo B}} = K_{BE} + \infty = 1.33 + \infty = \infty$$

$$K_{\text{Nudo C}} = K_{CD} + \infty = 1.00 + \infty = \infty$$

$$K_{\text{Nudo D}} = K_{DA} + K_{DC} + K_{DG} + K_{DE} = 1.00 + 1.00 + 1.33 + 1.33 = 4.66$$

$$K_{\text{Nudo E}} = K_{EB} + K_{ED} + K_{EH} = 1.33 + 1.33 + 1.33 = 3.99$$

$$K_{\text{Nudo F}} = K_{FG} = 0$$

$$K_{\text{Nudo G}} = K_{GD} + K_{GF} + K_{GI} + K_{GH} = 4.74$$

$$K_{\text{Nudo H}} = K_{HE} + K_{HG} = 2.66$$

$$K_{\text{Nudo I}} = K_{IJ} + \infty = \infty$$

$$K_{\text{Nudo J}} = K_{JI} + K_{JF} = 2.33$$

Ahora para completar este paso, dividiremos la rigidez de cada miembro entre la rigidez total del nudo respectivo

$$Fd_{BE} = K_{BE} / K_{NudoB} = 1.33 / \infty = 0$$

$$Fd_{EB} = K_{EB} / K_{NudoE} = 1.33 / 3.99 = 0.33$$

$$Fd_{EH} = K_{EH} / K_{NudoE} = 1.33 / 3.99 = 0.33$$

$$Fd_{HL} = K_{HE} / K_{NudoH} = 1.33 / 2.66 = 0.50$$

$$Fd_{LI} = 1.00 \text{ POR SER APOYO FIJO}$$

$$Fd_{DA} = K_{DA} / K_{NudoD} = 1.00 / 4.66 = 0.21$$

$$Fd_{DG} = K_{DG} / K_{NudoD} = 1.33 / 4.66 = 0.29$$

$$Fd_{GD} = K_{GD} / K_{NudoG} = 1.33 / 4.74 = 0.28$$

$$Fd_{GD} = K_{GD} / K_{NudoG} = 1.33 / 4.74 = 0.28$$

$$Fd_{JG} = K_{JG} / K_{NudoJ} = 1.33 / 2.33 = 0.57$$

$$Fd_{ED} = K_{ED} / K_{NudoE} = 1.33 / 3.99 = 0.33$$

$$Fd_{DE} = K_{DE} / K_{NudoD} = 1.33 / 4.66 = 0.29$$

$$Fd_{DC} = K_{DC} / K_{NudoD} = 1.00 / 4.66 = 0.21$$

$$Fd_{CD} = K_{CD} / K_{NudoC} = 1.00 / \infty = 0.00$$

$$Fd_{HG} = K_{HG} / K_{NudoH} = 1.33 / 2.66 = 0.50$$

$$Fd_{GH} = K_{GH} / K_{NudoG} = 1.33 / 4.74 = 0.28$$

$$Fd_{GF} = K_{GF} / K_{NudoG} = 0.75 / 4.74 = 0.16$$

$$Fd_{FG} = 1.00 \text{ POR SER APOYO FIJO}$$

$$Fd_{JI} = K_{JI} / K_{NudoJ} = 1.00 / 2.33 = 0.43$$

$$Fd_{II} = K_{II} / K_{NudoI} = 1.00 / \infty = 0.00$$

Estos resultados los verteremos en la tabulación general para la aplicación del método.

- **FACTOR DE TRANSPORTE.**

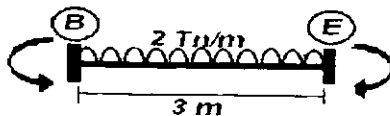
El factor de transporte será de  $\frac{1}{2} = 0.5$  para todos los miembros excepto para la viga AD y la columna FG que no tienen sus dos extremos empotrados; en estas dos barras el Factor de Transporte será cero para sus dos sentidos.

- **MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO**

En este marcos solo existen cuatro barras que tienen fuerzas externas que les inducen un momento de empotramiento, para las barras restantes su momento de empotramiento será cero. En la tabla 1 del Apéndice, se encuentran las formulas para obtener los momentos de empotramiento.



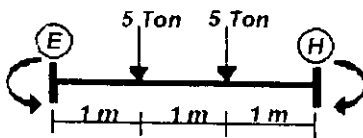
Para la viga BE:



$$M_{BE} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(2)(3)^2}{(12)} = -1.50$$

$$M_{EB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(3)^2}{(12)} = 1.50$$

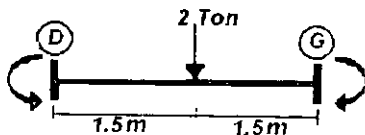
Para la viga EH.



$$M_{EH} = -\frac{Pa(L-a)}{L} = -\frac{(5)(1)(3-1)}{(3)} = -3.33$$

$$M_{HE} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{(5)(1)(3-1)}{(3)} = 3.33$$

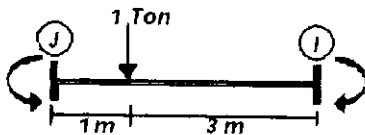
Para la viga DG.



$$M_{DG} = -\frac{PL}{8} = -\frac{(2)(3)}{(8)} = -0.75$$

$$M_{GD} = \frac{PL}{8} = \frac{(2)(3)}{(8)} = 0.75$$

Para la columna IJ.



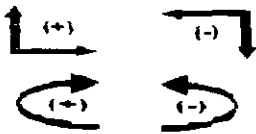
$$M_{JI} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(1)(1)(3)^2}{(4)^2} = -0.56$$

$$M_{IJ} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(1)(1)^2(3)}{(4)^2} = 0.19$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

Para continuar con el método, es necesario desarrollarlo basados en una tabulación que sea simple pero clara y precisa, aquí hemos propuesto una y la seguiremos usando. Los datos obtenidos anteriormente: (Rigidez Angular  $K$ , Factor de Distribución  $F_d$ , Factor de Transporte  $F_T$ , y Momento de Empotramiento  $M_E$ ), serán parte básica de esta tabla general, para posteriormente desarrollar las etapas de Distribuciones y Transportes, de igual forma que como se ha realizado anteriormente.

Nota: Los signos para cortante y para momento son:



	NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D		NUDO E		NUDO F		NUDO G		NUDO H		NUDO I		NUDO J		
VT	AD	BE	CD	DA	DC	DG	DE	EB	ED	EH	FG	GD	GF	GI	GH	HE	HG	LI	JG	JI	
1	0.00	1.33	1.00	1.00	1.00	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	0.00	1.33	0.75	1.33	1.33	1.33	1.33	1.00	1.00	1.33	1.00
Fd	0.00	0.50	0.50	0.00	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
M <sub>E</sub>	1.50	0.00	0.00	0.21	0.21	0.28	0.28	0.33	0.33	0.33	1.00	0.78	0.16	0.28	0.28	0.28	0.28	0.50	0.57	0.43	0.50
1d	0.00	1.50	0.00	0.00	0.00	-0.75	0.00	1.50	0.00	-3.32	0.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00	-0.56	0.00
1t	0.00	0.00	0.00	0.16	0.16	0.21	0.22	0.61	0.61	0.61	0.00	-0.21	-0.12	-0.21	-0.21	-0.21	-0.21	0.32	0.32	0.24	0.00
2t	0.00	0.31	0.08	0.00	0.00	-0.11	0.31	0.08	0.11	-0.63	0.00	0.11	0.00	0.16	0.16	0.16	0.16	0.12	-0.11	0.00	0.00
2l	0.00	0.00	0.00	-0.04	-0.04	-0.06	0.06	0.24	0.24	0.24	0.00	0.16	0.06	0.16	0.16	0.16	0.16	0.10	0.00	0.06	0.05
3t	0.00	0.12	-0.02	0.00	0.00	0.08	0.12	0.00	-0.03	0.05	0.00	-0.03	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.06	0.00
3l	0.00	-0.06	0.00	-0.04	-0.04	-0.06	0.06	0.26	0.26	0.26	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.10	0.00	-0.05	-0.03
4d	0.00	-0.01	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.03	-0.03	0.03	0.00	-0.03	0.00	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	0.01	0.01	0.00	0.00
4t	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.03	0.03	0.00	0.01	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
5t	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.31	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
5l	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.01	0.31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00
6t	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6l	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
M <sub>H</sub>	0.000	-1.047	0.032	0.064	0.064	-0.658	0.540	2.410	0.584	-3.354	0.000	0.790	-0.002	0.158	-0.547	1.893	-1.893	0.311	0.318	-0.318	0.000
V <sub>H</sub>	0.02	3.00	0.00	0.00	0.00	-0.02	-0.02	-0.04	0.50	0.49	0.00	0.04	0.00	-0.16	0.95	-0.49	0.95	0.00	0.00	0.16	0.00
V <sub>T</sub>	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	3.00	0.00	5.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	5.00	0.00	0.25	0.00	0.75	0.00
VT	-0.021	2.546	0.024	0.021	-0.024	0.969	0.498	3.454	-0.498	5.490	0.000	1.041	0.000	-0.159	-0.547	4.510	-0.547	0.248	0.159	0.752	0.000

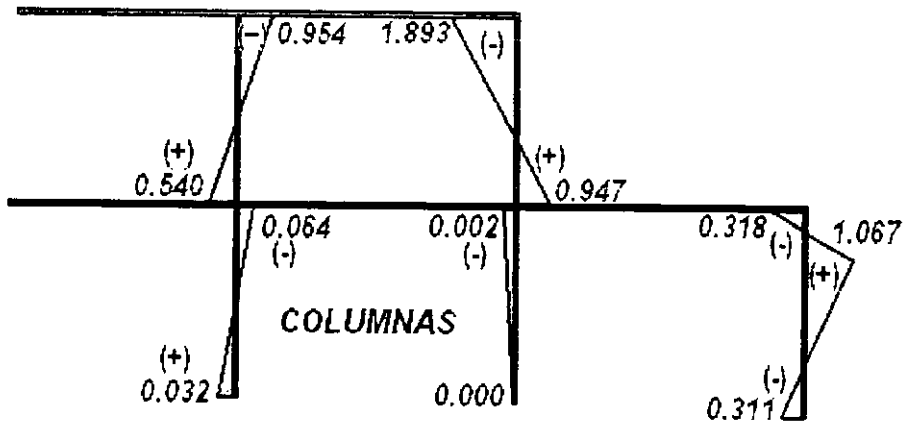
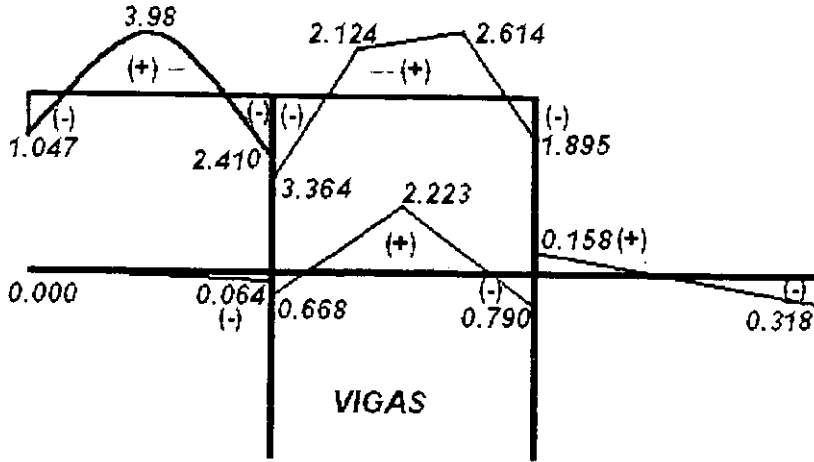
La obtención de los **Cortantes Hiperestáticos** ( $V_H$ ), es similar para todos los casos, primero se suman los momentos finales de los extremos de cada barra, para obtener el momento que provoca giro a la barra:  $M_y = MF_{y'} + MF_{y''}$ . Posteriormente se dividen los momentos obtenidos entre la longitud de la barra, para obtener los cortantes hiperestáticos en los extremos, y el sentido que tendrán será el que provoque un giro que anule al  $M$  que fue obtenido.

Los **cortantes Isostáticos** se obtienen, también igualmente para todos los casos, tomando a la barra como si fuera Isostática (simplemente apoyada); y si separáramos cada tramo los cortantes isostáticos serían solo sus reacciones; se debe considerar la convención de signos.

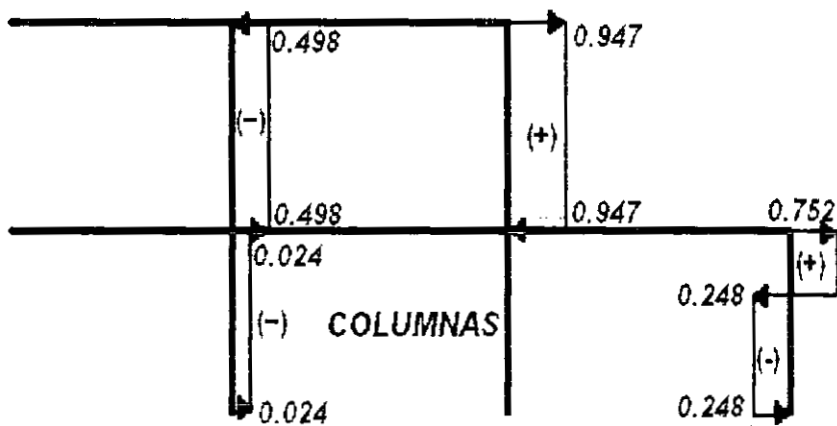
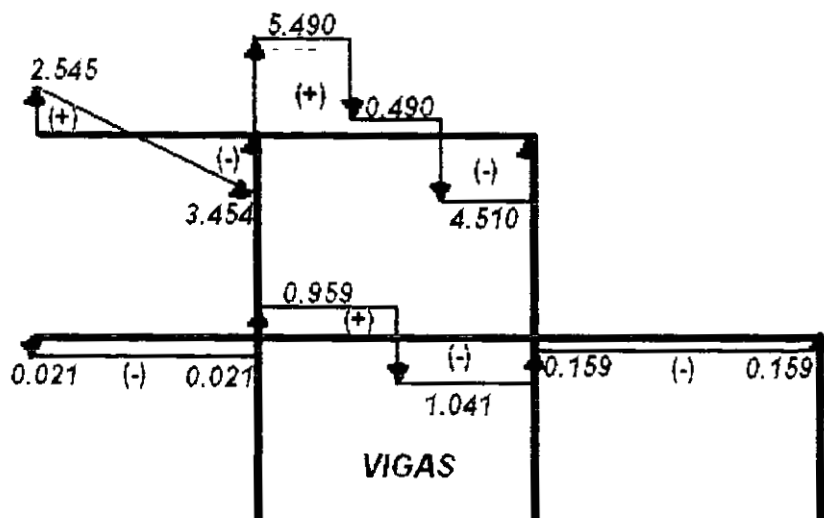
Los **cortantes finales** se obtienen solo con la suma algebraica de los cortantes Hiperestáticos y los Isostáticos, también considerando el signo de cada uno de los cortantes.

• DIAGRAMAS FINALES

El trazo de los Diagrama de Momentos Finales quedará de la siguiente forma:

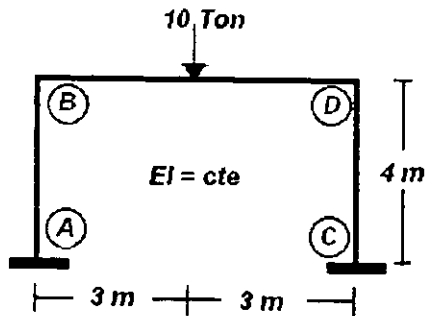


El Diagrama de Cortantes es:

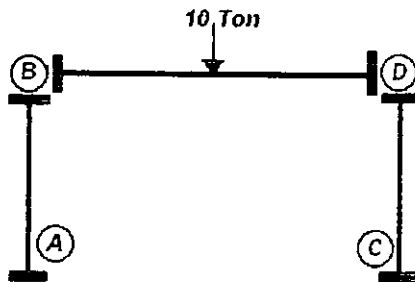


## EJEMPLO 3.2.3

Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



- *RESTRICCIÓN DE GIRO EN LOS NUDOS.*



- *OBTENCIÓN DE LAS RIGIDECES*

En este ejercicio todas las barras son doblemente empotradas, así que el factor de apoyo para la rigidez angular será 4, para los dos extremos de cada barra.

BARRA	LONGITUD	EI	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
AB	4.00	1	4	1.00
BD	6.00	1	4	0.67
CD	4.00	1	4	1.00

- OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

Rigidez de cada nudo:

$$K_{Nudo A} = K_{AB} + \infty = 1 + \infty = \infty$$

$$K_{Nudo B} = K_{BA} + K_{BD} = 1.00 + 0.67 = 1.67$$

$$K_{Nudo D} = K_{DB} + K_{DC} = 0.67 + 1.00 = 1.67$$

$$K_{Nudo C} = K_{CD} + \infty = 1.00 + \infty = \infty$$

Para obtener el factor de distribución, dividiremos la rigidez de cada miembro entre la rigidez total de su respectivo nudo:

$$Fd_{AB} = K_{AB} / K_{Nudo A} = 1.00 / \infty = 0$$

$$Fd_{BA} = K_{BA} / K_{Nudo B} = 1.00 / 1.67 = 0.60$$

$$Fd_{BD} = K_{BD} / K_{Nudo B} = 0.67 / 1.67 = 0.40$$

$$Fd_{DB} = K_{DB} / K_{Nudo D} = 0.67 / 1.67 = 0.40$$

$$Fd_{DC} = K_{DC} / K_{Nudo D} = 1.00 / 1.67 = 0.60$$

$$Fd_{CD} = K_{CD} / K_{Nudo C} = 1.00 / \infty = 0$$

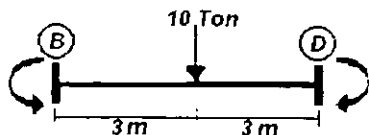
- FACTOR DE TRANSPORTE.

El factor de transporte será de  $\frac{1}{2} = 0.5$  para las 3 barras del marco en sus dos sentidos

- MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Aquí solo existe una barra que tienen una fuerza externa que le inducen un momento de empotramiento, en las columnas el momento de empotramiento es cero.

Para la viga BD:



$$M_{BD} = -\frac{PL}{8} = -\frac{(10)(6)}{(8)} = -7.50$$

$$M_{DB} = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(6)}{(8)} = 7.50$$

## • APLICACIÓN DEL MÉTODO

	NUDO A		NUDO B		NUDO D		NUDO C
	AB	BA	BD	DB	DC	CD	
K	1.00	1.00	0.67	0.67	1.00	1.00	
F <sub>0</sub>	0.00	0.60	0.40	0.40	0.60	0.00	
F <sub>T</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	
M <sub>E</sub>	0.00	0.00	-7.50	7.50	0.00	0.00	
1d	0.00	4.50	3.00	-3.00	-4.50	0.00	
1T	2.25	0.00	-1.50	1.50	0.00	-2.25	
2d	0.00	0.90	0.60	-0.60	-0.90	0.00	
2T	0.45	0.00	-0.30	0.30	0.00	-0.45	
3d	0.00	0.18	0.12	-0.12	-0.18	0.00	
3T	0.09	0.00	-0.06	0.06	0.00	-0.09	
4d	0.00	0.04	0.02	-0.02	-0.04	0.00	
4T	0.02	0.00	-0.01	0.01	0.00	-0.02	
5d	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	
<b>MF</b>	<b>2.808</b>	<b>5.623</b>	<b>-5.623</b>	<b>5.623</b>	<b>-5.623</b>	<b>-2.808</b>	
V <sub>H</sub>	2.11	-2.11	0.00	0.00	2.11	-2.11	
V	0.00	0.00	5.00	5.00	0.00	0.00	
<b>VF</b>	<b>2.108</b>	<b>-2.108</b>	<b>5.000</b>	<b>5.000</b>	<b>2.108</b>	<b>-2.108</b>	

La obtención de los **Cortantes Hiperestáticos** ( $V_H$ ), es similar a los ejercicios anteriores, primero se suman los momentos finales de los extremos de cada barra, para obtener el momento que provoca giro a la barra:  $M_u = MF_u + MF_u$ . Posteriormente se dividen los momentos obtenidos entre la longitud de la barra, para obtener los cortantes en los extremos, y el sentido que tendrán será el que provoque un giro que anule al  $M$  que fue obtenido.

Por ejemplo, en la barra AB:

$$V_{H_{AB}} = (2.808 + 5.623)/4m = 2.108$$

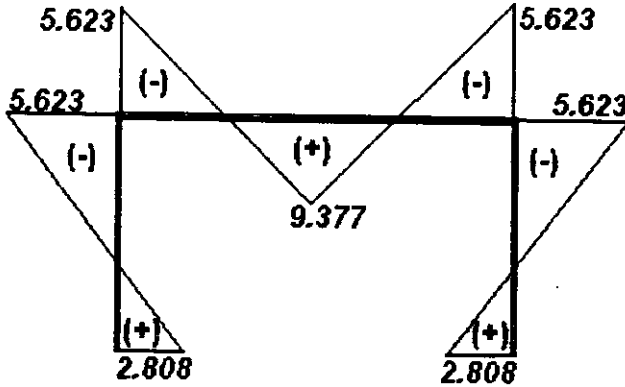
El signo es positivo en AB y negativo en BA, para provocar un giro negativo.

Los **cortantes Isostáticos** se obtienen considerando a la barra Isostática (simplemente apoyada); en este ejercicio solo la viga BD tendrá Cortantes Isostáticos.

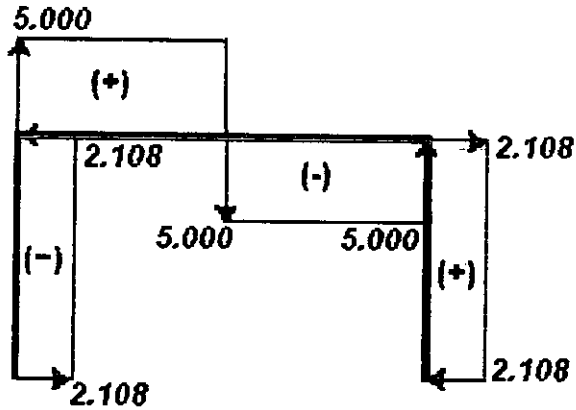


- *DIAGRAMAS FINALES*

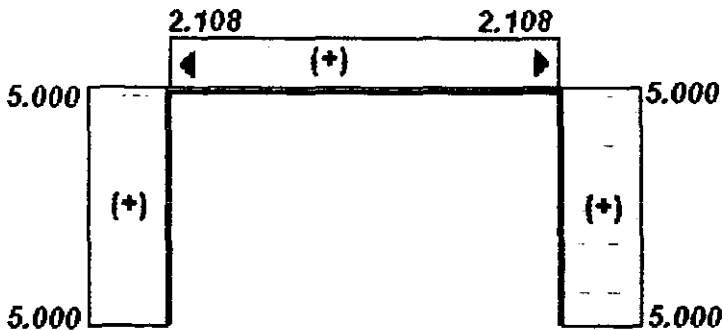
El trazo de los **Diagrama de Momentos Finales** quedará de la siguiente forma:



El Diagrama de Cortantes es:



El Diagrama de Normales es:



El clasificar este marco como parte de los marcos que no sufren desplazamiento, se debe a que tomando como referencia el diagrama de Normales, observamos que los valores en la viga BD son 2.108 para ambos extremos y esta a compresión por lo tanto el diagrama en este tramo es positivo y no existe una diferencia de fuerzas que desequilibre el marco por lo que no existe desplazamiento; si existiese una diferencia entre todas las fuerzas que actúan perpendicularmente en los cabezales de las columnas (cortantes) entonces podríamos decir que si existe un desplazamiento.

Los siguientes ejercicios serán para marcos que si presentan desplazamiento en sus entresijos. Resolveremos este mismo ejercicio pero ahora con la carga puntual NO al centro; en la sección 2.3, se definieron algunos tipos de marcos que no presentan desplazamiento lateral.

*"Una estructura hiperestática se considera sin desplazamiento lineal cuando existe simetría tanto en su geometría como en el sistema de cargas aplicado exteriormente, o bien, cuando los apoyos son colocados de tal manera que se restrinja la posibilidad de que se produzca dicha traslación "*

### 3.3 MARCOS CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

Para comprender este subcapítulo de ejercicios es necesario recordar lo descrito en el Capítulo 2 en su sección 4, donde se describe la metodología del desarrollo del método para estos marcos.

Mencionamos que para la solución de este tipo de estructuras utilizando el método de Cross, es necesario recurrir al principio de superposición de las causas y efectos de desplazamientos separados en las juntas, esto quiere decir que nuestro desarrollo va a consistir en dos etapas:

En la primera haremos un desarrollo normal, tal y como se ha hecho, pero en esta primera etapa al reflexionar sobre los resultados obtenidos e intentar cerrar los diagramas, nos daremos cuenta que existirá una variación de fuerzas que actúan lateralmente en los cabezales de las columnas donde existe desplazamiento, es decir al sumar algebraicamente estas fuerzas el resultado será diferente de cero; entonces a esta fuerza se le llamará "*La fuerza que impidió el desplazamiento*".

En la segunda etapa, la finalidad será obtener una fuerza en "sentido contrario" a la que impidió el desplazamiento, esto se logrará haciendo nuevamente un desarrollo del método pero ahora los momentos de empotramiento que se utilizarán serán imaginarios proponiéndose cualquier valor que sea razonable con los valores que se han ido obteniendo y estos serán aplicados a las columnas (superiores e inferiores) que formen parte del entrepiso que presente desplazamiento; los momentos serán proporcionales en todas esas columnas dependiendo de sus características físicas (Inercia, Módulo de Elasticidad, Longitud y Tipo de apoyo)

En esta segunda etapa también se obtendrá una fuerza que impida el desplazamiento para ese marco imaginario, por lo tanto, con las dos o más fuerzas que impidan el desplazamiento en cada uno de los marcos (se resolverá un marco

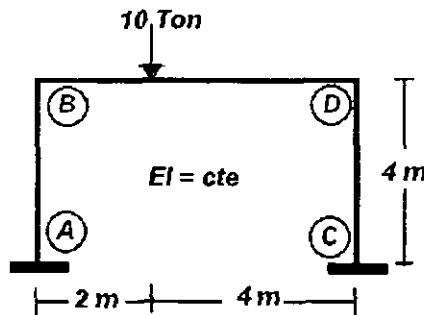
imaginario por cada entrepiso en el que exista desplazamiento) se desarrollará un sistema de ecuaciones con la finalidad de obtener un(os) factor(es) de corrección que corresponderían a cada uno de los marcos imaginarios.

La solución del marco finalmente se da con la suma de los Momentos y Cortantes Totales de la etapa uno, mas los de la etapa dos pero multiplicados por su factor de corrección (cada marco imaginario se multiplicará por su factor de corrección respectivo).

Para clarificar esto se procederá a desarrollar algunos ejemplos, en el primer ejercicio se observará que es semejante al ejercicio 3.2.3. solo que en este ejercicio "la carga que se aplica no esta en el centro de la viga", y así se notarán los cambios que sufrirá el marcos con tan solo esta variación.

### EJEMPLO 3.3.1

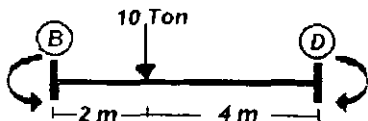
Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



Los primeros pasos serán los mismos que se obtuvieron en el ejercicio 3.2.3, la diferencia partirá desde el Momento de Empotramiento de la viga BD, por lo tanto estos valores anteriormente obtenidos solo serán copiados del ejercicio anterior, y se partirá de los Momentos de Empotramiento.

- MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Para la viga BD:



$$M_{BD} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{(10)(2)(4)^2}{(6)^2} = -8.89$$

$$M_{DB} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{(10)(2)^2(4)}{(6)^2} = 4.44$$

- APLICACIÓN DEL MÉTODO

## ETAPA 1

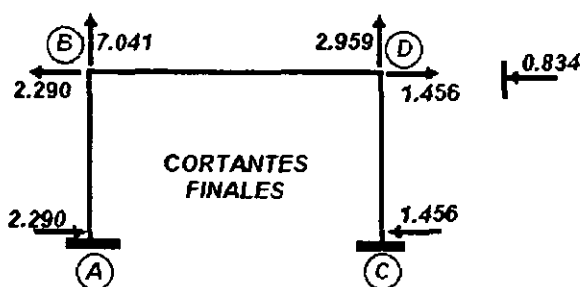
	NUDO A		NUDO B		NUDO D		NUDO C
	AB	BA	BD	DB	DC	CD	
K	1.00	1.00	0.67	0.67	1.00	1.00	
F <sub>D</sub>	0.00	0.60	0.40	0.40	0.60	0.00	
F <sub>T</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	
M <sub>E</sub>	0.00	0.00	-8.89	4.44	0.00	0.00	
Id	0.00	5.33	3.56	-1.78	-2.66	0.00	
1T	2.67	0.00	-0.89	1.78	0.00	-1.33	
2d	0.00	0.53	0.36	-0.71	-1.07	0.00	
2T	0.27	0.00	-0.36	0.18	0.00	-0.53	
3d	0.00	0.21	0.14	-0.07	-0.11	0.00	
3T	0.11	0.00	-0.04	0.07	0.00	-0.05	
4d	0.00	0.02	0.01	-0.03	-0.04	0.00	
4T	0.01	0.00	-0.01	0.01	0.00	-0.02	
5d	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	
MF	3.051	6.110	-6.110	3.884	-3.884	-1.940	
V <sub>H</sub>	2.29	-2.29	0.37	-0.37	1.46	-1.46	
V <sub>i</sub>	0.00	0.00	6.67	3.33	0.00	0.00	
VF	2.290		7.041	2.959		-1.456	

Ahora para comprobar la existencia de un desplazamiento basta con revisar los cortantes finales de los cabezales de las columnas, en este caso son BA y DC, donde

los valores son: En BA:  $-2.290 \text{ Ton}$ , la diferencia entre estas fuerzas es  $-0.834$ , y esta

es la fuerza que impidió el desplazamiento para este marco.

Para hacerlo mas claro obsérvese el diagrama:



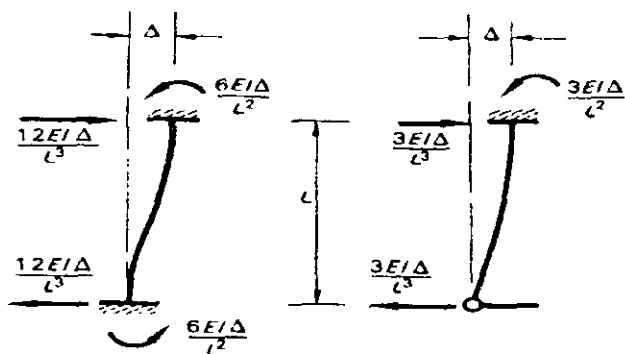
El hecho de revisar los cortantes radica en que partiendo de aquí se obtienen los normales y es ahí donde existirá un desequilibrio, en este caso será la viga BD que estará a compresión pero no en equilibrio debido a la fuerza que se obtuvo (-0.834).

#### • APLICACIÓN DEL MÉTODO ETAPA 2

El análisis para la aplicación de los momentos imaginarios se basará en la Rigidez Lineal (Ver Apéndice, Tabla 2)

En las columnas que es donde se aplicará el momento imaginario para la segunda etapa, sus características pueden ser muy diferentes y el hecho de aplicar un momento imaginario implica que este va a ser proporcional a las características de cada columna, para provocar un desplazamiento igual en todas las columnas. Siendo estas características: Inercia, Modulo de elasticidad, Longitud, Condiciones de apoyo.

Tomando la definición de la Rigidez Lineal que se define como el momento que produce un desplazamiento unitario aplicado en los extremos de una barra; partiendo de esto se hará el análisis



Este ejemplo en particular no va a tener ninguna complicación, ya que las únicas dos columnas son completamente iguales, en sus características físicas ( $EI$ , Longitud, y Apoyos). Pero se hará un análisis completo, para que se entienda el procedimiento.

Comenzando con la columna AB, está tiene un doble empotramiento, su momento que corresponde a su Factor de Rigidez Lineal, estará definido por:  $M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$  para los dos extremos, los momentos en sus extremos serán del mismo sentido. Para continuar se tendrá que proponer un momento cualquiera, ya sea positivo o negativo, y que vaya de acorde con los resultados que van obteniendo. Se propondrá un momento de 10.00Ton-m, para esta barra. Por lo tanto la ecuación anterior quedará:  $10 = \frac{6EI\Delta}{L^2}$

Si se despeja el desplazamiento ( $\Delta$ ) que se producirá con este momento, tenemos:

$$\Delta = \frac{(10) L^2}{6EI} = \frac{(10) (4)^2}{6(EI)} = \frac{160}{6EI} = \frac{26.67}{EI}$$

Ahora con este desplazamiento que se obtiene en la primera columna, se basará para obtener el momento que produciría un desplazamiento igual en la columna CD. Mencionamos antes que las dos columnas son iguales, por lo tanto su rigidez lineal va a ser la misma formula:  $M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ , solo que ahora la incógnita será el momento, debido

a que se conoce el desplazamiento que tendrán que sufrir todas las columnas del entrepiso.

Por lo tanto sustituyendo  $\Delta$ , tenemos:

$$M = \frac{6EI}{(4)^2} \frac{26.67}{EI} = 10.00$$

Este va hacer el momento que se aplicará en los dos extremos de la columna CD.

Si el marco tuviera mas columnas, que fueran participes del entrepiso, se tendría que hacer un análisis semejante para todas estas columnas.

Nota: "El análisis se hará tanto en las columnas superiores como inferiores pertenecientes al entrepiso que se desplaza".

Obtenidos los momentos imaginarios, se procederá a hacer nuevamente el desarrollo del método, de la misma manera como se ha realizado.

	NUDO A	NUDO B		NUDO D		NUDO C
	AB	BA	BD	DB	DC	CD
K	1.00	1.00	0.67	0.67	1.00	1.00
F <sub>D</sub>	0.00	0.60	0.40	0.40	0.60	0.00
F <sub>T</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
M <sub>E</sub>	10.00	10.00	0.00	0.00	10.00	10.00
Id	0.00	-6.00	-4.00	-4.00	-6.00	0.00
1T	-3.00	0.00	-2.00	-2.00	0.00	-3.00
2d	0.00	1.20	0.80	0.80	1.20	0.00
2T	0.60	0.00	0.40	0.40	0.00	0.60
3d	0.00	-0.24	-0.16	-0.16	-0.24	0.00
3T	-0.12	0.00	-0.08	-0.08	0.00	-0.12
4d	0.00	0.05	0.03	0.03	0.05	0.00
4T	0.02	0.00	0.02	0.02	0.00	0.02
5d	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.00
MF	7.504	4.998	-4.998	-4.998	4.998	7.504
V <sub>H</sub>	3.13	-3.13	1.67	-1.67	-3.13	3.13
V <sub>V</sub>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
VF	3.126		1.666	-1.666		3.126



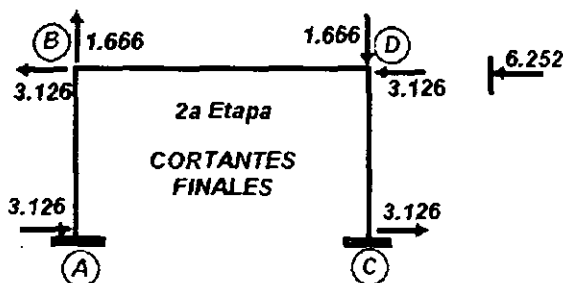
Los detalles que se observan en la tabla son:

- Los momentos solo se aplicaron en las columnas, en sus dos extremos y con el mismo signo.
- La Rigidez, el Factor de Distribución, y el Factor de Transporte, no cambiaron con respecto a la etapa 1.
- Los cortantes isostáticos (VI) son nulos, debido a que no hay fuerzas externas en esta etapa.

Ahora para comprobar la existencia de un desplazamiento también en este marco, se revisarán los cortantes finales de los cabezales de las columnas:

$$\text{En BA: } -3.126 \text{ Ton}$$

$$\text{En DC: } -3.126 \text{ Ton}$$



La suma algebraica entre estas fuerzas es  $-6.252$ , que es la fuerza que impidió el desplazamiento en la segunda etapa.

- SUMA DE LAS DOS ETAPAS.**

Para obtener los resultados finales, es necesario aplicar el efecto de la Superposición de Causas y Efectos, para ello es necesario sumar ambas etapas, solo que antes es indispensable obtener un factor de corrección para la segunda etapa. Este factor de corrección, no es otra cosa mas que un factor que hará proporcional los resultados de la segunda etapa con respecto a la fuerza que impidió el desplazamiento en la primera etapa; esto es para que se eliminen entre si ambas fuerzas, ya que esta segunda etapa se hace con el fin de provocar una fuerza en sentido contrario a la fuerza que impide el desplazamiento en la primera etapa.

El factor de corrección, se obtendrá con la solución de un sistema de ecuaciones, las variables del sistema variaran de acuerdo al numero de entrepisos en los que exista desplazamiento. En este marco existe un entrepiso con desplazamiento, por lo tanto el sistema de ecuaciones será:

$$FID_1 + FID_2 C_1 = 0$$

donde  $FID_i$  = Fuerza que Impide el Desplazamiento en la etapa  $i$ .

$$-0.834 + (-6.252)C_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{0.834}{-6.252} = -0.133$$

Con este factor se afectarán los resultados obtenidos en la segunda etapa:

	NUDO A	NUDO B		NUDO D		NUDO C
	AB	BA	BD	DB	DC	CD
MF	7.504	4.998	-4.998	-4.998	4.998	7.504
C1	-0.133					
MF2	-0.998	-0.665	0.665	0.665	-0.665	-0.998
VF	3.126	-3.126	1.666	-1.666	-3.126	3.126
C1	-0.133					
VF2	-0.416	0.416	-0.222	0.222	0.416	-0.416

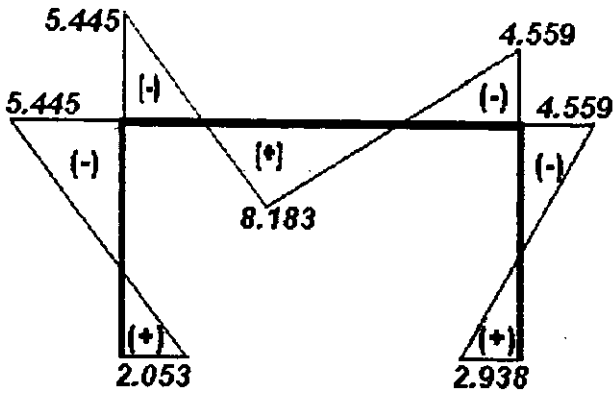
Si se observan los valores de los cortantes para los cabezales BA y DC, se notará que la suma de ellos es 0.832 y la FID en la primera fue  $-0.834$ , por lo tanto se cumple la finalidad que tuvo esta segunda etapa, que era de generar una FID que anulara a la FID de la primera etapa.

Ahora estos valores ya afectados por el factor de corrección se suman a los de la primera etapa:

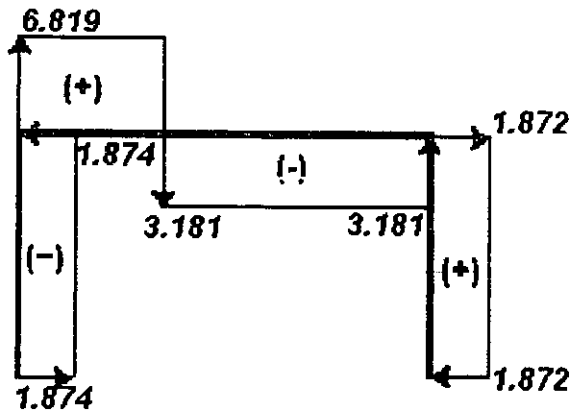
	NUDO A	NUDO B		NUDO D		NUDO C
	AB	BA	BD	DB	DC	CD
MF1	3.051	6.110	-6.110	3.884	-3.884	-1.940
MF2	-0.998	-0.665	0.665	0.665	-0.665	-0.998
MFT	2.053	5.445	-5.445	4.549	-4.549	-2.938
VF1	2.290	-2.290	7.041	2.959	1.456	-1.456
VF2	-0.416	0.416	-0.222	0.222	0.416	-0.416
VFT	1.874	-1.874	6.819	3.181	1.872	-1.872

- DIAGRAMAS FINALES

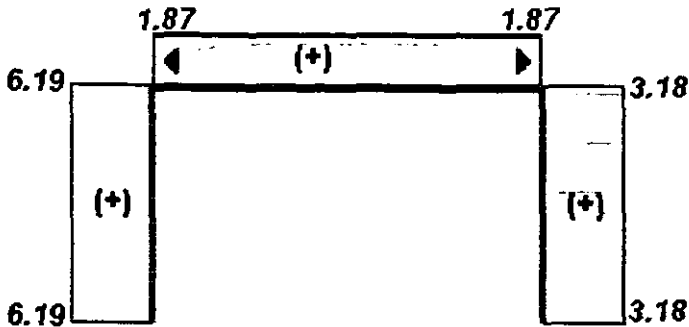
El trazo de los Diagrama de Momentos Finales quedara de la siguiente forma:



El Diagrama de Cortantes es:



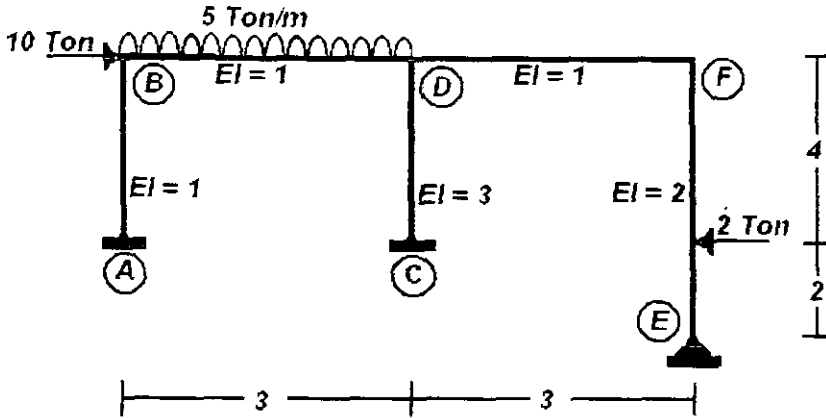
El Diagrama de Normales es:



La razón para analizar este marco, fue para comprobar la existencia de un desplazamiento cuando las fuerzas no son aplicadas simétricamente en un marco de características físicas simétricas. Si se comparan los valores obtenidos en el ejercicio 3.2 3 se notarán las diferencias de los resultados finales, la diferencia más clara parte desde los momentos en las columnas, las cuales tienen en este ejercicio valores diferentes entre sí, y por lo tanto para su diseño estructural se tendrá que considerar esto.

## EJEMPLO 3.3.2

Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



- **OBTENCION DE LAS RIGIDECES**

El primer paso es suponer un empotramiento perfecto en cada una de las uniones del marco, posteriormente se procede a obtener las rigideces. (Tabla 2 del Apéndice).

BARRA	LONGITUD	Ei	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
AB y BA	4.00	1	4	1.00
CD y DC	4.00	3	4	3.00
EF	6.00	2	0	0.00
FE	6.00	2	3	1.00
BD y DB	3.00	1	4	1.33
DF y FD	3.00	1	4	1.33

- **OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION**

Rigidez total por cada nudo.

$$K_{\text{nudo B}} = K_{AB} + \infty = 1 + \infty = \infty$$

$$K_{\text{nudo D}} = K_{BD} + K_{DD} = 1 + 1.33 + \infty = 2.33$$

$$K_{\text{nudo C}} = K_{CD} + \infty = 3 + \infty = \infty$$

$$K_{\text{nudo E}} = K_{DE} + K_{EE} + K_{EF} = 1.33 + 3 + 1.33 = 5.66$$

$$K_{\text{nudo F}} = K_{FE} = 0.00$$

$$K_{\text{nudo A}} = K_{AB} + K_{AD} = 1 + 1.33 = 2.33$$

Ahora el factor de distribución para cada extremo de las barras será:

$$Fd_{AB} = K_{AB} / K_{NudoA} = 1.00 / \infty = 0$$

$$Fd_{BA} = K_{BA} / K_{NudoB} = 1.00 / 2.33 = 0.43$$

$$Fd_{BD} = K_{BD} / K_{NudoB} = 1.33 / 2.33 = 0.57$$

$$Fd_{CD} = K_{CD} / K_{NudoC} = 3.00 / \infty = 0$$

$$Fd_{DB} = K_{DB} / K_{NudoD} = 1.33 / 5.66 = 0.24$$

$$Fd_{DC} = K_{DC} / K_{NudoD} = 3.00 / 5.66 = 0.53$$

$$Fd_{DF} = K_{DF} / K_{NudoD} = 1.33 / 5.66 = 0.24$$

$$Fd_{EF} = 1 \text{ POR SER APOYO FIJO}$$

$$Fd_{FD} = K_{FD} / K_{NudoF} = 1.33 / 2.33 = 0.57$$

$$Fd_{FE} = K_{FE} / K_{NudoF} = 1.00 / 2.33 = 0.43$$

- **FACTOR DE TRANSPORTE.**

Será para todas las barras en sus dos extremos, el factor de transporte = 0.50; solo para la columna EF que tienen en su extremo E un apoyo fijo, el  $F_T = 0.00$  en sus dos extremos.

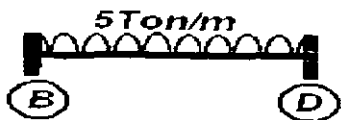
- **MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO**

En el marco existen 2 cargas puntuales y una carga uniformemente repartida, pero si se observa con detalle y se llega a sensibilizar con el marco, se notará que la fuerza de 10 Ton que carga al nudo B, no provocará ningún momento de empotramiento, sino un desplazamiento lateral.

Esta fuerza, no provocará momentos debido a que no existe una distancia entre el apoyo B con la ubicación de la fuerza, y si se recuerda que la definición de momento es:  $M = Fd$ .

Esta fuerza no intervendrá en esta etapa, sino hasta donde se considerarán los cortantes isostáticos, por lo pronto se resolverán la viga BD y la columna EF.

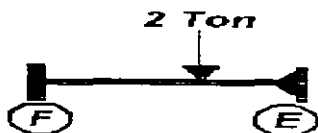
Para la viga BD:



$$M_{BD} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(5)(3)^2}{12} = -3.75$$

$$M_{DB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(5)(3)^2}{12} = 3.75$$

Para la columna EF:



$$M_{FE} = -\frac{Pab(h+I)}{2L^2} = -\frac{(2)(4)(2)(2+6)}{2(6)^2} = -1.78$$

$$M_{EF} = 0$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

ETAPA 1

	NUDO A	NUDO B		NUDO C	NUDO D			NUDO E	NUDO F	
	AB	BA	BD	CD	DB	DC	DF	EF	FD	FE
K	1.00	1.00	1.33	3.00	1.33	3.00	1.33	0.00	1.33	1.00
F <sub>h</sub>	0.00	0.43	0.57	0.00	0.24	0.53	0.24	1.00	0.57	0.43
F <sub>v</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00
M <sub>E</sub>	0.00	0.00	-3.75	0.00	3.75	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.78
1d	0.00	1.61	2.14	0.00	-0.88	-1.99	-0.88	0.00	1.01	0.77
1T	0.80	0.00	-0.44	-0.99	1.07	0.00	0.51	0.00	-0.44	0.00
2d	0.00	0.19	0.25	0.00	-0.37	-0.84	-0.37	0.00	0.25	0.19
2T	0.09	0.00	-0.19	-0.42	0.13	0.00	0.13	0.00	-0.19	0.00
3d	0.00	0.08	0.11	0.00	-0.06	-0.13	-0.06	0.00	0.11	0.08
3T	0.04	0.00	-0.03	-0.07	0.05	0.00	0.05	0.00	-0.03	0.00
4d	0.00	0.01	0.02	0.00	-0.02	-0.06	-0.02	0.00	0.02	0.01
4T	0.01	0.00	-0.01	-0.03	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00
5d	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
MF	0.95	1.90	-1.90	-1.51	3.67	-3.02	-0.65	0.00	0.73	-0.73
V <sub>h</sub>	0.71	-0.71	-0.59	-1.13	0.59	1.13	-0.03	-0.12	0.03	0.12
V <sub>v</sub>	0.00	-10.00	7.50	0.00	7.50	0.00	0.00	1.33	0.00	0.67
VF	0.71	-10.71	6.91	-1.13	8.09	1.13	-0.03	1.21	0.03	0.79

Para comprobar la existencia de un desplazamiento basta con revisar los cortantes finales de los cabezales de las columnas, en este caso son BA, DC y FE, la suma de estos tres cortantes es -8.79, y esta es la fuerza que impidió el desplazamiento para este marco.

$$FID_1 = -8.79$$

## • APLICACIÓN DEL MÉTODO

## ETAPA 2

Para la aplicación de los momentos imaginarios, el análisis se basará en la Rigidez Lineal (Ver Apéndice, Tabla 2)

Como se puede observar las tres columnas varían en sus características físicas, por lo tanto se tienen que analizar cada una de ellas y determinar el momento imaginario que va a ser aplicado a cada una de ellas para provocar un desplazamiento igual en las tres.

Si se toma la Rigidez Lineal para un miembro doblemente empotrado (a), y para un miembro con un apoyo empotrado y uno fijo (b), se notará la semejanza en las ecuaciones, la diferencia será un factor, al que se llamará Factor de Apoyo Lineal (FAL).

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (a) \quad \text{Para ambos extremos}$$

$$M = \frac{3EI\Delta}{L^2} \quad (b) \quad \text{Para el extremo empotrado}$$

$$M = \frac{0EI\Delta}{L^2} \quad (b) \quad \text{Para el extremo articulado}$$

Por lo tanto definiendo una ecuación general para la Rigidez Lineal, que dependerá solo del FAL, será:

$$M = \frac{(FAL)EI\Delta}{L^2} \quad (c)$$

Para comenzar el análisis, como en el ejercicio anterior, es necesario tomar una columna, esta barra podrá ser cualquiera, en el ejercicio anterior se tomó la extrema izquierda, ahora se tomará la columna central (CD), se supondrá un momento de  $-10$  Ton·m, también el signo del momento no influye, ya que con el factor de corrección se corrige este, en caso de ser de sentido contrario.

El análisis se desarrollará basándose en una tabulación, para hacerlo más compacto, y que se aprecien los resultados con mayor facilidad. Si se observa la ecuación (C), y si se ha supuesto un momento imaginario para la barra CD, la incógnita será entonces el desplazamiento que se produciría con ese momento, por lo tanto despejaremos el desplazamiento de la ecuación (C), quedando:



$$\Delta = \frac{ML^2}{(FAL)(EI)} \quad (d)$$

Por lo tanto aplicando esta formula a la barra CD:

BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	MOMENTO IMAGINARIO	DESPLAZAMIENTO / EI
CD y DC	4.00	3.00	6.00	-10.00	-8.89

Una vez obtenido el desplazamiento para una barra, para las columnas restantes, tendrá que ser el mismo, por lo tanto, se aplicará la ecuación (C), donde se conoce el desplazamiento, por lo tanto la incógnita será el Momento.

BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	$\frac{\Delta}{EI}$	MOMENTO IMAGINARIO
AB	4.00	1.00	6.00	-8.89	-3.33
BA	4.00	1.00	6.00	-8.89	-3.33
FE	6.00	2.00	3.00	-8.89	-1.48
EF	6.00	2.00	0.00	-8.89	0.00

Si se analizan los resultados, se observará que en la columna AB. En sus dos extremos se aplicará el mismo momento y del mismo signo, por lo tanto no es necesario analizar los dos extremos para una barra doblemente empotrada. En el caso de la barra EF, donde existe un apoyo empotrado y un apoyo articulado, también solo se puede analizar el extremo empotrado, dado que en los apoyos fijos, nunca se debe existir un momento

Ahora con estos momentos imaginarios obtenidos, se desarrollarán las distribuciones y los transportes, para obtener los Momentos y Cortantes Finales para esta etapa. En este marco tampoco no existirán los Cortantes Isostáticos.

	NUDO A		NUDO B			NUDO C		NUDO D			NUDO E		NUDO F	
	AB	BA	BD	CD	DB	DC	DF	EF	FD	FE				
K	1.00	1.00	1.33	3.00	1.33	3.00	1.33	0.00	1.33	1.00				
F <sub>c</sub>	0.00	0.43	0.57	0.00	0.24	0.53	0.24	1.00	0.57	0.43				
F <sub>v</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00				
M <sub>e</sub>	-3.33	-3.33	0.00	-10.00	0.00	-10.00	0.00	0.00	0.00	-1.48				
l <sub>d</sub>	0.00	1.43	1.90	0.00	2.35	5.30	2.35	0.00	0.84	0.64				
1 <sub>T</sub>	0.71	0.00	1.18	2.65	0.95	0.00	0.42	0.00	1.18	0.00				
2 <sub>d</sub>	0.00	-0.50	-0.67	0.00	-0.32	-0.73	-0.32	0.00	-0.67	-0.51				
2 <sub>T</sub>	-0.25	0.00	-0.16	-0.36	-0.33	0.00	-0.33	0.00	-0.16	0.00				
3 <sub>d</sub>	0.00	0.07	0.09	0.00	0.16	0.35	0.16	0.00	0.09	0.07				
3 <sub>T</sub>	0.03	0.00	0.08	0.18	0.05	0.00	0.05	0.00	0.08	0.00				
4 <sub>d</sub>	0.00	-0.03	-0.04	0.00	-0.02	-0.05	-0.02	0.00	-0.04	-0.03				
4 <sub>T</sub>	-0.02	0.00	-0.01	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	0.00	-0.01	0.00				
5 <sub>d</sub>	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.02	0.01	0.00	0.01	0.00				
MF	-2.85	-2.37	2.37	-7.55	2.82	-5.11	2.29	0.00	1.31	-1.31				
VT	-1.31	1.31	-1.73	-3.16	1.73	3.16	-1.20	-0.22	1.20	0.22				

La fuerza que impidió el desplazamiento en esta etapa fue:

$$FID_2 = 4.69$$

• SUMA DE LAS DOS ETAPAS.

Se aplicará el efecto de la Superposición de Causas y Efectos para obtener los Resultados Finales del marco, pero antes es necesario obtener el factor de corrección para la segunda etapa.

El sistema de ecuaciones que definirá el Factor de Corrección es:

$$FID_1 + FID_2 C_1 = 0$$

donde  $FID_i$  = Fuerza que Impide el Desplazamiento en la etapa  $i$ .

$$-8.79 + (4.69)C_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{8.79}{4.69} = 1.874$$

Con este factor se afectarán los resultados obtenidos en la segunda etapa:

	NUDO A		NUDO B			NUDO C		NUDO D			NUDO E		NUDO F	
	AB	BA	BD	CD	DB	DC	DF	EF	FD	FE				
MF	-2.85	-2.37	2.37	-7.55	2.82	-5.11	2.29	0.00	1.31	-1.31				
FC	1.874													
MF2	-5.34	-4.43	4.44	-14.15	5.28	-9.58	4.29	0.00	2.45	-2.45				
VT	-1.31	1.31	-1.73	-3.16	1.73	3.16	-1.20	-0.22	1.20	0.22				
FC	1.874													
VT2	-2.45	2.45	-3.24	-5.92	3.24	5.92	-2.25	-0.41	2.25	0.41				

La suma de los cortantes en los cabezales de las tres columnas es igual a 8.78, y con esta fuerza queda anulada la Fuerza que Impidió el Desplazamiento en la 1ª Etapa.

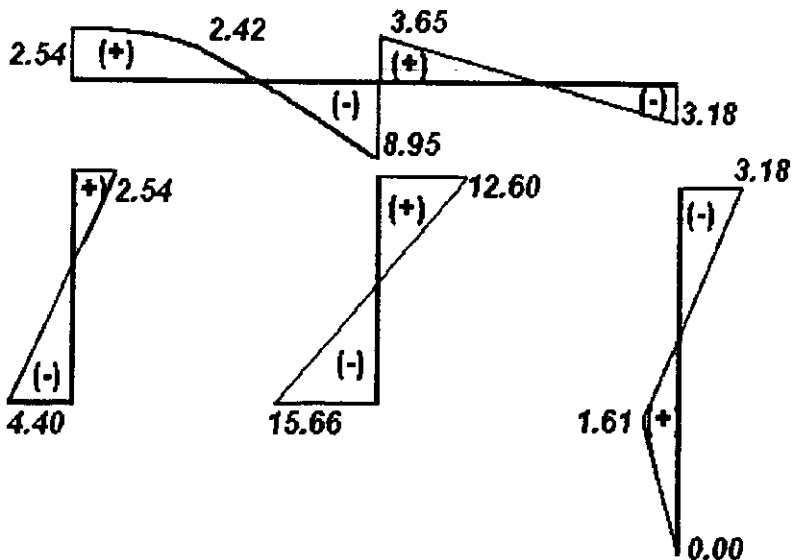
Ahora estos valores ya afectados por el factor de corrección se suman a los de la primera etapa:

	NUDO A		NUDO B			NUDO C		NUDO D			NUDO E		NUDO F	
	AB	BA	BD	CD	DB	DC	DF	EF	FD	FE				
MF1	0.95	1.90	-1.90	-1.51	3.67	-3.02	-0.65	0.00	0.73	-0.73				
MF2	-5.34	-4.43	4.44	-14.15	5.28	-9.58	4.29	0.00	2.45	-2.45				
MFT	-4.40	-2.54	2.54	-15.66	8.95	-12.60	3.65	0.00	3.18	-3.18				
VF1	0.71	-10.71	6.91	-1.13	8.09	1.13	-0.03	1.21	0.03	0.79				
VF2	-2.45	2.45	-3.24	-5.92	3.24	5.92	-2.25	-0.41	2.25	0.41				
VFT	-1.74	-8.26	3.67	-7.05	11.33	7.05	-2.28	0.80	2.28	1.20				

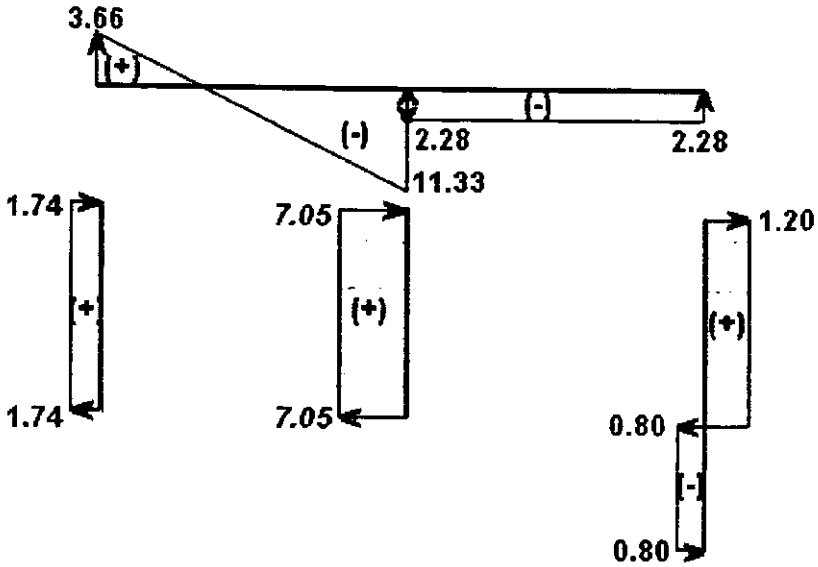
La suma de los cortantes en los cabezales es cero, por lo tanto queda resultado el marco.

• *DIAGRAMAS FINALES*

El trazo de los Diagrama de Momentos Finales quedara de la siguiente forma:

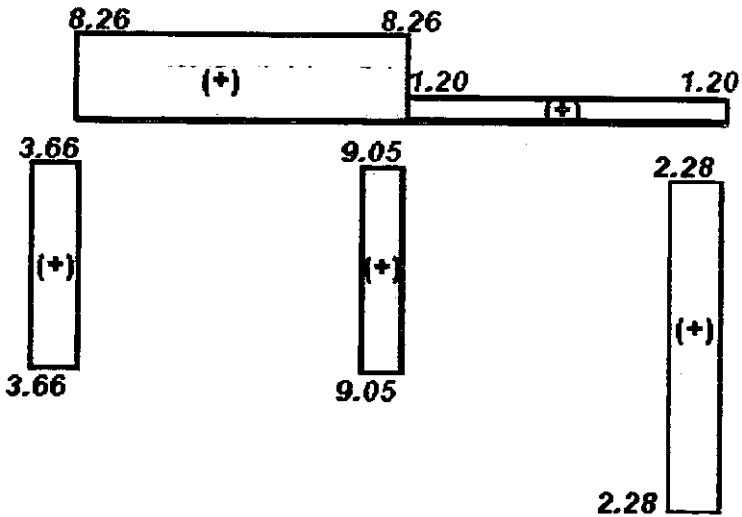


El Diagrama de Cortantes es:



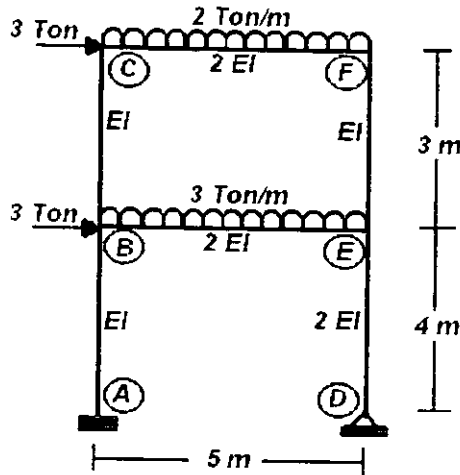
En la columna AB, en el cabezal, los resultados indican un cortante de  $-8.26$ , pero como existe una fuerza de 10 Ton en ese punto, al sumar estas dos fuerzas nos da una fuerza de 1.74, el cortante de  $-8.26$  será el que intervenga en los Normales.

El Diagrama de Normales es:



## EJEMPLO 3.3.3

Calcular los elementos mecánicos del siguiente marco:



- OBTENCION DE LAS RIGIDECES

BARRA	LONGITUD	EI	FACTOR DE APOYO	RIGIDEZ ANGULAR
AB y BA	4.00	1	4	1.00
BC y CB	3.00	1	4	1.33
BE y EB	5.00	2	4	1.60
CF y FC	5.00	2	4	1.60
FE y EF	3.00	1	4	1.33
ED	4.00	2	3	1.50
DE	4.00	2	0	0.00

- OBTENCION DEL FACTOR DE DISTRIBUCION

Rigidez total por cada nudo.

$$K_{\text{Nudo A}} = K_{AB} + \infty = 1 + \infty = \infty$$

$$K_{\text{Nudo B}} = K_{BA} + K_{BE} + K_{BC} = 1.00 + 1.60 + 1.33 = 3.93$$

$$K_{\text{Nudo C}} = K_{CB} + K_{CF} = 1.33 + 1.60 = 2.93$$

$$K_{\text{Nudo D}} = K_{DE} = 0$$

$$K_{\text{Nudo E}} = K_{ED} + K_{EB} + K_{EF} = 1.50 + 1.60 + 1.33 = 4.43$$

$$K_{\text{Nudo F}} = K_{FE} + K_{FC} = 1.33 + 1.60 = 2.93$$

El factor de distribución para cada extremo de las barras será:

$$Fd_{AB} = K_{AB} / K_{NudoA} = 1.00 / \infty = 0$$

$$Fd_{BA} = K_{BA} / K_{NudoB} = 1.00 / 3.93 = 0.25$$

$$Fd_{BE} = K_{BE} / K_{NudoB} = 1.60 / 3.93 = 0.41$$

$$Fd_{BC} = K_{BC} / K_{NudoB} = 1.33 / 3.93 = 0.34$$

$$Fd_{CB} = K_{CB} / K_{NudoC} = 1.33 / 2.93 = 0.45$$

$$Fd_{CF} = K_{CF} / K_{NudoC} = 1.60 / 2.93 = 0.55$$

$$Fd_{DE} = 1 \text{ POR SER APOYO FIJO}$$

$$Fd_{ED} = K_{ED} / K_{NudoE} = 1.50 / 4.43 = 0.34$$

$$Fd_{EB} = K_{EB} / K_{NudoE} = 1.60 / 4.43 = 0.36$$

$$Fd_{EF} = K_{EF} / K_{NudoE} = 1.33 / 4.43 = 0.30$$

$$Fd_{FE} = K_{FE} / K_{NudoF} = 1.33 / 2.93 = 0.45$$

$$Fd_{FC} = K_{FC} / K_{NudoF} = 1.60 / 2.93 = 0.55$$

- FACTOR DE TRANSPORTE.

Para todas las barras en sus dos extremos,  $F_T = 0.50$ ; excepto la columna DE que tendrá un  $F_T = 0.00$  en sus dos extremos.

- MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

Existen 4 sistemas de carga en el marco, pero debe notarse que solo dos de ellas (las cargas uniformemente repartidas en las vigas) van a provocar  $M_E$ . Las cargas puntuales que cargan al marco en su costado izquierdo no provocarán  $M_E$ , debido a que estas están exactamente en los nudos B y C y no provocarán un giro en la barra con respecto al nudo. Al igual que en el ejercicio anterior estas cargas intervendrán a partir de los cortantes isostáticos.

Para la viga BE:



$$M_{BD} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(3)(5)^2}{12} = -6.25$$

$$M_{DB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(3)(5)^2}{12} = 6.25$$

Para la columna CF:



$$M_{BD} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{(2)(5)^2}{12} = -4.17$$

$$M_{DB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(5)^2}{12} = 4.17$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO

ETAPA 1

	NUDO A	NUDO B				NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE	
K	1.00	1.00	1.60	1.33	1.33	1.60	0.00	1.60	1.50	1.33	1.60	1.33	
F <sub>T</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00	0.50	0.50	0.50	
F <sub>d</sub>	0.00	0.25	0.41	0.34	0.45	0.55	1.00	0.36	0.34	0.30	0.55	0.45	
M <sub>e</sub>	0.00	0.00	-8.25	0.00	0.00	-4.17	0.00	6.25	0.00	0.00	4.17	0.00	
1d	0.00	1.59	2.54	2.12	1.89	2.28	0.00	-2.26	-2.12	-1.88	-2.28	-1.89	
1T	0.80	0.00	-1.13	0.95	1.06	-1.14	0.00	1.27	0.00	-0.96	1.14	-0.94	
2d	0.00	0.05	0.07	0.06	0.04	0.04	0.00	-0.12	-0.11	-0.10	-0.11	-0.09	
2T	0.02	0.00	-0.06	0.02	0.03	-0.05	0.00	0.04	0.00	-0.05	0.02	-0.05	
3d	0.00	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	
3T	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01	0.00	
4d	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	
M <sub>H</sub>	0.82	1.65	-4.80	3.16	3.03	-3.03	0.00	5.19	-2.23	-2.96	2.96	-2.96	
V <sub>H</sub>	0.62	-0.62	-0.08	2.06	-2.06	0.01	-0.56	0.08	0.56	-1.97	-0.01	1.97	
V <sub>I</sub>	0.00	-3.00	7.50	0.00	-3.00	5.00	0.00	7.50	0.00	0.00	5.00	0.00	
V <sub>T</sub>	0.62	-3.62	7.42	2.06	-5.06	5.01	-0.56	7.58	0.56	-1.97	4.99	-1.97	

Este marco cuenta con dos entrepisos, los cuales, a primera impresión será lógico que sufran un desplazamiento, por lo que es necesario obtener las Fuerzas que Impiden el Desplazamiento para cada uno de los entrepisos. Como se menciono anteriormente, estas fuerzas se obtienen con la suma algebraica de los Cortantes Totales (VT) que intervienen directamente en cada entrepiso, en este ejercicio se tendrá:

Para el primer entrepiso:

$$FID_{11} = VT_{BA} + VT_{BC} + VT_{ED} + VT_{EF} = -3.62 + 2.06 + 0.56 - 1.97 = -2.97$$

Para el segundo entrepiso:

$$FID_{12} = VT_{CB} + VT_{FE} = -5.06 + 1.97 = -3.09$$

Una vez comprobado que existe desplazamiento en los dos niveles se tendrá que someter el marco a una segunda y tercer etapa, una por cada entrepiso, es decir, en la segunda etapa, se aplicará momentos imaginarios que provoquen un desplazamiento solo en el segundo entrepiso, en la tercer etapa también se aplicarán momentos imaginarios, pero que provoquen el desplazamiento en el primer entrepiso.

• **APLICACIÓN DEL MÉTODO ETAPA 2 (SEGUNDO ENTREPISO)**

Primero se determinarán los momentos imaginarios, el análisis se basará en la Rigidez Lineal (Ver Apéndice, Tabla 2)

Las barras que intervendrán en este análisis serán las columnas BC y EF, solo estas dos por que son las columnas que se conectan directamente al entrepiso.

Si se toma la ecuación general que se definió en el ejercicio anterior, y se supone un momento de -5 Ton para la barra BC,

$$M = \frac{(FAL)EI \Delta}{L^2}$$

$$\Delta = \frac{M L^2}{(FAL)(EI)}$$

BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	MOMENTO IMAGINARIO	DESPLAZAMIENTO / EI
BC y CB	3.00	1.00	6.00	-5.00	-7.50

Una vez obtenido el desplazamiento para la barra BC, para las columnas restantes, el desplazamiento tendrá que ser el mismo, por lo tanto, se aplicará la ecuación donde se conoce el desplazamiento pero la incógnita será el Momento.

BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	$\frac{\Delta}{EI}$	MOMENTO IMAGINARIO
EF	3.00	1.00	6.00	-7.50	-5.00



Ahora con los momentos imaginarios obtenidos, se desarrollará la segunda etapa.

	NUDO A		NUDO B				NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE		
K	1.00	1.00	1.60	1.33	1.33	1.60	0.00	1.60	1.50	1.33	1.60	1.33		
Ft	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00	0.50	0.50	0.50		
Fd	0.00	0.25	0.41	0.34	0.45	0.55	1.00	0.36	0.34	0.30	0.55	0.45		
Me	0.00	0.00	0.00	-5.00	-5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5.00	0.00	-5.00		
1d	0.00	1.27	2.04	1.69	2.27	2.73	0.00	1.81	1.69	1.50	2.73	2.27		
1T	0.64	0.00	0.90	1.13	0.85	1.37	0.00	1.02	0.00	1.13	1.37	0.75		
2d	0.00	-0.52	-0.83	-0.69	-1.00	-1.21	0.00	-0.78	-0.73	-0.65	-1.16	-0.96		
2T	-0.26	0.00	-0.39	-0.50	-0.34	-0.58	0.00	-0.41	0.00	-0.48	-0.60	-0.32		
3d	0.00	0.23	0.36	0.30	0.42	0.50	0.00	0.32	0.30	0.27	0.51	0.42		
3T	0.11	0.00	0.16	0.21	0.15	0.25	0.00	0.18	0.00	0.21	0.25	0.13		
4d	0.00	-0.09	-0.15	-0.13	-0.18	-0.22	0.00	-0.14	-0.13	-0.12	-0.21	-0.18		
4T	-0.05	0.00	-0.07	-0.09	-0.06	-0.11	0.00	-0.08	0.00	-0.09	-0.11	-0.06		
5d	0.00	0.04	0.07	0.05	0.08	0.09	0.00	0.06	0.06	0.05	0.09	0.08		
5T	0.02	0.00	0.03	0.04	0.03	0.05	0.00	0.03	0.00	0.04	0.05	0.02		
6d	0.00	-0.02	-0.03	-0.02	-0.03	-0.04	0.00	-0.03	-0.02	-0.02	-0.04	-0.03		
MH	0.46	0.91	2.09	-3.00	-2.84	2.84	0.00	1.99	1.17	-3.15	2.87	-2.87		
VT	0.34	-0.34	-0.82	-1.95	-1.95	-1.14	0.29	0.82	-0.29	-2.01	1.14	-2.01		

Las fuerzas que impidieron el desplazamiento en los entrepisos, en esta segunda etapa, fueron:

$$FID_{22} = 3.96$$

$$FID_{21} = -4.59$$

• APLICACIÓN DEL MÉTODO ETAPA 3 (PRIMER ENTREPISO)

Las barras que intervendrán en este análisis serán las columnas superiores BC y EF; y las columnas inferiores AB y DE, serán las cuatro columnas debido a que son participes directas en el desplazamiento. Se volverá a tomar la barra BC para que a partir de ella se obtenga un desplazamiento constante para todas las barras; el momento será nuevamente  $-5$ . Recuérdese que este valor puede ser cualquiera.

$$\Delta = \frac{ML^2}{(FAL)(EI)}$$

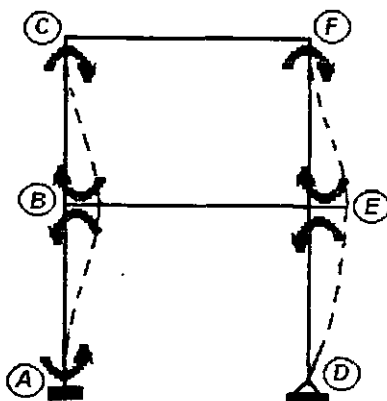
BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	MOMENTO IMAGINARIO	DESPLAZAMIENTO / EI
BC y CB	3.00	1.00	6.00	-5.00	-7.50

Con el desplazamiento de la barra BC, se obtendrá el momento para las columnas restantes.

$$M = \frac{(FAL)EI\Delta}{I^2}$$

BARRA	LONGITUD	CONSTANTE EI	FACTOR DE APOYO LINEAL	$\frac{\Delta}{EI}$	MOMENTO IMAGINARIO
EF y FE	3.00	1.00	6.00	-7.50	-5.00
BA y AB	4.00	1.00	6.00	-7.50	-2.81
ED	4.00	2.00	3.00	-7.50	-2.81
DE	4.00	2.00	0.00	-7.50	0.00

Nota: Una consideración que se debe hacer a los momentos que forman parte de las columnas superiores, es que estos deben ser de signo contrario a los momentos que serán aplicados en las columnas inferiores, esto se observa en el siguiente diagrama, esta convención se basa en la tabla 2 del Apéndice, Rigidez Lineal.



Por lo tanto solo los momentos obtenidos para las columnas superiores, se considerarán de signo contrario. Y con estos momentos imaginarios ya definidos, se desarrollará la tercera etapa.

	NUDO A		NUDO B				NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE		
K	1.00	1.00	1.60	1.33	1.33	1.60	0.00	1.60	1.50	1.33	1.60	1.33		
F <sub>i</sub>	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00	0.50	0.50	0.50		
F <sub>d</sub>	0.00	0.25	0.41	0.34	0.45	0.55	1.00	0.36	0.34	0.30	0.55	0.45		
Me	-2.81	-2.81	0.00	5.00	5.00	0.00	0.00	0.00	-2.81	5.00	0.00	5.00		
1d	0.00	-0.56	-0.89	-0.74	-2.27	-2.73	0.00	-0.79	-0.74	-0.66	-2.73	-2.27		
1T	-0.28	0.00	-0.40	-1.13	-0.37	-1.37	0.00	-0.45	0.00	-1.13	-1.37	-0.33		
2d	0.00	0.39	0.62	0.52	0.79	0.95	0.00	0.57	0.54	0.47	0.93	0.77		
2T	0.19	0.00	0.29	0.39	0.26	0.46	0.00	0.31	0.00	0.38	0.47	0.24		
3d	0.00	-0.17	-0.28	-0.23	-0.33	-0.39	0.00	-0.25	-0.24	-0.21	-0.39	-0.32		
3T	-0.09	0.00	-0.13	-0.16	-0.11	-0.19	0.00	-0.14	0.00	-0.16	-0.20	-0.10		
4d	0.00	0.07	0.12	0.10	0.14	0.17	0.00	0.11	0.10	0.09	0.16	0.14		
4T	0.04	0.00	0.05	0.07	0.05	0.08	0.00	0.06	0.00	0.07	0.08	0.04		
5d	0.00	-0.03	-0.05	-0.04	-0.06	-0.07	0.00	-0.05	-0.04	-0.04	-0.07	-0.06		
5T	-0.02	0.00	-0.02	-0.03	-0.02	-0.04	0.00	-0.03	0.00	-0.03	-0.04	-0.02		
6d	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.00	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02		
MH	-2.96	-3.10	-0.66	3.76	3.10	-3.10	0.00	-0.63	-3.18	3.80	-3.11	3.11		
VT	-1.51	1.51	0.26	2.28	2.28	1.24	-0.79	-0.26	0.79	2.30	-1.24	2.28		

Las fuerzas que impidieron el desplazamiento, en la tercer etapa, en los entrepisos fueron:

$$FID_{32} = -4.58$$

$$FID_{31} = 6.88$$

#### • OBTENCION DE LOS FACTORES DE CORRECCION

El sistema de ecuaciones que definirá los Factores de Corrección es:

$$FID_{12} + FID_{22}C_2 + FID_{32}C_3 = 0$$

$$FID_{11} + FID_{21}C_2 + FID_{31}C_3 = 0$$

donde  $FID_j$  = Fuerza que Impide el Desplazamiento en la etapa  $i$  del entrepiso  $j$ .

$C_2$  = Factor de Corrección que afectará los resultados del el marco al que se le sometió desplazamiento en el segundo entrepiso. (Etapa 2)

$C_3$  = Factor de Corrección que afectará los resultados del el marco al que se le sometió desplazamiento en el primer entrepiso. (Etapa 3)

$$-3.09 + (3.96)C_2 + (-4.58)C_3 = 0$$

$$-2.97 + (-4.59)C_2 + (6.88)C_3 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$C_3 = 4.17$$

$$C_2 = 5.62$$

- SUMA DE LAS DOS ETAPAS.

Con estos factores se afectarán los resultados obtenidos en la segunda y tercer etapa:

- SEGUNDA ETAPA

	NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE
MH	0.46	0.91	2.09	-3.00	-2.84	2.84	0.00	1.99	1.17	-3.15	2.87	-2.87
FC2	5.62											
MF2	2.61	5.11	11.75	-16.86	-15.96	15.96	0.00	11.16	6.55	-17.71	16.15	-16.15
VT	0.34	-0.34	-0.82	-1.95	1.95	-1.14	0.29	0.82	-0.29	-2.01	1.14	2.01
FC2	5.62											
VT2	1.93	-1.93	-4.58	-10.94	10.94	-6.42	1.64	4.58	-1.64	-11.28	6.42	11.28

- TERCERA ETAPA

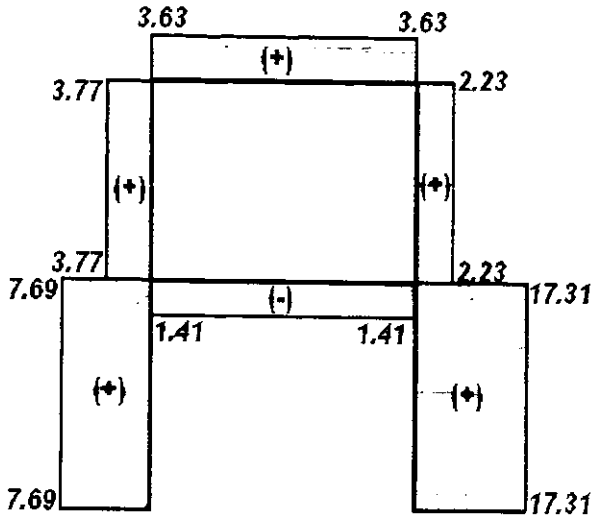
	NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE
MH	-2.96	-3.10	-0.66	3.76	3.10	-3.10	0.00	-0.63	-3.18	3.80	-3.11	3.11
FC3	4.17											
MF3	-12.34	-12.91	-2.76	15.66	12.92	-12.92	0.00	-2.62	-13.24	15.86	-12.97	12.97
VT	-1.51	1.51	0.26	2.28	-2.28	1.24	-0.79	-0.26	0.79	2.30	-1.24	-2.30
FC3	4.17											
VF3	-6.31	6.31	1.08	9.53	-9.53	5.18	-3.31	-1.08	3.31	9.61	-5.18	-9.61

Con los valores ya afectados por su respectivo factor de corrección, se sumarán a los de la primera etapa:

	NUDO A		NUDO B		NUDO C		NUDO D	NUDO E			NUDO F	
	AB	BA	BE	BC	CB	CF	DE	EB	ED	EF	FC	FE
MF1	0.82	1.65	-4.80	3.16	3.03	-3.03	0.00	5.19	-2.23	-2.96	2.96	-2.96
MF2	2.61	5.11	11.75	-16.86	-15.96	15.96	0.00	11.16	6.55	-17.71	16.15	-16.15
MF3	-12.34	-12.91	-2.76	15.66	12.92	-12.92	0.00	-2.62	-13.24	15.86	-12.97	12.97
MF1	-8.91	-6.15	4.19	1.96	-0.01	0.01	0.00	13.73	-8.92	-4.81	6.14	-6.14
VF1	0.62	-3.62	7.42	2.06	-5.06	5.01	-0.56	7.58	0.56	-1.97	4.99	1.97
VF2	1.93	-1.93	-4.58	-10.94	10.94	-6.42	1.64	4.58	-1.64	-11.28	6.42	11.28
VF3	-6.31	6.31	1.08	9.53	-9.53	5.18	-3.31	-1.08	3.31	9.61	-5.18	-9.61
VFT	-3.76	0.76	3.92	0.65	-3.65	3.77	-2.23	11.08	2.23	-3.64	6.23	-3.64

La suma de los cortantes en los cabezales es cero, por lo tanto queda resulto el marco.

El Diagrama de Normales es:



---

# Capítulo 4

---

## DESARROLLO Y MANEJO DEL PROGRAMA

---

El presente trabajo, como se ha mencionado, tiene como finalidad el establecer una propuesta para desarrollar un programa de cómputo general del método de Cross; este método solo es práctico para análisis de estructuras pequeñas, debido a su gran manejo de números, si se realiza de forma manual, pero con la ayuda de una hoja de cálculo se podrán realizar las operaciones con mayor rapidez y versatilidad, y por lo tanto el método se podrá aplicar en estructuras más complejas, ya que el manejo de números se volverá menos tedioso.

Automatización, lo podemos definir como un conjunto de técnicas y aplicaciones que tienen por objeto la regulación, el mando y la organización de máquinas o de sistemas sin la intervención del hombre. Tanto los fines que la automatización se propone como los medios con los cuales se lleva a cabo son totalmente distintos según los diferentes campos de aplicación. En todas las aplicaciones de la automatización puede reconocerse no sólo el interés de definir y estudiar los medios para llevar a cabo los métodos o las transformaciones, sino también las modalidades según las cuales dichos métodos o transformaciones han de cumplirse.

La misión de la automatización como ciencia es el estudio de las leyes de relación, es decir, de las modalidades que regulan el intercambio de información entre las partes integrantes de un sistema. Actualmente la automatización encuentra aplicación en la mayoría de las actividades humanas, desde los procesos de producción hasta la investigación científica. En la mayoría de los casos la automatización tiene un principal fin, optimizar el tiempo, además del esfuerzo y evitar hasta cierto punto los errores humanos.

El funcionamiento totalmente automático de todo sistema se convierte en una necesidad absoluta, ya que el hombre no podría de ningún modo desarrollar el enorme trabajo de medida y calculo además de garantizar la rapidez y la precisión necesarias para la acción deseada.

Si aplicamos estas definiciones al Método de Cross, y se toma en cuenta la gran cantidad de operaciones básicas que se tienen que desarrollar para lograr obtener los resultados deseados. Notaremos sin la menor duda que puede ser mucho más sencillo cuando se desarrolle a través de una hoja de calculo, la automatización completa no puede existir ya que siempre se deberá existir la dotación de los datos necesarios para su desarrollo. Entonces, lo que sería el desarrollo del método si se podría automatizar, y así resolver el problema.

Para automatizar operaciones matemáticas, existen varios programas que pueden ser utilizados (Lotus, Pascal, Fortran, etc.), pero para el uso de estos se tiene que tener conocimiento sobre la programación, existen otros recursos como Microsoft Excel que además de ser la hoja de calculo más comúnmente usada y que cualquiera puede acceder y desarrollar operaciones a ella, es una opción que nosotros como autores de este trabajo de tesis tomamos en cuenta; ya que lo que se pretende no es desarrollar un gran programa con el que se resuelvan todas las estructuras conocidas, sino que la intención es hacer una propuesta de él como se puede lograr una automatización a través de un programa básico y que tenga ciertos alcances.

La finalidad de la programación, así entendida, es comprender con claridad el problema que va a resolverse o simularse por medio de la computadora, y entender también con detalle cual va a ser el procedimiento mediante el que la máquina llegará a la solución deseada.

## 4.1 FASES PARA LA CREACION DEL PROGRAMA.

Desarrollar un programa en la computadora es una actividad que requiere una buena cantidad de esfuerzo mental y dedicación de tiempo. Esto implica también una metodología científica, repetible y comorable para llegar a su fin.

Las fases en la creación de un programa son, en orden, las siguientes (aunque debe quedar claro que no hay límites tajantes entre donde termina una y donde comienza otra):

- 1) **Entender el método** que se desea desarrollar.
- 2) Hacer el **Análisis** del mismo.
- 3) **Establecer el modelo** de solución propuesto.
- 4) Cargarlo en la hoja de cálculo para su **Ejecución y Ajuste**.
- 5) Darle **Mantenimiento y Corrección** en el transcurso del tiempo.

### ENTENDER EL METODO

El primer paso parece lógico, pero no lo es cuando se piensa en la gran cantidad de proyectos que se desarrollan sin haber comprendido bien para que se desarrollaron, o cuál era el problema que supuestamente se iba a resolver. Y si además tomamos en cuenta que los ejercicios de carácter didáctico o académico, muchas veces son largos y complejos, y pueden involucrar la participación de varias personas, se puede comprender la importancia de entender con claridad el problema antes de abocar recursos a su solución. He aquí la justificación de él porque se resolvieron ejercicios con carácter didáctico en el Capítulo anterior.

### ANÁLISIS

Este consiste en efectuar un escrutinio completo del método, con la finalidad de proponer un modelo para su solución. Es claro que el modelo no puede existir sin que se hayan especificado con claridad todos y cada uno de los datos necesarios para el desarrollo del método.



La estructura de un sistema es la forma en que están relacionados entre sí sus diversos componentes, de modo que es perfectamente posible tener dos sistemas diferentes con componentes iguales. La diferencia estará en la forma de hacer corresponder unos con otros.

### **ESTABLECER EL MODELO**

Una vez hecho el análisis del método se procederá a convertirlo en un programa. Esto no implica resolverlo en este paso, sino plantear las dos estructuras principales para su desarrollo, una la estructura de datos, y la otra, la estructura de las operaciones. La idea principal en este punto es la manera de correlacionar estas dos estructuras.

### **EJECUCION Y AJUSTE**

Cuando al fin se tiene un primer modelo establecido y cargado en la hoja de calculo, llega el momento de ejecutarlo y probarlo "sobre la marcha". Es decir, permitir que la computadora lo ejecute para evaluar los resultados. Cuando existen problemas en el desarrollo del programa, puede ser por:

- A) Poco tiempo en las etapas de análisis e idealización del programa.
- B) Errores de sintaxis, en la escritura de las formulas.
- C) Errores de lógica.

Una acción bastante recomendable es ir desarrollando el método en la hoja de calculo con datos de un ejemplo con solución e ir comparando cada uno de los resultados que se van obteniendo.

### **MANTENIMIENTO Y CORRECCION**

Si se ha tomado el trabajo de planear cuidadosamente un método y de transformarlo en un sistema bien estructurado de operaciones secuenciales, es porque seguramente va a tener una vida útil y no va a ser utilizado una o dos veces. Esto nos obliga a considerar un esquema de mantenimiento y corrección para ir moldeando el diseño inicial a uno que se vaya adaptando a nuestras necesidades.

Aunque nuestros programas no vayan a ser muy grandes, se tomará el compromiso de hacerlos claros y flexibles, para que admitan mejoras o sugerencias posteriores, recordando nuevamente que solo se hará una propuesta para desarrollar un programa de mayor magnitud.

## **4.2 MICROSOFT EXCEL.**

Antes de determinar los pasos iniciales a seguir para el desarrollo del método, es necesario tener el conocimiento en el manejo de esta hoja de calculo, el manejo básico es muy sencillo, toda aquella persona que cuenta con una computadora, seguramente contará con esta hoja de calculo.

Las funciones son fórmulas predefinidas que ejecutan cálculos utilizando valores específicos, denominados argumentos, en un orden determinado que se denomina sintaxis. Los argumentos pueden ser números, texto, valores lógicos como VERDADERO o FALSO, matrices, valores de error como #N/A o referencias de celda. El argumento que se designe deberá generar un valor válido para el mismo. Los argumentos pueden ser también constantes, fórmulas u otras funciones.

### **4.2.1 SINTAXIS DE LAS FORMULAS**

La sintaxis de una fórmula es la estructura o el orden de los elementos de una fórmula. La sintaxis de una función comienza por el nombre de la función, seguido de un paréntesis de apertura, los argumentos de la función separados por comas y un paréntesis de cierre. La sintaxis específica que se sigue incluye un signo igual (=) seguido de los elementos que van a calcularse (los operandos) y los operadores del cálculo. Cada operando puede ser un valor que no cambie (un valor constante), una referencia de celda o de rango, un rótulo, un nombre o una función de la hoja de cálculo. Los operadores especifican el tipo de cálculo que se desea realizar con los

elementos de una fórmula. Microsoft Excel incluye cuatro tipos diferentes de operadores de cálculo: *aritmético, comparación, texto y referencia*.

- Los *OPERADORES ARITMÉTICOS* ejecutan las operaciones matemáticas básicas como suma, resta o multiplicación; combinan números y generan resultados numéricos.

Operador aritmético	Significado	Ejemplo
+ (signo más)	Suma	=3+3
- (signo menos)	Resta	=3-1
	Negación	=-1
* (asterisco)	Multiplicación	=3*3
/ (barra oblicua)	División	=3/3
% (signo de porcentaje)	Porcentaje	=20%
^ (acento circunflejo)	Exponente	=3^2

- Los *OPERADORES DE COMPARACIÓN* comparan dos valores y generan el valor lógico "verdadero o falso".

Operador de comparación	Significado	Ejemplo
= (igual)	Igual a	A1=B1
> (mayor que)	Mayor que	A1>B1
< (menor que)	Menor que	A1<B1
>= (mayor o igual que)	Mayor o igual que	A1>=B1
<= (menor o igual que)	Menor o igual que	A1<=B1
<> (distinto)	Distinto de	A1<>B1

- El *OPERADOR DE TEXTO "&"* combina uno o más valores de texto para generar una única porción de texto.

Operador de texto	Significado	Ejemplo
& (y comercial)	Conecta o concatena dos valores para producir un valor de texto continuo.	= "Viento" & "norte" genera "Viento del norte"

- Los OPERADORES DE REFERENCIA combinan rangos de celdas para los cálculos.

Operador de referencia	Significado	Ejemplo
: (dos puntos)	Operador de rango que genera una referencia a todas las celdas entre dos referencias, éstas incluidas.	B5:B15
, (coma)	Operador de unión que combina varias referencias en una sola.	=SUMA(B5:B15,D5:D15)
(un espacio)	Operador de intersección, que genera una referencia a las celdas comunes a dos referencias.	=SUMA(B5:B15 A7:D7) En este ejemplo, la celda B7 es común a ambos rangos.

#### 4.2.2 DIFERENCIA ENTRE REFERENCIAS RELATIVAS Y ABSOLUTAS

Cuando se crea una fórmula, normalmente las referencias de celda o de rango se basan en su posición relativa respecto a la celda que contiene la fórmula. Por ejemplo, si la celda B6 contiene la fórmula=A5; Microsoft Excel buscará el valor una celda por encima y una celda a la izquierda de B6. Este método se denomina *Referencias Relativas*. Si se copia una fórmula que utiliza referencias relativas, se actualizarán las referencias en la fórmula pegada y se hará referencia a diferentes celdas relativas a la posición de la fórmula. Por ejemplo, la fórmula en la celda B6 se ha copiado en la celda B7. La fórmula en la celda B7 ha cambiado a =A6, que hace referencia a la celda que está una celda por encima y a la izquierda de la celda B7.

Si no se desea que cambien las referencias cuando se copie una fórmula en una celda diferente, se utiliza una *Referencia Absoluta*. Por ejemplo, si una fórmula multiplica la celda A5 por la celda C1 ( $=A5*C1$ ) y puede copiarse la fórmula en otra celda, cambiarán ambas referencias. Puede crearse una referencia absoluta a la celda C1 colocando un signo de peso (\$), o presionando F4, delante de las partes de la referencia que no desea que cambien. Por ejemplo, para crear una referencia absoluta a la celda C1, agregue signos de dólar a la fórmula como se indica a continuación:  
 $=A5*\$C\$1$

### 4.2.3 FORMULAS

Una fórmula es una ecuación que analiza los datos en una hoja de cálculo. Las fórmulas realizan operaciones con los valores de la hoja de cálculo, como suma, multiplicación y comparación; también pueden combinar los valores. Las fórmulas pueden hacer referencia a otras celdas en la misma hoja de cálculo, a celdas en otras hojas de cálculo del mismo libro o a celdas en hojas de otros libros.

Microsoft Excel contiene muchas fórmulas predefinidas o integradas, denominadas funciones. Las funciones pueden utilizarse para ejecutar operaciones simples o complejas. La función más común en las hojas de cálculo es la función SUMA, que se utiliza para sumar rangos de celdas. Aunque puede crearse una fórmula para calcular el valor total de unas pocas celdas que contengan valores, la función de la hoja de cálculo SUMA calcula varios rangos de celdas.

Pueden utilizarse funciones como argumentos de otras funciones. Cuando se utiliza una función como un argumento, o anidada, deberá devolver el mismo tipo de valor que el que utilice el argumento. Si una función anidada no devuelve el tipo de valor correcto, Microsoft Excel presentará el valor de error #¡VALOR!.

Una fórmula puede contener como máximo siete niveles de funciones anidadas. Si la Función B se utiliza como un argumento en la Función A, la Función B es una función de segundo nivel. Si la Función B contiene la Función C como un argumento, la Función C será una función de tercer nivel.

### **4.3 ANALISIS DEL MÉTODO PARA DESARROLLAR EL PROGRAMA.**

Para la iniciación del programa, se tiene que definir que tanto alcance se quiere tener con él, en este trabajo de Tesis desarrollamos tres programas, pero solo se explicará superficialmente el análisis y desarrollo del programa general para un marco de tres niveles por tres claros, es decir solo se darán las ideas de las consideraciones que se tomaron para realizarlo, en este programa el marco puede sufrir diferentes tipos de variantes, es decir este programa no solo resolverá marcos de tres niveles x tres claros, si no que puede resolver también una viga de hasta tres claros con solo manejar los datos de entrada.

Los resultados que proporcionará el programa serán los Cortantes y Momentos Finales, aplicando las diferentes etapas para cuando exista un desplazamiento lateral en los entrepisos; los resultados no serán solo más que números, es decir, para su debida interpretación se tienen que comprender primeramente el método y así saber como se manejarán los datos finales cuando se aplica el Método de Cross. La interpretación de los resultados para el trazo de los diagramas se explico en el Capitulo 3.

#### **4.3.1 INGRESO DE DATOS**

Ahora si analizamos el Método, tendremos que comenzar por determinar que tipo de datos de entrada se necesitan, y entre que rango pueden estar para ser correctos una vez definidos los alcances del programa; para empezar:

1. Al observar una estructura, lo primero que se observa es el número de niveles y el número de claros, nosotros ya definimos que uno de nuestros programas será como máximo para tres niveles por tres claros.
2. Posteriormente se contemplarán las características físicas de la estructura (Material, Inercia, Longitudes) y también los tipos de apoyos en los extremos de cada barra, es decir tenemos dos tipos de apoyos según la tabla de rigideces, la empotrada que restringe en giro al extremo de la barra y el articulado que también conocemos como apoyo fijo, en el cual el giro en el extremo de la barra es permitido, pero en este segundo tipo se hizo una consideración extra para las vigas, ya que pueden tener este extremo articulado en su lado derecho o izquierdo, y por lo tanto su  $K_{\text{Angular}}$  cambiaría según las formulas de la Tabla 2 del Apéndice.
3. Una vez conocidas las características físicas se analizará si existe desplazamiento en cada uno de los tres entresijos o en su caso es restringido, esto es esencial en el método, ya que en caso de existir desplazamiento se desarrollará un sistema completo de distribuciones y transportes con momentos imaginarios por cada uno de los entresijos que presenten desplazamiento (Etapas).
4. Por último se hará un análisis para el tipo de sistemas de carga a que estarán sometidas cada una de las barras del marco.

#### 4.3.2 DESARROLLO DEL MÉTODO.

##### A) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

Antes del Desarrollo del Método, será necesario determinar los momentos de empotramiento, ya que en los datos de entrada solo se solicitarán los sistemas de cargas, para hacerse más sencillo se podrían haber solicitado los momentos directamente, pero el fin de este trabajo es hacer el método lo más automático que se pueda, pero también reservando la futura ampliación del mismo. Teniendo consciencia de la gran variedad de sistemas de carga que pudieran existir, y lo difícil que sería tratar de pronosticar un tipo, es necesario considerar que puede existir un tipo de carga

que no se haya contemplado, por lo tanto será necesario también hacer una solicitud para estos momentos de empotramiento con sus respectivos Cortantes Isostáticos.

Como mencionamos no podemos pronosticar todos los tipos de sistemas de cargas, pero si se conocen los tipos más usuales, y si aunamos a esto que el Principio de la Superposición de Causas y Efectos es valido para la obtención de los  $M_E$ , entonces se contemplarán solo 4 sistemas de carga:

1. Carga Uniformemente Repartida a lo largo de toda la barra.
2. Carga puntual aplicada en cualquier punto de la barra. Es bien sabido por todos que en un mismo tramo pueden existir varias cargas puntuales, por lo tanto, se considerarán tres sistemas de carga puntual.
3. Carga Triangular Simétrica aplicada en toda la barra, este sistema es muy común en las trabes cuando se hace un análisis de cargas de losas.
4. Existe también una formula para la obtención de los  $M_E$  que provocaría un Momento que se concentrará en algún punto de la barra. Estos momentos concentrados pueden ser provocados por algún anuncio en un extremo de marco, alguna asta bandera, etc.

#### B) PRIMERA ETAPA.

Una vez considerados los momentos de empotramiento, es indispensable calcular todos los componentes para la realización del Método, como son: Rigidez Angular, Factor de Transporte y Factor de Distribución. Con esto se podrán realizar la serie de Distribuciones y Transportes, en el programa consideraremos una serie de seis distribuciones y lógicamente cinco Transportes, esto se debe a que la mayoría de los marcos se resuelven en una 4ª o 5ª distribución pero para hacer más preciso el programa los extenderemos hasta la 6ª distribución.

Se sabe que para el cálculo de los Cortantes Finales en la Primera Etapa, son necesarios los Cortantes Isostáticos, por lo tanto así como se calcularán los  $M_E$ ,



también será necesario calcular los Cortantes Isostáticos para cada barra, haciendo también una consideración para un sistema de carga que no exista.

Si un marco no es restringido en caso de presentar desplazamiento lateral, se sabe que existirán Fuerza que Impedirán este Desplazamiento, en cada uno de los tres entrepiso, por lo tanto será necesario calcularlas en esta primera etapa.

### *C) ETAPAS ADICIONALES.*

Si existe desplazamiento lateral en los entrepisos, será necesario calcular una segunda, tercera, y hasta una cuarta etapa, sin olvidar calcular la Fuerzas que Impiden el Desplazamiento en cada uno de los marcos imaginarios y en cada uno de los tres entrepisos de cada marco. (La  $K_{Angular}$ , el  $F_d$  y el  $F_T$ , serían el mismo para todas las etapas).

### *D) ANÁLISIS PARA LOS MOMENTOS IMAGINARIOS DE LAS ETAPAS.*

Si para cada marco de las etapas adicionales, le correspondiese la aplicación de momentos imaginarios que provocarán a cada uno de los entrepisos un desplazamiento lateral, entonces se tendría que hacer un análisis para cada uno de ellos para saber cuales serían estos momentos.

Para obtener los momentos imaginarios, igual que en los ejercicios del Capítulo 3, se puede considerar una columna "patrón" (imaginaria) con características físicas propias (Factor de Apoyo Lineal, Modulo de Elasticidad, Inercia y Longitud), con estas se podría obtener un desplazamiento que se manejaría como constante, y así obtener los momentos imaginarios necesario para todas las columnas que se involucran en cada uno de los entrepisos, se obtendría momentos que sería independientes entre cada una de las etapas.

*E) FACTORES DE CORRECCION.*

Una vez desarrolladas las Etapas necesarias y obtenidos las Fuerzas que Impiden el Desplazamiento en los entrepisos de cada marco, se tendrá un sistema de ecuaciones que puede ser de 3 ecuaciones por 3 incógnitas, de 2 por 2 o de 1 por 1, según el número de entrepisos que presenten desplazamiento. Por lo tanto será necesario resolver este sistema de ecuaciones que se presente para obtener los factores de corrección.

*F) RESULTADOS FINALES.*

Una vez obtenidos los Factores de Corrección, será necesario hacer un calculo para corregir los datos de la Etapas Adicionales, que sería multiplicar cada etapa por el factor de corrección que le correspondería. Una vez calculados, se tendrá que hacer la suma de estos con los resultados de la etapa 1.

Una vez desarrollado el Análisis de todo lo que comprendería el desarrollo del programa, se tendrá que plasmarlo en la hoja de calculo, pero ahora con la idea clara sobre la continuidad que se debe seguir.

Hasta ahora solo la idea es general, para desarrollarlo fue necesario involucrarse demasiado con las funciones lógicas, ya que al estipular los limites que este programa tiene, se tiene que restringir gran cantidad de variables que se pudieran presentar.

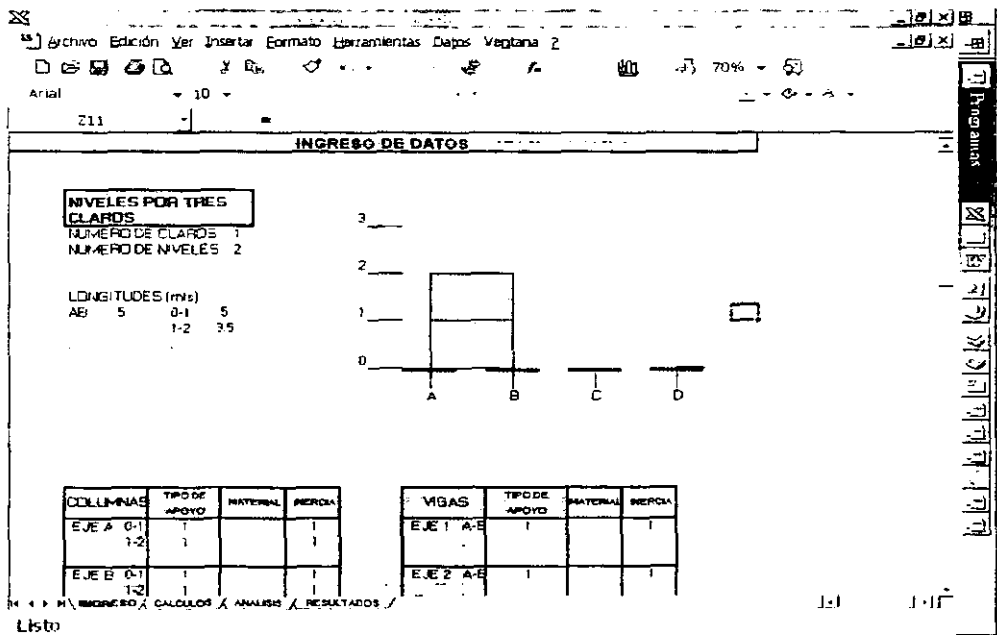
**4.4 ESTABLECER EL MODELO DE SOLUCIÓN.**

Cuando la idea del sistema a seguir fue clara, se tuvo que seccionar el método en cuatro hojas de calculo, todas relacionadas entre sí:

- a) La primera hoja es para el Ingreso de los datos.

- b) La segunda es para el cálculo, y es donde se realizarán las 4 Etapas para el marco, la obtención de los factores de corrección, y la suma de los resultados finales.
- c) La tercera hoja será para hacer el análisis de los momentos imaginarios que serán aplicados en la 2ª, 3ª y 4ª Etapa en caso de ser necesarios.
- d) La cuarta hoja que será la que muestre los resultados finales de una forma menos tediosa, abultada o confusa, ya que en caso de no existir esta hoja pueden existir demasiados errores, y no por el desarrollo del método, sino por la gran cantidad de datos que se verán en la hoja y lo fácil que será confundirse al tratar de tomar los resultados para el trazo de los diagramas.

4.4.1 HOJA DE INGRESO DE DATOS.



En esta hoja se solicitarán solo los datos con los que se partirán para hacer las operaciones en la hoja de calculo siguiente. Como se menciona anteriormente, los datos serán:

A) LONGITUD.

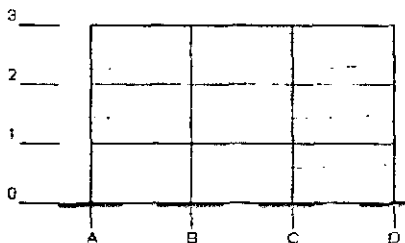
Si tenemos un marco de 3 niveles por 3 entrepisos, marcaremos otra característica en el programa, esta es que todos las columnas del entrepiso tendrán la misma longitud, lo mismo que las vigas de cada claro. En los otros dos programas esta característica es diferente, ya que podemos resolver un marco con sus columnas del mismo entrepiso de diferente longitud. Entonces para obtener todas las longitudes, se le dio un nombre a cada eje del marco, marcando como AB, BC y CD a los tres claros del marco, y como 01, 12 y 23, a los tres entrepisos. Por lo tanto, en caso de que el marco fuera de dos niveles por un claro, las longitudes 23, BC y CD serán cero.

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**

NUMERO DE CLAROS 3  
NUMERO DE NIVELES 3

LONGITUDES (mts)

AB	5	0-1	5
BC	2	1-2	3 5
CD	3	2-3	1



B) CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LAS BARRAS.

Para definir las características de cada barra, se tuvo que identificar a cada barra, la forma de identificarlas es primeramente, a través del eje del que son miembro, después serán los ejes entre los que esta limitada, por ejemplo si la barra fuera la primera columna de izquierda a derecha del segundo nivel, la forma de identificarla sería: Eje A, 1-2; es decir pertenece al eje de las columnas A, ubicada entre los entrepisos 1 y 2. Esta manera de ubicar las barras es sencilla para esta hoja, pero en caso de tener un marco ya establecido y que no variará, es mucho más recomendable hacerlo de la forma tradicional, es decir por nudos.

Entre las características físicas que definiremos aquí, serán:

- *Tipos de Apoyo:* Los tipos de apoyo se clasificaron en tres, el primero será para una barra (columna o viga) la cual este doblemente empotrada; el tipo dos, será en

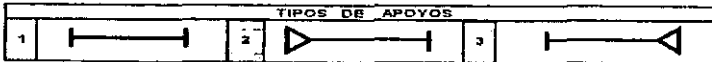
las columnas para cuando el extremo inferior sea un apoyo fijo o articulado y el extremo superior empotrado, y en las vigas cuando el extremo izquierdo sea articulado y el derecho empotrado; el tipo tres solo existirá en las vigas, y es cuando el apoyo derecho sea el que este articulado.

- *Material:* El definir el material es darle otra característica propia al programa, ya que con esto se puede resolver un marco con columnas de concreto y vigas de acero, o viceversa.
- *Inercia:* el motivo por el cual se solicita por separado el Mod. de Elasticidad y La inercia, se debe a que la inercia se podrá proporcionar como constante, o como un valor calculado.

COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A B 1	2	C	1
1-2	1	C	1
2-3	1	C	2
EJE B 0-1	2	C	3
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1
EJE C 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	3
EJE D 0-1	1	C	4
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 - A B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1
EJE 2 - A-B	1	C	2
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1
EJE 3 - A-B	1	A	2
B-C	1	A	1
C-D	1	A	4

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO (C)



C) DESPLAZAMIENTO

El marco puede sufrir desplazamientos en solo alguno de los tres entrepisos, y estar restringido en los restantes, y como esto es esencial conocerlo para desarrollar las etapas complementarias necesarias, se necesita establecer desde un principio, esto solo con definir SI o NO sufre desplazamiento el entrepiso. Basta decir que si un marco es de dos niveles, lógicamente en desplazamiento en el tercer entrepiso, NO va a existir.

DESPLAZAMIENTOS	
NOTA: SI EL TIPO DE APOYO EN LOS EXTREMOS DEBEN SER TIPO 1 O TIPO 2, ENTONCES DEBE HABER UN TIPO DE APOYO EN EL OTRO EXTREMO (TIPO 3) PARA QUE EXISTA EL DESPLAZAMIENTO.	
EXISTEN VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE REALIZAR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO: <ul style="list-style-type: none"> <li>FORMACION DE DIAGONALES</li> <li>APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR</li> <li>UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE LA OTRA, Y ADICIONALMENTE PLANTA UN TIPO DE DESPLAZAMIENTO ETC.</li> </ul>	
ENTREPISO 1	¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? <input type="checkbox"/>
ENTREPISO 2	¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? <input type="checkbox"/>
ENTREPISO 3	¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? <input type="checkbox"/>

## D) CONDICIONES DE CARGA.

El número y tipos de condiciones de carga se definieron anteriormente, solo que ahora es necesario tabularlas para definir con exactitud que tipo de carga le pertenece a cada barra. La tabulación se hizo en dos partes, una para las Columnas y otra para las Vigas:

CONDICIONES DE CARGA												
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR	MOMENTO	CARGA ADICIONAL		
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	√ Total(Ton)	M	X	ME VI	ME VI
EJE A 0-1	2											
1-2	2											
2-3												
EJE B 0-1												
1-2												
2-3												
EJE C 0-1												
1-2												
2-3												
EJE D 0-1												
1-2												
2-3												

VIGAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR	MOMENTO	CARGA ADICIONAL		
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	√ Total(Ton)	M	X	ME VI	ME VI
EJE 1 A-B	2	10	4									
B-C												
C-D												
EJE 2 A-B	0.5											
B-C												
C-D												
EJE 3 A-B												
B-C												
C-D												

Las ultimas columnas son para una condición de carga no definida en las columnas anteriores, por lo tanto esta se calcula por separado, y solo se anotan los  $M_E$  y los cortantes  $I$  isostáticos de los extremos de cada barra.

Estos son todos los datos que se requerirán para lograr el desarrollo del método, la idea principal es que solo con manipular esta hoja, obtengamos los resultados finales que serán mostrados en la hoja de calculo 4 de Resultados. Ahora con estos datos y por medio de referencias los haremos participes directos en la segunda hoja que será de los cálculos.

4.4.2 HOJA DE CALCULOS.

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? [F1] X  
 [F2] X  
 [F3] X  
 Arial 10 Deshacer 45%

	BUDO A		BUDO B		BUDO C		BUDO D		BUDO E		BUDO F	
	AB	BA	BB	BC	BD	BE	BF	FB	FE	FF	GB	GB
3	LONGITUD	4	4									
4	FAC APDT ANG	4	4									
5	FAC APDT LIN	4	4									
6	ME 1 ELAS	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594	2213594
7	INERCIA	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	MOMENTO POR CARGA	UNIFORMEMENTE REPARTIDA										
9	M	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
10	MP 1	-4.17	4.17	-4.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	MOMENTO POR CARGA	PUNTSUAL 1										
12	P	0.00	0.00	16.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.00	0.00	0.00
13	DET AL APDT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	5.00	0.00
14	ME 2	0.00	0.00	-1.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.40	0.00	0.00
15	MOMENTO POR CARGA	PUNTSUAL 2										
16	P	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17	DET AL APDT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	ME 3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	MOMENTO POR CARGA	PUNTSUAL 3										
20	P	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	DET AL APDT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22	ME 4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
23	MOMENTO POR CARGA	TRIANGULAR SIMETRICA										
24	TOTAL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
25	ME 5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
26	MOMENTO POR	MOMENTO REDUCIDO										
27	M	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
28	DET AL APDT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
29	ME 6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
30	MOMENTO ANORMAL											
31	ME 7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
32	MR TOTAL	-4.17	4.17	-8.37	-2.64	2.64	-1.04	0.00	0.40	0.00	11.17	0.00

Listo

Esta hoja es la parte principal de este trabajo, ya que en ella están todos los criterios lógicos, matemáticos, de calculo, propios del método, condicionantes, etc. Para el desarrollo de esta hoja de calculo es necesario conocer y manejar con exactitud lo que son referencias absolutas y relativas, ecuaciones lógicas, ecuaciones matemáticas, manejar los desarrollos básicos de Excel como Copiar, Pegar, Jalar, Referencias, Formatos, etc.

A continuación se explicarán las características que tomarán mayor aplicación en el programa, pero en caso de solo querer realizar un programa para un marco definido totalmente (que no cambien al menos la cantidad de barra), muchas de estas características serán de menor participación.

- *Referencias de una hoja con otra hoja de calculo:* Esto es básico ya que por medio de ella se transporta los datos de una hoja a otra. La formula es =hoja1!C13 (nombre de la hoja seguido del signo de admiración, y la referencia de la celda).

- *Los operadores aritméticos:* Detallados en la sección 4.2.1. El manejo de estas formulas es un elemento básico para el desarrollo de las todas formulas.
- *Formula =SI(Valor\_Lógico,verdadero,falso):* Esta formula fue una de las mas manejadas, puede parecer bastante simple, pero su complejidad radica en volver a condicionar los resultados de la primera condición. Es decir, la Condición solo será establecer el parámetro a evaluar; Verdadero, será lo que se realizará (operaciones, constantes u otras formulas o condicionantes lógicas extras) en caso de que la condicionante sea verdadera, y por consiguiente Falso será lo que se realizaría en caso de ser falsa la condición.
- *Formula =NO(Valor\_Lógico,verdadero,falso):* Invierte el valor lógico del argumento. Se usa NO cuando se desea asegurar que un valor no sea igual a otro valor específico. Valor\_lógico es un valor o expresión que se puede evaluar como verdadero o falso. Si el valor\_lógico es falso, NO devuelve verdadero; si el valor\_lógico es verdadero, NO devuelve falso. Ejemplos: NO(falso) es igual a verdadero; NO(1+1=2) es igual a falso.
- *Formula =Y(valor\_lógico1,valor\_lógico2,...):* Devuelve verdadero si **todos** los argumentos son verdaderos; devuelve falso si uno o más argumentos son falsos. Valor\_lógico1;valor\_lógico2; ... son de 1 a 30 condiciones que desea comprobar y que pueden ser verdadero o falso. Los argumentos deben evaluarse como valores lógicos (verdadero O falso), o los argumentos deben ser matrices o referencias que contengan valores lógicos. Esta formula fue muy usada conjuntamente con la formula =SI(Condición, verdadero, falso).
- *Formula =O(valor\_lógico1,valor\_lógico2,...):* Devolverá verdadero si **alguno** de los argumentos es verdadero; devolverá falso si todos los argumentos son falso. Valor\_lógico1; valor\_lógico2;... son entre 1 y 30 condiciones que se desea comprobar.
- *Formula =ELEGIR(indice,valor1,valor2,...):* Utiliza el argumento índice para devolver un valor de una lista de argumentos de valores. Se usa ELEGIR para seleccionar uno de los 29 valores posibles a partir de un argumento índice. El argumento índice debe ser un número entre 1 y 29, o bien una fórmula o referencia a una celda que



contenga un número entre 1 y 29. Si índice es 1, ELEGIR devuelve valor1; si es 2, ELEGIR devuelve valor2 y así sucesivamente. Si índice es una fracción, se trunca al entero inferior antes de ser utilizada.

- *Utilización conjunta de las formulas:* La complejidad del manejo de estas formulas radica en mezclarlas para formar una sola, por ejemplo partiendo de un valor lógico, este será verdadero o falso, pero su valor lo podemos volver cuestionar para obtener otro valor lógico para su primera valuación lógica, estos se complica debido a que se pueden ir formando ramificaciones que se pueden llegar a confundir. Unos ejemplos usados son:

=(SI(Y(C3=1,D5=2,O(M1=0,M2=0)),SI(C2=2,2\*3,0),ELEGIR(\$C\$64,0,2,3,4))

=SI(INGRESO!\$E\$24=0,"NO",ELEGIR(INGRESO!\$E\$24,4,0))

Como se observa esto puede llegar a ser confuso, pero la aplicación de las formulas se hace mas practica con el uso y desarrollo del programa, las utilidades que ofrece Excel como copiar, jalar, arrastrar, además del manejo de referencias relativas y absolutas ayudan mucho para definir todas las formulas, ya que de lo contrario sería mucho más confuso establecer cada formula en cada una de las celdas, y en cambio con estas utilidades solo se copian y se detallan.

Con esta breve síntesis de lo que será mas manejado en esta hoja, se procederá a explicar su desarrollo, empezaremos por seccionar la hoja en: Factores básicos, Etapa 1, Etapa 2, Etapa 3, Etapa 4, Solución al sistema de ecuaciones para el Factor de Corrección, y Resultados Finales. La tabulación que se usará será la misma que hasta ahora se aplico para resolver los ejemplos del Capitulo 3.

#### A) DEFINICION DE LOS DATOS BASICOS PARA EL DESARROLLO DEL METODO.

En esta sección resolveremos:

- *Longitud:* En la hoja de datos se definirán las longitudes, por lo tanto solo con referencias de hoja a hoja serán copiadas a esta hoja.



- *Modulo de elasticidad*: Se definirá en función del tipo de material, también a través de la formula SI.
- *Inercia*: Será copiada de la hoja de datos por medio de referencias.
- *Momentos de empotramiento para cada condición de carga*: La obtención de dichos momento será basándose en las formulas: SI, para definir el tipo de barra que es, tomando como referencia el Factor de Apoyo Angular, donde ya se definió que tipo es, y basándose en ello definir la ecuación que le correspondería a cada extremo, ya que las formulas que se emplean serán diferentes para una barra doblemente empotrada que para una con un apoyo articulado, basándose en la Tabla 1 del Apéndice; para completar las formulas empleadas serán necesarias las OPERACIONES ARITMETICAS, para desarrollar cada ecuación que corresponda. Una vez desarrollados todos los momentos de empotramiento, se obtiene el Momento de Empotramiento Total de cada extremo sumando cada uno de los obtenidos en cada barra.

#### B) SOLUCION A LA ETAPA 1.

Una vez definidos los datos básicos que intervendrán directamente en el Método de Cross, se continuará con el procedimiento natural del método, la secuencia es la misma que se sigue cuando se resuelve manualmente, es decir:

- *Rigidez Angular (K)*: Para obtenerla primero es necesario saber si la barra existe, por lo tanto se aplicará primeramente la formula SI, y la celda que será nuestro valor lógico será el Factor de Rigidez Angular, en donde sabemos si existe o no, en caso de que no exista  $K=0$ , de lo contrario se calculara multiplicando las celdas del Factor de Apoyo Angular, Modulo de Elasticidad e Inercia, y dividiendo el producto entre la longitud. Estas operaciones son muy básicas en el manejo de Excel.
- *Factor de Transporte*: Para definir el Factor, será por medio de SI, en la cual la celda del valor lógico será el  $F_{ANGULAR}$  pero del extremo opuesto de la misma barra, y si esta celda es cero (apoyo articulado) entonces el valor de  $F_T=0$ , de lo contrario  $F_T=0.5$ .

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana 2

D39 =SI(D4="NO",D,SÍ(D4=0,1,SÍ(Y(C4="NO",E4="NO"),0,D37/KB)))

	NUDO A		NUDO B	
	AB	BA	BF	
35				
36				
37	K	*S(B1="NO",0,0,1,0,0,0,0)	*S(C1="NO",0,0,1,0,0,0,0)	*S(D1="NO",0,0,1,0,0,0,0)
38	FAC. TRANS	*S(C1=0,0,0,0,0)	*S(B1=0,0,0,0)	*S(D1=0,0,0,0)
39	FAC. DISTR.	*S(B1="NO",0,0,0,1,0,0,0)	*S(C1="NO",0,0,0,0,0,0)	*S(D1="NO",0,0,0,1,0,0,0)
40	Mx	*D02	*D02	*D02
41	1d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
42	1t	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
43	2d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
44	2t	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
45	3d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
46	3t	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
47	4d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
48	4t	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
49	5d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
50	5t	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
51	6d	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
52	M HI	=SUMA(B40:B51)	=SUMA(C40:C51)	=SUMA(D40:D51)
53	VH	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
54	V. Nudo 1	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
55	V. Nudo 2	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
56	V. Nudo 3	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
57	V. Nudo 4	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
58	V. Nudo 5	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
59	V. Nudo 6	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
60	V. Nudo 7	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
61	V. ISOSTAT.	*E(B1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(C1="NO",0,0,0,0,0,0,0)	*E(D1="NO",0,0,0,0,0,0,0)
62	V TOTAL	=B51+B53	=C51+C53	=D51+D53
63				
64	FUERZA QUE IMPIDIO			
65	EL DESPLAZAMIENTO			
66				

H | INGRESO | CALCULOS | ANALISIS | RESULTADOS |

- **Factor de Distribución:** Este es un punto en el que existen demasiados tipos de formulas en cada uno de los extremos de las barras, ya que en este programa se puede considerar que no existan barras, y además que tengan diferentes tipos de apoyos. El análisis para cada extremo se hizo diferente, pero el primer análisis para todas fue SI existe, en caso de no existir el valor del Fd=0, de lo contrario para la:
  - Columna extremo inferior: Estos extremos solo pueden tener dos definiciones para Fd, y estas son: para un  $F_{A\text{Angular}}=4$  (Apoyo Empotrado), su  $F_d=0$ , y en caso de que  $F_{A\text{Angular}}=0$  (Apoyo Articulado), su  $F_d=1$ . Este análisis se hace por medio de la formula SI.
  - Columna extremo superior: Para estos extremo su resolución es sencilla, ya que de existir, solo se obtiene el Fd (Rigidez del extremo entre la Rigidez del nudo).
  - Vigas en sus dos extremos: En caso de existir las vigas, tienen dos opciones, una es la de ser una viga con uniones con columnas, y su Fd se obtendría como Rigidez del extremo entre la Rigidez del nudo. En caso de existir pero no tener

unión este extremo con alguna columna, indicaría que este extremo de la viga tiene un tipo de apoyo que restringe el desplazamiento y se analizaría igual que una columna en su extremo inferior.

- *Momento de Empotramiento ( $M_E$ )*: Este solo se copiara del obtenido en la sección anterior como Momento de Empotramiento Total.
- *Distribuciones y Transportes*: En este bloque de renglones es solo aplicar formulas aritméticas, y para su solución es mejor utilizar celdas absolutas y relativas, para posteriormente copiar y pegar, y así solo se harán los ajustes necesarios.
- *Momento Hiperestático 1 ( $M_{H1}$ )*. Este se obtiene con la suma del rango desde el  $M_E$  hasta la ultima distribución.
- *Cortante Hiperestático 1 ( $V_{H1}$ )*: Se obtiene con operaciones aritméticas (Momento de desequilibrio entre Longitud), ayudadas de referencias absolutas. También se debe considerar que los cortantes para los extremos de una misma barra deben ser de diferente signo, y el sentido que tomen será el que denote el Momento de desequilibrio, es decir, para las columnas, si el momento es positivo, el VH en la formula del extremo inferior respetará el signo, pero el extremo superior tendrá que ser negativo. Y para las vigas, el extremo izquierdo será el que sea afectado por el signo negativo, y el extremo derecho quedará igual.
- *Cortantes Isostáticos ( $V$  Isost. 1-7)*: Al igual que la obtención de  $M_E$  para cada tipo de carga, también es necesario obtener el Cortante Isostático para cada tipo de carga y esto se hace a través de operaciones aritméticas y con la ayuda de formulas (Tabla 3 del Apéndice). La suma de todos estos V Isostáticos parciales dará el V Isostático Total.
- *Cortante Total ( $V$  Total)*: Es solo la suma del  $V_{H1}$  y  $V_{I\text{Total}}$ .
- *Fuerza que Impidió el Desplazamiento*: La fuerza para cada uno de los entrepisos se obtendrá solo sumando el V Total de todas las columnas que tienen contacto con el entrepiso, ya sea su extremo superior o inferior.

C) SOLUCION A LA SEGUNDA ETAPA (Una etapa para cada entepiso)

El procedimiento para su desarrollo es igual que el de la etapa uno y solo se copian los datos (K, Ft, Fd) de la primera etapa y solo cambiara:

Como edición y/o insertar formato herramientas Datos Ventana 2

ELEGIR  $E = E8 + C88 + O88 - M88 + AA88 + Y88 + AL88 + AK88$   
 A B C D E

	NUDD A	NUDD B
70	AB	BA
71	AB	BF
72	F	
73	FAC TRANS	
74	FAC ESTR	
75	0	0
76	0	0
77	B75-10139-1	(C75+D75-E75)*C839-1
78	B77-10439-1	(C77+D77-E77)*C839-1
79	B79-10439-1	(C79+D79-E79)*C839-1
80	B73-10439-1	(C73+D73-E73)*C839-1
81	B81-10439-1	(C81+D81-E81)*C839-1
82	B83-10439-1	(C83+D83-E83)*C839-1
83	B85-10439-1	(C85+D85-E85)*C839-1
84	B87-10439-1	(C87+D87-E87)*C839-1
85	B89-10439-1	(C89+D89-E89)*C839-1
86	B91-10439-1	(C91+D91-E91)*C839-1
87	M HI	SUMA(D75:B86)
88	VH	=F87+C87M83
89	FUERZA QUE IMPIDIO EL DESPLAZAMIENTO	
90		
91		
92		

- Los Momentos de Empotramiento (Me): Serán los momentos imaginarios y que se obtendrán en la hoja de calculo siguiente llamada ANALISIS, y solo se copiarán los momentos obtenidos en dicha hoja, en caso de que algún entepiso no tenga desplazamiento los momentos imaginarios serán cero y el efecto será como si no existiera esta etapa.
- No existirán Cortantes Isostáticos, ya que los momentos son imaginarios y no existen fuerzas externas que los provoque.
- Las fuerzas que impiden el desplazamiento serán calculadas de la misma forma.



entrepiso y en cada uno de los marcos, las constantes de igualdad serán las FID de la etapa 1.

- *Variaciones en el sistema de ecuaciones:* Como se menciono pueden existir siete diferentes variantes con los desplazamientos que pueden presentarse, además de una mas que será cuando no existe desplazamiento:
  - Desplazamiento en los tres entrepisos
  - Desplazamientos en el primero y segundo entrepiso
  - Desplazamientos en el primer y tercer entrepiso
  - Desplazamientos en el segundo y tercer entrepiso
  - Desplazamiento en el primer entrepiso
  - Desplazamiento en el segundo entrepiso
  - Desplazamiento en el tercer entrepiso
  - No existe desplazamiento
- *Solución para cada uno de los sistemas de ecuaciones:* Debido a que existen siete formas en que se puede desarrollar el sistema de ecuaciones, decidimos hacer una solución para cada una de ellas, es decir plantear los siete diferentes sistemas de ecuaciones y resolver cada uno. El método que se utilizó para resolverlos fue a través de la matriz escalonada, pero la forma de solucionar el sistema puede ser de la manera que se desee, aquí manejamos este método por su sencillez en las operaciones a realizar, ya que solo son operaciones aritméticas.
- *Factores de corrección:* Al comparar los resultados en los siete sistemas de ecuaciones, lógicamente estos serán diferentes entre sí, pero solo uno de estos siete resultados será el correcto y este dependerá de los datos vertidos en la hoja de INGRESO, donde se piden los entrepisos que presentan desplazamiento.

#### E) RESULTADOS FINALES

El primer paso que se realizará será definir que tipo de variante se presenta con los desplazamientos, para partir de ahí y tomar los factores de corrección correctos que van a afectar a las etapas adicionales.





detallando los resultados corregidos de cada una de los tres marcos, para posteriormente resumirlos. Para desarrollar esta formula que resolverá estos resultados fue necesario ayudarse de: SI, ELEGIR, celdas absolutas y relativas. En caso de que no existiese desplazamiento (variante tipo 0), que sería el primer análisis con la formula SI, el valor para todos estos resultados sería cero.

- *Resultados finales.* Por último para obtener los Resultados Finales (Momentos y Cortantes) es necesario sumar las dos etapas.
- *Comprobación:* En caso de que el marco presente desplazamiento, existe una condición que debe ser revisada: Obtenidos los resultados finales, se definirán las Fuerzas que Impiden el Desplazamiento en cada uno de los entrepisos que presentan desplazamiento, y estas deberán ser nulas. En caso de que el marco no tenga desplazamiento esta condición no será revisada.

#### 4.4.3 HOJA DE ANÁLISIS.

Esta hoja es un anexo especial, la cual se realizó por separado de la hoja de cálculo para tener una mejor visualización de la forma de manejar los momentos imaginarios, en los ejercicios del Capítulo 3, se menciona que para facilitar la obtención de estos momentos podemos utilizar una barra "patrón", la cual tendrá unas características propias y así será esta la quien defina el desplazamiento uniforme que sufrirán todas las barras. Partiendo del desplazamiento que se obtenga podremos despejar el momento imaginario que causará un desplazamiento similar en cada una de las barras de cada entrepiso.

##### A) DEFINICION DE LA BARRA "PATRON".

Para definir esta barra se puede definir con valores constantes que pueden ser arbitrarios, pero en aquí las constantes serán obtenidas de los propios datos, para que esta barra se asemeje más a una barra del propio marco.

Microsoft Excel interface showing a spreadsheet and a list of constants for a structural analysis program.

Spreadsheet grid (rows 1-17, columns A-D):

1				
2				
3				
4	3			
5				
6				
7	2			
8				
9				
10	1			
11				
12				
13	0			
14				
15				
16		B	C	D
17				

Formulas and constants:

- MOMENTO IMAGINARIO: -10 Ton\*m = -P3\*10^5 Kg\*cm
- SE USARAN COMO CONSTANTES
- FACTOR DE APOYO LINEAL: 6
- MOD DE ELASTICIDAD: =CALCULO\$15 Kg\*cm<sup>2</sup>
- INERCIA: =MAX(INGRESO{J24:K35}) CM<sup>4</sup>
- LONGITUD: =SI(INGRESO{G13}=0,SI(INGRESO{G12}=0),1) CM
- DESPLAZAMIENTO SERA: =S3\*(S6+S7+S8\*(S9^2)) C

- **Momento imaginario:** Para esta barra definiremos un momento de -10 Ton·m, pero este puede cambiarse por cualquier otro, para poder realizar las operaciones es necesario también hacer congruentes las unidades, es decir necesitamos el momento en Kg·cm.
- **Factor de Apoyo Lineal:** Este factor o puede ser 6 (apoyo empotrado) o 3 (apoyo articulado), para esta barra se estipulo como 6 por ser el apoyo más común en las uniones de los marcos.
- **Modulo de Elasticidad:** Esta constante será definida por cualquier columna, ya sea Acero o Concreto.
- **Inercia:** La inercia la determinamos como la inercia mayor que se presente en las columnas, o se puede definir cualquier otra.
- **Longitud:** La barra tendrá la misma longitud que tenga cualquiera de los entrepisos.
- **Desplazamiento:** Con los datos constantes definidos, podemos definir el desplazamiento que sufrirá esta barra "patrón", esto se determinara solo con aplicar una sencilla formula aritmética.

B) MOMENTOS IMAGINARIOS PARA LOS TRES ENTREPISOS

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? (F5) (X)

Arial 10 - 72% - A

Edad =SI(E29="NO",0,-E33/10^5)

		DC	HG	LK	
20	FAC APOYO LINEAL	=CALCULOSI5	=CALCULOSI6	=CALCULOSIAG5	=CALCULOS
21	MODEL ELASTICIDAD	=CALCULOSI6	=CALCULOSI6	=CALCULOSIAG6	=CALCULOS
22	INERCIA	=CALCULOSI7	=CALCULOSI7	=CALCULOSIAG7	=CALCULOS
23	LONGITUD	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSIAG3*100	=CALCULOS
24	MOMEN	=((E29*E31*E32*E33^2)*SP11)	=((G29*G31*G32*G33^2)*SP11)	=((I29*I31*I32*I33^2)*SP11)	=((K29*K31*K32*K33^2)*SP11)
25	M IMAGINARIO	=SI(E29="NO",0,E29/10^5)	=SI(G29="NO",0,G29/10^5)	=SI(I29="NO",0,I29/10^5)	=SI(K29="NO",0,K29/10^5)

		CD	GH	KL	
29	FAC APOYO LINEAL	=CALCULOSI5	=CALCULOSI5	=CALCULOSIAE5	=CALCULOS
30	MODEL ELASTICIDAD	=CALCULOSI6	=CALCULOSI6	=CALCULOSIAE6	=CALCULOS
31	INERCIA	=CALCULOSI7	=CALCULOSI7	=CALCULOSIAE7	=CALCULOS
32	LONGITUD	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSIAE3*100	=CALCULOS
33	MOMEN	=((E29*E30*E31*E32^2)*SP11)	=((G29*G30*G31*G32^2)*SP11)	=((I29*I30*I31*I32^2)*SP11)	=((K29*K30*K31*K32^2)*SP11)
34	M IMAGINARIO	=SI(E29="NO",0,-E33/10^5)	=SI(G29="NO",0,-G33/10^5)	=SI(I29="NO",0,-I33/10^5)	=SI(K29="NO",0,-K33/10^5)

		DC	FG	JK	
38	FAC APOYO LINEAL	=CALCULOSI5	=CALCULOSI5	=CALCULOSIAA5	=CALCULOS
39	MODEL ELASTICIDAD	=CALCULOSI6	=CALCULOSI6	=CALCULOSIAA6	=CALCULOS
40	INERCIA	=CALCULOSI7	=CALCULOSI7	=CALCULOSIAA7	=CALCULOS
41	LONGITUD	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSI3*100	=CALCULOSIAA3*100	=CALCULOS
42	MOMEN	=((E38*E39*E40*E41^2)*SP11)	=((G38*G39*G40*G41^2)*SP11)	=((I38*I39*I40*I41^2)*SP11)	=((K38*K39*K40*K41^2)*SP11)
43	M IMAGINARIO	=SI(E38="NO",0,-E42/10^5)	=SI(G38="NO",0,-G42/10^5)	=SI(I38="NO",0,-I42/10^5)	=SI(K38="NO",0,-K42/10^5)

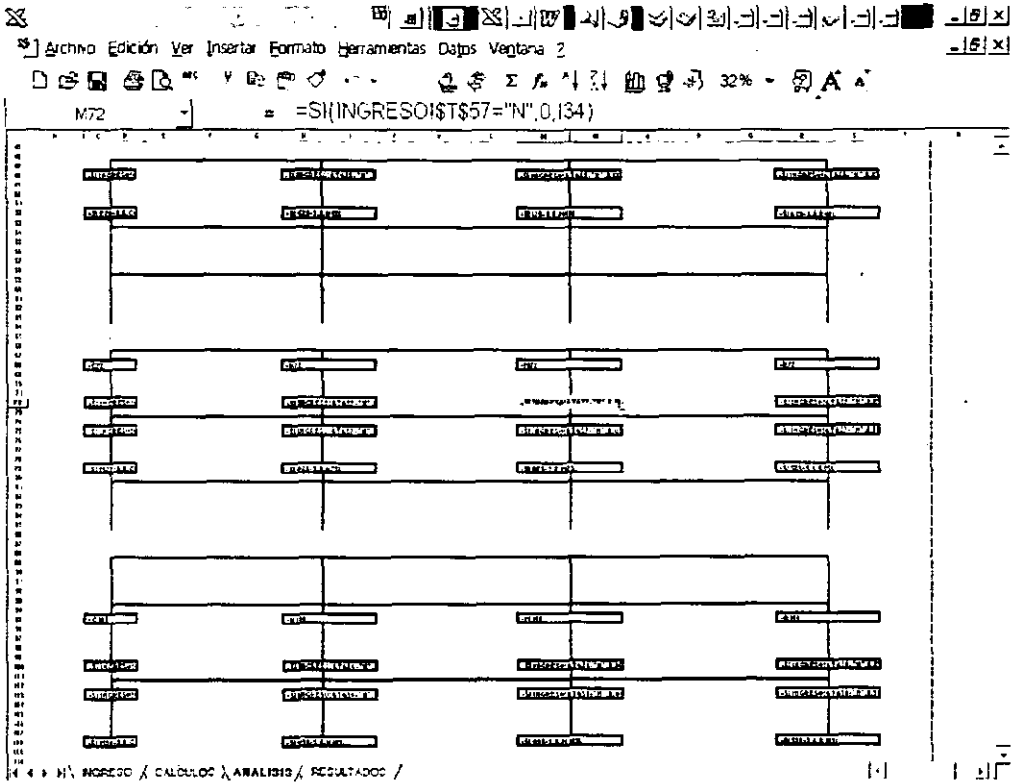
H\ INGRESO X CALCULOS X ANALISIS X RESULTADOS

Listo

- **Tabulación:** La tabulación costará de tres secciones, una para cada entrepiso, y en ella estarán los extremos de las columnas que tengan contacto con el entrepiso.
- **Características de las Columnas:** Las características serán las que fueron definidas en la hoja de ingreso, y solo se copiarán por medio de referencias, la longitud será el único dato que se modifique ya que se usará en cm.
- **Momento Imaginario:** El momento imaginario de cada columna se obtendrá en función del desplazamiento obtenido en la columna "patrón". Una vez determinado se convertirá a Ton-m, ya que se estaban utilizando Kg-cm. Cuando ya definimos los momentos hay que recordar que para la aplicación de los momentos imaginarios un entrepiso que cuente con columnas superiores e inferiores, estos deben de ser de signo contrario entre sí, por lo tanto las columnas que pertenezcan al extremo superior de cada entrepiso serán afectadas por el factor -1. En caso de que la columna no exista el valor del momento imaginario en ese extremo será cero, por lo tanto se deberá condicionar con la formula SI.

C) REPRESENTACION VISUAL DE LA APLICACIÓN DE LOS MOMENTOS IMAGINARIOS PARA LOS TRES ENTREPISOS

Para tener una visión más amplia de cómo se van a aplicar los momentos imaginarios en cada una de las etapas, se representarán en forma visual los tres marcos que podrían aplicarse.



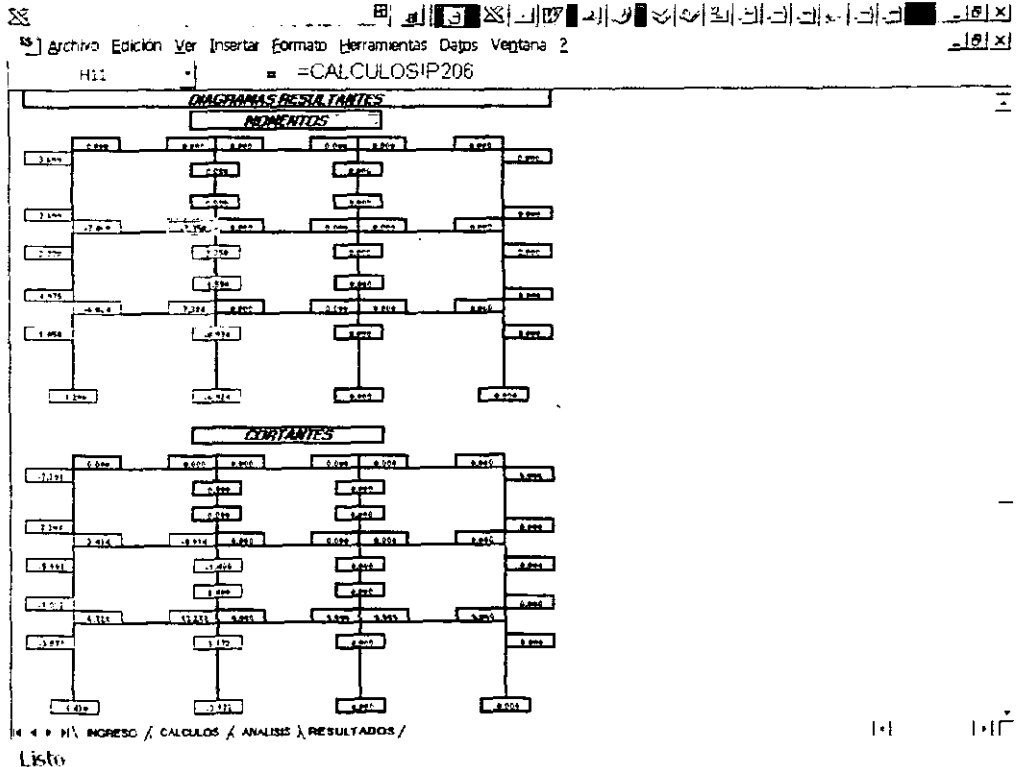
Listo

Aquí solo se realizó una condición, esta fue que si en la hoja de ingreso se define que no-existe desplazamiento lateral en algún entrepiso, entonces los momentos imaginarios serán cero en el marco que corresponda a ese entrepiso.

4.4.4 HOJA DE RESULTADOS.

Con el desarrollo del método, lo único que resta es hacerlo lo menos confuso que se pueda. y esto lo lograremos con el mismo procedimiento que se uso para mostrar visualmente los momentos imaginarios, es decir solo ayudados por referencias ligadas a la hoja de calculo mostraremos los resultados en esta hoja.

Esta hoja muestra los Momentos y los Cortantes Finales que se obtuvieron en el desarrollo del método, los diagramas tendrán que ser dibujados de acuerdo a la explicación que se dio en el Capítulo 3.





En esta primera pantalla se definirán:

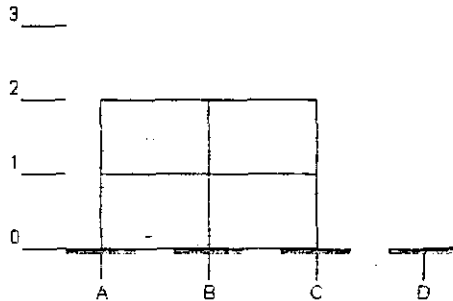
- *Número de Claros y Número de niveles:* Solo deberá definirse cuantos claros y niveles tiene el marco que se desea resolver. El número no deberá ser mayor a tres en cada una de las celdas, en caso de ser mayor, se registrara el primer ajuste extra, este marca en la parte inferior de estas celdas una notación "MARCO 3 X 3" con formato en rojo para que resalte los errores de ingreso.
- *Longitudes:* Las longitudes se especificarán en metros, y estas corresponderán en la primera columna (AB, BC, CD), a las longitudes entre cada claro; y en la segunda columna (0-1, 1-2, 2-3) a las elevaciones de los entrespisos. Las longitudes serán de eje a eje. En caso de que un claro o un nivel no exista, no se pedirán longitudes para ese nivel o claro. Las longitudes deberán ser mayores de cero, de lo contrario aparecerá un mensaje de error.

MAXIMO TRES NIVELES -  
POR TRES CLAROS

NUMERO DE CLAROS 2  
NUMERO DE NIVELES 2

LONGITUDES (mts)

AB	5	0-1	5
BC	1	1-2	3.5



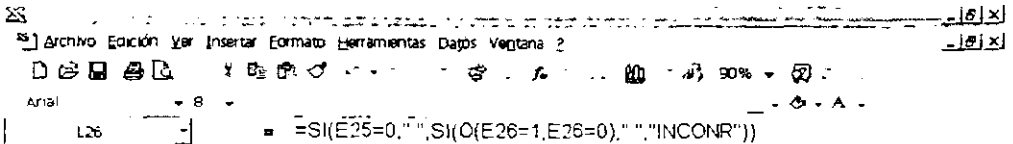
**B) CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DE LAS BARRAS (Segunda Vista).**

En esta segunda vista se podrá definir:

- *Tipos de Apoyos:* Se puede ver que existen 3 tipos con los cuales se pueden definir los extremos de cada barra, después de haber restringido el giro a cada una de ellas. Para las columnas se podrán usar los tres tipos, el 2 y el 3 dependerán del lado (izquierdo o derecho) en que este el apoyo articulado; en columnas el tipo 3 no existirá, y en caso de que el extremo inferior este articulado se definirá como tipo 2. Esta sección también cuenta con avisos de errores de ingreso, por ejemplo en la



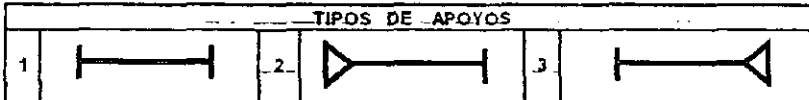
figura se ve que la columna 1-2 tiene un tipo de apoyo 2, el cual esta marcado como error, debido a que si existe una columna debajo de esta, entonces no puede tener un apoyo articulado. En las vigas este análisis no se lleva a cabo ya que se pueden dar varias combinaciones en estas en caso de que no exista una columna en su extremo, simplemente se hará un aviso en el cual se pregunte si se esta seguro de que la viga corresponde a ese tipo de apoyo.



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1 1-2	1 2	C C	1 2
EJE B 0-1 1-2	1 3	S C	1 1
EJE C 0-1 1-2	1 1	C C	4 4

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B B-C	1 2	A A	1 2
EJE 2 A-B B-C	1	A	1

INERCIA: SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO (C)



10 4 3 1\ INGRESO / CALCULOS / ANALISIS / RESULTADOS / Listo

- **Material:** El tipo de material se definirá solo como Concreto (C) y Acero(A), pueden manejarse los dos materiales en un mismo marco; en caso de no definirse este, el programa lo definirá automáticamente como concreto.
- **Inercia:** El momento de inercia se puede manejar como un valor real (calculado) o como una constante que es como aparece en los ejercicios. Pero solo debe manejarse de una forma en un mismo ejercicio.

C) DESPLAZAMIENTOS (Tercera Vista).

Esta tercera vista de la hoja de ingreso puede parecer la más sencilla de todas pero esto no indica que no tenga importancia, solo en esta parte se definirá si el marco presenta desplazamiento en sus tres entrepisos. Se definirá solo con una S para si o una N para no. En caso de que un marco sea de dos niveles, debe marcarse en el entrepiso 3 que no (N) existe desplazamiento, por que de lo contrario el programa aplicaría una etapa adicional para este entrepiso ya que consideraría que si existe un desplazamiento.

**DESPLAZAMIENTOS**

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO

EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO POR EJEMPLO

- POR MEDIO DE DIAGONALES
- APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
- UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC

ENTREPISO 1  
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)?

ENTREPISO 2  
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)?

ENTREPISO 3  
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)?

INGRESO / CALCULOS / ANALISIS / RESULTADOS / Listo

D) CONDICIONES DE CARGA PARA LAS COLUMNAS (Cuarta Vista).

Para cada una de las columnas se tendrá que definir si esta sometida a algún sistema de cargas externas, son cuatro sistemas de carga que calcula el programa pero también existe un espacio para una carga adicional.

25

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana 2

\_15 | X |

\_16 | X |

Arial 10

QPS = 3.2

## CONDICIONES DE CARGA

COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR	MOMENTO		CARGA ADICIONAL			
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	Simétrica W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE A 0-1 1-2	2								5	2				
EJE B 0-1 1-2		2	1					10						
EJE C 0-1 1-2								2			3.2	1.5	1.1	2

Listo

10 10

- **Convención de Signos para las fuerzas externas en las columnas:** Las fuerzas serán positivas cuando sean de izquierda a derecha, y negativas en caso contrario.
- **Carga Repartida:** Este sistema representa a la carga uniformemente repartida en **toda la barra**, y se anotará en Ton/m, en caso de no existir carga puede dejarse la celda en blanco o especificar cero.
- **Puntual 1, 2 y 3:** Estos sistemas de carga son para una carga puntual en cualquier punto de la barra. La distancia X, se tomará en metros y se define como la distancia que hay entre el extremo inferior hasta el punto de aplicación de la fuerza puntual. Existen tres cargas puntuales, ya que puede haber una barra que tenga mas de una carga puntual aplicada. La fuerza P se definirá en Toneladas.
- **Carga Triangular Simétrica:** Esta fuerza es también aplicada en todo lo largo de la barra, se definirá como la carga total (W Total) en Toneladas, respetando la misma convención de signos.

- *Momento Inducido:* En caso de que exista un momento en algún punto de la barra, este se anotará en Ton·m, y la distancia X también será del apoyo inferior hasta al punto de localización del momento. El signo será el usado convencionalmente, giro en sentido de las manecillas del reloj "Positivo" y en contra "Negativo".
- *Carga Adicional:* En caso de que exista un sistema de carga que no este contemplado en los 4 que definimos, este podrá ser calculado por separado por medio de la tabla 1 del Apéndice, y solo se anotarán los Momentos de Empotramiento y los Cortantes Isostáticos que correspondan a ese sistema de carga. Los signos de los momentos y los cortantes serán aplicando misma convención que se indico para las fuerzas externas. Estos datos se deberán anotar para cada extremo (Inferior y Superior) de la columna.

E) CONDICIONES DE CARGA PARA LAS VIGAS (Quinta Vista).

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana 2

aria' 10 = 0.5

VIGAS	CARGA REPARTIDA Ton/m	PUNTAJO 1 Ton		PUNTAJO 2 Ton		PUNTAJO 3 Ton		TRIANGULO SIMETRICA V.Ton/Ton	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL			
		P	X	P	X	P	X		M	X	IZQUIERDO		DERECHO	
EJE 1 A-B B-C	2			-10	4			2.8			1	0.5	1	0.5
EJE 2 A-B B-C	0.5								5	1				
..														

H:\INGRESO\X CALCULOS\X ANALISIS\X RESULTADOS /

Listo

Para las vigas se emplea el mismo desarrollo, solo cambiarán:

- *Convención de signos para las fuerzas externas:* Serán positivas las fuerzas que se carguen a las vigas de arriba hacia abajo y negativas las que la carguen en sentido contrario.
- *Distancia X:* La distancia X que se tiene que definir en caso de una carga puntual o un momento inducido, será tomada como: La distancia desde el extremo izquierdo de la viga hasta el punto de aplicación de la carga o el momento.
- *Convención de signos para el Cortante Isostático de la Carga Adicional:* El signo en el cortante NO será aplicado con la misma convención que a las fuerzas externas; este será positivo cuando sea de abajo hacia arriba y negativo cuando apunte hacia abajo.

#### F) NOTACIONES EXTRAS.

El manejo del programa puede parecer simple, pero existen varios errores que pueden llegar a cometerse durante la manipulación de la hoja de ingreso, a continuación haremos referencia a ellos:

- Un error que puede presentarse muy comúnmente será cuando después de haber resuelto un ejercicio y se prosiga a resolver otro y **No se hayan borrado todos los datos del ejercicio anterior**. Por esto es recomendable antes de ingresar los datos de un nuevo ejercicio *borrar todas las celdas de ingreso*.
- Otro error que se presentará durante las primeras manipulaciones del programa será cuando exista **confusión en la nomenclatura de las barras** y por consiguiente se ingresen erróneamente los datos.
- **Los Tipos de Apoyos** también se deben cuidar, en especial cuando se trata de un marco que tenga combinación de apoyos.
- En los Desplazamientos el error radica cuando **No se sabe con certeza cuando existe desplazamiento lateral**, es por eso que existe un recuadro en el cual se anotan varios tipos de restricción para el desplazamiento de un entrepiso.

- En las fuerzas el principal error se basa en la errónea aplicación de la convención de signos.

Como se puede analizar la mayoría de los errores más comunes radicarán en la manipulación, pero estos se corregirán después de haber manipulado este programa dos o tres veces. Es recomendable realizar primero algunos ejercicios con ejemplos ya resueltos para comprobar que se haya comprendido perfectamente la utilización del programa.

#### **4.6 MANTENIMIENTO Y CORRECCIÓN DEL PROGRAMA.**

Queda claro que este programa que se desarrollo fue una propuesta para automatizar el método, esto puede ser una herramienta básica que uno se puede ir forjando, también es muy claro que debido a que es solo una propuesta debe recibir gran cantidad de anotaciones, por lo tanto se tendrá en un futuro que desarrollar en él un mantenimiento y una corrección para resolver todas las imperfecciones que se noten durante su utilización.

La idea que se tuvo para desarrollar el método esta plasmada en este capitulo, pero ahora será necesario manipularlo algunas veces para demostrar que es lo que en verdad resuelve.

# Capitulo 5

## APLICACIÓN

## DEL PROGRAMA

El presente capítulo tendrá con fin, mostrar la utilidad que pueden tener las propuestas para la automatización del Método de Cross, se desarrollaron tres programas pero en el capítulo anterior solo se hizo referencia a uno. Haciendo una breve reseña de estos:

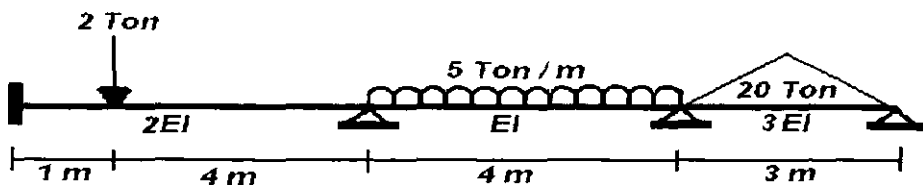
- Marco General de 3 Niveles x 3 Claros, resolverá cualquier variante que se presente dentro de estos limites, resuelve los marcos con desplazamiento y sin desplazamiento.
- Marco Simple, tiene los mismos principios que el anterior, solo que este resolverá marcos que lleguen a tener sus dos columnas de diferente longitud.
- Marco de 2 Claros x 1 Nivel, es similar al marco simple solo que este resuelve un marco con un claro mas.

Para todos los programas, el marco puede ser resuelto aun cuando:

- Barras que formen parte de la idea general del marco, No existan.
- Cuando exista combinación de materiales.
- Exista o No un desplazamiento lateral.

### EJEMPLO 5.1

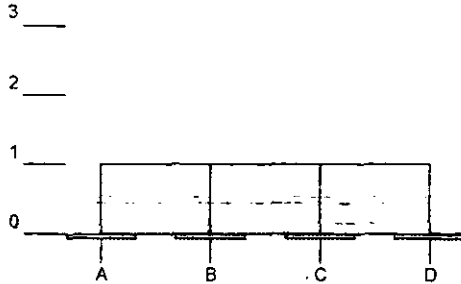
Se resolverá la siguiente viga de concreto con el marco general de 3Claros x 3Niveles.



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 3  
 NUMERO DE NIVELES 1

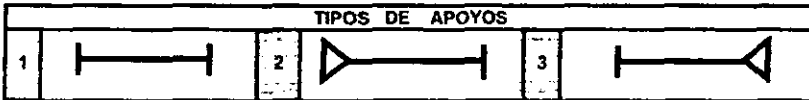
LONGITUDES (mts)  
 AB 5 0-1 0  
 BC 4  
 CD 3



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1			
EJE B 0-1			
EJE C 0-1			
EJE D 0-1			

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B	1	C	2
B-C	1	C	1
C-D	3	C	3

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



DESPLAZAMIENTOS

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

- EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO:
- POR MEDIO DE DIAGONALES
  - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
  - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC.



ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? N

ENTREPISO 2

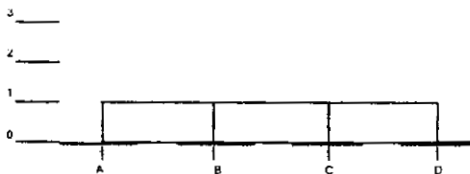
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? N

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? N

CONDICIONES DE CARGA

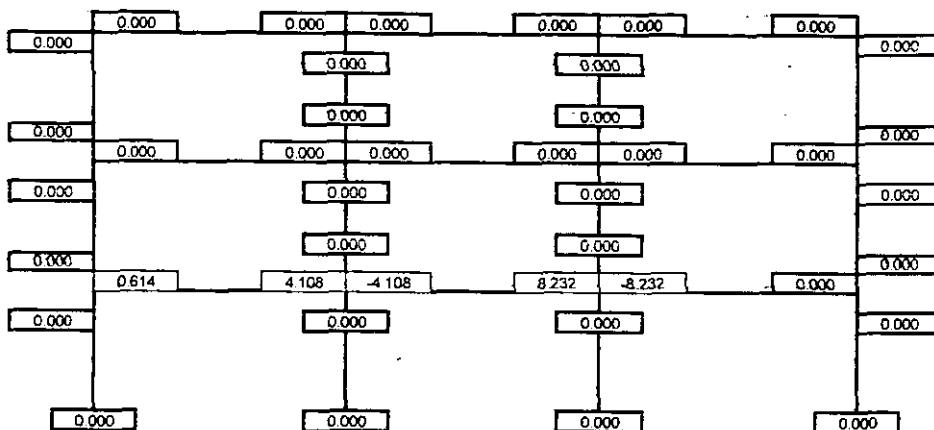
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL INFERIOR		CARGA ADICIONAL SUPERIOR	
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE A 0-1														
EJE B 0-1														
EJE C 0-1														
EJE D 0-1														



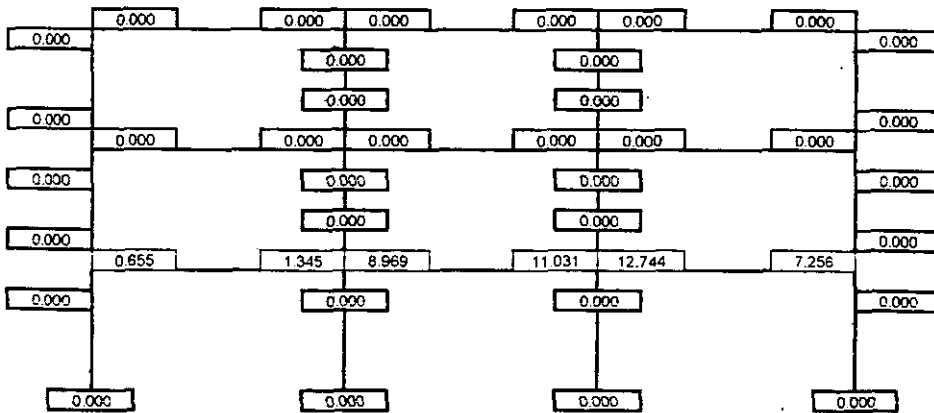
VIGAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL IZQUIER		CARGA ADICIONAL DERECHO	
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE 1 A-B		2	1											
B-C	5							20						
C-D														
...														
...														
...														

RESULTADOS FINALES

MOMENTOS



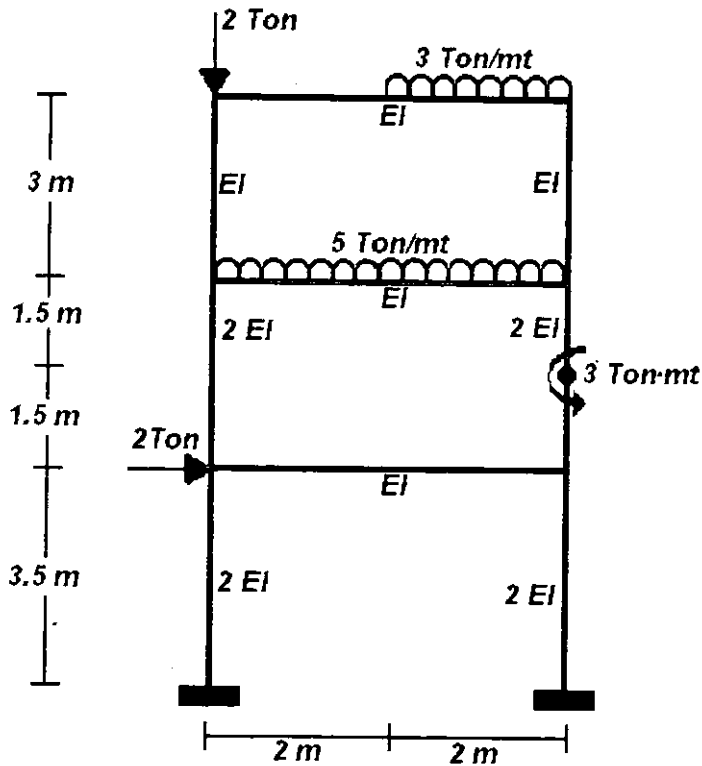
CORTANTES



## EJEMPLO 5.2

Resolver el siguiente marco:

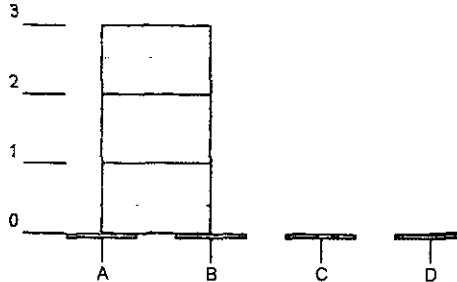
- *Marco*: 3 Niveles x 1 Claro
- *Material*: Concreto
- *Programa*: Marco general de 3 Niveles x 3 Claros
- *Desplazamiento*: Existe en los 3 entrepisos
- *Consideraciones Especiales*: Los Momentos de Empotramiento y Cortantes Isostáticos para la viga del tercer entrepisos serán calculados de forma manual. Inercia como Constante.



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 1  
 NUMERO DE NIVELES 3

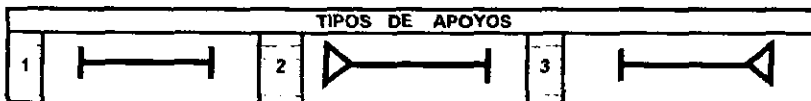
LONGITUDES (mts)  
 AB 4    0-1 3.5  
           1-2 3  
           2-3 3



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1	1	C	2
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1
EJE B 0-1	1	C	2
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B	1	C	1
EJE 2 A-B	1	C	1
EJE 3 A-B	1	C	1

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



DESPLAZAMIENTOS

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

- EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO:
- POR MEDIO DE DIAGONALES
  - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
  - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC.

ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 2

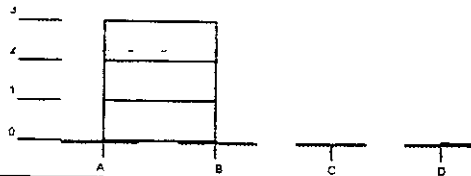
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

CONDICIONES DE CARGA

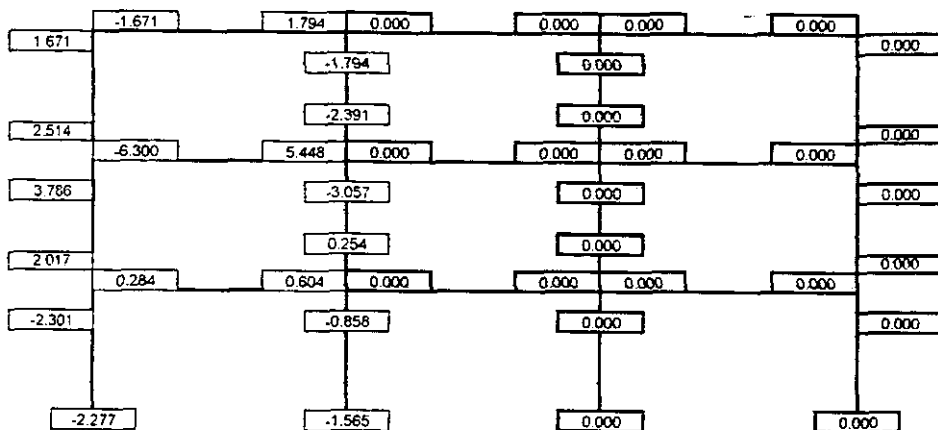
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA		PUNTOAL 1		PUNTOAL 2		PUNTOAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL			
	Ton/m		Ton		Ton		Ton			W Total (Ton)	M		INFERIOR		SUPERIOR
	P	X	P	X	P	X	P	X	ME		VI	ME	VI	ME	VI
EJE A 0-1		2	3.5												
1-2															
2-3															
EJE B 0-1															
1-2										-3	1.5				
2-3															
...															
...															
...															



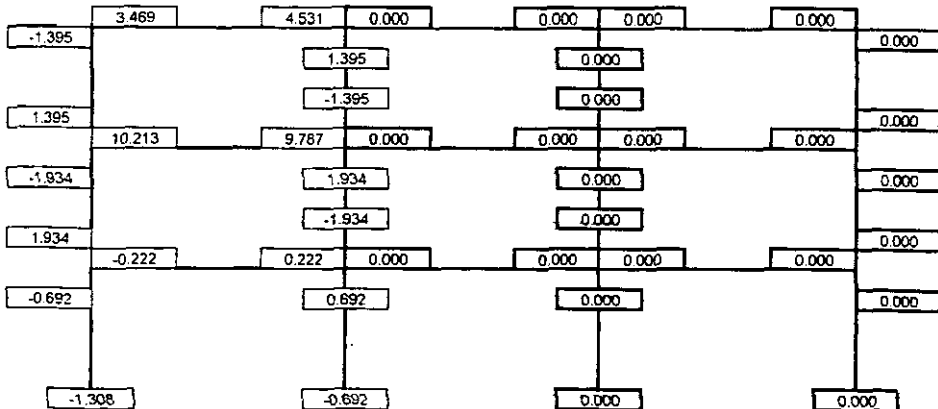
VIGAS	CARGA REPARTIDA		PUNTOAL 1		PUNTOAL 2		PUNTOAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL			
	Ton/m		Ton		Ton		Ton			W Total (Ton)	M		DERECHO		VIGAS
	P	X	P	X	P	X	P	X	ME		VI	ME	VI	ME	VI
EJE 1 A-B															
...															
EJE 2 A-B		5													
...															
EJE 3 A-B		2	0												
...															
...															

RESULTADOS FINALES

MOMENTOS



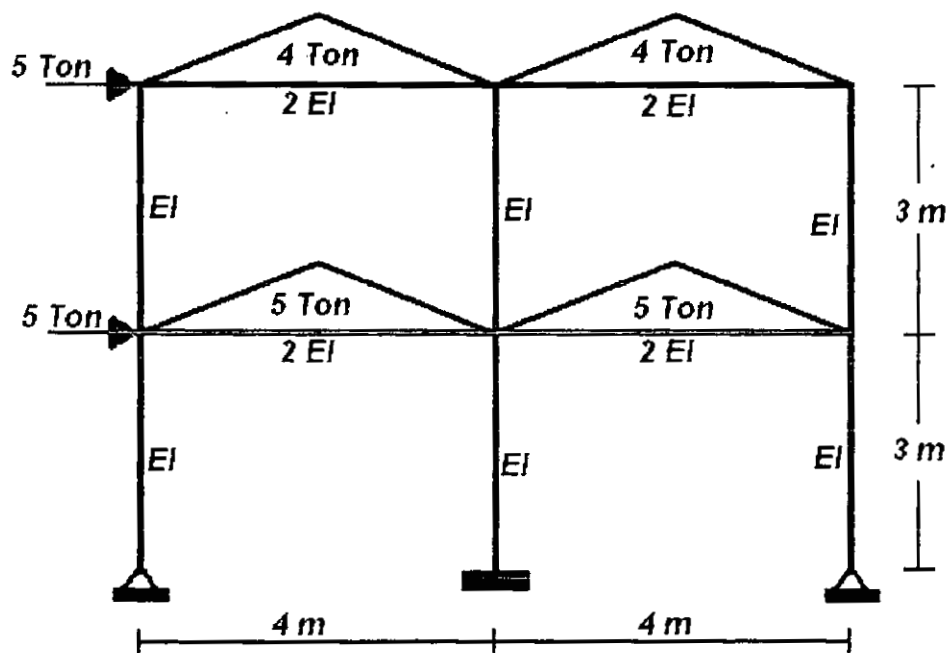
CORTANTES



## EJEMPLO 5.3

Resolver el siguiente marco:

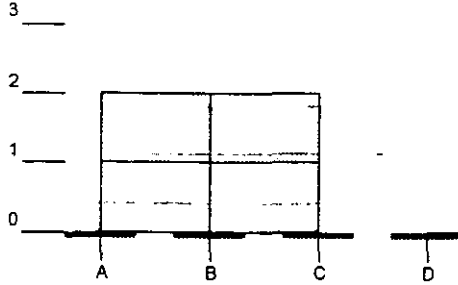
- *Marco*: 2 Niveles x 2 Claros
- *Material*: Columnas de Concreto y Vigas de Acero
- *Programa*: Marco general de 3 Niveles x 3 Claros
- *Desplazamiento*: Existe en los 2 entrepisos
- *Consideraciones Especiales*: Inercia como Constante



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 2  
 NUMERO DE NIVELES 2

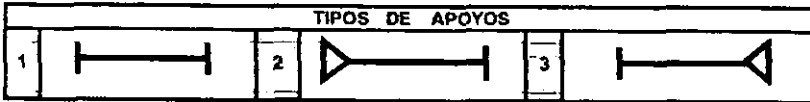
LONGITUDES (mts)  
 AB 4 0-1 3  
 BC 4 1-2 3



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1 1-2	2 1	C C	1 1
EJE B 0-1 1-2	1 1	C C	1 1
EJE C 0-1 1-2	2 1	C C	1 1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B B-C			
EJE 2 A-B B-C			

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



**DESPLAZAMIENTOS**

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

- EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO.
- POR MEDIO DE DIAGONALES
  - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
  - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC.



ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 2

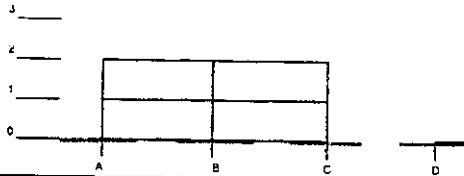
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? N

CONDICIONES DE CARGA

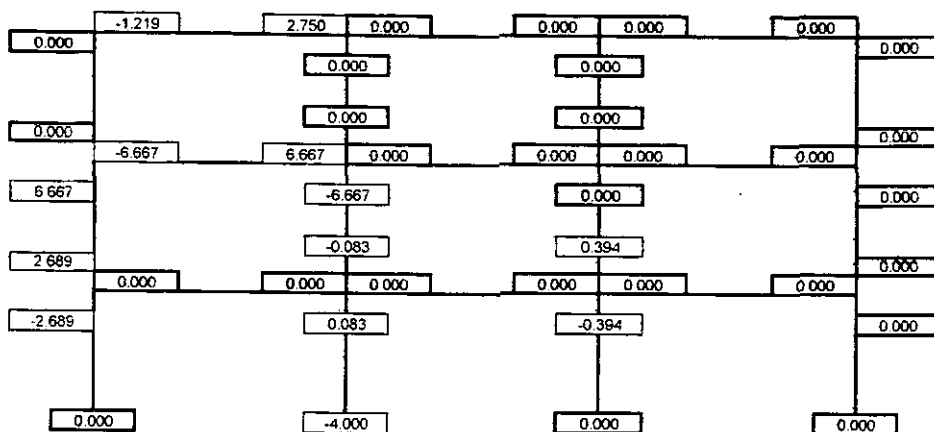
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO	CARGA ADICIONAL		
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI
EJE A 0-1 1-2		2	3.5									
EJE B 0-1 1-2									-3	1.5		
EJE C 0-1 1-2												



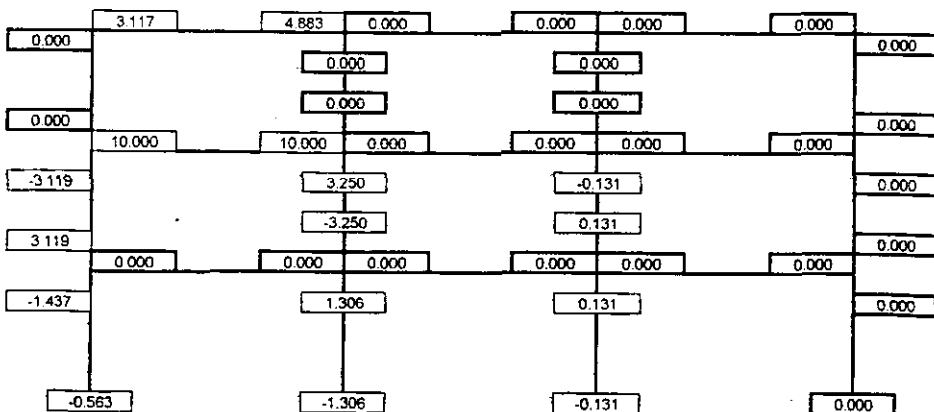
VIGAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO	CARGA ADICIONAL			
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	
EJE 1 A-B B-C													
EJE 2 A-B B-C	5												
		2	0								-1	1.5	2.8 4.5

**RESULTADOS FINALES**

**MOMENTOS**



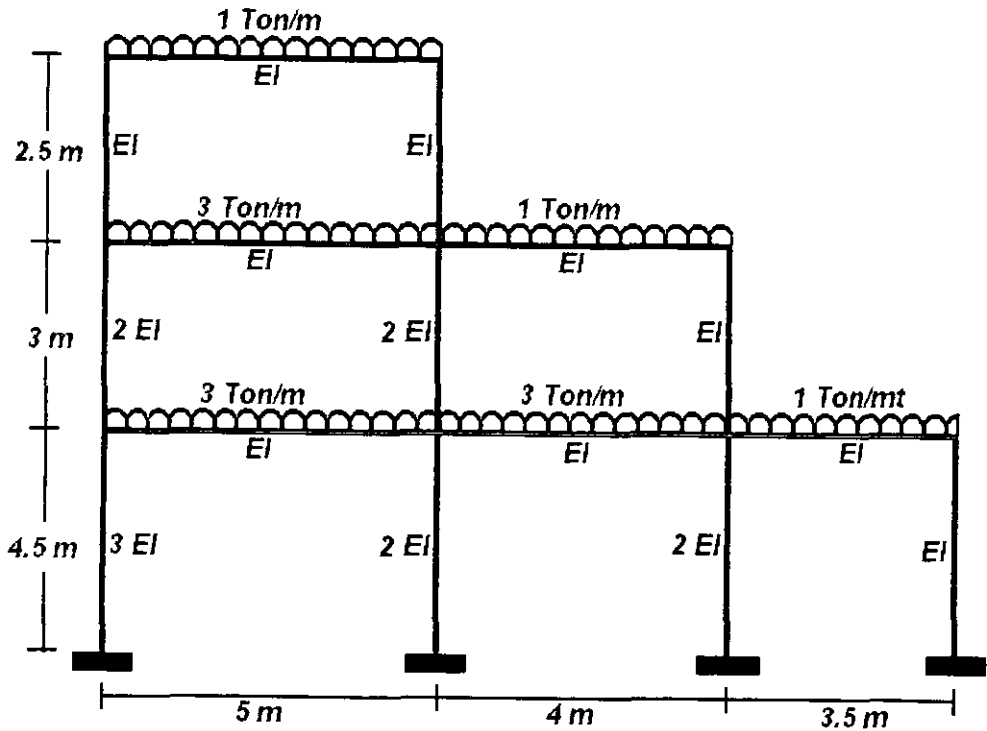
**CORTANTES**



## EJEMPLO 5.4

Resolver el siguiente marco:

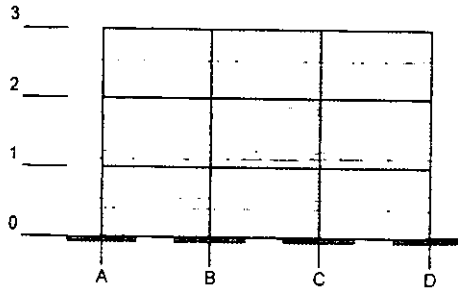
- *Marco*: 3 Niveles x 3 Claros
- *Material*: Concreto
- *Programa*: Marco general de 3 Niveles x 3 Claros
- *Desplazamiento*: Existe en los 3 entrepisos
- *Consideraciones Especiales*: Inercia como Constante



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 3  
 NUMERO DE NIVELES 3

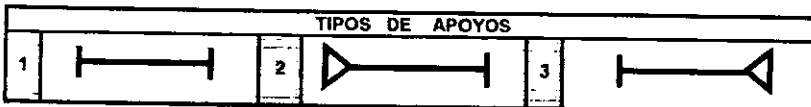
LONGITUDES (mts)  
 AB 5 0-1 4.5  
 BC 4 1-2 3  
 CD 3.5 2-3 2.5



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1	1	C	3
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1
EJE B 0-1	1	C	2
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1
EJE C 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3			
EJE D 0-1	1	C	1
1-2			
2-3			

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1
EJE 2 A-B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D			
EJE 3 A-B	1	C	1
B-C			
C-D			

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



DESPLAZAMIENTOS

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO:  
 - POR MEDIO DE DIAGONALES  
 - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR  
 - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC

ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 2

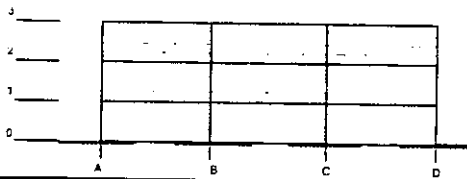
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

CONDICIONES DE CARGA

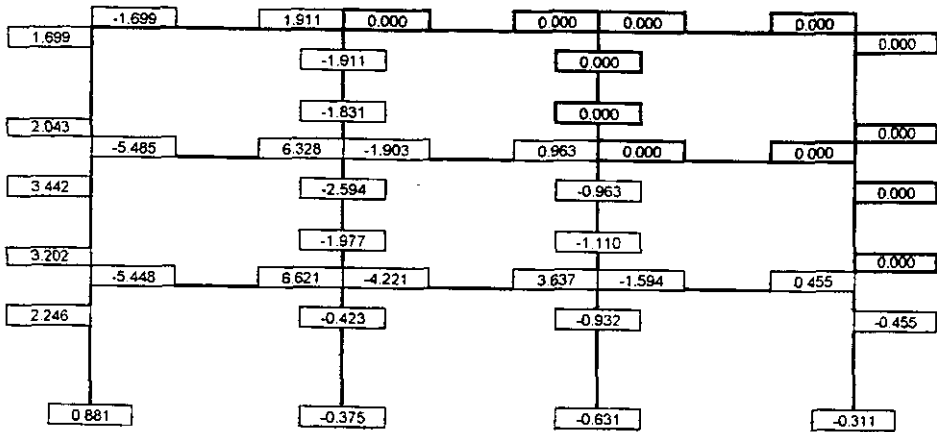
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1 Ton		PUNTUAL 2 Ton		PUNTUAL 3 Ton		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL INFERIOR		CARGA ADICIONAL SUPERIOR	
	ton/m	p	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE A 0-1														
1-2														
2-3														
EJE B 0-1														
1-2														
2-3														
EJE C 0-1														
1-2														
2-3														
EJE D 0-1														
1-2														
2-3														



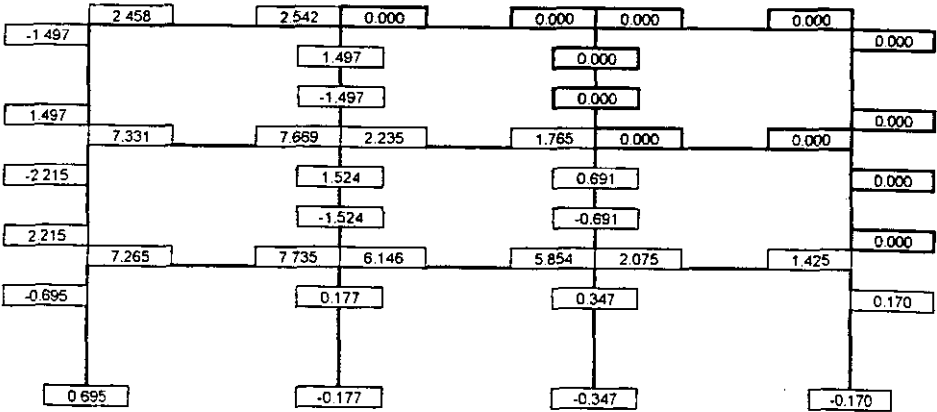
VIGAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1 Ton		PUNTUAL 2 Ton		PUNTUAL 3 Ton		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO		CARGA ADICIONAL IZQUIERDA		CARGA ADICIONAL DERECHO	
	ton/m	p	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE 1 A-B	3													
B-C	3													
C-D	1													
EJE 2 A-B	3													
B-C	1													
C-D														
EJE 3 A-B	1													
B-C														
C-D														

**RESULTADOS FINALES**

**MOMENTOS**



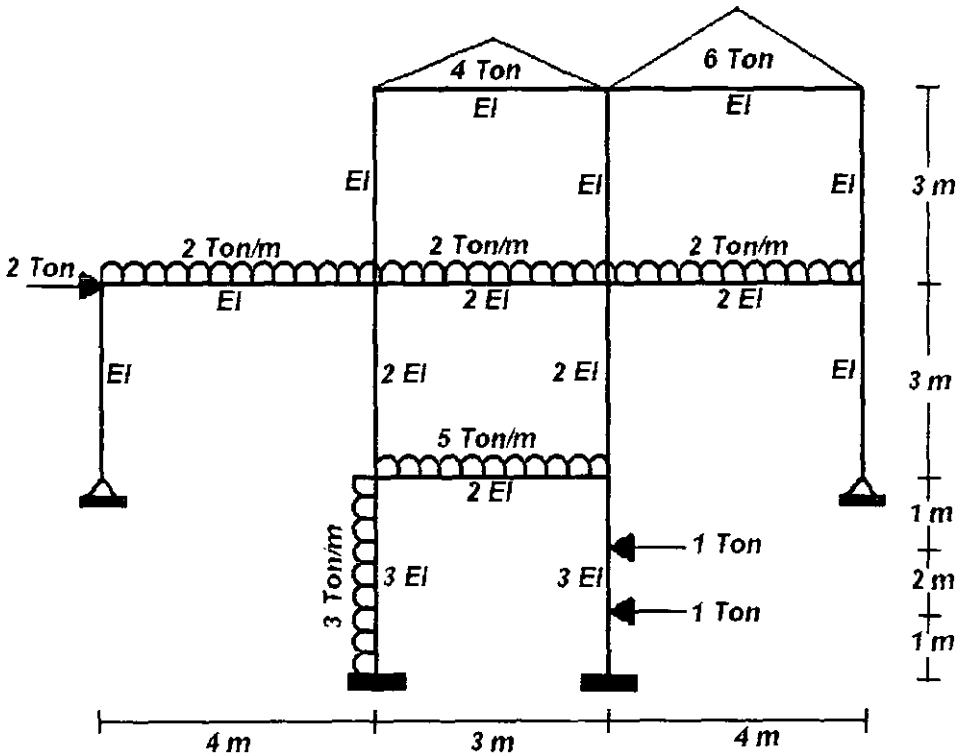
**CORTANTES**



**EJEMPLO 5.5**

Resolver el siguiente marco:

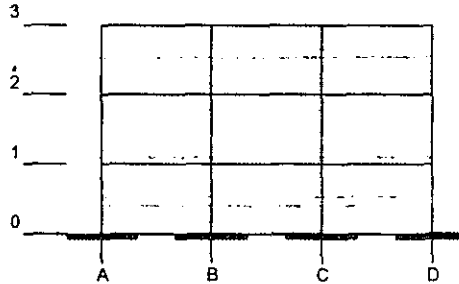
- *Marco:* 3 Niveles x 3 Claros
- *Material:* Columnas de Concreto y Vigas de Acero
- *Programa:* Marco general de 3 Niveles x 3 Claros
- *Desplazamiento:* Existe desplazamiento en los 3 niveles
- *Consideraciones Especiales:* Inercia como Constante



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 3  
 NUMERO DE NIVELES 3

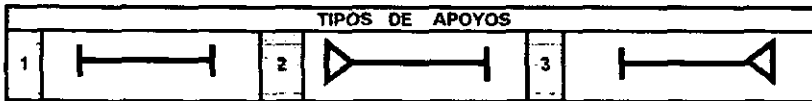
LONGITUDES (mts)  
 AB 5 0-1 4.5  
 BC 4 1-2 3  
 CD 3.5 2-3 2.5



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1	1	C	3
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1
EJE B 0-1	1	C	2
1-2	1	C	2
2-3	1	C	1
EJE C 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1
EJE D 0-1	1	C	1
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1
EJE 2 A-B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1
EJE 3 A-B	1	C	1
B-C	1	C	1
C-D	1	C	1

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



DESPLAZAMIENTOS

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

- EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO:
- POR MEDIO DE DIAGONALES
  - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
  - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC



ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 2

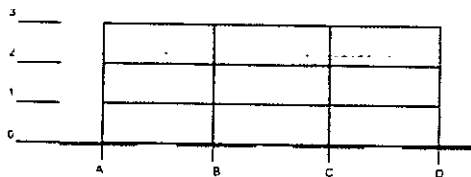
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

CONDICIONES DE CARGA

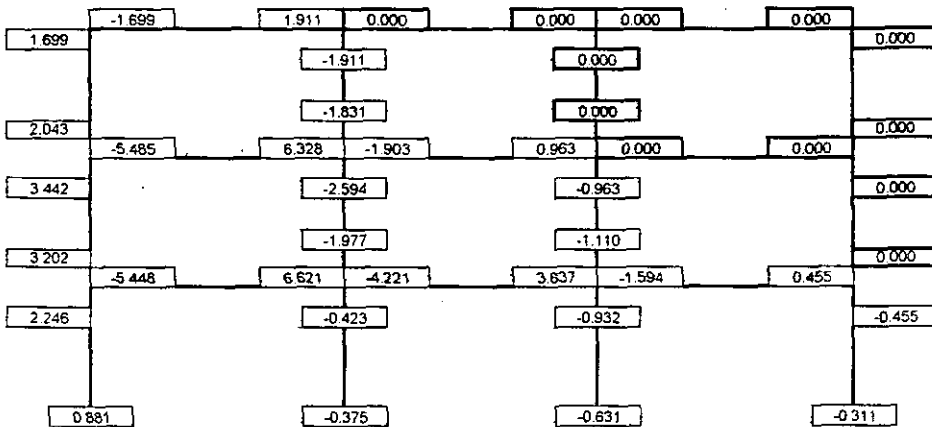
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO	CARGA ADICIONAL				
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE A 0-1														
1-2														
2-3														
EJE B 0-1														
1-2														
2-3														
EJE C 0-1														
1-2														
2-3														
EJE D 0-1														
1-2														
2-3														



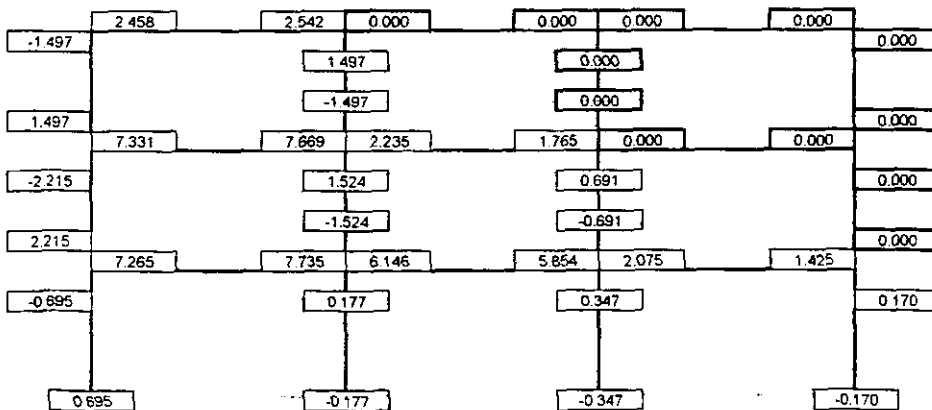
VIGAS	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO	CARGA ADICIONAL				
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
EJE 1 A-B	3													
B-C	3													
C-D	1													
EJE 2 A-B	3													
B-C	1													
C-D														
EJE 3 A-B	1													
B-C														
C-D														

RESULTADOS FINALES

MOMENTOS



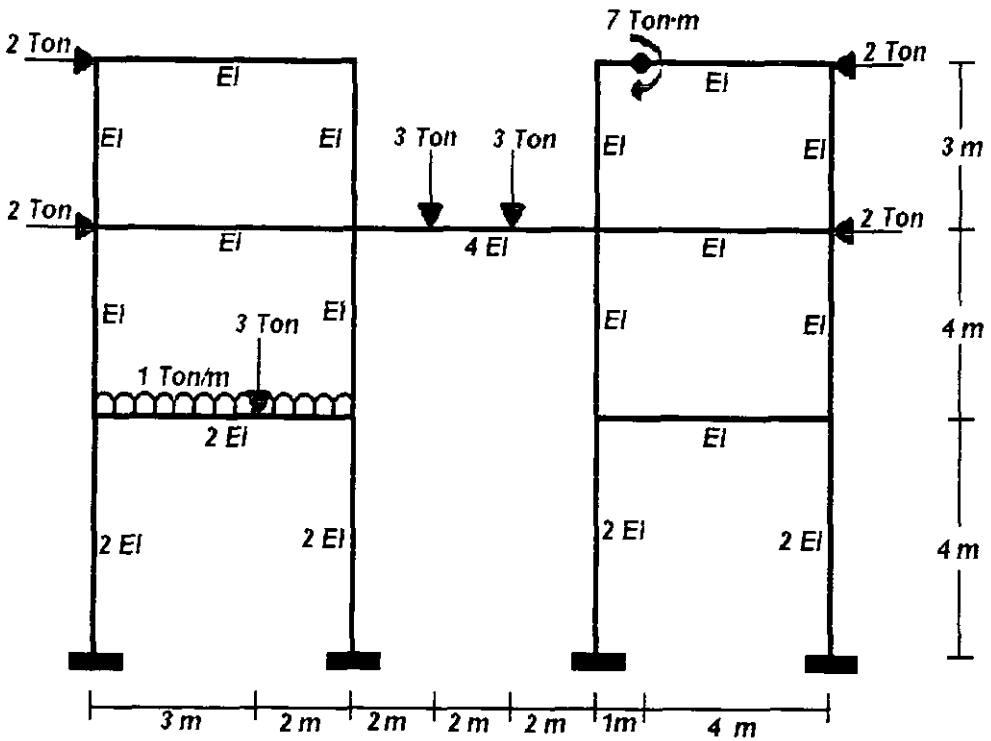
CORTANTES



## EJEMPLO 5.6

Resolver el siguiente marco:

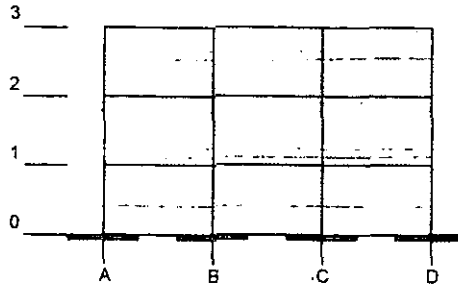
- *Marco*: 3 Niveles x 3 Claros
- *Material*: Concreto
- *Programa*: Marco general de 3 Niveles x 3 Claros
- *Desplazamiento*: Existe desplazamiento en los 3 niveles
- *Consideraciones Especiales*: Inercia como Constante



INGRESO DE DATOS

**MAXIMO TRES NIVELES  
POR TRES CLAROS**  
 NUMERO DE CLAROS 3  
 NUMERO DE NIVELES 3

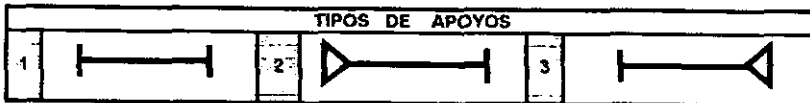
LONGITUDES (mts)  
 AB 5 0-1 4  
 BC 6 1-2 4  
 CD 5 2-3 3



COLUMNAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE A 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1
EJE B 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1
EJE C 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1
EJE D 0-1	1	C	2
1-2	1	C	1
2-3	1	C	1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
EJE 1 A-B	1	C	2
B-C			
C-D	1	C	1
EJE 2 A-B	1	C	1
B-C	1	C	4
C-D	1	C	1
EJE 3 A-B	1	C	1
B-C			
C-D	1	C	1

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



DESPLAZAMIENTOS

DEBIDO A QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES PUEDEN O NO EXISTIR, SE DEBERA PROPORCIONAR SI EXISTE O NO DICHO DESPLAZAMIENTO.

- EXISTE VARIAS FORMAS EN LAS CUALES SE PUEDE RESTRINGIR ESTE DESPLAZAMIENTO, POR EJEMPLO.
- POR MEDIO DE DIAGONALES
  - APOYOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS, CUANDO NO EXISTA LA COLUMNA INFERIOR
  - UNION CON UNA ESTRUCTURA QUE SEA MUCHO MAS RIGIDA QUE ESTA, Y ADEMAS ELLA NO PERMITA UN DESPLAZAMIENTO, ETC.

ENTREPISO 1

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 2

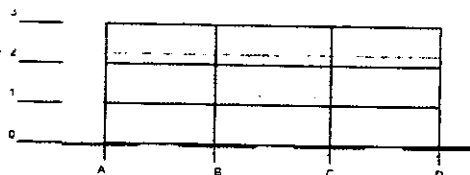
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

ENTREPISO 3

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO LATERAL SI (S) O NO (N)? S

CONDICIONES DE CARGA

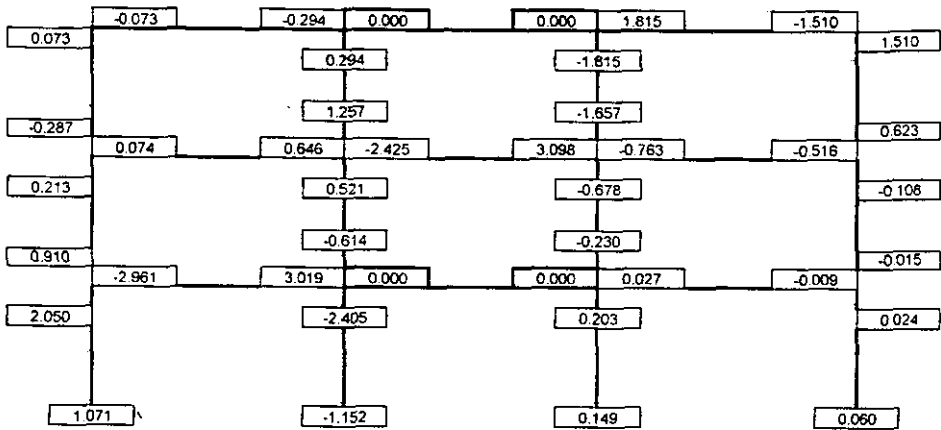
COLUMNAS	CARGA REPARTIDA Ton/m	PUNTUAL 1 Ton		PUNTUAL 2 Ton		PUNTUAL 3 Ton		TRIANGULAR SIMETRICA W Total (Ton)	MOMENTO INDUCIDO M X		CARGA ADICIONAL INFERIOR ME VI		CARGA ADICIONAL SUPERIOR ME VI	
		P	X	P	X	P	X		M	X	ME	VI	ME	VI
EJE A D-1														
1-2		2	4											
2-3		2	3											
EJE B D-1														
1-2														
2-3														
EJE C D-1														
1-2														
2-3														
EJE D D-1														
1-2		-2	4											
2-3		-2	3											



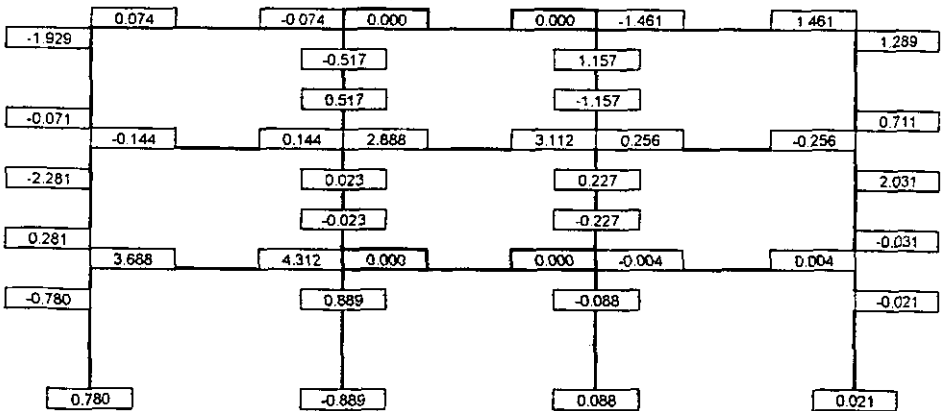
VIGAS	CARGA REPARTIDA Ton/m	PUNTUAL 1 Ton		PUNTUAL 2 Ton		PUNTUAL 3 Ton		TRIANGULAR SIMETRICA W Total (Ton)	MOMENTO INDUCIDO M X		CARGA ADICIONAL IZQUIER ME VI		CARGA ADICIONAL DERECHO ME VI	
		P	X	P	X	P	X		M	X	ME	VI	ME	VI
EJE 1 A-B	1	3	3											
B-C														
C-D														
EJE 2 A-B														
B-C		3	2	3	4									
C-D														
EJE 3 A-B														
B-C									7	1				
C-D														

**RESULTADOS FINALES**

**MOMENTOS**



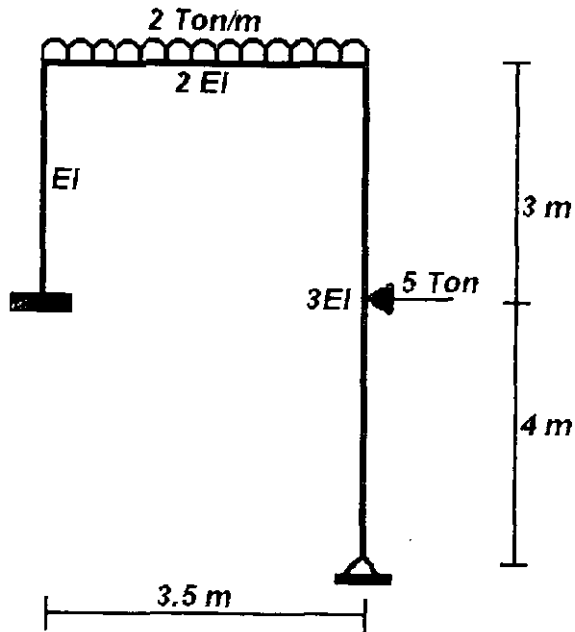
**CORTANTES**



## EJEMPLO 5.7

Resolver el siguiente marco:

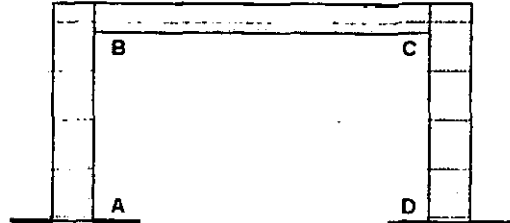
- *Marco*: 1 Niveles x 1 Claro
- *Material*: Concreto
- *Programa*: Marco Simple
- *Desplazamiento*: Existe desplazamiento en su único entrepiso
- *Consideraciones Especiales*: Inercia como Constante



INGRESO DE DATOS

MAXIMO UN NIVEL  
POR UN CLARO

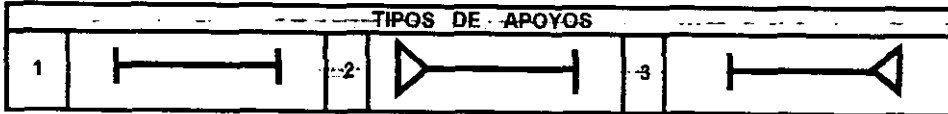
LONGITUDES (mts)  
COLUMNA AB 3  
COLUMNA DC 7  
VIGA BC 3.5



	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
COLUMNA AB	1	C	1
COLUMNA DC	2	C	3
VIGA BC	1	C	2

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO (C)

TIPOS DE APOYOS



CONDICIONES DE CARGA

	CARGA REPARTIDA	PUNTUAL 1		PUNTUAL 2		PUNTUAL 3		TRIANGULAR SIMETRICA	MOMENTO INDUCIDO	CARGA ADICIONAL				
	Ton/m	P	X	P	X	P	X	W Total (Ton)	M	X	ME	VI	ME	VI
COLUMNA AB														
COLUMNA DC		-5	4											
VIGA BC	2													

DESPLAZAMIENTOS

DE ACUERDO CON LAS CARACTERISTICAS ANTERIORES,

¿EXISTE DESPLAZAMIENTO EN EL ENTREPISO? SI O NO SI



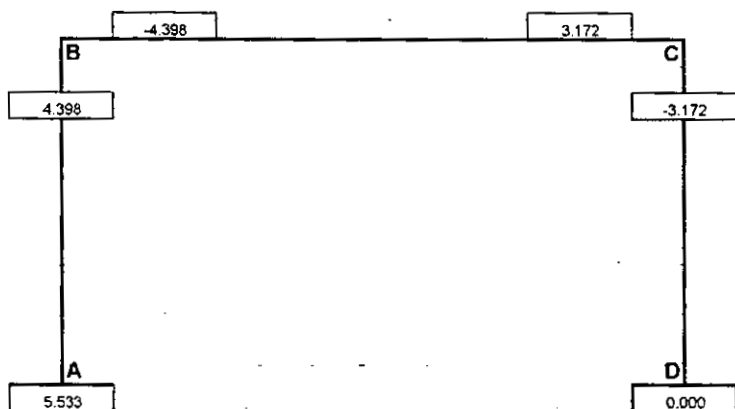
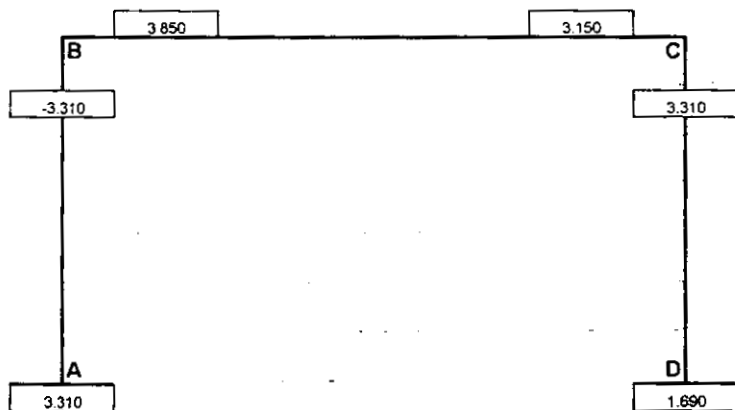
---

---

**RESULTADOS FINALES**

---

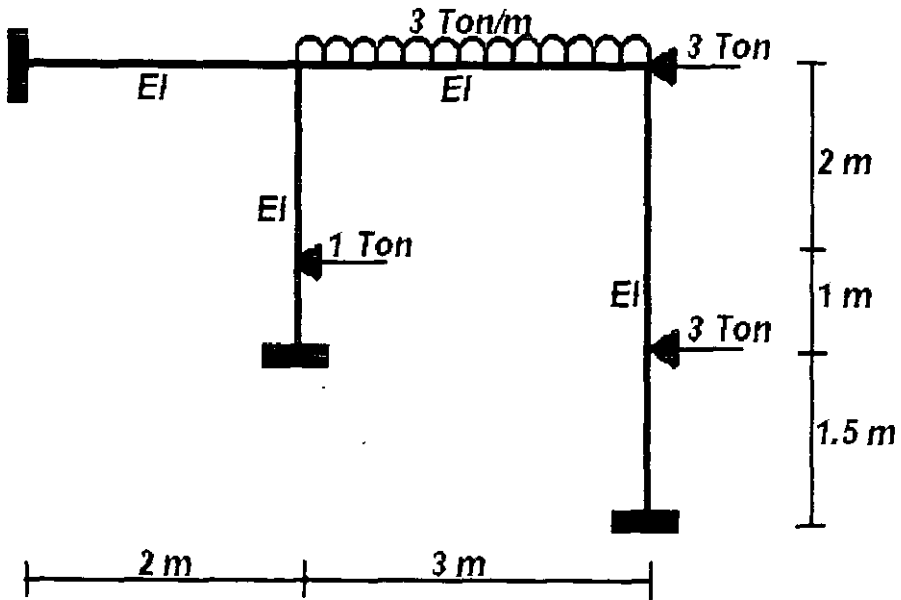
---

**MOMENTOS****CORTANTES**

## EJEMPLO 5.8

Resolver el siguiente marco:

- *Marco:* 1 Niveles x 2 Claros
- *Material:* Columnas de Concreto y Vigas de Acero
- *Programa:* Marco 2 Claros
- *Desplazamiento:* Existe desplazamiento en su único nivel
- *Consideraciones Especiales:* Inercia como Constante

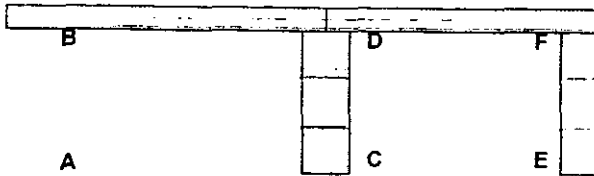


**INGRESO DE DATOS**

**MAXIMO UN NIVEL POR DOS CLAROS**

LONGITUDES (mts)

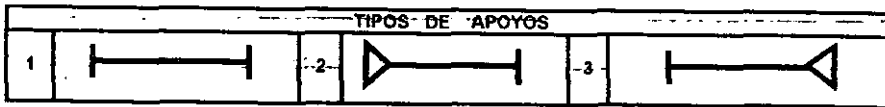
COLUMNA AB 9      VIGA BP 3  
 COLUMNA CD 9      VIGA DF 3  
 COLUMNA EF 4.5



	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
COLUMNA CD	1	C	1
COLUMNA EF	1	C	1

VIGAS	TIPO DE APOYO	MATERIAL	INERCIA
VIGA BD	1	A	1
VIGA DF	1	A	1

INERCIA, SE PUEDE UTILIZAR COMO CONSTANTE  
 MATERIAL: ACERO (A), CONCRETO(C)



**DESPLAZAMIENTOS**

DE ACUERDO CON LAS CARACTERISTICAS ANTERIORES,

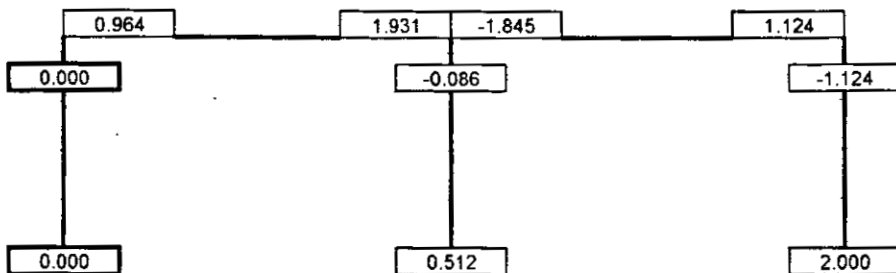
¿EXISTE DESPLAZAMIENTO EN EL ENTREPISO? SI O NO      NO

**CONDICIONES DE CARGA**

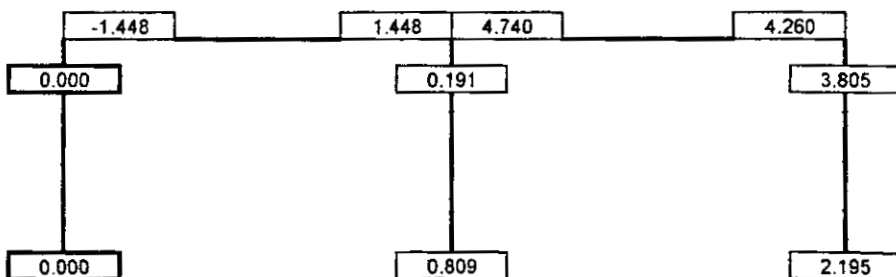
	CARGA REPARTIDA Ton/m	PUNTO 1 Ton		PUNTO 2 Ton		PUNTO 3 Ton		TRANSACCION EMERGENCIA W Total (Ton)	MOMENTO INDUCIDO		CONDICIONES DE CARGA			
		P	X	P	X	P	X		M	X	ME	VI	ME	VI
COLUMNA CD		-1	1											
COLUMNA EF		-3	1.5	-3	4.5									
VIGA BD														
VIGA DF	3													

**RESULTADOS FINALES**

**MOMENTOS**



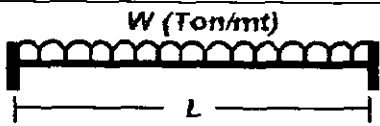
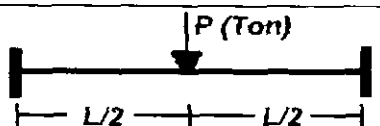
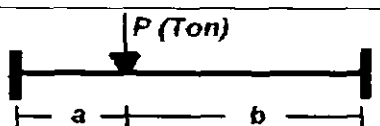
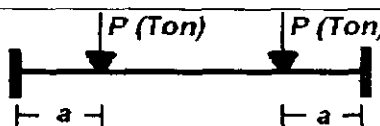
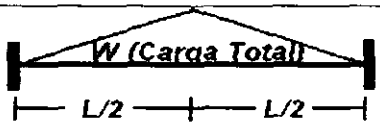
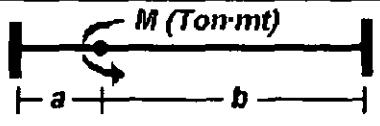
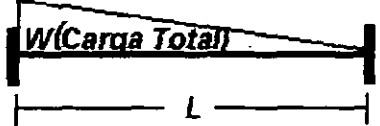
**CORTANTES**

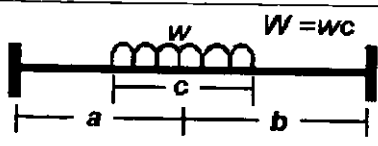
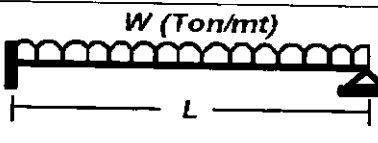
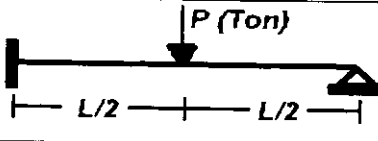
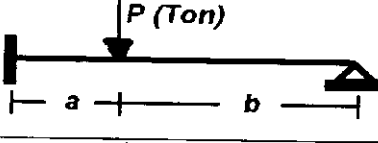
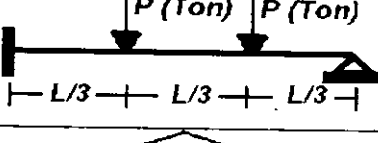
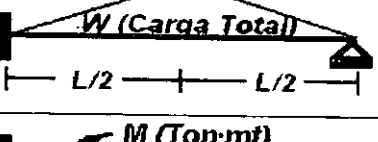
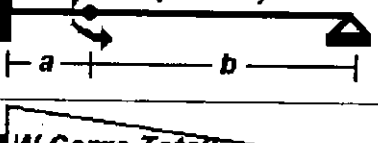
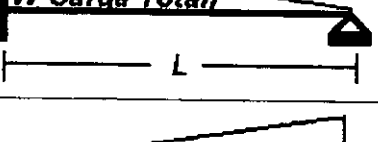
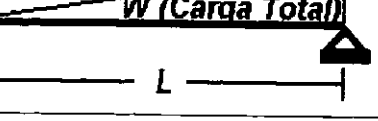


# Apéndice

TABLA 1

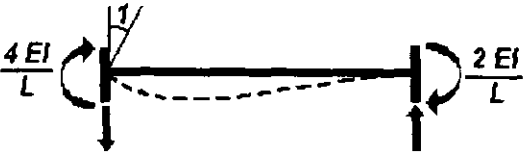

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PARA VIGAS UNIFORMES

$\frac{WL^2}{12}$		$\frac{WL^2}{12}$
$\frac{PL}{8}$		$\frac{PL}{8}$
$\frac{Pab^2}{L^2}$		$\frac{Pa^2b}{L^2}$
$\frac{Pa(L-a)}{L}$		$\frac{Pa(L-a)}{L}$
$\frac{5WL}{48}$		$\frac{5WL}{48}$
$\frac{M}{L^2}(4La - 3a^2 - L^2)$		$\frac{M}{L^2}(2La - 3a^2)$
$\frac{WL}{10}$		$\frac{WL}{15}$

$-\frac{W}{12L^2} [12ab^2 + c^2(a - 2b)]$		$\frac{W}{12L^2} [12a^2b + c^2(b - 2a)]$
$-\frac{WL^2}{8}$		<p>0</p>
$-\frac{3PL}{16}$		<p>0</p>
$-\frac{Pab(b+L)}{2L^2}$		<p>0</p>
$-\frac{PL}{3}$		<p>0</p>
$-\frac{5WL}{32}$		<p>0</p>
$\frac{M}{2L^2} [2L^2 + 3a^2 - 6al. ]$		<p>0</p>
$-\frac{2WL}{15}$		<p>0</p>
$-0.0846WL$		<p>0</p>

**TABLA 2**  
**RIGIDECES ANGULARES Y LINEALES**  
**PARA DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS**

**RIGIDECES ANGULARES**

ESTRUCTURA	FACTOR DE TRANSPORTE	REACCIONES
	1 2	$\frac{6EI}{L^2}$
	0	$\frac{3EI}{L^2}$

**RIGIDECES LINEALES**

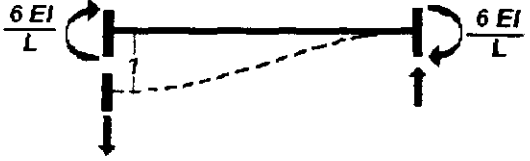
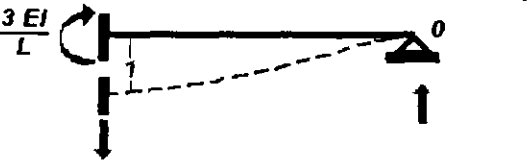
ESTRUCTURA	FACTOR DE TRANSPORTE	REACCIONES
	1	$\frac{12EI}{L^3}$
	0	$\frac{3EI}{L^3}$

TABLA 3

VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS

ESTRUCTURA Y DIAGRAMAS	REACCIONES	MOMENTO MAXIMO
	$R_a = \frac{P}{2}$ $R_b = \frac{P}{2}$	<p>en <math>x = \frac{L}{2}</math></p> $M = \frac{PL}{4}$
	$R_a = \frac{Pb}{L}$ $R_b = \frac{Pa}{L}$	$M = \frac{Pab}{L}$ <p>en el punto de aplicación de la carga</p>
	$R_a = P$ $R_b = P$	<p>en <math>x = a</math></p> $M = Pa$
	$R_a = \frac{WL}{2}$ $R_b = \frac{WL}{2}$	<p>al centro del claro</p> $M = \frac{WL^2}{8}$



	$R_a = W a$ $R_b = W a$	$\text{en } x = a$ $M = \frac{W a^2}{2}$
	$R_a = \frac{3WL}{8}$ $R_b = \frac{WL}{8}$	$M = \frac{9WL^2}{128}$ $\text{en } x = \frac{3L}{8}$
	$R_a = \frac{WL}{6}$ $R_b = \frac{2WL}{3}$	$M = \frac{WL^2}{9 \cdot 3}$ $\text{en } x = \frac{L}{3}$
	$R_a = -\frac{M}{L}$ $R_b = \frac{M}{L}$	$M = M$ $\text{en } x = 0$

---

# Conclusiones

---

Una vez terminado el desarrollo de este trabajo de tesis, se tienen varios puntos que resultan interesantes y que se pueden resumir como los que pueden llegar a trascender en este trabajo de tesis.

El método de Cross, es un método de Análisis Estructural, cuyo propósito es obtener los elementos mecánicos en cada uno de los elementos de una estructura, ya sean vigas y marcos hiperestáticos, que esta sometida a fuerzas externas. Este método ha sido el más popular de uso "manual" para el análisis y solución de estructuras indeterminadas de un tamaño reducido.

El método de Cross, que también se conoce como de la Distribución de Momentos, basa su teoría para la solución del sistema de ecuaciones que determina los elementos mecánicos en una estructura, en un procedimiento de relajaciones, que comprende ciclos de cálculos sucesivos que van aproximando los resultados para hacerlos más precisos.

Existe un atractivo en este método de análisis, y este consiste en su sencillez teórica y de aplicación; el desarrollo contemplará primeramente:

- Se aplicará para estructuras con elementos de sección transversal uniforme en toda su longitud.
- Se supone que no existe traslación del nudo donde se unen dos o más elementos de la estructura, sin embargo si puede haber una rotación, es decir los elementos pueden girar pero no moverse entre si.
- Se ignora la deformación axial de los elementos.

Una descripción global del método, se puede definir como:

- Considerar la existencia de momentos de empotramiento perfecto que concurren en un nudo, donde cada barra puede o no aportar un momento.
- La suma algebraica de los momentos que concurren a un mismo nudo representara un momento de desequilibrio que hará girar el nudo.
- Este momento de desequilibrio se distribuirá entre todas las barras que concurren al nudo, aporten o no un momento, la forma en que se distribuya este momento será a manera de reacción y la parte que le corresponda a cada una de las barras estará definida por su factor de distribución.
- Estos momentos distribuidos provocarán un momento en el extremo opuesto de la misma barra, el valor de este momento en el extremo opuesto será la mitad del momento distribuido, estos momentos se conocen como momentos transportados.
- Los momentos transportados provocarán nuevamente un momento de desequilibrio y que originará nuevamente un ciclo de operaciones.

Las operaciones pueden suspenderse después de dos o tres ciclos, dando un análisis aproximado muy satisfactorio, o bien puede continuarse según la precisión que se desee.

Este método puede parecer en ocasiones bastante tedioso por la gran cantidad de números que se manejarán, sobre todo para estructuras que no sean tan pequeñas. Para esto, la computadora representa, de alguna manera, el genio encerrado en la botella, capaz de cumplir los deseos de rapidez y eficiencia en el cálculo y la organización de grandes masas de datos. Y esta es precisamente la idea original: un genio mecánico capaz de liberar al hombre de la pesada tarea de tener que calcular a mano.

Considerando esto, y la gran variedad de paquetes de calculo que existen en el mercado, se tuvo la idea de proponer una automatización para este método de análisis en una hoja de calculo que sea de uso común y que cualquiera conozca su manejo básico. La utilización de esta hoja de calculo se baso además, en la visualización que se tiene simultáneamente al agregar una formula y obtener su resultado de manera inmediata. Las operaciones del método (sumar, restar, multiplicar y dividir) son de uso común en esta hoja de calculo, por lo que no debe existir ningún problema con la solución del método de Cross en Excel.

La dificultad para automatizar el método radicará en su gran manejo de información que se tenga que manejar, para proponer la automatización de un marco, se debe considerar, los nudos que se pueden tener, y por lo tanto la gran cantidad de barras que se pueden generar considerando que cada barra tiene dos sentidos; el número de entresijos del marco, ya que cada entresijo representaría una etapa de análisis adicional y por lo tanto un despliegue máximo de números.

Antes de querer automatizar el método, se tendría que resolver de manera el método para un marco definido totalmente, desde sus características físicas hasta sus fuerzas externas; partiendo de esto:

- Se podría tratar de cambiar algunas características de este marco, como por ejemplo las fuerza externas, los momentos de inercia, longitudes, condiciones de apoyo, etc., e ir detallando las celdas que contengan mensajes de error debido a los cambios que se hagan en los datos base necesarios para el desarrollo del marco. Esto tiene como fin hacer que el marco se resuelva basándose solo en referencias y no en valores constantes.
- Corregido esto, ahora se puede cambiar el número de barras, es decir para el marco definido ¿qué cambios ocurrirían si no existiese una de sus columnas?. Esto es porque si un elemento no existiese, su longitud sería cero, y se debe

recordar que muchas de las formulas empleadas tienen como divisor a la longitud (Momentos de empotramiento, Rigidez, etc.). La finalidad de este punto será el manejo de las condicionantes el método.

- Finalmente variar los desplazamientos, es decir un marco puede tener desplazamiento lateral o no, de acuerdo a sus características físicas y de carga externa, y de esto dependerá el número de etapas que tengan que desarrollarse. Para esto también tendrán que intervenir los condicionantes.

Contemplado lo anterior, que sería las bases que se emplearon para lograr este trabajo, esto se puede adaptar a diferentes grados de complejidad; pero siempre recordando que este es un método recomendado para estructuras pequeñas y si se quisiera resolver un marco de mayor dimensión es recomendable recurrir a otro método de análisis de los cuales existen programas automatizados.

Una conclusión final que podría hacer, el Método de Cross es un método sencillo que tuvo y tienen una gran aceptación solo para marcos en un solo plano y tamaño reducido, pero debido al desarrollo de programas de análisis y diseño estructural para de estructuras en tres dimensiones y de mucho mayor tamaño, este método ha sido desplazado grandemente, por lo cual, desde mi punto de opinión este método se debe solo utilizar para análisis de marcos que pertenezcan a estructuras muy pequeñas (Casas habitación, Vigas Hiperestáticas, Elementos aislados, etc.).

---

# Bibliografía

---

1.- Calculo Estructural.

Ingeniería Civil y Arquitectura.

Miguel Chiñas De la Torre.

Edit. Trillas.

2.- Apuntes de Análisis Estructural I.

Rodolfo López Ruelas.

UNAM, 1993.

3.- Análisis de Estructuras Indeterminadas.

J. Sterling Kinney.

CECSA., 1960.

4.- Análisis de Estructuras.

Método clásico y matricial.

Mc. Cormac Elling.

Alfaomega, 1994.

5.- Análisis y Mecánica de las Estructuras.

W.M. Jenkins.

Alfaomega, 1944.

6.- Estructuras Estáticamente Indeterminadas.

Ingeniería Estructural.

Richard N. White, y otros.

LIMUSA, México, 1984.