30

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOCALES, GAVILLAS Y MORFISMOS ULTRAFINITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

ADRIANA MERINO SANCHEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Locales, gavillas y morfismos ultrafinitos"

realizado por Merino Sánchez Adriana

con número de cuenta 9653515-8 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	Dr. Francisco Marmolejo Rivas	Marmolejo
Propietario	Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas	
Propietario	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo
Suplente	Dr. José Ríos Montes	José Ríos M.
Suplente	Dra. Martha Takane Imay	Martha Takane

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Locales, gavillas y morfismos ultrafinitos

A mis tres reyes magos: Georgina, Jaime y Virgilio.

Me siento profundamente agradecida con mi asesor Pancho Marmolejo por haberme dado la oportunidad de completar mi formación como matemática a su lado. Su dedicación, minuciosidad y sentido del humor, pero sobre todo su amistad, hicieron maravillosa esta experiencia.

Agradezco a todos mis sinodales el tiempo que me dedicaron y en especial a Martha Takane, porque me dió mi primer curso de álgebra, que fue inolvidable.

Agradezco también a Joel e Iván por ser siempre mi fiel auditorio en el Seminario de Categorías. Gracias también por apoyarme en mi incursión por los seminarios vecinos.

Quiero darle las gracias de manera especial a mi mamá por confiar en mi, a mi hermano Hugo por ser el mejor del mundo, a mis abuelos Amparo y Guillermo por cuidarme siempre, a mi tío Jaime por abrirme las puertas de su casa y a mi tío Virgilio por tratarme como una hija.

Rodrigo, mil gracias por ser mi pilar.

Gracias a Bety, Claudia, Eratóstenes, Ulises, Agustín y Aarón. Ustedes lo vieron todo desde el principio.

Índice General

Introducción

La categoría $\mathbf{Gav}(X)$ de gavillas sobre X es suficientemente rica en estructura como para hacer modelos en ella. En este trabajo nos concentramos solo en aquellos modelos que se basan en las estructuras de objeto inicial, epimorfismos y coproductos y límites finitos de la categoría $\mathbf{Gav}(X)$ y nos interesa saber cuándo una función continua $f: X \to Y$ induce un cambio de base $\mathbf{Gav}(X) \rightleftarrows \mathbf{Gav}(Y)$ que preserva los cimientos de estos modelos. A estas funciones continuas se les llama *ultrafinitas* y al cambio de base que inducen se le dice *elemental*.

Un ejemplo importante de funtor elemental está dado por el teorema de Łos que está fuertemente relacionado con la inclusión canónica $\mu: I \to \beta I$ de un espacio discreto I en su compactificación de Stone-Čhech βI.

Para caracterizar a las funciones ultrafinitas es crucial que toda gavilla $F \in \mathbf{Gav}(X)$ pueda ser vista como la gavilla de secciones de un homeomorfismo local y que a su vez, todo homeomorfismo local $p: Y \to X \in \mathbf{HL}/X$ se recupere a partir de los tallos de gérmenes de una gavilla.

Una vez logrado esto, intentamos generalizar el resultado para topos de Grothendieck, ya que la idea de cubrir a un objeto con otros de su mismo estilo es la única indispensable para definir una gavilla. Desafortunadamente la empresa era un tanto ambiciosa.

Sin embargo pudimos aterrizar en un campo intermedio gracias a la luz que nos proporcionó Johnstone en [4]. Dicho artículo nos indicó cómo ampliar nuestro concepto de cubierta y nos puso en el camino de la topología sin puntos. En esta dirección había dos posibilidades, trabajar con locales o con marcos. Aunque estos conceptos son duales entre sí, las generalizaciones de ideas como función abierta y homeomorfismo local en la categoría de locales **Loc** se presentaban con demasiada claridad. Además, si tomamos en cuenta que todo local es en sí mismo un álgebra de Heyting que trae consigo la estructura de la lógica intuicionista, es claro porqué elegimos este camino. De cualquier forma, Johnstone pone de manifiesto en [5] muchos más motivos que apuntalan nuestra elección.

Finalmente, después de haber desentrañado las características propias de **Loc**, no fue difícil reescribir nuestras proposiciones centrales en el lenguaje de locales. Bastó tomar una perspectiva más amplia, de conjunto, para llegar a la formulación que aquí presentamos. Además resultó completamente reconfortante notar cómo las demostraciones de la primera y segunda parte se seguían tan de cerca, los detalles para espacios topológicos nos rescataron no pocas veces y la siempre tan temida pérdida de intuición no tuvo lugar.

El texto está separado en dos partes de forma tal que ambas pueden leerse casi independientemente. La primera parte, que consta de los capítulos 1 a 3, se ocupa exclusivamente de las gavillas sobre espacios topológicos. La segunda parte, los capítulos 4 a 6, se ocupa de las gavillas sobre locales y tiene la misma estructura que la primera: el primer capítulo establece las bases, el segundo empieza con la definición de gavilla y remata con el cambio de base y el tercero se ocupa de la caracterización de los morfismos ultrafinitos.

La mayor parte del capítulo de preliminares está basado en [1] debido a la sencillez de dicho texto, aunque un acercamiento completamente impregnado del sabor categórico puede hallarse en [6], de donde se extrajo la parte referente a adjunciones. Los resultados acerca de las categorías extensivas son una combinación ad-hoc de las ideas que aparecen en [3] y [9] que resulta de gran provecho en la segunda parte de este trabajo.

El desarrollo del capítulo 2 se hizo a partir de [7] y las proposiciones del capítulo 3 pertenecen a [8].

Para desarrollar los capítulo 4 y 5 se siguió muy de cerca a [2]. La caracterización de morfismos ultrafinitos de locales, que conforma el capítulo 6, es un resultado original.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentrán las definiciones escenciales de teoría de categorías junto con algunos resultados que serán la herramienta básica para el desarrollo de los capítulos posteriores. Debido a esto no hay una gran cohesión en este material, únicamente se trata de dar referencia o de refrescar los conceptos que se utilizarán con más frecuencia en este trabajo.

1.1 Ideas básicas

En esta sección nos ocuparemos de establecer los cimientos de la teoría de categorías.

Definición 1.1.1. *Una* categoría $\mathbf{C}$ *consta de*

1. *una clase $|\mathbf{C}|$ cuyos elementos A, B, C,... serán llamados "objetos de la categoría $\mathbf{C}$";*
2. *para cada par de objetos A, B, un conjunto $\mathbf{C}(A,B)$ cuyos elementos f, g, h,... serán llamados "morfismos" de A en B;*
3. *para cada tres objetos A, B y C, una función de composición*

$$\circ\colon \mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) \to \mathbf{C}(A,C)$$

   cuya acción sobre la pareja (f,g) se denota como $g \circ f$ o solo como gf;

4. *para cada objeto A, un morfismo distinguido $1_A \in \mathbf{C}(A,A)$ llamado la identidad en A.*

Además cumple con los siguientes axiomas.

1. *(Axioma de la asociatividad) Dados morfismos $f \in \mathbf{C}(A,B)$, $g \in \mathbf{C}(B,C)$ y $h \in \mathbf{C}(C,D)$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. *(Axioma de la identidad) Dados morfismos* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *y* $g \in \mathbf{C}(B, C)$ *se cumplen las siguientes igualdades:*

$$1_B \circ f = f, \quad g \circ 1_B = g.$$

Un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ es comúnmente representado por $f\colon A \to B$. En este caso diremos que A es el *dominio* de f y que B es su *codominio*.

Diremos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

es *conmutativo* cuando se cumpla la igualdad $g \circ f = k \circ h$ entre las dos posibles composiciones. En general, esta noción se extiende por analogía a diagramas de cualquier forma.

Las siguientes definiciones establecen la noción de cancelar un morfismo ya sea por la izquierda o por la derecha.

Definición 1.1.2. *Un morfismo* $f\colon A \to B$ *en una categoría* $\mathbf{C}$ *es un* monomorfismo *si para cada objeto* $C \in \mathbf{C}$ *y cada par de morfismos* $h, k\colon C \to A$ *se tiene que si* $f \circ h = f \circ k$ *entonces* $h = k$.

En ocasiones se usará el símbolo $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ *para enfatizar que* f *es un monomorfismo.*

Definición 1.1.3. *Un morfismo* $f\colon A \to B$ *en una categoría* $\mathbf{C}$ *es un* epimorfismo *si para cada objeto* $C \in \mathbf{C}$ *y cada par de morfismos* $h, k\colon B \to C$ *se tiene que si* $h \circ f = k \circ f$ *entonces* $h = k$.

En ocasiones se usará el símbolo $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$ *para enfatizar que* f *es un epimorfismo.*

Definición 1.1.4. *Un morfismo* $f\colon A \to B$ *en una categoría* $\mathbf{C}$ *es un* isomorfismo *si existe un morfismo* $g\colon B \to A$ *en* $\mathbf{C}$ *tal que*

$$f \circ g = 1_B, \quad g \circ f = 1_A.$$

De hecho el morfismo g es único. Supongamos que existe $h\colon B \to A$ en $\mathbf{C}$ con las mismas propiedades

$$f \circ h = 1_B, \quad h \circ f = 1_A,$$

entonces se tiene

$$g = g \circ 1_B = g \circ f \circ h = 1_A \circ h = h.$$

A continuación enlistaremos algunos ejemplos de las categorías más usuales.

Ejemplo 1.1.5.a. *Los conjuntos y las funciones entre ellos forman una categoría. Dicha categoría se denota por* **Con**.

Ejemplo 1.1.5.b. *Los espacios topológicos y las funciones continuas entre ellos forman una categoría. Dicha categoría se denota por* **Top**.

Ejemplo 1.1.5.c. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(X, \leq)$ *puede ser visto como una categoría* $\mathcal{X}$ *cuyos objetos son los elementos de* X*; el conjunto* $\mathcal{X}(x, y)$ *de morfismos consta de un solo objeto si* $x \leq y$ *y es vacío si no.*

Gracias al axioma de transitividad del orden parcial, es posible definir una (única) ley de composición y el axioma de reflexividad de dicho orden establece la existencia de las identidades.

Ejemplo 1.1.5.d. *Las retículas son un caso particular de los conjuntos parcialmente ordenados, que vale la pena mencionar. Una* retícula *es un conjunto parcialmente ordenado* $(X, \leq)$ *con dos elementos* 0 *y* 1 *y dos operaciones binarias* $\wedge$ *y* $\vee$ *llamadas ínfimo y supremo respectivamente tales que*

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$$

$$1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x,$$

$$x \wedge (y \vee x) = x = (x \wedge y) \vee x.$$

para cada $x, y \in X$.

Ejemplo 1.1.5.e. *Cada conjunto* X *puede ser visto como una categoría* $\mathcal{X}$ *cuyos objetos son los elementos de* X *y los únicos morfismos son las identidades; es decir, el conjunto* $\mathcal{X}(x, y)$ *consta de un solo objeto si* $x = y$ *y es vacío si no. A las categorías de este estilo se les llama* categorías discretas.

A partir de una categoría cualquiera **C** se pueden construir nuevas categorías de "diagramas en **C**" como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.6.a. *Fijemos un objeto* C *de* **C**.

La categoría $\mathbf{C}/C$ *tiene como objetos a los morfimos de* **C** *con codominio* C. *Un morfismo* $h\colon A \to A'$ *de* **C** *será un morfismo entre los objetos* $f\colon A \to C$ *y* $f'\colon A' \to C$ *en* $\mathbf{C}/C$ *siempre que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

conmute; es decir, siempre que $f' \circ h = f$.

Sea $f: A \to C$ un objeto de $\mathbf{C}/C$. Como el morfismo $1_A: A \to A$ es tal que $f \circ 1_A = f$, 1_A es la identidad del objeto f en $\mathbf{C}/C$.

Sean $h: A \to A'$ y $k: A' \to A''$ dos morfismos en $\mathbf{C}/C$ tales que $f'h = f$ y $f''k = f'$. La composición $k \circ h$ es un morfismo tal que

$$f''(k \circ h) = (f''k)h = f'h = f,$$

entonces $k \circ h: f \to f''$ es el morfismo composición de h y k.

Ejemplo 1.1.6.b. *De manera análoga, al fijar un objeto C de $\mathbf{C}$, podemos construir la categoría $C/\mathbf{C}$ que consta de los morfismos de $\mathbf{C}$ que tienen dominio C. Un morfismo $h: A \to A'$ de $\mathbf{C}$ será un morfismo entre los objetos $f: C \to A$ y $f': C \to A'$ en $C/\mathbf{C}$ siempre que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & A' \arrow[ul, "f'"'] \end{tikzcd}$$

conmute; es decir, siempre que $f' \circ h = f$.

Como se ha visto, las objetos de una categoría tienen una estructura común que es compatible con sus morfismos, así que al relacionar un par de categorías se debe respetar dicha estructura.

Definición 1.1.7. *Un* funtor *F de la categoría $\mathbf{A}$ a la categoría $\mathbf{B}$ consta de*

1. *una aplicación $|\mathbf{A}| \to |\mathbf{B}|$ entre las clases de objetos de las categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$; la imagen de un objeto A de $\mathbf{A}$ se denota como $F(A)$ o solo FA;*

2. *una función $\mathbf{A}(A, A') \to \mathbf{B}(FA, FA')$ para cada par de objetos A, A' de $\mathbf{A}$; la imagen de un morfismo $f \in \mathbf{A}(A, A')$ se denota como $F(f)$ o solo Ff.*

Además cumple los siguientes axiomas.

1. *F respeta composiciones; es decir, para cada par de morfismos $f \in \mathbf{A}(A, A')$ y $g \in \mathbf{A}(A', A'')$ se tiene*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

2. *F respeta identidades; es decir, para cada objeto A de $\mathbf{A}$ se tiene*

$$F(1_A) = 1_{FA}.$$

Dados dos funtores $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, una composición puntual produce un nuevo funtor $G \circ F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$. Esta composición es claramente asociativa.

El funtor identidad $1_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ sobre la categoría $\mathbf{A}$, donde cada morfismo de la definición es una identidad, funciona como la identidad para la composición de funtores.

Con la siguiente definición establecemos cómo se relacionan los funtores.

Definición 1.1.8. *Sean $F, G: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un par de funtores paralelos. Una* transformación natural $\alpha: F \Rightarrow G$ *es una familia de morfismos*

$$\langle \alpha_A : FA \to GA \rangle$$

de $\mathbf{B}$ indexados por los objetos de $\mathbf{A}$ tal que, para cada morfismo $f: A \to A'$ en $\mathbf{A}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & GA'
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Con este nivel de relación extra se antoja construir una categoría con funtores como objetos y transformaciones naturales como morfismos.

Definición 1.1.9. *Una categoría $\mathbf{C}$ es* pequeña *cuando la clase $|\mathbf{C}|$ de sus objetos es un conjunto.*

Proposición 1.1.10. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría pequeña y $\mathbf{B}$ una categoría arbitraria. Los funtores de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ y las transformaciones naturales entre ellos forman una categoría denotada por $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Esta nueva categoría será pequeña en tanto $\mathbf{B}$ lo sea.*

Demostración. Dados tres funtores paralelos $F, G, H: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y transformaciones naturales $\alpha: F \Rightarrow G$ y $\beta: G \Rightarrow H$, la familia $\langle (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A \rangle$ claramente define una nueva transformación natural $\beta \circ \alpha: F \Rightarrow H$. Esta composición es claramente asociativa y la transformación natural $\langle 1_{FA}: FA \to FA \rangle$ es la identidad para dicha composición. Finalmente, como $\mathbf{A}$ es una categoría pequeña, las transformaciones naturales entre dos funtores de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ constituyen un conjunto.

Si además suponemos que $\mathbf{B}$ es una categoría pequeña, tanto $|A|$ como $|B|$ serán conjuntos, así que las aplicaciones y en consecuencia los funtores entre ellos constituirán un conjunto. ■

A partir de ciertas transformaciones naturales se pueden construir otras que merecen ser estudiadas.

Si tenemos el diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "F"] & \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[r, shift right, "H"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

y una transformación natural $\alpha: G \Rightarrow H$ podemos definir una nueva transformación natural $(\alpha * F): G \circ F \Rightarrow H \circ F$ de la siguiente manera: la familia $\langle (\alpha * F)_A = \alpha_{FA} \rangle$, indexada por los objetos de $\mathbf{A}$, es tal que para cada morfismo $f: A \to A'$ en $\mathbf{A}$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "\alpha_{FA}"] \arrow[d, "GFf"'] & HFA \arrow[d, "HFf"] \\ GFA' \arrow[r, "\alpha_{FA'}"'] & HFA' \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que $FA \in \mathbf{B}$ y α es una tranformación natural.

Análogamente, si tenemos el diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift left, "H"] \arrow[r, shift right, "K"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "J"] & \mathbf{E} \end{tikzcd}$$

y la transformación natural $\beta: H \Rightarrow K$, la familia $\langle (J * \beta)_C = J(\beta_C) \rangle$, indexada por los objetos de $\mathbf{C}$, define una transformación natural $(J * \beta): J \circ H \Rightarrow J \circ K$ ya que para todo morfismo $g: C \to C'$ en $\mathbf{C}$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} JHC \arrow[r, "J(\beta_C)"] \arrow[d, "JHg"'] & JKC \arrow[d, "JKg"] \\ JHC' \arrow[r, "J(\beta_{C'})"'] & JKC' \end{tikzcd}$$

conmuta gracias a que J respeta composiciones y β es una transformación natural.

1.2 El principio de dualidad

En categorías es usual que cada resultado que se demuestra para monomorfismos tenga su contraparte para epimorfismos. Ésto no es más que un caso particular de un principio muy general.

Definición 1.2.1. *Dada una categoría* $\mathbf{A}$, *la* categoría dual $\mathbf{A}^*$ *está definida de la siguiente manera:*

1. $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|$;

2. *para objetos* A *y* B *cualesquiera de* $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^*(A, B) = \mathbf{A}(B, A)$;

3. la ley de composición de $\mathbf{A}^*$ *está dada por*

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*.$$

Dicho de otra manera, la categoría $\mathbf{A}^*$ es la categoría $\mathbf{A}$ con las flechas al revés, por eso a la categoría $\mathbf{A}^*$ se le conoce también como categoría opuesta y se le denota por $\mathbf{A}^{op}$.

Teorema 1.2.2. *(Principio de dualidad). Supongamos la validez, en toda categoría, de un enunciado que expresa la existencia de algún objeto o morfismo o la igualdad de algunas composiciones. Entonces, el "enunciado dual", que se obtiene al voltear la dirección de las flechas y al sustituir cada composición* $f \circ g$ *por* $g \circ f$ *en el enunciado original, es también válido en toda categoría.*

Demostración. Si S denota el enunciado dado y S^* denota su dual, probar el enunciado S^* en una categoría $\mathbf{A}$ es claramente equivalente a probar el enunciado S en la categoría $\mathbf{A}^*$, lo cual es cierto por hipótesis. ■

1.3 Límites y colímites

En esta sección introduciremos el concepto de "límite de un funtor" y mencionaremos los casos particulares más importantes.

Definición 1.3.1. *Sea* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *un funtor. Un* cono *sobre* F *es una pareja* $(C, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ *que consiste de*

1. *un objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *y*
2. *para cada objeto* A *de* $\mathbf{A}$, *un morfismo* $p_A: C \to FA$ *en* $\mathbf{C}$ *tal que para cada morfismo* $a: A \to A'$ *de* $\mathbf{A}$, *se tiene* $p_{A'} = Fa \circ p_A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "a"'] & & FA \arrow[d, "Fa"] & \\ A' & {} \arrow[r, mapsto] & FA' & C \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[l, "p'_A"] \end{tikzcd}$$

Definición 1.3.2. *Sea* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *un funtor. Un* **límite** *sobre* F *es un cono* $(L, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ *sobre* F *con la propiedad de que, para cualquier otro cono* $(M, \langle q_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ *sobre* F, *existe un único morfismo* $m: M \to L$ *tal que, para cada objeto* A *de* $\mathbf{A}$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_A"'] & & L \arrow[dl, "p_A"] \\ & FA & \end{tikzcd}$$

conmuta; es decir, $q_A = p_A \circ m$.

A los morfismos $\langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}}$ *se les conoce como* proyecciones *y al límite sobre* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *se le suele denotar como* $\varprojlim_{A \in \mathbf{A}} FA$ *o simplemente como* $\varprojlim_{\mathbf{A}} FA$.

Lema 1.3.3. *El límite de un funtor* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$*, cuando existe, es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean $(L, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ y $(L', \langle p'_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ dos conos límite sobre el funtor F.

Como $(L, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ es un cono límite y $(L', \langle p'_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ es en particular un simple cono, existe un único morfismo $s: L' \to L$ tal que

$$p_A = s \circ p'_A \tag{1.1}$$

para toda $A \in \mathbf{A}$.

Intercambiando los papeles, tenemos que existe un único morfismo $r: L \to L'$ tal que

$$p'_A = r \circ p_A \tag{1.2}$$

para toda $A \in \mathbf{A}$.

Considerando que $(L, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ es un cono y además límite, existe un único morfismo $t: L \to L$ tal que $p_A = t \circ p_A$ para toda $A \in \mathbf{A}$. Claramente $t = 1_L$.

Por otro lado, combinando las igualdades (1.1) y (1.2) tenemos que

$$p_A = s \circ p'_A = s \circ r \circ p_A,$$

para toda $A \in \mathbf{A}$. Como 1_L es única, se tiene que $s \circ r = 1_L$.

De la misma manera, concluimos que $r \circ s = 1_{L'}$. ■

Lema 1.3.4. *Sea* $(L, \langle p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ *el límite del funtor* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$*. Dos morfismos* $f, g: M \to L$ *en* $\mathbf{C}$ *son iguales si para cada objeto* A *de* $\mathbf{A}$ *se tiene que*

$$p_A \circ f = p_A \circ g.$$

Demostración. $(M, \langle f \circ p_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ es un cono sobre F y es claro que f y g son dos factorizaciones de él.

Por lo tanto son iguales. ■

Debido a la impotancia de los límites enunciaremos el concepto dual de "colímite", a sabiendas de que los resultados anteriores tienen su contraparte dual.

Definición 1.3.5. *Sea* $F: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *un funtor. Un* cocono *sobre* F *es una pareja* $(C, \langle s_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ *que consiste de*

1. *un objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *y*

2. *para cada objeto A de $\mathbf{A}$, un morfismo $s_A : FA \to C$ en $\mathbf{C}$ tal que para cada morfismo $a : A \to A'$ de $\mathbf{A}$, se tiene $s_{A'} = s_A \circ Fa$.*

Definición 1.3.6. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un funtor. Un* colímite *sobre F es un cocono $(L, \langle s_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ sobre F con la propiedad de que, para cualquier otro cocono $(M, \langle t_A \rangle_{A \in \mathbf{A}})$ sobre F, existe un único morfismo $m : L \to M$ tal que, para cada objeto A de $\mathbf{A}$, $t_A = m \circ s_A$.*

A los morfismos $\langle s_A \rangle_{A \in \mathbf{A}}$ se les conoce como inyecciones *y al colímite sobre $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ se le suele denotar como $\varinjlim_{\mathbf{A}} FA$.*

A continuación mostraremos los ejemplos más importantes de límites.

Ejemplo 1.3.7.a. *Sean $\mathbf{A}$ una categoría vacía y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un funtor.*

El límite sobre F es la definición del objeto terminal *de la categoría $\mathbf{C}$ que suele ser denotado como $\mathbf{1}$. Así que para todo objeto C de $\mathbf{C}$ existe el morfismo*

$$C \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Ejemplo 1.3.7.b. *Sean $\mathbf{A}$ una categoría discreta con dos objetos (A y B) y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un funtor.*

El límite sobre F es la definición del producto *de FA y FB*

$$FA \longleftarrow FA \times FB \longrightarrow FB.$$

Ejemplo 1.3.7.c. *Sean $\mathbf{A}$ una categoría compuesta por dos objetos A y B y dos flechas paralelas $f, g : A \to B$, además de las identidades, y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un funtor.*

El límite sobre F es la definición del igualador *de Ff y Fg*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & FA \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & FB. \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3.7.d. *Sean $\mathbf{A}$ una categoría compuesta por tres objetos A, B y C y dos flechas $f : A \to B$, $g : C \to B$, además de las identidades, y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un funtor.*

El límite sobre F es la definición del producto fibrado *de Ff y Fg*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ FC \arrow[r, "Fg"'] & FB. \end{tikzcd}$$

Además, para los cuatro ejemplos anteriores existen los conceptos duales llamados *objeto inicial*, *coproducto o suma*, *coigualador* y *coproducto fibrado* respectivamente.

El siguiente lema establece un caracterización de los monomorfismos de una categoría.

Lema 1.3.8. *Un morfismo $m: A \to B \in \mathbf{C}$ es mono si y solo si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "m"'] & B \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

es un producto fibrado en $\mathbf{C}$.

Demostración. Supongamos que m es un monomorfismo.

Sean X, $f: X \to A$ y $g: X \to A$ tales que $m \circ f = m \circ g$. Entonces la parte externa del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "!"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & A \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "m"] \\ & A \arrow[r, "m"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Como m es mono, esto implica que $f = g$. Por lo tanto hay una única flecha $f: X \to A$ tal que el diagrama anterior conmuta.

Supongamos que el diagrama (1.3) es un producto fibrado.

Sean X, $f: X \to A$ y $g: X \to A$ tales que $m \circ f = m \circ g$.

Como (1.3) es un producto fibrado, existe una única flecha $h: X \to A$ tal que $f = 1_A \circ h = g$. Así que $f = g$.

Por lo tanto m es un monomorfismo. ■

En lo que resta de la sección nos centraremos en mostrar resultados acerca de la categoría de conjuntos **Con**, ya que constituye el principal terreno en el que nos desenvolveremos más adelante.

El siguiente resultado nos proporciona un criterio acerca de los igualadores de conjuntos que será fuertemente utilizado en los capítulos posteriores.

Lema 1.3.9. *Sea*

$$A \xrightarrow{h} B \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C \tag{1.4}$$

un diagrama en **Con**. *Dicho diagrama es un igualador si y solo si para cada elemento $b \in B$ tal que $f(b) = g(b)$ existe un único elemento $a \in A$ tal que $h(a) = b$.*

Demostración. Supongamos que el diagrama (1.4) es un igualador en **Con**. Sea $b \in B$ tal que $f(b) = g(b)$. Entonces la inclusión $i_b: \{b\} \to B$ es una función tal que $f \circ i_b = g \circ i_b$. Como (1.4) es un igualador, existe una única función $j\colon\{b\} \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
\{b\} \arrow[u, dashed, "j"] \arrow[ur, hook, "i_b"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por lo tanto $j(b)$ es el único elemento de A tal que $h(j(b)) = b$.

Ahora supongamos que para cada elemento $b \in B$ tal que $f(b) = g(b)$ existe un único elemento $a \in A$ tal que $h(a) = b$.

Veamos que el diagrama (1.4) es un igualador. Sea $l\colon D \to B$ tal que $f \circ l = g \circ l$. Entonces $f(l(d)) = g(l(d))$ para cada $d \in D$. Como $l(d)$ es un elemento de B para cada $d \in D$, por hipótesis existe un único elemento $a_d \in A$ tal que $h(a_d) = l(d)$.

Entonces la función

$$k\colon D \to A, \quad d \mapsto a_d$$

es la única que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
D \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmute.

Por lo tanto el diagrama (1.4) es un igualador. ■

Definición 1.3.10. *Una categoría* **C** *es* completa *si cada funtor* $F\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, *con* **D** *una categoría pequeña, tiene límite.*

Lema 1.3.11. *La categoría* **Con** *es completa.*

Demostración. Sea $F\colon \mathbf{I} \to \mathbf{Con}$ un funtor con $\mathbf{I}$ una categoría pequeña.

Sea $(L, \langle p_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ un cono sobre F definido de la siguiente manera:

$$L = \{\langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} Fi \mid \forall a_{ij}\colon i \to j \in \mathbf{I} \quad F(a_{ij})(x_i) = x_j\}$$

y para cada $j \in \mathbf{I}$

$$p_j\colon L \to Fj, \quad \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \mapsto x_j.$$

Veamos que dicho cono es el límite de F.

Sea $(M, \langle q_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ otro cono sobre F. Entonces, para cualquier $a_{ij}: i \to j$ en $\mathbf{I}$ tenemos que $F(a_{ij})(q_i(m)) = q_j(m)$. Por lo tanto $\langle q_i(m) \rangle_{i \in \mathbf{I}} \in L$.

Definamos la función

$$f: M \to L, \quad m \mapsto \langle q_i(m) \rangle_{i \in \mathbf{I}}.$$

Sea $m \in M$ e $i \in I$,

$$p_i \circ f(m) = p_i(\langle q_i(m) \rangle_{i \in \mathbf{I}}) = q_i(m).$$

Entonces $p_i \circ f = q_i$ para toda $i \in \mathbf{I}$.

Sea $f': M \to L$ tal que $p_i \circ f' = q_i$ para toda $i \in \mathbf{I}$. Entonces

$$f'(m) = \langle q_i(m) \rangle_{i \in \mathbf{I}} = f(m),$$

así que f es única.

Por lo tanto $(L, \langle p_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ es el límite del funtor $F: \mathbf{I} \to \mathbf{Con}$.

Por lo tanto **Con** es completa. ∎

Así como la demostración anterior se apoya en la idea del producto cartesiano de conjuntos, el siguiente resultado, que se enuncia sin demostración, está apoyado en el concepto de las clases generadas a partir de una relación de equivalencia.

Lema 1.3.12. *La categoría* **Con** *es cocompleta.*

∎

El siguiente resultado es un ejemplo de cómo la categoría **Con** transmite características a otras categorías construidas a partir de ella.

Lema 1.3.13. *Sea $\mathcal{X}$ la categoría inducida por el conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ como en el ejemplo 1.1.5.c. La categoría* $\mathbf{Con}^{\mathcal{X}}$ *es completa y los límites se calculan puntualmente.*

Demostración. Sea $F: \mathbf{I} \to \mathbf{Con}^{\mathcal{X}}$ un funtor con $\mathbf{I}$ una categoría pequeña.

Como **Con** es completa, podemos hacer la siguiente definición:

$$L: \mathcal{X} \to \mathbf{Con}, \quad x \mapsto \varprojlim_{\mathbf{I}} Fi(x),$$

Si se tiene que $x \leq y$, hay un único morfismo $x \to y$. Al aplicarle Fi a dicho morfismo se obtiene una función $Fi(x) \to Fi(y)$ cuya acción denotaremos como $t \mapsto t|_y$ para todo $t \in Fi(x)$. Con esta notación, definimos la imagen de los morfismos de $\mathcal{X}$ bajo L como

$$\varprojlim_{\mathbf{I}} Fi(x) \to \varprojlim_{\mathbf{I}} Fi(y), \quad \langle u_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \mapsto \langle u_i|_y \rangle_{i \in \mathbf{I}},$$

con lo cual se tiene que L es un funtor.

Para cada $j \in \mathbf{I}$ definamos $\pi_j: L \Rightarrow Fj$ como la familia $\langle \pi_{j_x}: L(x) \to Fj(x) \rangle_{x \in \mathcal{X}}$ tal que

$$\pi_{j_y}: L(y) \to Fj(y), \quad \langle v_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \mapsto v_j$$

para toda $y \in \mathcal{X}$.

Sea $x \leq y \in X$. Veamos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} L(y) \arrow[r, "\pi_{j_y}"] \arrow[d] & Fj(y) \arrow[d] \\ L(x) \arrow[r, "\pi_{j_x}"'] & Fj(x), \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son restricciones, conmuta.

Sea $\langle v_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \in L(y)$. Entonces se tiene que

$$(\pi_{j_y}(\langle v_i \rangle_{i \in \mathbf{I}}))|_x = v_j|_x = \pi_{j_x}(\langle v_i|_x \rangle_{i \in \mathbf{I}}).$$

Por lo tanto $\pi_j : L \Rightarrow Fj$ es una transformación natural.

Veamos que $(L, \langle \pi_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ constituye un cono sobre F.

Para todo morfismo $a_{ij} : i \to j \in \mathbf{I}$, $Fa_{ij} : Fi \Rightarrow Fj$ es una transformación natural, así que basta ver que para toda $x \in \mathcal{X}$, el triángulo

$$\begin{tikzcd} & L(x) \arrow[dl, "\pi_{i_x}"'] \arrow[dr, "\pi_{j_x}"] & \\ Fi(x) \arrow[rr, "Fa_{ij_x}"'] & & Fj(x) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $\langle u_k \rangle_{k \in \mathbf{I}} \in L(x)$. Entonces se tiene que

$$Fa_{ij_x} \circ \pi_{i_x}(\langle u_k \rangle_{k \in \mathbf{I}}) = Fa_{ij_x}(u_i) = u_j = \pi_{j_x}(\langle u_k \rangle_{k \in \mathbf{I}}),$$

ya que $L(x) = \varprojlim Fi(x)$.

Finalmente, veamos que el cono $(L, \langle \pi_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ es límite sobre F.

Sea $(P, \langle \rho_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ otro cono sobre F. Definamos $\rho : P \Rightarrow L$ como la familia $\langle \rho_x : P(x) \to L(x) \rangle_{x \in \mathcal{X}}$ tal que

$$\rho_y : P(y) \to L(y), \quad v \mapsto \langle \rho_{i_y}(v) \rangle_{i \in \mathbf{I}}$$

para toda $y \in \mathcal{X}$. Como $(P, \langle \rho_i \rangle_{i \in \mathbf{I}})$ es un cono sobre F, cada ρ_y está bien definida.

Sea $x \leq y \in X$. Veamos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P(y) \arrow[r, "\rho_y"] \arrow[d] & L(y) \arrow[d] \\ P(x) \arrow[r, "\rho_x"'] & L(x), \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son restricciones, conmuta.

Sea $v \in P(y)$. Entonces se tiene que

$$(\rho_y(v))|_x = \langle \rho_{i_y}(v) \rangle_{i\in \mathbf{I}}|_x = \langle \rho_{i_y}(v)|_x \rangle_{i\in \mathbf{I}} = \langle \rho_{i_y}(v|_x) \rangle_{i\in \mathbf{I}} = \rho_y(v|_x),$$

ya que la penúltima desigualdad se porque cada ρ_i es natural para toda $i \in \mathbf{I}$.

Por lo tanto $\rho\colon P \Rightarrow L$ es una transformación natural.

Por último, veamos que para toda $j \in \mathbf{I}$, $\pi_j \circ \rho = \rho_j$. Para ello basta fijar $j \in \mathbf{I}$ y $x \in \mathcal{X}$ y ver que el triángulo

$$\begin{tikzcd} P(x) \arrow[rr, "\rho_x"] \arrow[dr, "\rho_{j_x}"'] & & L(x) \arrow[dl, "\pi_{j_x}"] \\ & Fj(x) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $u \in P(x)$. Entonces se tiene que

$$\pi_{j_x} \circ \rho_x(u) = \pi_{j_x}(\langle \rho_{i_x}(u) \rangle_{i\in \mathbf{I}}) = \rho_{j_x}(u).$$

Finalmente, como $(P(x), \langle \rho_{i_x} \rangle_{i\in I})$ es un cono sobre Fj y el triángulo anterior conmuta, se tiene que ρ_x es única. En consecuencia, ρ también lo es.

Por lo tanto la categoría $\mathbf{Con}^{\mathcal{X}}$ es completa y los límites se calculan puntualmente. ■

A continuación nos ocuparemos de un caso muy especial de conmutatividad entre ciertos límites y colímites que se satisface, en particular, en la categoría de conjuntos **Con**.

Definición 1.3.14. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *es* finita *si tanto el número de sus objetos como el de sus morfismos es finito.*

Definición 1.3.15. *Un límite sobre al funtor* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ *es* finito *si la categoría* $\mathbf{C}$ *es finita.*

Definición 1.3.16. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *es* filtrante *si*

1. $\mathbf{C}$ *es no vacía; es decir,* $|\mathbf{C}| \neq \emptyset$,

2. *para todo* $C_1, C_2 \in |\mathbf{C}|$, *existen* $C_3 \in |\mathbf{C}|$, $f\colon C_1 \to C_3$ *y* $g\colon C_2 \to C_3$,

3. *para todo* $C_1, C_2 \in |\mathbf{C}|$ *y para todo* $f, g\colon C_1 \to C_2$, *existen* $C_3 \in |\mathbf{C}|$ *y* $h\colon C_2 \to C_3$ *tales que* $h \circ f = h \circ g$.

El siguiente ejemplo será muy pertinente en los capítulos posteriores.

Ejemplo 1.3.17. *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$ *un punto. La categoría* $\mathcal{V}_x$ *es la categoría inducida por el conjunto parcialmente ordenado por inclusión de las vecindades de* x. *Sea* $\mathcal{V}_x^{op}$ *su categoría dual. Veamos que* $\mathcal{V}_x^{op}$ *es una categoría filtrante.*

Como el espacio X es una vecindad del punto x, se cumple la primera condición.

Sean U y V vecindades del punto x, entonces $U \cap V$ es una vecindad del punto x tal que $U \supset U \cap V$ y $V \supset U \cap V$ por lo que se cumple la segunda condición.

La tercera condición se cumple trivialmente al considerar como h al morfismo identidad del codominio de cualquier flecha de $\mathcal{V}_x^{op}$.

Definición 1.3.18. *Un colímite sobre al funtor $F: \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ es* filtrante *si la categoría $\mathbf{C}$ es filtrante.*

Antes que nada, probemos un lema útil.

Lema 1.3.19. *Sea $F: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ un funtor con $\mathbf{B}$ finita y $\mathbf{C}$ filtrante. Entonces existe un cocono sobre F en $\mathbf{C}$.*

Demostración. La prueba se sigue fácilmente si demostraremos las dos observaciones siguientes.

Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ un conjunto finito de objetos de $\mathbf{C}$. Veamos que es posible hallar un objeto C y morfismos $\{C_i \to C\}_{i \in I}$, haciendo inducción sobre el índice I.

Por la primera condición de la definición 1.3.16 se cumple la condición cuando I es vacío.

Sea $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Supongamos que existe un objeto C' y morfismos $\{c_{i_k}: C_{i_k} \to C'\}_{i_k \in I}$ con $k = 1, 2, ..., n-1$.

Por la segunda propiedad de la definición 1.3.16, aplicada a los objetos C' y C_{i_n}, sabemos que existen un objeto C y morfismos $c: C' \to C$ y $c_n: C_{i_n} \to C$. Entonces, el conjunto $\{c \circ c_{i_k}: C_{i_k} \to C\}_{i_k \in I} \cup \{c_n\}$ cumple la condición para I.

Sea $\{f_i: C \to C'\}_{i \in I}$ un conjunto finito de flechas paralelas en $\mathbf{C}$. Veamos que es posible hallar un objeto C'' de $\mathbf{C}$ y un morfismo $f: C' \to C''$ tal que $f \circ f_i = f \circ f_j$ para todo $i, j \in I$, haciendo inducción sobre el índice I.

Nuevamente, por la primera condición de la definición 1.3.16 se cumple la condición cuando I es vacío.

Sea $I = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Supongamos que existe un objeto C'' y un morfismo $f: C' \to C''$ tal que $f \circ f_{i_k} = f \circ f_{i_{k'}}$ para todo $i_k, i_{k'} \in I$ con $k = 1, 2, ..., n-1$.

Por la tercera propiedad de la definición 1.3.16, aplicada a las flechas paralelas $f \circ f_1, f \circ f_n: C \to C''$, sabemos que existen un objeto C''' y un morfismo $f': C'' \to C'''$ tal que $f' \circ f \circ f_1 = f' \circ f \circ f_n$. Entonces, el morfismo $f' \circ f: C' \to C'''$ cumple la condición para I. ■

Sea $D: \mathbf{I} \times \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un funtor con $\mathbf{I}$ una categoría filtrante, $\mathbf{J}$ una categoría finita y $\mathbf{A}$ una categoría con límites finitos y colímites filtrantes.

Fijemos $I \in \mathbf{I}$ y definamos $D(I, \_): \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[d, "j"'] & D(I,J) \arrow[d, "D(1_I,j)"] \\ J' \arrow[r, phantom, "\longmapsto" description, shift left=4ex] & D(I,J') \end{tikzcd}$$

para cada $J \in \mathbf{J}$ y para cada $j: J \to J' \in \mathbf{J}$. De esta manera, $D(I, \_): \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ es un funtor ya que $D: \mathbf{I} \times \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ lo es.

Como $\mathbf{J}$ es una categoría finita y $\mathbf{A}$ tiene límites finitos podemos tomar el límite del funtor $D(I, \_): \mathbf{J} \to \mathbf{A}$.

Ahora fijemos un morfismo $i: I \to I' \in \mathbf{I}$. Para cada $J \in \mathbf{J}$ tenemos la composición

$$\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J) \xrightarrow{\pi_J} D(I, J) \xrightarrow{D(i, 1_J)} D(I', J),$$

donde π_J es la proyección del límite $\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J)$ correspondiente al objeto J.

Veamos que $(\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J), \langle D(i, 1_J) \circ \pi_J \rangle_{J \in \mathbf{J}})$ es un cono sobre el funtor $D(I', \_)$.

Para cada $j: J \to J' \in \mathbf{J}$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J) \arrow[dl, "\pi_J"'] \arrow[dr, "\pi_{J'}"] & \\
D(I, J) \arrow[rr, "D(1_I, j)"] \arrow[d, "D(i, 1_J)"'] & & D(I, J') \arrow[d, "D(i, 1_{J'})"] \\
D(I', J) \arrow[rr, "D(1_{I'}, j)"'] & & D(I', J').
\end{tikzcd}$$

El triángulo del diagrama conmuta ya que es parte del cono límite sobre $D(I, \_)$. Como las composición en $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$ es puntual y D es un funtor, se tiene

$$D(i, 1_{J'}) \circ D(1_I, j) = D(i, j) = D(1_{I'}, j) \circ D(i, 1_J),$$

por lo que el cuadrado también conmuta.

Por lo tanto, como $\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I', J)$ es el límite sobre el funtor $D(I', \_)$, existe un único morfismo $l_i: \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J) \to \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I', J)$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J) \arrow[r, "\pi_J"] \arrow[d, dashed, "l_i"'] & D(I, J) \arrow[d, "D(i, 1_J)"] \\
\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I', J) \arrow[r, "\pi'_J"'] & D(I', J)
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

conmuta para todo $J \in \mathbf{J}$.

Esto define un funtor $\mathbf{I} \to \mathbf{A}$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "i"'] & \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J) \arrow[d, "l_i"] \\
I' & \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J').
\end{tikzcd} \qquad \longmapsto$$

Como $\mathbf{I}$ es una categoría filtrante y $\mathbf{A}$ tiene colímites filtrantes podemos tomar el colímite de dicho funtor; es decir, $\varinjlim_{\mathbf{I}}\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I,J)$.

Análogamente, si fijamos primero un objeto $J \in \mathbf{J}$ y después un morfismo $j\colon J \to J'$, obtendríamos $\varprojlim_{\mathbf{J}}\varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J)$.

Construyamos un morfismo φ entre estos dos objetos de la manera natural; esto es, a través de los conos y coconos que sugiere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathbf{I}}\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I,J) \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & \varprojlim_{\mathbf{J}}\varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J) \arrow[d, "\Pi_{J_0}"] \\
\varprojlim_{\mathbf{J}} D(I_0,J) \arrow[u, "\Sigma_{I_0}"] \arrow[urr, dotted, "P_{I_0}"] \arrow[dr, "\pi_{J_0}"'] & & \varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J_0) \\
& D(I_0,J_0). \arrow[ur, "\sigma_{I_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.3.20. *Decimos que* colímites filtrantes conmutan con límites finitos *en* $\mathbf{A}$ *si el morfismo* φ *construido anteriormente es un isomorfismo.*

Lema 1.3.21. *En* **Con***, colímites filtrantes conmutan con límites finitos.*

Demostración. Describiendo explícitamente a φ en **Con** tenemos

$$\varphi([\langle x_J \in D(I_0,J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}) = \langle [x_J \in D(I_0,J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}}. \tag{1.6}$$

Veamos que φ es sobre.

Sea $\langle [x_J \in D(I_J,J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}} \in \varprojlim_{\mathbf{J}}\varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J)$; esto es, una familia compatible en el sentido de que para cada morfismo $j\colon J \to J' \in \mathbf{J}$, el correpondiente morfismo c_j, inducido por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J) \arrow[d, dashed, "c_j"'] & D(I_J,J) \arrow[l, "\sigma_{I_J}"'] \arrow[d, "D(1_{I_J},j)"] \\
\varinjlim_{\mathbf{I}} D(I,J') & D(I_J,J'), \arrow[l, "\sigma'_{I_J}"]
\end{tikzcd}$$

análogo al diagrama (1.5), es tal que $c_j([x_J \in D(I_J,J)]_{\mathbf{I}}) = [x_{J'} \in D(I_{J'},J')]_{\mathbf{I}}$ y al usar la descripción explícita de c_j tenemos que

$$[D(1_{I_J},j)(x_J) \in D(I_J,J')]_{\mathbf{I}} = [x_{J'} \in D(I_{J'},J')]_{\mathbf{I}}.$$

Como $\mathbf{I}$ es una categoría filtrante, para todo $j\colon J \to J' \in \mathbf{J}$ y sus correspondientes $I_J, I_{J'} \in \mathbf{I}$, existen $K_j \in \mathbf{I}$, $f_j\colon I_J \to K_j$ y $g_j\colon I_{J'} \to K_j$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] I_J \arrow[dr, "f_j"] & \\ & K_j, \\ I_{J'} \arrow[ur, "g_j"'] & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

tales que

$$D(f_j, 1_{J'})D(1_{I_J}, j)(x_J) = D(g_j, 1_{J'})(x_{J'}). \tag{1.8}$$

Como $\mathbf{J}$ es finita, unir los diagramas (1.7), correspondientes a todos los morfismos $j: J \to J' \in \mathbf{J}$, resulta un diagrama finito en $\mathbf{I}$. Por el lema 1.3.19, dicho diagrama tiene un cocono en $\mathbf{I}$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] I_{J_1} \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] & & \\ & K_{j_1} \arrow[dr] & \\ I_{J_2} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & \vdots & I_0. \\ \vdots & K_{j_m} \arrow[ur] & \\ I_{J_n} \arrow[ur] \arrow[uurr, bend right] & & \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

A los morfismos de este cono con codominio I_0 los llamaremos h y tendrán el mismo subíndice que su dominio, por ejemplo $h_J : I_J \to I_0$ o $h_j : K_j \to I_0$.

Ahora, consideremos la familia $\langle D(h_J, 1_J)(x_J) \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}$ y veamos que es compatible; es decir, que para cada $j: J \to J' \in \mathbf{J}$ se tiene que

$$D(1_{I_0}, j)D(h_J, 1_J)(x_J) = D(h_{J'}, 1_{J'})(x_{J'}).$$

Sea $j: J \to J' \in \mathbf{J}$. Aplicando el morfismo $D(h_j, 1_{J'})$ a la igualdad (1.8) se tiene

$$D(h_j, 1_{J'})D(f_j, 1_{J'})D(1_{I_J}, j)(x_J) = D(h_j, 1_{J'})D(g_j, 1_{J'})(x_{J'}).$$

Observemos la parte del cocono (1.9) correspondiente al morfismo $j: J \to J'$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] I_J \arrow[dr, "f_j"] \arrow[drr, bend left, "h_J"] & & \\ & K_j \arrow[r, "h_j"] & I_0. \\ I_{J'} \arrow[ur, "g_j"'] \arrow[urr, bend right, "h_{J'}"'] & & \end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad de este diagrama se tiene que la ecuación anterior es igual a

$$D(h_J, 1_{J'})D(1_{I_J}, j)(x_J) = D(h_{J'}, 1_{J'})(x_{J'}).$$

Finalmente, reescribimos la parte derecha de esta ecuación, recordando que para todo morfismo $m\colon M \to M'$ se tiene que $1_{M'} \circ m = m \circ 1_M$, con lo que obtenemos

$$D(1_{I_0}, j)D(h_J, 1_J)(x_J) = D(h_{J'}, 1_{J'})(x_{J'}).$$

Por lo tanto $\langle D(h_J, 1_J)(x_J) \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}} \in \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I_0, J)$.

Resta demostrar que

$$\varphi([\langle D(h_J, 1_J)(x_J) \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}) = \langle [x_J \in D(I_J, J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}}.$$

Por (1.6), esto es equivalente a

$$\langle [D(h_J, 1_J)(x_J) \in D(I_0, J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}} = \langle [x_J \in D(I_J, J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}}.$$

Pero esto último es cierto ya que para cada $J \in \mathbf{J}$, es claro que

$$[D(h_J, 1_J)(x_J) \in D(I_0, J)]_{\mathbf{I}} = [x_J \in D(I_J, J)]_{\mathbf{I}}.$$

Por lo tanto φ es sobre.

Veamos que φ es mono. Sean $[\langle x_J \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}, [\langle y_J \in D(I_1, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}} \in \varinjlim_{\mathbf{I}} \varprojlim_{\mathbf{J}} D(I, J)$ tales que

$$\varphi([\langle x_J \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}) = \varphi([\langle y_J \in D(I_1, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}).$$

Por (1.6), esto es igual a

$$\langle [x_J \in D(I_0, J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}} = \langle [y_J \in D(I_1, J)]_{\mathbf{I}}\rangle_{\mathbf{J}};$$

es decir, para cada $J \in \mathbf{J}$

$$[x_J \in D(I_0, J)]_{\mathbf{I}} = [y_J \in D(I_1, J)]_{\mathbf{I}}.$$

Como $\mathbf{I}$ es una categoría filtrante, para todo $J \in \mathbf{J}$ existen $K_J \in \mathbf{I}$, $f_J\colon I_0 \to K_J$ y $g_J\colon I_1 \to K_J$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} I_0 \arrow[dr, "f_J"] & \\ & K_J, \\ I_1 \arrow[ur, "g_J"'] & \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

tales que

$$D(f_J, 1_J)(x_J) = D(g_J, 1_J)(y_J). \tag{1.11}$$

Como **J** es finita, unir los diagramas (1.10), correspondientes a todos los objetos $J \in \mathbf{J}$, resulta un diagrama finito en **I**. Por el lema 1.3.19, dicho diagrama tiene un cocono en **I**, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[dr] \arrow[dddr] \arrow[ddrr, bend left, "f"] & & \\
& K_{J_1} \arrow[dr] & \\
& \vdots & I, \\
& K_{J_m} \arrow[ur] & \\
I_1 \arrow[uuur] \arrow[ur] \arrow[uurr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.12}$$

donde llamaremos h_J a los morfismos $K_J \to I$.

Para demostrar que $[\langle x_J \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}} = [\langle y_J \in D(I_1, J)\rangle_{\mathbf{J}}]_{\mathbf{I}}$ basta demostrar que

$$l_f(\langle x_J \in D(I_0, J)\rangle_{\mathbf{J}}) = l_g(\langle y_J \in D(I_1, J)\rangle_{\mathbf{J}}),$$

donde tanto l_f como l_g se inducen como en (1.5), por lo que esto último es equivalente a

$$\langle D(f, 1_J)(x_J) \in D(I, J)\rangle_{\mathbf{J}} = \langle D(g, 1_J)(y_J) \in D(I, J)\rangle_{\mathbf{J}}.$$

Sea $J \in \mathbf{J}$. Observemos la parte del cocono (1.12) que corresponde al objeto J

$$\begin{tikzcd}
I_0 \arrow[dr, "f_J"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& K_J \arrow[r, "h_J"] & I. \\
I_1 \arrow[ur, "g_J"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces, por la conmutatividad de este diagrama y usando (1.11) en la igualdad del centro, tenemos

$$\begin{aligned}
D(f, 1_J)(x_J) &= D(h_J, 1_J)D(f_J, 1_J)(x_J) = \\
&= D(h_J, 1_J)D(g_J, 1_J)(y_J) = D(g, 1_J)(x_J).
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es mono. ■

1.4 Adjunciones

Es importante establecer la noción de cuándo dos categorías son equivalentes y esto se logra a través de la idea de "funtores adjuntos".

Definición 1.4.1. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{X}$ *categorías. Una* adjunción *entre* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{A}$ *es una tríada* $\langle F, G, \phi\rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ *donde* F *y* G *son funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{A} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd},$$

mientras que ϕ *es una función que asigna a cada par de objetos* $X \in \mathbf{X}$, $A \in \mathbf{A}$ *una biyección*

$$\phi = \phi_{X,A} : \mathbf{A}(FX, A) \cong \mathbf{X}(X, GA)$$

que es natural en X *y en* A.

Dada una adjunción, se dice que el funtor F es el *adjunto izquierdo* de G, mientras que G es llamado el *adjunto derecho* de F y se abrevia $F \dashv G$.

Lema 1.4.2. *Sean funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{A} \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[r, shift left, "F'"] & \mathbf{Y} \arrow[l, shift left, "G'"] \end{tikzcd}.$$

Si F *es adjunto izquierdo de* G *y* F' *es adjunto izquierdo de* G' *entonces* $F' \circ F$ *es adjunto izquierdo de* $G \circ G'$.

Demostración. Como $F \dashv G$, para todo $X \in \mathbf{X}$ y $A \in \mathbf{A}$ se tiene que

$$\mathbf{X}(X, GA) \cong \mathbf{A}(FX, A). \tag{1.13}$$

Como $F' \dashv G'$, para todo $A \in \mathbf{A}$ y $Y \in \mathbf{Y}$ se tiene que

$$\mathbf{A}(A, G'Y) \cong \mathbf{Y}(F'A, Y). \tag{1.14}$$

Sean $X \in \mathbf{X}$ y $Y \in \mathbf{Y}$. Si primero evaluamos (1.13) en los objetos $X \in \mathbf{X}$ y $G'Y \in \mathbf{A}$ y después evaluamos (1.14) en los objetos $FX \in \mathbf{A}$ y $Y \in \mathbf{Y}$, tenemos que

$$\mathbf{X}(X, G(G'Y)) \cong \mathbf{A}(FX, G'Y) \cong \mathbf{Y}(F'(FA), Y).$$

Por lo tanto, $F' \circ F \dashv G \circ G'$. ∎

Lema 1.4.3. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son categorías con objeto inicial entonces el funtor* $\sigma_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, *tal que* $A \mapsto (A, 0)$ *y* $f \mapsto (f, 1_0)$, *es adjunto izquierdo de la proyección* $\pi_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{A}$ y $(X, Y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

$$\begin{array}{cl} \sigma_{\mathbf{A}}(A) \to (X, Y) & \\ \hline (A, 0) \to (X, Y) & \text{def. de } \sigma_{\mathbf{A}} \\ \hline A \to X & 0 \text{ es inicial} \\ \hline A \to \pi_{\mathbf{A}}(X, Y) & \text{def. de } \pi_{\mathbf{A}}. \end{array}$$

Por lo tanto $\sigma_{\mathbf{A}} \dashv \pi_{\mathbf{A}}$. ∎

Lema 1.4.4. *Sean* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *categorías con sumas finitas y funtores* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$, $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$, *el funtor* $\langle F, G\rangle\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *tiene adjunto izquierdo si y solo si ambos funtores* F *y* G *tienen adjunto izquierdo.*

Demostración. Supongamos que el funtor $L\colon \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es tal que $L \dashv \langle F, G\rangle$. Sabemos que $F = \pi_{\mathbf{A}} \circ \langle F, G\rangle$. Por los lemas 1.4.2 y 1.4.3, $L \circ \sigma_{\mathbf{A}}$ es su adjunto izquierdo. De manera análoga $L \circ \sigma_{\mathbf{B}} \dashv \pi_{\mathbf{B}} \circ \langle F, G\rangle = G$.

Supongamos ahora que existen funtores $L_1\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $L_2\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tales que $L_1 \dashv F$, $L_2 \dashv G$. Definamos el funtor $L\colon \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ como

$$(A, B) \mapsto L_1(A) + L_2(B), \quad (f, g) \mapsto L_1(f) + L_2(g).$$

Sean $(A, B) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $C \in \mathbf{C}$, entonces

$$\begin{array}{c|l}
L(A,B) \to C & \\
\hline
L_1(A) + L_2(B) \to C & \text{def. de } L \\
\hline
L_1(A) \to C, \quad L_2(B) \to C & \text{suma} \\
\hline
A \to F(C), \quad B \to G(C) & L_1 \dashv F,\ L_2 \dashv G \\
\hline
(A,B) \to (F(C), G(C)) & \text{def. de } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
\hline
(A,B) \to \langle F, G\rangle(C) & \text{def. de } \langle F, G\rangle.
\end{array}$$

Por lo tanto $L \dashv \langle F, G\rangle$. ■

Retomando la definición de adjunción, la naturalidad de la biyección ϕ quiere decir que para cualesquiera morfismos $h\colon X' \to X \in \mathbf{X}$ y $k\colon A \to A' \in \mathbf{A}$ los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(FX, A) \arrow[r, "\phi_{X,A}"] \arrow[d, "\mathbf{A}(Fh,A)"'] & \mathbf{X}(X, GA) \arrow[d, "\mathbf{X}(h,GA)"] \\
\mathbf{A}(FX', A) \arrow[r, "\phi_{X',A}"'] & \mathbf{X}(X', GA),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(FX, A) \arrow[r, "\phi_{X,A}"] \arrow[d, "\mathbf{A}(FX,k)"'] & \mathbf{X}(X, GA) \arrow[d, "\mathbf{X}(X,Gk)"] \\
\mathbf{A}(FX, A') \arrow[r, "\phi_{X,A'}"'] & \mathbf{X}(X, GA')
\end{tikzcd}$$

conmutan.

En otras palabras, para cualquier $f\colon FX \to A$ se cumple que

$$\phi(f \circ Fh) = \phi f \circ h, \quad \phi(k \circ f) = Gk \circ \phi f. \tag{1.15}$$

Además, es equivalente pedir que ϕ^{-1} sea natural; es decir, que para cualesquiera morfismos $h\colon X' \to X \in \mathbf{X}$, $k\colon A \to A' \in \mathbf{A}$ y $g\colon X \to GA$ se cumple que

$$\phi^{-1}(g \circ h) = \phi^{-1} g \circ Fh, \quad \phi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \phi^{-1} g. \tag{1.16}$$

Consideremos el caso particular

$$\phi_{X,FX}\colon \mathbf{A}(FX, FX) \cong \mathbf{X}(X, GFX).$$

Definiremos η_X como $\phi(1_{FX})\colon X \to GFX$ para cada $X \in \mathbf{X}$.

Lema 1.4.5. *La familia $\langle \eta_X : X \to GFX \rangle_{X \in \mathbf{X}}$ define una transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{X}} \Rightarrow GF$.*

Demostración. Sea $h : X' \to X \in \mathbf{X}$. Basta demostrar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\eta_{X'}"] \arrow[d, "h"'] & GFX' \arrow[d, "GFh"] \\ X \arrow[r, "\eta_X"'] & GFX \end{tikzcd}$$

conmuta.

Al aplicar la definición de η y las igualdades (1.15) se tiene que

$$\begin{aligned} GFh \circ \eta_{X'} &= GFh \circ \phi(1_{FX'}) = \phi(Fh \circ 1_{FX'}) = \\ &= \phi(1_{FX} \circ Fh) = \phi(1_{FX}) \circ h = \eta_X \circ h. \end{aligned}$$

■

Definición 1.4.6. *La transformación natural $\eta : 1_{\mathbf{X}} \Rightarrow GF$, definida como arriba, es llamada la* unidad *de la adjunción $\langle F, G, \phi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$.*

Ahora consideremos el caso particular

$$\phi_{GA,A} : \mathbf{A}(FGA, A) \cong \mathbf{X}(GA, GA).$$

Definiremos ε_A como $\phi^{-1}(1_{GA}) : FGA \to A$ para cada $A \in \mathbf{A}$.

Lema 1.4.7. *La familia $\langle \varepsilon_A : FGA \to A \rangle_{A \in \mathbf{A}}$ define una transformación natural $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathbf{A}}$.*

Demostración. Sea $k : A \to A' \in \mathbf{A}$. Basta demostrar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} FGA \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "FGk"'] & A \arrow[d, "k"] \\ FGA' \arrow[r, "\varepsilon_{A'}"'] & A' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Al aplicar la definición de ε y las igualdades (1.16) se tiene que

$$\begin{aligned} k \circ \varepsilon_A &= k \circ \phi^{-1}(1_{GA}) = \phi^{-1}(Gk \circ 1_{GA}) = \\ &= \phi^{-1}(1_{GA'} \circ Gk) = \phi^{-1}(1_{GA'}) \circ FGk = \varepsilon_{A'} \circ FGk. \end{aligned}$$

■

Definición 1.4.8. *La transformación natural $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathbf{A}}$, definida como arriba, es llamada la* counidad *de la adjunción $\langle F, G, \phi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$.*

Definición 1.4.9. *Diremos que las categorías* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}$ *son* equivalentes *si existe una adjunción* $\langle T, S, \eta, \varepsilon\rangle : \mathbf{C} \rightharpoonup \mathbf{A}$ *tal que su unidad y counidad sean isomorfismos naturales. A los funtores* T *y* S *se les conoce como una* equivalencia de categorías.

Para rematar esta sección, demostraremos un par de resultados relevantes para retículas.

Lema 1.4.10. *Sean* $(X, \leq)$ *y* $(Y, \leq)$ *retículas. El funtor* $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *tiene adjunto derecho si y solo si* F *preserva supremos arbitrarios.*

Demostración. Supongamos que existe $G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que $F \dashv G$. Esto es equivalente a

$$X \leq GY \text{ si y solo si } FX \leq Y \tag{1.17}$$

para todo $X \in \mathcal{X}$ y para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

Sean $\bigvee_{i\in I} X_i$ un supremo en $\mathcal{X}$. Entonces $X_i \leq \bigvee_{i\in I} X_i$ para todo $i \in I$. Como F es un funtor, $FX_i \leq F(\bigvee_{i\in I} X_i)$ para todo $i \in I$. Entonces

$$\bigvee_{i\in I} FX_i \leq F\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right).$$

Sabemos que

$$FX_i \leq \bigvee_{i\in I} FX_i$$

para todo $i \in I$. Aplicando la equivalencia (1.17) a los objetos $X_i \in \mathcal{X}$ y $\bigvee_{i\in I} FX_i \in \mathcal{Y}$ tenemos que

$$X_i \leq G\left(\bigvee_{i\in I} FX_i\right)$$

para todo $i \in I$. Entonces

$$\bigvee_{i\in I} X_i \leq G\left(\bigvee_{i\in I} FX_i\right).$$

Nuevamente, al aplicar la equivalencia (1.17) a los objetos $\bigvee_{i\in I} X_i \in \mathcal{X}$ y $\bigvee_{i\in I} FX_i \in \mathcal{Y}$ concluimos que

$$F\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right) \leq \bigvee_{i\in I} FX_i.$$

Por lo tanto

$$F\left(\bigvee_{i\in I} X_i\right) = \bigvee_{i\in I} FX_i.$$

Supongamos ahora que F preserva supremos arbitrarios.

Sea $Y \in \mathcal{Y}$. Hagamos

$$GY = \bigvee_{FX \leq Y} X.$$

Sea $Y' \leq Y \in \mathcal{Y}$. Es claro que si $F(X) \leq Y'$ entonces $F(X) \leq Y'$. Así que

$$GY' = \bigvee_{FX \leq Y'} X \leq \bigvee_{FX \leq Y} X = GY$$

Con esta definición tenemos un funtor $G: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

Demostremos que

$$X \leq GY \text{ si y solo si } FX \leq Y$$

para todo $X \in \mathcal{X}$ y para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

Sea $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Supongamos que $X \leq GY$. Por definición de G, ésto es igual a

$$X \leq \bigvee_{FX \leq Y} X.$$

Como F es un funtor que preserva supremos arbitrarios, se tiene

$$FX \leq \bigvee_{FX \leq Y} FX \leq Y,$$

donde la desigualdad de la derecha es obvia.

Por otro lado, supongamos que $FX \leq Y$. Como G es un funtor, se tiene $GFX \leq GY$ Por definición de G, ésto es igual a

$$X = \bigvee_{FX' \leq FX} X' \leq GY,$$

donde la igualdad de la izquierda es obvia. ■

Por dualidad, también a quedado demostrado que

Lema 1.4.11. *Sean $(X, \leq)$ y $(Y, \leq)$ retículas. El funtor $F: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tiene adjunto izquierdo si y solo si F preserva ínfimos arbitrarios.* ■

1.5 Extensiones de Kan

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos categorías pequeñas y un funtor $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ entre ellas. En esta sección veremos que el funtor

$$\_ \circ F: \mathbf{C}^{\mathbf{B}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{A}}, \quad H \mapsto H \circ F,$$

donde $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ es como en la proposición 1.1.10, tiene adjunto izquierdo siempre que $\mathbf{C}$ sea cocompleta. En particular, por el lema 1.3.12, esto se cumple si $\mathbf{C} = \mathbf{Con}$.

Definición 1.5.1. *Sean $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ y $G:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ dos funtores.* La extensión de Kan izquierda *de G a lo largo de F, si existe, es la pareja*

$$(K:\mathbf{B}\to\mathbf{C}, \alpha: G\Rightarrow K\circ F),$$

con K funtor y α transformación natural, tal que para cualquier otra pareja $(H:\mathbf{B}\to\mathbf{C}, \beta: G\Rightarrow H\circ F)$, con H funtor y β transformación natural,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathbf{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dl, bend left, "H"] \\ \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

existe una única transformación natural $\gamma: K\Rightarrow H$ tal que $(\gamma\circ F)\alpha=\beta$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta"'] & K\circ F \arrow[d, Rightarrow, "\gamma\circ F"] \\ & H\circ F. \end{tikzcd}$$

Al funtor K se le suele denotar como $Ian_F G$.

Lema 1.5.2. *Sean $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ y $G:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ dos funtores. Si la categoría $\mathbf{A}$ es pequeña y la categoría $\mathbf{C}$ es cocompleta entonces la extensión de Kan izquierda de G a lo largo de F existe.*

Demostración. Construyamos una pareja $(K:\mathbf{B}\to\mathbf{C}, \alpha: G\Rightarrow K\circ F)$ que cumpla con la definición 1.5.1.

Sea $B\in\mathbf{B}$. Construyamos la categoría $\mathcal{E}_B$ de la siguiente manera:

Los objetos de $\mathcal{E}_B$ serán parejas (A,a) tales que $A\in\mathbf{A}$ y $a\in\mathbf{B}(FA,B)$.

Un morfismo $f:A\to A'\in\mathbf{A}$ será un morfismo $f:(A,a)\to(A',a')\in\mathcal{E}_B$ si el diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "a"'] & & FA' \arrow[dl, "a'"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{1.18}$$

conmuta; es decir, si $a=a'\circ Ff$.

Como $\mathbf{A}$ es una categoría pequeña, entonces $\mathcal{E}_B$ también lo es.

Sea $\phi_B:\mathcal{E}_B\to\mathbf{A}$ el funtor que olvida; es decir, el funtor tal que

$$\phi_B((A,a))=A, \quad \phi_B(f)=f$$

para cada $(A,a)\in\mathcal{E}_B$ y para cada $f\in\mathcal{E}_B$.

Como $\mathbf{C}$ es cocompleta, existe el cocono colímite

$$\langle s^B_{(A,a)} : GA \to KB \rangle_{(A,a) \in \mathcal{E}_B}$$

del funtor $G \circ \phi_B$; es decir, $KB = \varinjlim_{\mathcal{E}_B} GA$. Esto define a K en los objetos.

Sea $g : B \to B' \in \mathbf{B}$. Sea $f : (A, a) \to (A', a')$ un morfismo de $\mathcal{E}_B$, claramente $f : (A, g \circ a) \to (A, g \circ a')$ es un morfismo de $\mathcal{E}_{B'}$. Entonces $(KB', \langle s^{B'}_{(A, g \circ a)} \rangle)$ es un cocono sobre $G \circ \phi_B$.

Por lo tanto existe un único morfismo $Kg : KB \to KB'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} KB \arrow[rr, dashed, "Kg"] & & KB' \\ & GA \arrow[ul, "s^B_{(A,a)}"] \arrow[ur, "s^{B'}_{(A,g \circ a)}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.19}$$

conmuta para todo $(A, a) \in \mathcal{E}_B$. Esto define a K en los morfismos y la unicidad de cada Kg nos indica que K es un funtor.

Consideremos la familia $\langle s^{FA}_{(A, 1_{FA})} : GA \to KFA \rangle_{A \in \mathbf{A}}$ y un morfismo cualquiera $b : A \to A' \in \mathbf{A}$. Veamos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "s^{FA}_{(A,1_{FA})}"] \arrow[d, "Gb"'] & KFA \arrow[d, "KFb"] \\ GA' \arrow[r, "s^{FA'}_{(A',1_{FA'})}"'] & KFA' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por la definición de K en los morfismos tenemos que

$$KFb \circ s^{FA}_{(A, 1_{FA})} = s^{FA'}_{(A, Fb)}.$$

Como $b : (A, Fb) \to (A', 1_{FA'}) \in \mathcal{E}_{FA'}$ y KFA' es un cocono indexado por los elementose de $\mathcal{E}_{FA'}$ tenemos que

$$s^{FA'}_{(A, Fb)} = s^{FA'}_{(A', 1_{FA'})} \circ Gb.$$

Por lo tanto la familia $\langle \alpha_A = s^{FA}_{(A, 1_{FA})} \rangle_{A \in \mathbf{A}}$ define una transformación natural $\alpha : G \Rightarrow K \circ F$.

Sea $(K : \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \beta : G \Rightarrow H \circ F)$ una pareja.

Sean $B \in \mathbf{B}$ y $f : (A, a) \to (A', a')$ un morfismo en $\mathcal{E}_B$. El diagrama

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[dd, "Gf"'] & HFA \arrow[dd, "HFf"'] \arrow[dr, "Ha"] & \\ & & HB \\ GA' \arrow[r, "\beta_{A'}"'] & HFA' \arrow[ur, "Ha'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta ya que sus partes lo hacen: el cuadrado por naturalidad de β y el triángulo porque es la imagen bajo el funtor H del diagrama (1.18) correspondiente a f.

Por lo tanto $(HB, \langle Ha \circ \beta_A\rangle_{(A,a)\in\mathcal{E}_B})$ es un cono sobre $G \circ \phi_B$.

Entonces existe un único morfismo $\gamma_B : KB \to HB$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} KB \arrow[r, dashed, "\gamma_B"] & HB \\ GA \arrow[u, "s^B_{(A,a)}"] \arrow[r, "\beta_A"'] & HFA \arrow[u, "Ha"'] \end{tikzcd} \tag{1.20}$$

conmuta para todo objeto $(A, a) \in \mathcal{E}_B$.

Sea $g: B \to B' \in \mathbf{B}$. Para ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} KB \arrow[r, "\gamma_B"] \arrow[d, "Kg"'] & HB \arrow[d, "Hg"] \\ KB' \arrow[r, "\gamma_{B'}"'] & HB' \end{tikzcd}$$

conmuta, basta ver que conmuta antecedido por el morfismo $s^B_{(A,a)} : GA \to KB$ para cualquier $(A, a) \in \mathcal{E}_B$, ya que $KB = \varinjlim_{\mathcal{E}_B} GA$.

Por el diagrama (1.20) y como H es funtor tenemos que

$$Hg \circ \gamma_B \circ s^B_{(A,a)} = Hg \circ Ha \circ \beta_A = H(g \circ a) \circ \beta_A.$$

Nuevamente por el diagrama (1.20) correspondiente al objeto $(A, g\circ a) \in \mathcal{E}_{B'}$ tenemos que

$$H(g \circ a) \circ \beta_A = \gamma_{B'} \circ s^{B'}_{(A,g\circ a)}.$$

Finalmente, por la definición del funtor K en los morfismos (1.19), tenemos que

$$\gamma_{B'} \circ s^{B'}_{(A,g\circ a)} = \gamma_{B'} \circ Kg \circ s^B_{(A,a)}.$$

Por lo tanto $Hg \circ \gamma_B = \gamma_{B'} \circ Kg$. Así que la familia $\langle \gamma_B : KB \to HB\rangle_{B\in\mathbf{B}}$ constituye una transformación natural $\gamma: K \Rightarrow H$.

Sea $A \in \mathbf{A}$. El diagrama conmutativo (1.20) correspondiente al objeto $(A, 1_{FA}) \in \mathcal{E}_{FA}$ es

$$\begin{tikzcd} KFA \arrow[r, "\gamma_{FA}"] & HFA \\ GA \arrow[u, "s^{FA}_{(A,1_{FA})}"] \arrow[r, "\beta_A"'] & HFA. \arrow[u, "H1_{FA}"'] \end{tikzcd}$$

Como $\alpha_A = s^{FA}_{(A,1_{FA})}$, el diagrama anterior es igual a

$$\begin{tikzcd} KFA \arrow[r, "\gamma_{FA}"] & HFA \\ GA. \arrow[u, "\alpha_A"] \arrow[ur, "\beta_A"'] & \end{tikzcd}$$

Así que $(\gamma \circ F)\alpha = \beta$.

Por lo tanto la extensión de Kan izquierda de F a lo largo de G existe. ■

Continuemos trabajando con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías pequeñas y $\mathbf{C}$ una categoría cocompleta. Consideremos el funtor $\_ \circ F: \mathbf{C}^{\mathbf{B}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ definido como

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"'] & L \circ F \arrow[d, Rightarrow, "\lambda \circ F"] \\ L' \arrow[r, phantom, ""] & L' \circ F \end{tikzcd} \qquad \lambda \longmapsto \lambda \circ F$$

Conservando la notación de la definición 1.5.1 definamos el funtor

$$Ian_F\_ : \mathbf{C}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, Rightarrow, "\mu"'] & Ian_F M \arrow[d, Rightarrow, "\gamma_\mu"] \\ M' & Ian_F M', \end{tikzcd} \qquad \mu \longmapsto \gamma_\mu$$

donde $Ian_F M$ es el funtor de la pareja $(Ian_F M: \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \alpha_M : M \Rightarrow Ian_F M \circ F)$ que se construye como en el lema 1.5.2.

Como $(Ian_F M': \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \alpha_{M'} \circ \mu : M \Rightarrow Ian_F M' \circ F)$ es otra pareja, se tiene que $\gamma_\mu : Ian_F M \Rightarrow Ian_F M'$ es la única transformación natural tal que $(\gamma_\mu \circ F)\alpha_M = \alpha_{M'}$.

Una vez construidos estos funtores, veamos el siguiente lema.

Lema 1.5.3. *Sean $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y $\mathbf{C}$ una categoría. Si la categoría $\mathbf{A}$ es pequeña y la categoría $\mathbf{C}$ es cocompleta entonces el funtor $Ian_F\_$ es adjunto izquierdo del funtor $\_ \circ F$.*

Demostración. Sean $M: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ y $L: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$.

Veamos que $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}(M, L \circ F) \cong \mathbf{C}^{\mathbf{B}}(Ian_F M, L)$.

Sea $\tau: M \Rightarrow L \circ F$. Entonces, como $(L: \mathbf{B} \to \mathbf{C}, \tau: M \Rightarrow L \circ F)$ es una pareja, por la definición 1.5.1 existe una única función $\gamma^\tau : Ian_F M \Rightarrow L$ tal que $(\gamma^\tau \circ F)\alpha_M = \tau$. Esto define una función

$$\mathbf{C}^{\mathbf{A}}(M, L \circ F) \to \mathbf{C}^{\mathbf{B}}(Ian_F M, L), \quad \tau \mapsto \gamma^\tau.$$

En sentido inverso, definimos

$$\mathbf{C}^{\mathbf{B}}(Ian_F M, L) \to \mathbf{C}^{\mathbf{A}}(M, L \circ F), \quad \rho \mapsto (\rho \circ F)\alpha_M.$$

Veamos que estas funciones constituyen un isomorfismo.

Sea $\tau \colon M \Rightarrow L \circ F$. Al aplicarle ambas funciones a τ tenemos $(\gamma^\tau \circ F)\alpha_M$ y por definición de γ^τ se tiene que $\tau = (\gamma^\tau \circ F)\alpha_M$.

Sea $\rho \colon Ian_F M \Rightarrow L$. Aplicarle ambas funciones a ρ nos da como resultado $\gamma^{(\rho \circ F)\alpha_M}$. Como $(\rho \circ F)\alpha_M = (\rho \circ F)\alpha_M$, por unicidad de $\gamma^{(\rho \circ F)\alpha_M}$, se tiene que $\rho = \gamma^{(\rho \circ F)\alpha_M}$.

Por lo tanto $Ian_F\_ \dashv \_ \circ F$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \arrow[r, bend left, "Ian_F\_"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{B}^{\mathbf{C}} \arrow[l, bend left, "\_\circ F"] \end{tikzcd}$$

■

1.6 Categorías extensivas

En esta sección mostraremos las definiciones y resultados encaminados a obtener una caracterización de las categorías extensivas que será de gran utilidad en la segunda mitad de este trabajo.

Definición 1.6.1. *Sean $\mathcal{E}$ una categoría con sumas finitas y un par de objetos A y B en $\mathcal{E}$, el funtor*

$$+ \colon \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/(A + B)$$

es tal que a cada objeto $(f, g) \in \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ le asigna la flecha inducida por la suma, como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i_{A'}"] \arrow[d, "f"'] & A' + B' \arrow[d, dashed, "f+g"] & B' \arrow[l, "i_{B'}"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A + B & B; \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

y a cada morfismo $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ le asigna la flecha dada de la misma *manera:*

$$\begin{tikzcd}
& A'' \arrow[rr, "i_{A''}"] \arrow[ddl, "f'"] & & A''+B'' \arrow[ddl, "f'+g'"] & & B'' \arrow[ll, "i_{B''}"'] \arrow[ddl, "g'"] \\
A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "i_{A'}"] \arrow[d, "f"'] & & A'+B' \arrow[ur, dashed, "\alpha+\beta"] \arrow[d, "f+g"'] & & B' \arrow[ll, "i_{B'}"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "g"] & \\
A \arrow[rr, "i_A"'] & & A+B & & B. \arrow[ll, "i_B"] &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.6.2. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría con sumas finitas, diremos que $\mathcal{E}$ satisface la* **ley extensiva** *si para cada par de objetos A, B en $\mathcal{E}$, el funtor*

$$+\colon \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/(A+B)$$

es una equivalencia de categorías.

Si la categoría $\mathcal{E}$ cumple la ley extensiva se le llamará *categoría extensiva.*

Ejemplo 1.6.3. *Las categorías* **Con** *y* **Top** *son extensivas.*

Definición 1.6.4. *En una categoría $\mathcal{E}$ con sumas se dice que las sumas binarias $A+B$ son* **universales** *si para cualquier morfismo $f\colon S \to A+B$, los productos fibrados a lo largo de las inyecciones existen y el renglón superior del diagrama*

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "f"] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B, \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados son productos fibrados, es una suma.

Definición 1.6.5. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría. Diremos que el objeto inicial de $\mathcal{E}$ es* **estricto** *si cada que exista una flecha $m\colon A \to 0$ se tiene que $A = 0$.*

Lema 1.6.6. *Si $\mathcal{E}$ es una categoría con sumas universales entonces el objeto inicial es estricto.*

Demostración. Supongamos que existe un morfismo $m\colon A \to 0$ en $\mathcal{E}$.

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "m"] \\
0 \arrow[r, "1_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Sean $X \in \mathcal{E}$, $f: X \to A$ y $g: X \to 0$ tales que $m \circ f = g \circ 1_0$, entonces los triángulos del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "m"] \\
& 0 \arrow[r, "1_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

conmutan con esa única f.

Como las sumas son universales en $\mathcal{E}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "m"'] & A \arrow[d, "m"'] & A \arrow[l, "1_A"'] \arrow[d, "m"] \\
0 \arrow[r, "1_0"'] & 0 & 0 \arrow[l, "1_0"]
\end{tikzcd}$$

está compuesto por productos fibrados y el renglón inferior es una suma, el renglón superior también lo es.

Sea $X \in \mathcal{E}$. Sabemos que existe una única flecha $0 \to X$, así que la composición

$$A \xrightarrow{m} 0 \longrightarrow X$$

muestra la existencia de una flecha de A en X.

Supongamos existen $f, g: A \to X$. Como $A + A = A$, existe una única flecha como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dashed, "!"] & A \arrow[l, "1_A"'] \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce que $f = g$.

Por lo tanto A es inicial en $\mathcal{E}$, así que $A = 0$. ∎

Teorema 1.6.7. *Si $\mathcal{E}$ es una categoría con sumas finitas entonces $\mathcal{E}$ es extensiva si y solo si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *Para cualquier diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "s'_1"] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d, "f"] & B' \arrow[l, "s'_2"'] \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "s_1"'] & S & B \arrow[l, "s_2"]
\end{tikzcd}$$

con el renglón inferior una suma, si el renglón superior es una suma, ambos cuadrados son productos fibrados.

2. *Cualquier suma en $\mathcal{E}$ es universal.*

Demostración. Supongamos que las condiciones 1 y 2 se cumplen.

Definamos

$$i_A^*: \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/A+B, \quad g \mapsto i_A \circ g,$$

$$\Sigma_{i_A}: \mathcal{E}/A+B \to \mathcal{E}/A, \quad f \mapsto (i_A)^{-1}(f).$$

Esta última definición se da por la condición 2.

Veamos que $i_A^* \dashv \Sigma_{i_A}$. Sean $g \in \mathcal{E}/A$ y $f \in \mathcal{E}/A+B$.

Supongamos que existe $h: i_A^*(g) \to f$ en la categoría $\mathcal{E}/A+B$. Entonces el cuadrado exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& P_S \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\Sigma_{i_A}(f)"] & S \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "i_A"'] & A+B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como el cuadrado interior es un producto fibrado (condición 2), existe una flecha $k: g \to \Sigma_{i_A}(f)$.

Ahora supongamos que existe una flecha $k: g \to \Sigma_{i_A}(f)$ en la categoría $\mathcal{E}/A$. Entonces $s \circ k$ es una flecha de $i_A^*(g)$ en f.

De manera análoga construimos funtores i_B^* y Σ_{i_B} tales que $i_B^* \dashv \Sigma_{i_B}$.

Por el lema 1.4.4, el funtor $\langle \Sigma_{i_A}, \Sigma_{i_B} \rangle : \mathcal{E}/A+B \to \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ tiene adjunto izquierdo $+: \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A+B$ tal que $+(f,g) = i_A^*(f) + i_B^*(g)$.

Veamos que este último funtor es una equivalencia de categorías. Sea $(f,g) \in \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ con $\mathrm{dom}(f) = A'$ y $\mathrm{dom}(g) = B'$. Entonces $\mathrm{dom}(f+g) = A'+B'$.

Por la condición 2, el renglón superior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_A \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma_{i_A}(f+g)"'] & A'+B' \arrow[d, "f+g"] & P_B \arrow[l] \arrow[d, "\Sigma_{i_B}(f+g)"] \\
A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

es una suma y por la condición 1 los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A'+B' \arrow[d, "f+g"] & B' \arrow[l] \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

son productos fibrados, así que $(f,g) \cong (\Sigma_{i_A}(f+g), \Sigma_{i_B}(f+g)$.

Sea $h \in \mathcal{E}/A+B$. Por la condición 1, el renglón superior del diagrama

$$\begin{tikzcd} P_A \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma_{i_A}(h))"'] & S \arrow[d, "h"] & P_B \arrow[l] \arrow[d, "\Sigma_{i_B}(h)"] \\ A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

es una suma. Entonces $\mathrm{dom}(+(\Sigma_{i_A}(h), \Sigma_{i_B}(h))) = P_A + P_B$, por lo que $h \cong +(\Sigma_{i_A}(h), \Sigma_{i_B}(h))$.

Supongamos ahora que el funtor $+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A+B$ es una equivalencia de categorías.

En particular $+$ tiene adjunto derecho $D : \mathcal{E}/A+B \to \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$. Como $i_A^* = + \circ \sigma_A$ y $i_B^* = + \circ \sigma_B$, el lema 1.4.3 nos dice que existen funtores D_A y D_B tales que $i_A^* \dashv D_A$, $i_B^* \dashv D_B$.

Demostremos la condición 2. Sea $f : S \to A+B$. La unidad de la adjunción indica que hay un morfismo $i_A^* D_A(f) \to f$ por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "D_A(f)"'] & S \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B \end{tikzcd} \tag{1.21}$$

conmuta. Veamos que dicho cuadrado en un producto fibrado.

Sean $Y \in \mathcal{E}$, $k : Y \to A$ y $h : Y \to S$ tales que $i_A \circ k = f \circ h$, es decir que el cuadrado exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "l"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\ & X \arrow[r] \arrow[d, "D_A(f)"] & S \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "i_A"'] & A+B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces $h : i_A^*(k) \to f$ está en correspondecia biunívoca con $l : k \to D_A(f)$ y por lo tanto es única. Así que (1.21) es un producto fibrado.

Como el funtor $+$ es una equivalencia tenemos que $f \cong +D(f)$, es decir existe un isomorfismo t tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X+X' & \\
X \arrow[ur] \arrow[d, "D_A(f)"'] & S \arrow[u, "t"', "\cong"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[ul] \arrow[d, "D_B(f)"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Con lo cual se satisfacen que las sumas sean universales.

Para demostrar la condición 1 supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "i_{A'}"] \arrow[d, "f"'] & A'+B' \arrow[d, "h"] & B' \arrow[l, "i_{B'}"'] \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B. \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd} \tag{1.22}$$

conmuta.

Aplicando la condición 2 sabemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "D_A(h)"'] & A'+B' \arrow[d, "h"] & B' \arrow[l] \arrow[d, "D_B(h)"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B. \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

está compuesto por productos fibrados. Pero como el diagrama (1.22) conmuta tenemos que $f+g=h$. Finalmente, como $+$ es una equivalencia

$$(f,g) \cong D(f+g) = D(h) = (D_A(h), D_B(h)).$$

Por lo tanto el diagrama (1.22) está compuesto por productos fibrados. ■

Corolario 1.6.8. *Si $\mathcal{E}$ es extensiva, el objeto inicial es estricto.*

Demostración. Se sigue del teorema 1.6.7 y el lema 1.6.6. ■

Definición 1.6.9. *En una categoría $\mathcal{E}$ con sumas se dice que las sumas binarias son* disjuntas *si las inyecciones en la suma son monomorfismos y si el producto fibrado de éstas es el objeto inicial.*

Proposición 1.6.10. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría exacta izquierda. Entonces $\mathcal{E}$ es extensiva si y solo si tiene sumas finitas, universales y disjuntas.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{E}$ es extensiva. Por definición, $\mathcal{E}$ tiene sumas finitas.

Por la segunda condición del teorema 1.6.7, las sumas de $\mathcal{E}$ son universales.

Finalmente, consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "i_A"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B. \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Como ambos renglones son sumas, aplicando la condición 1 del teorema 1.6.7 tenemos que ambos cuadrados son productos fibrados.

El cuadrado del lado izquierdo implica que la inyección i_A es un monomorfismo. El cuadrado del lado derecho implica que el objeto inicial es el producto fibrado de las inyecciones.

Por lo tanto las sumas de $\mathcal{E}$ son disjuntas.

Supongamos ahora que $\mathcal{E}$ tiene límites finitos y sumas finitas, universales y disjuntas.

Usando el teorema 1.6.7, resta demostrar la primera condición ya que la segunda se cumple por hipótesis.

Primero demostremos que si en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "i_{T_1}"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[d, "f+g"] & T_2 \arrow[l, "i_{T_2}"'] \arrow[d, "g"] \\
S_1 \arrow[r, "i_{S_1}"'] & S & S_2 \arrow[l, "i_{S_2}"]
\end{tikzcd} \tag{1.23}$$

ambos renglones son sumas y $f+g$ es un isomorfismo entonces f y g también son isomorfismos.

Como $f+g$ es un isomorfismo, $T = S_1 + S_2$ con la estructura dada por $i'_{S_1} = (f+g)^{-1} \circ i_{S_1}$ y $i'_{S_2} = (f+g)^{-1} \circ i_{S_2}$.

Como las sumas son universales, existen los productos fibrados a lo largo de i_{T_1} y el renglón superior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r, "i_{Q_1}"] \arrow[d, "q_1"'] & T_1 \arrow[d, "i_{T_1}"] & Q_2 \arrow[l, "i_{Q_2}"'] \arrow[d, "q_2"] \\
S_1 \arrow[r, "i'_{S_1}"'] & T & S_2 \arrow[l, "i'_{S_2}"]
\end{tikzcd} \tag{1.24}$$

es una suma con los cuadrados productos fibrados.

Veamos que la parte exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
& T_1 \arrow[dl, bend right, "f"'] & Q_2 \arrow[l, "i_{Q_2}"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, bend left, "q_2"] \\
S_1 \arrow[d, "i_{S_1}"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
S & S_2 \arrow[l, "i_{S_2}"] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

$$\begin{aligned}
i_{S_1} \circ f \circ i_{Q_2} &= (f+g) \circ i_{T_1} \circ i_{Q_2} && \text{(1.23) conmuta} \\
&= (f+g) \circ i'_{S_2} \circ q_2 && \text{(1.24) conmuta} \\
&= i_{S_2} \circ q_2 && \text{def. de } i'_{S_2},
\end{aligned}$$

así que Q_2 se factoriza a través del cero. Como las sumas son universales, el cero es estricto (lema 1.6.6), entonces $Q_2 = 0$. Análogamente, el producto fibrado de S_1 y T_2 es cero.

Además, como el renglón superior de (1.24) es una suma, $Q_1 \cong T_1$.

Entonces el diagrama (1.24) se puede reescribir como

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, equal] \arrow[dd, "f"'] & T_1 \arrow[d, "i_{T_1}"] & 0 \arrow[l] \arrow[dd] \\
& T \arrow[d, dash, "f+g"] & \\
S_1 \arrow[r, "i_{S_1}"'] & S & S_2. \arrow[l, "i_{S_2}"]
\end{tikzcd}$$

Análogamente, el producto fibrado de S_1 y T_2 es cero. Esto junto con el cuadrado izquierdo del diagrama anterior nos da el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dd, equal] & S_1 \arrow[d, "i_{S_1}"] & 0 \arrow[l] \arrow[dd] \\
& S \arrow[d, dash, "f+g"] & \\
T_1 \arrow[r, "i_{T_1}"'] & T & T_2 \arrow[l, "i_{T_2}"]
\end{tikzcd}$$

compuesto por productos fibrados.

Como las sumas son universales, el renglón superior es una suma, de donde se infiere que f es un isomorfismo. Análogamente, g también es un isomorfismo.

Ahora supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i_{A'}"] \arrow[d, "a"'] & A'+B' \arrow[d, "s"] & B' \arrow[l, "i_{B'}"'] \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B. \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd} \tag{1.25}$$

es conmutativo.

Sabiendo que las sumas son universales, existen los producto fibrados a lo largo del morfismo s, lo que a su vez induce los morfismos x y y del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr, dashed, "x"] \arrow[drr, bend left, "i_{A'}"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & & & B' \arrow[dl, dashed, "y"'] \arrow[dll, bend right, "i_{B'}"'] \arrow[ddl, bend left, "b"] \\ & P_A \arrow[r, "i_{P_A}"] \arrow[d] & A'+B' \arrow[d, "s"] & P_B \arrow[l, "i_{P_B}"'] \arrow[d] & \\ & A \arrow[r, "i_A"'] & A+B & B. \arrow[l, "i_B"] & \end{tikzcd}$$

Como $A' + B' = P_A + P_B$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i_{A'}"] \arrow[d, "x"'] & A'+B' \arrow[d, equal] & B' \arrow[l, "i_{B'}"'] \arrow[d, "y"] \\ P_A \arrow[r, "i_{P_A}"'] & A'+B' & P_B. \arrow[l, "i_{P_B}"] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por lo demostrado anteriormente, tenemos que tanto x como y son isomorfismos.

Por lo tanto el diagrama (1.25) está compuesto por productos fibrados. ■

Capítulo 2

Gavillas sobre espacios topológicos

2.1 Gavillas

Cada gavilla sobre un espacio topológico X se puede interpretar en términos de "propiedades locales". Cuando una propiedad se satisface para cada elemento de la cubierta abierta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y es compatible en todas las posibles intersecciones $U_i \cap U_j$, podemos extenderla de manera natural a todo el abierto U.

Los numerosos ejemplos que aquí se enumeran sirven mostrar que el concepto de gavilla se presenta de manera natural a través de ideas que nos son mucho más familiares, como es el caso de las funciones continuas.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos como $\mathcal{A}(X)$ a la categoría que consta de:*

Objetos: *Subconjuntos abiertos del espacio X.*

Morfismos: *Relación de contención $\subseteq$: $A \to B \Leftrightarrow A \subseteq B$.*

La categoría $\mathcal{A}(X)^{op}$, construida como en 1.2.1, es aquella que tiene los morfismos en sentido contrario: si $A \to B$ en $\mathcal{A}(X)$ (i.e. $A \subseteq B$), entonces $B \to A$ en $\mathcal{A}(X)^{op}$.

Definición 2.1.2. *Una* pregavilla *sobre X es cualquier funtor $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$* **Con**.

Al aplicarle el funtor F a una flecha $U \supset V$ en $\mathcal{A}(X)^{op}$, se obtiene una función $F(U \supset V) = FU \to FV$ cuya acción denotaremos: $s \mapsto s|_V$, para toda $s \in FU$.

Si se tiene que $U \supset V \supset W$ en $\mathcal{A}(X)^{op}$; como F es un funtor, respeta composiciones, entonces $s|_V|_W = s|_W$ para toda $s \in FU$.

Lema 2.1.3. *Sean $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** un funtor, U un abierto de X, $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces el diagrama*

$$FU \xrightarrow{e} \prod_i FU_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j), \tag{2.1}$$

donde para todo $t \in FU$, $e(t) = \langle t|_{U_i}\rangle_i$ y para toda familia $\langle t_i \in FU_i\rangle_i$, $p(\langle t_i\rangle_i) = \langle t_i|_{(U_i\cap U_j)}\rangle_{i,j}$, $q(\langle t_i\rangle_i) = \langle t_j|_{(U_i\cap U_j)}\rangle_{i,j}$, siempre existe y se tiene que $pe = qe$.

Demostración. El diagrama siempre existe ya que las funciones se definen explícitamente para cualquier funtor F.

Sea $x \in FU$, se tiene que

$$pe(x) = p(\{x|_{U_i}\}) = \{x|_{U_i}|_{(U_i\cap U_j)}\} = \{x|_{U_i\cap U_j}\}$$

y

$$qe(x) = q(\{x|_{U_i}\}) = \{x|_{U_j}|_{(U_i\cap U_j)}\} = \{x|_{U_i\cap U_j}\}$$

La última igualdad se cumple porque F es un funtor, por lo tanto respeta las composiciones $U \supset U_i \supset U_i \cap U_j$ y $U \supset U_j \supset U_i \cap U_j$, en $\mathcal{A}(X)^{op}$.

Por lo tanto $pe(x) = qe(x)$ para toda $x \in FU$. ∎

Definición 2.1.4. *Una* gavilla *de conjuntos F sobre un espacio topológico X es un funtor $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** tal que para cada cubierta abierta $U = \bigcup_i U_i$, $i \in I$ de cada subconjunto abierto U de X el correspondiente diagrama (2.1) es un igualador.*

Definición 2.1.5. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos como* **Gav**(X) *a la categoría compuesta por:*

Objetos: *Gavillas de conjuntos sobre X.*

Morfismos: *Transformaciones naturales de funtores.*

Los ejemplos más ilustrativos de la noción de gavilla.

Ejemplo 2.1.6.a. *Construyamos una función $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** que le asigne a cada abierto $U \subset X$ el conjunto de todas las funciones continuas con valores reales sobre U,*

$$C(U) = CU = \{f \mid f\colon U \to \mathbb{R} \text{ continua}\}.$$

Para cada abierto $V \subset U$ se puede restringir cada f al subconjunto V lo que determina una función $CU \to CV$ con la correspondencia $f \mapsto f|_V$. Si se tienen $W \subset V \subset U$ conjuntos abiertos encajados, la restricción es transitiva ya que $(f|_V)|_W = f|_W$. Esto determina un funtor $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** *tal que*

$$U \mapsto CU, \qquad \{V \subset U\} \mapsto \{CU \to CV, \quad f \mapsto f|_V\}.$$

Veamos que $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *es una gavilla.*

Sea $U \in \mathcal{A}(X)^{op}$ *y una cubierta abierta* $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, *veremos que el diagrama*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_i CU_i \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} C(U_i \cap U_j)\ . \tag{2.2}$$

es un igualador en **Con**, *usando el criterio del lema 1.3.9.*

Sea $\langle f_i\rangle_i \in \prod_i CU_i$ *tal que* $p(\langle f_i\rangle_i) = q(\langle f_i\rangle_i)$, *entonces* $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, *para toda* i, j.

Construyamos $f\colon U \to \mathbb{R}$, *definiéndola de la siguiente manera: si* $x \in U_i$, *entonces* $f(x) = f_i(x)$. *Por lo anterior* f *está bien definida.*

Sea $y \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = y$ *para algún* $x \in U$. *Como* $x \in U_i$ *para alguna* i, *entonces* $f_i(x) = f(x) = y$. f_i *es una función continua, entonces existe* $V \subset U_i \subset U$ *un abierto tal que* $x \in V$ *y* $f_i(V) = f(V) \subset (a,b)$. *Por lo tanto* f *es una función continua.*

Entonces $f \in CU$ *y* $e(f) = \langle f_i\rangle_i$. *Supongamos que existe* $g \in CU$ *tal que* $e(g) = \langle f_i\rangle_i$. *Sea* $x \in U$, *en particular* $x \in U_i$ *para alguna* i, *entonces* $f(x) = f_i(x) = g(x)$ *para toda* $x \in U$. *Entonces* $f = g$. *Por lo tanto* f *es única.*

Por lo tanto (2.2) es un igualador en **Con**.

Por lo tanto $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *es una gavilla.*

Ejemplo 2.1.6.b. *Este funtor* C *en particular también determina una gavilla de álgebras sobre* $\mathbb{R}$ *o una gavilla de* $\mathbb{R}$*-módulos ya que cada conjunto* CU *es un álgebra sobre* $\mathbb{R}$ *con suma, producto y multiplicación por escalares determinados puntualmente, mientras que los morfismos* p *y* q *son* $\mathbb{R}$*-morfismos lineales entre anillos. En este caso la condición de que* C *es una gavilla es equivalente a que la sucesión de* $\mathbb{R}$*-módulos*

$$0 \longrightarrow CU \xrightarrow{e} \prod_i CU_i \xrightarrow{p-q} \prod_{i,j} C(U_i \cap U_j)$$

sea exacta; es decir que e *sea el núcleo de* $p - q$.

Ejemplo 2.1.6.c. *Otros ejemplos de gavillas son el funtor* I *que para cada abierto* $U \subset X$, $I(U)$ *es el conjunto de todas las funciones continuas de* U *al intervalo unitario en* $\mathbb{R}$. *El funtor* T *donde cada* $T(U)$ *es el conjunto de todas las funciones, continuas o no, de* U *en* $\mathbb{R}$ *es también una gavilla.*

Ejemplo 2.1.6.d. *Para cada* $U \in \mathcal{A}(X)$ *definamos* $\Omega\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *como*

$$\Omega U = \{W \in \mathcal{A}(X) \mid W \subseteq U\}$$

y, si $U \supseteq V$, *la restricción queda definida como*

$$\Omega U \to \Omega V, \quad W \mapsto W \cap V.$$

Con esta definición Ω *es un funtor.*

Veamos que $\Omega\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** *es una gavilla. Sea $U \in \mathcal{A}(X)^{op}$ y una cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, veremos que el diagrama*

$$\Omega U \xrightarrow{e} \prod_i \Omega U_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \Omega(U_i \cap U_j) \ .$$

es un igualador en **Con**, *usando el criterio del lema 1.3.9.*

Sea $\langle V_i\rangle_i \in \prod_i \Omega U_i$ tal que $p(\langle V_i\rangle_i) = q(\langle V_i\rangle_i)$. Entonces $V_i|_{U_i\cap U_j} = V_j|_{U_i\cap U_j}$ para toda $i,j \in I$; es decir, $V_i \cap U_i \cap U_j = V_j \cap U_i \cap U_j$ para toda $i,j \in I$. Como $V_i \subseteq U_i$ para toda $i \in I$, esto último es equivalente a

$$V_i \cap U_j = V_j \cap U_i \tag{2.3}$$

para toda $i,j \in I$.

Definamos $V = \bigcup_i V_i$. Como $V_i \subseteq U_i$ para toda $i \in I$, $V \subseteq U$; es decir, $V \in \Omega U$.

Veamos que $e(V) = \langle V_i\rangle_i$.

$$\begin{aligned} V \cap U_j &= (\textstyle\bigcup_i V_i) \cap U_j && \textit{def. de } V \\ &= \textstyle\bigcup_i (V_i \cap U_j) \\ &= \textstyle\bigcup_i (V_j \cap U_i) && \textit{(2.3)} \\ &= V_j \cap (\textstyle\bigcup_i U_i) \\ &= V_j \cap U && \textit{def. de } U \\ &= V_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto $e(V) = \langle V_i\rangle_i$.

Supongamos que existe $W \in \Omega U$ tal que $e(W) = \langle V_i\rangle_i$, en particular $W \cap U_i = V_i$ para toda $i \in I$. Entonces $\bigcup_i (W \cap U_i) = V$, pero el lado izquierdo de la igualdad es igual a W. Así que V es único.

Por lo tanto Ω es una gavilla.

Ejemplo 2.1.6.e. *Sin embargo el funtor que asigna a cada abierto U el conjunto $A(U)$ de todas las funciones acotadas de U en $\mathbb{R}$ no es una gavilla. Tomemos $X = [0,1]$ el intervalo unitario en $\mathbb{R}$, $U = X$ un abierto del espacio X y la cubierta abierta $\{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$. La familia de funciones acotadas $\{f_n\colon (1/n,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $f_n(x) = 1/x$ para toda $n \in \mathbb{R}$. Cada una de dichas f_n es una función acotada en el correspondiente intervalo $(1/n, 1]$ que no determinan una función acotada en $[0,1]$.*

Lo que sí ocurre en este caso es que cuando tenemos una función con las propiedades deseadas, ésta es única. Sea $U = \bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de un abierto U de X y sea $\{f_i\}_i$ una familia de funciones acotadas definidas sobre los U_i. Supongamos que existen f, $g \in AU$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ y $g|_{U_i} = f_i$ $\forall i$. Si tomamos un punto $x \in U$ en particular tenemos que $x \in U_i$ para alguna i. Evaluando tenemos que $g(x) = g|_{U_i}(x) = f_i(x) = f|_{U_i}(x) = f(x)$. Lo que demuestra la unicidad de dicha función.

Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.7. *Una pregavilla* $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *es* separada *si la función* e *del diagrama*

$$FU \xrightarrow{e} \prod_i FU_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \tag{2.4}$$

es inyectiva para cualquier abierto $U \in \mathcal{A}(X)^{op}$ *y cualquier cubierta abierta* $U = \bigcup_i U_i$.

Como todo igualador en conjuntos es inyectivo, tenemos la siguiente:

Observación 2.1.8. *Toda gavilla es una pregavilla separada.*

Definición 2.1.9. *Una* subgavilla *de una gavilla* $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *es un subfuntor de* F *que es en sí mismo una gavilla.*

Un criterio que caracteriza a las subgavillas se exhibe en la siguiente:

Proposición 2.1.10. *Si* $F\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ *es una gavilla, entonces un subfuntor* $S \subset F$ *es una subgavilla si y solo si para todo abierto* $U \subset X$ *con una cubierta abierta* $U = \bigcup_i U_i$ *y para todo elemento* $f \in FU$*, se tiene que* $f \in SU$ *si y solo si* $f|_{U_i} \in SU_i$ *para toda* i.

Demostración. Primero supongamos que $S \subset F$ es una subgavilla.

Sean $U = \bigcup_i U_i$ un abierto de X con una cubierta abierta y $f \in FU$.

Ahora supongamos que $f \in SU$. Entonces $f|_{U_i} \in SU_i$ para toda i porque S es un funtor.

Por el otro lado, sea $f \in FU$. Supongamos que $f|_{U_i} \in SU_i$ para toda i. Como S es en sí mismo una gavilla, el diagrama

$$SU \xrightarrow{e} \prod_i SU_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} S(U_i \cap U_j)$$

es un igualador. La familia $\langle f|_{U_i}\rangle_i \in \prod_i SU_i$ es tal que $p(\langle f|_{U_i}\rangle_i) = q(\langle f|_{U_i}\rangle_i)$, así que existe un único elemento en SU que bajo la función e nos da $\langle f|_{U_i}\rangle_i$ y, como F es gavilla, dicho elemento es claramente f, por lo que $f \in SU$.

En la otra dirección, supongamos que para todo abierto $U \subset X$ con una cubierta abierta $U = \bigcup_i U_i$ y para todo elemento $f \in FU$, se tiene que $f \in SU$ si y solo si $f|_{U_i} \in SU_i$ para toda i.

Sean $U = \bigcup_i U_i$ un abierto de X con una cubierta abierta. Veamos que el diagrama

$$SU \xrightarrow{e} \prod_i SU_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} S(U_i \cap U_j)$$

es un igualador en **Con** con ayuda del criterio 1.3.9.

Sea $\langle f_i\rangle_i \in \prod_i SU_i$ tal que $p(\langle f_i\rangle_i) = q(\langle f_i\rangle_i)$. Como S es un subfuntor de F y F es una gavilla, existe un único elemento $f \in FU$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para toda i. Entonces, $f|_{U_i} \in SU_i$ para toda i, así que por hipótesis, $f \in SU$. Por lo tanto S es una gavilla. ■

Lema 2.1.11. *El funtor $D\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** tal que a cada $U \subset X$ le asigna el conjunto $DU = \{f \mid f\colon U \to \mathbb{R}$ derivable$\}$ es una subgavilla del funtor $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** definido en el ejemplo 2.1.6.a.*

Demostración. Usando el criterio de la proposición anterior, basta demostrar que para todo abierto $U \subset X$, para toda cubierta abierta $U = \bigcup_i U_i$ y para todo elemento $f \in CU$, se cumple que $f \in DU$ si y solo si $f|_{U_i} \in DU_i$ para toda i.

Sea $f \in CU$.

Supongamos que $f \in DU$. Como f es una función derivable, $f|_{U_i}$ también es derivable para toda i. Así que $f|_{U_i} \in DU_i$ para toda i.

Finalmente, supongamos que $f|_{U_i} \in DU_i$ para toda i; es decir, $f|_{U_i}$ es derivable para toda i.

Sea $x \in U$ entonces $x \in U_i$ para alguna i. Como la correspondiente $f|_{U_i}$ es derivable, existe el límite de la función que define la derivada para el punto x. Así que f es derivable. Por lo tanto $f \in DU$. ■

Otras subgavillas de $C\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** son las determinadas por conjuntos de funciones suaves y n-derivables.

2.2 El funtor Γ

La categoría **Top** compuesta por los espacios topológicos como objetos y las funciones continuas entre ellos como morfismos es el ambiente para la presente sección.

Veremos que para cada $p\colon Y \to X \in$ **Top**$/X$ podemos construir una gavilla $\Gamma_p \in$ **Gav**(X) a partir de las "secciones" del haz p.

Fijemos $X \in$ **Top** como *espacio base* de aquí en adelante. Un *haz* sobre el espacio X es cualquier función continua $p\colon Y \to X$ con $Y \in$ **Top**. Una función continua $f\colon Y \to Y'$ será una función entre los haces $p\colon Y \to X$ y $p'\colon Y' \to X$ siempre que $p'f = p$ y se denotará $f\colon p \to p'$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "p'"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Lema 2.2.1. *Los haces sobre X y las funciones entre ellos forman una categoría.*

Demostración. Este es un caso particular del ejemplo 1.1.6.a. ■

Top$/X$ denotará dicha categoría.

Definición 2.2.2. *Para cada $x \in X$ la imagen inversa $p^{-1}(x)$ es llamada la* fibra *de Y sobre x.*

Si U es un subconjunto abierto del *espacio base* X y $p\colon Y \to X$ es un haz, entonces restringir p a la función $p_U : p^{-1}U \to U$ es un haz sobre U; más aún, el diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}U \arrow[r] \arrow[d, "p_U"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

cuyas flechas horizontales son inclusiones, es un producto fibrado en **Top**.

Lema 2.2.3. *El diagrama (2.5) es un producto fibrado en* **Top**.

Demostración. Llamemos $i' : p^{-1}U \hookrightarrow Y$ e $i\colon U \hookrightarrow X$ las inclusiones en (2.5); dicho diagrama conmuta ya que $p_U = p|_U$ y $p^{-1}U \subseteq Y$, $U \subseteq X$; por lo que si tomamos $x \in p^{-1}U$, $pi'(x) = p(x)$ y $ip_U(x) = p(x)$.

Sea Z un espacio topológico con dos funciones continuas f y g tales que $pf = ig$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "h!"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & p^{-1}U \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p_U"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & U \arrow[r, "i"] & X. \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Definamos $h\colon Z \to p^{-1}U$ como $h(z) = f(z)\ \forall z \in Z$. Si $z \in Z$, $pf(z) = ig(z) = g(z) \in U$, entonces $f(z) \in p^{-1}U$ para toda $z \in Z$. Por lo tanto la definición de h tiene sentido.

Entonces tenemos que $i'h(z) = h(z) = f(z)\ \forall z \in Z$. Además $ip_U h = pi'h = pf = ig$, como i es mono, $p_U h = g$. Por lo que (2.5) conmuta.

Supongamos existe $l\colon Z \to p^{-1}U$ que hace que (2.6) conmute, en particular tendríamos que $i'l = f$. Si $z \in Z$ tendríamos que $i'l(z) = l(z) = f(z)\ \forall z \in Z$, entonces $l = f$ que es justo la definición de h.

Por lo tanto, (2.5) es un producto fibrado en **Top**. ■

Definición 2.2.4. *Una* sección *de un haz* $p\colon Y \to X$ *sobre un abierto* U *de* X *es una función continua* $s\colon U \to Y$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, hook, "i_U"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

donde i_U *es la inclusión de* U *en* X*, conmuta.*

Sea

$$\Gamma_p U = \{s \mid s\colon U \to Y \text{ y } ps = i\colon U \subset X\}$$

el conjunto de todos las secciones sobre U.

Lema 2.2.5. *Si $V \subseteq U$, se define una operación restricción $\Gamma_p U \to \Gamma_p V$, dada por $s \mapsto s|_V$ (restricción usual de funciones). Con esta definición $\Gamma_p\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$* **Con** *es un funtor.*

Demostración. Claramente $s = s|_U$ para toda $s \in \Gamma_p U$, por lo que Γ_p respeta identidades.

Sean $W \subset V \subset U$ $\mathcal{A}(X)^{op}$ y sea $s \in \Gamma_p U$, entonces $s \mapsto s|_V \mapsto s|_V|_W$. Por otro lado $W \subset U$ así que $s \mapsto s|_W$, pero $s|_V|_W = s|_W$ por lo que Γ_p respeta composiciones.

Por lo tanto, Γ_p es un funtor. ∎

Lema 2.2.6. *El funtor $\Gamma_p\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$* **Con** *es una gavilla de conjuntos.*

Demostración. Sea $U = \bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de un abierto de X, basta demostrar que

$$\Gamma_p U \xrightarrow{e} \prod_i \Gamma_p U_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \Gamma_p(U_i \cap U_j) \tag{2.7}$$

es un igualador en **Con**.

Sea $\langle s_i\colon U_i \to Y\rangle_i \in \prod_i \Gamma_p U_i$ una familia tal que $p(\langle s_i\rangle_i) = q(\langle s_i\rangle_i)$, por lo tanto $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para toda i, j. Definamos $s\colon U \to Y$ como $s(x) = s_i(x)$ si $x \in U_i$. Por lo anterior, s está bien definida.

Sea $V \subset Y$ abierto. Se tiene que

$$s^{-1}(V) = \bigcup_i (s^{-1}(V) \cap U_i) = \bigcup_i (s_i^{-1}(V) \cap U_i) = \bigcup_i (s_i^{-1}(V)).$$

Como s_i continua $\forall i$, entonces cada $s_i^{-1}(V)$ es un abierto por lo que $s^{-1}(V)$ es abierto. Así que $s\colon U \to Y$ es continua.

Sea $x \in U$, en particular $x \in U_i$ para alguna i por lo que tenemos $ps(x) = ps_i(x) = i_{U_i}(x) = x$; es decir, $ps = i_U$, entonces s es una sección sobre U. Por lo tanto $s \in \Gamma_p U$ y $e(s) = \langle s|_{U_i}\rangle_i = \langle s_i\rangle_i$.

Supongamos que existe $t \in \Gamma_p U$ tal que $e(t) = \langle s_i\rangle_i$. Sea $x \in U$, en particular $x \in U_i$ para alguna i, entonces $t(x) = s_i(x) = s(x)$ para toda $x \in U$. Así que s es única.

Por lo tanto, (2.7) es un igualador en **Con**.

Por lo tanto, Γ_p es una gavilla. ∎

Γ_p es llamada la *gavilla de secciones del haz* p.

Con esto sabemos que cada haz sobre X induce una gavilla sobre X.

Además cada función de haces $f: p \to p'$ sobre X induce una transformación natural $\Gamma f: \Gamma_p \to \Gamma_{p'}$ entre gavillas sobre X de la siguiente manera: Si $s \in \Gamma_p U$ entonces $\Gamma f_U(s) = fs$. fs es una sección de p' ya que

$$p'(fs) = (p'f)s = ps = i_U.$$

Lema 2.2.7. $\Gamma f: \Gamma_p \to \Gamma_{p'}$ *es una transformación natural.*

Demostración. Sean U, $V \in \mathcal{A}(X)$ tales que $V \subseteq U$. Sea $s \in \Gamma_p U$. Entonces $\Gamma f_U(s)|_V = fs|_V = \Gamma f_V(s|_V)$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p U \arrow[r, "\Gamma f_U"] \arrow[d] & \Gamma_{p'} U \arrow[d] \\
\Gamma_p V \arrow[r, "\Gamma f_V"'] & \Gamma_{p'} V
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por lo tanto Γf es una transformación natural. ■

Lema 2.2.8. Γ: **Top**$/X \to$ **Gav**(X) *es un funtor.*

Demostración. Sea $id_Y: Y \to Y$ la identidad del haz $p: Y \to X$ en **Top**$/X$, entonces si $s \in \Gamma_p U$, para algún $U \in \mathcal{A}(X)$, el morfismo $\Gamma id_{YU}(s) = id_Y s = s$, es decir, $\Gamma id_{YU} = id_{\Gamma_p U}$ para todo U. Por lo tanto $\Gamma id_Y = id_{\Gamma_p}$. Por lo que Γ respeta identidades.

Sean $f: Y \to Y'$ y $g: Y' \to Y''$ morfismos entre los haces $p: Y \to X$, $p': Y' \to X$ y $p'': Y'' \to X$ respectivamente, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p'"] & Y'' \arrow[dl, "p''"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sean $U \in \mathcal{A}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$, entonces $\Gamma g_U \circ \Gamma f_U(s) = \Gamma g_U(fs) = g(fs) = (gf)s = \Gamma(g \circ f)_U(s)$ para todo U. Por lo tanto $\Gamma g \circ \Gamma f$ es igual a $\Gamma(g \circ f)$. Por lo que Γ respeta composiciones.

Por lo tanto Γ es un funtor. ■

2.3 El funtor Λ

La prueba de que toda gavilla es una gavilla de cortes transversales de un haz conveniente depende de la idea de "germen" de una función. Se dice que dos funciones holomorfas h, $k: U \to \mathbb{C}$ tienen el mismo "germen" en un punto $a \in U$ si sus expansiones en series de potencias alrededor de a son iguales; esto implica que h y k coinciden en alguna vecindad de a. En otros casos pueden no existir expansiones en series de potencias convergentes, pero se puede definir, alternativamente, que dos funciones continuas (con valores en los reales) f y g tienen el mismo "germen" en un punto x si coinciden en alguna vecindad abierta de x; así $germ_x f = germ_x g$ implica $f(x) = g(x)$, pero no necesariamente a la inversa. Por ejemplo si $f(x) = 0$ y $g(x) = x^2$, se tiene que $f(0) = g(0)$; sin embargo las imágenes de f y g no coinciden en ningún abierto de $\mathbb{R}$.

Definición 2.3.1. *Sea $P\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** cualquier pregavilla sobre un espacio X, un punto x, dos vecindades abiertas U y V de x y dos elementos $s \in PU$, $t \in PV$. Diremos que s y t* tienen el mismo germen en x *cuando exista algún conjunto abierto $W \subset U \cap V$ con $x \in W$ y $s|_W = t|_W \in PW$.*

Lema 2.3.2. *Sea $x \in X$. La relación $\sim$ dada por "tener el mismo germen en x" es una relación de equivalencia en $\mathcal{V}_x$.*

Demostración. Reflexividad: Sea $s \in PU$, sabemos que $s|_U = s$ por lo que $s \sim s$.

Simetría: Sean $s \in PU$ y $t \in PV$ tales que $s \sim t$, entonces existe $W \subset U \cap V$, $x \in W$ donde $s|_W = t|_W \in PW$, es decir $t|_W = s|_W \in PW$, por lo que $t \sim s$.

Transitividad: Sean $s \in PU$, $t \in PV$ y $r \in PW$ tales que $s \sim t$ y $t \sim r$, entonces existen $Y' \subset U \cap V$ y $Y \subset V \cap W$ vecindades de x donde $s|_{Y'} = t|_{Y'}$ y $t|_Y = r|_Y$. Consideremos $Y' \cap Y$ la vecindad de x contenida en $U \cap W$, se tiene que:

$$s|_{Y'\cap Y} = s|_{Y'}|_Y = t|_{Y'}|_Y = t|_Y|_{Y'} = r|_Y|_{Y'} = r|_{Y'}|_Y = r|_{Y'\cap Y}$$

por lo que $s \sim r$.

Por lo tanto $\sim$ es de equivalencia. ∎

Definición 2.3.3. *La clase de equivalencia de cualquier $s \in PU$ con $x \in U$ es llamada el* germen *de s en x, en símbolos $[s \in PU]_x$.*

Definición 2.3.4. *El conjunto P_x de todos los gérmenes en x*

$$P_x = \{[s \in PU]_x \mid s \in PU,\ x \in U \in \mathcal{A}(X)\}$$

es llamado el tallo *de P en x.*

Entonces, si $P^{(x)}$ es la restricción del funtor $P\colon \mathcal{A}(X)^{op} \to$ **Con** a $\mathcal{V}_x$, el conjunto de las vecindades abiertas de x, se tiene el siguiente:

Lema 2.3.5. *Las funciones $\langle germ_x\colon PU \to P_x\rangle_{U\in\mathcal{V}_x}$ tales que para cada $s \in PU$, $germ_x s = [s \in PU]_x$, forman un cocono colímite sobre $P^{(x)}$. Además, como $\mathcal{V}_x$ es una categoría filtrante (ejemplo 1.3.17) dicho cocono es filtrante.*

Demostración. Sean U y V vecindades de x tales que $V \subset U$, entonces se tiene el siguiente diagrama en **Con**:

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[rr] \arrow[dr, "germ_x"'] & & PV \arrow[dl, "germ_x"] \\ & P_x. & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Sea $s \in PU$. Como $s|_V \in PV$ y V es vecindad de x tenemos que

$$[s \in PU]_x = [s|_V \in PV]_x.$$

Así que (2.8) conmuta para toda $PU \to PV$.

Por lo tanto $\langle germ_x \colon PU \to P_x \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ forman un cocono.

Sea $\langle \tau_U \colon PU \to L \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ otro cocono sobre $P^{(x)}$. Veamos que existe una única función $t \colon P_x \to L$, con $t \circ germ_x = \tau$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & PU \arrow[r] \arrow[dl, "\tau_U"'] \arrow[drr, "germ_x"' near start] & PV \arrow[dll, "\tau_V"' near start] \arrow[dr, "germ_x"] & \\ L & & & P_x. \arrow[lll, dashed, "t"] \end{tikzcd}$$

Definamos $t \colon P_x \to L$ de la siguiente manera: $t([s \in PU]_x) = \tau_U(s)$.

Sea $r \in PV$ otro representante de la clase; es decir $[s \in PU]_x = [r \in PV]_x$. Entonces existe $W \subset U \cap V$ vecindad de x tal que $s|_W = r|_W$. Por lo tanto, $\tau_W(s|W) = \tau_W(r|W)$ pero como τ es un cocono se tiene que

$$\tau_U(s) = \tau_W(s|_W) = \tau_W(r|_W) = \tau_V(r),$$

por lo que t está bien definida.

Sea $s \in PU$, tenemos que $t \circ \mathrm{germ}_x(s) = t([s \in PU]_x) = \tau_U(s)$, por lo que $t \circ \mathrm{germ}_x = \tau$.

Supongamos que existe $l \colon P_x \to L$ tal que $l \circ \mathrm{germ}_x = \tau$. Sea $[s \in PU]_x \in P_x$, entonces

$$t([s \in PU]_x) = t \circ \mathrm{germ}_x(s) = \tau(s) = l \circ \mathrm{germ}_x(s) = l([s \in PU]_x),$$

por lo que t es única.

Por lo tanto $\langle germ_x \colon PU \to P_x \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ es un cocono colímite. ∎

Lema 2.3.6. *Cualquier morfismo $h \colon P \to Q$ de pregavillas (cualquier transformación natural de funtores) induce en cada punto $x \in X$ una única función $h_x \colon P_x \to Q_x$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "germ_x"'] & QU \arrow[d, "germ_x"] \\ P_x \arrow[r, dashed, "h_x"'] & Q_x \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

conmuta para cualquier conjunto abierto U con $x \in U$.

Demostración. Sea $h\colon P \to Q$ una transformación natural entre funtores. Veamos que $\langle germ_x \circ h_U : PU \to Q_x \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ es un cocono sobre $P^{(x)}$.

Sean U y $V \in \mathcal{A}(X)$ tales que $V \subseteq U$. Sea $s \in PU$. Como h es natural, tenemos $germ_x \circ h_V(s|_V) = germ_x(h_U(s)|_V)$. Como $\langle germ_x : QU \to Q_x \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ es un cocono, tenemos $germ_x(h_U(s)|_V) = germ_x(h_U(s))$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "h_U"] \arrow[d] & QU \arrow[d] \arrow[dr, "germ_x"] & \\ & & Q_x \\ PV \arrow[r, "h_V"'] & QV \arrow[ur, "germ_x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como $\langle germ_x : PU \to P_x \rangle_{U \in \mathcal{V}_x}$ es un cocono colímite (lema 2.3.5), existe una única función $h_x : P_x \to Q_x$ tal que (2.9) conmuta.

De hecho esta función está definida como $h_x([s \in PU]_x) = [h_U(s) \in QU]_x$. ■

Lema 2.3.7. *La transformación definida por $P \mapsto P_x$, $h \mapsto h_x$ es un funtor* $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}} \to \mathbf{Con}$.

Demostración. Sea $id_P : P \to P$ en $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$. Veamos que $id_{P_x} : P_x \to P_x$ es la función identidad. Sea $[s \in PU]_x \in P_x$, por el lema 2.3.6 sabemos que $id_{P_x}([s \in PU]_x) = [id_{PU}(s) \in PU]_x = [s \in PU]_x$.

Por lo tanto se respetan las identidades.

Sean $h\colon P \to Q$ y $l\colon Q \to R$ morfismos en $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$. Veamos que $l_x \circ h_x$ es igual a $(l \circ h)_x$. Sea $[s \in PU]_x \in P_x$, como h y l son transformaciones naturales tenemos que

$$\begin{aligned} l_x \circ h_x([s \in PU]_x) &= [l_U(h_U(s)) \in RU]_x = \\ &= [(l \circ h)_U(s) \in RU]_x = (l \circ h)_x([s \in PU]_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto se respetan las composiciones.

Por lo tanto la transformación así definida es un funtor. ■

Diremos que este funtor es el que "toma el germen en x".

Combinemos los distintos conjuntos P_x de gérmenes en la unión disjunta Λ_P (sobre $x \in X$),

$$\Lambda_P = \coprod_x P_x = \{[s \in PU]_x \mid x \in X,\ s \in PU\} \tag{2.10}$$

y definamos $p\colon \Lambda_P \to X$ como la función que manda a cada $[s \in PU]_x$ al punto x de donde se toma. Además, cada $s \in PU$ determina una función

$$\widehat{s}\colon U \to \Lambda_P, \quad x \mapsto [s \in PU]_x \tag{2.11}$$

Lema 2.3.8. *El conjunto $\mathcal{B}_P = \{\widehat{s}(U) \mid s \in PU, U \in \mathcal{A}(X)\}$ es una base para una topología de Λ_P.*

Demostración. Primero veamos que $\bigcup \mathcal{B}_P = \Lambda_P$.

Claramente $\bigcup \mathcal{B}_P \subseteq \Lambda_P$. Sea $[s \in PU]_x \in \Lambda_P$, entonces $[s \in PU]_x \in \widehat{s}(U)$. Entonces $\bigcup \mathcal{B}_P \supseteq \Lambda_P$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{B}_P = \Lambda_P$.

Sean $\widehat{s}(U)$, $\widehat{r}(V)$ elementos de $\mathcal{B}_P$ y supongamos que $\widehat{s}(x) = \widehat{r}(y)$, entonces $[s \in PU]_x = [r \in PV]_y$. Como los gérmenes solo son iguales cuando se toman en el mismc punto, entonces $x = y$. Entonces existe $W \subset U \cap V$ vecindad de x, tal que $s|_W = r|_W \in PW$. Entonces $\widehat{s|_W}(W)$ es un elemnto de $\mathcal{B}_P$ tal que $[s \in PU]_x \in \widehat{s|_W}(W) \subset \widehat{s}(U) \cap \widehat{r}(V)$. ■

Observación 2.3.9. *Sean U, $V \in \mathcal{A}(X)$, tales que $V \subset U$ y $s \in PU$. Entonces $\widehat{s}(V) = \widehat{s|_V}(V)$ para toda $s \in PU$.*

Demostración. Sea $s \in PU$. Como $s|_V \in PV$, $[s \in PU]_x = [s|_V \in PV]_x$ para toda $x \in V$.

Por lo tanto $\widehat{s}(V) = \widehat{s|_V}(V)$. ■

Lema 2.3.10. *Sea Λ_P dotado con la topología $\mathcal{B}_P$; entonces tanto p como cada $\widehat{s}$ son funciones continuas.*

Demostración. Primero veamos que $p\colon \Lambda_P \to X$ es una función continua.

Sea $V \subseteq X$ un subconjunto abierto. Sea $[s \in PU]_x \in \Lambda_P$ tal que $[s \in PU]_x \in p^{-1}(V)$, entonces $x \in U \cap V$. Tomemos $\widehat{s|_{U\cap V}}(U \cap V) \in \mathcal{B}_P$. Por la observación 2.3.9, sabemos que $[s \in PU]_x = [s|_{U\cap V} \in P(U\cap V)]_x \in \widehat{s|_{U\cap V}}(U\cap V) \subset p^{-1}(V)$.

Por lo tanto, p es continua.

Ahora veamos que $\widehat{s}\colon U \to \Lambda_P$ también es continua.

Sea $\widehat{r}(V) \in \mathcal{B}_P$ un abierto básico y $x \in U$ tal que $\widehat{s}(x) \in \widehat{r}(V)$. Entonces $[r \in PV]_y = [s \in PU]_x$, como los gérmenes solo pueden tomarse sobre el mismo punto, $x = y$. Por lo tanto existe $W \subset U \cap V$ tal que $s|_W = r|_W$, entonces, por la observación 2.3.9, $\widehat{s}(W)$ es un abierto básico tal que $[s \in PU]_x \in \widehat{s}(W) \subset \widehat{r}(V)$.

Por lo tanto, $\widehat{s}$ es una función continua. ■

Observación 2.3.11. *$\widehat{s}$ es una sección de p para cada $s \in PU$.*

Demostración. Sea $x \in U$, entonces $p\widehat{s}(x) = p([s \in PU]_x) = x$, por lo tanto $p\widehat{s} = i\colon U \hookrightarrow X$. ■

Definición 2.3.12. *Sea $f \in$* **Top**. *Diremos que f es un* **homeomorfismo** *si tiene una inversa continua.*

Lema 2.3.13. *$\widehat{s}\colon U \to \widehat{s}(U)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. En el lema 2.3.10 demostramos que $\widehat{s}$ es una función continua.

Sea $V \subset U$ un abierto de X, entonces, por la observación 2.3.9, $\widehat{s}(V) \in \mathcal{B}_P$. Por lo tanto, $\widehat{s}$ es abierta.

Supongamos que $\widehat{s}(x) = \widehat{s}(y)$, entonces $[s \in PU]_x = [s \in PU]_y$. Como los gérmenes solo pueden ser iguales si están tomados en el mismo punto, entonces $x = y$. Por lo tanto, $\widehat{s}$ es inyectiva.

Por lo tanto, $\widehat{s}$ es un homeomorfismo sobre su imagen. ∎

Lema 2.3.14. *Si $h\colon P \to Q$ es una transformación natural entre pregavillas, la unión ajena de las funciones $h_x\colon P_x \to Q_x$, definidas en (2.9), es un morfismo $\Lambda_P \to \Lambda_Q$ de haces continuo.*

Demostración. Primero veremos que $\langle h_x : P_x \to Q_x \rangle_{x \in X}$ es una función continua de Λ_P a Λ_Q

Sean $\widehat{s}(U) \in \mathcal{B}_Q$ un abierto básico de Λ_Q y un punto $[t \in PW]_x \in \Lambda_P$ tal que $h_x([t \in PW]_x) \in \widehat{s}(U)$. Entonces $[h_U(t) \in QW]_x = [s \in QU]_x$. Por lo tanto existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subset U \cap W$ de forma que $h_U(t)|_V = s|_V$.

Por la observación 2.3.9, sabemos que $\widehat{h_U(t)|_V}(V) = \widehat{h_U(t)}(V)$; es decir que $\widehat{h_U(t)}(V) \in \mathcal{B}_Q$.

También tenemos que $[t \in PU]_x \in \widehat{t}(V) = \widehat{t|_V}(V)$

Como h es una transformación natural tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\ \downarrow & & \downarrow \\ PV & \xrightarrow[h_V]{} & QV \end{array}$$

conmuta. Entonces $h_V(t|_V) = h_U(t)|_V$, para toda $t \in PU$.

Por lo tanto $h(\widehat{t|_V}(V)) \subset \widehat{s}(U)$

Por lo tanto $\langle h_x : P_x \to Q_x \rangle_{x \in X}$ es continuo.

Sea $[s \in PU]_x \in \Lambda_P$. Entonces $p([s \in PU]_x) = x = q([h_U(s) \in QU]_x)$. Entonces $\langle h_x : P_x \to Q_x \rangle_{x \in X}$ es un morfismo entre haces. ∎

Lema 2.3.15. *$P \mapsto \Lambda_P$ es un funtor de pregavillas a haces.*

Demostración. Sea $id_P : P \to P$ en $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$. Por el lema 2.3.7 sabemos que id_{P_x} es la función identidad para toda $x \in X$, entonces $\langle id_{P_x} : P_x \to P_x \rangle_{x \in X}$ es la función identidad.

Por lo tanto, se respetan las identidades.

Sean $h\colon P \to Q$ y $l\colon Q \to R$ transformaciones naturales. Por el lema 2.3.7 sabemos que $l_x \circ h_x = (l \circ h)_x$ para toda $x \in X$.

Entonces $\langle l_x \circ h_x : P_x \to R_x \rangle_{x \in X} = \langle (l \circ h)_x : P_x \to R_x \rangle_{x \in X}$.

Por lo tanto, se respetan las composiciones.

Por lo tanto la transformación $P \mapsto \Lambda_P$ es un funtor. ∎

Definición 2.3.16. *Una función $f: X \to Y$, entre espacios topológicos es un* homeomorfismo local *si para cada punto $x \in X$, existe un abierto $U \subset X$ con $x \in U$, tal que $f|_U: U \to f(U)$ es un homeomorfismo.*

Lema 2.3.17. *Toda sección de un homeomorfismo local es una función abierta.*

Demostración. Sea $p: Y \to X$ un homeomorfismo local, $s: U \to Y$ una sección de él y V un abierto contenido en U. Veamos que $s(V)$ es un abierto de Y.

Sea $y \in s(V)$. Como p es un homeomorfismo local, existe W vecindad de y tal que $p|_W$ es un homeomorfismo. Entonces $p(W)$ es un abierto y en consecuencia $p(W) \cap V$ también lo es.

Como s es una sección de p, se tiene que

$$p(W \cap s(V)) = p(W) \cap ps(V) = p(W) \cap V.$$

Además, como $p|_W$ es en particular una función abierta, $W \cap s(V)$ es una vecindad abierta de x contenida en $s(V)$.

Por lo tanto s es una función abierta. ∎

Lema 2.3.18. *La función $p: \Lambda_P \to X$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $[s \in PU]_x \in \Lambda_P$. El abierto básico $\widehat{s}(U)$ es una vecindad de $[s \in PU]_x$. Como $\widehat{s}$ es una sección de p (observación 2.3.11), entonces $p(\widehat{s}(U)) = U$. Además demostramos que $\widehat{s}$ es un homeomorfismo sobre su imagen (lema 2.3.13).

Entonces p manda de manera homeomorfa a la vecindad $\widehat{s}(U)$ en el abierto U de X.

Por lo tanto p es un homeomorfismo local. ∎

2.4 $\mathbf{HL}/X \simeq \mathbf{Gav}(X)$

Veremos que las categorías $\mathbf{HL}/X$ y $\mathbf{Gav}(X)$ son equivalentes mostrando que los funtores Γ y Λ cumplen con la definición 1.4.9.

Consideremos una pregavilla P dada y la gavilla $\Gamma\Lambda_P$ de las secciones del haz $\Lambda_P \to X$. Para cada abierto U de X, definamos la función

$$\eta_{PU}: PU \to \Gamma\Lambda_P(U), \qquad \eta_{PU}(s) = \widehat{s}, \tag{2.12}$$

donde $\widehat{s}$ es como en (2.11).

Lema 2.4.1. $\eta_P: P \to \Gamma \circ \Lambda_P$ *es una transformación natural entre funtores.*

Demostración. Sean $U \supset V$ subconjuntos abiertos y $s \in PU$.

Por la observación 2.3.9, se tiene que $\eta_{PU}(s)|_V = \widehat{s}|_V = \widehat{s|_V} = \eta_{PV}(s|_V)$. Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "\eta_{PU}"] \arrow[d] & \Gamma\Lambda_P(U) \arrow[d] \\ PV \arrow[r, "\eta_{PV}"'] & \Gamma\Lambda_P(V) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por lo tanto η es una transformación natural. ■

Lema 2.4.2. $\eta\colon 1_{\mathbf{Gav}(X)} \to \Gamma\circ\Lambda$ *es una transformación natural.*

Demostración. Sean $h\colon P \to Q$ un morfismo entre gavillas y U un abierto.

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "\eta_{PU}"] \arrow[d, "h_U"'] & \Gamma\Lambda_P(U) \arrow[d, "\Gamma\Lambda h_U"] \\ QU \arrow[r, "\eta_{QU}"'] & \Gamma\Lambda_Q(U) \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

conmuta.

Sea s un elmento de PU, por la definición de η, tenemos que $\eta_{PU}(s) = \widehat{s}$. Por la definición de las transformaciones en $\Gamma\Lambda$ tenemos que $\Gamma\Lambda h_U(\widehat{s}) = h_x \circ \widehat{s}$. Aplicado a x tenemos

$$h_x \circ \widehat{s}(x) = h_x([s \in PU]_x) = [h_u(s) \in QU]_x = \widehat{h_u(s)}(x).$$

Entonces el diagrama (2.13) conmuta para todo $U \in \mathcal{A}(X)$.

Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "h"'] & \Gamma\Lambda_P \arrow[d, "\Gamma\Lambda h"] \\ Q \arrow[r, "\eta_Q"'] & \Gamma\Lambda_Q \end{tikzcd}$$

conmuta. ■

Teorema 2.4.3. *La pregavilla P es una gavilla si y solo si η es un isomorfismo $P \cong \Gamma\Lambda_P$. Es decir, toda gavilla es una gavilla de secciones.*

Demostración. Supongamos que la pregavilla P es una gavilla y veamos que η_U es un isomorfismo para cada abierto $U \subset X$. Supongamos que $\eta_U(s) = \eta_U(t)$; es decir, $\widehat{s} = \widehat{t}$. Entonces $\widehat{s}(x) = [s \in PU]_x = [t \in PU]_x = \widehat{t}(x)$ para toda $x \in U$.

Como los gérmenes de s y t son iguales en x, existe $V_x \subset U$ una vecindad de x tal que $s|_{V_x} = t|_{V_x}$. $\{V_x\}_{x\in U}$ es una cubierta abierta de U.

Entonces $e(s) = e(t)$ en el diagrama

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{x\in U} PV_x \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{x,y\in U} P(V_x \cap V_y)\ .$$

Como P es una gavilla, es separada (observación 2.1.8), entonces $s = t$.

Por lo tanto, η_U es inyectiva.

Sea $h \in \Gamma\Lambda_P U$, $h\colon U \to \Lambda_P$ una sección del haz p; es decir h es una función continua tal que $ph = i\colon U \hookrightarrow X$.

Sea $x \in U$, entonces $h(x) = [s_x \in PU_x]_x$ para algún $s_x \in PU_x$ con $U_x \in \mathcal{V}_x$.

Como $\widehat{s_x}(U_x) \in \mathcal{B}_P$ es un abierto y h es una función continua, existe un abierto V_x tal que $x \in V_x \subset U_x$ y $h(V_x) \subset \widehat{s_x}(U_x)$, entonces $h|_{V_x} = \widehat{s_x}|_{V_x}$.

Además $s_x|_{V_x}$ es un elemento de PV_x tal que $\widehat{s_x|_{V_x}}(V_x) = \widehat{s_x}(V_x)$.

El conjunto $\{V_x\}_{x\in U}$ es una cubierta abierta de U. Veamos qué sucede en el igualador

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{x\in U} PV_x \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{x,y\in U} P(V_x \cap V_y)$$

con la familia $\langle s_x|_{V_x}\rangle_x \in \prod_{x\in U} PV_x$.

Sea $z \in V_x \cap V_y$, entonces $\widehat{s_x}(z) = h(z) = \widehat{s_y}(z)$, entonces $[s_x \in PU_x]_z = [s_y \in PU_y]_z$ para toda $z \in V_X \cap V_y$, entonces, por lo demostrado en el primer párrafo, tenemos que $s_x|V_x \cap V_y = s_y|V_x \cap V_y$.

Esto implica que $p(\langle s_x|_{V_x}\rangle_x) = q(\langle s_x|_{V_x}\rangle_x)$ y como P es una gavilla existe un único elemento $s \in PU$ tal que $s|_{V_x} = s_x|_{V_x}$.

Como $h(x) = [s_x \in PU_x]_x = [s \in PU]_x = \widehat{s}(x)$ para toda $x \in U$ entonces existe $s \in PU$ tal que $\eta_U(s) = \widehat{s} = h$ para una sección cualquiera h.

Por lo tanto, η_U es sobre.

Por lo tanto, η_U es biyectiva.

Por lo tanto η es un isomorfismo.

Supongamos que η es un isomorfismo, como $\Gamma\Lambda_P U$ es una gavilla (lema 2.2.6), entonces P es una gavilla. ■

Consideremos un haz $h\colon Y \to X$ dado y el haz $\Lambda\Gamma_h$ de la gavilla Γ_h. Definimos una función

$$\varepsilon\colon \Lambda\Gamma_h \to Y, \qquad \varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x) = s(x), \qquad x \in U \subset X. \tag{2.14}$$

Lema 2.4.4. *$\varepsilon\colon \Lambda\Gamma_h \to Y$ es un morfismo entre haces.*

Demostración. Primero veamos que ε está bien definida.

Sea $[s \in \Gamma_h U]_x \in \Lambda\Gamma_h$. Supongamos que existe t una sección del haz h tal que $\widehat{s}(x) = \widehat{t}(x)$; es decir $[s \in \Gamma_h U]_x = [t \in \Gamma_h V]_x$.

Entonces existe W una vecindad de x tal que $W \subset U \cap V$ y $s|_W = t|_W$. Entonces $s(x) = t(x)$. Entonces $\varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x) = \varepsilon([t \in \Gamma_h V]_x)$.

Por lo tanto ε está bien definida.

Sea $V \subset Y$ una vecindad de $s(x) = \varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x)$.

Como s es continua, existe un abierto $U' \subseteq U$, con $x \in U'$, tal que $s(U') \subseteq V$.

Consideremos $\widehat{s|_{U'}}(U')$ un abierto básico de $\Lambda\Gamma_h$.

Como $[s \in \Gamma_h U]_x = [s|_{U'} \in \Gamma_h U']_x$ entonces $[s \in \Gamma_h U]_x \in \widehat{s|_{U'}}(U')$.

Sea $[s \in \Gamma_h U']_y \in \widehat{s|_{U'}}(U')$. Entonces $\varepsilon([s|_{U'} \in \Gamma_h U']_y) = s|_{U'}(y)$. Como $s|_{U'}$ es una sección del haz h, se tiene $hs|_{U'}(y) = y \in U'$. Así que $s|_{U'}(x) \in h^{-1}(U')$, por lo que $\varepsilon(\widehat{s|_{U'}}(U')) \subset V$

Por lo tanto ε es una función continua.

Sea $[s \in \Gamma_h U]_x \in \Lambda\Gamma_h$. Entonces $p([s \in \Gamma_h U]_x) = x$, donde p es el haz $p\colon \Lambda\Gamma_h \to X$. Además, como s es una sección del haz h, $h \circ \varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x) = hs(x) = x$.

Por lo tanto ε es un morfismo entre los haces $p\colon \Lambda\Gamma_h \to X$ y $h\colon Y \to X$. ■

Lema 2.4.5. *$\varepsilon\colon \Lambda\Gamma \to 1_{\mathbf{Top}/X}$ es una transformación natural.*

Demostración. Sea $f\colon Y \to Z$ un morfismo entre haces en $\mathbf{Top}/X$.

Sea $[s \in \Gamma Y U]_x$ un elemento de $\Lambda\Gamma Y$.

Por la definición de ε se tiene que $\varepsilon_Y([s \in \Gamma Y U]_x) = s(x)$, y la imagen bajo f es $f(s(x))$.

Por otro lado, por la definición de las transformaciones en $\Lambda\Gamma$, tenemos que $\Lambda\Gamma f([s \in \Gamma Y U]_x) = [f \circ s \in \Gamma Z U]_x$, y por la definición de ε se tiene que $\varepsilon_Z([f \circ s \in \Gamma Z U]_x) = f(s(x))$.

Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda\Gamma Y \arrow[r, "\varepsilon_Y"] \arrow[d, "\Lambda\Gamma f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \Lambda\Gamma Z \arrow[r, "\varepsilon_Z"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por lo tanto ε es una transformación natural. ■

Teorema 2.4.6. *El haz $h\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local si y solo si ε es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que el haz $h\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local.

Supongamos que $\varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x) = \varepsilon([t \in \Gamma_h V]_y)$; es decir, $s(x) = t(y)$. Como s y t son secciones del haz h se tiene que $x = hs(x) = ht(y) = y$.

Como $h\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local, $s(x)$ tiene una vecindad $W' \subset Y$ homeomorfa a una vecindad de x en X.

Como s y t son secciones del homeomorfismo local h, son funciones abiertas (lema 2.3.17). Entonces existe W una vecindad de $s(x)$ tal que $W \subset s(U) \cap t(V) \cap W'$.

Entonces $h(W)$ es una vecindad de x tal que $s|_{h(W)} = t|_{h(W)}$. Entonces $[s \in \Gamma_h U]_x = [s|_{h(W)} \in \Gamma_h h(W)]_x = [t|_{h(W)} \in \Gamma_h h(W)]_x = [t \in \Gamma_h V]_x$.

Por lo tanto ε es inyectiva.

Sea $y \in Y$. Como h es un homeomorfismo local, existe V vecindad de y tal que $h|_V$ es un homeomorfismo, entonces $h(V)$ es un abierto de X.

$(h|_V)^{-1}\colon h(V) \to Y$ es una sección del haz h, entonces $[(h|_V)^{-1} \in \Gamma_h h(V)]_{h(y)}$ es un elemento de $\Lambda\Gamma_h$ tal que $\varepsilon([(h|_V)^{-1} \in \Gamma_h h(V)]_{h(y)}) = y$.

Por lo tanto ε es suprayectiva.

Sea $\widehat{s}(U)$ un abierto básico de $\Lambda\Gamma_h$ con $s \in \Gamma_h$.

Entonces

$$\varepsilon(\widehat{s}(U)) = \{\varepsilon([s \in \Gamma_h U]_x) \mid x \in U\} = \{s(x) \mid x \in U\} = s(U).$$

Como s es una función abierta por ser sección de h (lema 2.3.17), $s(U)$ es un abierto.

Por lo tanto ε es una función abierta. ■

Teorema 2.4.7. *Para cualquier espacio X, los funtores*

$$\mathbf{Top}/X \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$$

son adjuntos.

Demostración. Demostraremos la adjunción $\Lambda \dashv \Gamma$ mostrando las identidades triangulares correspondientes para las η y ε definidas anteriormente.

Primero veamos que la composición

$$\Lambda \xrightarrow{\Lambda\eta} \Lambda\Gamma\Lambda \xrightarrow{\varepsilon\Lambda} \Lambda \tag{2.15}$$

es la transformación identidad en Λ.

Para eso necesitamos ver que

$$\Lambda P \xrightarrow{\Lambda\eta_P} \Lambda\Gamma\Lambda P \xrightarrow{\varepsilon\Lambda_P} \Lambda P$$

es la identidad para cada P en $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$.

Sean P una pregavilla en $\mathbf{Con}^{\mathcal{A}(X)^{op}}$ y $[s \in PU]_x$ un elemento de ΛP.

Por la definición de morfismos entre haces, dada en el lema 2.3.6, se tiene que $\Lambda_{\eta_P}([s \in PU]_x) = [(\eta_P)_U(s) \in \Gamma\Lambda PU]_x$.

Por la definición de η, tenemos que $[(\eta_P)_U(s) \in \Gamma\Lambda PU]_x = [\widehat{s} \in \Gamma\Lambda PU]_x$.

Ahora, $\varepsilon_{\Lambda_P}([\widehat{s} \in \Gamma\Lambda PU]_x) = \widehat{s}(x)$, por la definición de ε. Por último, como $\widehat{s}(x) = [s \in PU]_x$, entonces $id_{\Lambda P} = \varepsilon_{\Lambda_P} \circ \Lambda_{\eta_P}$.

Por lo tanto (2.15) es la identidad en Λ.

Ahora veamos que la composición

$$\Gamma \xrightarrow{\eta\Gamma} \Gamma\Lambda\Gamma \xrightarrow{\Gamma\varepsilon} \Gamma \tag{2.16}$$

es la transformación identidad en Γ.

Para eso, debemos ver que

$$\Gamma_p \xrightarrow{\eta\Gamma_p} \Gamma\Lambda\Gamma_p \xrightarrow{\Gamma\varepsilon_p} \Gamma_p$$

es la identidad para todo haz $p\colon Y \to X$ en $\mathbf{Top}/X$.

Esto se hace tomando U, cualquier abierto de X y probando que

$$\Gamma_p(U) \xrightarrow{\eta_{\Gamma_p(U)}} \Gamma\Lambda\Gamma_p(U) \xrightarrow{\Gamma\varepsilon_p(U)} \Gamma_p(U)$$

es la identidad en $\Gamma_p(U)$.

Sean U un abierto de X y $s\colon U \to Y$ un elemento de $\Gamma_p(U)$. Por la definición de η, se tiene que $\eta_{\Gamma_p(U)}(s) = \widehat{s}$.

Por la definición de los morfismos en Γ, tenemos que $\Gamma\varepsilon_p(U)(\widehat{s}) = \varepsilon \circ \widehat{s}$.

Obviamente, s y $\varepsilon \circ \widehat{s}$ tienen el mismo dominio y codominio. Sea $x \in U$, entonces $\varepsilon \circ \widehat{s}(x) = \varepsilon([s \in PU]_x) = s(x)$. Entonces $id_{\Gamma_p(U)} = \Gamma\varepsilon_p(U) \circ \eta\Gamma_p(U)$ para todo U abierto de X; es decir, $id_{\Gamma_p} = \Gamma\varepsilon_p \circ \eta\Gamma_p$.

Por lo tanto (2.16) es la identidad en Γ.

Por lo tanto $\Lambda \dashv \Gamma$. ∎

Teorema 2.4.8. *Los funtores Γ y Λ definidos anteriormente y restringidos, son una equivalencia de categorías*

$$\mathbf{Gav}(X) \rightleftarrows \mathbf{HL}/X$$

Demostración. Por el teorema anterior, los funtores Γ y Λ son adjuntos.

Además es claro que las transformaciones naturales η y ε son la unidad y la counidad, respectivamente, de dicha adjunción. Por último, los teoremas 2.4.3 y 2.4.6 demuestran que estas transformaciones son isomorfismos naturales cuando se les restringe según la hipótesis de este teorema.

Por lo tanto, de acuerdo a la definición 1.4.9, los funtores Γ y Λ son una equivalencia entre las categorías $\mathbf{Gav}(X)$ y $\mathbf{HL}/X$. ∎

2.5 Cambio de base

En esta sección veremos cómo una función continua entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ induce un par de funtores, en ambas direcciones, entre las categorías de gavillas de dichos espacios

$$\mathbf{Gav}(X) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Gav}(Y)\ .$$

Definición 2.5.1. $f_*\colon \mathbf{Gav}(X) \to \mathbf{Gav}(Y)$ *se definirá de la siguiente manera: si $F \in \mathbf{Gav}(X)$ y V es un abierto de Y entonces $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$.*

Además, si $h\colon F \to G$ es un morfismo en $\mathbf{Gav}(X)$ y V es un abierto de Y entonces $f_*h(V) = h_{(f^{-1}(V))}$.

Lema 2.5.2. *f_*F es una gavilla.*

Demostración. Sea V un abierto de Y y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de V es decir, $V = \bigcup_{i\in I} V_i$.

Veamos que

$$f_*F(V) \xrightarrow{e} \prod_i f_*F(V_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} f_*F(V_i \cap V_j) \tag{2.17}$$

es un igualador en **Con**.

Como $f\colon X \to Y$ es una función continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto de X para todo abierto V de Y.

Definamos $U = f^{-1}(V)$ y $U_i = f^{-1}(V_i)$ para toda $i \in I$.

Entonces U es un abierto de X y $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U. Por lo tanto $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.

Por la definición de f_*, el diagrama (2.17) es igual al diagrama

$$FU \xrightarrow{e} \prod_i FU_i \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

que es un igualador en **Con** porque F es una gavilla. ■

Lema 2.5.3. *$f_*\colon$ **Gav**$(X) \to$ **Gav**(Y) es un funtor.*

Demostración. Sea F una gavilla sobre el espacio X y sea $id_F\colon F \to F$ la transformación natural identidad.

Sea V abierto del espacio Y. Veamos que

$$f_*F(V) \xrightarrow{f_*id_F(V)} f_*F(V)$$

es la identidad para todo V abierto de Y.

Por la definición 2.5.1 tenemos que lo anterior es igual a

$$F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{id_{F(f^{-1}(V))}} F(f^{-1}(V))$$

que es la identidad para todo V abierto de Y.

Por lo tanto f_* respeta identidades.

Sean $k\colon F \to G$ y $l\colon G \to H$ transformaciones naturales entre gavillas.

Sea V abierto del espacio Y. Veamos que

$$f_*F(V) \xrightarrow{f_*k(V)} f_*G(V) \xrightarrow{l_*k(V)} f_*H(V)$$

es la composición $f_*(l \circ k)$

Por la definición 2.5.1 tenemos que lo anterior es igual a

$$F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{k_{(f^{-1}(V))}} G(f^{-1}(V)) \xrightarrow{l_{(f^{-1}(V))}} H(f^{-1}(V)).$$

Como k y l son transformaciones naturales, lo anterior es igual a

$$F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{lok_{(f^{-1}(V))}} H(f^{-1}(V)).$$

que es la definición de

$$f_*F(V) \xrightarrow{f_*(lok)(V)} f_*H(V).$$

Por lo tanto f_* respeta composiciones. ∎

Definición 2.5.4. *$f^*: \mathbf{Top}/Y \to \mathbf{Top}/X$ se definirá de la siguiente manera: si $p: E \to Y \in \mathbf{Top}/Y$ entonces f^*p, o simplemente p^*, es el producto fibrado de p a lo largo de f como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p^*"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

Además, si $k: p \to p'$ es un morfismo en $\mathbf{Top}/Y$, como el cuadrado interior de

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[dr, dashed, "k^*"] \arrow[ddr, bend right, "p^*"'] & E \arrow[dr, bend left, "k"] & \\ & f^*E' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "p'^*"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

es un producto fibrado y la parte externa conmuta, ya que

$$f \circ p^* = p \circ e = p' \circ k \circ e,$$

el morfismo k induce un único morfismo f^*k, o simplemente k^*, que hace que el diagrama (2.19) conmute.

Lema 2.5.5. *Si $p: E \to Y$ es un homeomorfismo local, $p^*: f^*E \to X$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sabemos que $f^*E = \{\langle x, e\rangle \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$ con la topología que hereda de $X \times E$.

Sea $\langle x, e\rangle \in f^*E$. Como p es un homeomorfismo local existe U vecindad abierta de e, homeomorfa a $p(U)$ abierto de Y.

Como f es continua, $f^{-1}(p(U))$ es un abierto de X. Además $f(x) = p(e) \in p(U)$, entonces $x \in f^{-1}(p(U))$.

Por lo tanto $(f^{-1}(p(U)) \times U) \cap f^*E$ es una vecindad abierta de $\langle x, e\rangle$.

Veamos que dicha vecindad es homeomorfa $f^{-1}(p(U))$ a través de p^*.

Sea $z \in f^{-1}(p(U))$, entonces $f(z) \in p(U)$, entonces existe $u \in U$ tal que $f(z) = p(u)$. Entonces $\langle z, u\rangle \in (f^{-1}(p(U)) \times U) \cap f^*E$ y $p^*(\langle z, u\rangle) = z$.

Por lo tanto p^* es sobre.

Sean $\langle z, v\rangle$, $\langle z', v'\rangle \in (f^{-1}(p(U)) \times U) \cap f^*E$ tales que $p^*(\langle z, v\rangle) = p^*(\langle z', v'\rangle)$, entonces $z = p^*(\langle z, v\rangle) = p^*(\langle z', v'\rangle) = z'$.

Además $p(v) = f(z) = f(z') = p(v')$. Como p es un homeomorfismo en U y v, $v' \in U$, entonces $v = v'$.

Por lo tanto p^* es inyectiva.

Por construcción p^* es continua y por ende cualquiera de sus restricciones. Por lo que basta demostrar que p^* es abierta.

Sean $A \subset f^{-1}(p(U))$ y $B \subset U$. Entonces el abierto $A' \times B' = (A \times B) \cap f^*E$ está contenido en $(f^{-1}(p(U)) \times U) \cap f^*E$.

Como $B \subset U$, $p(B)$ es un abierto y como f es continua, $f^{-1}(p(B))$ también es un abierto.

Sea $\langle y, a\rangle \in A' \times B'$; es decir $y \in A$, $a \in B$ y $f(y) = p(a)$.

Como $a \in B$ y $f(y) = p(a)$, $f(y) \in p(B)$. Entonces $y \in f^{-1}(p(B)) \cap A$. Así que $((f^{-1}(p(B)) \cap A) \times B) \cap f^*E$ es una vecindad de $\langle y, a\rangle$ contenida en $A' \times B'$.

Veamos que $p^*(((f^{-1}(p(B)) \cap A) \times B) \cap f^*E) = f^{-1}(p(B)) \cap A$.

Claramente $p^*(((f^{-1}(p(B)) \cap A) \times B) \cap f^*E)$ está contenida en $f^{-1}(p(B)) \cap A$.

Sea $z \in f^{-1}(p(B)) \cap A$. Como $z \in f^{-1}(p(B))$, $f(z) \in p(B)$, así que existe $c \in B$ tal que $f(z) = p(c)$. Entonces $\langle z, c\rangle \in ((f^{-1}(p(B)) \cap A) \times B) \cap f^*E$ y $p^*(\langle z, c\rangle) = z$.

Por lo tanto $p^*(((f^{-1}(p(B)) \cap A) \times B) \cap f^*E) = f^{-1}(p(B)) \cap A$.

Por lo tanto p^* es una función abierta. ∎

Lema 2.5.6. $f^*\colon$ **Top**$/X \to$ **Top**$/Y$ *es un funtor.*

Demostración. Sea $p\colon E \to Y \in$ **Top**$/Y$ y $1_p\colon p \to p$ su función identidad.

Por construcción, el único morfismo que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[rrr, "e"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, "p^*"'] & & & E \arrow[dl, "1_E"'] \arrow[ddl, bend left] \\
& f^*E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p^*"'] & E \arrow[d, "p"] & \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

es $1_{p*}\colon p* \to p*$.

Por lo tanto f^* respeta identidades.

Sean $k: p \to p'$ y $k': p' \to p''$ morfismos en $\mathbf{Top}/Y$. Los morfismos que inducen k y k' son tales que su composición $k'^* \circ k^*$ hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[rrr, "e"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, "p^*"'] & & & E \arrow[dl, "k' \circ k"'] \arrow[ddl, bend left, "p"] \\
& f^*E'' \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "p''^*"] & E'' \arrow[d, "p''"] & \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

haciendo las veces del morfismo inducido por la composición $k' \circ k$ y como éste es único, $k'^* \circ k^* = (k' \circ k)^*$.

Por lo tanto f^* respeta composiciones. ■

Por este lema, $f: X \to Y$ genera un funtor $\mathbf{Gav}(Y) \to \mathbf{Gav}(X)$ a través de la composición

$$\mathbf{Gav}(Y) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{Top}/Y \xrightarrow{f^*} \mathbf{Top}/X \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{Gav}(X). \qquad (2.20)$$

Veamos cuál es la descripción de $\Gamma f^* \Lambda G$ para una gavilla $G \in \mathbf{Gav}(Y)$.

Por la definición de Λ (2.10),

$$\Lambda G = \{[s \in GV]_y \mid y \in Y, s \in GV\}$$

y el homeomorfismo local $p: \Lambda G \to Y$ es tal que $p([s \in GV]_y) = y$.

Entonces, por la definición de f^* (lema 2.5.5),

$$f^*\Lambda G = \{\langle x, [s \in GV]_y \rangle \in X \times \Lambda G \mid f(x) = p([s \in GV]_y)\}$$

y $p^*: f^*\Lambda G \to X$ es tal que $p^*(\langle x, [s \in GV]_y \rangle) = x$.

Como $p([s \in GV]_y) = y$ podemos reescribir a $f^*\Lambda G$ como

$$f^*\Lambda G = \{\langle x, [s \in GV]_y \rangle \in X \times \Lambda G \mid f(x) = y\}$$

y finalmente como

$$f^*\Lambda G = \{\langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle \in X \times \Lambda G \mid x \in X, s \in GV\}.$$

Por último tenemos que $\Gamma f^* \Lambda G = \Gamma_{p^*}$, así que para cada abierto $U \subset X$ tenemos que

$$\Gamma_{p^*}(U) = \{t: U \to f^*\Lambda G \text{ continua} \mid p^* \circ t = i_U\}.$$

De hecho, por la definición de f^*, cada sección $t \in \Gamma_{p^*}(U)$ puede ser descrita a través de una función continua $t' : U \to \Lambda G$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, bend left, "t'"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& f^*\Lambda G \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\
& X \arrow[r] & Y.
\end{tikzcd}$$

En particular, para cada abierto $V \subset Y$ y cada $s \in GV$ y su correspondiente sección $\widehat{s} : V \to \Lambda G$ descrita en (2.11), se induce una sección t_s de p^* de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "t_s"] \arrow[ddr, bend right] & & V \arrow[d, bend left, "\widehat{s}"] \\
& f^*\Lambda G \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

ya que para toda $x \in f^{-1}(V)$ tenemos

$$p(\widehat{s}(f(x))) = p([s \in GV]_{f(x)}) = f(x).$$

Explícitamente, si $x \in f^{-1}(V)$, tenemos que $t_s(x) = \langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle$.

Por construcción t_s es continua y por la conmutatividad del diagrama anterior t_s es una sección de p^*. Por lo tanto (lema 2.3.17) $t_s(f^{-1}(V))$ es un abierto de $f^*\Lambda G$.

Además, para cada punto $\langle z, [r \in GW]_{f(z)} \rangle \in f^*\Lambda G$, la correspondiente sección $t_r : f^{-1}(W) \to f^*\Lambda G$ es tal que $t_r(z) = \langle z, [r \in GW]_{f(z)} \rangle$, por lo que

$$f^*\Lambda G = \bigcup_{W \subset Y, r \in G(W)} t_r(f^{-1}(W)). \tag{2.21}$$

Definición 2.5.7. *Denotaremos como* $f^* : \mathbf{Gav}(Y) \to \mathbf{Gav}(X)$ *a la composición (2.20).*

Demostremos ahora un lema de gran utilidad.

Lema 2.5.8. *Sea* T *un espacio topológico. Una función* $k : f^*\Lambda G \to T$ *es continua si y solo si*

$$f^{-1}(W) \xrightarrow{t_r} f^*\Lambda G \xrightarrow{k} T$$

es continua para todo $W \subset Y$ *y para toda* $r \in GW$.

Demostración. Supongamos que $k: f^*\Lambda G \to T$ es una función continua. Como cada t_r es continua por construcción, la composición $k \circ t_r$ también es continua para toda t_r.

Supongamos ahora que $k \circ t_r : f^{-1}(W) \to T$ es continua para todo $W \subset Y$ y para toda $r \in GW$. Veamos que k es una función continua.

Sea U un abierto de T y $\langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle$ un punto de $k^{-1}(U)$. Por hipótesis, la correspondiente sección t_s es tal que la composición $k \circ t_s$ es continua, así que $(k \circ t_s)^{-1}(U) = (t_s^{-1} \circ k^{-1})(U)$ es un abierto.

Finalmente, como t_s es una función abierta (lema 2.3.17), podemos concluir que el conjunto $t_s((t_s^{-1} \circ k^{-1})(U)) = k^{-1}(U)$ es abierto.

Por lo tanto k es una función continua. ∎

Teorema 2.5.9. *Si $f: X \to Y$ es una función continua, entonces $f^* \dashv f_*$*

Demostración. Sean $F \in \mathbf{Gav}(X)$ y $G \in \mathbf{Gav}(Y)$.

Debemos probar que $\mathbf{Gav}(X)(f^*G, F) \cong \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*F)$ y lo haremos a través de varios pasos intermedios.

Por el teorema 2.4.8 sabemos que $\mathbf{Gav}(X)(f^*G, F) \cong \mathbf{HL}/X(\Lambda f^*G, \Lambda F)$.

Haciendo explícito el significado de f^* tenemos que

$$\Lambda f^*G = \Lambda(\Gamma f^* \Lambda)G = f^*\Lambda G.$$

Definamos al conjunto $\mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F)$ como el conjunto de las funciones $k: f^*\Lambda G \to \Lambda F \in \mathbf{Top}/X$ tales que para cada abierto $V \subset Y$ y cada $s \in G(V)$, la composición $k \circ t_s : f^{-1}(V) \to f^*\Lambda G \to \Lambda F$ es continua.

Por el lema 2.5.8, tenemos que $\mathbf{HL}/X(\Lambda f^*G, \Lambda F) \cong \mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F)$.

Ahora veamos que $\mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F) \cong \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F)$.

Sea $k: f^*\Lambda G \to \Lambda F \in \mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F)$. Definamos $\tau_k : G \to f_*\Gamma\Lambda F$ como

$$(\tau_k)_V : GV \to f_*\Gamma\Lambda F V, \quad s \mapsto k \circ t_s \tag{2.22}$$

para cada $V \in Y$.

$k \circ t_s$ es una función continua tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[r, "t_s"] \arrow[dr, "i_{f^{-1}(V)}"'] & f^*\Lambda G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p^*"] & \Lambda F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta, porque t_s es una sección de p^* y k es un morfismo en $\mathbf{Top}/X$. Así que $k \circ t_s$ es una sección de q. Por lo tanto $k \circ t_s \in f_*\Gamma\Lambda F V = \Gamma\Lambda F(f^{-1}(V))$.

Veamos que τ_k es una transformación natural. Sean W, V abiertos de Y tales que $W \subset V$. Para ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} GV \arrow[r, "(\tau_k)_V"] \arrow[d] & \Gamma\Lambda F(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ GW \arrow[r, "(\tau_k)_W"'] & \Gamma\Lambda F(f^{-1}(W)) \end{tikzcd}$$

conmuta, basta ver que $k \circ t_s|_W = k \circ t_{s|_W}$ para toda $s \in GV$, para lo cual resta demostrar que $t_s|_W = t_{s|_W}$.

Veamos que $t_s|_W = i_{f^{-1}(W)} \circ t_s$ es tal que los triángulos del diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(W) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "t_s|_W"] \arrow[ddr, hook, bend right] & W \arrow[dr, "\widehat{s|_W}"] & \\
& f^*\Lambda G \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y,
\end{tikzcd} \tag{2.23}$$

conmutan, para ver que es igual a $t_{s|_W}$.

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(W) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & f^{-1}(V) \arrow[r, "t_s"] \arrow[d, hook] & f^*\Lambda G \arrow[dl, "p^*"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

conmuta de manera trivial en el lado izquierdo y por definición de t_s en el lado derecho.

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(W) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & W \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\widehat{s|_W}"] & \\
f^{-1}(V) \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "t_s"'] & V \arrow[dr, "\widehat{s}"'] & \\
f^*\Lambda G \arrow[rr] & & \Lambda G
\end{tikzcd}$$

conmuta de manera trivial en el cuadrado superior y en el triángulo a la derecha y por definición de t_s en el cuadrado inferior.

Por lo tanto el diagrama (2.23) conmuta, así que $t_s|_W = t_{s|_W}$.

Entonces τ_k es transformación natural. Por lo tanto $\tau_k \in \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F)$.

Sea $\tau \in \mathrm{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F)$. Definamos k_τ como

$$k_\tau : f^*\Lambda G \to \Lambda F, \quad \langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle \mapsto \tau_V(s)(x). \tag{2.24}$$

Sean $V \subset Y$ un abierto y $s \in GV$. Entonces $\tau_V(s) \in f_*\Gamma\Lambda FV$, así que es una sección de la forma $\tau_V(s) : f^{-1}(V) \to \Lambda F$. Por lo tanto $\tau_V(s)(x)$ está efectivamente en ΛF.

Veamos que k_τ está bien definida.

Sea $[r \in GW]_{f(x)} = [s \in GV]_{f(x)}$. Entonces existe $U \subset V \cap W$ vecindad de $f(x)$ tal que $r|_U = s|_U$. Así que

$$\tau_V(s)(x) = \tau_U(s)(x) = \tau_U(r)(x) = \tau_W(r)(x),$$

por lo que k_τ está bien definida.

Sean $V \subset Y$ un abierto, $s \in GV$ y $x \in f^{-1}(V)$. Entonces, por definición

$$(k_\tau \circ t_s)(x) = k_\tau(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle) = \tau_V(s)(x).$$

Por lo tanto $(k_\tau \circ t_s) = \tau_V(s)$. Como $\tau_V(s)$ es una función continua, por el lema 2.5.8, k_τ es una función continua.

Sea $\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle \in f^*\Lambda G$. Como $\tau_V(s)$ es una sección de q, se tiene que

$$q(k_\tau(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle)) = q(\tau_V(s)(x)) = x = p^*(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle),$$

por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*\Lambda G \arrow[rr, "k_\tau"] \arrow[dr, "p^*"'] & & \Lambda F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Por lo tanto $k_\tau \in \mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F)$.

Sean $\tau: G \to f_*\Gamma\Lambda F \in \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F)$, $V \subset Y$, $s \in GV$ y $x \in f^{-1}(V)$. Entonces

$$\begin{aligned} \tau_{k_\tau V}(s)(x) &= k_\tau \circ t_s(x) && (2.22) \\ &= k_\tau(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle) && \text{def. de } t_s \\ &= \tau_V(s)(x) && (2.24). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_{k_\tau} = \tau$.

Sea $k: f^*\Lambda G \to \Lambda F \in \mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F)$ y $\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle \in f^*\Lambda G$. Entonces

$$\begin{aligned} k_{\tau_k}(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle) &= \tau_{kV}(s)(x) && (2.24) \\ &= k \circ t_s(x) && (2.22) \\ &= k(\langle x, [s \in GV]_{f(x)}\rangle) && \text{def. de } t_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto $k_{\tau_k} = k$.

Por lo tanto $\mathbf{K}(\Lambda f^*G, \Lambda F) \cong \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F)$.

Finalmente tenemos que como F es una gavilla, el funtor $\eta: f_*F \to f_*(\Gamma\Lambda F)$ definido en (2.12) es un isomorfismo (teorema 2.4.3) y como f_* es un funtor, $f_*(\eta): f_*F \to f_*(\Gamma\Lambda F)$ es un isomorfismo.

Por lo tanto $\mathbf{Gav}(Y)(G, f_*\Gamma\Lambda F) \cong \mathbf{Gav}(Y)(G, f_*F)$. ■

Lema 2.5.10. *El funtor* $f^*: \mathrm{Gav}(Y) \to \mathrm{Gav}(X)$ *es exacto izquierdo; es decir, preserva límites finitos.*

Demostración. Por el teorema 2.4.8, basta demostrar que el funtor f^* definido en 2.5.4 preserva límites finitos.

Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Top}/Y$ un funtor con $\mathbf{A}$ una categoría finita que tenga cono límite en $\mathbf{Top}/Y$. Denotaremos dicho cono como $(L, \langle \pi_A \rangle_{A\in\mathbf{A}})$.

Como f^* es un funtor, $(f^*L, \langle \pi_A^* \rangle_{A\in\mathbf{A}})$ es un cono en $\mathbf{Top}/X$ sobre el funtor $f^* \circ F$. Veamos que dicho cono es límite.

Sean $(M, \langle p_A \rangle_{A\in\mathbf{A}})$ otro cono sobre el funtor $f^* \circ F$ y $\alpha\colon A \to A' \in \mathbf{A}$ un morfismo.

El triángulo del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_{A'}"] & \\
f^*FA \arrow[rr, "F\alpha^*"] \arrow[d, "a"'] & & f^*FA' \arrow[d, "a'"] \\
FA \arrow[rr, "F\alpha"'] & & FA'
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que M es cono y el cuadrado comuta porque es el cuadrado superior del diagrama (2.19) correspondiente al morfismo $F\alpha\colon FA \to FA'$. Entonces $(M, \langle a \circ p_A \rangle_{A\in\mathbf{A}})$ es un cono sobre el funtor F. Como $(L, \langle \pi_A \rangle_{A\in\mathbf{A}})$ es el cono límite de dicho funtor, existe una única flecha $\mu\colon M \to L$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, dashed, "\mu"] \arrow[dr, "p_A"'] & & L \arrow[ddl, "\pi_A"] \\
 & f^*FA \arrow[d, "a"'] & \\
 & FA &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $A \in \mathbf{A}$.

Entonces $\mu^*\colon M \to L^*$ es un morfismo único tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, dashed, "\mu^*"] \arrow[dr, "p_A"'] & & L^* \arrow[dl, "\pi_A^*"] \\
 & f^*FA &
\end{tikzcd}$$

para todo $A \in \mathbf{A}$.

Por lo tanto $f^*\colon \mathbf{Gav}(Y) \to \mathbf{Gav}(X)$ es exacto izquierdo. ■

En esta ocasión hemos hecho paso a paso el desarrollo del adjunto izquierdo de f_*, aunque también se puede seguir el camino que señalan las extensiones de Kan en el lema 1.5.3.

Capítulo 3

Morfismos ultrafinitos

En esta sección demostraremos tres proposiciones que nos indicarán qué funciones continuas $f: X \to Y$ inducen un cambio de base tal que el funtor $f_*: \mathbf{Gav}(X) \to \mathbf{Gav}(Y)$ preserva objeto inicial, epimorfismos y sumas finitas, escenciales en la estructura de modelos de la categoría $\mathbf{Gav}(X)$.

El objeto inicial de $\mathbf{Gav}(X)$, denotado como $\mathbf{0}$, es un funtor tal que $\mathbf{0}(U) = \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{A}(X)$, excepto para el conjunto vacío cuya imagen es siempre el conjunto $\{*\}$.

Una manera de ver ésto es con gavillanizando. Sea $0: \mathcal{A}(X)^{op} \to \mathbf{Con}$ la pregavilla tal que para todo abierto $U \in \mathcal{A}(X)^{op}$, $0(U) = \emptyset$. Ésta es la pregavilla inicial.

Calcularemos $\Gamma\Lambda(0)$ para obtener una gavilla inicial en $\mathbf{Gav}(X)$.

Primero tenemos que $\Lambda(0) = \{[s \in 0U]_x \mid x \in X, s \in 0U\}$. Como $0U = \emptyset$ para todo U, $\Lambda(0) = \emptyset$.

Ahora, $\Gamma_\emptyset U = \{s: U \to \emptyset \mid s$ sección de $i: \emptyset \hookrightarrow X\}$, por lo tanto $\Gamma_\emptyset U = \emptyset$ si $U \neq \emptyset$, de lo contrario $\Gamma_\emptyset \emptyset = \{I_\emptyset: \emptyset \to \emptyset\}$, es decir, $\Gamma_\emptyset \emptyset = \{*\}$

Proposición 3.0.11. *Sea $f: X \to Y$ una función continua, entonces el funtor $f_*: \mathbf{Gav}(X) \to \mathbf{Gav}(Y)$ preserva el objeto inicial si y solo si $f(X)$ es denso en Y.*

Demostración. Supongamos que f_* preserva objeto inicial. Sea V un abierto de Y no vacío, entonces $f_*\mathbf{0}(V) = \emptyset$, es decir $\mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset$. Por lo tanto $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Así que $f(X)$ es denso en Y.

Ahora supongamos que $f(X)$ es denso en Y. Sea V un abierto de Y no vacío, entonces $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, así que $\mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset$, es decir $f_*\mathbf{0}(V) = \emptyset$. Por lo tanto $f_*\mathbf{0}$ es el objeto inicial de $\mathbf{Gav}(Y)$. ■

La proposición correspondiente a epimorfismos tiene un par de lemas de soporte.

Lema 3.0.12. *Si para cada abierto $V \subset Y$, cada punto $y \in V$ y cada cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f^{-1}(V)$, existen un abierto $W \subset Y$, tal que $y \in W \subset V$ y* *una cubierta abierta disjunta $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $f^{-1}(W)$, tal que $W_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$, entonces para todo $q\colon E \to f^{-1}(V)$ epimorfismo en $\mathbf{HL}/X$, existe $t\colon f^{-1}(W) \to E$ continua tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "t"'] & & f^{-1}(V) \\ & E \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

conmuta.

Demostración. Sea $q\colon E \to f^{-1}(V)$ un epimorfismo en $\mathbf{HL}/X$, es decir un homeomorfismo local suprayectivo.

Para cada $x \in f^{-1}(V)$ tomamos abiertos $U_x \subset f^{-1}(V)$ y $U_x{}' \subset E$ tales que $q\colon U_x{}' \to U_x$ sea un homeomorfismo.

$\{U_x\}_{x\in f^{-1}(V)}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(V)$. Así que existe un abierto $W \subset V$ con $y \in W$ y una cubierta abierta y ajena $\{W_x\}_{x\in f^{-1}(V)}$ de $f^{-1}(W)$ tal que $W_x \subset U_x$ para todo $x \in f^{-1}(V)$.

Definamos t_x como $(q|_{U_x{}'})^{-1}|_{W_x}\colon W_x \to E$. Como los W_x son ajenos y forman una cubierta de $f^{-1}(W)$, podemos juntar las t_x en una función continua $t\colon f^{-1}(W) \to E$ tal que $t|_{W_x} = t_x$.

Sea $x \in f^{-1}(W)$, en particular $x \in W_z$ para alguna $z \in f^{-1}(W)$. Entonces $q \circ t(x) = q \circ q^{-1}(x) = x$.

Por lo tanto, el diagrama (3.1) conmuta. ∎

Lema 3.0.13. *Sea $h\colon E \to E'$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmute, entonces $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo si y solo si para todo V abierto de Y, todo punto $y \in V$ y cualquier sección $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ de p', existen $W \subset V$ con $y \in W$ y $t\colon f^{-1}(W) \to E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "h"] \\ f^{-1}(V) \arrow[r, "s"'] & E' \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

conmuta.

Demostración. $\Lambda f_*\Gamma(h)\colon \Lambda f_*\Gamma(E) \to \Lambda f_*\Gamma(E')$ es un morfismo en $\mathbf{HL}/Y$ tal que $\Lambda f_*\Gamma(h)([r \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y) = [h \circ r \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y$.

Sean V un abierto de Y, $y \in V$ un punto y $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ una sección del haz p'.

Supongamos que $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo.

Entonces existe $[t \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y \in \Lambda f_*\Gamma(E)$ tal que

$$[h \circ t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y = [s \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y.$$

Así que existe $W \subset V$ con $y \in W$ tal que $h \circ t|_{f^{-1}(W)} = s|_{f^{-1}(W)}$.

Por lo tanto el diagrama (3.2) conmuta.

Supongamos ahora que existe $W \subset V$ con $y \in W$ tal que el diagrama (3.2) conmuta.

Entonces

$$[h \circ t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(W)]_y = [s|_{f^{-1}(W)} \in \Gamma_{p'} f^{-1}(W)]_y = [s \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y.$$

Por lo tanto $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo. ■

Proposición 3.0.14. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua, entonces el funtor $f_*\colon$ **Gav**$(X) \to$ **Gav**(Y) preserva epimorfismos si y solo si para cada abierto $V \subset Y$, cada punto $y \in V$ y cada cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $f^{-1}(V)$, existen un abierto $W \subset Y$, tal que $y \in W \subset V$ y una cubierta abierta disjunta $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $f^{-1}(W)$, tal que $W_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$.*

Demostración. Supongamos que $f_*\colon$ **Gav**$(X) \to$ **Gav**(Y) preserva epimorfismos. Sean $V \subset Y$ un abierto, $y \in V$ un punto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de $f^{-1}(V)$.

Consideremos el morfismo

$$\rho\colon \coprod U_\alpha \longrightarrow f^{-1}(V)$$

tal que $\rho(x) = x$ para todo $x \in \coprod U_\alpha$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una cubierta de $f^{-1}(V)$, ρ es una función suprayectiva, además ρ es una función continua, por lo que ρ es un epimorfismo en **HL**$/X$.

Como f_* preserva epimorfismos y $1_{f^{-1}(V)}$ es una sección de $i\colon f^{-1}(V) \hookrightarrow X$, existen un abierto $W \subset Y$, tal que $y \in W \subset V$ y una sección $t\colon f^{-1}(W) \to \coprod U_\alpha$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(W) \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook] & \coprod U_\alpha \arrow[d, "\rho"] \\
f^{-1}(V) \arrow[r, equal, "1_{f^{-1}(V)}"'] & f^{-1}(V)
\end{tikzcd}$$

conmuta (lema 3.0.13).

Como U_α es una abierto de $\coprod U_\alpha$ y t es una función continua, $t^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto de $f^{-1}(W)$ para toda $\alpha \in A$. Definamos W_α como $t^{-1}(U_\alpha)$.

Sea $x \in f^{-1}(W)$, entonces $t(x) \in \coprod U_\alpha$, en particular $t(x) \in U_\alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Entonces $x \in W_\alpha$. Por lo tanto $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(W)$.

Sea $x \in W_\alpha$, entonces $t(x) \in U_\alpha$, asi que $ht(x) = i(x) = x \in U_\alpha$. Por lo tanto $W_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$.

Sean W_α y W_β dos elementos de la cubierta, entonces

$$W_\alpha \cap W_\beta = t^{-1}(U_\alpha) \cap t^{-1}(U_\beta) = t^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = \emptyset$$

porque U_α y U_β son cofactores de $\coprod U_\alpha$ y por lo tanto $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ en $\coprod U_\alpha$.

Supongamos ahora que para cada abierto $V \subset Y$, cada punto $y \in V$ y cada cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f^{-1}(V)$, existen un abierto $W \subset Y$, tal que $y \in W \subset V$ y una cubierta abierta disjunta $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f^{-1}(W)$, tal que $W_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$ y veamos que f_* preserva epimorfismos.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

con h un epimorfismo.

Sean $V \subset Y$ un abierto, $y \in V$ un punto y $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ una sección del haz p'. Entonces $s(f^{-1}(V))$ es un abierto ya que las secciones de homeomorfismos locales son funciones abiertas (lema 2.3.17). También $h^{-1}(s(f^{-1}(V)))$ es un abierto porque h es una función continua.

Entonces la función

$$h^{-1}(s(f^{-1}(V))) \xrightarrow{h} s(f^{-1}(V)) \xrightarrow{p'} f^{-1}(V)$$

es un epimorfismo en $\mathbf{HL}/X$.

Por el lema 3.0.12, existen $W \subset V$ con $y \in W$ y $t\colon f^{-1}(W) \to h^{-1}(s(f^{-1}(V)))$ tal que

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "t"'] & & f^{-1}(V) \\ & h^{-1}(s(f^{-1}(V))) \arrow[ur, "p' o h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook] & h^{-1}(s(f^{-1}(V))) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "p' o h"] & E \arrow[d, "h"] \\ f^{-1}(V) \arrow[rr, "s"'] & & E'. \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Sabemos que el triángulo de la izquierda conmuta por el lema 3.0.12.

El cuadrado de la derecha conmuta ya que para todo $x \in h^{-1}(s(f^{-1}(V)))$ se tiene que $s \circ p' \circ h(x) = h(x)$ ya que s es una sección de p'.

Por lo tanto el diagrama (3.3) conmuta.

Así que por el criterio del lema 3.0.13, f_* preserva epimorfismos. ■

Proposición 3.0.15. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua con imagen densa, entonces $f_*\colon \mathbf{Gav}(X) \to \mathbf{Gav}(Y)$ preserva coproductos finitos si y solo si para todo abierto $V \subset Y$ y todo punto $y \in V$, siempre que $f^{-1}(V)$ sea la unión de dos abiertos ajenos de X, existe un abierto $W \subset Y$ con $y \in W$ tal que $f^{-1}(W)$ está contenido en uno de ellos.*

Demostración. Supongamos que f_* preserva coproductos finitos.

Entonces $\Lambda f_*\Gamma\colon \mathbf{HL}/X \to \mathbf{HL}/Y$ también los preserva (2.4.8).

Consideremos el siguiente coproducto en $\mathbf{HL}/X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "1_X"'] & X \coprod X \arrow[d, "\langle 1_X, 1_X\rangle"] & X \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "1_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sea $V \subset Y$, $y \in V$ y supongamos que $f^{-1}(V) = A \cup B$, con A y B abiertos ajenos.

Definamos $s\colon f^{-1}(V) \to X \coprod X$ de la siguiente manera:

$$s(x) = i_1(x), \text{ si } x \in A \qquad s(x) = i_2(x), \text{ si } x \in B$$

Claramente s es una sección del haz $\langle 1_X, 1_X\rangle$.

Además sabemos que $[s \in \Gamma_{\langle 1_X, 1_X\rangle} f^{-1}(V)]_y \in \Lambda f_*\Gamma(\langle 1_X, 1_X\rangle)$. Como $\Lambda f_*\Gamma$ preserva coproductos tenemos que el morfismo inducido

$$\Lambda f_*\Gamma(1_X) \coprod \Lambda f_*\Gamma(1_X) \xrightarrow{\varphi} \Lambda f_*\Gamma(\langle 1_X, 1_X\rangle)$$

es un isomorfismo.

Entonces existe $[t \in \Gamma_{1_X} f^{-1}(U)]_z \in \Lambda f_*\Gamma_{1_X} \coprod \Lambda f_*\Gamma_{1_X}$ tal que

$$\varphi([t \in \Gamma_{1_X} f^{-1}(U)]_z) = [s \in \Gamma_{\langle 1_X, 1_X\rangle} f^{-1}(V)]_y.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $[t \in \Gamma_{1_X} f^{-1}(U)]_z$ pertenece al primer cofactor de $\Lambda f_*\Gamma_{1_X} \coprod \Lambda f_*\Gamma_{1_X}$, así que la igualdad anterior es igual a

$$[i_1 \circ t \in \Gamma_{1_X} f^{-1}(U)]_z = [s \in \Gamma_{\langle 1_X, 1_X\rangle} f^{-1}(V)]_y.$$

Entonces $z = y$ y existe $W \subset U \cap V$ con $y \in W$ tal que $i_1 \circ t|_{f^{-1}(W)} = s|_{f^{-1}(W)}$, por lo tanto $f^{-1}(W)$ está contenido en A.

En la otra dirección, consideremos el coproducto en $\mathbf{HL}/X$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i_E"] \arrow[dr, "p"'] & E \coprod E' \arrow[d, "\langle p,p' \rangle"] & E' \arrow[l, "i_{E'}"'] \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

entonces, queremos ver que el único morfismo φ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda f_*\Gamma(p) \arrow[r, "i_{\Lambda f_*\Gamma(p)}"] \arrow[dr, "\Lambda f_*\Gamma(i_E)"'] & \Lambda f_*\Gamma(p) \coprod \Lambda f_*\Gamma(p') \arrow[d, "\varphi"] & \Lambda f_*\Gamma(p') \arrow[l, "i_{\Lambda f_*\Gamma(p')}"'] \arrow[dl, "\Lambda f_*\Gamma(i_{E'})"] \\
& \Lambda f_*\Gamma(\langle p,p' \rangle) &
\end{tikzcd}$$

conmute, es un homeomorfismo.

Veamos que φ es un monomorfismo.

Sean $[s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y$ y $[t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(W)]_z)$ tales que

$$\varphi([s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y) = \varphi([t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(W)]_z).$$

Así que

$$[i_E \circ s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y = [i_{E'} \circ t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(W)]_z.$$

Entonces $y = z$ y existe U un abierto de Y con $y \in U$ y $U \subset V \cap W$, tal que $i_E \circ s|_{f^{-1}(U)} = i_{E'} \circ t|_{f^{-1}(U)}$.

Entonces para todo $x \in f^{-1}(U)$ se tiene que $i_E \circ s(x) = i_{E'} \circ t(x) \in E \cap E'$, contradicción.

Sean $[s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y$ y $[t \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_z)$ tales que

$$\varphi([s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y) = \varphi([t \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_z).$$

Es decir

$$[i_E \circ s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y = [i_E \circ t \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_z.$$

Entonces $y = z$ y existe U un abierto de Y con $y \in U$ y $U \subset V \cap W$, tal que $i_E \circ s|_{f^{-1}(U)} = i_E \circ t|_{f^{-1}(U)}$. Como i_E es mono, tenemos que $s|_{f^{-1}(U)} = t|_{f^{-1}(U)}$. Por lo que

$$\begin{aligned}[s \in \Gamma_p f^{-1}(V)]_y = [s|_{f^{-1}(U)} \in \Gamma_p f^{-1}(U)]_y = \\ = [t|_{f^{-1}(U)} \in \Gamma_p f^{-1}(U)]_y = [t \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_y.\end{aligned}$$

Análogamente para p'. Por lo tanto φ es un monomorfismo.

Ahora veamos que φ es un epimorfismo.

Sea $[s \in \Gamma_{\langle p,p' \rangle} f^{-1}(V)]_y$, entonces

$$f^{-1}(V) = s^{-1}(E) \cup s^{-1}(E')$$

donde $s^{-1}(E)$ y $s^{-1}(E')$ son abiertos y ajenos.

Entonces existe $W \subset Y$ abierto con $y \in W$ tal que $W \subset V$ y se tiene que $f^{-1}(W) \subset s^{-1}(E)$ o bien que $f^{-1}(W) \subset s^{-1}(E')$.

Supongamos que $f^{-1}(W) \subset s^{-1}(E)$, entonces $[s|_{f^{-1}(W)} \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_y \in \Lambda f_* \Gamma(p) \coprod \Lambda f_* \Gamma(p')$ y $\varphi([s|_{f^{-1}(W)} \in \Gamma_p f^{-1}(W)]_y) = [s \in \Gamma_{\langle p,p' \rangle} f^{-1}(V)]_y$.

Por lo tanto φ es un epimorfismo.

Finalmente φ es una función abierta porque es un homeomorfismo local.

Por lo tanto φ es un isomorfismo. ■

En conclusión tenemos

Teorema 3.0.16. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. $f_* : \mathbf{Gav}(X) \to \mathbf{Gav}(Y)$ preserva objeto inicial, epimorfismos y sumas finitas si y solo si*

1. *$f(X)$ es denso en Y;*

2. *para cada abierto $V \subset Y$, cada punto $y \in V$ y cada cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f^{-1}(V)$, existen un abierto $W \subset Y$ tal que $y \in W \subset V$ y una cubierta abierta disjunta $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $f^{-1}(W)$ tal que $W_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$;*

3. *para todo abierto $V \subset Y$ y todo punto $y \in V$, siempre que $f^{-1}(V)$ sea la unión de dos abiertos ajenos de X, existe un abierto $W \subset Y$ con $y \in W$ tal que $f^{-1}(W)$ está contenido en uno de ellos.*

Es decir, $f : X \to Y$ es un morfismo ultrafinito.

■

Capítulo 4

Locales

En este capítulo introduciremos el concepto de "local". Conoceremos los aspectos centrales de la categoría **Loc** de locales, dando numerosos ejemplos y mostrando paso a paso las diversas clases de morfismos que los relacionan, sin perder de vista que estamos intentando una generalización del trabajo desarrollado en la primera parte.

4.1 Locales

Empezaremos dando algunos resultados sobre álgebras de Heyting.

Definición 4.1.1. *Un* álgebra de Heyting H *es una retícula con* 0 *y* 1 *tal que para todo elemento* $b \in H$*, el funtor*

$$\_ \wedge b \colon H \to H, \quad a \mapsto a \wedge b$$

tiene adjunto derecho que denotaremos como

$$b \Rightarrow \_ \colon H \to H, \quad c \mapsto b \Rightarrow c.$$

Dicha adjunción se reduce a la relación

$$a \wedge b \leq c \quad \text{si y solo si} \quad a \leq b \Rightarrow c$$

para cualesquiera elementos a, b, $c \in H$.

Lema 4.1.2. *En un álgebra de Heyting* H *se tiene que*

1. $(a \vee a') \wedge b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$,
2. $(a \vee b) \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee b$

para todo a, a', $b \in H$*. Es decir,* H *es una retícula distributiva.*

Demostración. Como $\_ \wedge b$ tiene adjunto derecho, por el lema 1.4.10, $\_ \wedge b$ preserva supremos arbitrarios, en particular se tiene

$$(a \vee a') \wedge b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b).$$

Usando esta igualdad tenemos

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a' \vee b) &= (a \wedge (a' \vee b)) \vee (b \wedge (a' \vee b)) \\ &= (a \wedge a') \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge a') \vee (b \wedge b) \\ &= (a \wedge a') \vee b.\end{aligned}$$

■

Lema 4.1.3. *En un álgebra de Heyting H se cumple que*

1. $a \leq b$ *si y solo si* $(a \Rightarrow b) = 1$;
2. $a = (1 \Rightarrow a)$;
3. $a \Rightarrow (b \wedge c) = (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$

para cualquier a, b, $c \in H$.

Demostración. Supongamos que $(a \Rightarrow b) = 1$.

Las líneas horizontales de la siguiente notación se deben leer como "es equivalente a", así que

$$\begin{array}{c} 1 = a \Rightarrow b \\ \hline 1 \leq a \Rightarrow b \\ \hline 1 \wedge a \leq b \\ \hline a \leq b. \end{array} \qquad \text{adjunción}$$

De la misma manera se tiene

$$\begin{array}{c} a \leq a \\ \hline a \wedge 1 \leq a \\ \hline a \leq (1 \Rightarrow a) \end{array} \qquad \text{adjunción.}$$

Finalmente, la última igualdad se cumple ya que el funtor $a \Rightarrow \_$ tiene adjunto izquierdo por definición de álgebra de Heyting, así que, por el lema 1.4.11, preserva ínfimos.

■

Lema 4.1.4. *En un álgebra de Heyting H se cumple que*

1. $(b \Rightarrow c) \wedge b \leq c$;
2. $b \Rightarrow c = \bigvee\{a \in H \mid a \wedge b \leq c\}$.

Demostración. La primera desigualdad es equivalente por adjunción a

$$(b \Rightarrow c) \leq (b \Rightarrow c).$$

Supongamos que $a \wedge b \leq c$, por adjunción, esto es equivalente a $a \leq b \Rightarrow c$, por lo que $b \Rightarrow c$ es cota superior y gracias a la desigualdad 1, es mínima. ■

Lema 4.1.5. *Sean H un álgebra de Heyting y $c \in H$. La función*

$$\_ \Rightarrow c\colon H \to H, \quad b \mapsto b \Rightarrow c$$

es un funtor contravariante.

Demostración. Supongamos que $b \leq b'$. Por la segunda parte del lema 4.1.4 se tiene que

$$(b' \Rightarrow c) \wedge b' \leq c;$$

además, como $b \leq b'$

$$(b' \Rightarrow c) \wedge b \leq (b' \Rightarrow c) \wedge b'.$$

Así que tenemos $(b' \Rightarrow c) \wedge b \leq c$, que es equivalente por adjunción a

$$(b' \Rightarrow c) \leq (b \Rightarrow c).$$

■

Definición 4.1.6. *Sean H un álgebra de Heyting y $b \in H$. Definimos el* pseudocomplemento *$\neg b$ de b como*

$$\neg b = (b \Rightarrow 0).$$

Lema 4.1.7. *En un álgebra de Heyting H se cumple que*

1. $\neg b \wedge b = 0$;
2. $\neg b = \bigvee\{a \in H \mid a \wedge b = 0\}$.

Demostración. Es un caso particular del lema 4.1.4 al hacer $c = 0$. ■

El siguiente lema nos indica que las álgebras de Heyting modelan el comportamiento de la lógica intuicionista.

Lema 4.1.8. *Sea H un álgebra de Heyting. Las desigualdades*

1. $a \leq (b \Rightarrow a)$;
2. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \leq ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$;
3. $a \leq (b \Rightarrow (a \wedge b))$;
4. $(a \Rightarrow c) \leq ((b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \vee b) \Rightarrow c))$;

5. $(a \Rightarrow b) \leq ((a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow \neg a)$;

6. $\neg a \leq (a \Rightarrow b)$;

se cumplen para todo a, b, $c \in H$.

Demostración. La primera desigualdad es equivalente por adjunción a $a \wedge b \leq a$.

Usando el lema 4.1.4 para las desigualdades, tenemos

$$\begin{aligned} (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \wedge (a \Rightarrow b) \wedge a &= ((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \wedge a) \wedge ((a \Rightarrow b) \wedge a) \\ &\leq (b \Rightarrow c) \wedge b \\ &\leq c, \end{aligned}$$

que es equivalente por adjunción a la desigualdad 2.

La tercera desigualdad es equivalente por adjunción a $a \wedge b \leq a \wedge b$.

Para probar la desigualdad 4, observemos que por el lema 4.1.2

$$\begin{aligned} &((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)) \wedge (a \vee b) = \\ &\qquad = ((a \Rightarrow c) \wedge a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge b). \end{aligned}$$

Por el lema 4.1.4

$$\begin{aligned} &((a \Rightarrow c) \wedge a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge b) \\ &\qquad \leq (c \wedge (b \Rightarrow c)) \vee ((a \Rightarrow c) \wedge c). \end{aligned}$$

Finalmente, por la desigualdad 1

$$(c \wedge (b \Rightarrow c)) \vee ((a \Rightarrow c) \wedge c) = c.$$

Por lo tanto

$$((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)) \wedge (a \vee b) \leq c$$

que es equivalente por adjunción a la desigualdad 4.

Para probar la quinta desigualdad, tenemos por el lema 4.1.3

$$(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow \neg b) = a \Rightarrow (b \wedge \neg b).$$

Por el lema 4.1.7 y la definición de $\neg$, se tiene

$$a \Rightarrow (b \wedge \neg b) = a \Rightarrow 0 = \neg a.$$

En particular

$$(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow \neg b) \leq \neg a,$$

que es equivalente por adjunción a la desigualdad 5.

Finalmente, como $a \Rightarrow \_$ es un funtor, se tiene

$$\neg a = a \Rightarrow 0 \leq a \Rightarrow b.$$

■

Lema 4.1.9. *Sea H un álgebra de Heyting. Para todo a, b, $c \in H$ se tiene que*

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) = ((a \wedge b) \Rightarrow c).$$

Demostración. La desigualdad

$$((a \wedge b) \Rightarrow c) \leq (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$$

es equivalente por adjunción a

$$((a \wedge b) \Rightarrow c) \wedge a \wedge b \leq c$$

la cual es cierto por el lema 4.1.4.

Al aplicar dos veces dicho lema, se tiene

$$((a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \wedge a \wedge b \leq (b \Rightarrow c) \wedge b \leq c$$

que es equivalente por adjunción a

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \leq ((a \wedge b) \Rightarrow c).$$

■

Por fin, la definición de "local".

Definición 4.1.10. *Un* local L *es un retícula completa en la cual los supremos arbitrarios se distribuyen sobre los ínfimos finitos, es decir*

$$a \wedge \left(\bigvee_i b_i \right) = \bigvee_i (a \wedge b_i).$$

para todo a, $b_i \in L$. A esta igualdad la llameremos ley distributiva infinita.

El siguiente resultado es una gran herramienta ya que da la oportunidad de aprovechar propiedades conocidas de las álgebras de Heyting.

Proposición 4.1.11. *Para una retícula L, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *L es un local*

2. *L es un álgebra de Heyting completa*

Demostración. Supongamos que L es un local y consideremos el funtor

$$\_ \wedge b : H \to H, \quad a \mapsto a \wedge b$$

para alguna $b \in L$. Ahora definamos

$$b \Rightarrow \_ : H \to H, \quad c \mapsto \bigvee_{d \in L, d \wedge b \leq c} d$$

y veamos que es adjunto derecho de $\_ \wedge b$.

Sean a y $c \in H$ y supongamos que $a \wedge b \leq c$.

Entonces, por definición del funtor $b \Rightarrow \_$,

$$\begin{aligned} a \wedge b \leq c \quad &\text{implica} \quad a \leq \bigvee_{d \in L, d \wedge b \leq c} d \\ &\text{implica} \quad a \leq b \Rightarrow c. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $a \leq b \Rightarrow c$. Nuevamente por definición del funtor $b \Rightarrow \_$ y por la ley distributiva infinita,

$$\begin{aligned} a \leq b \Rightarrow c \quad &\text{implica} \quad a \leq \bigvee_{d \in L, d \wedge b \leq c} d \\ &\text{implica} \quad a \wedge b \leq \left(\bigvee_{d \in L, d \wedge b \leq c} d \right) \wedge b \\ &\text{implica} \quad a \wedge b \leq \bigvee_{d \in L, d \wedge b \leq c} (d \wedge b) \leq c \\ &\text{implica} \quad a \wedge b \leq c. \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que L es un álgebra de Heyting completa, por lo que resta probar la ley distributiva infinita. Sabemos que para todo elemento $b \in L$, el funtor $\_ \wedge b$ tiene adjunto izquierdo, por lo cual, según el lema 1.4.10, preserva supremos arbitrarios, por lo tanto se cumple la ley distributiva. ■

Para mostrar que estamos trabajando en la dirección correcta, tenemos el siguiente:

Ejemplo 4.1.12. *Consideremos la categoría $\mathcal{A}(X)$ definida anteriormente. Entonces la unión de abiertos es el supremo y la intersección es el ínfimo. Como la unión arbitraria de abiertos es abierta, tenemos que $\mathcal{A}(X)$ es una retícula completa.*

De la misma manera, la condición

$$V \cap \left(\bigcup_i U_i \right) = \bigcup_i (V \cap U_i),$$

necesaria para que $\mathcal{A}(X)$ sea un local, es una igualdad de teoría de conjuntos.

Dado un local, podemos construir nuevos locales.

Lema 4.1.13. *Sea $a \in L$ un elemento de un local. Los segmentos*

$$\uparrow a = \{b \in L \mid a \leq b\}, \qquad \downarrow a = \{b \in L \mid b \leq a\}$$

son locales con el orden parcial inducido.

Demostración. Ambos conjuntos están parcialmente ordenados por el orden que les induce L y son cerrados bajo ínfimos y supremos arbitrarios y claramente satisfacen la ley distributiva infinita.

En el caso de $\uparrow a$, el 1 es el 1 de L y el cero es a. En el caso de $\downarrow a$, el 1 es a y el cero es el cero de L. ■

A continuación definiremos los morfismos entre locales y veremos cómo es que preservan su estructura.

Definición 4.1.14. *Un* morfismo $f: L \to M$ *de un local* L *a un local* M *es un par de funtores* $f_*: L \to M$ *y* $f^*: L \to M$ *que satisfacen:*

1. $f^* \dashv f_*$,

2. f^* *preserva ínfimos finitos.*

Observación 4.1.15. *Las condiciones de la definición de un morfismo de locales* f *se pueden reescribir de la siguiente manera:*

1. $f^*\left(\bigvee_i a_i\right) = \bigvee_i f^*(a_i)$,

2. $f^*(a \wedge b) = f^*(a) \wedge f^*(b)$,

3. $f^*(1) = 1$,

para todo a_i, a, $b \in L$.

La primera condición es equivalente, por el lema 1.4.10, a que el funtor f^* *tenga adjunto derecho. Las dos restantes son equivalentes a que* f^* *preserve ínfimos finitos; es decir, ínfimos binarios (2) e ínfimos vacíos (3).*

Consideremos los ejemplos más inmediatos.

Ejemplo 4.1.16.a. *Si* $f: X \to Y$ *es una función continua podemos inducir el funtor*

$$f^{-1}: \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X), \quad V \mapsto f^{-1}(V).$$

Es fácil ver que dicho funtor cumple con las condiciones de la observación 4.1.15. De hecho, el adjunto derecho de f^{-1} *es el funtor*

$$f_*: \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y), \quad U \mapsto \bigcup_{f^{-1}(W) \subset U} W,$$

con lo que tenemos un morfismo de locales $f: \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$.

Ejemplo 4.1.16.b. *Sean* L *un local y un elemento* $a \in L$, *el funtor*

$$i^*: L \to \downarrow a, \quad b \mapsto b \wedge a$$

tiene adjunto derecho, dado por $i_*(b) = a \Rightarrow b$ *(proposición 4.1.11), y obviamente preserva ínfimo finitos, lo que induce un morfismo de locales* $i: \downarrow a \to L$.

Ejemplo 4.1.16.c. *Sean L un local y un elemento $a \in L$, el funtor*

$$j^*: L \to \uparrow a, \qquad b \mapsto b \vee a$$

obviamente preserva supremos arbitrarios y el 1 de L.

Como L es un álgebra de Heyting (proposición 4.1.11), el lema 4.1.2 demuestra que j^* preserva ínfimos binarios.

Por lo tanto, j^* induce un morfismo de locales $j: \uparrow a \to L$ cuya parte adjunta derecha es simplemente la inclusión

$$j_*: \uparrow a \to L, \qquad c \mapsto c.$$

Sean $b \in L$ y $c \in \uparrow a$. Entonces $b \vee a \leq c$ si y solo si $b \leq c$ ya que $a \leq c$.

Con esto concluimos que los locales y sus morfismos constituyen una categoría que denotaremos por **Loc**.

En muchos casos se sigue muy de cerca la analogía que sugieren los espacios topológicos. Tal es el caso de la siguiente definición.

Definición 4.1.17. *Sea L un local.*

Un monomorfismo $M \to L$ es un sublocal abierto *de L si es isomorfo al monomorfismo $i: \downarrow a \to L$, para alguna $a \in L$.*

$$\begin{tikzcd}
\downarrow a \arrow[rr, dashed, "\cong"] \arrow[dr, "i"'] & & M \arrow[dl] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Un monomorfismo $M \to L$ es un sublocal cerrado *de L si es isomorfo al monomorfismo $j: \uparrow a \to L$, para alguna $a \in L$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \uparrow a \arrow[dl, "j"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Terminamos esta sección con algunos resultados interesantes acerca de la categoría **Loc**.

Proposición 4.1.18. *La categoría* **Loc** *es cocompleta.*

Demostración. El objeto inicial de **Loc** es el local que consta de un solo elemento $\{*\}$. Dado cualquier local L existe una única función $L \to \{*\}$ que obviamente preserva los supremos e ínfimos arbitrarios. Esto indica que hay un único morfismo de locales $\{*\} \to L$ para cada L en **Loc**.

Sea $\langle L_i \rangle_i$ una familia de locales. Definamos $\bigoplus_i L_i$ como el producto cartesiano de la familia $\langle L_i \rangle_i$ dotado con una estructura puntual, es decir

$$\langle l_i \rangle_i \wedge \langle k_i \rangle_i = \langle l_i \wedge k_i \rangle_i \qquad \langle l_i \rangle_i \vee \langle k_i \rangle_i = \langle l_i \vee k_i \rangle_i.$$

Es claro entonces que $\bigoplus_i L_i$ es un local. Consideremos las proyecciones de conjuntos $\langle p_j^* : \bigoplus_i L_i \to L_j \rangle_j$. Como la estructura de $\bigoplus_i L_i$ es puntual, tenemos

$$\begin{aligned} p_j^* \left(\bigvee_k \langle l_{ki} \rangle_i \right) &= p_j^* \left(\left\langle \bigvee_k l_{ki} \right\rangle_i \right) \\ &= \bigvee_k l_{kj} \\ &= \bigvee_k p_j^*(\langle l_{ki} \rangle_i). \end{aligned}$$

De la misma manera, las proyecciones $\langle p_j^* \rangle_i$ preservan ínfimos finitos, así que inducen morfismos de locales $\langle p_j : L_j \to \bigoplus_i L_i \rangle_i$.

Sean M un local y $\langle q_i : L_i \to M \rangle_i$ morfismos de locales.

Definamos el morfismo

$$q^* : M \to \bigoplus_i L_i, \quad m \mapsto \langle q_i^*(m) \rangle_i.$$

Como cada morfismo q_i^* preserva supremos arbitrarios tenemos

$$\begin{aligned} q^* \left(\bigvee_k m_k \right) &= \left\langle q_i^* \left(\bigvee_k m_k \right) \right\rangle_i \\ &= \left\langle \bigvee_k q_i^*(m_k) \right\rangle_i \\ &= \bigvee_k \langle q_i^*(m_k) \rangle_i \\ &= \bigvee_k q^*(m_k). \end{aligned}$$

De la misma manera se tiene que q^* preserva ínfimos finitos, por lo que se obtiene un morfismo de locales $q : \bigoplus_i L_i \to M$.

Como

$$p_j^* \circ q^*(m) = p_j^*(\langle q_i^*(m) \rangle_i) = q_j^*(m) \tag{4.1}$$

tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} L_j & \bigoplus_i L_i \arrow[l, "p_j^*"'] \\ & M \arrow[ul, "q_j^*"] \arrow[u, "q^*"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} L_j \arrow[r, "p_j"] \arrow[dr, "q_j"'] & \bigoplus_i L_i \arrow[d, "q"] \\ & M \end{tikzcd}$$

es conmutativo en **Loc**. Además la ecuación (4.1) indica también que el morfismo q es único ya que define la imagen de q^* de manera única.

Por lo tanto $\bigoplus_i L_i$ es el coproducto de $\langle L_i \rangle_i$ en **Loc**.

Por último construyamos el coigualador de un par de flechas.

Sean $f, g : L \to M$ dos morfismos de locales.

Definamos $N := \{a \in M \mid f^*(a) = g^*(a)\}$.

Sean $a_i \in N$ para todo $i \in I$, como f^* y g^* preservan supremos arbitrarios

$$\begin{aligned} f^*\left(\bigvee_i a_i\right)_i &= \bigvee_i f^*(a_i) \\ &= \bigvee_i g^*(a_i) \\ &= g^*\left(\bigvee_i a_i\right)_i, \end{aligned}$$

entonces $\bigvee_i a_i \in N$, por lo que N es una retícula completa.

Además, como f^* y g^* preservan ínfimos finitos, si a y $a' \in N$, se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(a \wedge a') &= f^*(a) \wedge f^*(a') \\ &= g^*(a) \wedge g^*(a') \\ &= g^*(a \wedge a'). \end{aligned}$$

También $f^*(1) = g^*(1)$. La condición restante para que N sea un local se cumple ya que $N \subseteq M$ y tanto los ínfimos como los supremos de N se calculan como en M, por lo tanto N es un local.

Por lo tanto, la inclusión $i^* : N \to M$ preserva ínfimos finitos y supremos arbitrarios. Esto induce un morfismo de locales $i : M \to N$ y por definición de N se tiene que $f^* \circ i^* = g^* \circ i^*$, es decir $i \circ f = i \circ g$.

Sea $h : M \to K$ un morfismo de locales tal que $h \circ f = h \circ g$. Esto implica que $f^*(h^*(k)) = g^*(h^*(k))$ para toda $k \in K$, así que $Img(h^*) \subset N$. Como h^* preserva ínfimos finitos y supremos arbitrarios, se obtiene un morfismo de locales $\widehat{h} : N \to K$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl, "\widehat{h}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

conmuta. Así se factoriza de manera única a h a través de i.

Por lo tanto **Loc** es cocompleta. ■

Lema 4.1.19. *Sean L un local y $\{u_i\}_{i\in I}$ una familia ajena de elementos de L, es decir $u_i \wedge u_{i'} = 0$ si $i \neq i'$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} \downarrow u_i \cong \downarrow \bigvee_{i\in I} u_i$*

Demostración. Definamos un par de funciones

$$\alpha: \bigoplus_{i\in I} \downarrow u_i \to \downarrow \bigvee_{i\in I} u_i \quad \langle a_i\rangle_{i\in I} \mapsto \bigvee_{i\in I} a_i,$$

$$\beta: \downarrow \bigvee_{i\in I} u_i \to \bigoplus_{i\in I} \downarrow u_i \quad b \mapsto \langle b \wedge u_i\rangle_{i\in I}$$

y veamos que constituyen un isomorfismo.

Sea $\langle a_j\rangle_{j\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \downarrow u_i$.

$$\beta \circ \alpha(\langle a_j\rangle_{j\in I}) = \beta\left(\bigvee_{j\in I} a_j\right) = \langle\left(\bigvee_{j\in I} a_j\right) \wedge u_i\rangle_{i\in I}$$
$$= \langle\bigvee_{j\in I} (a_j \wedge u_i)\rangle_{i\in I} = \langle a_i\rangle_{i\in I}.$$

La última igualdad se da gracias a que la familia $\{u_i\}_{i\in I}$ es ajena.

Sea $b \in \downarrow \bigvee_{i\in I} u_i$.

$$\alpha \circ \beta(b) = \alpha(\langle b \wedge u_i\rangle_{i\in I}) = \bigvee_{i\in I} (b \wedge u_i)$$
$$= b \wedge \bigvee_{i\in I} u_i = b$$

Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} \downarrow u_i$ y $\downarrow \bigvee_{i\in I} u_i$ son isomorfos. ■

Observación 4.1.20. *En el caso de una familia ajena $\{u_i\}_{i\in I}$, la estructura de coproducto está dada por los morfismos de locales definidos como*

$$p_j^*: \downarrow \bigvee_{i\in I} u_i \to \downarrow u_j, \quad v \mapsto v \wedge u_j$$

para toda $j \in I$.

Proposición 4.1.21. *La categoría* **Loc** *tiene objeto terminal.*

Demostración. El objeto terminal de **Loc** es el local $\{0,1\}$.

Sea L un local. Para que $f^*: \{0,1\} \to L$ induzca un morfismo de locales $f: L \to \{0,1\}$ se debe cumplir que $f^*(0) = 0$ y $f^*(1) = 1$, ya que f^* debe preservar supremos e ínfimos vacíos. Esto define de manera única a f^* y además es obvio que f^* preserva todos los supremos e ínfimos.

Por lo tanto $\{0,1\}$ es el objeto terminal de **Loc**. ■

El siguiente resultado se enuncia sin demostración dada su complejidad.

Proposición 4.1.22. *La categoría* **Loc** *tiene productos fibrados.*

Demostración. Ver teorema 1.4.3 de [2]. ∎

Corolario 4.1.23. *La categoría* **Loc** *es finitamente completa.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 4.1.21 y 4.1.22. ∎

4.2 Morfismos abiertos

En esta sección nos ocuparemos de un tipo particular de morfismos de locales que guarda estrecha relación con las funciones abiertas entre espacios topológicos.

Definición 4.2.1. *Un morfismo de locales $f : M \to L$ es* abierto *si f^* tiene adjunto izquierdo $f_!$ y si la "identidad de Frobenius"*

$$f_!(a \wedge f^*(x)) = f_!(a) \wedge x$$

se satisface para toda $a \in M$ y toda $x \in L$.

Observación 4.2.2. *Para toda $a \in M$ y toda $x \in L$ siempre se tiene*

$$\begin{aligned} f_!(a \wedge f^*(x)) &\leq f_!(a) \\ f_!(a \wedge f^*(x)) &\leq f_! f^*(x) \leq x, \end{aligned}$$

por lo que la desigualdad

$$f_!(a \wedge f^*(x)) \leq f_!(a) \wedge x$$

siempre se cumple.

Ejemplo 4.2.3.a. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Veamos que si f es una función abierta en el sentido topológico, el correspondiente morfismo de locales definido en 4.1.16.a es abierto en el sentido de la definición 4.2.1.*

Sean $U \in \mathcal{A}(X)$ y $V \in \mathcal{A}(Y)$, obviamente

$$f(U) \subseteq V \quad \text{si y solo si} \quad U \subseteq f^{-1}(V),$$

entonces la imagen directa $f : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ es adjunto izquierdo de la imagen inversa $f^{-1} : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X)$.

Finalmente, la identidad de Frobenius

$$f(U \cap f^{-1}(V)) = f(U) \cap V$$

es un resultado de teoría de conjuntos.

Ejemplo 4.2.3.b. *Consideremos el morfismo de locales visto en el ejemplo 4.1.16.b y veamos que es un morfismo abierto de locales.*

Definamos la parte imagen directa de dicho morfismo de la siguiente manera

$$i_!: \downarrow a \to L, \quad c \mapsto c.$$

Veamos que $i_! \dashv i^*$. *Sea* $c \in \downarrow a$ *y* $b \in L$.

$$\begin{array}{cl} i_!(c) \leq b & \\ \hline c \leq b & \textit{def. de } i_! \\ \hline c \leq b \wedge a & c \in \downarrow a \\ \hline c \leq i^*(b) & \textit{def. de } i^*. \end{array}$$

Resta probar la igualdad de Frobenius. Sea $c \in \downarrow a$ *y* $b \in L$.

$$i_!(c \wedge i^*(b)) = c \wedge i^*(b) = c \wedge b \wedge a = c \wedge b = i_!(c) \wedge b.$$

Por lo tanto $i: \downarrow a \to L$ *es un morfismo abierto.*

El siguiente es un criterio sobre morfismos abiertos que facilita muchas de las demostraciones posteriores.

Lema 4.2.4. *Sea* $f: M \to L$ *un morfismo de locales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. f *es un morfismo de locales abierto;*

2. f^* *preserva ínfimos arbitarios y la identidad*

$$f^*(x \Rightarrow y) = f^*(x) \Rightarrow f^*(y)$$

se cumple para todo x, $y \in L$.

Demostración. Supongamos que f es un morfismo de locales abierto.

Por defnción, f^* tiene adjunto izquierdo lo cual es equivalente a que preserve ínfimos arbitrarios.

En particular

$$f^*(x \Rightarrow y) \wedge f^*(x) = f^*((x \Rightarrow y) \wedge x).$$

Por el lema 4.1.4 tenemos que

$$f^*((x \Rightarrow y) \wedge x) \leq f^*(y),$$

que es equivalente por adjunción a

$$f^*(x \Rightarrow y) \leq f^*(x) \Rightarrow f^*(y).$$

Por el lema 4.1.4 y la adjunción $f_! \dashv f^*$ tenemos

$$f_!((f^*(x) \Rightarrow f^*(y)) \wedge f^*(x)) \leq f_!(f^*(y)) \leq y.$$

Usando la desigualdad de los extremos tenemos

$$\begin{array}{rl} f_!((f^*(x) \Rightarrow f^*(y)) \wedge f^*(x)) \leq y & \\ f_!((f^*(x) \Rightarrow f^*(y)) \wedge x \leq y & \text{Frobenius} \\ f_!((f^*(x) \Rightarrow f^*(y)) \leq x \Rightarrow y & \text{adjunción} \\ f^*(x) \Rightarrow f^*(y) \leq f^*(x \Rightarrow y) & \text{adjunción.} \end{array}$$

Por lo tanto

$$f^*(x \Rightarrow y) = f^*(x) \Rightarrow f^*(y).$$

Ahora supongamos que f cumple con la condición 2.
Como f^* preserva ínfimos arbitrarios, tiene adjunto izquierdo $f_!$.
Tomemos elementos $a \in M$ y $x \in L$. Primero demostremos que

$$f_*(a \Rightarrow f^*(x)) = f_!(a) \Rightarrow x. \tag{4.2}$$

Como $a \leq f^* f_!(a)$ y $\_ \Rightarrow f^*(x)$ es un funtor contravariante (lema 4.1.5) se tiene

$$\begin{array}{cl} f^* f_!(a) \Rightarrow f^*(x) \leq a \Rightarrow f^*(x) & \\ \hline f^*(f_!(a) \Rightarrow x) \leq a \Rightarrow f^*(x) & f^* \text{ cumple la condición 2} \\ \hline f_!(a) \Rightarrow x \leq f_*(a \Rightarrow f^*(x)) & f^* \dashv f_* \end{array}$$

Por otro lado, sabemos por adjunción que

$$\begin{array}{c} (a \Rightarrow f^*(x)) \leq (a \Rightarrow f^*(x)) \\ \hline (a \Rightarrow f^*(x)) \wedge a \leq f^*(x) \\ \hline a \leq (a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow f^*(x). \end{array}$$

Como $f^* f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \leq (a \Rightarrow f^*(x))$ y el funtor $\_ \Rightarrow f^*(x)$ es contravariante (lema 4.1.5) y f^* cumple con la condición 2, se tiene

$$\begin{array}{c} (a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow f^*(x) \leq f^* f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow f^*(x) \\ \hline (a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow f^*(x) \leq f^*(f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow x) \end{array}$$

entonces

$$a \leq f^*(f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow x).$$

Así que por adjunciones tenemos

$$\begin{array}{c} a \leq f^*(f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow x) \\ \hline f_!(a) \leq f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \Rightarrow x \\ \hline f_!(a) \wedge f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \leq x \\ \hline f_*(a \Rightarrow f^*(x)) \leq f_!(a) \Rightarrow x. \end{array}$$

Por lo tanto

$$f_*(a \Rightarrow f^*(x)) = f_!(a) \Rightarrow x.$$

Por la observación 4.2.2 sabemos que para probar la identidad de Frobenius es suficiente probar la desigualdad

$$f_!(a) \wedge x \leq f_!(a \wedge f^*(x))$$

que es equivalente por adjunción a

$$x \leq f_!(a) \Rightarrow f_!(a \wedge f^*(x)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_!(a) \Rightarrow f_!(a \wedge f^*(x)) &= f_*(a \Rightarrow f^* f_!(a \wedge f^*(x))) & \\ &\geq f_*(a \Rightarrow (a \wedge f^*(x))) & f^* f_!(b) \geq b \quad \forall b \\ &= f_*((a \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow f^*(x))) & \text{lema 4.1.3, parte 3} \\ &= f_*(1 \wedge (a \Rightarrow f^*(x)) & \\ &= f_*(a \Rightarrow f^*(x)) & \\ &= f_!(a) \Rightarrow x & (4.2) \\ &\geq x. & \text{lema 4.1.8, parte 1} \end{aligned}$$

■

Lema 4.2.5. *La composición de dos morfismos abiertos es también abierta.*

Demostración. La composición de dos morfismos abiertos obviamente cumplirá con la condición 2 del lema 4.2.4. ■

En el siguiente lema vemos que los morfismos abiertos son compatibles con el coproducto de locales.

Lema 4.2.6. *Sean $f_i : L_i \to L$ morfismos abiertos para cada $i \in I$, entonces el morfismo inducido $f : \bigoplus L_i \to L$ es abierto.*

Demostración. Los morfismos abiertos f_i inducen un morfismo $f : \bigoplus L_i \to L$ tal que $f^*(l) = \langle f_i^*(l) \rangle_i$.

Definamos $f_! : \bigoplus L_i \to L$ como

$$f_!(\langle l_i \rangle_i) = \bigvee_i (f_i)_!(l_i).$$

Veamos que $f_!$ es adjunto izquierdo de f^*.

$$
\begin{array}{cl}
f_!(\langle l_i\rangle_i) \leq l & \\
\hline
\bigvee_i (f_i)_!(l_i) \leq l & \text{def. de } f_! \\
\hline
\forall i \quad (f_i)_!(l_i) \leq l & \\
\hline
\forall i \quad l_i \leq f_i^*(l) & (f_i)_! \dashv f_i^* \\
\hline
\langle l_i\rangle_i \leq \langle f_i^*(l)\rangle_i & \text{estructura puntual} \\
\hline
\langle l_i\rangle_i \leq f^*(l) & \text{def. de } f^*
\end{array}
$$

Resta probar la identidad de Frobenius.

$$
\begin{aligned}
f_!(\langle l_i\rangle_i \wedge f^*(l)) &= f_!(\langle l_i\rangle_i \wedge (\langle f_i^*(l)\rangle_i) && \text{def. de } f^* \\
&= f_!(\langle l_i \wedge f_i^*(l)\rangle_i) && \text{estructura puntual} \\
&= \bigvee_i (f_i)_!(l_i \wedge f_i^*(l)) && \text{def. de } f_! \\
&= \bigvee_i ((f_i)_!(l_i) \wedge l) && \text{Frobenius} \\
&= (\bigvee_i (f_i)_!(l_i)) \wedge l && \text{ley distributiva infinita} \\
&= f_!(\langle l_i\rangle_i) \wedge l && \text{def. de } f_!
\end{aligned}
$$

Por lo tanto f es un morfismo abierto. ■

4.3 Morfismos étale

En esta sección nos ocuparemos del tipo de morfismo de locales que recoge el espíritu de los homeomorfismos locales entre espacios topológicos.

Lema 4.3.1. *Consideremos un morfismo de locales $f: M \to L$ y dos elementos $a \in M$, $x \in L$. Supongamos que el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \downarrow x \arrow[d, "j"] \\
M \arrow[r, "f"'] & L,
\end{tikzcd}
$$

donde i y j son como en el ejemplo 4.1.16.b, es conmutativo en **Loc**.

Entonces $g^*(y) = a \wedge f^*(y)$ para $y \leq x$ y $g_*(b) = f_*(a \Rightarrow b) \wedge x$ para $b \leq a$.

Demostración. Sea $y \leq x$,

$$g^*(y) = g^*(y \wedge x) = g^*j^*(y) = i^*f^*(y) = a \wedge f^*(y).$$

Sea $b \leq a$,

$$f_*(a \Rightarrow b) = f_*i_*(b) = j_*g_*(b) = x \Rightarrow g_*(b).$$

Por adjunción

$$\frac{f_*(a \Rightarrow b) \leq x \Rightarrow g_*(b)}{f_*(a \Rightarrow b) \wedge x \leq g_*(b).}$$

Por otro lado, $g_*(b) \leq x$ para toda $b \in \downarrow a$. Además

$$\begin{array}{cl} g^* g_*(b) \leq b & \\ \hline f^* g_*(b) \wedge a \leq b & \text{descripción de } g^* \\ \hline f^* g_*(b) \leq a \Rightarrow b & \text{adjunción} \\ \hline g_*(b) \leq f_*(a \Rightarrow b) & \text{adjunción.} \end{array}$$

Por lo tanto $g_*(b) = f_*(a \Rightarrow b) \wedge x$

■

Definición 4.3.2. *Un morfismo de locales $f: M \to L$ es* étale *cuando existen familias $\langle a_i \rangle_{i \in I} \subset M$ y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subset L$ con las propiedades:*

1. $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$
2. *Para todo $i \in I$, f se restringe a un isomorfismo $f_i: \downarrow a_i \to \downarrow x_i$ entre los sublocales abiertos generados por a_i y x_i.*

Observación 4.3.3. *Por el lema 4.3.1 tenemos*

$$f_i^*: \downarrow x_i \to \downarrow a_i, \quad y \mapsto a_i \wedge f^*(y);$$

$$f_{i_*}: \downarrow a_i \to \downarrow x_i, \quad b \mapsto f_*(a_i \Rightarrow b) \wedge x_i.$$

Observación 4.3.4. *Como para todo $i \in I$ la restricción $f_i: \downarrow a_i \to \downarrow x_i$ es un isomorfismo, los morfismos f_i^* y f_{i_*} son mutuamente inversos.*

El siguiente lema es un resultado completamente deseable, incluso esperado.

Lema 4.3.5. *Todo morfismo étale de locales es abierto.*

Demostración. Sea $f: M \to L$ un morfismo étale de locales, entonces existen familias $\langle a_i \rangle_{i \in I} \subset M$ y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subset L$ tales que $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$ y el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \downarrow a_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & \downarrow x_i \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"'] & L, \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

donde f_i es un isomorfismo para toda $i \in I$, conmuta para toda $i \in I$.

Definamos $f_!(m) = \bigvee_i f_{i_*}(m \wedge a_i)$ y veamos que $f_! \dashv f^*$.

Como el cuadrado (4.3) conmuta, el cuadrado correspondiente a las partes adjuntas izquierdas también conmuta, por lo tanto

$$f_i^*(l \wedge x_i) = f^*(l) \wedge a_i \tag{4.4}$$

para toda $l \in L$.

Supongamos que $f_!(m) \leq l$, entonces

$$\begin{array}{c|l}
f_!(m) \leq l & \\
\hline
\bigvee_i f_{i*}(m \wedge a_i) \leq l & \text{definición de } f_! \\
\hline
\forall i \quad f_{i*}(m \wedge a_i) \leq l & \\
\hline
\forall i \quad f_{i*}(m \wedge a_i) \leq l \wedge x_i & f_{i*}(b) \leq x_i \quad \forall b \in \downarrow a_i \\
\hline
\forall i \quad m \wedge a_i \leq f_i^*(l \wedge x_i) & \text{observación (4.3.4)} \\
\hline
\forall i \quad m \wedge a_i \leq f^*(l) \wedge a_i & \text{(4.4)}
\end{array}$$

Si esto último ocurre, tenemos

$$\begin{aligned}
\textstyle\bigvee_{i\in I}(m \wedge a_i) &\leq \textstyle\bigvee_{i\in I}(f^*(l) \wedge a_i) & & \\
m \wedge (\textstyle\bigvee_{i\in I} a_i) &\leq f^*(l) \wedge (\textstyle\bigvee_{i\in I} a_i) & & \text{ley distributiva infinita} \\
m \wedge 1 &\leq f^*(l) \wedge 1 & & \textstyle\bigvee_{i\in I} a_i = 1 \\
m &\leq f^*(l). & &
\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $m \leq f^*(l)$. Obviamente $m \wedge a_i \leq f^*(l) \wedge a_i$ para toda $i \in I$ y con lo visto anteriormente eso equivale a $f_!(m) \leq l$.

Por lo tanto $f_! \dashv f^*$.

Resta probar la identidad de Frobenius.

Primero observemos que

$$\begin{aligned}
f_{i*}(m \wedge a_i) \wedge l &= f_{i*}(m \wedge a_i) \wedge l \wedge x_i & & f_{i*}(b) \leq x_i \quad \forall b \in \downarrow a_i \\
&= f_{i*}(m \wedge a_i) \wedge f_{i*}f_i^*(l \wedge x_i) & & \text{observación(4.3.4)} \\
&= f_{i*}(m \wedge a_i \wedge f_i^*(l \wedge x_i)) & & f_{i*} \text{ preserva ínfimos} \\
&= f_{i*}(m \wedge a_i \wedge f^*(l)) & & \text{(4.4).}
\end{aligned}$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
f_!(m) \wedge l &= \bigvee_i f_{i*}(m \wedge a_i) \wedge l \\
&= \bigvee_i f_{i*}(m \wedge a_i \wedge f^*(l)) \\
&= f_!(m \wedge f^*(l)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es un morfismo abierto.

■

Corolario 4.3.6. *Un morfismo $f: M \to L$ de locales es étale si y solo si*

1. *f es abierto y*

2. *existe una familia $\langle a_i \rangle_i \subset M$ tal que $\bigvee_i a_i = 1$ y la restricción del morfismo $f_! \colon \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ es un isomorfismo de COPOS para toda $i \in I$.*

Demostración. Si $f \colon M \to L$ es un morfismo étale entonces es un morfismo abierto (lema 4.3.5).

Además existen familias $\langle a_i \rangle_{i \in I} \subset M$ y $\langle x_i \rangle_{i \in I} \subset L$ tales que $\bigvee_i a_i = 1$ y las restricciones $f_i \colon \downarrow a_i \to \downarrow x_i$ de f son isomorfismos para toda $i \in I$. En particular, dichas restricciones son morfismos abiertos de locales.

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \downarrow a_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha"'] & \downarrow x_i \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "f"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta se tiene en particular $f_! \circ \alpha_! = \beta_! \circ f_{i!}$.

Sea $a \in \downarrow a_i$, como $\alpha_!$ y $\beta_!$ son inclusiones (ejemplo 4.2.3.b),

$$f_{i!}(a) = \beta_!(f_{i!}(a)) = f_!(\alpha_!(a)) = f_!(a),$$

así que $f_{i!}$ es efectivamente la restricción de $f_!$.

Supongamos que el morfismo $f \colon M \to L$ cumple la segunda condición. Entonces existe una familia $\langle a_i \rangle_i \subset M$ tal que $\bigvee_i a_i = 1$ y la restricción del morfismo $f_! \colon \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ es un isomorfismo de COPOS para toda $i \in I$.

$\langle f_!(a_i) \rangle_{i \in I}$ es una familia contenida en L tal que para toda $i \in I$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \downarrow a_i \arrow[r, "f_{i!}"] \arrow[d, "\alpha_!"'] & \downarrow f_!(a_i) \arrow[d, "\beta_!"] \\ M \arrow[r, "f_!"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta. En consecuencia el cuadrado correspondiente a los adjuntos derechos de los morfismo $f_!$, $f_{i!}$, $\alpha_!$ y $\beta_!$

$$\begin{tikzcd} \downarrow a_i \arrow[r, "f_i^*"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \downarrow f_!(a_i) \arrow[d, "\beta^*"] \\ M \arrow[r, "f^*"'] & L \end{tikzcd}$$

también conmuta. Por lo que f se restringe a un isomorfismo para cada $i \in I$.

Por lo tanto f es un morfismo étale. ∎

Ejemplo 4.3.7. *Usando este último corolario podemos ver que el morfismo $i: \downarrow a \to L$ visto en el ejemplo 4.1.16.b es étale.*

En el ejemplo 4.2.3.b vimos que el dicho morfismo es abierto.

La función $i_!: \downarrow a \to \downarrow i_!(a)$ es un isomorfismo ya que se trata de la identidad y como el elemento a cubre al local $\downarrow a$, tenemos que i es étale.

Con la siguiente proposición vemos cómo es posible cargar toda la estructura de morfismo étale en una sola función $f_!$.

Proposición 4.3.8. *Sea $f_!: M \to L$ una función entre dos locales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f_!$ es la parte imagen directa de un morfismo étale de locales;*
2. *(a) $f_!$ preserva supremos arbitrarios y*
   (b) existe una cubierta $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$ de M tal que para todo $i \in I$ las restricciones $f_!: \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ son isomorfismos de COPOS.

Demostración. Supongamos que $f_!$ es la parte imagen directa de un morfismo étale de locales. Como $f_!$ tiene adjunto derecho f^*, $f_!$ preserva supremos arbitrarios. La segunda condición se sigue del corolario 4.3.6.

Ahora supongamos que se cumplen las condiciones (a) y (b). Como $f_!$ preserva supremos arbitrarios, tiene adjunto derecho f^*.

Veamos que f^* preserva también supremos arbitrarios para que a su vez tenga adjunto derecho f_*.

Sea $x = \bigvee_{k \in K} x_k \in L$. Como $x_k \leq \bigvee_{k \in K} x_k$ entonces $f^*(x_k) \leq f^*\left(\bigvee_{k \in K} x_k\right)$ para toda $k \in K$. Por lo que

$$\bigvee_{k \in K} f^*(x_k) \leq f^*\left(\bigvee_{k \in K} x_k\right).$$

Probar la otra desigualdad es equivalente a probar que para toda $a \in M$,

$$a \leq f^*\left(\bigvee_{k \in K} x_k\right) \text{ implica } a \leq \bigvee_{k \in K} f^*(x_k).$$

Probaremos primero la implicación para $a \leq a_i$ para alguna $i \in I$.

Consideremos el isomorfismo $f_!: \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ dado por el inciso (b). Cada elemento $f_!(a_i) \wedge x_k \in \downarrow f_!(a_i)$ es de la forma $f_!(b_{ik}) = f_!(a_i) \wedge x_k$ para un único elemento $b_{ik} \in \downarrow a_i$.

Como $f_!: \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ es un isomorfismo, preserva supremos arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} f_!\left(\bigvee_{k \in K} b_{ik}\right) &= \bigvee_{k \in K} f_!(b_{ik}) \\ &= \bigvee_{k \in K} (f_!(a_i) \wedge x_k) && \text{def. de } f_!(b_{ik}) \\ &= f_!(a_i) \wedge \left(\bigvee_{k \in K} x_k\right) && \text{ley distributiva infinita.} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sea $a \leq a_i$ tal que $a \leq f^*\left(\bigvee_{k \in K} x_k\right)$.

Se tiene

$$\frac{a \leq f^*\left(\bigvee_{k\in K} x_k\right)}{f_!(a) \leq \bigvee_{k\in K} x_k} \qquad f_! \dashv f^*. \tag{4.6}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_!(a) &= f_!(a_i) \wedge f_!(a) && a \leq a_i \\ &\leq f_!(a_i) \wedge \left(\bigvee_{k\in K} x_k\right) && (4.6) \\ &= f_!\left(\bigvee_{k\in K} b_{ik}\right) && (4.5). \end{aligned}$$

Como $f_!$ restringido a a_i es un isomorfismo, $a \leq \bigvee_{k\in K} b_{ik}$.

Además, para cada $k \in K$

$$\dfrac{\dfrac{f_!(a_i) \wedge x_k \leq x_k}{f_!(b_{ik}) \leq x_k} \quad \text{def. de } f_!(b_{ik})}{b_{ik} \leq f^*(x_k)} \qquad f_! \dashv f^*.$$

Entonces $a \leq \bigvee_{k\in K} b_{ik} \leq \bigvee_{k\in K} f^*(x_k)$.

Ahora probemos el caso general. Sea $a \in M$, tenemos

$$\begin{aligned} a &= a \wedge 1 \\ &= a \wedge \left(\bigvee_{i\in I} a_i\right) && \text{condición (b)} \\ &= \bigvee_{i\in I}(a \wedge a_i) && \text{ley distributiva infinita.} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Supongamos que $a \leq f^*(\bigvee_{k\in K} x_k)$, entonces

$$\begin{aligned} a \leq f^*(\textstyle\bigvee_{k\in K} x_k) \quad & \text{implica} \quad \textstyle\bigvee_{i\in I}(a \wedge a_i) \leq f^*(\bigvee_{k\in K} x_k) && (4.7) \\ & \text{implica} \quad a \wedge a_i \leq f^*(\textstyle\bigvee_{k\in K} x_k) \quad \forall i \in I \\ & \text{implica} \quad a \wedge a_i \leq \textstyle\bigvee_{k\in K} f^*(x_k) \quad \forall i \in I && a \wedge a_i \leq a_i \\ & \text{implica} \quad \textstyle\bigvee_{i\in I}(a \wedge a_i) \leq \bigvee_{k\in K} f^*(x_k) \\ & \text{implica} \quad a \leq \textstyle\bigvee_{k\in K} f^*(x_k) && (4.7). \end{aligned}$$

Por lo tanto f^* preserva supremos arbitrarios, así que tiene adjunto derecho f_*. Además f^* preserva ínfimos arbitrarios porque tiene adjunto izquierdo $f_!$, por lo que induce un morfismo de locales $f : M \to L$.

Resta probar la identidad de Frobenius. Probaremos primero la desigualdad para $a \leq a_i$ para alguna $i \in I$.

Consideremos el isomorfismo $f_! : \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ dado por el inciso (b). Tenemos que $f_!(a) \wedge x \leq f_!(a) \leq f_!(a_i)$ por lo que existe una única $b \in \downarrow a_i$ tal que $f_!(b) = f_!(a) \wedge x$.

Como $f_! : \downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ es un isomorfismo y $f_!(b) \leq f_!(a)$ entonces $b \leq a$.

Además $f_!(b) \leq x$ que por adjunción implica $b \leq f^*(x)$.

Entonces

$$\dfrac{\dfrac{b \leq a \wedge f^*(x)}{f_!(b) \leq f_!(a \wedge f^*(x))} \quad f_!|_{\downarrow a_i} \text{ es un isomorfismo}}{f_!(a) \wedge x \leq f_!(a \wedge f^*(x))} \qquad \text{def. de } f_!(b).$$

Así que por la observación 4.2.2 la identidad de Frobenius queda demostrada.

Para el caso general, sea $a \in M$.

Entonces

$$\begin{array}{rll} f_!(a) \wedge x & = f_!(\bigvee_{i \in I}(a \wedge a_i)) \wedge x & (4.7) \\ & = (\bigvee_{i \in I} f_!(a \wedge a_i)) \wedge x & \text{condición (a)} \\ & = \bigvee_{i \in I}(f_!(a \wedge a_i) \wedge x) & \text{ley distributiva infinita} \\ & \leq \bigvee_{i \in I}(f_!(a \wedge a_i \wedge f^*(x))) & a \wedge a_i \leq a_i \\ & = f_!(\bigvee_{i \in I}(a \wedge a_i \wedge f^*(x))) & \text{condición (a)} \\ & = f_!(\bigvee_{i \in I}(a \wedge a_i) \wedge f^*(x)) & \text{ley distributiva infinita} \\ & = f_!(a \wedge f^*(x)) & (4.7), \end{array}$$

lo que demuestra la identidad de Frobenius.

Por lo tanto $f_!$ es la parte imagen directa de un morfismo étale de locales.

■

Proposición 4.3.9. *La composición de dos morfismos étale de locales también es étale.*

Demostración. Sean $g: N \to M$ y $f: M \to L$ morfismos étale, entonces tanto g como f son morfismos abiertos (lema 4.3.5) y por 4.2.5 su composición también lo es.

Como g y f son étale, existen familias $\langle a_i \rangle_{i \in I} \subset N$ y $\langle m_j \rangle_{j \in J} \subset M$ tales que $\bigvee_i a_i = 1$, $\bigvee_j m_j = 1$ y tales que las restricciones $g_!: \downarrow a_i \to \downarrow g_!(a_i)$ y $f_!: \downarrow m_j \to \downarrow f_!(m_j)$ son isomorfismos para todo $i \in I$ y para todo $j \in J$.

El elemento $g_!(a_i) \wedge m_j \in \downarrow g_!(a_i)$ es la imagen bajo $g_!$ de una única $a_{ij} \in \downarrow a_i$, es decir $g_!(a_i) \wedge m_j = g_!(a_{ij})$; así que las restricciones $g_!: \downarrow a_{ij} \to \downarrow g_!(a_{ij})$, $f_!: \downarrow g_!(a_{ij}) \to \downarrow f_! g_!(a_{ij})$ siguen siendo isomorfismos.

Observemos

$$\begin{array}{rll} g_!\left(\bigvee_j a_{ij}\right) & = \bigvee_j (g_!(a_{ij})) & g_! \text{ preserva supremos arbitrarios} \\ & = \bigvee_j (g_!(a_i) \wedge m_j) & \text{def. de } a_{ij} \\ & = g_!(a_i) \wedge \bigvee_j m_j & \text{ley distributiva infinita} \\ & = g_!(a_i) \wedge 1 & \bigvee_j m_j = 1 \\ & = g_!(a_i). & \end{array}$$

Como $g_!$ restringido a $\downarrow a_i$ es un isomorfismo, entonces $a_i = \bigvee_j a_{ij}$.

Entonces

$$\bigvee_{i,j} a_{ij} = \bigvee_i \left(\bigvee_j a_{ij} \right) = \bigvee_i a_i = 1.$$

Por lo tanto $f \circ g$ es étale. ■

Proposición 4.3.10. *En la categoría de locales, si el triángulo*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, "g"] \\ & L & \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

es conmutativo y f, g son étale, h es étale.

Demostración. Como f y g son morfismos étale, existen familias $\langle a_i\rangle_{i\in I} \subset N$ y $\langle m_j\rangle_{j\in J} \subset M$ tales que $\bigvee_i a_i = 1$, $\bigvee_j m_j = 1$ y tales que las restricciones $f_!:\downarrow a_i \to \downarrow f_!(a_i)$ y $g_!:\downarrow m_j \to \downarrow g_!(m_j)$ son isomorfismos para todo $i \in I$ y para todo $j \in J$.

Definamos $a_{ij} = a_i \wedge h^*(m_j)$ y $m_{ij} = g^* f_!(a_{ij}) \wedge m_j$.

Veamos que

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i,j} a_{ij} &= \bigvee_j \left(\bigvee_i (a_i \wedge h^*(m_j))\right) && \text{def. de } a_{ij}\\
&= \bigvee_j \left(\left(\bigvee_i a_i\right) \wedge h^*(m_j)\right) && \text{ley distributiva infinita}\\
&= \bigvee_j (1 \wedge h^*(m_j)) && \textstyle\bigvee_i a_i = 1\\
&= \bigvee_j h^*(m_j) && \\
&= h^*\left(\bigvee_j m_j\right) && h^* \text{ preserva supremos arbitrarios}\\
&= h^*(1) && \textstyle\bigvee_j m_j = 1\\
&= 1 && h^* \text{ preserva el } 1.
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= a_i \wedge h^*(m_j) && \text{def. de } a_{ij}\\
&\leq h^*(m_j) && \\
&\leq h^* g^* g_!(m_j) && m_j \leq g^* g_!(m_j)\\
&= f^* g_!(m_j) && (4.8) \text{ conmuta.}
\end{aligned}$$

Esta desigualdad es equivalente por adjunción a

$$f_!(a_{ij}) \leq g_!(m_j). \tag{4.9}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g_!(m_{ij}) &= g_!(g^* f_!(a_{ij}) \wedge m_j) && \text{def. de } m_{ij}\\
&= f_!(a_{ij}) \wedge g_!(m_j) && \text{Frobenius}\\
&= f_!(a_{ij}). && (4.9)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como $a_{ij} \leq a_i$ y $m_{ij} \leq m_j$, la función

$$\downarrow a_{ij} \xrightarrow{f_!} \downarrow f_!(a_{ij}) = \downarrow g_!(m_{ij}) \xleftarrow{g_!} \downarrow m_{ij}$$

es un isomorfismos de COPOS para cada $i \in I$ y para cada $j \in J$.

Resta probar que dichos isomorfismos son restricciones de h.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow a_{ij} \arrow[r, "f_!"] \arrow[d] & \downarrow f_!(a_{ij}) = \downarrow g_!(m_{ij}) \arrow[d] & \downarrow m_{ij} \arrow[l, "g_!"'] \arrow[d] \\
N \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & L & M. \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

Por el lema 4.3.1 basta probar que si $m \leq m_{ij}$, el isomorfismo del renglón superior lo manda a $h^*(m) \wedge a_{ij}$. Pero por el mismo lema sabemos que su imagen es $f^* g_!(m) \wedge a_{ij}$. Veamos que son iguales.

Observemos

$$\begin{array}{cl}
f^* g_!(m) \wedge a_{ij} = h^*(m) \wedge a_{ij} & \\
\hline
f_!(f^* g_!(m) \wedge a_{ij}) = f_!(h^*(m) \wedge a_{ij}) & f_! \text{ es un iso en } \downarrow a_{ij} \\
\hline
g_!(m) \wedge f_!(a_{ij}) = f_!(h^*(m) \wedge a_{ij}) & \text{Frobenius} \\
\hline
g_!(m) = f_!(h^*(m) \wedge a_{ij}) & \text{por (4.10), } g_!(m) \in \downarrow f_!(a_{ij})
\end{array}$$

así que es suficiente demostrar la última igualdad.

Por el lema 4.3.1 aplicado al cuadrado de la derecha del diagrama (4.11) tenemos

$$m = g_!^{-1} g_!(m) = g^* g_!(m) \wedge m_{ij}. \tag{4.12}$$

Además, por adjunción y por definición de a_{ij} tenemos que

$$a_{ij} \leq f^* f_!(a_{ij}), \quad a_{ij} \leq h^*(m_j)$$

por lo que

$$\begin{array}{lll}
a_{ij} & \leq f^* f_!(a_{ij}) \wedge h^*(m_j) & \\
& = h^* g^* f_!(a_{ij}) \wedge h^*(m_j) & \text{(4.8) conmuta} \\
& = h^*(g^* f_!(a_{ij}) \wedge m_j) & h^* \text{ preserva ínfimos binarios} \\
& = h^*(m_{ij}) & \text{def. de } m_{ij}.
\end{array} \tag{4.13}$$

Finalmente

$$\begin{array}{lll}
f_!(h^*(m) \wedge a_{ij}) & = f_!(h^*(g^* g_!(m) \wedge m_{ij}) \wedge a_{ij}) & \text{(4.12)} \\
& = f_!(h^* g^* g_!(m) \wedge h^*(m_{ij}) \wedge a_{ij}) & h^* \text{ preserva ínf. binarios} \\
& = f_!(h^* g^* g_!(m) \wedge a_{ij}) & \text{(4.13)} \\
& = f_!(f^* g_!(m) \wedge a_{ij}) & \text{(4.8) conmuta} \\
& = g_!(m) \wedge f_!(a_{ij}) & \text{Frobenius} \\
& = g_!(m) \wedge g_!(m_{ij}) & \text{(4.10)} \\
& = g_!(m) & g_!(m) \in \downarrow g_!(m_{ij}).
\end{array}$$

■

Este resultado es análogo al lema 4.2.6, de hecho se apoya en él para su demostración.

Lema 4.3.11. *Sean $f_i: L_i \to L$ morfismos étale para cada $i \in I$, entonces el morfismo inducido $f: \bigoplus L_i \to L$ es un morfismo étale.*

Demostración. Por el lema 4.2.6, el morfismo $f: \bigoplus L_i \to L$ es abierto.

Como cada $f_i: L_i \to L$ es étale, existen familias $\langle a_{ij} \rangle_j \subset L_i$ tales que $\bigvee_j a_{ij} = 1$ en L_i y las restricciones $(f_i)_!|_{a_{ij}}: \downarrow a_{ij} \to \downarrow (f_i)_!(a_{ij})$ son isomorfismos para todo $j \in J$.

Sea $l \in L_i$, definamos al elemento $\widehat{l}$ de $\bigoplus L_i$ como

$$\widehat{l}(i') := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i' \\ l & \text{si } i = i'. \end{cases}$$

Tenemos que

$$\bigvee_i \bigvee_j \widehat{a_{ij}} = \bigvee_i \widehat{1_i} = 1,$$

donde 1_i es el uno de cada L_i, por lo que la familia $\langle \widehat{a_{ij}} \rangle_{i,j}$ cubre a $\bigoplus L_i$.

Fijando un elemento de dicha familia vemos que

$$\downarrow \widehat{a_{ij}} \cong \downarrow a_{ij} \xrightarrow{\ f_! \ } \downarrow (f_i)_!(a_{ij}) = \downarrow f_!(\widehat{a_{ij}}) \ ,$$

es decir, que $f_!$ se restringe a un isomorfismo.

Por lo tanto f es étale. ∎

Capítulo 5

Gavillas sobre locales

El presente capítulo tiene estrecha relación con el capítulo 2, de hecho persiguen los mismos objetivos y tiene prácticamente la misma estructura, aunque quizá el balance entre resultados y ejemplos no sea el mismo.

5.1 Gavillas

Definición 5.1.1. *Una* pregavilla *sobre un local L es un funtor $F\colon L^{op} \to$* **Con**. *Dados $v \leq u \in L$, escribimos*

$$F(u) \longrightarrow F(v), \qquad x \mapsto x|_v$$

para denotar la acción de F en $v \leq u$.

El hecho de que F sea un funtor equivale a

1. $\forall u \in L, \forall x \in F(u) \quad x|_u = x$
2. $\forall w \leq v \leq u \in L, \forall x \in F(u) \quad x|_w = (x|_v)|_w$.

Para cualquier pregavilla $F\colon L^{op} \to$ **Con** y cualquier cubierta $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L podemos construir el diagrama

$$F(u) \xrightarrow{e} \prod_i F(u_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(u_i \wedge u_j) \tag{5.1}$$

en **Con** donde para todo $x \in F(u)$, $e(x) = \langle x|_{u_i}\rangle_i$ y para toda familia $\langle x_i\rangle_i \in \prod_i F(u_i)$,

$$p(\langle x_i\rangle_i) = \langle x_i|_{(u_i\wedge u_j)}\rangle_{i,j},$$

$$q(\langle x_i\rangle_i) = \langle x_j|_{(u_i\wedge u_j)}\rangle_{i,j}.$$

Definición 5.1.2. *Sean F una pregavilla sobre un local L y una cubierta $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ de elementos de L. Una familia $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_i F(u_i)$ es* compatible *si $p(\langle x_i \rangle_i) = q(\langle x_i \rangle_i)$.*

Definición 5.1.3. *Una pregavilla F sobre un local L es* separada *cuando para toda cubierta $u = \bigvee_{i \in I} u_i$, el morfismo e del diagrama (5.1) es inyectivo.*

Definición 5.1.4. *Una pregavilla F sobre un local L es una* gavilla *cuando para todo $u \in L$ y toda cubierta $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ en L el diagrama (5.1) es un igualador.*

Obsérvese que en este caso se puede aplicar el criterio del lema 1.3.9 para igualadores de conjuntos.

Lema 5.1.5. *Sea F una pregavilla sobre un local L. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F es una gavilla.*
2. *F es una pregavilla separada y dado $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ en L, cada familia compatible $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_i F(u_i)$ puede ser amalgamada en un elemento $x \in F(u)$ tal que $e(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$.*

Demostración. Si F es una gavilla, claramente cumple con la segunda condición.

Por otro lado, supongamos que F cumple con la segunda condición. Entonces cada familia compatible $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_i F(u_i)$ puede ser amalgamada en un elemento $x \in F(u)$, como además F es separada, dicho elemento es único. Por lo tanto F es una gavilla. ∎

Lema 5.1.6. *Sea F una pregavilla sobre un local L.*

1. *Si F es separada, $F(0)$ tiene a lo más un elemento.*
2. *Si F es una gavilla, $F(0)$ tiene exactamente un elemento.*

Demostración. La cubierta vacía de $0 \in L$ es tal que la familia vacía es compatible. ∎

Lema 5.1.7. *Sea F una pregavilla sobre un local L. Si $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ en L y $x \in F(u)$, la familia $\langle x|_{u_i} \rangle_{i \in I} \in \prod_i F(u_i)$ es compatible.*

Demostración. Sean $i, j \in I$, entonces

$$(x|_{u_i})|_{u_i \wedge u_j} = x|_{u_i \wedge u_j} = (x|_{u_j})|_{u_i \wedge u_j}.$$

∎

Lema 5.1.8. *Sea F una gavilla sobre un local L. Si $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ es una* partición *en L (es decir, para todo $i, j \in I$ con $i \neq j$, $u_i \wedge u_j = 0$), entonces $F(u) \cong \prod_{i \in I} F(u_i)$.*

Demostración. Por la definición 5.1.4 sabemos que el morfismo e es inyectivo.

Como $u_i \wedge u_j = 0$ para $i \neq j$, el lema 5.1.6 indica que cada familia $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(u_i)$ es compatible, así que por el criterio 1.3.9 existe un elemento $x \in F(u)$ tal que $e(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$. ■

Definición 5.1.9. *Una* subgavilla *de una gavilla* $F: L^{op} \to$ **Con**, *es un subfuntor de* F *que es en sí mismo una gavilla.*

Un criterio que caracteriza a las subgavillas se exhibe en la siguiente:

Lema 5.1.10. *Sea* $F \in$ **Gav**(L) *una gavilla. Un subfuntor* $A \subset F$ *es una subgavilla si y solo si para todo elemento* $l \in L$*, toda cubierta* $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ *y para todo* $x \in F(l)$ *se tiene que* $x \in A(l)$ *si y solo si* $x|_{l_i} \in A(l_i)$ *para toda* $i \in I$.

Demostración. Primero supongamos que $A \subset F$ es una subgavilla.

Sean $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ un elemento de L con una cubierta y $x \in F(l)$.

Ahora supongamos que $x \in A(l)$. Entonces $x|_{l_i} \in A(l_i)$ para toda $i \in I$ porque A es un funtor.

Por el otro lado, sea $x \in F(l)$. Supongamos que $x|_{l_i} \in A(l_i)$ para toda $i \in I$. Como A es en sí mismo una gavilla, el diagrama

$$A(l) \xrightarrow{e} \prod_i A(l_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} A(l_i \wedge l_j)$$

es un igualador. Por el lema 5.1.7, la familia $\langle x|_{l_i} \rangle_{i \in I} \in \prod_i A(l_i)$ es compatible, así que existe un único elemento en $A(l)$ que bajo la función e nos da $\langle x|_{l_i} \rangle_{i \in I}$ y, como F es gavilla, dicho elemento es claramente x, por lo que $x \in A(l)$.

En la otra dirección, supongamos que para todo elemento $l \in L$ con una cubierta $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ y para todo elemento $x \in F(l)$, se tiene que $x \in A(l)$ si y solo si $x|_{l_i} \in A(l_i)$ para toda $i \in I$.

Sean $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ un elemento de L con una cubierta. Veamos que el diagrama

$$A(l) \xrightarrow{e} \prod_i A(l_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} A(l_i \wedge l_j)$$

es un igualador en **Con** con ayuda del criterio 1.3.9.

Sea $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_i A(l_i)$ tal que $p(\langle x_i \rangle_i) = q(\langle x_i \rangle_i)$. Como A es un subfuntor de F y F es una gavilla, existe un único elemento $x \in FU$ tal que $x|_{l_i} = x_i$ para toda $i \in I$. Entonces, $x|_{l_i} \in A(l_i)$ para toda $i \in I$, así que por hipótesis, $x \in A(l)$. Por lo tanto A es una gavilla. ■

Ejemplo 5.1.11.a. *Sean* L, M *dos locales. Para cada* $u \in L$ *definimos*

$$F(u) = \{f : \downarrow u \to M \mid f \text{ es un morfismo de locales}\}.$$

Si $v \leq u$ *y* $f \in F(u)$*, el morfismo de restricción* $f \mapsto f|_v \in F(v)$*, donde* $f|_v$ *se define como la composición*

$$i^* \circ f^* : M \to \downarrow v, \quad m \mapsto f^*(m) \wedge v,$$

es tal que F es una pregavilla.

Veamos que F es una pregavilla separada. Sean $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L y f, $g \in F(u)$ tales que $f|_{u_i} = g|_{u_i}$ para toda $i \in I$. Entonces, si $m \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(m) &= f^*(m) \wedge u = f^*(m) \wedge \bigvee_{i\in I} u_i \\ &= \bigvee_{i\in I}(f^*(m) \wedge u_i) = \bigvee_{i\in I}(f|_{u_i})^*(m) \\ &= \bigvee_{i\in I}(g|_{u_i})^*(m) = g^*(m). \end{aligned}$$

Por lo tanto F es una pregavilla separada.

Veamos que F es una gavilla. Sea $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L y $\langle f_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(u_i)$ una familia compatible.

Definamos

$$f^* : M \to \downarrow u, \qquad m \mapsto \bigvee_{i\in I} f_i^*(m).$$

Veamos que f^* preserva supremos arbitrarios.

$$\begin{aligned} f^*\left(\bigvee_{j\in J} m_j\right) &= \bigvee_{i\in I} f_i^*\left(\bigvee_{j\in J} m_j\right) && \textit{def. de } f^* \\ &= \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in J} f_i^*(m_j) && \textit{cada } f_i^* \textit{ preserva sup. arbitrarios} \\ &= \bigvee_{j\in J}\bigvee_{i\in I} f_i^*(m_j) && \\ &= \bigvee_{j\in J} f^*(m_j) && \textit{def. de } f^*. \end{aligned}$$

Veamos que f^* preserva el 1. Como cada f_i^* preserva el 1,

$$f^*(1) = \bigvee_{i\in I} f_i^*(1) = \bigvee_{i\in I} u_i = u.$$

Veamos que f^* preserva ínfimos binarios.

$$\begin{aligned} f^*(m \wedge m') &= \bigvee_{i\in I} f_i^*(m \wedge m') && \textit{def. de } f^* \\ &= \bigvee_{i\in I} f_i^*(m) \wedge f_i^*(m') && \textit{cada } f_i^* \textit{ preserva ínf. binarios,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(m) \wedge f^*(m') &= (\bigvee_{i\in I} f_i^*(m)) \wedge (\bigvee_{j\in I} f_j^*(m')) && \textit{def. de } f^* \\ &= \bigvee_{i,j\in I}(f_i^*(m) \wedge f_j^*(m')) && \textit{ley distributiva infinita.} \end{aligned}$$

Claramente

$$\bigvee_{i\in I} f_i^*(m) \wedge f_i^*(m') \leq \bigvee_{i,j\in I} f_i^*(m) \wedge f_j^*(m').$$

Para demostrar la otra desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} f_i^*(m) \wedge f_j^*(m') &= f_i^*(m) \wedge f_j^*(m') \wedge u_j \wedge u_i \\ &= (f_i|_{u_i \wedge u_j})^*(m) \wedge (f_j|_{u_i \wedge u_j})^*(m') \\ &= (f_i|_{u_i \wedge u_j})^*(m) \wedge (f_i|_{u_i \wedge u_j})^*(m') && \langle f_i \rangle_{i\in I} \text{ compatible} \\ &= f_i^*(m) \wedge f_i^*(m') \wedge u_j \wedge u_i \\ &\leq f_i^*(m) \wedge f_i^*(m'). \end{aligned}$$

Por lo tanto f^* induce un morfismo de locales f que está en $F(u)$.
Finalmente veamos que $e(f) = \langle f_i \rangle_{i\in I}$.
Sean $m \in M$ y $j \in I$.

$$\begin{aligned} (f|_{u_j})^*(m) &= \left(\textstyle\bigvee_{i\in I} f_i^*(m)\right) \wedge u_j && \text{def. de } f^* \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_i^*(m) \wedge u_j) && \text{ley distributiva infinita} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_i^*(m) \wedge u_i \wedge u_j) && f_i^*(m) \leq u_i \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_i|_{u_i \wedge u_j})^*(m) \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_j|_{u_i \wedge u_j})^*(m) && \langle f_i \rangle_{i\in I} \text{ es compatible} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_j^*(m) \wedge u_i \wedge u_j) \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(f_j^*(m) \wedge u_i) && f_j^*(m) \leq u_j \\ &= f_j^*(m) \wedge \textstyle\bigvee_{i\in I} u_i && \text{ley disributiva infinita} \\ &= f_j^*(m) \wedge u \\ &= f_j^*(m). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.11.b. *Sea $p: M \to L$ un morfismo de locales. Para cada $u \in L$ definimos*

$$G(u) = \{f : \downarrow u \to M \mid p \circ f = i_u\},$$

donde i_u es la inclusión del sublocal abierto $\downarrow u$ en L, es decir $i_u^*(l) = l \wedge u$. Así, la condición $p \circ f = i_u$ se reduce a $f^*p^*(l) = l \wedge u$ para cada $l \in L$.

Veamos que G es cerrada en la gavilla F bajo restricciones arbitrarias. Sean $f \in G(u)$ y $l \in L$, si $v \leq u$

$$(f|_v)^*p^*(l) = f^*p^*(l) \wedge v = l \wedge u \wedge v = l \wedge v.$$

Como G es una subpregavilla de F, entonces G es además una pregavilla separada como se verá en la proposición 5.2.3.

Veamos que G es una gavilla. Sean $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L y $\langle f_i \in G(u_i) \rangle_{i\in I}$ una familia compatible. Consideremos el morfismo de locales

$$f^* : M \to \downarrow u, \qquad m \mapsto \bigvee_{i\in I} f_i^*(m)$$

definido en el ejemlo 5.1.11.a.

Si $l \in L$, tenemos que

$$f^*p^*(l) = \bigvee_{i\in I} f_i^*p^*(l) = \bigvee_{i\in I} l \wedge u_i = l \wedge \bigvee_{i\in I} u_i = l \wedge u.$$

Por lo tanto, G es gavilla.

Ejemplo 5.1.11.c. *Sea L un local. Para cada $u \in L$ definimos*

$$\Omega(u) = \{l \in L \mid l \leq u\}.$$

Dado $v \leq u$ en L, el correspondiente morfismo de restricción se define como

$$\Omega(u) \to \Omega(v), \qquad l \mapsto l \wedge v.$$

Con esta definición, Ω es obviamente una pregavilla.

Veamos que Ω es una pregavilla separada. Sean $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L y $l, m \leq u$ tales que $l \wedge u_i = m \wedge u_i$ para toda $i \in I$, entonces

$$\begin{aligned} l = l \wedge u = l \wedge \bigvee_{i\in I} u_i = \bigvee_{i\in I} l \wedge u_i \\ = \bigvee_{i\in I} m \wedge u_i = m \wedge \bigvee_{i\in I} u_i = m \wedge u = m. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que Ω es una gavilla.

Sean $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ en L y $\langle l_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Omega(u_i)$ una familia compatible.

Definamos $l = \bigvee_{i\in I} l_i$, claramente

$$l = \bigvee_{i\in I} l_i \leq \bigvee_{i\in I} u_i = u,$$

por lo que $l \in \Omega(u)$.

Finalmente veamos que l se restringe adecuadamente. Sea $j \in I$.

$$\begin{aligned} l \wedge u_j &= \left(\textstyle\bigvee_{i\in I} l_i\right) \wedge u_j && \text{def. de } l \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(l_i \wedge u_j) && \text{ley distributiva infinita} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(l_i \wedge u_i \wedge u_j) && l_i \leq u_i \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I} l_i|_{u_i\wedge u_j} && \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I} l_j|_{u_i\wedge u_j} && \langle l_i\rangle_{i\in I} \text{ es compatible} \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(l_j \wedge u_i \wedge u_j) && \\ &= \textstyle\bigvee_{i\in I}(l_j \wedge u_i) && l_j \leq u_j \\ &= l_j \wedge \textstyle\bigvee_{i\in I} u_i && \text{ley distributiva infinita} \\ &= l_j \wedge u && \\ &= l_j && \end{aligned}$$

Definición 5.1.12. *Sea L un local.*

La categoría $\mathbf{Con}^L$ *consta de*

Objetos: *Pregavillas sobre L.*

Morfismos: *Transformaciones naturales entre ellas.*

De igual forma, la categoría $\mathbf{Gav}(L)$ *consta de*

Objetos: *Gavillas sobre L.*

Morfismos: *Transformaciones naturales entre ellas.*

Explícitamente, un morfismo $\alpha : F \to G$ entre pregavillas o gavillas consiste de una familia de funciones $\langle \alpha_u : F(u) \to G(u) \rangle_{u \in L}$ tales que

$$\forall u, v \in L \quad \forall a \in F(u) \qquad v \leq u \Rightarrow \alpha_u(a)|_v = \alpha_v(a|_v).$$

El concepto de soporte es una herramienta que las categorías sobre espacios topológicon no han tenido que usar explícitamente en este trabajo.

Definición 5.1.13. *Sea F una pregavilla sabre un local L. El soporte de F es el elemento de L dado por*

$$\sigma(F) = \bigvee \{u \in L \mid F(u) \neq \emptyset\}$$

Una pregavilla o gavilla F sobre un local L no necesariamente tiene que ser no vacía al nivel de su soporte $\sigma(F)$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.14. *Tomemos el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ provisto con la topología dada por los subconjuntos $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}, \emptyset, X\}$.*

Definimos la pregavilla F de la siguiente manera:

$$F(X) = \emptyset \quad F(\{1, 2\}) = \{1\} \quad F(\{2, 3\}) = \{3\} \quad F(\{2\}) = \{1, 3\}.$$

Las inclusiones canónicas serán las imágenes bajo F de las relaciones de contención en X. De esta manera F es una gavilla. Su soporte es X pero $F(X) = \emptyset$.

5.2 El local de los subobjetos cerrados

Esta sección se corresponde con la sección 2.3, sustituyendo la noción de gérmen por la de subobjeto cerrado.

En esta sección nos ocuparemos de los subobjetos de pregavillas o gavillas, por lo cual se busca definirlos explícitamente.

Lema 5.2.1. *Sea L un local. La categoría de gavillas sobre L y la de pregavillas separadas sobre L son cerradas bajo límites arbitrarios en la categoría de pregavillas sobre L.*

Demostración. Sean $\mathbf{J}$ una categoría pequeña y $C : \mathbf{J} \to \mathbf{Con}^L$ un funtor.

Por el lema 1.3.13 sabemos que el límite del diagrama $\langle C(I) \rangle_{I \in \mathbf{J}}$ es el cono

$$(K, \langle p_I : K \to C(I) \rangle_{I \in \mathbf{J}})$$

donde la pregavilla K es tal que para cada $u \in L$

$$K(u) = \{\langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}} \in \prod_{I \in \mathbf{J}} C(I)(u) \mid \forall i : I \to J \in \mathbf{J}, (C(i))_u(x_I) = x_J\}$$

$$K(u) = \varprojlim_{I \in \mathbf{J}} (C(I)(u)) \tag{5.2}$$

y si $v \leq u$ la restricción está dada por

$$K(u) \to K(v), \quad \langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}} \mapsto \langle x_I|_v \rangle_{I \in \mathbf{J}}. \tag{5.3}$$

Supongamos que $C(I)$ es una pregavilla separada para cada $I \in \mathbf{J}$. Veamos que K es también una pregavilla separada.

Sean $u = \bigvee_{k \in K} u_k$ una cubierta en L y $\langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}$, $\langle y_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}$ elementos de $K(u)$ tales que $e(\langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}) = e(\langle y_I \rangle_{I \in \mathbf{J}})$. Entonces

$$\begin{array}{cl}
e(\langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}) = e(\langle y_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}) & \\
\hline
\langle \langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}|_{u_k} \rangle_{k \in K} = \langle \langle y_I \rangle_{I \in \mathbf{J}}|_{u_k} \rangle_{k \in K} & \text{def. de } e \\
\hline
\langle \langle x_I|_{u_k} \rangle_{I \in \mathbf{J}} \rangle_{k \in K} = \langle \langle y_I|_{u_k} \rangle_{I \in \mathbf{J}} \rangle_{k \in K} & (5.3) \\
\hline
\langle \langle x_I|_{u_k} \rangle_{k \in K} \rangle_{I \in \mathbf{J}} = \langle \langle y_I|_{u_k} \rangle_{k \in K} \rangle_{I \in \mathbf{J}} & \\
\hline
\forall I \in \mathbf{J} \quad \langle x_I|_{u_k} \rangle_{k \in K} = \langle y_I|_{u_k} \rangle_{k \in K} & \\
\hline
\forall I \in \mathbf{J} \quad e(x_I) = e(y_I) & \text{def. de } e \\
\hline
\forall I \in \mathbf{J} \quad x_I = y_I & C(I) \text{ es separada } \forall I \in \mathbf{J} \\
\hline
\langle x_I \rangle_{I \in \mathbf{J}} = \langle y_I \rangle_{I \in \mathbf{J}} &
\end{array}$$

Por lo tanto K es una pregavilla separada.

Supongamos ahora que cada $C(I)$ es una gavilla para todo $I \in \mathbf{J}$. Sea $u = \bigvee_{k \in K} u_k$ una cubierta en L, debemos probar que el diagrama

$$K(u) \xrightarrow{e} \prod_k K(u_k) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l} K(u_k \wedge u_l)$$

es un igualador en **Con**.

Entonces, como límites conmutan con límites,

$$\begin{array}{c}
K(u) \xrightarrow{e} \prod_k K(u_k) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l} K(u_k \wedge u_l) \\
\hline
\varprojlim_{I \in \mathbf{J}} (C(I)(u)) \xrightarrow{e} \prod_k \varprojlim_{I \in \mathbf{J}} (C(I)(u_k)) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l} \varprojlim_{I \in \mathbf{J}} (C(I)(u_k \wedge u_l)) \\
\hline
\varprojlim_{I \in \mathbf{J}} (C(I)(u)) \xrightarrow{e} \varprojlim_{I \in \mathbf{J}} \left(\prod_k C(I)(u_k) \right) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \varprojlim_{I \in \mathbf{J}} \left(\prod_{k,l} C(I)(u_k \wedge u_l) \right) \\
\hline
\varprojlim_{I \in \mathbf{J}} \left(C(u) \xrightarrow{e} \prod_k C(u_k) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l} C(u_k \wedge u_l) \right).
\end{array}$$

Como el límite de una familia de igualadores es un igualador, K es una gavilla. ■

Corolario 5.2.2. *Sea L un local. Un morfismo $\alpha: G \Rightarrow F$ de gavillas (pregavillas separadas) sobre L es un monomorfismo si y solo si para toda $u \in L$, α_u es una función inyectiva.*

Demostración. Sea $\alpha: G \Rightarrow F$ un monomofismo de gavillas (pregavillas separadas), esto equivale a que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, equal, "1_G"] \arrow[d, equal, "1_G"'] & G \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & F \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

sea un producto fibrado en la categoría de gavillas (pregavillas separadas).

Por el lema 5.2.1, esto solo ocurre si el diagrama (5.4) es un producto fibrado en la categoría $\mathbf{Con}^L$.

Por el lema 1.3.13, esto es equivalente a que para toda $u \in L$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} G(u) \arrow[r, "1_{G(u)}"] \arrow[d, "1_{G(u)}"'] & G(u) \arrow[d, "\alpha_u"] \\ G(u) \arrow[r, "\alpha_u"'] & F(u) \end{tikzcd}$$

sea un producto fibrado en $\mathbf{Con}$. Lo cual equivale a que $\alpha_u : G(u) \to F(u)$ sea una función inyectiva para todo $u \in L$. ■

En vista del corolario anterior, podemos considerar que los subobjetos G de F en la categoría de gavillas o de pregavillas cerradas son aquellos que para toda $u \in L$, $G(u) \subseteq F(u)$.

Esto nos pone en el camino de suponer que los subobjetos de una gavilla o pregavilla separada coinciden con las subgavillas o las subpregavillas separadas, respectivamente.

Proposición 5.2.3. *Sea L un local. Cada subpregavilla de una pregavilla separada sobre L es también separada.*

Demostración. Sean F una pregavilla separada sobre L y G una subpregavilla de F. Sean $u = \bigvee_{i \in I} u_i$, y $x, y \in G(u)$ tales que $e(x) = e(y)$. Como F es separada y $G(u) \subseteq F(u)$ para toda $u \in L$ entonces $x = y$. ■

Definición 5.2.4. *Sea F una pregavilla sobre un local L. Una subpregavilla $G \subseteq F$ es* cerrada *cuando para cada cubierta $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ en L y todo elemento $x \in F(u)$, si $x|_{u_i} \in G(u_i)$ para toda $i \in I$ entonces $x \in G(u)$.*

Proposición 5.2.5. *Sea F una pregavilla sobre un local L. Las subpregavillas cerradas de F, ordenadas por inclusión, constituyen un local.*

Demostración. La intersección de subpregavillas cerradas es claramente una subpregavilla cerrada, en tanto que su estructura es puntual. Entonces las subpregavillas cerradas constituyen una retícula completa.

Dadas dos subpregavillas $B, C \subseteq F$ construiremos una subpregavilla cerrada $(B \Rightarrow C)$ para exhibir la estructura de álgebra de Heyting de la retícula de subpregavillas cerradas. (Ver lema 4.1.11.)

Sea $u \in L$, definimos

$$(B \Rightarrow C)(u) = \{x \in F(u) \mid \forall v \leq u, \quad x|_v \in B(v) \text{ implica } x|_v \in C(v)\}.$$

Obviamente si $x \in (B \Rightarrow C)(u)$ y $w \leq u$ entonces $x|_w \in (B \Rightarrow C)(w)$, por lo que $(B \Rightarrow C)$ es una subpregavilla de F.

Para probar que es cerrada, consideremos $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ y $x \in F(u)$ tal que $x|_{u_i} \in (B \Rightarrow C)(u_i)$ para toda $i \in I$.

Sea $v \leq u$, tenemos que

$$v = v \wedge u = v \wedge \bigvee_{i \in I} u_i = \bigvee_{i \in I} v \wedge u_i.$$

Entonces, como $x|_{u_i} \in (B \Rightarrow C)(u_i)$ para toda $i \in I$,

$$\begin{aligned} x|_v \in B(v) \text{ implica } \forall i \in I \quad & x|_{v \wedge u_i} \in B(v \wedge u_i) \\ \text{implica } \forall i \in I \quad & (x|_{u_i})|_{v \wedge u_i} \in B(v \wedge u_i) \\ \text{implica } \forall i \in I \quad & (x|_{u_i})|_{v \wedge u_i} \in C(v \wedge u_i) \\ \text{implica } \forall i \in I \quad & x|_{v \wedge u_i} \in C(v \wedge u_i) \\ \text{implica } \forall i \in I \quad & x|_v \in C(v). \end{aligned}$$

Entonces $x \in (B \Rightarrow C)(u)$ debido a la definición de $(B \Rightarrow C)$ y a que C es cerrado. Por lo tanto $(B \Rightarrow C)$ es cerrado.

Sea A una subpregavilla cerrada de F. Si $A \cap B \subseteq C$, para toda $v \leq u$ en L y $x \in A(u)$ se tiene que

$$\begin{aligned} x|_v \in B(v) \text{ implica } & x|_v \in A(v) \cap B(v) \\ \text{implica } & x|_v \in C(v), \end{aligned}$$

entonces $x \in (B \Rightarrow C)(u)$, así que $A \subseteq (B \Rightarrow C)$.

Inversamente, supongamos que $A \subseteq (B \Rightarrow C)$ y sean $u \in L$ y $x \in A(u) \cap B(u)$, entonces

$$\begin{aligned} x \in A(u) \cap B(u) \text{ implica } & x \in (B \Rightarrow C)(u) \text{ y } x \in B(u) \\ \text{implica } & x \in C(u). \end{aligned}$$

Por lo que $A \cap B \subseteq C$. ∎

A este local lo denotaremos por $\mathbf{Cl}(F)$

Busquemos la manera de relacionar estos nuevos locales $\mathbf{Cl}(F)$ a partir de morfismos entre los locales subyacentes.

Lema 5.2.6. *En la categoría de pregavillas sobre un local L, el producto fibrado de un subobjeto cerrado a lo largo de un morfismo arbitrario es también un subobjeto cerrado.*

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

un producto fibrado en $\mathbf{Con}^L$ donde C es un subobjeto cerrado de B.

Entonces, para todo $u \in L$, $P(u) = \{x \in A(u) \mid f_u(x) \in C(u)\}$.

Sean $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ en L y $a \in A(u)$ tales que $a|_{u_i} \in P(u_i)$ para todo $i \in I$.

Para cada $i \in I$, como $a|_{u_i} \in P(u_i)$ y f es natural, tenemos

$$f_u(a)|_{u_i} = f_{u_i}(a|_{u_i}) \in C(u_i),$$

entonces $f_u(a) \in C(u)$ porque C es cerrado, entonces $a \in P(u)$.

Por lo tanto P es cerrado. ∎

Para continuar, introduciremos el concepto de "cerradura de un subobjeto".

Lema 5.2.7. *Sean F una pregavilla sobre un local L y $S \subseteq F$ un subobjeto de F. La pregavilla $\overline{S}$ definida como*

$$\overline{S}(u) = \{x \in F(u) \mid \exists u = \bigvee_{i \in I} u_i \in L, \quad \forall i \in I \quad x|_{u_i} \in S(u_i)\},$$

para cada $u \in L$, es el subobjeto cerrado de F más pequeño tal que $S \subseteq \overline{S}$.

Demostración. Claramente $\overline{S}$ es una pregavilla.

Veamos que $S(u) \subseteq \overline{S}(u)$ para toda $u \in L$. Sean $u \in L$ y $x \in S(u)$. Entonces $x \in F(u)$ y la cubierta trivial $u = u$ es tal que $x|_u = x \in S(u)$, entonces $x \in \overline{S}(u)$. Por lo tanto $S \subseteq \overline{S}$.

Supongamos que G es un subobjeto cerrado tal que $S \subseteq G$. Veamos que $\overline{S}(u) \subset G(u)$ para toda $u \in L$.

Sean $u \in L$ y $x \in \overline{S}(u)$. Entonces existe una cubierta $u = \bigvee_{i \in I} u_i$ tal que $x|_{u_i} \in S(u_i) \subseteq G(u_i)$ para toda $i \in I$, entonces $x \in G(u)$ porque G es cerrado. Por lo tanto $\overline{S} \subseteq G$.

Finalmente, veamos que $\overline{S}$ es un subobjeto cerrado de F.

Sean $v = \bigvee_{j \in J} v_j$ y $x \in F(v)$ tales que $x|_{v_j} \in \overline{S}(v_j)$ para toda $j \in J$. Entonces existen cubiertas $v_j = \bigvee_{i_j \in I_j} u_{i_j}$ tales que $x|_{u_{i_j}} \in S(u_{i_j})$ para toda $j \in J$. Como $v = \bigvee_{j \in J} v_j = \bigvee_{j \in J} \bigvee_{i_j \in I_j} u_{i_j}$, entonces $x \in \overline{S}(v)$. Por lo tanto $\overline{S}$ es un subobjeto cerrado. ∎

La subpregavilla $\overline{S}$ es llamada la *cerradura* de S" en F.

Lema 5.2.8. *Sea F una pregavilla sobre un local L. La operación de cerradura de los subobjetos de F, definida en el lema 5.2.7, satisface las siguientes propiedades:*

1. $S \subseteq \overline{S}$.
2. $S \subseteq T \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$.
3. $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.
4. $\overline{S \cap T} = \overline{S} \cap \overline{T}$.
5. $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$.

Demostración. La propiedad 1 se probó en el lema 5.2.7.

La propiedad 2 se desprende de la definición de cerradura. Sea $u \in L$ y $x \in \overline{S}(u)$, entonces existe una cubierta $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ tal que $x|_{u_i} \in S(u_i) \subseteq T(v_i)$, entonces $x \in \overline{T}(u)$.

Para probar la propidad 3 basta observar que $\overline{\overline{S}}$ es el subobjeto cerrado más pequeño que contiene al subobjeto cerrado $\overline{S}$, entonces $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

Probemos la propiedad 4. Como la intersección de subobjetos cerrados es nuevamente un cerrado (lema 5.2.5), $\overline{S} \cap \overline{T}$ es cerrado y como la propiedad 1 indica que $S \cap T \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$ entonces, por la propiedad 3, $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$.

Para la otra contención tomemos $u \in L$ y $x \in \overline{S}(u) \cap \overline{T}(u)$.

Por definición existen cubiertas $u = \bigvee_{i\in I} u_i$, $u = \bigvee_{j\in J} v_j$ tales que $x|_{u_i} \in S(u_i)$ para toda $i \in I$ y $x|_{v_j} \in T(v_j)$ para toda $j \in J$.

Pero

$$u = u \wedge u = \left(\bigvee_{i\in I} u_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j\in J} v_j\right) = \bigvee_{i\in I} \bigvee_{j\in J} u_i \wedge v_j.$$

Además $x|_{u_i\wedge v_j} \in S(u_i \wedge v_j)$ y $x|_{u_i\wedge v_j} \in T(u_i \wedge v_j)$, entonces, por la definición de cerradura, $x \in \overline{S \cap T}(u)$.

Finalmente, por el lema 5.2.6, sabemos que $f^{-1}(\overline{S})$ es un subobjeto cerrado y como $f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(\overline{S})$, entonces $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}(\overline{S})$.

Para probar la inclusión restante, consideremos $u \in L$ y $x \in f^{-1}(\overline{S})(u)$, entonces $f_u(x) \in \overline{S}(u)$, así que, por definición de subobjeto cerrado, existe una cubierta $u = \bigvee_{i\in I} u_i$ tal que

$$f_u(x)|_{u_i} = f_{u_i}(x|_{u_i}) \in S(u_i).$$

Esto implica que $x|_{u_i} \in f_{u_i}^{-1}(S)(u_i) = f^{-1}(S)(u_i)$. Entonces y nuevamente por definición de subobjeto cerrado, $x \in \overline{f^{-1}(S)}(u)$. ∎

Definición 5.2.9. *Sean L un local, F una pregavilla sobre L y dos elementos $u \in L$ y $a \in F(u)$, para todo $v \in L$, la función*

$$\langle a\rangle(v) = \begin{cases} \{a|_v\} & si\ v \leq u \\ \emptyset & si\ v \not\leq u \end{cases}$$

obviamente define una subpregavilla $\langle a\rangle$ de F.

Lema 5.2.10. *Sean L un local, F una pregavilla sobre L, $u \in L$ y $a \in F(u)$. Si F es separada, la subpregavilla $\langle a\rangle$ es cerrada en F.*

Demostración. Consideremos una cubierta $v = \bigvee_{i\in I} v_i$ en L y el elemento $b \in F(v)$ tales que $b|_{v_i} \in \langle a\rangle(v_i)$ para toda $i \in I$, entonces $b|_{v_i} = a|_{v_i}$ y $v_i \leq u$ para toda $i \in I$. Esto implica que $v \leq u$ y como F es separada que $b = a|_v$. ■

Finalmente podemos definir un morfismo entre los locales de subobjetos cerrados. Además dicho morfismo resultará étale.

Proposición 5.2.11. *Sea $f: G \to F$ un morfismo de pregavillas sobre un local L. Hacer el producto fibrado a lo largo de f es la parte adjunta izquierda de un morfismo étale*

$$\varphi: \mathbf{Cl}(G) \to \mathbf{Cl}(F)$$

entre los locales de subobjetos cerrados definidos en la proposición 5.2.5.

Demostración. Sea $S \in \mathbf{Cl}(G)$, definimos

$$\varphi_!(S) = \bigvee\{\overline{\langle f_u(x)\rangle} \mid u \in L, x \in S(u)\}$$

donde el supremo es calculado en el local $\mathbf{Cl}(F)$. Obviamente $\varphi_!$ es un funtor.

Considerando la propiedad 5 del lema 5.2.8 tenemos otro funtor definido de la siguiente manera, si $T \in \mathbf{Cl}(F)$ entonces

$$\varphi^*(T) = f^{-1}(T).$$

Veremos que $\varphi_!$ satisface las condiciones del lema 4.3.8 para que así φ sea un morfismo de locales étale.

Para ver que $\varphi_!$ preserva supremos arbitrarios veamos que $\varphi_!$ es adjunto izquierdo de φ^*. Sean $S \in \mathbf{Cl}(G)$ y $T \in \mathbf{Cl}(F)$.

$$\begin{array}{c}
\varphi_!(S) \subseteq T \\
\hline
\forall u \in L \quad \forall x \in S(u) \quad \overline{\langle f_u(x)\rangle} \subseteq T \\
\hline
\forall u \in L \quad \forall x \in S(u) \quad f_u(x) \in T(u) \\
\hline
\forall u \in L \quad \forall x \in S(u) \quad x \in f_u^{-1}(T(u)) \\
\hline
S \subseteq f^{-1}(T) = \varphi^*(T)
\end{array} \qquad \text{def. de } \varphi_!$$

Por lo tanto $\varphi_! \dashv \varphi^*$.

Consideremos ahora el siguiente supremo en $\mathbf{Cl}(G)$

$$\bigvee\{\overline{\langle x\rangle} \mid u \in L, x \in G(u)\}.$$

Este es un subobjeto cerrado de G que contiene a todos los elementos de G, así que es G mismo. Ahora basta probar que

$$\varphi_!\colon \downarrow\overline{\langle x\rangle} \to \downarrow\varphi_!(\overline{\langle x\rangle})$$

es un isomorfismo para cada posible x.

Sean $u \in L$ y $x \in G(u)$. Observemos que para cada $v \in L$ arbitrario se tiene

$$\overline{\langle x\rangle}(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v \leq u.$$

Claramente si $v \leq u$, $x|_v \in \overline{\langle x\rangle}(v)$, al considerar la cubierta trivial $v = v$.

Supongamos que $y \in \overline{\langle x\rangle}(v)$. Entonces existe una cubierta $v = \bigvee_{i\in I} v_i$ tal que $y|_{v_i} \in \langle x\rangle(v_i)$ para toda $i \in I$, es decir $y|_{v_i} = x|_{v_i}$ para toda $i \in I$. Entonces $v_i \leq u$ para toda $i \in I$, por lo tanto $v \leq u$.

Probemos ahora que dados $u \in L$ y $x \in G(u)$, el morfismo

$$\downarrow u \to \downarrow\overline{\langle x\rangle}, \quad v \mapsto \overline{\langle x|_v\rangle}$$

es un isomorfismo entre conjuntos parcialmente ordenados.

Veamos que además refleja el orden para probar que es inyectivo. Sean $v, w \in \downarrow u$ y supongamos que $\overline{\langle x|_w\rangle} \subseteq \overline{\langle x|_v\rangle}$. Entonces

$$x|_w \in \overline{\langle x|_w\rangle}(w) \subseteq \overline{\langle x|_v\rangle}(w)$$

y por la observación previa, esto implica que $w \leq v$.

Veamos que es suprayectivo. Sea $S \subseteq G$ un subobjeto cerrado tal que $S \subseteq \overline{\langle x\rangle}$. Definamos

$$v = \bigvee\{v_i \leq u \mid x|_{v_i} \in S(v_i)\}.$$

Como S es cerrado, $x|_v \in S(v)$, probando que $S \cap \langle x\rangle = \langle x|_v\rangle$.

Aplicando la propiedad 4 del lema 5.2.8 se tiene que

$$S = S \cap \overline{\langle x\rangle} = \overline{S} \cap \overline{\langle x\rangle} = \overline{S \cap \langle x\rangle} = \overline{\langle x|_v\rangle},$$

lo que demuestra la suprayectividad.

De manera análoga se demuestra que dados $u \in L$ y $x \in G(u)$, como $f_u(x) \in F(u)$, el morfismo

$$\downarrow u \to \downarrow\overline{\langle f_u(x)\rangle}, \quad v \mapsto \overline{\langle f_u(x)|_v\rangle}$$

es un isomorfismo entre conjuntos parcialmente ordenados.

Calculemos ahora $\varphi_!(\overline{\langle x\rangle})$ para $u \in L$ y $x \in G(u)$.

Por definición

$$\varphi_!(\overline{\langle x\rangle}) = \bigvee_{v\in L,\, a\in\overline{\langle x\rangle}(v)} \overline{\langle f_v(a)\rangle},$$

en particular

$$\overline{\langle f_u(x)\rangle} \leq \bigvee_{v\in L, a\in\overline{\langle x\rangle}(v)} \overline{\langle f_v(a)\rangle}.$$

Sean $v \in L$, $a \in \overline{\langle x\rangle}(v)$. Como $a \in \overline{\langle x\rangle}(v)$, existe una cubierta $v = \bigvee_{i\in I} v_i$ tal que $a|_{v_i} = x|_{v_i}$.

Entonces

$$f_v(a)|_{v_i} = f_{v_i}(a|_{v_i}) = f_{v_i}(x|_{v_i}) = f_u(x)|_{v_i}.$$

Como $f_u(x)|_{v_i} \in \langle f_u(x)\rangle(v_i)$ para toda $i \in I$, entonces $f_v(a) \in \overline{\langle f_u(x)\rangle}(v)$. Así que

$$\begin{aligned} f_v(a) \in \overline{\langle f_u(x)\rangle}(v) &\Leftrightarrow \langle f_v(a)\rangle \leq \overline{\langle f_u(x)\rangle} \\ &\Leftrightarrow \overline{\langle f_v(a)\rangle} \leq \overline{\langle f_u(x)\rangle}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\bigvee_{v\in L, a\in\overline{\langle x\rangle}(v)} \overline{\langle f_v(a)\rangle} \leq \overline{\langle f_u(x)\rangle}.$$

Por lo tanto

$$\varphi_1(\overline{\langle x\rangle}) = \overline{\langle f_u(x)\rangle}.$$

Resumiendo, tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \downarrow u \arrow[r] \arrow[d] & \downarrow\overline{\langle f_u(x)\rangle} \arrow[d] \\ \downarrow\overline{\langle x\rangle} \arrow[r] & \downarrow\varphi_1(\overline{\langle x\rangle}), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \overline{\langle f_u(x)|_v\rangle} \arrow[d, mapsto] \\ \overline{\langle x|_v\rangle} \arrow[r, mapsto] & \overline{\langle f_v(x|_v)\rangle} \end{tikzcd}$$

conmuta y como tres de los morfismos son isomorfismos, el cuarto es también un isomorfismo. ■

Recuperemos al local L en términos de subobjetos cerrados.

Lema 5.2.12. *Sea L un local. L es isomorfo al local de los subobjetos cerrados de la pregavilla terminal sobre L.*

Demostración. Por el lema 5.2.1, la pregavilla terminal $\mathbf{1}$ está dada por

$$\mathbf{1}(u) = \{*\}, \quad \forall u \in L.$$

Esta pregavilla es separada ya que al ser $\mathbf{1}(u)$ el objeto terminal, el morfismo e del correspondiente diagrama (5.1) es un monomorfismo.

En consecuencia, el morfismo

$$L \to \mathbf{Cl}(\mathbf{1}), \quad u \mapsto \langle * \in \mathbf{1}(u) \rangle$$

está bien definido (lema 5.2.10) y es obviamente inyectivo.

Para ver que es supreyectivo tomemos $S \subseteq \mathbf{1}$ un subobjeto cerrado y hagamos $u = \sigma(S)$.

La familia $\langle * \in S(v) \rangle_{S(v) \neq \emptyset}$ es obviamente compatible y $* \in \mathbf{1}(u)$ es su amalgama. Como S es un subobjeto cerrado, $* \in S(u)$ así que $S = \langle * \in \mathbf{1}(u) \rangle$. ■

Definición 5.2.13. *Sean $F : L \to$ **Con** una pregavilla y u un elemento de L.*

Definamos la pregavilla $F|_u$ como

$$F|_u(v) = \begin{cases} F(v) & si \quad v \leq u \\ \emptyset & si \quad v \not\leq u, \end{cases}$$

para cada $v \in L$.

Lema 5.2.14. *Si F es una gavilla, $F|_u$ es también una gavilla.*

Demostración. Sea $v = \bigvee i \in I v_i$ una cubierta de elementos de L.

Veamos que el diagrama

$$F|_u(v) \xrightarrow{e} \prod_i F|_u(v_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F|_u(v_i \wedge v_j) \tag{5.5}$$

es un igualador utilizando el criterio del lema 1.3.9.

Sea $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \prod_i F|_u(v_i)$ tal que $p(\langle x_i \rangle_i) = q(\langle x_i \rangle_i)$.

Entonces, como $F|_u(v_i) \neq \emptyset$ para toda $i \in I$, $v_i \leq u$ para toda $i \in I$. Entonces $v \leq u$, por lo que $F|_u(v) = F(v)$. Como F es una gavilla, existe un elemento $x \in F(v)$ tal que $e(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$.

Por lo tanto (5.5) es un igualador. Por lo tanto $F|_u$ es una gavilla. ■

Lema 5.2.15. *Sean F una pregavilla sobre un local L y $f : F \to \mathbf{1}$ el único morfismo a la pregavilla terminal. La parte imagen directa del morfismo étale de locales*

$$\varphi : \mathbf{Cl}(F) \to \mathbf{Cl}(\mathbf{1}) \cong L$$

inducido por f (proposición 5.2.11) manda un subobjeto cerrado $S \subseteq F$ a su soporte $\sigma(S)$. La parte imagen inversa manda a cada elemento $u \in L$ a $F|_u$.

Demostración. Por el lema 5.2.12 tenemos que para cada $u \in L$, u se corresponde con el subobjeto cerrado $\langle * \in \mathbf{1}(u) \rangle = \mathbf{1}|_u$. Aplicando la parte imagen inversa definida en la proposición 5.2.11 tenemos

$$\varphi^*(u) = f^{-1}(\mathbf{1}|_u) = F|_u.$$

Para finalizar, es suficiente probar que σ es adjunto izquierdo de φ^*, para así demostrar que es igual a $\varphi_!$.

Sean $S \in \mathbf{Cl}(F)$ y $u \in L$. Supongamos que $S \subseteq F|_u$, entonces

$$\sigma(S) \leq \sigma(F|_u) = u.$$

Ahora supongamos que $\sigma(S) \leq u$. Sea $a \in S(v)$ para alguna $v \in L$, entonces $v \leq \sigma(S) \leq u$ así que $a \in F|_u(v)$, por lo tanto $S \subseteq F|_u$. ■

Este último resultado nos indica que para cada $F \in \mathbf{Con}^L$, $\varphi(F) \in \mathbf{Et}/L$.

5.3 $\mathbf{Et}/L \simeq \mathbf{Gav}(L)$

En esta sección únicamente se establecerán las ideas generales de la equivalencia que nos ocupa.

En el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gav}(L) \arrow[r, "i"] & \mathbf{Con}^L \arrow[d, "\mathbf{Cl}"] \\ \mathbf{Loc}/L \arrow[u, "\Gamma"] & \mathbf{Et}/L \arrow[l, "j"] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

los funtores quedan definidos como sigue:

1. i es la inclusión canónica;
2. $\mathbf{Cl}$ es tal que a la pregavilla F le asocia el morfismo etalé

   $$\varphi\colon \mathbf{Cl}(F) \to L$$

   construido en el lema 5.2.15;
3. j es también una inclusión canónica;
4. Γ le asocia a cada morfismo de locales $p\colon M \to L$ la gavilla de secciones

   $$G(u) = \{f\colon {\downarrow} u \to M \mid p \circ f = i_u\},$$

   construida en el ejemplo 5.1.11.b.

Debido a su gran relevancia y porque muestran la gran similiud que hay entre esta sección y el trabajo correspondiente a gavillas sobre espacios topológico, se enuncian los siguientes resultados. Sin embargo, dada su complejidad, no se incluye sus demostraciones.

Lema 5.3.1. *Con la notación previa, existe una transformación natural*

$$\alpha\colon 1_{\mathbf{Con}^L} \Rightarrow i \circ \Gamma \circ j \circ \mathbf{Cl}$$

con la propiedad de que α_F es un isomorfismo si y solo si F es una gavilla.

Demostración. Ver lema 2.6.2 de [2]. ■

Proposición 5.3.2. $\mathbf{Gav}(L)$ *es una subcategoría reflexiva en* $\mathbf{Con}^L$*; la reflexión es el funtor* $\Gamma \circ j \circ \mathbf{Cl}$*. En particular,* $\mathbf{Gav}(L)$ *es cocompleta.*

Demostración. Ver teorema 2.6.3 de [2]. ■

Lema 5.3.3. *Con la notación previa, existe una transformación natural*

$$\beta\colon j \circ \mathbf{Cl} \circ i \Rightarrow 1_{\mathbf{Loc}/L}$$

con la propiedad de que β_p *es un isomorfismo si y solo si* p *es étale.*

Demostración. Ver lema 2.6.4 de [2]. ■

Proposición 5.3.4. $\mathbf{Et}/L$ *es una subcategoría correflexiva en* $\mathbf{Loc}/L$*; la correflexión es el funtor* $\mathbf{Cl} \circ i \circ \Gamma$.

Demostración. Ver teorema 2.6.5 de [2]. ■

Teorema 5.3.5. *La categoría* $\mathbf{Gav}(L)$ *es equivalente a la categoría* $\mathbf{Et}/L$*; la equivalencia está dada por los funtores* $\mathbf{Cl} \circ i$ *y* $\Gamma \circ j$.

Demostración. Ver teorema 2.6.6 de [2]. ■

Teorema 5.3.6. *El funtor de gavilla asociada*

$$\Gamma \circ j \circ \mathbf{Cl}\colon \mathbf{Con}^L \to \mathbf{Gav}(L)$$

es exacto izquierdo.

Demostración. Ver teorema 2.6.9 de [2]. ■

5.4 Cambio de base

Esta sección se corresponde con la sección 2.5, pero en este caso sí se seguirá el camino que solo se sugiere al final de aquella sección.

Definición 5.4.1. *Sean* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *categorías con límites finitos. Un* **morfismo geométrico** $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un par de funtores*

$$\mathbf{A} \underset{\varphi^*}{\overset{\varphi_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{B}$$

tales que

1. φ^* *es adjunto izquierdo de* φ_* *y*
2. φ^* *preserva límites finitos.*

Lema 5.4.2. *Cada morfismo de locales $f: L \to M$ induce un morfismo geométrico $\varphi: \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$.*

Demostración. Sea $f: L \to M$ un morfismo de locales.

Como f^* preserva supremos arbitrarios, componer con f^* nos da un funtor

$$\varphi_*: \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M), \quad F \mapsto F \circ f^*.$$

Sea $m = \bigvee_{i \in I} m_i \in M$, consideremos el diagrama

$$F \circ f^*(m) \xrightarrow{e} \prod_i F \circ f^*(m_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F \circ f^*(m_i \wedge m_j) \, . \tag{5.7}$$

Como

$$f^*(m) = f^*\left(\bigvee_{i \in I} m_i\right) = \bigvee_{i \in I} f^*(m_i) \in L,$$

y F es una gavilla sobre L el diagrama (5.7) es un igualador en $\mathbf{Con}$. Así que $F \circ f^*$ es una gavilla sobre M.

Para probar la existencia del adjunto izquierdo φ^* de φ_* consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Con}^L \arrow[r, shift right, "\varphi_+"'] \arrow[d, shift right, "a"'] & \mathbf{Con}^M \arrow[l, shift right, "\varphi^-"'] \arrow[d, shift right, "b"'] \\ \mathbf{Gav}(L) \arrow[r, "\varphi_*"'] \arrow[u, shift right, "i"'] & \mathbf{Gav}(M) \arrow[u, shift right, "j"'] \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

donde i, j son las inclusiones canónicas; a, b son los funtores de gavilla asociada definidos como en el teorema 5.3.6; φ_*, φ_+ son composiciones con f^* y φ^- es la extensión de Kan a lo largo de f^* construida como en el lema 1.5.2, que es además adjunto izquierdo de φ_+ (lema 1.5.3).

Definamos el funtor φ^* como $\varphi^* := a \circ \varphi^- \circ j$. Veamos que es adjunto izquierdo de φ_*.

Sean $F \in \mathbf{Gav}(L)$ y $G \in \mathbf{Gav}(M)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Gav}(L)(\varphi^*(G), F) &\cong \mathbf{Gav}(L)(a \circ \varphi^- \circ j(G), F) && \text{def. de } \varphi^* \\ &\cong \mathbf{Con}^L(\varphi^- \circ j(G), i(F)) && a \dashv i \\ &\cong \mathbf{Con}^M(j(G), \varphi_+ \circ i(F)) && \varphi^- \dashv \varphi_+ \\ &\cong \mathbf{Con}^M(j(G), j \circ \varphi_*(F)) && \text{(5.8) es conmutativo} \\ &\cong \mathbf{Gav}(M)(G, \varphi_*(F)) && j \text{ es inclusión canónica.} \end{aligned}$$

Para probar que φ^* es exacto izquierdo basta probar que φ^- es exacto izquierdo ya que a es exacto izquierdo por el lema 5.3.6 y j preserva todos los límites por el lema 5.2.1.

Sean $P \in \mathbf{Con}^M$ y $u \in L$, por el lema 1.5.2, tenemos que

$$\varphi^-(P)(u) = \varinjlim_{f^*(m)\geq u} P(m)$$

con $m \in M$.

Como f^* preserva ínfimos finitos, si $f^*(m) \geq u$ y $f^*(m') \geq u$,

$$f^*(m) \wedge f^*(m') = f^*(m \wedge m') \geq u,$$

por lo que el colímite es filtrante. Entonces se satisfacen las condiciones del lema 1.3.21.

Entonces, dados un límite finito $P = \varprojlim_i P_i$ en $\mathbf{Con}^M$ y $u \in L$,

$$\begin{aligned}
\varphi^-(P)(u) &= \varphi^-\left(\varprojlim_i P_i\right)(u) && \text{def. de } P\\
&= \varinjlim_{f^*(m)\geq u}\left(\varprojlim_i P_i(m)\right) && \text{def. de } \varphi^-\\
&= \varprojlim_i\left(\varinjlim_{f^*(m)\geq u} P_i(m)\right) && \text{lema 1.3.21}\\
&= \varprojlim_i\left(\varphi^- P_i(u)\right) && \text{def. de } \varphi^-.
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ^- es exacto izquierdo. ■

El siguiente resultado, que se enuncia sin demostración, muestra la gran analogía que guarda esta sección con el trabajo hecho sobre espacios topológicos.

Proposición 5.4.3. *Sean $f: L \to M$ un morfismo de locales y el correspondiente morfismo geométrico $\varphi: \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ construido en 5.4.2. Viendo φ como un morfismo geométrico $\varphi: \mathbf{Et}/L \to \mathbf{Et}/M$ gracias a la equivalencia vista en 5.3.5, la parte adjunta izquierda φ^* se corresponde con hacer el producto fibrado a lo largo de f en* **Loc**.

Demostración. **Ver proposición 2.12.5 de [2].** ■

Capítulo 6

Morfismos ultrafinitos sobre locales

En este capítulo se mostrará una caracterización de los morfismos ultrafinitos de locales.

6.1 Objeto inicial

Definición 6.1.1. *Se dice que* $f: L \to M$ *es* denso *si para todo* $m \in M$, $m \neq 0$ *implica* $f^*(m) \neq 0$.

Proposición 6.1.2. *Sea* $f: L \to M$ *un morfismo de locales.*
$(\_ \circ f^*): \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ *preserva objeto inicial si y solo si* f *es denso.*

Demostración. Supongamos que $(\_ \circ f^*)$ preserva objeto inicial, entonces si $\mathbf{0}$ es el objeto inicial de $\mathbf{Gav}(L)$, $(\mathbf{0} \circ f^*)$ es el objeto inicial de $\mathbf{Gav}(M)$.

Sea $m \in M$, entonces

$$m \neq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{0} \circ f^*)(m) = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{0}(f^*(m)) = \emptyset \Leftrightarrow f^*(m) \neq 0.$$

Supongamos ahora que el morfismo f es denso. Si $\mathbf{0}$ es el objeto inicial de $\mathbf{Gav}(L)$, veamos que $(\mathbf{0} \circ f^*)$ es el objeto inicial de $\mathbf{Gav}(M)$.

Sea $m \in M$, entonces

$$m \neq 0 \Rightarrow f^*(m) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{0}(f^*(m)) = \emptyset \Rightarrow (\mathbf{0} \circ f^*)(m) = \emptyset.$$

■

6.2 Epimorfismos

Para la presente sección necesitamos una caracterización de los epimorfismos en las categorías de gavillas, que será dada por el siguiente:

Lema 6.2.1. *Un morfismo $\phi: F \Rightarrow G$ de gavillas sobre L es un epimorfismo si y solo si para todo $l \in L$ y para todo $y \in G(l)$ existe una cubierta $l = \bigvee_i l_i$ en L tal que $y|_{l_i} \in Im(\phi_{l_i})$ para toda i.*

Demostración. Supongamos que ϕ es un epimorfismo en $\mathbf{Gav}(L)$.

Definamos $A \subset G$ de la siguiente manera: para todo $l \in L$,

$$A(l) = \{y \in G(l) \mid \exists \bigvee_i l_i = l \text{ tal que } \forall i, y|_{l_i} \in Im(\phi_{l_i})\}.$$

Sean $l' \leq l \in L$ y $y \in A(l)$. Entonces existe una cubierta $l = \bigvee_i l_i$ en L tal que $y|_{l_i} \in Im(\phi_{l_i})$ para toda i.

Como

$$l' = l' \wedge l = l' \wedge (\bigvee_i l_i) = \bigvee_i (l' \wedge l_i)$$

y, por naturalidad de ϕ, $y|_{l_i}|_{l'} = y|_{l_i \wedge l'} \in Im(\phi_{l_i \wedge l'})$, tenemos que $y|_{l'} \in A(l')$.

Por lo tanto, A es una subpregavilla de G.

Usando el criterio dado por el lema 5.1.10, veamos que A es una subgavilla. Sean $m = \bigvee_{j \in J} m_j \in L$ un elemento con una cubierta y $x \in G(m)$.

Supongamos que $x \in A(m)$. Como A es una pregavilla se tiene trivialmente que $x|_{m_j} \in A(m_j)$ para todo $j \in J$.

Supongamos ahora que $x \in G(m)$ es tal que $x|_{m_j} \in A(m_j)$ para todo $j \in J$.

Como $x|_{m_j} \in A(m_j)$, para cada $j \in J$ existe una cubierta $m_j = \bigvee_{i \in I_j} k_{ji}$ tal que $x|_{k_{ji}} \in Im(\phi_{k_{ji}})$ para todo $i \in I_j$. Entonces, con la cubierta

$$m = \bigvee_{j \in J} m_j = \bigvee_{j \in J} \bigvee_{i \in I_j} k_{ji}$$

se cumple que $x \in A(m)$.

Por lo tanto A es una subgavilla de G.

Como $\phi: F \Rightarrow G$ es un epimorfismo en $\mathbf{Gav}(L)$, por el teorema 5.3.5, tenemos que el morfismo $\mathbf{Cl}(\phi): \mathbf{Cl}(F) \to \mathbf{Cl}(G) \in \mathbf{Et}/L$, definido en la proposición 5.2.11, es un epimorfismo. En otras palabras, el morfismo $\mathbf{Cl}(\phi)^*: \mathbf{Cl}(G) \to \mathbf{Cl}(F)$ es mono.

Como $\mathbf{Cl}(\phi)^*$ es la parte adjunta izquierda de un morfismo de locales, se tiene que $\mathbf{Cl}(\phi)^*(G) = \phi^{-1}(G) = F$.

Sea $l \in L$. Como

$$\begin{tikzcd} \phi^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ F \arrow[r, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, se tiene que

$$\begin{tikzcd} \phi^{-1}(A)(l) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A(l) \arrow[d, hook] \\ F(l) \arrow[r, "\phi_l"'] & G(l) \end{tikzcd}$$

también es un producto fibrado. Entonces

$$\phi^{-1}(A)(l) = \{x \in F(l) \mid \phi_l(x) \in A(l)\}$$

y claramente $\phi^{-1}(A)(l) \subset F(l)$.

Sea $x \in F(l)$. Con la cubierta trivial $l = l$ tenemos que $\phi_l(x) \in Im(\phi_l)$, por lo que $\phi_l(x) \in A(l)$. Así que $x \in \phi^{-1}(A)(l)$.

Por lo tanto $\phi^{-1}(A) = F = \phi^{-1}(G)$ y como $\mathrm{Cl}^*(\phi)$ es mono, concluimos que $A = G$.

Supongamos ahora que para todo $l \in L$ y para todo $y \in G(l)$ existe una cubierta $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ en L tal que $y|_{l_i} \in Im(\phi_{l_i})$ para toda $i \in I$.

Sean $\alpha, \beta : G \Rightarrow H$ morfismos de gavillas tales que $\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$.

Sea $l \in L$ y $y \in G(l)$. Por hipótesis existe una cubierta $l = \bigvee_{i \in I} l_i$ en L tal que $y|_{l_i} \in Im(\phi_{l_i})$ para toda $i \in I$.

Entonces, para cada $i \in I$ se tiene que

$$\alpha_{l_i}(y|_{l_i}) = \beta_{l_i}(y|_{l_i}).$$

Por naturalidad de α y β, lo anterior es equivalente a

$$\alpha_l(y)|_{l_i} = \beta_l(y)|_{l_i}.$$

Finalmente, como H es una gavilla y $\langle \alpha_l(y)|_{l_i} = \beta_l(y)|_{l_i} \rangle_{i \in I}$ es una familia compatible, existe una única amalgama de dicha familia. Así que $\alpha_l(y) = \beta_l(y)$ para todo $l \in L$ y todo $y \in G(l)$.

Por lo tanto $\alpha = \beta$. ■

A continuación enunciamos un caso particular del lema anterior, en los términos precisos en que nos será útil para la demostración central de esta sección.

Corolario 6.2.2. *Sea $h : p \to p'$ un morfismo de* Et$/L$. *$\Gamma_h : \Gamma_p \to \Gamma_{p'}$ es un epimorfismo si y solo si para todo $l \in L$ y para todo $t \in \Gamma_{p'}(l)$ existe una cubierta $l = \bigvee_i l_i$ en L tal que $t|_{l_i} \in Im(\Gamma_h(l_i))$; es decir, existe $s_i \in \Gamma_p(l_i)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \downarrow l_i \arrow[r] \arrow[d, "s_i"'] & \downarrow l \arrow[d, "t"] \\ N \arrow[r, "h"'] & N' \end{tikzcd}$$

conmuta para toda i. ■

Proposición 6.2.3. *Sea $f: L \to M$ un morfismo de locales.*

$(\_ \circ f^*): \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ preserva epimorfismos si y solo si para todo $m \in M$ y toda cubierta $f^*(m) = \bigvee_i l_i$, existen cubiertas $m = \bigvee_j m_j$, $f^*(m_j) = \bigvee_i v_{ij}$ tales que $\forall i \in I$, $v_{ij} \leq l_i$ y si $i \neq i'$, $v_{ij} \wedge v_{i'j} = 0$.

Demostración. Supongamos que $(\_ \circ f^*)$ preserva epimorfismos.

Sean $m \in M$ y una cubierta $f^*(m) = \bigvee_i l_i$.

Consideremos el morfismo p inducido por las inclusiones canónicas:

$$\begin{tikzcd} \downarrow l_k \arrow[r] \arrow[dr] & \bigoplus_i \downarrow l_i \arrow[d, dashed, "p"] & \downarrow l_j \arrow[l] \arrow[dl] \\ & L. & \end{tikzcd}$$

Como cada inclusión $\downarrow l_i \to L$ es étale, por el lema 4.3.11, tenemos que p también es étale.

Análogamente construimos el morfismo $s: \bigoplus_i \downarrow l_i \to \downarrow f^*(m)$ inducido por las inclusiones $\downarrow l_i \to \downarrow f^*(m)$. Como cada una de éstas es étale, por el lema 4.3.11, tenemos que s también es étale.

Veamos que el triángulo

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i \downarrow l_i \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "p"'] & & \downarrow f^*(m) \arrow[dl, "q"] \\ & L, & \end{tikzcd}$$

donde q es la inclusión canónica, conmuta. Sea $l \in L$.

$$\begin{aligned} s^*q^*(l) &= s^*(l \wedge f^*(m)) \\ &= \langle (l \wedge f^*(m)) \wedge l_i \rangle_i \\ &= \langle l \wedge (f^*(m) \wedge l_i) \rangle_i \\ &= \langle l \wedge l_i \rangle_i \\ &= p^*(l). \end{aligned}$$

Veamos que s es un epimorfismo. Sean $x, y \in \downarrow f^*(m)$ tales que $s^*(x) = s^*(y)$, entonces

$\langle x \wedge l_i \rangle_i = \langle y \wedge l_i \rangle_i$	implica	$\forall i \quad x \wedge l_i = y \wedge l_i$	estructura puntual
	implica	$\bigvee_i (x \wedge l_i) = \bigvee_i (y \wedge l_i)$	
	implica	$x \wedge (\bigvee_i l_i) = y \wedge (\bigvee_i l_i)$	ley distributiva infinita
	implica	$x \wedge f^*(m) = y \wedge f^*(m)$	def. de $f^*(m)$
	implica	$x = y$	$x, y \in \downarrow f^*(m)$,

así que s^* es monomorfismo, entonces s es un epimorfismo.

Como $(\_ \circ f^*)$ preserva epimorfismos y Γ es una equivalencia, $(\Gamma_s \circ f^*)$ es un epimorfismo.

Por el criterio del corolario 6.2.2, y ya que $1_{f^*(m)} \in (\Gamma_q \circ f^*)(m)$, existe una cubierta $m = \bigvee_{j\in J} m_j$ tal que $1_{f^*(m)}|_{m_j} \in Im((\Gamma_s \circ f^*)(m_j))$, es decir, existe $t_j \in (\Gamma_p \circ f^*)$ tal que $s \circ t_j = 1_{f^*(m)}|_{m_j}$.

Definamos el elemento $\widehat{l_i} \in \bigoplus_i \downarrow l_i$ de la siguiente manera:

$$\widehat{l_i}(i') = \begin{cases} l_i & \text{si } i = i' \\ 0 & \text{si } i \neq i'. \end{cases}$$

Fijemos una $j \in J$ y definamos $v_{ij} = t_j^*(\widehat{l_i})$. Veamos que la familia $\{v_{ij}\}$ cubre a $f_j^*(m_j)$.

$$\bigvee_i v_{ij} = \bigvee_i t_j^*(\widehat{l_i}) = t_j^* \left(\bigvee_i \widehat{l_i} \right) = t_j^*(1) = f^*(m_j).$$

Para ver que $v_{ij} \leq l_i$ para toda $i \in I$, observemos primero que, como $t_{j!} \dashv t_j^*$, entonces

$$\begin{aligned} v_{ij} = t_j^*(\widehat{l_i}) \quad & \text{implica} \quad v_{ij} \leq t_j^*(\widehat{l_i}) \\ & \text{implica} \quad t_{j!}(v_{ij}) \leq \widehat{l_i}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $a \colon \downarrow f^*(m_j) \to L$ es la inclusión canónica, tenemos que

$$v_{ij} = a_!(v_{ij}) = p_! t_{j!}(v_{ij}) \leq p_!(\widehat{l_i}) = \bigvee_{k \in I} p_{k!} l_i = l_i.$$

Por último, veamos que la cubierta $\{v_{ij}\}$ es ajena. Sean $i \neq k$.

$$v_{ij} \wedge v_{kj} = t_j^*(\widehat{l_i}) \wedge t_j^*(\widehat{l_k}) = t_j^*(\widehat{l_i} \wedge \widehat{l_k}) = t_j^*(0) = 0.$$

En la otra dirección, supongamos que para todo $m \in M$ y toda cubierta $f^*(m) = \bigvee_i l_i$, existen cubiertas $m = \bigvee_j m_j$, $f^*(m_j) = \bigvee_i v_{ij}$ tales que $\forall i \in I$, $v_{ij} \leq l_i$ y si $i \neq i'$, $v_{ij} \wedge v_{i'j} = 0$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & N' \arrow[dl, "p'"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

donde h es un epimorfismo en $\mathbf{Et}/L$.

Veamos que $(\Gamma_h \circ f^*)$ es un epimorfismo. Sean $m \in M$ y $t \in (\Gamma_{p'} \circ f^*)(m)$.

Como h es epimorfismo y Γ es una equivalencia, entonces Γ_h es un epimorfismo. Como $t \in \Gamma_{p'}(f^*(m))$, por el criterio del corolario 6.2.2, existe una cubierta $f^*(m) = \bigvee_i l_i$ tal que $t|_{l_i} \in Im(\Gamma_h(l_i))$.

Entonces, por hipótesis, existen cubiertas $m = \bigvee_j m_j$, $f^*(m_j) = \bigvee_i v_{ij}$ tales que $\forall i \in I$, $v_{ij} \leq l_i$ y si $i \neq i'$, $v_{ij} \wedge v_{i'j} = 0$.

Como $\forall i \in I$, $v_{ij} \leq l_i$, $t|_{v_{ij}} \in Im(\Gamma_h(v_{ij}))$, es decir, existen secciones $s_i \in \Gamma_p(v_{ij})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \downarrow v_{ij} \arrow[r] \arrow[d, "s_i"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] \\ N \arrow[r, "h"'] & N' \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

conmuta. Como la cubierta $\{v_{ij}\}$ es ajena, la familia $\langle s_i \rangle_i$ es compatible, así que existe $s \in \Gamma_p(f^*(m_j))$ que la amalgama. De hecho, como $\{v_{ij}\}$ es ajena, por el lema 4.1.19, tenemos que $\bigoplus_i \downarrow v_{ij} \cong \downarrow f^*(m_j)$ y s es el morfismo inducido por las diferentes $\langle s_i \rangle_i$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} \downarrow v_{ij} \arrow[r] \arrow[dr, "s_i"'] & \bigoplus_i \downarrow v_{ij} \arrow[d, dashed, "s"] & \downarrow v_{kj} \arrow[l] \arrow[dl, "s_k"] \\ & N. & \end{tikzcd}$$

Como $\forall i \in I$ el diagrama (6.1) comuta, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \downarrow f^*(m_j) \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] \\ N \arrow[r, "h"'] & N' \end{tikzcd}$$

también conmuta. ∎

6.3 Coproductos finitos

En la presente sección nos ocuparemos de demostrar lo siguiente:

Proposición 6.3.1. *Sea $f: L \to M$ un morfismo de locales denso.*

$(\_ \circ f^*): \mathrm{Gav}(L) \to \mathrm{Gav}(M)$ preserva coproductos binarios si y solo si para todo $m \in M$, $l_1, l_2 \in L$ tales que $f^*(m) = l_1 \vee l_2$ con $l_1 \wedge l_2 = 0$, existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $f^*(m_1) = l_1$, $f^*(m_2) = l_2$ y $m = m_1 \vee m_2$.

Antes que nada hagamos una observación técnica.

Sean $m \in M$, $l_1, l_2 \in L$ tales que $f^*(m) = l_1 \vee l_2$ con $l_1 \wedge l_2 = 0$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{Et}/L$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \bigoplus L \arrow[d, "\langle 1_L, 1_L \rangle"] & L \arrow[l, dashed, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "1_L"] \\ & L. & \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

Por el lema 4.1.19 sabemos que $\downarrow f^*(m) \cong \downarrow l_1 \bigoplus \downarrow l_2$. Definimos la sección $s\colon \downarrow f^*(m) \to L \bigoplus L$ como el morfismo inducido por $\sigma_1 \circ i_{l_1}$ y $\sigma_2 \circ i_{l_2}$, es decir

$$\begin{tikzcd}
\downarrow l_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_{l_1}"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, dashed, "s"] & \downarrow l_2 \arrow[l] \arrow[d, "i_{l_2}"] \\
L \arrow[r, "\sigma_1"'] & L \bigoplus L & L. \arrow[l, "\sigma_2"]
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Sea $l \in L$, como

$$\begin{aligned}
s^*\langle 1_L, 1_L\rangle^*(l) &= s^*(l,l) \\
&= (l \wedge l_1) \vee (l \wedge l_2) \\
&= l \wedge (l_1 \vee l_2) \\
&= l \wedge f^*(m) \\
&= i^*_{f^*(m)}(l),
\end{aligned}$$

entonces s es una sección de $\langle 1_L, 1_L\rangle$.

Suponiendo esta notación, demostremos el siguiente resultado.

Lema 6.3.2. *Si* $(t\colon \downarrow f^*(n) \to L) \in \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^*\langle s\rangle(n)$ *entonces* $f^*(n) \leq l_1$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(n) \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, "t"'] & & \\
& \downarrow l_1 \arrow[r] \arrow[d] & \downarrow l_1 \bigoplus \downarrow l_2 \arrow[d, "s"] \\
& L \arrow[r, "\sigma_1"'] & L \bigoplus L.
\end{tikzcd}$$

Como $t\colon \downarrow f^*(n) \to L \in \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^*\langle s\rangle(n)$ entonces el cuadrado exterior conmuta. Como el cuadrado interior es un producto fibrado (lema 1), se induce una única $r\colon \downarrow f^*(n) \to \downarrow l_1$ tal que el diagrama anterior conmuta.

Sabiendo que en el triángulo superior de dicho diagrama las aristas distintas de r son inclusiones canónicas tenemos que $r^*(l_1) = l_1 \wedge f^*(n)$.

Ahora bien, si consideramos las siguientes igualdades en $\downarrow f^*(n)$,

$$f^*(n) = 1 = r^*(1) = r^*(l_1) = l_1 \wedge f^*(n),$$

concluimos que $f^*(n) \leq l_1$. ∎

Lema 6.3.3. *Sea* $f\colon L \to M$ *un morfismo de locales denso.*

Si $(\_ \circ f^*)\colon \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ *preserva coproductos binarios entonces para todo* $m \in M$, $l_1, l_2 \in L$ *tales que* $f^*(m) = l_1 \vee l_2$ *con* $l_1 \wedge l_2 = 0$, *existen* $m_1, m_2 \in M$ *tales que* $f^*(m_1) = l_1$, $f^*(m_2) = l_2$ *y* $m = m_1 \vee m_2$.

Demostración. Consideremos el diagrama (6.2) y la sección s construidos anteriormente.

Como $\mathbf{Cl}(\_ \circ f^*)\Gamma$ preserva coproductos, entonces el morfismo inducido φ

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cl}(\Gamma_{1_L} \circ f^*) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)"'] & \mathbf{Cl}(\Gamma_{1_L} \circ f^*) \bigoplus \mathbf{Cl}(\Gamma_{1_L} \circ f^*) \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \mathbf{Cl}(\Gamma_{1_L} \circ f^*) \arrow[l] \arrow[dl, "\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_2} \circ f^*)"] \\
& \mathbf{Cl}(\Gamma_{\langle 1_L, 1_L \rangle} \circ f^*) &
\end{tikzcd}$$

es un isomorfismo.

La sección $s \in (\Gamma_{\langle 1_L, 1_L \rangle} \circ f^*)(m)$ determina un subobjeto cerrado $\langle s \rangle \in \mathbf{Cl}(\Gamma_{\langle 1_L, 1_L \rangle} \circ f^*)$ de la siguiente manera:

$$\langle s \rangle(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \not\leq m \\ \{s|_n\} & \text{si } n \leq m. \end{cases}$$

Como φ es un isomorfismo,

$$\langle s \rangle = \varphi_! \varphi^*(\langle s \rangle) = \varphi_!(\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^* \langle s \rangle, \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_2} \circ f^*)^* \langle s \rangle). \tag{6.4}$$

Sean $T := \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^* \langle s \rangle$ y $U := \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_2} \circ f^*)^* \langle s \rangle$.

Veamos que T y U son subobjetos de 1. Sea $n \leq m$. Supongamos que existen t y $t' \in T(n)$.

Sabemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & \langle s \rangle \arrow[d] \\
\Gamma_{1_L} \circ f^* \arrow[r, "\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*"'] & \Gamma_{\langle 1_L, 1_L \rangle} \circ f^*
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. En particular el conjunto $T(n)$ está formado por las secciones $t\colon \downarrow f^*(n) \to L$ de la identidad tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(n) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & L \arrow[d, "\sigma_1"] \\
\downarrow f^*(m) \arrow[r, "s"'] & L \bigoplus L
\end{tikzcd}$$

conmuta; es decir, que $\sigma_1 \circ t = s|_n$.

Entonces

$$\sigma_1 \circ t = s|_n = \sigma_1 \circ t',$$

por la proposición 4.1.18, σ_1 es monomorfismo entonces $t = t'$.

Por lo tanto $|T(n)| \leq 1$. De la misma manera, U es un subobjeto de 1.

Definamos $m_1 = \bigvee_{T(n)\neq\emptyset} n$. Como T es gavilla, $T(m_1) = \{*\}$ y $m_1 \leq m$. Además $f^*(m_1) \leq l_1$, por el lema 6.3.2.

Análogamente, al definir a m_2 como $m_2 = \bigvee_{U(n)\neq\emptyset} n$ tenemos que $m_2 \leq m$ y $f^*(m_2) \leq l_2$.

Como $f^*(m_1 \wedge m_2) = f^*(m_1) \wedge f^*(m_2) = l_1 \wedge l_2 = 0$, entonces por el lema 4.1.19

$$\downarrow f^*(m_1 \vee m_2) \cong \downarrow f^*(m_1) \bigoplus \downarrow f^*(m_2).$$

Sean $T(m_1) = \{t_1 : \downarrow f^*(m_1) \to L\}$ y $U(m_2) = \{t_2 : \downarrow f^*(m_2) \to L\}$.

Construyamos $t_1 \bigoplus t_2$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_1) \arrow[r] \arrow[d, "t_1"'] & \downarrow f^*(m_1) \bigoplus \downarrow f^*(m_2) \arrow[d, dashed, "t_1 \bigoplus t_2"] & \downarrow f^*(m_2) \arrow[l] \arrow[d, "t_2"] \\
L \arrow[r, "\sigma_1"'] & L \bigoplus L & L. \arrow[l, "\sigma_2"]
\end{tikzcd}$$

Veamos que $t_1 \bigoplus t_2$ es una sección de $\langle 1_L, 1_L\rangle$. Sea $l \in L$, como t_1, t_2 son secciones de la identidad en L tenemos

$$\begin{aligned}
(t_1 \bigoplus t_2)^* \circ \langle 1_L, 1_L\rangle^*(l) &= (t_1 \bigoplus t_2)^*(l, l) \\
&= t_1^*(l) \vee t_2^*(l) \\
&= (l \wedge f^*(m_1)) \vee (l \wedge f^*(m_2)) \\
&= l \wedge (f^*(m_1) \vee f^*(m_2))
\end{aligned}$$

Como $T = \langle t_1\rangle$ y por construcción $t_1 \in \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^*\langle t_1 \bigoplus t_2\rangle(m_1)$, entonces $T \leq \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_1} \circ f^*)^*\langle t_1 \bigoplus t_2\rangle$. Análogamente $U \leq \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_2} \circ f^*)^*\langle t_1 \bigoplus t_2\rangle$.

Entonces $(T, U) \leq \varphi^*(\langle t_1 \bigoplus t_2\rangle)$. Por la adjunción $\varphi_! \vdash \varphi^*$, esta desigualdad es equivalente a $\varphi_!(T, U) \leq \langle t_1 \bigoplus t_2\rangle$. Por (6.4) se tiene $\langle s\rangle = \varphi_!(T, U)$, por lo que $\langle s\rangle \leq \langle t_1 \bigoplus t_2\rangle$. Entonces $\sigma(\langle s\rangle) \leq \sigma(\langle t_1 \bigoplus t_2\rangle)$, es decir $m \leq m_1 \vee m_2$.

Por lo tanto $m = m_1 \vee m_2$. ∎

Antes de demostrar el resto de la proposición veamos la siguiente construcción.

Consideremos el siguiente coproducto en $\mathbf{Et}/L$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\sigma_D"] \arrow[dr, "p"'] & D \bigoplus E \arrow[d, "\langle p, q\rangle"] & E \arrow[l, "\sigma_E"'] \arrow[dl, "q"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

y el coproducto de sus imágenes bajo $\mathrm{Cl}(\_ \circ f^*)\Gamma$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \bigoplus \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*) \arrow[d] & \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*) \arrow[l] \arrow[dl, dashed] \\
 & M. &
\end{tikzcd}$$

Sean $(T, U) \in \mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \bigoplus \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*)$ y $m \in M$.

Definamos $X(m)$ como el conjunto de las secciones $t : \downarrow f^*(m) \to D \bigoplus E$ de $\langle p, q \rangle$ para las cuales existen m_1, $m_2 \in M$ tales que $m = m_1 \vee m_2$ y secciones $t_1 \in T(m_1)$ y $t_2 \in U(m_2)$ que hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_1) \arrow[r] \arrow[d, "t_1"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] & \downarrow f^*(m_2) \arrow[l] \arrow[d, "t_2"] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd} \tag{6.5}$$

conmute. Es decir que $t|_{m_1} = \sigma_D \circ t_1$ y $t|_{m_2} = \sigma_E \circ t_2$.

Sea $n \leq m$. Si $t \in X(m)$, entonces $m_1 \wedge n$, $m_2 \wedge n \in M$ son tales que

$$(m_1 \wedge n) \vee (m_2 \wedge n) = (m_1 \vee m_2) \wedge n = m \wedge n = n$$

y las secciones $t_1|_{m_1 \wedge n} \in T(m_1 \wedge n)$ y $t_2|_{m_2 \wedge n} \in U(m_2 \wedge n)$ son tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_1 \wedge n) \arrow[r] \arrow[d, "t_1|_{m_1 \wedge n}"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t|_n"] & \downarrow f^*(m_2 \wedge n) \arrow[l] \arrow[d, "t_2|_{m_2 \wedge n}"] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que solo se trata de las restricciones del diagrama (6.5).

Por lo tanto $t|_n \in X(n)$. Por lo tanto la correspondencia $t \mapsto t|_n$ hace que X sea una pregavilla.

Lema 6.3.4. *La pregavilla X definida anteriormente es una gavilla.*

Demostración. Como X es subpregavilla de $\Gamma_{\langle p,q \rangle} \circ f^*$, X es separada. Entonces para ver que X es gavilla basta con ver que X es cerrada.

Consideremos $t \in \Gamma_{\langle p,q \rangle} \circ f^*(m)$ y $m = \bigvee_{i \in I} m_i$ y supongamos que $t|_{m_i} \in X(m_i)$ para toda $i \in I$. Veamos que $t \in X(m)$.

Como $t|_{m_i} \in X(m_i)$ existen m_{i1} y $m_{i2} \in M$ tales que $m_i = m_{i1} \vee m_{i2}$ y secciones $t_{i1} \in T(m_{i1})$ y $t_{i2} \in U(m_{i2})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_{i1}) \arrow[r] \arrow[dd, "t_{i1}"'] & \downarrow f^*(m_i) \arrow[d] & \downarrow f^*(m_{i2}) \arrow[l] \arrow[dd, "t_{i2}"] \\
 & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] & \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}$$

conmuta para toda $i \in I$.

Definamos $m_1 = \bigvee_{i \in I} m_{i1}$ y $m_2 = \bigvee_{i \in I} m_{i2}$, entonces

$$m_1 \vee m_2 = \bigvee_{i \in I} (m_{i1} \vee m_{i2}) = \bigvee_{i \in I} m_i = m.$$

Observando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \downarrow f^*(m_{i1} \wedge m_{j1}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\downarrow f^*(m_{i1}) \arrow[r] \arrow[d, "t_{i1}"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] & \downarrow f^*(m_{j1}) \arrow[l] \arrow[d, "t_{j1}"] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & D \arrow[l, "\sigma_D"]
\end{tikzcd}$$

sabemos que

$$\sigma_D \circ t_{i1}|_{m_{i1} \wedge m_{j1}} = t|_{m_{i1} \wedge m_{j1}} = \sigma_D \circ t_{j1}|_{m_{i1} \wedge m_{j1}}$$

y dado que σ_D es un monomorfismo concluimos que $t_{i1}|_{m_{i1} \wedge m_{j1}} = t_{j1}|_{m_{i1} \wedge m_{j1}}$.

Por lo tanto $\{t_{i1}\}_{i \in I}$ es una familia compatible en T, así que existe $t_1 \in T(m_1)$ que amalgama a dicha familia.

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_1) \arrow[r] \arrow[d, "t_1"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E
\end{tikzcd}$$

conmuta.

$$
\begin{aligned}
(t|_{m_1})^*(d,e) &= (t|_{m_1})^*(d,e) \wedge f^*(m_1) = (t|_{m_1})^*(d,e) \wedge \bigvee_{i\in I} f^*(m_{i1}) \\
&= \bigvee_{i\in I} (t|_{m_1})^*(d,e) \wedge f^*(m_{i1}) = \bigvee_{i\in I} (t|_{m_{i1}})^*(d,e) \\
&= \bigvee_{i\in I} t_{i1}^* \circ \sigma_D^*(d,e) = \bigvee_{i\in I} t_{i1}^*(d) \\
&= \bigvee_{i\in I} (t_1|_{m_{i1}})^*(d) = \bigvee_{i\in I} t_1^*(d) \wedge f^*(m_{i1}) \\
&= t_1^*(d) \wedge \bigvee_{i\in I} f^*(m_{i1}) = t_1^*(d) \wedge f^*(m_1) \\
&= t_1^*(d) = t_1^* \circ \sigma_D^*(d,e)
\end{aligned}
$$

Análogamente, existe $t_2 \in U(m_2)$ que amalgama a la familia compatible $\{t_{i2}\}_{i\in I}$ y hace que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m) & \downarrow f^*(m_2) \arrow[l] \arrow[d, "t_2"] \\
D \bigoplus E \arrow[from=1-1, "t"] & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}
$$

conmute.

Así que $t \in X(m)$, por lo tanto X es una gavilla. ■

Lema 6.3.5. *Sea $f: L \to M$ un morfismo de locales denso.*

Si para todo $m \in M$, $l_1, l_2 \in L$ tales que $f^*(m) = l_1 \vee l_2$ con $l_1 \wedge l_2 = 0$, existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $f^*(m_1) = l_1$, $f^*(m_2) = l_2$ y $m = m_1 \vee m_2$ entonces $(\_ \circ f^*): \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ preserva coproductos binarios.

Demostración. Consideremos el siguiente coproducto en $\mathbf{Et}/L$

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\sigma_D"] \arrow[dr, "p"'] & D \bigoplus E \arrow[d, "\langle p,q\rangle"] & E \arrow[l, "\sigma_E"'] \arrow[dl, "q"] \\
& L. &
\end{tikzcd}
$$

Queremos ver que el único morfismo φ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D}\circ f^*)"'] & \mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \bigoplus \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*) \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*) \arrow[l] \arrow[dl, "\mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_E}\circ f^*)"] \\
& \mathrm{Cl}(\Gamma_{\langle p,q\rangle} \circ f^*). &
\end{tikzcd}$$

conmute, es un isomorfismo.

Veamos que φ^* es un epimorfismo.

Sean $(T, U) \in \mathrm{Cl}(\Gamma_p \circ f^*) \bigoplus \mathrm{Cl}(\Gamma_q \circ f^*)$, $m \in M$ y la correspondiente gavilla X construida anteriormente.

Consideremos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* X(m) \arrow[r] \arrow[d] & X(m) \arrow[d] \\
\Gamma_p \circ f^*(m) \arrow[r] & \Gamma_{\langle p,q\rangle} \circ f^*(m),
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* X(m)$ está compuesto por las secciones $t : \downarrow f^*(m) \to D$ de p tales que $\sigma_D \circ t \in X(m)$.

Definamos $T(m) \to X(m)$ mandando a cada $t \in T(m)$ al morfismo $t' \in X(m)$ inducido por

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m) \arrow[r, equal] \arrow[d, "t"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, dashed, "t'"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & E, \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}$$

es decir, $t' = \sigma_D \circ t$.

Sean $n \leq m$ y $t \in T(m)$. Como

$$t'|_n = (\sigma_D \circ t)|_n = \sigma_D \circ (t|_n) = (t|_n)',$$

entonces la transformación $T \to X$ es natural.

Es claro que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& \Gamma_p \circ f^* \arrow[r, "(\Gamma_{\sigma_D}\circ f^*)"'] & \Gamma_{\langle p,q\rangle} \circ f^*
\end{tikzcd}$$

conmuta por construcción, lo que induce el morfismo k.

Como T es subobjeto de $\Gamma_p \circ f^*$, la flecha $T \to \Gamma_p \circ f^*$ es un monomorfismo, entonces k es un monomorfismo.

Sea $t \in \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* X(m)$. Existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $m = m_1 \vee m_2$ y secciones $t_1 \in T(m_1)$ y $t_2 \in U(m_2)$ que hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m_1) \arrow[r] \arrow[dd, "t_1"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] & \downarrow f^*(m_2) \arrow[l] \arrow[dd, "t_2"] \\
 & D \arrow[d, "\sigma_D"] & \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}$$

conmute.

Sabemos que el coproducto $D \bigoplus E$ es ajeno (lema 1.6.10) y como el cuadrado izquierdo del diagrama de arriba conmuta, se induce un morfismo de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
 & & \downarrow f^*(m_2) \arrow[dll, bend right, "t|_{m_2}"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, bend left, "t_2"] \\
D \arrow[d, "\sigma_D"'] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
D \bigoplus E & E, \arrow[l, "\sigma_E"] &
\end{tikzcd}$$

pero el 0 es estricto (lema 1.6.6), así que, como f es densa, $\downarrow f^*(m_2) = 0$, entonces $m_2 = 0$. Como $m = m_1 \vee m_2$, $m = m_1$ y $t \in T(m)$. Entonces k es además un epimorfismo.

Por lo tanto T es isomorfo a $\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* X$. Análogamente $U \cong \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_E} \circ f^*)^* X$. Esto significa que $\varphi^*(X) = (T, U)$.

Por lo tanto φ^* es un epimorfismo.

Veamos que φ^* es un monomorfismo.

Sean $S, T \in \mathbf{Cl}(\Gamma_{\langle p,q \rangle} \circ f^*)$ tales que $\varphi^*(S) = \varphi^*(T)$; es decir,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* S(m), \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_E} \circ f^*)^* S(m)) = \\
= (\mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* T(m), \mathbf{Cl}(\Gamma_{\sigma_E} \circ f^*)^* T(m)) \quad (6.6)
\end{aligned}$$

para toda $m \in M$.

Sea $t: f^*(m) \to D \bigoplus E \in T(m)$, entonces

$$f^*(m) = t^*(1,1) = t^*((1,0) \vee (0,1)) = t^*(1,0) \vee t^*(0,1),$$

y

$$0 = t^*(0,0) = t^*((1,0) \wedge (0,1)) = t^*(1,0) \wedge t^*(0,1).$$

Definamos $l_1 = t^*(1,0)$, $l_2 = t^*(0,1)$, entonces existen m_1, $m_2 \in M$ tales que $m = m_1 \vee m_2$ y $f^*(m_1) \leq l_1$, $f^*(m_2) \leq l_2$.

Como $f^*(m_1) \wedge f^*(m_2) \leq l_1 \wedge l_2 = 0$ y $f^*(m) = f^*(m_1) \vee f^*(m_2)$, ya que $m = m_1 \vee m_2$, entonces, por el lema 4.1.19, $\downarrow f^*(m) = \downarrow f^*(m_1) \bigoplus \downarrow f^*(m_2)$.

Definamos $\alpha_1 : \downarrow l_1 \to D$ como $\alpha_1^*(d) = t^*(d,0)$. Como t^* preserva ínfimos finitos y supremos arbitrarios, α_1 también.

Sea $(d,e) \in D \bigoplus E$, como

$$t^*(d,e) \wedge l_1 = t^*(d,e) \wedge t^*(1,0) = t^*(d,0) = \alpha_1(d) = \alpha_1 \circ \sigma_D(d,e),$$

entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow l_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & \downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"] \\
D \arrow[r, "\sigma_D"'] & D \bigoplus E
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces $\alpha_1 \in \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* T(m_1)$, pero (6.6) indica que $\alpha_1 \in \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_D} \circ f^*)^* S(m_1)$.

Análogamente, al definir $\alpha_2 : \downarrow l_2 \to E$ como $\alpha_2^*(e) = t^*(0,e)$, α_2 es un morfismo de locales que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow f^*(m) \arrow[d, "t"'] & \downarrow l_2 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha_2"] \\
D \bigoplus E & E \arrow[l, "\sigma_E"]
\end{tikzcd}$$

conmute. Entonces $\alpha_2 \in \mathrm{Cl}(\Gamma_{\sigma_E} \circ f^*)^* S(m_2)$.

Entonces α_1 y α_2 son secciones compatibles que se amalgaman en t. Así que $t \in S(m)$. Por lo tanto $T = S$.

Por lo tanto φ^* es un monomorfismo.

Por lo tanto φ^* es un isomorfismo.

■

Resumiendo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.3.6. *Sea $f : L \to M$ un morfismo de locales.*

$(\_ \circ f^*) : \mathbf{Gav}(L) \to \mathbf{Gav}(M)$ preserva objeto inicial, epimorfismos y coproductos finitos si y solo si

1. *f es denso;*

2. *para todo $m \in M$ y toda cubierta $f^*(m) = \bigvee_i l_i$, existen cubiertas $m = \bigvee_j m_j$, $f^*(m_j) = \bigvee_i v_{ij}$ tales que $\forall i \in I$, $v_{ij} \leq l_i$ y si $i \neq i'$, $v_{ij} \wedge v_{i'j} = 0$;*

3. *para todo $m \in M$, $l_1, l_2 \in L$ tales que $f^*(m) = l_1 \vee l_2$ con $l_1 \wedge l_2 = 0$, existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $f^*(m_1) = l_1$, $f^*(m_2) = l_2$ y $m = m_1 \vee m_2$.*

Es decir, $f : L \to M$ es un morfismo ultrafinito. ■

Apéndice

Topos de Grothendieck

Definición 6.3.7. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $C \in \mathbf{C}$ *un objeto en ella. Una* criba *en* C *es un conjunto* S *de flechas con codominio* C *tal que si* $f \in S$ *y la composición* fh *está definida entonces* $fh \in S$.

Definición 6.3.8. *Sean* S *una criba en* C *y* $h: D \to C$ *una flecha cualquiera. Definimos la criba* $h^*(S)$ *en* D *como*

$$h^*(S) = \{g \mid cod(g) = D, hg \in S\}.$$

Definición 6.3.9. *Una* topología de Grothendieck *sobre una categoría* $\mathbf{C}$ *es una función* J *que asigna a cada objeto* $C \in \mathbf{C}$ *una colección* $J(C)$ *de cribas en* C *de modo que*

1. *la criba máxima* $t_C = \{f \mid cod(f) = C\}$ *está en* $J(C)$*;*
2. *(axioma de estabilidad) si* $S \in J(C)$ *entonces* $h^*(S) \in J(D)$ *para cualquier* $h: D \to C$*;*
3. *(axioma de transitividad) si* $S \in J(C)$ *y* R *es una criba en* C *tal que* $h^*(R) \in J(D)$ *para toda* $h: D \to C \in S$ *entonces* $R \in J(C)$.

Definición 6.3.10. *Un* paraje *es el par* $(\mathbf{C}, J)$ *formado por una categoría pequeña* $\mathbf{C}$ *y una topología de Grothendieck* J *sobre* $\mathbf{C}$.

Definición 6.3.11. *Sea* $(\mathbf{C}, J)$ *un paraje,* C *un objeto de* $\mathbf{C}$ *y* S *una criba en* C*. Diremos que* S *es* cubriente *o que cubre a* C *si* $S \in J(C)$.

Notación 6.3.12. *Sean* $(\mathbf{C}, J)$ *un paraje y* $P: \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ *un funtor. Para cualquier objeto* $C \in \mathbf{C}$ *y cualquier criba* S *en* C*, si* $x \in P(C)$ *y* $f \in S$ *tendremos que*

$$x \cdot f = P(f)(x).$$

Ahora bien, con los mismos elementos podemos construir un diagrama de conjuntos

$$P(C) \xrightarrow{e} \prod_{f \in S} P(dom(f)) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f,g,\ f \in S \\ dom(f)=cod(g)}} P(dom(g)) \qquad (6.7)$$

donde las funciones están definidos de la siguiente manera:

La función e es tal que $e(x) = \{x \cdot f\}_{f \in S}$. Observemos que el segundo producto en (6.7) corre sobre todas las parejas f, g cuya composición está definida con $f \in S$ (por lo que $fg \in S$). La función p viene entonces de la composición en $\mathbf{C}$ y la función q de la acción de $\mathbf{C}$ sobre P. Luego, si $\mathbf{x} = \{x_f\}_{f \in S}$ es un elemento de $\prod_{f \in S} P(dom(f))$ tendremos que

$$p(\mathbf{x})_{f,g} = x_{fg}, \qquad q(\mathbf{x})_{f,g} = x_f \cdot g.$$

Definición 6.3.13. *Sea* $(\mathbf{C}, J)$ *un paraje. Una* gavilla *para* $(\mathbf{C}, J)$ *es un funtor* $P\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Con}$ *tal que para todo* $C \in \mathbf{C}$ *y para cada* S *que cubra a* C *el diagrama (6.7) es un igualador de conjuntos.*

Notación 6.3.14. *La categoría formada por gavillas sobre un paraje* $(\mathbf{C}, J)$ *y transformaciones naturales entre ellas se denotará como* $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$.

Definición 6.3.15. *Un* topos de Grothendieck *es una categoría que es equivalente a la categoría de gavillas* $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ *para algún paraje* $(\mathbf{C}, J)$.

Teorema 6.3.16. *El funtor inclusión* $i\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J) \to \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ *tiene un adjunto izquierdo*

$$\mathbf{a}\colon \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$$

llamado el funtor de gavilla asociada.

Definición 6.3.17. *Sea* $\mathcal{E}$ *una categoría. Una* relación de equivalencia *sobre un objeto* $E \in \mathcal{E}$ *es un subobjeto* $R \subseteq E \times E$ *que satisface los axiomas usaules de reflexividad, simetría y transitividad expresados en el lenguaje apropiado de diagramas.*

Si $(\delta_0, \delta_1)\colon R \to E \times E$ *denota al monomorfismo que representa al subobjeto* R*, los axiomas son:*

1. *(reflexividad) la diagonal* $\Delta\colon E \to E \times E$ *se factoriza a través de* (δ_0, δ_1)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, tail, "{(\delta_0,\delta_1)}"] & & E \times E \\ & E; \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

2. *(simetría) el morfismo* $(\delta_1, \delta_0)\colon R \to E \times E$ *se factoriza a través del monomorfismo* $(\delta_0, \delta_1)\colon R \to E \times E$*;*

3. si $R * R$ denota el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} R * R \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & R \arrow[d, "\delta_1"] \\ R \arrow[r, "\delta_0"'] & E, \end{tikzcd}$$

entonces el morfismo $(\delta_0\pi_1, \delta_1\pi_2): R * R \to E \times E$ se factoriza a través de (δ_0, δ_1)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, tail, "(\delta_0{,}\delta_1)"] & & E \times E \\ & R * R. \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(\delta_0\pi_1{,}\delta_1\pi_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 6.3.18. *Sea $q: E \to Q$ un morfismo. El* par núcleo *de q son las flechas δ_0 y δ_1 que resultan de hacer el producto fibrado de q a lo largo de sí mismo, como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_0"'] & E \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[r, "q"'] & Q. \end{tikzcd}$$

Definición 6.3.19. *Un diagrama con la forma*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & E \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

se dice que es una horqueta exacta *si δ_0 y δ_1 son el par núcleo de q y al mismo tiempo q es su coigualador.*

Definición 6.3.20. *La horqueta (6.8) se dice* establemente exacta *si la horqueta*

$$R \times_Q Q' \rightrightarrows E \times_Q Q' \xrightarrow{q \times 1} (Q \times_Q Q') = Q',$$

que se obtiene al hacer el producto fibrado a lo largo de cualquier morfismo $Q \to Q'$, también es exacta.

Definición 6.3.21. *Un conjunto de objetos $\{C_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{E}$ se dice que* generan a $\mathcal{E}$ *si para cada par de flechas paralelas $u, v: E \to E'$ en $\mathcal{E}$, la identidad $uw = vw$ para todo w, con $w: C_i \to E$ cualquier flecha desde cualquier objeto C_i, implica que $u = v$.*

Teorema 6.3.22 (Giraud). *Una categoría $\mathcal{E}$ con conjuntos hom pequeños y todos los límites finitos es un topos de Grothendieck si y solo si cumple con las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{E}$ tiene todos los coproductos pequeños y éstos son disjuntos y estables bajo producto fibrado;*
2. *todo epimorfismo en $\mathcal{E}$ es un coigualador;*
3. *toda relación de equivalencia $R \rightrightarrows E$ en $\mathcal{E}$ es un par núcleo y tiene un cociente;*
4. *toda horqueta exacta $R \rightrightarrows E \to Q$ es establemente exacta;*
5. *hay un conjunto pequeño de objetos de $\mathcal{E}$ que generan a $\mathcal{E}$.*

Bibliografía

[1] Borceux, Francis. *Handbook of Categorical Algebra 1*, tomo 50 de *Encyclopedia of Mathematics and its Aplications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] Borceux, Francis. *Handbook of Categorical Algebra 3*, tomo 53 de *Encyclopedia of Mathematics and its Aplications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] Carboni, Aurelio, Lack, Stephen y Walters, R.F.C. 'Introduction to Extensive and Distributive Categories.' *Journal of Pure and Applied Algebra*, 84:págs. 145–158, 1993.

[4] Johnstone, Peter T. 'The Point of Pointless Topology.' *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, nº 1:págs. 41–53, enero 1983.

[5] Johnstone, Peter T. 'The Art of Pointless Thinking: A student's Guide to the Category of Locales.' *Cathegory Theory at Work*, págs. 85–107, 1991.

[6] MacLane, Saunders. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[7] MacLane, Saunders y Moerdijk, Ieke. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[8] Marmolejo, Francisco. *Ultraproducts and Continuous Families of Models*. Tesis Doctoral, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, jul 1995.

[9] Schanuel, Samuel. 'Objective Number Theory.' Notas de clase de un curso de verano impartido en la Universidad de Dalhousie en 1995.

Índice Analítico