

00384

2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

BIFURCACIONES DE PUNTOS UMBILICOS  
SIMPLES DE SUPERFICIES EN  $R^4$

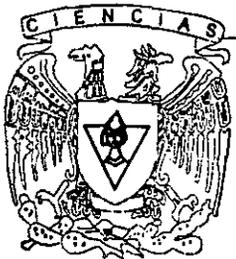
T E S I S

Que para obtener el grado de:  
DOCTOR EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)

presente:

JOSE MATIAS NAVARRO SOZA

DIRECTOR: DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

México, D. F.

2001

296252



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

*Agradezco al Ser el darme el don para poder lograr esta meta.*

*Gracias a Aveli y Amnelia por estar siempre a mi lado y por toda la ayuda recibida.*

*Agradezco a mi esposa Alicia, su paciencia, comprensión y estímulo, que han constituido un soporte fundamental en todas las etapas de este trabajo, especialmente en las más difíciles, apoyándome en todos los sentidos para superar todos los obstáculos.*

*A Federico Sánchez Bringas, mi agradecimiento y reconocimiento por su labor de dirección y apoyo institucional durante todo este proyecto. Gracias por ayudarme a conquistar esta cima. Construir el camino tuvo sus peligros, pero el placer de escalar me hace ver al siguiente risco como un reto difícil de resistir.*

*Un agradecimiento especial a Jesús Muciño Raymundo, cuya revisión crítica ha constituido una contribución muy valiosa para mejorar la calidad y presentación final de esta tesis. En particular, los corolarios 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5 surgieron a raíz de sus observaciones y preguntas.*

*A Omegar Calvo Andrade le debo la motivación inicial para realizar mi doctorado en este tema, al impartir el curso sobre puntos umbílicos y líneas de curvatura durante el XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. También le debo una mejor y más clara presentación de los temas tratados en esta tesis.*

*Gracias a Oscar Palmas Velasco y Pablo Padilla Longoria por sus revisiones de esta tesis, así como por sus correcciones respecto a la redacción del artículo en inglés que surgió de la misma.*

*A Lilia del Riego, mil gracias por aceptar ser uno de mis sinodales de esta tesis y por ser uno de mis ejemplos a seguir respecto al trabajo de investigación y desarrollo de las matemáticas en México.*

*A Ernesto Rosales, mil gracias por sus valiosas sugerencias.*

*Agradezco doblemente a Guillermo Sienra por fungir como mi sinodal tanto de esta tesis como de los exámenes generales previos.*

# Contenido

Introducción.	iii
<b>1 Configuraciones principales.</b>	<b>1</b>
1.1 $\nu$ -Configuraciones principales.	1
1.2 Configuraciones darbouxianas.	8
<b>2 Diagramas de bifurcación.</b>	<b>20</b>
2.1 El caso general.	20
2.1.1 El conjunto de puntos de tipo $D_{12}$ y $\tilde{D}_1$ .	22
2.1.2 Topología de la curva $\Gamma$ .	24
2.1.3 Distribución de los tipos $D_{12}$ y $\tilde{D}_1$ .	27
2.2 Los casos no genéricos.	32
2.2.1 El caso $d = 0$ .	32
2.2.2 El caso $b = 0$ .	37
<b>3 Deformaciones versales.</b>	<b>44</b>
3.1 Familias de ecuaciones de líneas de curvatura.	44
3.2 Deformación versal de un punto umbílico de tipo $D_{12}$ .	45
3.3 Deformación versal de un punto umbílico de tipo $\tilde{D}_1$ .	47
Apéndice. Formas diferenciales cuadráticas.	51
Bibliografía.	57

## Introducción

**Objeto de Estudio.** Consideremos el par  $(\mathcal{I}, \nu)$  donde  $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  es una inmersión de clase  $C^\infty$  de una superficie *local*  $M$  de clase  $C^\infty$  y  $\nu$  es un campo vectorial unitario normal a  $\mathcal{I}(M)$  de clase  $C^\infty$ . El operador de forma  $S_\nu$  en  $T_p\mathcal{I}(M)$  asociado a la segunda forma fundamental de  $\mathcal{I}$  con respecto a  $\nu$  resulta ser un operador lineal autoadjunto dependiente del campo  $\nu$ . Las  $\nu$ -líneas de curvatura son las curvas integrales en  $\mathcal{I}(M)$  de las  $\nu$ -direcciones principales en  $T_p\mathcal{I}(M)$  determinadas por los vectores propios ortogonales de  $S_\nu$  para cada  $p \in \mathcal{I}(M)$  y sus valores propios son las  $\nu$ -curvaturas principales  $k_1, k_2$ . Estas curvaturas principales son los valores máximo y mínimo de la segunda forma fundamental  $II_\nu(X) = \langle S_\nu(X), X \rangle$  para  $X$  en el círculo unitario del plano tangente  $T_p\mathcal{I}(M)$ . Decimos que un punto  $p \in \mathcal{I}(M)$  es  $\nu$ -umbílico si  $k_1(p) = k_2(p)$ . Una  $\nu$ -configuración principal de  $\mathcal{I}(M)$  es la terna formada por los puntos  $\nu$ -umbílicos y el par de foliaciones con singularidades de  $\mathcal{I}(M)$  determinadas por las familias maximal y minimal de las  $\nu$ -líneas de curvatura. Los puntos  $\nu$ -umbílicos son las singularidades comunes de este par de foliaciones en  $\mathcal{I}(M)$ .

La ecuación diferencial de las  $\nu$ -líneas de curvatura se puede escribir localmente en un sistema de coordenadas  $(u, v)$  en la forma

$$A(u, v) dv^2 + B(u, v) du dv + C(u, v) du^2 = 0, \quad (1)$$

donde  $A, B$  y  $C$  son funciones de clase  $C^\infty$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  que dependen de la primera y segunda formas fundamentales del par  $(\mathcal{I}, \nu)$  de manera análoga al caso clásico de superficies en  $\mathbb{R}^3$ . En este sistema de coordenadas los puntos  $\nu$ -umbílicos *simples* se caracterizan como los mínimos no degenerados de la función cuadrática  $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H(u, v) = B^2(u, v) - 4A(u, v)C(u, v).$$

Esta función cuadrática  $H$  siempre resulta positiva para el 1-jet de la ecuación (1). La segunda forma fundamental depende del campo  $\nu$  en el haz normal  $T\mathcal{I}(M)^\perp$  para el caso de superficies en  $\mathbb{R}^4$ . Además, como el complemento ortogonal en  $\mathbb{R}^4$  del plano tangente  $T_p\mathcal{I}(M)$  tiene dimensión

2 para cada  $p \in \mathcal{I}(M)$ , surge una diversidad en el tipo de configuraciones principales que pueden tener lugar en una superficie dada inmersa en  $\mathbb{R}^4$  al variar solamente este campo normal  $\nu$ .

En esta tesis estudiamos esta diversidad de configuraciones dependiendo de campos normales  $\nu$  que definen puntos  $\nu$ -umbílicos simples aislados en  $\mathcal{I}(M)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en un sistema de coordenadas local  $(x, y, z, w)$  alrededor del punto  $\nu$ -umbílico  $p \in \mathcal{I}(M)$ , estos campos normales coinciden en el punto  $p$  con el campo  $\partial/\partial z$  de la base canónica asociada  $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial w\}$  al sistema local de coordenadas, siendo el plano tangente  $T_p\mathcal{I}(M)$  generado por los campos  $\partial/\partial x$  y  $\partial/\partial y$ . Llamamos  $\nu$ -umbilicales a este tipo de campos normales. Sea  $\mathcal{N}_1$  el conjunto de los 1-jets de los campos  $\nu$ -umbilicales de  $\mathcal{I}(M)$ . Resulta que este espacio  $\mathcal{N}_1$  puede parametrizarse por dos números reales arbitrarios  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ , lo cual es bastante natural tomando en cuenta que la dimensión del haz normal  $T\mathcal{I}(M)^\perp$  es igual a 2 para inmersiones de la superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^4$ . Podemos considerar entonces a  $\mathcal{N}_1$  como un plano. Para una superficie fija  $\mathcal{I}(M)$ , la configuración principal alrededor del punto  $\nu$ -umbílico  $p \in \mathcal{I}(M)$  depende solamente de  $\nu \in \mathcal{N}_1$ .

En este contexto es natural estudiar el problema local de las bifurcaciones de las configuraciones principales alrededor de los puntos  $\nu$ -umbílicos considerándolas dependientes solamente de  $\nu \in \mathcal{N}_1$ .

Este problema puede formularse del siguiente modo. Dos campos  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}_1$  se dicen *topológicamente equivalentes*, lo que se denota  $\nu_1 \sim \nu_2$ , si existe un homeomorfismo de la superficie  $\mathcal{I}(M)$  en sí misma tal que la configuración principal alrededor del punto  $\nu_1$ -umbílico sea transformada por este homeomorfismo en la configuración principal alrededor del punto  $\nu_2$ -umbílico. Un campo  $\nu \in \mathcal{N}_1$  es *estructuralmente estable* si existe una vecindad  $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}_1$  de  $\nu$  tal que  $\eta \sim \nu$  para todo  $\eta \in \mathcal{V}$ . Ahora, un campo  $\nu \in \mathcal{N}_1$  se dice que es un *punto de bifurcación* si  $\nu$  no es estructuralmente estable. El subconjunto  $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}_1$  formado por todos los puntos de bifurcación en  $\mathcal{N}_1$  es el *conjunto de bifurcación*. La pregunta fundamental es la siguiente. Dado un campo  $\nu \in \mathcal{B}$  ¿es posible encontrar una vecindad  $\mathcal{W} \subset \mathcal{N}_1$  de  $\nu$  tal que podamos dar una descripción completa de las configuraciones principales locales asociadas a todo  $\eta \in \mathcal{W}$ ? Esta pregunta puede ser respondida si se conoce la estructura del conjunto de bifurcación en  $\mathcal{W}$ . En algunos casos, añadiendo alguna condición que elimine las singularidades más “degeneradas”, puede resultar que la estructura del conjunto de bifurcación alrededor de  $\nu$  sea lo suficientemente simple como para describirla geoméricamente y hablar de

transversalidad a este conjunto  $\mathcal{B}$ . Esto nos puede permitir encontrar alguna variedad  $\Lambda$  en  $\mathcal{W}$  con  $\nu \in \Lambda$  tal que para todo  $\eta \in \mathcal{W}$  exista  $\xi \in \Lambda$  con  $\xi \sim \eta$ . Así, para responder la pregunta planteada arriba podemos restringirnos a la variedad  $\Lambda$ . Si podemos encontrar tal variedad  $\Lambda$  con  $\dim \Lambda = k$  de manera que cualquier variedad  $(k - 1)$ -dimensional que contenga a  $\nu$  no cumpla tal propiedad, habremos encontrado lo que se llama una *deformación versal* del punto  $\nu$ , el cual recibe el nombre, en este caso, de *punto de bifurcación de codimensión  $k$* .

**Historia y motivación.** En 1982, Sotomayor y Gutierrez consideraron en [18] y [11] inmersiones de una 2-variedad compacta y orientada en  $\mathbb{R}^3$ . En esos trabajos describen una clase de inmersiones con configuración principal estable y prueban que esta clase es densa en el espacio de las inmersiones con la topología  $C^2$ . Llamaron *Darbouriana* a esta clase, debido a los trabajos de Darboux del siglo XIX sobre la forma de las líneas de curvatura alrededor de un punto umbílico [3].

Más recientemente, en 1995, Ramírez-Galarza y Sánchez-Bringas probaron en [15] que existe una clase  $\mathcal{D}$  de pares  $(\mathcal{I}, \nu)$  estructuralmente estables, donde  $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  es una inmersión local de clase  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , de una superficie compacta  $M$  de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^4$  y  $\nu \in \mathcal{N}_1$ .

Además, probaron que esta clase  $\mathcal{D}$  es densa en la topología  $C^3$  en el espacio  $H = \text{Imm}^{rs}(M) \times \mathcal{N}$ , donde  $\text{Imm}^{rs}(M)$  es el espacio de las inmersiones de  $M$  en  $\mathbb{R}^4$  de clase  $C^r$  con la topología  $C^s$ ,  $r \geq s \geq 3$ , y  $\mathcal{N}$  es el espacio de los campos vectoriales unitarios de clase  $C^\infty$  normales a  $\mathcal{I}(M)$ .

También se probó en [15] que en  $\mathcal{D}$  existen sólo tres clases de equivalencia topológica, siendo éstas las mismas clases topológicas de configuraciones principales de superficies en  $\mathbb{R}^3$  encontradas por Gutierrez y Sotomayor en [18]. Por esta razón se dicen también Darbouxianas las clases de equivalencia en  $\mathcal{D}$ . Estas clases se denotan por  $D_1, D_2$  y  $D_3$ .

En contraste con estas similitudes entre las configuraciones principales de superficies en  $\mathbb{R}^3$  y en  $\mathbb{R}^4$  existe una diferencia notable respecto a los índices admisibles de un punto umbílico. El índice de un punto  $\nu$ -umbílico es el índice de Poincaré-Hopf de una singularidad de cualquiera de las dos  $\nu$ -direcciones principales, ya que los índices de ambas direcciones coinciden. Una famosa conjetura de Loewner, descrita en [19], afirma que cualquier punto umbílico de una superficie de clase  $C^\omega$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  debe tener índice menor o igual a uno. Esto ha sido demostrado afirmativamente para superficies e inmersiones de clase  $C^\omega$  por H. Hamburger en [13], G. Bol en [2], T. Klotz en [14], C. J.

Titus en [19], y H. Scherbel en [17], motivados todos ellos por la conjetura de Carathéodory de 1926, aún sin resolver en su totalidad, que afirma lo siguiente: existen al menos dos puntos umbílicos en toda superficie cerrada convexa suficientemente diferenciable. Gutierrez, Mercuri y Sánchez-Bringas probaron en [9] que, para inmersiones de clase  $C^r$ , con  $r \geq 3$  y un punto umbílico de tipo Lojasiewicz, la conjetura de Loewner también resulta ser cierta. Por otro lado, Gutierrez y Sánchez-Bringas probaron en [10] que dado  $n \in \mathbb{Z}$  existe una superficie  $M$  de clase  $C^\omega$ , una inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^4$  de clase  $C^\omega$  y un campo vectorial  $\nu$  normal a  $M$  de clase  $C^\omega$  con un punto  $\nu$ -umbílico aislado de índice  $n/2$ . Esto implica que la conjetura de Loewner no puede extenderse a superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$ .

Los pares  $(\mathcal{I}, \nu)$  con puntos umbílicos de índice mayor que uno aparecen en el complemento del conjunto  $\mathcal{D}$  de la superficie correspondiente. Esto es, dichos pares  $(\mathcal{I}, \nu)$  están en el conjunto de bifurcación estudiado en esta tesis.

Otra fuente de inspiración para esta tesis fue el trabajo de clasificación de singularidades de ecuaciones diferenciales cuadráticas, no necesariamente provenientes de la geometría, realizado por Guíñez y Gutierrez en [7] y [8].

**Resultados.** Manteniendo fija la superficie local  $\mathcal{I}(M)$  y variando el campo  $\nu \in \mathcal{N}_1$  tenemos que la configuración principal alrededor del punto  $\nu$ -umbílico  $p \in \mathcal{I}(M)$  depende solamente de los parámetros de  $\nu$ . Por esta razón hablamos de campos  $\nu \in \mathcal{N}_1$  y de configuraciones principales alrededor de puntos  $\nu$ -umbílicos indistintamente. Abusando todavía más de la notación, hablamos de los puntos  $\nu \in \mathcal{N}_1$  como puntos  $\nu$ -umbílicos. El espacio  $\mathcal{N}_1$  es un plano  $\mathbb{R}^2$ .

En esta tesis encontramos que el conjunto de puntos  $\nu$ -umbílicos *no simples* de  $\mathcal{N}_1$  es una línea recta  $L$  en  $\mathcal{N}_1$ . El diagrama de bifurcación de las  $\nu$ -configuraciones principales locales en  $\mathcal{N}_1$  está formado por la unión de  $L$  y una curva algebraica real  $\Gamma$  con dos componentes conexas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . La componente  $\Gamma_1$  es regular excepto en un sólo punto  $V$  de tipo cúspide y  $\Gamma_2$  es difeomorfa a una línea. Es notable que en este conjunto de bifurcación aparecen tanto puntos de codimensión 1 como también un punto de codimensión 2 representado por  $V$ . Además, existe un punto de tangencia  $T$  entre  $\Gamma_2$  y la línea de puntos no simples  $L$ . Los tipos Darbouxianos  $D_1, D_2$  y  $D_3$  aparecen en el complemento del conjunto de bifurcación  $\mathcal{B} = \Gamma \cup L$ . Determinamos las configuraciones principales de los tipos Darbouxianos así como también de los tipos que están en  $\Gamma - \{T\}$ . Sobre  $\Gamma - \{V, T\}$  existe un sólo tipo de configuración principal que llamamos  $D_{12}$ . Estos puntos de

bifurcación tienen codimensión 1. En el punto  $V$  se tiene una configuración que llamamos  $\tilde{D}_1$ .  $V$  es un punto de bifurcación de codimensión 2. Los tipos Darbouxianos  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y los tipos  $D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$  se distribuyen en el espacio  $\mathcal{N}_1$  como se muestra en el diagrama de bifurcación de la Figura 5 del Capítulo 2, pág. 29. Se pueden obtener deformaciones versales de los puntos de tipo  $D_{12}$  eligiendo líneas en  $\mathcal{N}_1$  que sean transversales a las componentes regulares de la curva  $\Gamma$ . Una vecindad suficientemente pequeña del punto  $V$  es una deformación versal de un punto umbílico de tipo  $\tilde{D}_1$ . En todos los resultados anteriores se suponen fijos los parámetros  $k, a, b, c, d, \alpha$  y  $\gamma$  que aparecen en la parametrización canónica  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  de la superficie  $\mathcal{I}(M)$ , definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

donde

$$\varphi(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{d}{2}u^2v + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3,$$

$$\psi(u, v) = \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \mathcal{O}(3),$$

con  $bd \neq 0$ . El diagrama de bifurcación en los casos en que  $b = 0$  y  $d \neq 0$ , o en que  $b \neq 0$  y  $d = 0$ , son casos límite del diagrama de bifurcación en que ambos son distintos de cero y es topológicamente equivalente al que se muestra en la Figura 7 del Capítulo 2, pág. 33. Finalmente, si permitimos además que los parámetros  $(b, d)$  de la parametrización canónica  $\mathbf{x}$  varíen en  $\mathbb{R}^2$ , entonces el diagrama de bifurcación va cambiando de acuerdo a la Figura 8 del Capítulo 2, pág. 42.

**Contenido de esta tesis.** En el Capítulo 1 se definen las configuraciones principales de superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$ , se obtiene el 1-jet de la ecuación diferencial de las líneas de curvatura usando una parametrización canónica local de la superficie y la forma normal del 1-jet del campo  $\nu \in \mathcal{N}_1$ .

Las configuraciones Darbouxianas son definidas usando las singularidades de cierto campo vectorial tangente a una superficie definida en el haz proyectivo. Esta construcción nos permite describir las configuraciones principales de los tipos Darbouxianos así como también de los tipos singulares simples de codimensiones uno y dos en el espacio  $\mathcal{N}_1$ . Finalizamos definiendo los

puntos umbílicos simples como mínimos no degenerados de cierta función y dando una caracterización de los mismos en términos de dos desigualdades sobre los parámetros de la superficie y el campo normal.

En el Capítulo 2 demostramos el resultado principal de este trabajo, el Teorema 2.1.1, el cual describe la estructura topológica del conjunto de bifurcación en el espacio  $\mathcal{N}_1$ . Esto nos permite describir el diagrama de bifurcación para los puntos umbílicos simples en  $\mathcal{N}_1$ . También obtenemos en el Capítulo 2 los diagramas de bifurcación en los casos no genéricos y demostramos que son casos límite del diagrama de bifurcación general en un contexto de variación simultánea de la superficie y el campo normal, con ciertas restricciones sobre los parámetros de la superficie.

En el Capítulo 3 encontramos familias  $\Lambda$  que son variedades transversales en  $\nu \in \mathcal{B}$  a ciertas subvariedades de codimensión 1 para el caso  $D_{12}$  y de codimensión 2 para el caso  $\tilde{D}_1$ . Esta transversalidad sugiere la versalidad de tales familias  $\Lambda$ , lo que probamos directamente usando métodos desarrollados por Guíñez y Gutierrez en [8]. Si para cada ecuación diferencial de líneas de curvatura consideramos la correspondiente forma diferencial cuadrática (en el apéndice definimos estas formas), entonces nuestras deformaciones resultan ser versales en el espacio de las formas diferenciales cuadráticas. En [8] se obtienen deformaciones versales de los tipos singulares  $D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$  en el espacio de las formas diferenciales cuadráticas. Estas deformaciones son diferentes a las que encontramos en esta tesis. Sin embargo, para el caso  $\tilde{D}_1$  de codimensión dos, se demuestra en [8] que el conjunto de bifurcación de las singularidades de tipo  $D_{12}$ , en ese caso y para esa deformación versal, es una curva de tipo cúspide similar a la componente cúspide de nuestra curva  $\Gamma$ . Sin embargo, tales deformaciones versales no definen familias de ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura, lo que es necesario en nuestro trabajo. Además, como nuestras deformaciones versales tienen lugar en el espacio de los campos  $\nu$ -umbilicales, podemos expresar este hecho del siguiente modo: la variación de los parámetros en la deformación versal de este tipo de singularidades en el espacio de las formas diferenciales cuadráticas corresponde a la variación de los parámetros del 1-jet del campo vectorial normal a la superficie.

**Problemas abiertos.** Para determinar las configuraciones principales que pueden tener lugar sobre los puntos de la línea no simple  $L$  es necesario analizar el 2-jet de la ecuación diferencial de líneas de curvatura. De acuerdo a la clasificación realizada por Guíñez en [7], todos los puntos de esta línea

$L$  tienen rango 1. Esto implica la existencia de un sistema de coordenadas en donde se puede escribir el 2-jet de las funciones  $A, B, C$  que aparecen en la ecuación (1) en la forma

$$\begin{aligned} A_2(x, y) &= y + a_{20}x^2, \\ B_2(x, y) &= b_{20}x^2, \\ C_2(x, y) &= -y + c_{20}x^2, \end{aligned}$$

y la configuración principal puede variar dependiendo de los coeficientes  $a_{20}, b_{20}$ , y  $c_{20}$ . Los métodos que desarrollamos en esta tesis ya no se pueden aplicar a este tipo de puntos umbílicos. Sin embargo, nuestros resultados pueden ser de importancia para resolver el problema abierto de encontrar deformaciones versales de este tipo de singularidades. Existen datos que nos sugieren la existencia de segmentos en la línea no simple  $L$  que son de un mismo tipo de configuración principal, que llamaremos aquí  $\tilde{D}_{23}$ . Estos puntos representan una bifurcación entre los tipos  $D_2$  y  $D_3$ . Si la codimensión de este tipo es igual a 1 (lo que parece ser cierto), entonces cualquier línea transversal a estos segmentos en nuestro espacio  $\mathcal{N}_1$  puede ser considerada una buena candidata para deformación versal de la singularidad  $\tilde{D}_{23}$ .

También existe un punto particular muy especial en la línea no simple  $L$ . Se trata del punto de tangencia  $T$  entre la componente regular  $\Gamma_2$  de la curva  $\Gamma$  y esta línea no simple  $L$ . El punto  $T$  representa múltiples transiciones entre las configuraciones principales, ya que en cualquier vecindad  $U \subset \mathcal{N}_1$  de este punto existen puntos de tipo  $D_1, D_2, D_3$ , y  $D_{12}$ . Determinar la configuración principal del punto  $T$  así como una deformación versal del mismo es un problema que dejamos abierto.

También se encuentra abierta la cuestión de la caracterización de las ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura en superficies compactas con una configuración principal *global* estructuralmente estable, lo que permitiría comenzar el estudio global de las bifurcaciones de este tipo de ecuaciones. Otro problema es el de la realización de cualquier ecuación diferencial cuadrática como ecuación de líneas de curvatura. Más precisamente, dadas las funciones  $A, B, C$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ , ¿existe una inmersión  $\mathcal{I}$  de clase  $C^\infty$  de este abierto  $U$  en  $\mathbb{R}^4$  y un campo vectorial  $\nu$  de clase  $C^\infty$  normal a  $\mathcal{I}(U)$  tales que la ecuación de líneas de curvatura del par  $(\mathcal{I}, \nu)$  esté definida por una ecuación de la forma (1)? Este problema ya ha sido resuelto afirmativamente por Gutierrez y Sánchez-Bringas en [10] para el caso en que las funciones  $A, B, C$  son analíticas con  $A = -C$ , e inmersiones y campos  $\mathcal{I}, \nu$  también analíticos. Este resultado es el que permite garantizar la existencia

de puntos umbílicos en  $\mathbb{R}^4$  con cualquier índice de la forma  $n/2$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . En relación con la conjetura de Carathéodory resulta de particular interés investigar si es posible o no realizar este tipo de inmersiones de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$ .

*A lo largo de esta tesis denotaremos por:*

$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ , vecindades.

$f, F, \mathcal{F}, \varphi, \psi$ , funciones.

$S, M, N$ , variedades diferenciables.

$X, Y, Z, V, W, \hat{\mathcal{F}}$ , campos vectoriales.

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , parametrizaciones.

$\mathcal{I}$ , inmersiones.

$\nu, \eta$ , campos normales umbilicales.

$\omega, \vartheta$ , formas diferenciales cuadráticas.

$b, d$ , coeficientes de los términos  $uv^2$  y  $u^2v$  respectivamente, en el desarrollo de un polinomio homogéneo de grado 3.

# 1 Configuraciones Principales

## 1.1 $\nu$ -Configuraciones principales

Sea  $M$  una superficie diferenciable orientada inmersa en  $\mathbb{R}^4$  con la métrica Riemanniana inducida de la métrica Riemanniana estándar de  $\mathbb{R}^4$ . Para cada  $p \in M$  consideremos la descomposición  $T_p\mathbb{R}^4 = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$ , donde  $(T_pM)^\perp$  es el complemento ortogonal de  $T_pM$  en  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $\bar{\nabla}$  la conexión Riemanniana de  $\mathbb{R}^4$ . Dados  $X$  y  $Y$  campos vectoriales locales en  $M$ , elegimos algunas extensiones locales  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$  de estos campos a  $\mathbb{R}^4$ .

La conexión Riemanniana de  $M$  está bien definida por la componente tangencial de la conexión Riemanniana de  $\mathbb{R}^4$ :  $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$ .

Sean  $\mathcal{X}(M)$  el espacio de los campos vectoriales diferenciables en  $M$  y  $\mathcal{X}(M)^\perp$  el espacio de los campos vectoriales diferenciables normales a  $M$ . Consideremos la aplicación  $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$ , definida por

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Es fácil ver que esta aplicación está bien definida, es simétrica y bilineal.

Si  $p \in M$  y  $\nu \in (T_pM)^\perp$ ,  $\nu \neq 0$ , definimos la función

$$H_\nu : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_\nu(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \nu \rangle.$$

Esta función resulta también simétrica y bilineal. La **segunda forma fundamental** de  $M$  en  $p$  es la forma cuadrática asociada,

$$II_\nu : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_\nu(X) = H_\nu(X, X).$$

Recordemos que el **operador de forma**  $S_\nu : T_pM \rightarrow T_pM$  está definido por

$$S_\nu(X) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nu})^\top,$$

donde  $\bar{\nu}$  es la extensión local a  $\mathbb{R}^4$  del campo vectorial normal  $\nu$  en  $p$ .

Este operador es lineal y autoadjunto. En consecuencia, para cada  $p \in M$ , existe una base ortonormal  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$  de  $T_pM$  que consiste de vectores propios de  $S_\nu$  :

$$S_\nu(\hat{e}_1) = k_1\hat{e}_1, \quad S_\nu(\hat{e}_2) = k_2\hat{e}_2.$$

Como este operador cumple que

$$\langle S_\nu(X), Y \rangle = H_\nu(X, Y)$$

para cualesquiera  $X, Y \in T_pM$ , la segunda forma fundamental puede expresarse por

$$II_\nu(X) = \langle S_\nu(X), X \rangle.$$

Además, la restricción de la segunda forma fundamental a los vectores unitarios en  $T_pM$  alcanza sus valores máximo y mínimo en esta base ortonormal.

**Definición 1.1.1.** Sea  $\nu \in (T_pM)^\perp$ . Los valores propios  $k_1$  y  $k_2$  del operador de forma  $S_\nu$  correspondientes a los valores máximo y mínimo de la segunda forma fundamental  $II_\nu$  en el círculo unitario  $T_pM$  son llamados las  $\nu$ -**curvaturas principales**. Un punto  $p \in M$  es  $\nu$ -**umbílico** si las  $\nu$ -curvaturas principales coinciden en  $p$ , esto es,  $k_1(p) = k_2(p)$ .

**Definición 1.1.2.** Sea  $\mathcal{U}_\nu$  el conjunto de los puntos  $\nu$ -umbílicos en  $M$ . Para cada  $p \in M - \mathcal{U}_\nu$  existen dos direcciones definidas en  $T_pM$  por los dos vectores propios de  $S_\nu$ . Llamamos a estos campos de líneas las  $\nu$ -**direcciones principales**.

El teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza la integrabilidad de las  $\nu$ -direcciones principales localmente en  $M - \mathcal{U}_\nu$ .

**Definición 1.1.3.** Las  $\nu$ -**líneas de curvatura** son las dos familias de curvas ortogonales definidas por las integrales de las  $\nu$ -direcciones principales. La terna formada por las dos foliaciones ortogonales definidas por las  $\nu$ -líneas de curvatura junto con los puntos  $\nu$ -umbílicos como sus singularidades, se llama la  $\nu$ -**configuración principal** de  $M$ , denotada por  $\mathcal{P}_\nu = (\mathcal{U}_\nu, \mathcal{L}_\nu, l_\nu)$ .

La ecuación diferencial que define la  $\nu$ -configuración principal está dada por la ecuación de Rodrigues,

$$S_\nu(c'(t)) = \lambda(c(t))c'(t), \quad (1.1)$$

donde  $\lambda(c(t))$  es una función real-valuada definida en  $M$ . Con el objeto de estudiar las  $\nu$ -configuraciones principales de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$ , en una vecindad de un punto  $\nu$ -umbílico  $p \in M$ , introducimos ahora un sistema de coordenadas  $(x, y, z, w)$ , de modo que la superficie  $M$  se pueda ver localmente como la gráfica de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . En este sistema la parametrización local puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v), \psi(u, v)). \quad (1.2)$$

Encontremos, en primer lugar, la ecuación diferencial que deben satisfacer las  $\nu$ -líneas de curvatura en las coordenadas definidas por esta parametrización.

Como  $S_\nu : T_pM \rightarrow T_pM$ , se tiene que  $S_\nu(\mathbf{x}_u)$  y  $S_\nu(\mathbf{x}_v) \in T_pM$ . Por lo tanto para cada  $p \in M$  existen  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  tales que

$$\begin{aligned} S_\nu(\mathbf{x}_u) &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ S_\nu(\mathbf{x}_v) &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De ahí que para  $V \in T_pM$ ,  $V = v_1\mathbf{x}_u + v_2\mathbf{x}_v$ , se tiene

$$S_\nu(V) = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2)\mathbf{x}_u + (a_{21}v_1 + a_{22}v_2)\mathbf{x}_v,$$

lo cual puede escribirse respecto a la base asociada  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_pM$  como

$$S_\nu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, la expresión de la segunda forma fundamental en esta base está dada por

$$\begin{aligned} II_\nu(V) &= \langle S_\nu(V), V \rangle = \langle S_\nu(v_1\mathbf{x}_u + v_2\mathbf{x}_v), v_1\mathbf{x}_u + v_2\mathbf{x}_v \rangle \\ &= v_1^2 \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle + v_1v_2 \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle + v_2v_1 \langle S_\nu(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle + \\ &\quad + v_2^2 \langle S_\nu(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle \\ &= v_1^2 e_\nu + 2v_1v_2 f_\nu + v_2^2 g_\nu, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} e_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle = \langle \nu, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, S_\nu(\mathbf{x}_v) \rangle = \langle \nu, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ g_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle = \langle \nu, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Encontremos ahora los valores de las  $a_{ij}$  en términos de los coeficientes  $e_\nu, f_\nu, g_\nu$ .

De la ecuación (1.3), tenemos que

$$\begin{aligned} f_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ f_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ e_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ g_\nu &= \langle S_\nu(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde  $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$ ,  $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ ,  $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$  son los coeficientes de la primera forma fundamental. Las relaciones (1.4) pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} e_\nu & f_\nu \\ f_\nu & g_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

de donde

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e_\nu & f_\nu \\ f_\nu & g_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

y de ahí obtenemos las expresiones de las entradas  $a_{ij}$  de la matriz del operador de forma  $S_\nu$  en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{e_\nu G - f_\nu F}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{f_\nu G - g_\nu F}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{f_\nu E - e_\nu F}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{g_\nu E - f_\nu F}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  es una  $\nu$ -línea de curvatura, la ecuación (1.1) nos dice que las funciones  $u'(t), v'(t)$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}u' + a_{12}v' &= \lambda u', \\ a_{21}u' + a_{22}v' &= \lambda v'. \end{aligned}$$

Eliminando  $\lambda$  de este sistema con los valores obtenidos de las  $a_{ij}$ , resulta la ecuación diferencial de las  $\nu$ -líneas de curvatura

$$A(u, v) dv^2 + B(u, v) du dv + C(u, v) du^2 = 0, \quad (1.5)$$

donde

$$A = f_\nu G - g_\nu F,$$

$$B = e_\nu G - g_\nu E,$$

$$C = e_\nu F - f_\nu E.$$

Ahora, para el análisis local de la  $\nu$ -configuración principal de una superficie  $M$  parametrizada por (1.2), podemos suponer, sin pérdida de generalidad (usando translaciones y rotaciones), que el punto  $\nu$ -umbílico  $p$  de  $M$  es el origen de  $\mathbb{R}^4$ , con el plano tangente de la superficie en  $p$  siendo el plano  $xy$  y con el campo vectorial normal unitario  $\nu \in (T_p M)^\perp$  coincidiendo con  $(0, 0, 1, 0)$  en el origen.

Considerando el polinomio de Taylor de orden 3 de las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  de la parametrización (1.2) alrededor de  $p$  obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \frac{1}{2} (\varphi_{uu}(0, 0)u^2 + 2\varphi_{uv}(0, 0)uv + \varphi_{vv}(0, 0)v^2) + \\ &+ \frac{1}{6} (\varphi_{uuu}(0, 0)u^3 + 3\varphi_{uuv}(0, 0)u^2v + 3\varphi_{uvv}(0, 0)uv^2 + \varphi_{vvv}(0, 0)v^3), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \frac{1}{2} (\psi_{uu}(0, 0)u^2 + 2\psi_{uv}(0, 0)uv + \psi_{vv}(0, 0)v^2) + \\ &+ \frac{1}{6} (\psi_{uuu}(0, 0)u^3 + 3\psi_{uuv}(0, 0)u^2v + 3\psi_{uvv}(0, 0)uv^2 + \psi_{vvv}(0, 0)v^3), \end{aligned}$$

pues  $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(0, 0) = 0$ .

Como

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

tenemos

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, \varphi_u, \psi_u), \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, \varphi_v, \psi_v),$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, \varphi_{uu}, \psi_{uu}), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, \varphi_{uv}, \psi_{uv}), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, \varphi_{vv}, \psi_{vv}).$$

De ahí que

$$\varphi_{uu} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, \varphi_{uu}, \psi_{uu}) \rangle = \langle \nu_p, \mathbf{x}_{uu} \rangle = e_{\nu_p},$$

$$\varphi_{uv} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, \varphi_{uv}, \psi_{uv}) \rangle = \langle \nu_p, \mathbf{x}_{uv} \rangle = f_{\nu_p},$$

$$\varphi_{vv} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, \varphi_{vv}, \psi_{vv}) \rangle = \langle \nu_p, \mathbf{x}_{vv} \rangle = g_{\nu_p},$$

por lo tanto

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2} (e_{\nu} u^2 + 2f_{\nu} uv + g_{\nu} v^2) + \frac{a}{6} u^3 + \frac{d}{2} u^2 v + \frac{b}{2} uv^2 + \frac{c}{6} v^3.$$

Análogamente,

$$\psi(u, v) = \frac{1}{2} (\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2) + \frac{\delta}{6} u^3 + \frac{\epsilon}{2} u^2 v + \frac{\zeta}{2} uv^2 + \frac{\eta}{6} v^3.$$

El hecho de que la superficie es la misma independientemente de cual base del plano tangente se tome, obtenemos al elegir la base ortonormal  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$  de los vectores propios del operador  $S_{\nu}$ , los coeficientes

$$e_{\nu} = \langle S_{\nu}(\hat{e}_1), \hat{e}_1 \rangle = \langle k_1 \hat{e}_1, \hat{e}_1 \rangle = k_1,$$

$$f_{\nu} = \langle S_{\nu}(\hat{e}_1), \hat{e}_2 \rangle = \langle k_1 \hat{e}_1, \hat{e}_2 \rangle = 0,$$

$$g_{\nu} = \langle S_{\nu}(\hat{e}_2), \hat{e}_2 \rangle = \langle k_2 \hat{e}_2, \hat{e}_2 \rangle = k_2.$$

En consecuencia,

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2} (k_1 u^2 + k_2 v^2) + \frac{a}{6} u^3 + \frac{d}{2} u^2 v + \frac{b}{2} uv^2 + \frac{c}{6} v^3.$$

Además, como  $p \in M$  es  $\nu$ -umbílico,  $k_1(p) = k_2(p) = k$ , lo que nos permite escribir

$$\varphi(u, v) = \frac{k}{2} (u^2 + v^2) + \frac{a}{6} u^3 + \frac{d}{2} u^2 v + \frac{b}{2} uv^2 + \frac{c}{6} v^3.$$

Una rotación del plano  $xy$  puede eliminar el término en  $uv$  del desarrollo de  $\psi$  para obtener finalmente nuestra **parametrización canónica**:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad (1.6)$$

donde

$$\varphi(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{d}{2}u^2v + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3,$$

$$\psi(u, v) = \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \frac{\delta}{6}u^3 + \frac{\epsilon}{2}u^2v + \frac{\zeta}{2}uv^2 + \frac{\eta}{6}v^3,$$

de manera que no perdemos generalidad al suponer parametrizada nuestra superficie local por (1.6), para  $k, a, d, b, c, \alpha, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ .

En esta parametrización canónica consideremos el conjunto  $\mathcal{N}$  de los campos normales  $\nu \in (TM)^\perp$  unitarios, para los cuales  $p \in M$  es un punto  $\nu$ -umbílico *aislado* tal que  $\nu_p = \partial/\partial z$ . Llamaremos **campos  $\nu$ -umbilicales** a los elementos de  $\mathcal{N}$ .

El 1-jet de estos campos  $\nu$ -umbilicales se da en el siguiente lema. Como veremos más adelante, este 1-jet determina genéricamente las ecuaciones diferenciales de las  $\nu$ -líneas de curvatura.

**Lema 1.1.4.** *Sea  $\mathcal{N}_1$  el conjunto de los 1-jets de los campos  $\nu$ -umbilicales. La forma de un campo  $\nu \in \mathcal{N}_1$  en una vecindad del punto  $\nu$ -umbílico está dada por*

$$\nu(u, v) = (-ku, -kv, 1, mu + nv), \quad (1.7)$$

donde  $k$  es la curvatura principal en el punto  $\nu$ -umbílico y  $m, n$  son números reales arbitrarios.

*Idea de la prueba.* Desarrollando las coordenadas del campo normal  $\nu$  en series de Taylor podemos escribir

$$\nu(u, v) = \sum_{i=1}^4 (l_i + m_i u + n_i v + \mathcal{O}_i(2)) \mathbf{e}_i,$$

donde  $\mathcal{O}_i(r)$  denota el desarrollo de los términos de orden  $r$ . Por una parte, la condición inicial  $\nu(0, 0) = (0, 0, 1, 0)$  implica que  $l_1 = l_2 = l_4 = 0$ ,  $l_3 = 1$ . Por otra parte la condición de perpendicularidad de  $\nu(u, v)$  con respecto a  $\mathbf{x}_u(u, v)$  y  $\mathbf{x}_v(u, v)$  implica que

$$m_1 = -k, \quad n_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = -k.$$

Además, como  $\nu(u, v)$  es unitario, se obtiene  $m_3 = 0$ ,  $n_3 = 0$ .

Finalmente, es fácil probar por inducción que dados los coeficientes de orden  $j$  de  $\mathcal{O}_4(j)$ , resulta que los coeficientes de orden  $j + 1$  de

$$\mathcal{O}_1(j + 1), \mathcal{O}_2(j + 1) \text{ y } \mathcal{O}_3(j + 1)$$

están determinados por el  $(j + 1)$ -jet de los productos

$$\langle \mathbf{x}_u(u, v), \nu(u, v) \rangle, \langle \mathbf{x}_v(u, v), \nu(u, v) \rangle,$$

y de la diferencia  $\|\nu(u, v)\|^2 - 1$ , respectivamente. De este modo se ve que los parámetros  $m_4$  y  $n_4$  pueden tomar cualquier valor real. ■

Usando (1.6) y (1.7) encontramos los coeficientes de la ecuación (1.5) para obtener finalmente el 1-jet de la ecuación diferencial de las  $\nu$ -líneas de curvatura,

$$A_1(u, v) dv^2 + B_1(u, v) du dv + C_1(u, v) du^2 = 0, \quad (1.8)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(u, v) &= d u + b v, \\ B_1(u, v) &= (a - b + (\alpha - \gamma) m) u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) v, \\ C_1(u, v) &= -d u - b v. \end{aligned}$$

## 1.2 Configuraciones Darbouxianas

Sea  $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  una inmersión de clase  $C^\infty$  de la superficie local  $M$  de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^4$ . Consideremos el haz proyectivo  $PI(M)$  sobre  $\mathcal{I}(M)$  definido por  $T\mathcal{I}(M) - \{0\}$ , el haz tangente sin la sección nula, módulo la identificación de dos elementos  $(x, v)$  y  $(y, w)$  si  $x = y$ , y  $v = \lambda w$  para algún  $\lambda \neq 0$ . Denotemos por  $\Pi$  la proyección de  $PI(M)$  sobre  $\mathcal{I}(M)$ .

Si  $\mathcal{I}(p)$  es un punto  $\nu$ -umbílico en  $\mathcal{I}(M) \subset \mathbb{R}^4$ , entonces existe una vecindad  $V(\mathcal{I}(p))$  con una parametrización canónica (1.6) identificando  $\mathcal{I}(p)$  con el origen de  $\mathbb{R}^4$ . Usando esta parametrización canónica, el espacio  $PI(M)$  puede parametrizarse por dos sistemas de coordenadas:

$$(u, v; q = du/dv), \text{ y } (u, v; p = dv/du).$$

En estos términos la ecuación de las  $\nu$ -líneas de curvatura (1.8) puede ser usada para definir en  $PI(M)$  una superficie en el sistema de coordenadas  $(u, v, p)$  como sigue.

**Definición 1.2.1.** Sea  $S(\mathcal{I}, \nu) = \mathcal{F}^{-1}(0)$ , donde  $\mathcal{F} : PI(M) \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$\mathcal{F}(u, v, p) = A_1(u, v) p^2 + B_1(u, v) p + C_1(u, v),$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, v; p) = & (d u + b v) p^2 \\ & + ((a - b + (\alpha - \gamma) m) u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) v) p \\ & - (d u + b v). \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{U}$  el conjunto de los puntos  $\nu$ -umbilicales de  $\mathcal{I}(M)$ . En el complemento de  $\Pi^{-1}(\mathcal{U})$ , se tiene que  $S(\mathcal{I}, \nu)$  es una superficie regular en  $PI(M)$ . De hecho, resulta ser un cubriente doble de  $\mathcal{I}(M) - \mathcal{U}$ . Si  $0 \in \mathbb{R}^4$  es un punto umbílico, la fibra  $\Pi^{-1}(0)$  está contenida en  $S(\mathcal{I}, \nu)$ .

**Condición (T).** El par  $(\mathcal{I}, \nu)$  satisface la **condición de transversalidad** en el origen si las curvas definidas por los ceros de las funciones  $A_1(u, v)$  y  $B_1(u, v)$  se intersectan en el origen transversalmente.

La condición de transversalidad es equivalente a decir que  $S(\mathcal{I}, \nu)$  es regular también en toda la fibra  $\Pi^{-1}(0)$ . Es claro que esta propiedad es independiente de la parametrización.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\hat{\mathcal{F}}$  el campo vectorial definido en  $PI(M)$  por

$$\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_p \frac{\partial}{\partial u} + p \mathcal{F}_p \frac{\partial}{\partial v} + (-\mathcal{F}_u - p \mathcal{F}_v) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.9)$$

Este campo tiene las siguientes propiedades.

1.  $\hat{\mathcal{F}}$  es tangente a  $S(\mathcal{I}, \nu)$ .

Como  $\nabla\mathcal{F}$  es ortogonal a la superficie  $\mathcal{F}^{-1}(0) = S(\mathcal{I}, \nu)$ , lo anterior se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \langle \nabla\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}} \rangle &= \mathcal{F}_u\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_v p\mathcal{F}_p + \mathcal{F}_p(-\mathcal{F}_u - p\mathcal{F}_v) \\ &= \mathcal{F}_u\mathcal{F}_p + p\mathcal{F}_v\mathcal{F}_p - \mathcal{F}_p\mathcal{F}_u - p\mathcal{F}_p\mathcal{F}_v \\ &= 0. \end{aligned}$$

**2. Si restringimos el campo  $\hat{\mathcal{F}}$  a la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$ , entonces  $\Pi_\star(\hat{\mathcal{F}}(u, v, p))$  se anula solamente en el origen  $(0, 0)$ .**

Observamos primero que

$$\Pi_\star(\hat{\mathcal{F}}(u, v, p)) = (\mathcal{F}_p(u, v, p), p\mathcal{F}_p(u, v, p)) = \mathcal{F}_p(u, v, p) (1, p). \quad (1.10)$$

Ahora, como

$$\mathcal{F}_p(u, v, p) = 2p(d u + b v) + u(a - b + (\alpha - \gamma)m) + v(-c + d + (\alpha - \gamma)n), \quad (1.11)$$

vemos que  $\mathcal{F}_p(0, 0, p) = 0$  y por lo tanto  $\Pi_\star(\hat{\mathcal{F}}(0, 0, p)) = (0, 0)$ .

Inversamente, si  $\Pi_\star(\hat{\mathcal{F}}(u, v, p)) = (0, 0)$  para  $(u, v, p) \in S(\mathcal{I}, \nu)$ , entonces de (1.10) resulta  $\mathcal{F}_p(u, v, p) = 0$ , esto es,

$$2p(d u + b v) + u(a - b + (\alpha - \gamma)m) + v(-c + d + (\alpha - \gamma)n) = 0 \quad (1.12)$$

y como  $(u, v, p) \in S(\mathcal{I}, \nu)$ , tenemos además que  $\mathcal{F}(u, v, p) = 0$ , esto es,

$$(d u + b v)p^2 + ((a - b + (\alpha - \gamma)m)u + (-c + d + (\alpha - \gamma)n)v)p - (d u + b v) = 0.$$

Sustituyendo (1.11) en (1.12) resulta

$$\begin{aligned} (d u + b v)p^2 + (-2p(d u + b v))p - (d u + b v) &= 0, \\ -p^2(d u + b v) - (d u + b v) &= 0, \\ -(d u + b v)(p^2 + 1) &= 0, \end{aligned}$$

de donde  $d u + b v = 0$  para todo  $d, b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $(u, v) = (0, 0)$ .

**3. Si  $(u, v) \neq (0, 0)$  y  $(u, v, p) \in S(\mathcal{I}, \nu)$  entonces  $\Pi_* \left( \hat{\mathcal{F}}(u, v, p) \right)$  genera la línea de curvatura con la dirección  $(1, p)$ .**

Si  $(u, v, p) \in S(\mathcal{I}, \nu)$  entonces  $(u, v, p = \frac{dv}{du})$  satisface la ecuación diferencial de las líneas de curvatura, esto es,  $p$  es la pendiente de la tangente a la línea de curvatura en  $(u, v)$ . Por lo tanto  $(1, p)$  es la dirección de la línea de curvatura en  $(u, v)$ . Ahora, como ya vimos en el punto anterior,  $\Pi_* \left( \hat{\mathcal{F}}(u, v, p) \right) = \mathcal{F}_p(u, v, p) (1, p)$ , de donde se obtiene la afirmación.

**4. Las singularidades del campo  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\Pi^{-1}(0, 0)$  ocurren donde se anula el polinomio  $(-\mathcal{F}_u - p\mathcal{F}_v)(p)$ .**

Como

$$\mathcal{F}_p(u, v, p) = 2p(d u + b v) + u(a - b + (\alpha - \gamma) m) + v(-c + d + (\alpha - \gamma) n),$$

resulta  $\mathcal{F}_p(0, 0, p) = 0$ , de modo que las dos primeras funciones componentes del campo  $\hat{\mathcal{F}}$  se anulan en  $(0, 0, p)$  para toda  $p$ , mientras que la tercera componente resulta independiente de  $u$  y de  $v$ , pues

$$\begin{aligned} (-\mathcal{F}_u - p\mathcal{F}_v)(u, v, p) &= d - (a - 2b + (\alpha - \gamma) m)p - (2d - c + (\alpha - \gamma) n) p^2 \\ &\quad - bp^3, \end{aligned}$$

y se anula solamente si  $p$  es raíz del polinomio

$$f(p) = bp^3 + (2d - c + (\alpha - \gamma) n) p^2 + (a - 2b + (\alpha - \gamma) m) p - d, \quad (1.13)$$

el que llamaremos *polinomio separatriz* del par  $(\mathcal{I}, \nu)$ . Hacemos notar que éste es un polinomio de grado 3. En consecuencia, habrá una o tres singularidades de coordenadas  $(0, 0, p_i)$ , de acuerdo al número de raíces reales  $p_i$  de este polinomio.

**5. La parte lineal del campo  $\hat{\mathcal{F}}|S(\mathcal{I}, \nu)$  en las singularidades  $(0, 0, p_i)$  tiene los siguientes valores propios:**

$$\begin{aligned} \beta_2(p_i) &= 2b - a - (\alpha - \gamma)m + 2(c - 2d - (\alpha - \gamma)n)p_i - 3bp_i^2, \\ \beta_3(p_i) &= a - b + (\alpha - \gamma)m + (3d - c + (\alpha - \gamma)n)p_i + 2bp_i^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Al evaluar la matriz Jacobiana del campo  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $(0, 0, p_i)$  obtenemos una matriz de  $3 \times 3$  cuyos valores propios resultan ser  $\beta_1(p_i) = 0$ , y  $\beta_2(p_i)$ ,  $\beta_3(p_i)$  dados por (1.14) con los vectores propios correspondientes

$$\begin{aligned}\xi_1 &= ((c - d - 2bp_i + n(\gamma - \alpha)) / (a - b + 2dp_i + m(\alpha - \gamma)), 1, 0), \\ \xi_2 &= (1, p_i, 0), \\ \xi_3 &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Ahora, si  $(0, 0, p_i)$  es una singularidad de  $\hat{\mathcal{F}}|S(\mathcal{I}, \nu)$ , entonces, del punto anterior,  $p_i$  es raíz del polinomio separatriz, y por lo tanto,

$$f(p_i) = -(-\mathcal{F}_u - p_i\mathcal{F}_v)(p_i) = (\mathcal{F}_u + p_i\mathcal{F}_v)(p_i) = 0.$$

Así,

$$\langle \nabla \mathcal{F}(0, 0, p_i), \xi_2 \rangle = \langle (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_p)(0, 0, p_i), (1, p_i, 0) \rangle = (\mathcal{F}_u + p_i\mathcal{F}_v)(p_i) = 0,$$

de ahí que  $\xi_2 \in T_{(0,0,p_i)}S(\mathcal{I}, \nu)$ .

Además,

$$\langle \nabla \mathcal{F}(0, 0, p_i), \xi_3 \rangle = \langle (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_p)(0, 0, p_i), (0, 0, 1) \rangle = \mathcal{F}_p(0, 0, p_i) = 0.$$

Por lo tanto  $\xi_3 \in T_{(0,0,p_i)}S(\mathcal{I}, \nu)$ . De manera que los vectores propios  $\xi_2, \xi_3$  generan el plano tangente a la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$  en  $(0, 0, p_i)$ .

## 6. Las raíces reales del polinomio separatriz corresponden a las direcciones de aproximación principal al punto umbílico.

Una *dirección de aproximación principal* a un punto umbílico es una dirección  $r$  tal que existe una línea de curvatura que contenga al umbílico en su cerradura y cuyo campo de direcciones tangentes tenga a  $r$  como dirección límite en el punto umbílico.

Si  $v = pu + \mathcal{O}(u^2)$  es una línea de curvatura, entonces satisface la ecuación diferencial (1.8),

$$\begin{aligned}(d u + b v) \left( \frac{dv}{du} \right)^2 + [(a - b + (\alpha - \gamma) m) u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) v] \frac{dv}{du} \\ - (d u + b v) = 0,\end{aligned}$$

de donde resulta que, a primer orden,

$$(d u + b p u) p^2 + [(a - b + (\alpha - \gamma) m) u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) p u] p - (d u + b p u) = 0,$$

esto es,

$$d p^2 u + b p^3 u + (a - b + (\alpha - \gamma) m) p u + (-c + d + (\alpha - \gamma) n) p^2 u - d u - b p u = 0,$$

y, finalmente,

$$b p^3 + (2d - c + (\alpha - \gamma) n) p^2 + (a - 2b + (\alpha - \gamma) m) p - d = 0,$$

es decir,  $f(p) = 0$ , donde  $f$  es el polinomio separatriz.

Inversamente, si  $f(p) = 0$ , entonces, por el punto 4,  $(0, 0, p)$  es una singularidad de  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$ , y por el punto 5,  $(1, p, 0) \in T_{(0,0,p)} S(\mathcal{I}, \nu)$ . Por lo tanto, existe una curva  $\gamma \in S(\mathcal{I}, \nu)$  tal que  $\gamma' = (1, p, 0)$  en  $(0, 0, p)$ . Proyectando esta curva obtenemos que  $\Pi(\gamma)$  es una línea de curvatura en la dirección del vector  $(1, p)$  en el punto umbílico.

Las propiedades 1 a 6 pueden ser utilizadas para realizar una resolución de las singularidades determinadas por los puntos  $\nu$ -umbílicos de la inmersión de la superficie local  $M$  en  $\mathbb{R}^4$ .

Esta resolución se establece analizando los puntos singulares hiperbólicos del campo vectorial  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  de manera análoga al análisis para superficies en  $\mathbb{R}^3$  realizado por Gutierrez y Sotomayor en [12].

**Definición 1.2.3.** Las proyecciones de las separatrices del campo vectorial  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  en una singularidad de tipo silla de este campo en  $(0, 0, p_i)$  determinadas por el vector  $(1, p_i, 0)$  del plano tangente  $T_{(0,0,p_i)} S(\mathcal{I}, \nu)$  serán llamadas *separatrices umbilicales*.

**Definición 1.2.4.** Un punto umbílico aislado de la ecuación de líneas de curvatura (1.5),

$$A(u, v) dv^2 + B(u, v) du dv + C(u, v) du^2 = 0,$$

es *simple* si es un mínimo no degenerado de la función  $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H(u, v) = B^2(u, v) - 4A(u, v)C(u, v).$$

Como esta función  $H$  depende de funciones reales de dos variables y de sus derivadas, observamos que esta definición es invariante bajo cambios de coordenadas, ya que la condición de ser un mínimo no degenerado de una función es invariante bajo estos cambios.

Veamos cómo expresar la condición de que el origen sea un punto umbílico simple en términos de los coeficientes de primer orden del desarrollo de Taylor de las funciones  $A$ ,  $B$ , y  $C$ .

Las primeras derivadas parciales de la función  $H$  son las siguientes.

$$\begin{aligned} H_u &= 2B(u, v)B_u - 4(A(u, v)C_u + C(u, v)A_u), \\ H_v &= 2B(u, v)B_v - 4(A(u, v)C_v + C(u, v)A_v). \end{aligned}$$

Las segundas derivadas parciales de  $H$  resultan ser

$$\begin{aligned} H_{uu} &= 2(BB_{uu} + B_u^2) - 4(AC_{uu} + C_uA_u + CA_{uu} + A_uC_u), \\ H_{uv} &= 2(BB_{uv} + B_uB_v) - 4(AC_{uv} + C_uA_v + CA_{uv} + A_uC_v), \\ H_{vv} &= 2(BB_{vv} + B_v^2) - 4(AC_{vv} + C_vA_v + CA_{vv} + A_vC_v). \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} a_1 &= A_u(0, 0), \quad a_2 = A_v(0, 0), \quad b_1 = B_u(0, 0), \quad b_2 = B_v(0, 0), \\ c_1 &= C_u(0, 0), \quad c_2 = C_v(0, 0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Entonces, como  $A(0, 0) = B(0, 0) = C(0, 0) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} H_{uu}(0, 0) &= 2b_1^2 - 4(c_1a_1 + a_1c_1) = 2(b_1^2 - 4a_1c_1), \\ H_{uv}(0, 0) &= 2b_1b_2 - 4(c_1a_2 + a_1c_2) \\ &= 2(b_1b_2 - 2c_1c_2 - 2a_2c_1) \\ H_{vv}(0, 0) &= 2b_2^2 - 4(c_2a_2 + a_2c_2) = 2(b_2^2 - 4a_2c_2). \end{aligned}$$

Estos cálculos demuestran la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.5.** El origen es un punto umbílico simple de la ecuación diferencial de líneas de curvatura

$$(a_1u + a_2v) dv^2 + (b_1u + b_2v) du dv + (c_1u + c_2v) du^2 = 0$$

si se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$b_1^2 - 4a_1c_1 > 0, \quad (1.16)$$

y

$$(b_1^2 - 4a_1c_1) (b_2^2 - 4a_2c_2) - (b_1b_2 - 2a_1c_2 - 2a_2c_1)^2 > 0. \quad (1.17)$$

**Demostración.** Aplicando el criterio del Hessiano a la función  $H$  con los cálculos desarrollados arriba se obtiene que el origen es un mínimo no degenerado de  $H$ . ■

Usando las inecuaciones (1.16) y (1.17), la parametrización canónica de la superficie (1.6) y los valores de  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  y  $c_2$  definidos en (1.15) es inmediato verificar que, si  $p \in M$  es un punto  $\nu$ -umbílico aislado, entonces  $p$  será *simple* si se cumple que

$$4d^2 + (a - b + (\alpha - \gamma)m)^2 > 0, \quad (1.18)$$

$$((a - b)b + (c - d)d + (\alpha - \gamma)(bm - dn))^2 > 0. \quad (1.19)$$

Los casos que están en la frontera de los conjuntos abiertos definidos por la clase Darbouxiana son interesantes desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones. Estos casos serán estudiados en esta Tesis.

**Definición 1.2.6.** Sea  $p$  un punto  $\nu$ -umbílico simple de una superficie local  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  y  $f$  el polinomio separatriz del par  $(\mathcal{I}, \nu)$ , donde  $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  es la inmersión en  $p$  y  $\nu$  es un campo normal umbilical. Entonces se dice que el punto  $p$  es de tipo

- (a) *Darbouxiano* si  $f$  tiene solamente raíces simples y se cumple la condición (T).
- (b)  $\mathbf{D}_{12}$  si  $f$  tiene una raíz simple y una doble.
- (c)  $\tilde{\mathbf{D}}_1$  si  $f$  tiene una raíz triple.

Existen tres diferentes tipos topológicos de puntos umbílicos Darbouxianos de acuerdo a los siguientes casos.

**Caso  $D_1$ .** *El polinomio separatriz tiene una única raíz real  $p_1$  y los valores propios (1.14) son de signos opuestos para esta raíz.*

En este caso la singularidad del campo  $\hat{\mathcal{F}}$  restringido a la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$  en  $(0, 0, p_1)$  es de tipo silla y existe una única dirección de aproximación principal al punto umbílico siendo ésta la separatriz umbilical. La proyección nos da la configuración principal alrededor del punto umbílico: un sector hiperbólico rodeando la separatriz umbilical, como se muestra en la Figura 1, donde sólo se ilustra una hoja de la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$ .

**Caso  $D_2$ .** *El polinomio separatriz tiene tres raíces reales y distintas  $p_i$  y los valores propios (1.14) definen dos sillas y un nodo del campo  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $p_1, p_3$ , y  $p_2$  respectivamente, con  $p_1 < p_2 < p_3$ .*

En este caso la singularidad del campo  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  de tipo nodo se encuentra entre dos sillas y existen tres direcciones de aproximación principal al punto umbílico, aunque sólo dos separatrices umbilicales delimitando un sector parabólico y un sector hiperbólico. Ver la Figura 1.

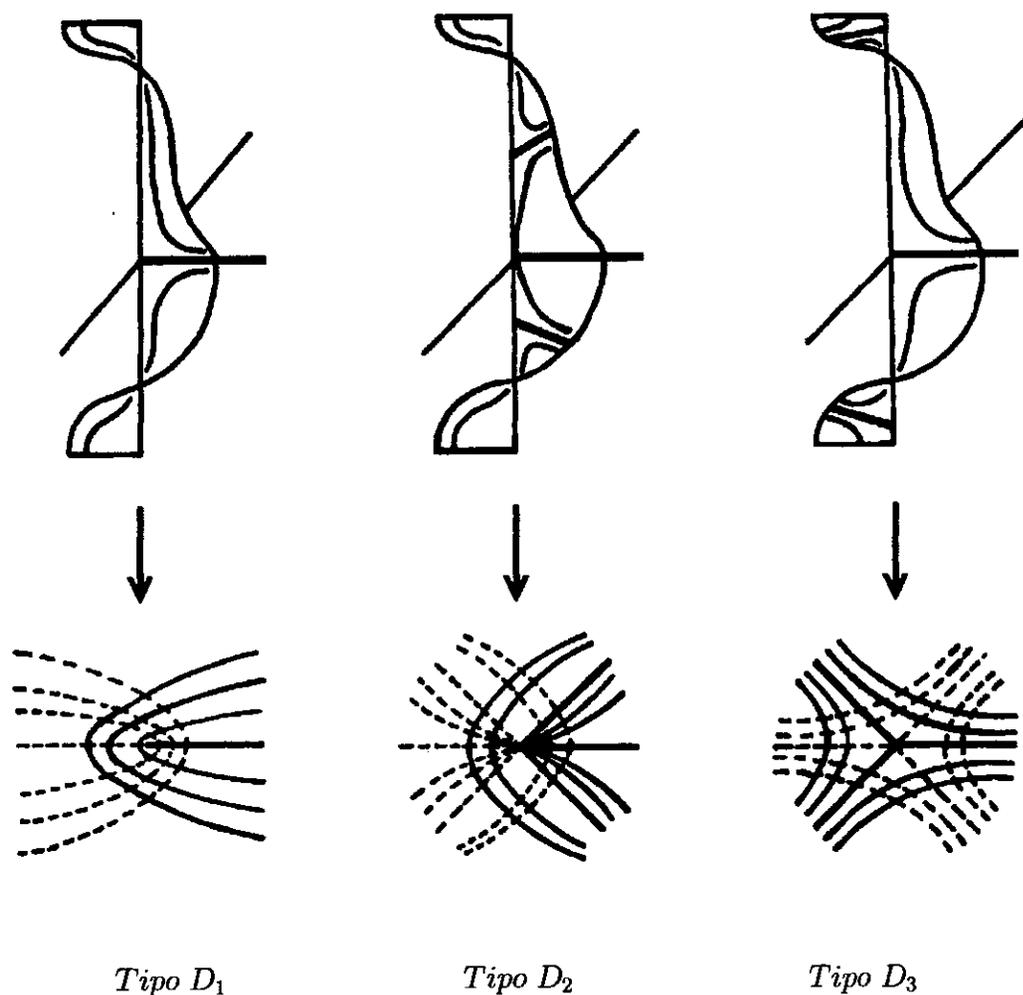
**Caso  $D_3$ .** *El polinomio separatriz tiene tres raíces reales y distintas  $p_i$  y los valores propios (1.14) definen tres sillas del campo  $\hat{\mathcal{F}}$ .*

En este caso las tres singularidades del campo  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  son de tipo silla y existen tres direcciones de aproximación principal al punto umbílico que son también separatrices umbilicales delimitando tres sectores hiperbólicos. Ver la Figura 1.

Como los tipos Darbouxianos están definidos por singularidades hiperbólicas del campo  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  en el eje  $p$  que tienen el mismo índice para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , todos los tipos  $D_i$  son topológicamente equivalentes, esto es, para cada tipo  $D_i$ , existe un homeomorfismo que manda la configuración de un  $D_i$  en la configuración de otro  $D_i$ , para la misma  $i$ .

Además, como las condiciones Darbouxianas dependen en última instancia de los coeficientes de orden 3 del desarrollo de Taylor de funciones suficientemente diferenciables, observamos que si dos superficies son  $C^3$ -cercanas, entonces estos coeficientes estarán cercanos y estas condiciones se seguirán cumpliendo. De manera que las condiciones Darbouxianas son abiertas en la topología  $C^3$ . La estabilidad estructural de las configuraciones principales alrededor de un punto umbílico Darbouxiano se sigue directamente de la hiperbolicidad de las singularidades del campo vectorial  $\hat{\mathcal{F}}$  restringido a la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$ . Un problema abierto es establecer condiciones necesarias

para la estabilidad estructural de configuraciones principales en general ([12], Capítulo 4). A este respecto Guíñez en [7] obtiene una caracterización de las ecuaciones diferenciales cuadráticas llamadas *positivas*, definidas en una 2-variedad diferenciable, orientada y compacta cuya configuración es estructuralmente estable en la topología  $C^2$ .



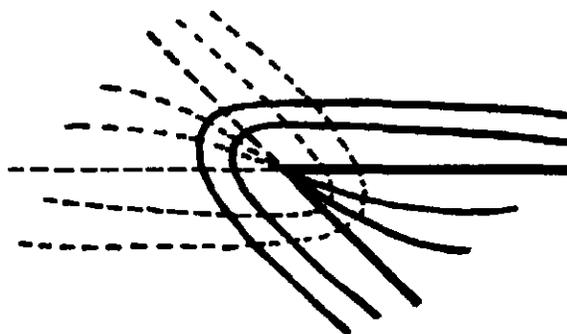
**Fig. 1.** Configuraciones Darbouxianas.

Allí se muestra que existe cierto tipo de ecuaciones con una configuración estable fuera de lo que aquí se denomina la clase Darbouxiana. Sin

embargo, estas ecuaciones estables no Darbouxianas no pueden provenir de la geometría de las configuraciones principales de superficies. Hacemos notar que las configuraciones Darbouxianas son invariantes bajo rotaciones del plano  $uv$ . (Ver [15] Proposición 3.8). Además, Ramírez-Galarza y Sánchez-Bringas probaron que estos tipos son genéricos ([15], Teorema 3.9).

La transversalidad de la condición (T) junto con el hecho de que las condiciones Darbouxianas son  $C^3$ -abiertas implican que los tipos  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dependen continuamente de pequeñas perturbaciones de clase  $C^3$  de  $(\mathcal{I}, \nu)$ . Las separatrices umbilicales asociadas dependen continuamente sobre partes compactas, como lo hacen las separatrices de tipo silla de sus levantamientos por  $\Pi^{-1}$  a la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$ .

Los casos que están en la frontera entre los tipos  $D_1$  y  $D_2$  se pueden pensar como casos límite al variar continuamente las condiciones  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Así, la configuración del tipo  $D_{12}$  se obtiene al variar las condiciones del tipo  $D_2$  hasta el límite en que una de las singularidades de tipo silla del campo  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  coincide con la singularidad de tipo nodo, de manera que surge una singularidad de tipo silla-nodo en el eje  $p$  en  $S(\mathcal{I}, \nu)$ , correspondiendo a la raíz doble del polinomio separatriz. Esto se proyecta en el colapso de una mitad del sector parabólico de la configuración principal  $D_2$ . Ver la Figura 2.



**Fig. 2.** Configuración principal del tipo  $D_{12}$ .

Análogamente, la configuración del tipo  $\tilde{D}_1$  se obtiene al variar las condiciones del tipo  $D_{12}$  hasta el límite en que las dos singularidades, una silla y una silla-nodo del campo  $\hat{\mathcal{F}} | S(\mathcal{I}, \nu)$  coinciden, de manera que surge una única singularidad de tipo silla en el eje  $p$  en  $S(\mathcal{I}, \nu)$ , correspondiendo a la

raíz triple del polinomio separatriz, colapsándose la mitad restante del sector parabólico de la configuración principal  $D_{12}$ . El resultado es una única separatriz umbilical rodeada de un sector hiperbólico, tal como en el caso  $D_1$ .

## 2 Diagramas de Bifurcación

### 2.1 El caso general

Consideremos una superficie local arbitraria  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  con un punto  $\nu$ -umbílico aislado  $p$ . Genéricamente se tiene que cualquier perturbación de la dirección normal  $\nu \in (T_p M)^\perp$  hace que  $p$  deje de ser umbílico. De modo que supondremos esta dirección fija y consideraremos su variación únicamente en el 1-jet del campo vectorial normal  $\nu$  conservando la condición de definir un punto  $\nu$ -umbílico aislado en  $p$ . Denotemos con  $\mathcal{N}_1$  el conjunto de los 1-jet de los campos vectoriales normales  $\nu$ -umbilicales en  $p$ .

La forma normal de  $\nu \in \mathcal{N}_1$  dada en (1.7) nos permite identificar  $\mathcal{N}_1$  con  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $(m, n)$  las coordenadas de un elemento  $\nu$  de  $\mathcal{N}_1$ . Entonces, dada la superficie local  $M$  tenemos que la configuración principal alrededor del punto  $\nu$ -umbílico aislado  $p \in M$  depende de estos parámetros  $m, n$  como vimos en el Capítulo 1. El objetivo de este Capítulo es describir el cambio en estas configuraciones principales al variar los parámetros  $m, n$ .

Dividiremos este estudio en dos secciones. En la primera sección analizaremos el caso general en que los coeficientes de la parametrización canónica (1.6) de la superficie local  $M$  satisfacen  $bd \neq 0$ , y  $\alpha \neq \gamma$ . Los casos en que  $d = 0$  o  $b = 0$  serán desarrollados en la segunda sección. Por otro lado, el caso en que  $\alpha = \gamma$  representa la clase de superficies que son umbilicales respecto a cualquier campo vectorial normal y no tienen interés en este análisis.

Dada una parametrización canónica (1.6) de la superficie local  $M$  alrededor de  $p$ , vemos que para  $d \neq 0$ , se satisface (1.18) para todo  $(m, n) \in \mathcal{N}_1$ . Así, para obtener el conjunto de los campos  $\nu \in \mathcal{N}_1$  que definen puntos  $\nu$ -umbílicos no simples para una superficie local *fija*, sólo nos resta ver dónde no se satisface la segunda inecuación (1.19). Esto último ocurre para los puntos  $(m, n) \in \mathcal{N}_1$  que satisfacen

$$(a - b)b + (c - d)d + (\alpha - \gamma)(bm - dn) = 0.$$

De este modo obtenemos que el conjunto de los campos  $\nu \in \mathcal{N}_1$  que definen puntos  $\nu$ -umbílicos *no simples* está determinado por una línea recta

$L$  en el plano  $\mathcal{N}_1$  de coordenadas  $(m, n)$  determinada por la ecuación

$$n = \left(\frac{b}{d}\right)m + \frac{(a-b)b + (c-d)d}{(\alpha-\gamma)d}, \quad (\alpha-\gamma)d \neq 0. \quad (2.1)$$

A continuación damos el enunciado preciso de nuestro resultado principal.

**Teorema 2.1.1.** Sean  $\nu \in \mathcal{N}_1$  con coordenadas  $(m, n)$  y  $d \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . El conjunto de bifurcación de codimensiones uno y dos, de los campos  $\nu$ -umbilicales en el espacio  $\mathcal{N}_1$  es la línea  $L$  y una curva algebraica real  $\Gamma$  que tiene dos componentes conexas. Una de estas componentes tiene un único punto singular de tipo cúspide y la otra es una curva difeomorfa a una línea. El punto singular de  $\Gamma$  es de tipo  $\tilde{D}_1$  de codimensión dos y los puntos regulares de  $\Gamma$  son de tipo  $D_{12}$  de codimensión uno, excepto en el único punto de tangencia  $T$  con la línea  $L$ . Ver la Figura 3.

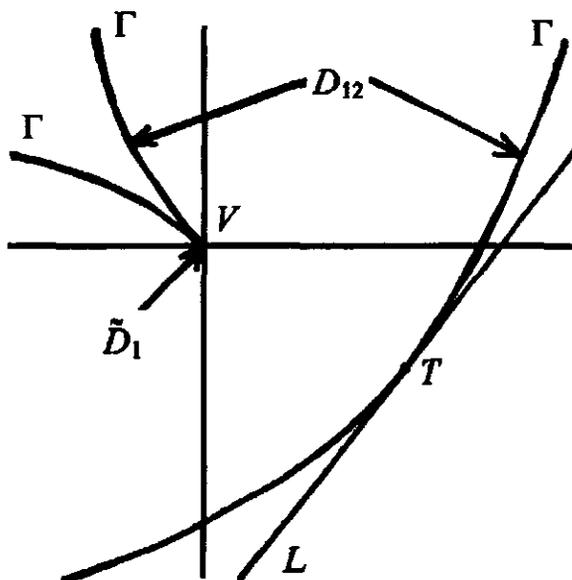


Fig. 3. Conjunto de bifurcación en el espacio  $\mathcal{N}_1$ .

**Demostración.** Presentamos la prueba en tres secciones. En la primera obtenemos una descripción conveniente del conjunto de puntos de los tipos

$D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$  en el espacio  $\mathcal{N}_1$ . Este conjunto consiste de una curva algebraica real  $\Gamma$  de grado cuatro. En la segunda probamos un lema que describe las propiedades topológicas de la curva  $\Gamma$  establecidas en el enunciado del teorema. En la tercera analizamos los tipos de configuraciones principales que ocurren a lo largo de la curva  $\Gamma$ . Realizamos algunos cálculos en MATHEMATICA para obtener expresiones precisas en esta prueba.

### 2.1.1 El conjunto de puntos de tipo $D_{12}$ y $\tilde{D}_1$

En esta parte determinaremos el lugar geométrico en el espacio  $\mathcal{N}_1$  donde se tienen bifurcaciones de los tipos  $D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$ .

Recordemos que los tipos  $D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$  están caracterizados por las raíces múltiples del polinomio separatriz (1.13) de acuerdo a la Definición 1.2.6 como sigue: raíces triples corresponden al tipo  $\tilde{D}_1$ , y cuando existe una raíz simple y una doble se tiene el tipo  $D_{12}$ .

Como las raíces múltiples de un polinomio ocurren en donde se anula su discriminante, debemos determinar el discriminante de (1.13) como función de los parámetros  $m, n$  en un sistema de coordenadas adecuado. Para esto, denotemos con  $\mathcal{P}$  el conjunto de los polinomios separatrices escritos en la forma

$$f(p) = p^3 + \lambda_2 p + \lambda_1.$$

Podemos identificar  $\mathcal{P}$  con  $\mathbb{R}^2$  dándole coordenadas  $(\lambda_1, \lambda_2)$  a un elemento de  $\mathcal{P}$ .

Consideremos ahora la función

$$F : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{P}, F(m, n) = (\lambda_1, \lambda_2), \quad (2.2)$$

definida por

$$\lambda_1 = \frac{1}{27b^3} \{ (2d - c + (\alpha - \gamma)n) (2(2d - c + (\alpha - \gamma)n))^2 \quad (2.3)$$

$$- 9b(a - 2b + (\alpha - \gamma)m) - 27b^2 d \},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3b^2} \{ 3b(a - 2b + (\alpha - \gamma)m) - (2d - c + (\alpha - \gamma)n)^2 \}. \quad (2.4)$$

El cambio de parámetros definido por la función  $F$  es la composición  $F = F_2 \circ F_1$ , donde  $F_1 : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$  está definida por

$$F_1(m, n) = (c_0, c_1, c_2, c_3),$$

donde  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , son los coeficientes de los términos de orden  $i$  del polinomio separatriz (1.13), esto es,

$$\begin{aligned} c_0 &= -d, \\ c_1 &= a - 2b + (\alpha - \gamma)m, \\ c_2 &= 2d - c + (\alpha - \gamma)n, \\ c_3 &= b. \end{aligned}$$

$F_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{P}$  está definida por

$$F_2(c_0, c_1, c_2, c_3) = \left( \frac{c_2(2c_2^2 - 9c_1c_3) + 27c_0c_3^2}{27c_3^3}, \frac{3c_1c_3 - c_2^2}{3c_3^2} \right).$$

La función  $F_2$  corresponde a la transformación de *Vietà* que elimina el término cuadrático del polinomio separatriz después de hacerlo mónico, dándole la forma  $f(p) = p^3 + \lambda_2p + \lambda_1$  a este polinomio.

Entonces, el discriminante del polinomio separatriz (1.13) está dado por

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = 4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2. \quad (2.5)$$

De esta forma vemos que el subconjunto de  $\mathcal{N}_1$  donde ocurren las raíces múltiples está determinado por la imagen inversa

$$\Gamma = F^{-1}(C) \quad (2.6)$$

del subconjunto  $C$  de  $\mathcal{P}$  donde se anula el discriminante,

$$C = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P} \mid \Delta(\lambda_1, \lambda_2) = 0\}. \quad (2.7)$$

**Nota 2.1.1.** La función  $F$  dada por (2.2) es diferenciable casi en todas partes, cuyo jacobiano

$$J = \frac{1}{3b^3} (\gamma - \alpha)^2 (a - 2b + (\alpha - \gamma)m),$$

se anula solamente en la línea  $m = (a - 2b) / (\gamma - \alpha)$ . De modo que  $F$  es un difeomorfismo local fuera de su conjunto singular,

$$S_1(F) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m = \frac{a - 2b}{\gamma - \alpha} \right\}.$$

### 2.1.2 Topología de la curva $\Gamma$

El subconjunto  $\Gamma$  de  $\mathcal{N}_1$  es una curva algebraica real definida por la ecuación polinomial  $4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0$  con  $\lambda_1, \lambda_2$  dadas por (2.3) y (2.4) respectivamente. Denotemos esta ecuación por  $f(m, n) = 0$ .

Es un hecho conocido que una curva algebraica real  $\Gamma$  definida por una ecuación polinomial de grado  $\geq 2$  en dos variables consiste a lo sumo de un número finito de componentes. Más precisamente, cuando la curva no tiene singularidades y es real, cada una de sus componentes no acotadas es homeomorfa a una línea y cada componente acotada es homeomorfa a una circunferencia. Por otro lado, si la curva  $\Gamma$  es real singular y  $\Sigma$  es el conjunto de sus puntos singulares reales, entonces  $\Gamma - \Sigma$  es una 1-variedad diferenciable. (Ver, por ejemplo, [16].)

En esta parte describimos las propiedades topológicas de la curva  $\Gamma$ .

**Lema 2.1.2.** *La curva algebraica real  $\Gamma$  definida en (2.6) tiene dos componentes conexas. Una de ellas tiene una única singularidad de tipo cúspide y la otra es una curva difeomorfa a una línea.*

**Demostración del lema.** Consideremos la translación

$$(m, n) \mapsto (x + m_0, y + n_0) \quad (2.8)$$

que manda el origen al punto  $V = (m_0, n_0)$ , donde

$$m_0 = \frac{a - 2b - 3(bd^2)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, \quad y \quad n_0 = \frac{2d - c + 3(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha}. \quad (2.9)$$

Entonces la curva algebraica  $\Gamma = F^{-1}(C)$  definida por (2.6) se escribe en el nuevo sistema de coordenadas  $(x, y)$  como

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) = 0, \quad (2.10)$$

donde las  $f_i(x, y)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , son polinomios homogéneos de grado  $i$  dados por

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= 27(bd)^{2/3} \left( \sqrt[3]{bx} + \sqrt[3]{dy} \right)^2, \\ f_3(x, y) &= 2(\alpha - \gamma) \left( 2 \left( \sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy} \right)^3 + 9(bd)^{1/3} \left( \sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy} \right) xy \right), \\ f_4(x, y) &= -(\gamma - \alpha)^2 x^2 y^2. \end{aligned}$$

De esto vemos que el origen es un punto singular doble de la curva (2.10), y la línea

$$\sqrt[3]{b}x + \sqrt[3]{d}y = 0 \quad (2.11)$$

es una línea tangente doble (y la única tangente) en el origen. Además, la rotación del plano  $xy$  de un ángulo  $\theta = -\arctan \sqrt[3]{b/d}$  transforma (2.10) en  $\tilde{f}(x, y) = 0$ , que define una curva cuya línea tangente en el origen es el eje horizontal, y tal que

$$\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial x^3}(0, 0) = \frac{24bd(\gamma - \alpha)}{[b^{2/3} + d^{2/3}]^{3/2}} \neq 0.$$

Estas propiedades implican que la curva  $\Gamma$  tiene un punto cúspide en  $V$ . (Ver [5], p. 82.)

Ahora, para describir las componentes conexas de  $\Gamma$  determinaremos el modo de intersección de las líneas verticales  $x = \text{constante}$  con esta curva, usando el hecho de que  $f(x, y) = 0$  es una ecuación cúbica en  $y$  con coeficientes definidos por funciones reales de  $x$ .

Para ver esto, escribimos la ecuación polinomial (2.10) en la forma

$$a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a_3(x) &= 4d(\gamma - \alpha), \\ a_2(x) &= 27(b^2d^4)^{1/3} + 6(\gamma - \alpha)(bd^2)^{1/3}x - (\gamma - \alpha)^2x^2, \\ a_1(x) &= 54bdx - 6(\gamma - \alpha)(b^2d)^{1/3}x^2, \\ a_0(x) &= 27(b^4d^2)^{1/3}x^2 - 4(\gamma - \alpha)bx^3. \end{aligned}$$

Ahora, para  $x = 0$  tenemos que

$$a_3(0) = 4d(\gamma - \alpha), \quad a_2(0) = 27(b^2d^4)^{1/3},$$

y además  $a_1(0) = a_0(0) = 0$ . Así, para  $x = 0$ , la ecuación (2.12) se reduce a

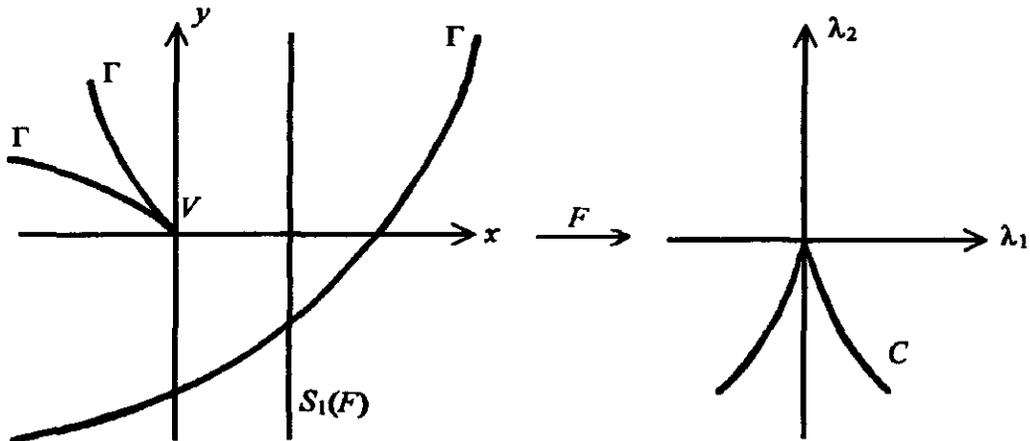
$$4d(\gamma - \alpha)y^3 + 27(b^2d^4)^{1/3}y^2 = 0,$$

cuyas soluciones son:  $y_1 = y_2 = 0$ ,  $y_3 = -\frac{27(b^2d)^{1/3}}{4(\gamma - \alpha)} \neq 0$  (una raíz simple y una doble igual a cero).

*Afirmación:* el signo del discriminante  $\Delta(x)$  de (2.12) como ecuación cúbica en  $y$  es igual al signo de  $x$ .

Por lo tanto, para  $x < 0$ , se tiene  $\Delta(x) < 0$ , lo cual nos dice que (2.12) tiene tres soluciones reales distintas. Para  $x = 0$  tenemos  $\Delta(x) = 0$ , lo que garantiza la existencia de una solución real simple y de una doble igual a cero (lo que acabamos de comprobar). Finalmente, para  $x > 0$  resulta  $\Delta(x) > 0$ , y entonces (2.12) tiene solamente una solución real.

Las soluciones de la ecuación (2.12) están definidas por la fórmula de Cardano para resolver la cúbica. Como los coeficientes de la ecuación cúbica (2.12) son funciones de  $x$ , sus soluciones son funciones de  $x$ . De la fórmula de Cardano es fácil ver que estas funciones son diferenciables fuera del conjunto donde se anula el discriminante, esto es, fuera de la línea  $x = 0$ . Se sigue que  $\Gamma - \{V\}$  consiste solamente de curvas diferenciables. Esto completa la descripción topológica de  $\Gamma$ . Ver la Figura 4.



**Fig. 4.** Estructura topológica de la curva  $\Gamma$ . Esta curva es la imagen inversa bajo  $F$  de la cúspide discriminante  $C$ .

Para terminar, probamos la afirmación del siguiente modo. El discriminante de la ecuación (2.12) depende de  $x$  como

$$\Delta(x) = 4b(\gamma - \alpha)x h(x), \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) = & (\gamma - \alpha)^6 x^6 - 27 (bd^2)^{1/3} (\gamma - \alpha)^5 x^5 + 324 (b^2 d^4)^{1/3} (\gamma - \alpha)^4 x^4 \\ & - 2187bd^2 (\gamma - \alpha)^3 x^3 + 8748 (b^4 d^8)^{1/3} (\gamma - \alpha)^2 x^2 \\ & - 19683 (b^5 d^{10})^{1/3} (\gamma - \alpha) x + 19683b^2 d^4. \end{aligned}$$

De (2.13) vemos que la única posibilidad de raíces múltiples para (2.12) se tiene donde  $x = 0$  o  $h(x) = 0$ .

Probaremos que la función  $h$  es estrictamente positiva para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces, por (2.13) el signo de  $\Delta(x)$  y el de  $x$  es el mismo suponiendo  $b > 0$ ,  $\gamma > \alpha$  (para los otros casos la prueba es análoga).

Un cálculo directo muestra que para  $x_0 = 9(bd^2)^{1/3}/2(\gamma - \alpha)$ , tenemos  $h'(x_0) = 0$ , y  $h''(x_0) > 0$ . Así,  $x_0$  es un punto crítico para el cual  $h(x_0)$  es un mínimo local. Además,  $h(x_0) > 0$ . De hecho, veremos que  $x_0$  es el único punto crítico, y  $h(x_0)$  es un mínimo absoluto.

Para esto, hagamos  $h'(x) = (x - x_0)h_1(x)$ . De este modo es fácil ver que  $h_1(x) = 6(\gamma - \alpha)^2 h_2(x)$ , donde

$$\begin{aligned} h_2(x) = & (\gamma - \alpha)^4 x^4 - 18 (bd^2)^{1/3} (\gamma - \alpha)^3 x^3 + 135 (b^2 d^4)^{1/3} (\gamma - \alpha)^2 x^2 \\ & - 486bd^2 (\gamma - \alpha) x + 729 (b^4 d^8)^{1/3}. \end{aligned}$$

Sólo nos resta ver que  $h_2(x)$  no tiene raíces reales. Del método de Ferrari para resolver la cuártica, se tiene que las soluciones de la ecuación  $h_2(x) = 0$  son las soluciones de la ecuación  $(x^2 + px + k)^2 = 0$ , donde

$$p = -\frac{9(bd^2)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, \quad k = \frac{27(b^2 d^4)^{1/3}}{(\gamma - \alpha)^2}.$$

Como el discriminante de la ecuación cuadrática  $x^2 + px + k = 0$  es

$$\Delta = -27 \left( \frac{b^{1/3} d^{2/3}}{\gamma - \alpha} \right)^2 < 0,$$

la prueba del lema está completa. ■

### 2.1.3 Distribución de los tipos $D_{12}$ y $\tilde{D}_1$

En esta parte mostramos primero que los puntos de tipo  $D_{12}$  se encuentran en  $\Gamma - \{V, T\}$ , donde  $V$  es el punto dado por (2.9) y

$$T = \frac{1}{\gamma - \alpha} \left( \frac{ab - d^2}{b}, \frac{b^2 - cd}{d} \right), \quad (\alpha - \gamma)bd \neq 0, \quad (2.14)$$

es el único punto en la intersección de la línea no simple  $L$  definida por (2.1) y la curva  $\Gamma$ , como puede comprobarse fácilmente por cálculos directos. Como  $T$  es el único punto no simple de  $\Gamma$ , tenemos que los puntos de tipo  $D_{12}$  y  $\tilde{D}_1$  están en  $\Gamma - \{T\}$ .

Un cálculo directo muestra que  $F(V) = (0, 0)$ .

Afirmamos que no existe otro punto en  $F^{-1}(0, 0)$  diferente de  $V$ .

Supongamos que existe  $V'$  en  $F^{-1}(0, 0)$  tal que  $V' \neq V$ .

Otro cálculo directo muestra que si  $V_1 \in S_1(F)$ , entonces  $F(V_1) \neq (0, 0)$ .

Por lo tanto  $V' \notin S_1(F)$ . De ahí que  $F$  es un difeomorfismo local en  $V'$ .

Esto y el hecho de que  $(0, 0)$  es un punto cúspide de la curva  $C$  dada en (2.7) implican que  $V'$  es también un punto cúspide de  $\Gamma$ , pero no existe otro punto cúspide de  $\Gamma$  diferente de  $V$  según el Lema 2.1.2.

Además, el único punto de tipo  $\tilde{D}_1$  en el espacio  $\mathcal{P}$  es el origen con preimagen  $F^{-1}(0, 0) = \{V\}$  como hemos visto. En consecuencia, los puntos de tipo  $D_{12}$  en  $\mathcal{N}_1$  son los puntos simples de  $\Gamma - \{V\}$ , esto es, todos los puntos a lo largo de  $\Gamma - \{V, T\}$ .

Finalmente, la tangencia de la curva  $\Gamma$  con la línea no simple  $L$  en el punto  $T$  que se afirma en el Teorema 2.1.1 se demuestra fácilmente. Usando el Teorema de la Función Implícita podemos calcular la pendiente de la tangente a  $\Gamma$  en dicho punto, que resulta ser  $b/d$ . Esta es la inclinación de la línea no simple. Esto completa la demostración del Teorema 2.1.1. ■

**Corolario 2.1.3.** *El diagrama de bifurcación de las  $\nu$ -configuraciones principales en el espacio  $\mathcal{N}_1$  es el que se muestra en la Figura 5 para  $d > 0$ ,  $b > 0$ , y  $\gamma > \alpha$ .*

**Demostración.** Usando el hecho de que los tipos Darbouxianos de configuraciones principales definen componentes abiertas de  $\mathcal{N}_1$  en el complemento de las curvas  $\Gamma$  y la línea no simple  $L$ , resulta suficiente determinar el tipo de configuración principal en cualquier punto particular de cada componente. El complemento de estas curvas en  $\mathcal{N}_1$  definen cinco regiones, las cuales aparecen numeradas en la Figura 6. De manera que elegiremos convenientemente algunos puntos de prueba  $P_i$ . En particular, elegiremos puntos a lo largo de la línea tangente doble de la componente cúspide de  $\Gamma$  para determinar el tipo de las regiones 1, 2, y 3 de la Figura 6, mismas que resultan ser de tipo  $D_2$ ,  $D_1$ , y  $D_3$  respectivamente. Ahora, como la región 2 es de tipo  $D_1$  y la región 3 es de tipo  $D_3$ , resulta que las regiones 4 y 5 tienen que ser de tipo  $D_2$  si  $\Delta < 0$  en estas regiones. Esto es así debido al hecho de

que cualquier deformación de un punto umbílico simple de tipo  $D_{12}$  no puede deformar un tipo  $D_1$  en un tipo  $D_3$ , pues esto implicaría un cambio de una singularidad de tipo silla en el eje  $p$  de la superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$  de la Definición 1.2.1, a tres singularidades aisladas de tipo silla en tal eje.

Para cada uno de estos puntos de prueba  $P_i$  calculamos el correspondiente campo normal, el signo del discriminante  $\Delta$  del polinomio separatriz  $f$ , las raíces de  $f$ , y los valores propios de la parte lineal del campo vectorial  $\hat{F}$  dados por (1.14), lo que obtenemos en cada caso por cálculos directos.

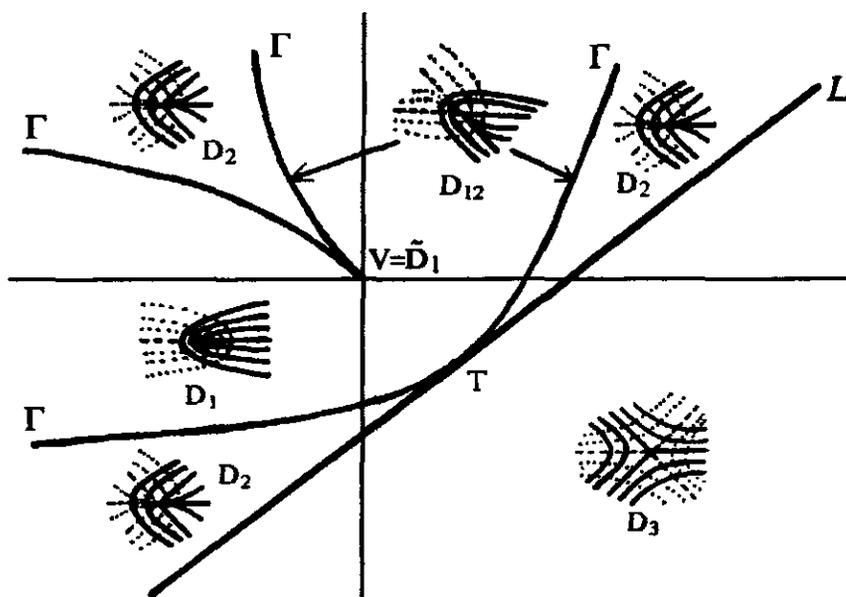


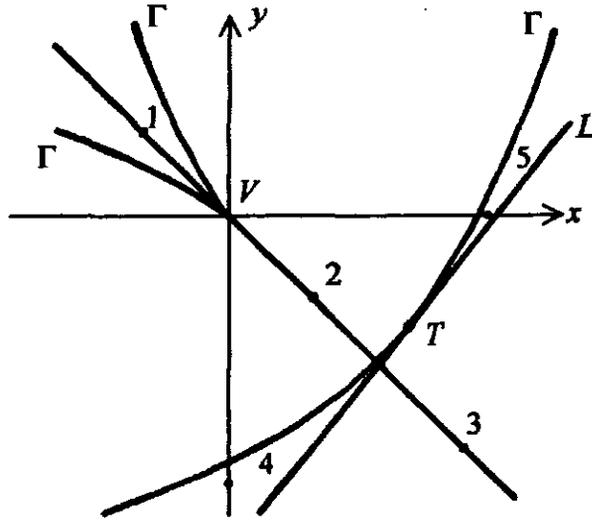
Fig. 5. Diagrama de bifurcación de configuraciones principales en el espacio  $\mathcal{N}_1$ .

Entonces, el tipo de la configuración principal Darbouxiana queda determinado por el signo de estos valores propios y el signo de  $\Delta$  de acuerdo con los casos  $D_1, D_2$  y  $D_3$  definidos en la Sección 1.2. Procedemos ahora a realizar los cálculos. Primero probamos el punto

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left( -\frac{(bd^2)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, \frac{(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha} \right),$$

el cual está en la región 1 sobre la línea tangente doble (2.11) a la componente cúspide de  $\Gamma$ . La translación (2.8) nos da el campo vectorial normal correspondiente en  $\mathcal{N}_1$  definido por

$$(m_1, n_1) = \frac{1}{\gamma - \alpha} \left( a - 2b - 4(bd^2)^{1/3}, 2d - c + 4(b^2d)^{1/3} \right).$$



**Fig. 6.** Regiones donde ocurren los tipos darbouxianos.

Ahora, usando la función (2.2) y la ecuación (2.5) obtenemos que  $\Delta(P_1) < 0$ . El polinomio separatriz (1.13) tiene las tres raíces reales

$$p_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \left( \frac{d}{b} \right)^{1/3}, \quad p_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \left( \frac{d}{b} \right)^{1/3}, \quad p_3 = \left( \frac{d}{b} \right)^{1/3},$$

y los valores propios (1.14) tienen signos opuestos para  $p_1$  y  $p_2$ , mientras que para  $p_3$  ambos son positivos. Además,  $p_1 < p_3 < p_2$ . Por lo tanto se tiene el tipo  $D_2$  para este punto. En consecuencia toda la región 1 es de tipo  $D_2$ .

Para la región 2 observamos primero que la componente regular de  $\Gamma$  intersecta la tangente doble en el punto

$$R = (R_1, R_2) = \left( 4 \frac{(bd^2)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, -4 \frac{(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha} \right). \quad (2.15)$$

De ahí que el punto

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left( \frac{(bd^2)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, -\frac{(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha} \right),$$

está en la región 2. El campo vectorial normal correspondiente es

$$(m_2, n_2) = \frac{1}{\gamma - \alpha} \left( a - 2(b + (bd^2)^{1/3}), 2((b^2d)^{1/3} + d) - c \right).$$

El polinomio separatriz tiene  $\Delta(P_2) > 0$  y su única raíz real es  $p = \left(\frac{d}{b}\right)^{1/3}$ .

Ahora, como los valores propios  $\beta_2, \beta_3$  tienen signos opuestos para esta raíz, resulta el tipo  $D_1$  para el punto  $P_2$ . Por lo tanto tenemos configuraciones de tipo  $D_1$  para la región 2.

En lo que sigue probaremos el punto

$$P_3 = (P_{31}, P_{32}) = \left( \frac{27 (bd^2)^{1/3}}{4 \gamma - \alpha}, -\frac{27 (b^2d)^{1/3}}{4 \gamma - \alpha} \right), \quad (2.16)$$

cuyas coordenadas  $P_{31}, P_{32}$  son las intersecciones de la componente regular de la curva  $\Gamma$  con los ejes  $y = 0$  y  $x = 0$  respectivamente. Este punto está en la región 3, 4, o 5 dependiendo de la pendiente de la línea no simple,  $\frac{b}{d}$ . Para  $\alpha_1 < \frac{b}{d} < \alpha_2$  tenemos que  $P_3$  está en la región 3, donde

$$\alpha_1 = ((19 - 3\sqrt{33})/8)^{3/2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = ((19 + 3\sqrt{33})/8)^{3/2}.$$

Esto se sigue del hecho de que el punto

$$Q = (Q_1, Q_2) = \left( \frac{(b^{2/3} + d^{2/3})^2}{b^{1/3}(\gamma - \alpha)}, -\frac{(b^{2/3} + d^{2/3})^2}{d^{1/3}(\gamma - \alpha)} \right), \quad (2.17)$$

en la intersección de la línea no simple y la tangente doble satisface

$$R_1 \leq Q_1 < \Gamma_1 \quad \text{y} \quad \Gamma_2 < Q_2 \leq R_2$$

para  $\alpha_1 < \frac{b}{d} < \alpha_2$ , donde  $R_1, R_2$  son las coordenadas de (2.15).

Ahora, el campo normal correspondientes es

$$(m_3, n_3) = \frac{1}{4(\gamma - \alpha)} \left( 4a - 8b + 15 (bd^2)^{1/3}, 8d - 4c - 15 (b^2d)^{1/3} \right),$$

cuyo polinomio separatriz tiene  $\Delta(P_3) < 0$  y sus raíces son

$$p_1 = \frac{-19 - 3\sqrt{33}}{8} \left(\frac{d}{b}\right)^{1/3}, \quad p_2 = \frac{-19 + 3\sqrt{33}}{8} \left(\frac{d}{b}\right)^{1/3}, \quad p_3 = \left(\frac{d}{b}\right)^{1/3}.$$

Los valores propios  $\beta_2, \beta_3$  tienen signos opuestos para  $p_1$  y  $p_2$  si  $\alpha_1 < \frac{b}{d} < \alpha_2$ . También son de signos opuestos para  $p_3$ . Así que tenemos el tipo  $D_3$  para  $P_3$  y en consecuencia también para toda la región 3.

Finalmente, para garantizar que los puntos

$$P_4 = \left(0, -\frac{7(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha}\right) \text{ y } P_5 = \left(\frac{7(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha}, 0\right)$$

se encuentran en las regiones 4 y 5 respectivamente, necesitamos reducir el intervalo de  $\frac{b}{d}$  a  $(\frac{2}{3}, 1)$ . Esto se sigue del hecho de que para  $\frac{2}{3} < \frac{b}{d} < 1$  podemos garantizar que las intersecciones de la línea no simple con los ejes  $y = 0$  y  $x = 0$ , dadas por

$$S_1 = \frac{(b^{2/3} + d^{2/3})^3}{b(\gamma - \alpha)} \text{ y } S_2 = -\frac{(b^{2/3} + d^{2/3})^3}{d(\gamma - \alpha)}$$

respectivamente, satisfacen

$$\Gamma_1 < \frac{7(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha} < S_1 \text{ y } S_2 < -\frac{7(b^2d)^{1/3}}{\gamma - \alpha} < \Gamma_2.$$

Ahora, como  $\Delta < 0$  para ambos  $P_4$  y  $P_5$ , resulta que el tipo de la configuración principal puede deducirse del hecho mencionado arriba respecto a las deformaciones de puntos umbílicos simples de tipo  $D_{12}$ , lo que nos da el tipo  $D_2$  en cada una de las regiones 4 y 5. ■

## 2.2 Los casos no genéricos

### 2.2.1 El caso $d = 0$

Para el caso no genérico en que  $d = 0$  tenemos la siguiente proposición.

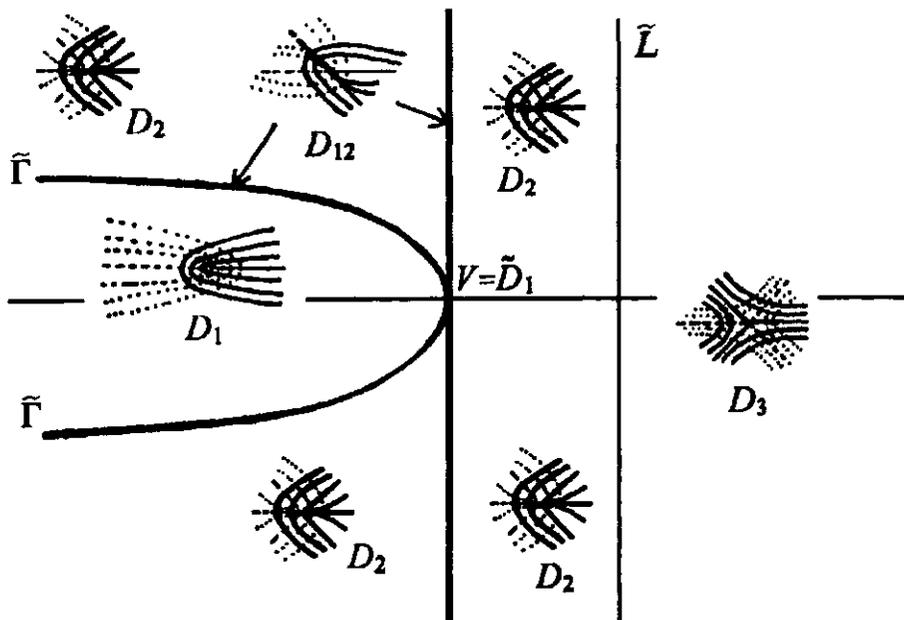
**Proposición 2.2.1.** Sea  $\nu \in \mathcal{N}_1$  con coordenadas  $(m, n)$  y  $d = 0$ ,  $b \neq 0$ . Entonces, el conjunto de bifurcación de los puntos  $\nu$ -umbílicos aislados es la parábola  $\tilde{\Gamma}$  definida por

$$m - \frac{a - 2b}{\gamma - \alpha} = - \left( \frac{\gamma - \alpha}{4b} \right) \left( n - \frac{c}{\alpha - \gamma} \right)^2$$

y la línea  $\tilde{L}$  definida por

$$(\gamma - \alpha)m = a - b.$$

La parábola menos su vértice es de tipo  $D_{12}$  de codimensión uno y el vértice es de tipo  $\tilde{D}_1$  de codimensión dos. Además, el diagrama de bifurcación para  $b > 0$ ,  $\gamma > \alpha$  es el que se muestra en la Figura 7.



**Fig. 7.** Diagrama de bifurcación en el caso  $d = 0$ .

**Demostración.** Observamos primero que la condición  $d = 0$  sustituida

en la parametrización canónica (1.6) nos da la parametrización local

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3, \right. \\ \left. \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \mathcal{O}(3) \right).$$

que junto con el 1-jet del campo  $\nu$ -umbilical

$$\nu_1(u, v) = (-ku, -kv, 1, mu + nv),$$

determinan el 1-jet de la ecuación diferencial de las  $\nu$ -líneas de curvatura en la forma

$$bvdu^2 + [(a - b + (\alpha - \gamma)m)u + (-c + (\alpha - \gamma)n)v]dudv - bvdv^2 = 0.$$

Estas condiciones también implican que las inecuaciones (1.18) y (1.19) se satisfacen si y sólo si  $a - b + (\alpha - \gamma)m \neq 0$ . Por lo tanto, el conjunto de los puntos no simples en este caso es la línea  $\tilde{L}$  definida por  $m = (a - b)/(\gamma - \alpha)$ . Ahora, el polinomio separatriz en este contexto tiene la siguiente expresión

$$f(p) = bp^3 + (-c + (\alpha - \gamma)n)p^2 + (a - 2b + (\alpha - \gamma)m)p,$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= \frac{1}{2b} \left( c + (\gamma - \alpha)n + \sqrt{\Delta_2} \right), \\ p_3 &= \frac{1}{2b} \left( c + (\gamma - \alpha)n - \sqrt{\Delta_2} \right), \end{aligned}$$

donde  $\Delta_2$  es el discriminante

$$\Delta_2 = (c + (\gamma - \alpha)n)^2 + 4b(2b - a + (\gamma - \alpha)m).$$

La función  $F : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $F(m, n) = (\lambda_1, \lambda_2)$  de la Sección 2.1 está definida en este caso por

$$\lambda_1 = \frac{1}{27b^3} (-c + (\alpha - \gamma)n) (2(-c + (\alpha - \gamma)n)^2 - 9b(a - 2b + (\alpha - \gamma)m)), \quad (2.18)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3b^2} (3b(a - 2b + (\alpha - \gamma)m) - (-c + (\alpha - \gamma)n)^2). \quad (2.19)$$

Como el jacobiano de  $F$  es

$$J = \frac{1}{3b^3} (\gamma - \alpha)^2 (a - 2b + (\alpha - \gamma)m),$$

vemos que la línea  $m = (a - 2b)/(\gamma - \alpha)$  es el conjunto singular de  $F$ .

Resolviendo las ecuaciones  $\lambda_1 = 0$ , y  $\lambda_2 = 0$  para  $m, n$  obtenemos solamente un punto real en  $F^{-1}(0, 0)$ , a saber,

$$V = \left( \frac{a - 2b}{\gamma - \alpha}, \frac{c}{\alpha - \gamma} \right).$$

Como  $F(V)$  es un polinomio con una raíz triple, tenemos una configuración principal de tipo  $\tilde{D}_1$  en este punto.

La curva cúspide  $C$  definida en la Sección 2.1 se transforma por  $F^{-1}$  en un conjunto algebraico real. Este conjunto trasladado al punto  $V$  está formado por una parábola y una línea. Esto se obtiene sustituyendo las expresiones (2.18) y (2.19) en la ecuación  $4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0$  obteniendo la ecuación  $f(m, n) = 0$ . La translación mencionada arriba transforma la ecuación

$f(m, n) = 0$  en la ecuación  $f(x, y) = 0$  dada por

$$(\alpha - \gamma)x^2 (4bx - (\alpha - \gamma)y^2) = 0. \quad (2.20)$$

De esta ecuación obtenemos la línea  $x = 0$  y la parábola  $\tilde{\Gamma}$  definida por

$$4bx = (\alpha - \gamma)y^2.$$

La parábola divide el plano en dos regiones donde el discriminante  $\Delta_2$  es diferente de cero. En el lado convexo tenemos  $\Delta_2 < 0$ , y en el otro lado  $\Delta_2 > 0$ . Esto se ve de la ecuación de la parábola en coordenadas  $(m, n)$ , que se escribe

$$m - \frac{a - 2b}{\gamma - \alpha} = - \left( \frac{\gamma - \alpha}{4b} \right) \left( n - \frac{c}{\alpha - \gamma} \right)^2.$$

Esta parábola es tangente en su vértice  $V$  a la línea donde  $F$  es singular. La parábola y la línea menos  $V$  constituyen el lugar geométrico de los puntos umbílicos de tipo  $D_{12}$ , pero solamente la parábola menos su vértice es el conjunto de bifurcación  $D_{12}$ . La línea no es un conjunto de bifurcación. Cualquier perturbación pequeña produce un tipo  $D_2$ , como veremos abajo.

Probemos el tipo de la configuración principal en algunos puntos del espacio  $\mathcal{N}_1$ , para este caso no genérico, en el complemento de las curvas definidas por (2.20) y la línea  $x(\gamma - \alpha) = b$ . Comenzamos con el punto

$$P_1(x_1, y_1) = (-1, 0).$$

Las raíces del polinomio separatriz resultan ser

$$p_1 = 0, p_2 = \sqrt{(\alpha - \gamma)/b}, p_3 = -\sqrt{(\alpha - \gamma)/b}.$$

De modo que sólo hay una raíz real para  $\gamma > \alpha$ ,  $b > 0$ . Los valores propios (1.14) para esta raíz son  $\beta_2 = \alpha - \gamma < 0$ , y  $\beta_3 = b + \gamma - \alpha > 0$ . Por lo tanto  $p_1$  corresponde a una singularidad de tipo silla y así, se tiene la configuración del tipo Darbouxiano  $D_1$  para este punto. Como las condiciones Darbouxianas son abiertas, toda la parte convexa de la parábola resulta ser de tipo  $D_1$ . El punto

$$P_2(x_2, y_2) = \left( \frac{b}{2(\gamma - \alpha)}, 0 \right)$$

tiene las raíces

$$p_1 = 0, p_2 = 1/\sqrt{2}, p_3 = -1/\sqrt{2},$$

y los valores propios correspondientes cumplen las desigualdades

$$\beta_2(p_1) \beta_3(p_1) = \left( \frac{b}{2} \right)^2 > 0,$$

$$\beta_2(p_2) \beta_3(p_2) = -\frac{3b^2}{2} < 0,$$

$$\beta_2(p_3) \beta_3(p_3) = -\frac{3b^2}{2} < 0,$$

con  $p_3 < p_1 < p_2$ , de manera que hay un nodo entre dos sillas en el eje  $p$  satisfaciendo así, la condición Darbouxiana  $D_2$ .

Continuamos sobre el eje horizontal de las  $x$  con el punto

$$P_3(x_3, y_3) = \left( \frac{2b}{\gamma - \alpha}, 0 \right).$$

Aquí se tienen las raíces

$$p_1 = 0, p_2 = \sqrt{2}, p_3 = -\sqrt{2},$$

y los valores propios cumplen:

$$\beta_2(p_1) \beta_3(p_1) = -2b^2 < 0,$$

$$\beta_2(p_2) \beta_3(p_2) = -12b^2 < 0,$$

$$\beta_2(p_3) \beta_3(p_3) = -12b^2 < 0,$$

de modo que son tres sillas y la configuración es de tipo  $D_3$ . Así que toda la parte a la derecha de la línea no simple es de tipo  $D_3$ .

Finalmente, probamos las regiones entre la parábola y el eje  $y$  con los puntos

$$P_4(x_4, y_4) = \left(-\frac{\gamma - \alpha}{4b}, 2\right), \text{ y } P_5(x_5, y_5) = \left(-\frac{\gamma - \alpha}{4b}, -2\right),$$

resultando en ambos casos el tipo  $D_2$ . ■

### 2.2.2 El caso $b = 0$

Trataremos ahora el caso  $d \neq 0, b = 0$ . La siguiente proposición muestra que el diagrama de bifurcación en este caso es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 7.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $\nu \in \mathcal{N}_1$  con coordenadas  $(m, n)$  y  $d \neq 0, b = 0$ . Entonces, el conjunto de bifurcación de los puntos  $\nu$ -umbílicos aislados es la parábola  $\tilde{\Gamma}$  definida por*

$$n - \frac{2d - c}{\gamma - \alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{4d} \left(m - \frac{a}{\gamma - \alpha}\right)^2$$

y la línea  $\tilde{L}$  definida por

$$(\gamma - \alpha)n = d - c.$$

La parábola menos su vértice es de tipo  $D_{12}$  de codimensión uno y el vértice es de tipo  $\tilde{D}_1$  de codimensión dos. Además, el diagrama de bifurcación para  $d > 0$ ,  $\gamma > \alpha$  se obtiene de la Figura 7 por una rotación de un ángulo  $\theta = -\pi/2$ .

**Demostración.** En primer lugar, la condición  $b = 0$  nos da la parametrización local

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{d}{2}u^2v + \frac{c}{6}v^3, \right. \\ \left. \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \mathcal{O}(3) \right).$$

En segundo lugar, el 1-jet del campo  $\nu$ -umbilical

$$\nu_1(u, v) = (-ku, -kv, 1, mu + nv),$$

junto con esta parametrización determinan el 1-jet de la ecuación diferencial de las  $\nu$ -líneas de curvatura en la forma

$$d u dv^2 + [(a + (\alpha - \gamma)m)u + (-c + d + (\alpha - \gamma)n)v] dudv - d u du^2 = 0.$$

Las inecuaciones (1.18) y (1.19) implican en este caso que los puntos no simples en  $\mathcal{N}_1$  tienen lugar solamente en la línea  $\tilde{L}$  definida por  $n = (d - c)/(\gamma - \alpha)$ .

Ahora, en el sistema de coordenadas  $(u, v, p)$  del haz proyectivo definido en la Sección 1.2, existe una singularidad infinita del campo vectorial (1.9) si  $b = 0$ . Sin embargo, en el sistema de coordenadas  $(u, v, q)$  esta singularidad se hace cero debido a la relación  $q = 1/p$ . Por lo tanto vamos a trabajar en el sistema de coordenadas  $(u, v, q)$  en este caso.

La superficie  $S(\mathcal{I}, \nu)$  queda definida en este caso por la función

$$\mathcal{F}(u, v, q) = d u + [(a + (\alpha - \gamma)m)u + (-c + d + (\alpha - \gamma)n)v] q - d u q^2 = 0,$$

mientras que el campo

$$\hat{\mathcal{F}} = q\mathcal{F}_q \frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{F}_q \frac{\partial}{\partial v} + (-q\mathcal{F}_u - \mathcal{F}_v) \frac{\partial}{\partial p}$$

satisface todas las propiedades respectivas **1 a 6** de la Sección 1.2 en una forma adecuada para este caso. Por ejemplo,  $\Pi_* \hat{\mathcal{F}}(u, v, q)$  genera la línea de curvatura con la dirección  $(q, 1)$ , etc.

El polinomio separatriz se escribe en este sistema de coordenadas como

$$f(q) = dq^3 + (-a + (\gamma - \alpha)m)q^2 + (c - 2d + (\gamma - \alpha)n)q,$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} q_1 &= 0, \\ q_2 &= \frac{1}{2d} \left( a + (\alpha - \gamma)m + \sqrt{\Delta_2} \right), \\ q_3 &= \frac{1}{2d} \left( a + (\alpha - \gamma)m - \sqrt{\Delta_2} \right), \end{aligned}$$

donde  $\Delta_2$  es el discriminante

$$\Delta_2 = (-a + (\gamma - \alpha)m)^2 - 4d(c - 2d + (\gamma - \alpha)n).$$

La función  $F : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{P}$  de la Sección 2.1 está definida ahora por  $F(m, n) = (\lambda_1, \lambda_2)$ , donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{27d^3} (a + (\alpha - \gamma)m) (-2(a + (\alpha - \gamma)m)^2 + 9d(c - 2d + (\gamma - \alpha)n)), \quad (2.21)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3d^2} (3d(c - 2d + (\gamma - \alpha)n) - (a + (\alpha - \gamma)m)^2). \quad (2.22)$$

Como el jacobiano de  $F$  es

$$J = \frac{1}{3d^3} (\gamma - \alpha)^2 (-c + 2d + (\alpha - \gamma)n),$$

resulta que el conjunto singular de  $F$  es la línea  $(\gamma - \alpha)n = 2d - c$ . Resolviendo las ecuaciones  $\lambda_1 = 0$ , y  $\lambda_2 = 0$  para  $m, n$  obtenemos un sólo punto real en  $F^{-1}(0, 0)$  dado por

$$V = \left( \frac{a}{\gamma - \alpha}, \frac{2d - c}{\gamma - \alpha} \right).$$

Ahora, como  $F(V)$  es un polinomio con una raíz triple, tenemos una configuración principal de tipo  $\tilde{D}_1$  en este punto.

Sea  $C = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P} \mid 4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0\}$ . La imagen inversa  $F^{-1}(C)$  trasladada al punto  $V$  es un conjunto algebraico real que consta de una parábola y una línea. Esto se obtiene sustituyendo las expresiones (2.21) y (2.22) en la ecuación  $4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0$  lo que nos da una ecuación de la forma  $f(m, n) = 0$  la cual se transforma en  $f(x, y) = 0$  después de aplicar la translación mencionada arriba. Esta ecuación se escribe finalmente como

$$(\gamma - \alpha)^3 y^2 ((\alpha - \gamma)x^2 + 4dy) = 0. \quad (2.23)$$

De esta ecuación obtenemos la línea  $y = 0$  y la parábola  $\tilde{\Gamma}$  definida por  $(\gamma - \alpha)x^2 = 4dy$ . Esta parábola es tangente a la línea  $y = 0$  en su vértice  $V$ . Ambas curvas menos  $V$  constituyen el lugar geométrico de los puntos umbílicos de tipo  $D_{12}$ . Además, la parábola menos su vértice es el conjunto de bifurcación  $D_{12}$ , definido en coordenadas  $(m, n)$  por

$$n - \frac{2d - c}{\gamma - \alpha} = \frac{\gamma - \alpha}{4d} \left( m - \frac{a}{\gamma - \alpha} \right)^2.$$

La línea  $y = 0$  no es un conjunto de bifurcación, pues cualquier perturbación pequeña produce un tipo  $D_2$ , como veremos abajo.

Probemos ahora el tipo de configuración principal en el complemento de las curvas definidas por (2.23) y la línea no simple  $y(\gamma - \alpha) = -d$ .

Comenzamos con el punto

$$P_1(x_1, y_1) = (0, 1).$$

Las raíces del polinomio separatriz resultan ser

$$q_1 = 0, \quad q_2 = \sqrt{(\alpha - \gamma)/d}, \quad q_3 = -\sqrt{(\alpha - \gamma)/d}.$$

De modo que sólo hay una raíz real para  $\gamma > \alpha$ ,  $d > 0$ . Los valores propios (1.14) para esta raíz son  $\beta_2 = \gamma - \alpha > 0$ , y  $\beta_3 = -d - (\gamma - \alpha) < 0$ . Por lo tanto  $q_1$  corresponde a una singularidad de tipo silla y así, se tiene la configuración del tipo Darbouxiano  $D_1$  para este punto. Como las condiciones Darbouxianas son abiertas, toda la parte convexa de la parábola resulta ser de tipo  $D_1$ . El punto

$$P_2(x_2, y_2) = \left( 0, -\frac{d}{2(\gamma - \alpha)} \right)$$

tiene las raíces

$$q_1 = 0, q_2 = 1/\sqrt{2}, q_3 = -1/\sqrt{2},$$

y los valores propios correspondientes cumplen:

$$\beta_2(q_1) \beta_3(q_1) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0,$$

$$\beta_2(q_2) \beta_3(q_2) = -\frac{3d^2}{2} < 0,$$

$$\beta_2(q_3) \beta_3(q_3) = -\frac{3d^2}{2} < 0,$$

con  $q_3 < q_1 < q_2$ , de manera que hay un nodo entre dos sillas en el eje  $p$  satisfaciendo así, la condición Darbouxiana  $D_2$ .

Continuamos sobre el eje vertical de las  $y$  con el punto

$$P_3(x_3, y_3) = \left(0, -\frac{2d}{\gamma - \alpha}\right).$$

Aquí se tienen las raíces

$$q_1 = 0, q_2 = \sqrt{2}, q_3 = -\sqrt{2},$$

y los valores propios cumplen:

$$\beta_2(q_1) \beta_3(q_1) = -2d^2 < 0,$$

$$\beta_2(q_2) \beta_3(q_2) = -12d^2 < 0,$$

$$\beta_2(q_3) \beta_3(q_3) = -12d^2 < 0,$$

de modo que son tres sillas y la configuración es de tipo  $D_3$ . Así que toda la parte bajo la línea no simple es de tipo  $D_3$ .

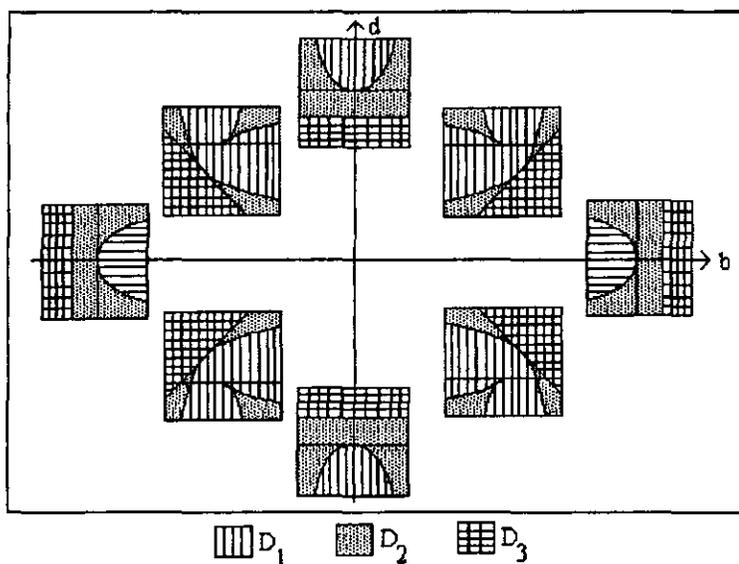
Finalmente, probamos las regiones entre la parábola y el eje  $x$  con los puntos

$$P_4(x_4, y_4) = \left(1, \frac{\gamma - \alpha}{8d}\right), \text{ y } P_5(x_5, y_5) = \left(-1, \frac{\gamma - \alpha}{8b}\right),$$

resultando en ambos casos el tipo  $D_2$ . ■

Finalmente sólo nos resta mencionar que si  $b = d = 0$ , entonces la configuración principal consiste de rectas paralelas a los ejes canónicos o de rectas que pasan por el origen de coordenadas. En estos casos los puntos umbílicos no son aislados. Hay líneas completas de puntos umbílicos en la superficie.

**Corolario 2.2.3.** Sean  $\nu \in \mathcal{N}_1$  con coordenadas  $(m, n)$ , y  $a, c, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  fijos, con  $\gamma > \alpha$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$ . El diagrama de bifurcación de los campos  $\nu$ -umbilicales en el espacio  $\mathcal{N}_1$  depende de los parámetros  $b$  y  $d$  de la parametrización canónica (1.6) de la superficie local de acuerdo a la Figura 8.



**Fig. 8.** Dinámica del diagrama de bifurcación.

**Demostración.** Se sigue del Teorema 2.1.1, de las Proposiciones 2.2.1, 2.2.2, y de la ecuación (2.10) de la curva  $\Gamma$ ,

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= 27 (bd)^{2/3} \left( \sqrt[3]{bx} + \sqrt[3]{dy} \right)^2, \\ f_3(x, y) &= 2(\alpha - \gamma) \left( 2 \left( \sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy} \right)^3 + 9 (bd)^{1/3} \left( \sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{dy} \right) xy \right), \\ f_4(x, y) &= -(\gamma - \alpha)^2 x^2 y^2, \end{aligned}$$

al variar  $(b, d) \in \mathbb{R}^2$  y tomando los límites de  $f(x, y)$  cuando  $d \rightarrow 0$ , con  $b \neq 0$  y cuando  $b \rightarrow 0$ , con  $d \neq 0$ . ■

**Corolario 2.2.4.** *Para cada campo  $\nu$ -umbilical fijo representado por los parámetros  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ , la configuración principal alrededor del punto  $\nu$ -umbílico puede variar al variar los parámetros  $(b, d) \in \mathbb{R}^2$  de la parametrización local de la superficie (1.6), de acuerdo a la Figura 8.*

**Corolario 2.2.5.** *Los casos no genéricos en que alguno de los parámetros  $b$  o  $d$  se anulan representan valores de bifurcación, en el plano de coordenadas  $(b, d)$ , en la dinámica de los diagramas de bifurcación descrita en el Corolario 2.2.3.*

## 3 Deformaciones Versales

### 3.1 Familias de ecuaciones de líneas de curvatura

En el espacio de las formas diferenciales cuadráticas positivas (ver el apéndice) Guíñez y Gutierrez obtienen en [8] deformaciones versales de las singularidades simples no localmente estables:  $D_{12}$ , de codimensión uno y  $\tilde{D}_1$  de codimensión dos.

Para cada ecuación diferencial de líneas de curvatura consideraremos aquí la correspondiente forma diferencial cuadrática positiva (ver la nota A.5) y obtendremos deformaciones versales de los puntos umbílicos simples no localmente estables en el espacio  $\mathcal{N}_1$ .

Nuestras deformaciones también resultan ser versales en el espacio de las formas diferenciales cuadráticas positivas y son diferentes de aquéllas determinadas por Guíñez y Gutierrez, las cuales no definen en todos los casos familias de ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura. Además, para nuestras deformaciones se tiene la siguiente interpretación geométrica: *La variación de los parámetros de la deformación versal de este tipo de singularidades en el espacio de las formas diferenciales cuadráticas positivas corresponde a la variación de los parámetros del 1-jet del campo vectorial normal a la superficie.*

Dada una superficie local arbitraria  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  y un campo normal  $\nu \in \mathcal{N}_1$  definiendo un punto  $\nu$ -umbílico aislado  $p$  tenemos de la Sección 1.1, ecuación (1.7), que  $\nu$  depende de los parámetros  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ . Si estos parámetros  $m, n$  dependen a su vez de  $k$  parámetros reales, entonces (1.8) resulta ser una familia de ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura dependiendo del parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^k$ . Podemos pensar en esta familia como una aplicación  $\omega_\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{N}_1$ .

**Definición 3.1.1.** Dadas dos familias diferenciables  $\omega_\mu$  y  $\tilde{\omega}_\mu$  de ecuaciones de líneas de curvatura dependiendo del mismo parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^k$ , decimos que  $\omega_\mu$  y  $\tilde{\omega}_\mu$  son *topológicamente equivalentes* si existen homeomorfismos  $h_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que, para cada  $\mu \in \mathbb{R}^k$ ,  $h_\mu$  es una equivalencia

topológica entre las formas diferenciales cuadráticas  $\omega_\mu$  y  $\tilde{\omega}_\mu$  (ver el apéndice).

Para familias locales alrededor del origen de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$  imponemos la condición  $h_o(0, 0) = (0, 0)$  y además pedimos que  $h_\mu(x, y)$  debe estar definida solamente para  $((x, y), \mu)$  en una vecindad  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$  de  $((0, 0), 0)$  en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ , siendo

$$\{(h_\mu(x, y), \mu) \mid ((x, y), \mu) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}\}$$

una vecindad de  $((0, 0), 0)$ .

**Definición 3.1.2.** Sea  $\varphi$  una función diferenciable, del abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^l$  conteniendo el origen, al abierto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$  conteniendo el origen, tal que  $\varphi(0) = 0$ . Si  $\omega_\mu$  es una familia diferenciable de ecuaciones de líneas de curvatura con parámetro  $\mu \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$ , decimos que  $\vartheta_\alpha = \omega_{\varphi(\alpha)}$  es una familia con parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}^l$  *inducida* de  $\omega_\mu$  por el cambio de parámetros  $\varphi$ .

**Definición 3.1.3.** Una *deformación* de una ecuación diferencial de líneas de curvatura de la forma  $\omega = 0$  es cualquier familia  $\omega_\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{N}_1$  de ecuaciones de líneas de curvatura con  $\omega_o = \omega$ .

**Definición 3.1.4.** Una deformación  $\omega_\mu$  de  $\omega_o$  es una *deformación versal* de  $\omega_o$  si toda deformación de  $\omega_o$  es topológicamente equivalente a una deformación inducida de  $\omega_\mu$  por un cambio de parámetros  $\varphi : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$  adecuado.

## 3.2 Deformación versal de un punto umbílico de tipo $D_{12}$

El objetivo de esta sección es construir un ejemplo de una deformación versal de un punto umbílico simple no localmente estable de codimensión 1 de tipo  $D_{12}$ . Como ya hemos obtenido el diagrama de bifurcación en  $\mathcal{N}_1$  de las configuraciones principales de  $M$ , las familias transversales al conjunto de bifurcación resultan ser muy buenas candidatas para familias versales en este caso. Comencemos con la siguiente

**Proposición 3.2.1.** Consideremos la superficie parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{2}uv^2, \frac{1}{2}u^2 + v^2 \right).$$

Entonces, la familia 1-paramétrica de ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura

$$\vartheta_\lambda = (u + v) dv^2 + ((1 - \lambda)u - 4v) du dv - (u + v) du^2 = 0,$$

definida por la familia de campos vectoriales normales

$$\nu_\lambda(u, v) = (-ku, -kv, 1, \lambda u + 5v),$$

es una deformación versal de un punto umbílico de tipo  $D_{12}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \lambda < 5$ .

**Demostración.** De la translación definida en la prueba del Lema 2.1.2, podemos ver que nuestros valores actuales de los parámetros trasladan la línea  $n = 5$  al eje horizontal de la Figura 3. Ahora, como la línea  $n = 5$  representa la familia 1-paramétrica  $\nu_\lambda$  en el espacio  $\mathcal{N}_1$  y además intersecta transversalmente la componente regular de la curva  $\Gamma$  para  $\lambda = 15/4$  y la línea no simple para  $\lambda = 5$ , el Corolario 2.1.3 implica que para la familia  $\vartheta_\lambda$  el punto umbílico es de tipo  $D_1$ ,  $D_{12}$  o  $D_2$  de acuerdo a  $0 < \lambda < 15/4$ ,  $\lambda = 15/4$  o  $15/4 < \lambda < 5$ , respectivamente. Esto sugiere la versalidad de la transversalidad de la familia  $\vartheta_\lambda$  al conjunto de bifurcación para  $\lambda = 15/4$  (Ver [1], Sección 5.3). Ahora damos una prueba directa siguiendo el método desarrollado en [8]. Para esto, consideremos una familia diferenciable arbitraria de ecuaciones de líneas de curvatura,

$$\omega_s = a(u, v, s) dv^2 + 2b(u, v, s) du dv + c(u, v, s) du^2,$$

con parámetro  $s \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\omega_o$  tiene en el origen un punto umbílico de tipo  $D_{12}$ . Usando la forma normal obtenida en el Lema 5.6 de [8], se puede probar (Proposición 4.1, [8]) que, para  $|s|$  pequeña, esta familia  $\omega_s$  es topológicamente equivalente a la familia

$$\tilde{\omega}_s = v dv^2 + 2(B_1(s)u + B_2(s)v) du dv - v du^2.$$

Consideremos la función real valuada  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  definida en una vecindad  $\mathcal{U}$  del origen de  $\mathbb{R}^k$  por

$$\psi(s) = -\frac{1}{4}B_2^2(s) + \frac{1}{2}B_1(s) + \frac{7}{2},$$

y la familia

$$\vartheta_\lambda = (u + v) dv^2 + ((1 - \lambda)u - 4v) du dv - (u + v) du^2 = 0,$$

con parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \lambda < 5$ .

Entonces, la deformación inducida por  $\psi$  de la familia  $(\vartheta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  es

$$\bar{\omega}_s = \vartheta_{\psi(s)} = (u + v)dv^2 + ((1 - \psi(s)u - 4v)dudv - (u + v)du^2).$$

Ahora, como la función  $\psi$  es continua y  $\psi(0) = \frac{15}{4}$ , existe una vecindad del origen (más pequeña que  $\mathcal{U}$  si es necesario) tal que  $\psi(s) > 0$  en tal vecindad. Como los discriminantes de los polinomios separatrices de las familias  $\tilde{\omega}_s$  y  $\bar{\omega}_s$  son

$$\tilde{\Delta} = 4(B_2^2(s) - 2B_1(s) + 1) \text{ y } \bar{\Delta} = (3 + \psi(s))^2(15 - 4\psi(s))$$

respectivamente, se sigue que  $\tilde{\Delta}$  y  $\bar{\Delta}$  difieren solamente por un factor positivo. Esto implica que la familia  $\tilde{\omega}_s$  es topológicamente equivalente a  $\bar{\omega}_s$ . Por lo tanto, la familia  $\vartheta_\lambda$  es una deformación versal de un punto umbílico del tipo  $D_{12}$ . ■

### 3.3 Deformación versal de un punto umbílico de tipo $\tilde{D}_1$

Consideremos ahora la construcción de una deformación versal de un punto umbílico simple no localmente estable de codimensión 2 de tipo  $\tilde{D}_1$ .

**Ejemplo 3.3.1.** Consideremos la superficie y el campo vectorial normal parametrizados por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{2}uv^2, \frac{1}{2}u^2 + v^2 \right),$$

$$\nu(u, v) = (-ku, -kv, 1, mu + nv).$$

con  $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ .

La ecuación de las líneas de curvatura es

$$(u + v) dv^2 + ((1 - m)u + (1 - n)v) du dv - (u + v) du^2 = 0.$$

El polinomio separatriz en el sistema de coordenadas  $(u, v; p)$  resulta ser

$$f(p) = p^3 + (2 - n)p^2 - mp - 1.$$

La función  $F : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{P}$  de la Sección 2.1 tiene las siguientes componentes:

$$\lambda_1(m, n) = \frac{1}{27} (-11 + 18m - 24n - 9mn + 12n^2 - 2n^3),$$

$$\lambda_2(m, n) = -\frac{1}{3} (-4 - 3m + 4n - n^2).$$

La imagen inversa del origen es el único punto  $(-3, 5)$ , y el jacobiano de  $F$  es  $J = \frac{-m}{3}$ .

De esto vemos que el conjunto singular de  $F$  es la línea  $m = 0$ .

La línea no simple está dada por  $m = n$ .

La imagen inversa de la cúspide  $4\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0$  es la curva algebraica real definida por la ecuación

$$-5 - 36m - 4m^2 - 4m^3 + 48n + 18mn + 4m^2n - 24n^2 - m^2n^2 + 4n^3 = 0,$$

con su única singularidad en el punto  $(-3, 5)$ . Por el Corolario 2.1.3 vemos que el diagrama de bifurcación es topológicamente equivalente al mostrado en la Figura 5.

Para construir una deformación versal de un punto umbílico de tipo  $\tilde{D}_1$  comenzamos nombrando a las componentes conexas de la curva  $\Gamma$  definida en la Sección 2.1 por

$$\Gamma_1(m, n) = 0 \text{ y } \Gamma_2(m, n) = 0,$$

donde  $\Gamma_2$  denota la componente regular. Ahora, sea  $n_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función implícita definida por  $\Gamma_2(m, n_2(m)) = 0$ . Finalmente, definamos

$$\mathcal{U}_2 = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid n > n_2(m)\}.$$

Entonces, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.2.** *Una deformación versal de un punto umbílico de tipo  $\tilde{D}_1$  es*

$$\vartheta(m, n) = (u + v) dv^2 + [(1 - m)u + (1 - n)v] du dv - (u + v) du^2, \quad (3.1)$$

con  $(m, n) \in \mathcal{U}_2$ .

**Demostración.** En primer lugar tenemos el polinomio separatriz

$$f(p) = p^3 + (2 - n)p^2 - mp - 1,$$

con discriminante

$$\Delta(m, n) = -5 - 36m - 4m^2 - 4m^3 + 48n + 18mn + 4m^2n - 24n^2 - m^2n^2 + 4n^3,$$

siendo el origen un punto umbilical de la familia (3.1) de tipo:

- a)  $D_1$  si  $\Delta(m, n) > 0$ ,
- b)  $D_2$  si  $\Delta(m, n) < 0$ ,
- c)  $D_{12}$  si  $(m, n) \in \{\Gamma_1(m, n) = 0\}$  y  $(m, n) \neq (-3, 5)$ ,
- d)  $\tilde{D}_1$  si  $(m, n) = (-3, 5)$ .

Ver la Figura 5.

Ahora, sea

$$\omega_s = a(u, v, s)dv^2 + 2b(u, v, s)du dv + c(u, v, s)du^2$$

una familia arbitraria con parámetro  $s \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\omega_o$  tiene un punto umbilico de tipo  $\tilde{D}_1$  en el origen.

Usando la forma normal obtenida en [8], (Lema 5.6) se puede probar que ([8], Proposición 4.1) para  $|s|$  pequeña, esta familia  $\omega_s$  es topológicamente equivalente a la familia

$$\tilde{\omega}_s = (A_1(s)u + v)dv^2 + (u - A_1(s)v)du dv + (C_1(s)u + (-1 + C_2(s))v)du^2.$$

Consideremos ahora la función  $\psi : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida en una vecindad  $\mathcal{V}$  del origen por

$$\psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s)) = F^{-1}(C_1(s), C_2(s)),$$

donde  $F$  es la función definida en la Sección 2.1 por (2.2).

Entonces, la deformación inducida por la familia (3.1) via  $\psi$  está dada por

$$\tilde{\omega}_s = \vartheta_{\psi(s)} = (u + v)dv^2 + [(1 - \psi_1(s))u + (1 - \psi_2(s))v]du dv - (u + v)du^2,$$

con el polinomio separatriz

$$\bar{f}_s(u, v) = v^3 + (2 - \psi_2(s))v^2u - \psi_1(s)vu^2 - u^3,$$

cuyo discriminante depende del parámetro  $s \in \mathbb{R}^k$  como

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_s = & -5 - 36\psi_1(s) - 4\psi_1^2(s) - 4\psi_1^3(s) + 48\psi_2(s) + 18\psi_1(s)\psi_2(s) \\ & + 4\psi_1^2(s)\psi_2(s) - 24\psi_2^2(s) - \psi_1^2(s)\psi_2^2(s) + 4\psi_2^3(s). \end{aligned}$$

Ahora, como el polinomio separatriz de la familia  $\tilde{\omega}_s$  es

$$\tilde{f}_s(u, v) = v^3 + C_2(s)vu^2 + C_1(s)u^3,$$

con discriminante

$$\tilde{\Delta}_s = 4C_2^3(s) + 27C_1^2(s),$$

tenemos que para todo  $s \in V \subset \mathbb{R}^k$  existen vecindades  $V_1$  y  $V_2$  del origen y del punto  $(-3, 5)$  en  $\mathbb{R}^2$  respectivamente tales que los signos de  $\tilde{\Delta}_s$  y  $\bar{\Delta}_s$  son los mismos.

Esto implica que la familia  $\tilde{\omega}_s$  es topológicamente equivalente a la familia  $\bar{\omega}_s$ .

Por lo tanto la familia 2-paramétrica (3.1) es una deformación versal de un punto umbílico de tipo  $\tilde{D}_1$ . ■

# Apéndice

## Formas Diferenciales Cuadráticas

Las ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura son casos especiales de ciertas formas diferenciales cuadráticas definidas en una variedad bidimensional del siguiente modo.

**Definición A.1.** Una *forma diferencial cuadrática* en una superficie diferenciable  $M$  conexa y orientada, es un elemento del haz de las formas cuadráticas de  $TM \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i \psi_i$  donde  $\varphi_i$  y  $\psi_i$  son 1-formas diferenciales en  $M$  de clase  $C^\infty$ .

Entonces, para cada punto  $p$  en  $M$ ,  $\omega(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es la forma cuadrática en el espacio tangente  $T_p M$  definida para cada  $v \in T_p M$  por

$$\omega(p)(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(p)(v) \cdot \psi_i(p)(v),$$

donde  $\cdot$  es el producto en  $\mathbb{R}$ .

Si  $\mathbf{x} : N \rightarrow M$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$  y  $\omega$  es una forma diferencial cuadrática en  $M$ , se denota por  $\mathbf{x}^*(\omega)$  la forma diferencial cuadrática en  $N$  definida por

$$\mathbf{x}^*(\omega)(q)(\xi) = \omega(\mathbf{x}(q))(d\mathbf{x}_q(\xi)),$$

para  $q \in N$ ,  $\xi \in T_q N$ . Denotaremos también esta forma simplemente por  $\omega^*$  cuando no exista confusión acerca del difeomorfismo  $\mathbf{x}$ .

En coordenadas locales, dada una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  de una superficie  $M$  alrededor de  $p$  y una forma diferencial cuadrática  $\omega$  en  $M$

observamos que si  $(x, y) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ ,  $\xi = d\mathbf{x}^{-1}(v)$  para  $v \in T_p M$ , y si  $\{dx, dy\}$  es la base dual del espacio  $(T_q \mathbb{R}^2)^*$  entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^*(\omega)(q)(\xi) &= \omega(\mathbf{x}(q))(d\mathbf{x}_q(\xi)) \\
 &= \sum_i \varphi_i(\mathbf{x}(q))(d\mathbf{x}_q(\xi)) \cdot \psi_i(\mathbf{x}(q))(d\mathbf{x}_q(\xi)) \\
 &= \sum_i \mathbf{x}^*(\varphi_i)(q)(\xi) \cdot \mathbf{x}^*(\psi_i)(q)(\xi) \\
 &= \sum_i [\varphi_{i1}(q) dx + \varphi_{i2}(q) dy](\xi) \cdot [\psi_{i1}(q) dx + \psi_{i2}(q) dy](\xi) \\
 &= \left( \sum_i \varphi_{i1}(q) \cdot \psi_{i1}(q) \right) dx(\xi) dx(\xi) \\
 &\quad + \left( \sum_i (\varphi_{i1}(q) \cdot \psi_{i2}(q) + \varphi_{i2}(q) \cdot \psi_{i1}(q)) \right) dx(\xi) dy(\xi) \\
 &\quad + \left( \sum_i \varphi_{i2}(q) \cdot \psi_{i2}(q) \right) dy(\xi) dy(\xi) \\
 &= a(q) dy^2(\xi) + b(q) dx(\xi) dy(\xi) + c(q) dx^2(\xi),
 \end{aligned}$$

donde  $\varphi_{ij}$ ,  $\psi_{ij}$  son funciones real-valuadas definidas en  $U \subset \mathbb{R}^2$  y

$$\begin{aligned}
 a(q) &= \sum_i \varphi_{i2}(q) \cdot \psi_{i2}(q), \\
 b(q) &= \sum_i (\varphi_{i1}(q) \cdot \psi_{i2}(q) + \varphi_{i2}(q) \cdot \psi_{i1}(q)) \\
 c(q) &= \sum_i \varphi_{i1}(q) \cdot \psi_{i1}(q).
 \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos escribir

$$\mathbf{x}^*(\omega)(x, y) = \omega^*(x, y) = a(x, y) dy^2 + b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2,$$

donde  $a, b, c$  son funciones real-valuadas definidas en  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

Una forma diferencial cuadrática

$$(x, y)^*(\omega) = a(x, y) dy^2 + b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2$$

se dice **positiva** si la forma cuadrática (algebraica)

$$f(u, v) = b^2(u, v) - 4a(u, v)c(u, v)$$

es definida positiva.

**Nota A.2.** Observamos que para el caso del 1-jet de las ecuaciones diferenciales de líneas de curvatura se tiene  $c(u, v) = -a(u, v)$ , de donde resulta que siempre son positivas las formas diferenciales cuadráticas que salen de la geometría de configuraciones principales locales alrededor de puntos umbílicos aislados.

Si  $\omega$  es una forma diferencial cuadrática positiva, entonces para cada  $p \in M$ , existe una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tal que, si

$$\mathbf{x}^*(\omega)(x, y) = a(x, y) dy^2 + b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2,$$

entonces

$$(b^2 - 4ac)(x, y) \geq 0$$

para cada  $(x, y) \in U$  y

$$(b^2 - 4ac)^{-1}(0) = a^{-1}(0) \cap b^{-1}(0) \cap c^{-1}(0).$$

Por el teorema de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, existen dos foliaciones  $f_1(\omega)$  y  $f_2(\omega)$  de la superficie  $M$  por curvas que son tangentes al campo vectorial

$$Q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + P(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

definido por

$$Q(x, y) = 2a(x, y), \quad P(x, y) = -b(x, y) + (-1)^j \sqrt{(b^2 - 4ac)(x, y)}$$

para  $j = 1$  y  $j = 2$  respectivamente, excepto posiblemente cuando  $a = 0$ .

En consecuencia, para cada punto  $p \in M$  el subconjunto

$$\omega(p)^{-1}(0) \subset T_p M$$

es

(i) la unión de dos líneas transversales (en cuyo caso  $p$  se dice **punto regular** de  $\omega$ ),

o es

(ii) todo el espacio  $T_p M$  (en cuyo caso  $p$  se dice **punto singular** de  $\omega$ ).

Cada forma diferencial cuadrática positiva  $\omega$  define una **configuración**,

$$C(\omega) = \{Sing(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)\},$$

donde  $Sing(\omega)$  es el conjunto de puntos singulares de  $\omega$  y  $f_1(\omega)$ ,  $f_2(\omega)$  son las foliaciones transversales en  $M - Sing(\omega)$  cuyas líneas tangentes en cada punto regular  $p$  están dadas por las líneas transversales del kernel de  $\omega(p)$ .

Sea  $\omega$  una forma diferencial cuadrática positiva en  $M$  con un punto singular  $p \in M$ . Entonces  $\omega$  puede expresarse en un sistema de coordenadas adecuado  $(u, v) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  en la forma

$$(u, v)^*(\omega) = (a_1 u + a_2 v + M_1(u, v)) dv^2 + (b_1 u + b_2 v + M_2(u, v)) du dv + (c_1 u + c_2 v + M_3(u, v)) du^2,$$

con  $M_i(u, v) = \mathcal{O}((u^2 + v^2)^{1/2})$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Llamamos a

$$(a_1 u + a_2 v) dv^2 + (b_1 u + b_2 v) du dv + (c_1 u + c_2 v) du^2$$

la **parte lineal** de  $\omega$ .

Un punto singular  $p$  de  $\omega$  se dice **simple** si la parte lineal de  $\omega$  es una forma diferencial cuadrática positiva.

**Lema A.3.** Para cada forma diferencial cuadrática positiva  $\omega$  en  $M$  con un punto singular simple  $p$  se cumple que los coeficientes de su parte lineal satisfacen:

$$b_1^2 - 4a_1 c_1 > 0,$$

y

$$(b_1^2 - 4a_1c_1)(b_2^2 - 4a_2c_2) - (b_1b_2 - 2a_1c_2 - 2a_2c_1)^2 > 0,$$

**Demostración.** La parte lineal de  $\omega$  es positiva si la forma cuadrática

$$f(u, v) = (b_1u + b_2v)^2 - 4(a_1u + a_2v)(c_1u + c_2v)$$

es definida positiva. Desarrollando y factorizando esta expresión obtenemos

$$f(u, v) = (b_1^2 - 4a_1c_1)u^2 + 2(b_1b_2 - 2a_1c_2 - 2a_2c_1)uv + (b_2^2 - 4a_2c_2)v^2.$$

El lema se sigue ahora del hecho de que una forma cuadrática

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

es definida positiva si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

es definida positiva, esto es:  $A > 0$  y  $AC - B^2 > 0$ . ■

**Definición A.4.** Se dice que dos formas diferenciales cuadráticas positivas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h$  transforma la configuración de  $\omega_1$  en la configuración de  $\omega_2$ , esto es,  $h(\text{Sing}(\omega_1)) = \text{Sing}(\omega_2)$  y manda las hojas de las foliaciones  $f_1(\omega_1)$  y  $f_2(\omega_1)$  en las hojas de las foliaciones  $f_1(\omega_2)$  y  $f_2(\omega_2)$ , respectivamente.

**Nota A.5.** La ecuación diferencial (1.5) de líneas de curvatura de una superficie  $M$  inmersa en  $\mathbb{R}^4$  mediante  $\mathcal{I} : M \rightarrow \mathbb{R}^4$  con campo vectorial normal umbilical  $\nu$  es una forma diferencial cuadrática  $\omega$  en  $M$ , y la configuración de  $\omega$  corresponde a la  $\nu$ -configuración principal de la superficie  $M$ , i.e.,  $\{\text{Sing}(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)\}$  coincide con  $(\mathcal{U}_\nu, \mathcal{L}_\nu, l_\nu)$ .

Uno de los teoremas principales de [6] es el siguiente.

**Teorema A.6.** (a) Dada una configuración  $\{f_1, f_2, U\}$  en  $M$ , existe una forma diferencial cuadrática positiva  $\omega$  tal que  $C(\omega) = \{f_1, f_2, U\}$ .

(b) Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son dos formas diferenciales cuadráticas positivas tales que  $C(\omega_1) = C(\omega_2)$ , entonces  $\omega_1 = \lambda\omega_2$ , donde  $\lambda$  es una función diferenciable  $\lambda : M - U \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ .

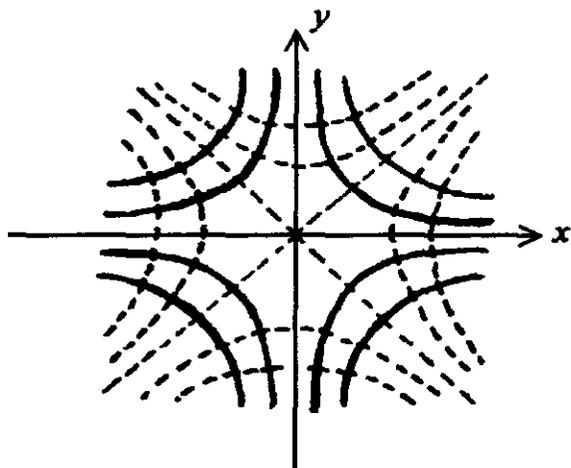
**Ejemplo A.8.** La ecuación diferencial cuadrática en el plano  $\mathbb{R}^2$

$$(x^2 + xy) dy^2 + (2xy - x^2 + y^2) dx dy + (y^2 - xy) dx^2 = 0,$$

se escinde en dos familias de curvas que se intersectan a  $45^\circ$ , que son soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales

$$(1) x dy + y dx, \quad y \quad (2) (x + y) dy + (y - x) dx = 0,$$

donde el campo vectorial diferenciable fuera del origen que define la ecuación (2) se obtiene del campo que define la ecuación (1) por una rotación de  $45^\circ$ . Ver la Figura 9.



**Fig. 9.** Configuración local de la ecuación diferencial cuadrática del ejemplo A.8.

## Bibliografía

- [1] Arnol'd, V. I.; *Lectures on Bifurcations and Versal Families*; Russian Math. Surveys, **27** (1972), 54-123.
- [2] Bol, G.; *Über Nabelpunkte auf einer Eifläche*; Math. Z. **49** (1943/1944), 389-410.
- [3] Darboux, G.; *Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un umbilic*; Note VII, Leçons sur la théorie général des surfaces, Vol. IV, Gauthiers-Villars, (1896).
- [4] Do Carmo, M.; *Riemannian Geometry*; Birkhäuser (1992).
- [5] Fulton, W.; *Algebraic Curves* ; Benjamin, (1969).
- [6] Guíñez, V.; *Positive Quadratic Differential Forms and Foliations with Singularities on Surfaces*; Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 477-502.
- [7] Guíñez, V.; *Locally Stable Singularities for Positive Quadratic Differential Forms*; J. of Diff. Eq. **110** (1994), 1-37.
- [8] Gutierrez, C., Guíñez, V.; *Positive Quadratic Differential Forms: linearization, finite determinacy and versal unfolding*; Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **5** (1996), no. 4, 661-690.
- [9] Gutierrez, C., Mercuri, F., Sánchez-Bringas, F.; *On a Conjecture of Carathéodory: Analyticity Versus Smoothness* ; Experiment. Math., Vol. 5, 1 (1996), 33-38.
- [10] Gutierrez, C., Sánchez-Bringas, F.; *On a Loewner's Umbilic-Index-Conjecture for Surfaces in  $\mathbb{R}^4$* ; J. Dynam. Control Systems, Vol. 4, 1 (1998), 127-136.
- [11] Gutierrez, C., Sotomayor, J.; *An approximation theorem for immersions with stable configurations of lines of principal curvature*; Lecture Notes in Math., **1007**, Springer, (1983), 332-368.