00384

3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

PROPIEDADES CRECIENTES Y DECRECIENTES DE WHITNEY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

M. en C. FERNANDO OROZCO ZITLI

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

296099

MEXICO, D. F. 1999.

Dedico el presente trabajo

a mis padres

Fernando y Petra

y a mis hermanos

Silvia, Teresa, Joaquín, Leticia y Diego

con todo mi cariño.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas
que hicieron posible que este trabajo
llegara a su fin :

al Dr. Alejandro Illanes Mejía,

a los sinodales:
Isabel P. Angel T.,
Adalberto G., Janusz C.,
Pawel K., Raúl E..

a todos mis amigos,

a todo el grupo de teoría de hiperespacios y continuos,

a todos los profesores de la academia de matemáticas
de la Facultad de Ciencias de la UAEMéx.,

a la familia Quintana Salazar,

a todos los que son y fueron mis alumnos,

a las siguientes instituciones:
CONACyT,
Instituto de Matemáticas de la UNAM
y Facultad de Ciencias de la UAEMéx.,

a mi abuela Juana,

a todos mis tios y primos,

a la M. en C. Rocío Rojas Monroy, por la realización de los dibujos.

Índice General

Prólogo

Las propiedades de Whitney fueron introducidas en [10, p. 165], y las propiedades secuencial fuerte reversible de Whitney fueron definidas en [15, p. 237]. Desde entonces, muchos autores las han estudiado. En [7] Capítulo VIII, se presenta un estudio detallado de estas propiedades.

Este trabajo es muy cercano al trabajo que se muestra en este Capítulo. Nosotros introducimos los conceptos de **propiedad creciente de Whitney y propiedad secuencial decreciente de Whitney**, con respecto al primer concepto se conoce que las siguientes propiedades de Whitney son también propiedades crecientes de Whitney:

1. conexidad local (ver [18, Proposición 1, p. 150]),
2. ser un arco (ver [13, Teorema 4]),
3. ser una curva cerrada simple (ver [13, Teorema 4]),
4. conexidad por arcos (ver [18, Proposición 2, p. 151]),
5. indescomponibilidad hereditaria (ver [18, Proposición 8, p. 155]),
6. unicoherencia, para la clase de continuos de Peano (ver [6, Teorema A, p. 252]).

En el Capítulo 1, solo mostramos la teoría básica de los hiperespacios.

En el Capítulo 2, nos dedicamos a estudiar el segundo concepto, en donde mostramos que las siguientes propiedades secuencial fuerte reversible de Whitney, también son propiedades secuencial decreciente de Whitney:

1. Atriodicidad,
2. Conexidad local,
3. Encadenabilidad por continuos,
4. No contener arcos,
5. Propiedad de Kelley,

6. Irreducibilidad,
7. Indescomponibilidad,
8. Indescomponibilidad hereditaria,
9. Unicoherencia,
10. Otras propiedades.

También en la Sección 2.6.2 se demuestra que la propiedad de ser hereditariamente arco conexo es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney, esto responde afirmativamente a la pregunta 33.10 de [IN].

En el Capítulo 3, realizamos un estudio del primer concepto, en donde probamos que las siguientes propiedades de Whitney también son propiedades creciente de Whitney:

1. Ser el Arcoiris.
2. Ser cualquier solenide particular.
3. Ser como círculo propio.
4. Ser aplanable y no ser aplanable.
5. Conexidad por trayectorias uniforme.
6. Encadenabilidad.
7. Encadenabilidad por continuos.
8. Indescomponibilidad hereditaria.
9. Indescomponibilidad para la clase de los continuos encadenables.
10. Tener span cero para cualquiera de los tipos de span.

En las Secciones 3.10 y 3.11 demostramos que las propiedades de Whitney aposindesis y descomponibilidad no son propiedades crecientes de Whitney.

Capítulo 1

Preliminares

Presentaremos algunas definiciones básicas de Topología, que usaremos en el desarrollo de este trabajo.

En un espacio métrico Y, con una métrica ρ:

el diámetro de un subconjunto A de Y, se denota por diám $[A]$. Para cada $x \in Y$ y $\varepsilon > 0$, la **bola con centro en x y de radio ε**, la definimos por $B\varepsilon\rho(x) = \{y \in Y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

1.1 Los Hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X

En la presente sección daremos una introducción de los hiperespacios más conocidos, algunos de los resultados se presentarán sin demostración, remitiendo al lector a una referencia específica.

Empezamos con la definición de lo que es un continuo:

Definición 1 *Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.*

En este trabajo X denota a un continuo con una métrica d.

Definamos

$$2^X = \{A \subset X : A \textbf{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Al conjunto 2^X se le define una métrica de la siguiente manera: primero, para $B \subset X$ y $\varepsilon > 0$, sea

$$N(\varepsilon, B) = \bigcup\{B_d(\varepsilon, x) : x \in B\}.$$

Ahora definamos la siguiente función

$$H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty) \text{ como}$$
$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [14, Teorema 0.2, p. 2] se demuestra que la función H es una métrica para 2^X y además se le llama la *métrica de Hausdorff*. De esta manera, $(2^X, H)$ es un espacio métrico. A este espacio se le llama el *Hiperespacio de los subconjuntos cerrados de* X.

Con respecto a la métrica de Hausdorff, tenemos el siguiente lema.

Lema 1 *$H(E, F) < \varepsilon$ si y sólo si $E \subset N(\varepsilon, F)$ y $F \subset N(\varepsilon, E)$.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que $H(E, F) < \varepsilon$. Entonces existe $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ tal que $E \subset N(\varepsilon_1, F)$ y $F \subset N(\varepsilon_1, E)$. Dado que $N(\varepsilon_1, F) \subset N(\varepsilon, F)$ y $N(\varepsilon_1, E) \subset N(\varepsilon, E)$, obtenemos que $E \subset N(\varepsilon, F)$ y $F \subset N(\varepsilon, E)$.

Ahora, supongamos que $E \subset N(\varepsilon, F)$ y $F \subset N(\varepsilon, E)$. Sea $\mathcal{C} = \{N(\delta, E) : \delta \in (0, \varepsilon)\}$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de F. Sea $b \in F$. Dado que $F \subset N(\varepsilon, E)$, existe $a \in E$ tal que $d(b, a) < \varepsilon$. Sea $\delta \in (d(b, a), \varepsilon)$. Entonces $b \in N(\delta, E)$. De aquí que $\mathcal{C}$ es una cubierta de F. Claramente, cada elemento de $\mathcal{C}$ es abierto en X. Esto demuestra que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de F. De esta parte y de que F es compacto, se tiene que existen un número natural n y $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n$, con $\delta_i \in (0, \varepsilon)$, tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, E) = N(\delta_n, E)$. De manera análoga se puede obtener $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que $E \subset N(\eta, F)$. Sea $\varepsilon_1 = \text{máx}\{\eta, \delta_n\}$. Entonces $E \subset N(\varepsilon_1, F)$ y $F \subset N(\varepsilon_1, E)$. De donde $H(E, F) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$. Esto termina la demostración del lema. ■

Ahora definamos

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Tomando la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(X)$, resulta éste un espacio métrico. A los elementos de $C(X)$, se les llama *subcontinuos* de X. A este espacio se le llama el *hiperespacio de los subcontinuos de* X.

En [14, Teorema 0.8, p. 7] se demuestra que 2^X y $C(X)$ son compactos, en [14, Teorema 1.9, p. 63] se demuestra que 2^X es conexo y en [14, Teorema 1.12, p. 65] se demuestra que $C(X)$ es conexo por trayectorias. Por lo que se deduce que 2^X y $C(X)$ son continuos.

Los hiperespacios de nuestro interés serán $C(X)$ y $C(C(X))$. La correspondiente métrica de Hausdorff para $C(C(X))$ la denotaremos por H^2.

1.2 L-convergencia en $C(X)$

En $C(X)$ se tiene la convergencia de sucesiones, en términos de la métrica de Hausdorff. A continuación, daremos otra noción de convergencia para sucesiones de elementos de $C(X)$, la cual le llamaremos *L-convergencia*, que es equivalente a la convergencia de sucesiones que se da en $C(X)$, a partir de la métrica de Hausdorff. Así, en esta sección mencionaremos los elementos necesarios para enunciar dicha equivalencia, que será de gran utilidad en este trabajo.

Acontinuación presentamos las definiciones de límite superior y límite inferior de una sucesión.

Definición 2 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $C(X)$. Definimos el* ***límite inferior de*** *$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ denotado por $\liminf A_n$, y el* ***límite superior de*** *$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, denotado por $\limsup A_n$, como sigue:*

(i) $\liminf A_n = \{x \in X :$ *para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $B_d(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda n salvo un número finito*$\}$.

(ii) $\limsup A_n = \{x \in X :$ *para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $B_d(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n*$\}$.

Algunas de las propiedades de los límites superior e inferior de una sucesión, se muestran en el siguiente teorema (ver [14, Teorema 0.6, p. 4]).

Teorema 1 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $C(X)$. Entonces:*

(i) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$,

(ii) $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son subconjuntos cerrados en X y*

(iii) $\limsup A_n \neq \emptyset$.

De este Teorema podemos tener la siguiente definición.

Definición 3 *Decimos que una sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $C(X)$, ***L-converge a un elemento*** A ***de*** $C(X)$, *si* $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.

A continuación presentamos un resultado que nos relaciona los límites superior e inferior de una sucesión en términos de sucesiones en X.

Lema 2 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de elementos de* $C(X)$. *Entonces:*

1. $x \in \liminf A_n$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* X *tal que* $x_n \to x$ *y* $x_n \in A_n$ *para cada* n.

2. $x \in \limsup A_n$ *si y sólo si existen una sucesión de números naturales* $n_1 < n_2 < \ldots$ *y puntos* $x_{n_k} \in A_{n_k}$ *para cada* k, *tales que* $x_{n_k} \to x$.

En el siguiente resultado (ver [7, Teorema 4.7, p. 25]) se muestran las relaciones que hay entre la convergencia en $C(X)$ y la L-convergencia en $C(X)$.

Teorema 2 *Sean* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de elementos de* $C(X)$ *y* $A \in C(X)$. *Entonces* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* A *si y sólo si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *L-converge a* A.

En el siguiente resultado mostramos una relación que existe entre los límites de dos sucesiones de elementos de $C(X)$.

Lema 3 *Sean* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones en* $C(X)$ *tales que* $A_n \to A$ *y* $B_n \to B$, *con* A, $B \in C(X)$. *Se tiene que: si* $A_n \subset B_n$ *para cada* n, *entonces* $A \subset B$.

Demostración.

Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $\liminf A_n = A$ (por el Teorema 2), existe un número natural n_0 tal que $B_d(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$. Debido a que, por hipótesis, $A_n \subset B_n$ para cada n, se tiene que, $B_d(\varepsilon, a) \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$. Entonces $a \in \liminf B_n$. Dado que $\liminf B_n = B$ (por el Teorema 2), $a \in B$. Esto demuestra que $A \subset B$. ■

1.3 Funciones de Whitney para $C(X)$

En gran parte de este trabajo, usaremos el hecho de que existen funciones de Whitney para el hiperespacio $C(X)$. Así que a continuación presentamos algunos resultados y definiciones, que necesitaremos más adelante.

Sean X un continuo y $\mathcal{H} \subset C(X)$. Una **función de Whitney para** $\mathcal{H}$ es una función continua $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) para cualesquiera A, $B \in \mathcal{H}$ y $A \subsetneq B$, $\mu(A) < \mu(B)$.

(2) $\mu(A) = 0$ si y sólo si $A \in \mathcal{H} \cap \{\{x\} : x \in X\}$.

En [7, Teorema 13.4, p. 107], da un ejemplo de una función de Whitney para cualquier hiperespacio de un compacto. Para otras construcciones de funciones de Whitney ver los Ejercicios 13.5, 13.7 y 13.8 de [7].

En [14] (ver Teoremas 0.50.1, 0.50.2 y 0.50.3, p. 25 y 26) se muestran las construcciones de tres funciones de Whitney para el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo.

Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y X tiene más de un punto, entonces es fácil demostrar que $\frac{1}{\mu(X)}\mu$ es una función de Whitney para $C(X)$. Así que podemos considerar que el contradominio de toda función de Whitney es el intervalo $[0,1]$.

Es bien conocido que para cada $t \in [0,1]$, $\mu^{-1}(t)$ es un subcontinuo de $C(X)$ (ver Teorema 14.2, p. 400 de [14]). A estas fibras se les llama *niveles de Whitney*, y cuando $t \in (0,1]$ se les llama *niveles de Whitney positivos.*

Dada una función de Whitney, μ, para $C(X)$ y $A \in C(X)$, por cada $t \in [0, \mu(A)]$, definamos

$$C(A,t) = (\mu \mid C(A))^{-1}(t).$$

Dado que $(\mu \mid C(A))^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney para $C(A)$, tenemos que $C(A,t)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ (ver [14, Teorema 14.2, p. 400]).

En el siguiente lema se tiene que, si dos elementos de un nivel de Whitney se intersectan, entonces existe un arco que los une, contenido en el nivel de Whitney (ver [14, Lema 14.8.1, p. 405]).

Lema 4 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Si A, $B \in \mu^{-1}(t)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe un arco α, contenido en $C(A \cup B) \cap \mu^{-1}(t)$, que une a A con B. Más aún si K es una componente de $A \cap B$, entonces α puede elegirse de tal manera que $K \subset L$, para cada $L \in \alpha$.*

El siguiente lema se debe a Kelley (ver [8, Lema 1.28, p. 76]).

Lema 5 *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si K, $L \in C(X)$ cumplen que $K \subset N(\delta, L)$ y $|\mu(L) - \mu(K)| < \delta$, entonces $H(K, L) < \varepsilon$.*

1.4 Arcos ordenados en $C(X)$

En la teoría de los hiperespacios, es de gran importancia la existencia de los arcos ordenados. Así que mencionaremos el resultado que usaremos con más frecuencia en este trabajo.

Definición 4 *Sean A, $B \in C(X)$, con $A \subsetneq B$. Un **arco ordenado de A a B**, es una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si s, $t \in [0,1]$, con $s \leq t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$.*

El siguiente teorema (ver [14, Teorema 1.8, p. 59]) muestra la existencia de los arcos ordenados en $C(X)$.

Teorema 3 *Para cualesquiera A, $B \in C(X)$, con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B.*

Capítulo 2

Propiedades secuenciales

2.1 Introducción

Consideremos un continuo X, μ una función de Whitney para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1]$ tal que $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es natural estudiar aquellas propiedades topológicas las cuales son preservadas bajo la aproximación de X por los niveles positivos $\mu^{-1}(t_n)$. En particular los siguientes conceptos formalizan esta idea:

1. *Una* ***propiedad fuerte reversible de Whitney*** *es una propiedad topológica $\mathcal{P}$, que cumple la siguiente condición: si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y cada nivel positivo $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

2. *Una* ***propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney*** *es una propiedad topológica $\mathcal{P}$, que cumple la siguiente condición: si existe una función de Whitney μ para $C(X)$ y existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $(0,1)$ tal que $t_n \to 0$ y cada nivel $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Siguiendo estas nociones, es natural estudiar aquellas propiedades topológicas las cuales son preservadas bajo la aproximación a un nivel positivo $\mu^{-1}(t_0)$ por los niveles $\mu^{-1}(t_n)$. Esta idea está formalizada en la siguiente definición.

Definición 5 *Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una* ***propiedad secuencial decreciente de Whitney****, siempre que se cumpla la siguiente* *condición: si μ es una función de Whitney para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y existe $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en el intervalo $(t,1]$ tal que $t_n \to t$ y cada nivel $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Muchos autores se han dedicado a estudiar las propiedades secuenciales fuertes reversibles de Whitney y las propiedades fuertes reversibles de Whitney, para bastantes propiedades topológicas ya se sabe si son o no propiedades secuenciales reversibles de Whitney y propiedades fuertes reversibles de Whitney. En la Sección VIII de [7], se encuentra una recopilación del trabajo que se había hecho hasta 1999.

Es de nuestro interés estudiar qué propiedades también son secuenciales decrecientes de Whitney.

Empezamos el desarrollo de este capítulo, presentando el siguiente lema, que muestra algunas propiedades que cumple la función unión (ver [8, Lema 1.1, p. 23]).

Lema 6 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $\sigma : C(C(X)) \to C(X)$ definida como $\sigma(\mathcal{D}) = \bigcup\{E : E \in \mathcal{D}\}$. Entonces σ cumple las siguientes condiciones:*
i) dada $\varepsilon > 0$, si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in C(C(X))$ son tales que $H^2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) < \varepsilon$, entonces $H(\sigma(\mathcal{D}_1), \sigma(\mathcal{D}_2)) < \varepsilon$,
ii) σ es una función continua,
ii) sean $t \in [0,1]$ y $A \in \mu^{-1}(t)$. Si $t_0 \in [0,t)$, entonces $\sigma(C(A) \cap \mu^{-1}(t_0)) = A$.

En este trabajo usaremos las propiedades de la función σ sin hacer referencia al Lema 6.

Cuando tenemos dos subcontinuos, uno contenido propiamente en el otro, es importante encontrar un subcontinuo entre ellos dos, de algún tamaño bajo una función de Whitney esta idea se formaliza en los siguientes dos resultados:

Lema 7 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $\mathfrak{D}$ un subcontinuo no degenerado de $C(X)$ y $\mathcal{M}$ un subcontinuo de $\mathfrak{D}$. Si $t \in (\mu(\sigma(\mathcal{M})), \mu(\sigma(\mathfrak{D}))]$, entonces existe $\mathcal{N} \in C(\mathfrak{D})$ tal que $\mu(\sigma(\mathcal{N})) = t$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.*

Demostración.

Sea α un arco ordenado de $\mathcal{M}$ a $\mathfrak{D}$ en $C(\mathfrak{D})$ (tal arco existe por el Teorema 3). Es decir α es una función continua $\alpha : [0,1] \to C(\mathfrak{D})$ tal que $\alpha(0) = \mathcal{M}$, $\alpha(1) = \mathfrak{D}$ y si $r \leq s$, entonces $\alpha(r) \subset \alpha(s)$. Consideremos la función continua $\mu \circ \sigma \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$. Como $\mu(\sigma(\alpha(0))) = \mu(\sigma(\mathcal{M})) < t \leq \mu(\sigma(\mathfrak{D})) = \mu(\sigma(\alpha(1)))$, existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\sigma(\alpha(s))) = t$. Sea $\mathcal{N} = \alpha(s)$. Entonces $\mathcal{N}$ satisface las propiedades requeridas. ■

Lema 8 *Sean X un continuo, $Y \in C(X)$, $A \in C(Y)$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $t \in (\mu(A), \mu(Y)]$, entonces existe $B \in C(Y,t)$ tal que $A \subset B$.*

Demostración.

Dado que $\{A\} \in C(C(Y))$ y $\mu(\sigma(\{A\})) = \mu(A) < t \leq \mu(Y) = \mu(\sigma(C(C(Y))))$, por el Lema 7, tenemos que existe $\mathcal{N} \in C(C(Y))$ tal que $\{A\} \subset \mathcal{N}$ y $\mu(\sigma(\mathcal{N})) = t$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{N})$ satisface las propiedades requeridas. ■

2.2 Atriodicidad

2.2.1 Introducción

En esta sección introduciremos las definiciones de un triodo, triodo débil y continuo atriódico. Además de algunos resultados que necesitaremos en la siguiente sección.

Definición 6 *Decimos que un continuo X es un* ***triodo*** *si existe un subcontinuo N tal que $X \backslash N$ se puede escribir en la forma $X \backslash N = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$, donde $E_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq 3$ y E_i y E_j están mutuamente separados siempre que $i \neq j$.*

Definición 7 *Decimos que un continuo X es* ***atriódico*** *si no contiene triodos.*

Definición 8 *Decimos que un continuo X es un* ***triodo débil*** *si existen subcontinuos X_1, X_2 y X_3 de X tales que*

1) $X = \bigcup_{i=1}^{3} X_i$,

2) $X_i \not\subseteq \bigcup_{j\neq i} X_j$ *y*

3) $\bigcap_{i=1}^{3} X_i \neq \emptyset$.

Es conocido que un triodo débil contiene un triodo (ver [20]).

Teorema 4 *Si X es un triodo débil, entonces contiene un triodo.*

El siguiente teorema lo usaremos para demostrar el resultado 6.

Teorema 5 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $A \in C(X)$ y $t \in (\mu(A), 1]$. Entonces el conjunto $C_A^t = \{B \in \mu^{-1}(t) : A \subset B\}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.*

Demostración.

Para ver que C_A^t es cerrado en $\mu^{-1}(t)$, sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de C_A^t tal que converge a B, para algún $B \in \mu^{-1}(t)$. Demostraremos que $B \in C_A^t$. Dado que $A \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset B$ (por el Lema 3). Así que $B \in C_A^t$.

Veamos la conexidad de C_A^t. Sean $B_1 \neq B_2 \in C_A^t$. Dado que $A \subset B_1 \cap B_2$, por el Lema 4 existe α un arco con puntos extremos B_1 y B_2 en $C(B_1 \cup B_2, t)$ tal que para cada $L \in \alpha$, $A \subset L$. Así que $\alpha \subset C_A^t$. Esto establece la conexidad de C_A^t. ■

El siguiente resultado, nos muestra, si tenemos un subcontinuo de un nivel de Whitney positivo, cómo crear nuevos subcontinuos en otros niveles de Whitney.

Teorema 6 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $t_0 \in [0,1)$ y $t \in (t_0, 1]$. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} C_A^t$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{L} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} C_A^t$. Primero demostraremos que $\mathcal{L}$ es cerrado en $\mu^{-1}(t)$. Para ver esta parte, sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{L}$ que converge a B, para algún $B \in \mu^{-1}(t)$. Demostraremos que $B \in \mathcal{L}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $B_n \in C_{A_n}^t$. Dado que $\mathcal{A}$ es compacto, podemos suponer que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, para algún $A \in \mathcal{A}$. Debido a que $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene, por el Lema 3, que $A \subset B$. De donde $B \in C_A^t$. Por lo tanto $B \in \mathcal{L}$.

Para ver que $\mathcal{L}$ es conexo, supongamos lo contrario. Entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{L}$ tales que $\mathcal{L} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Para cada $i = 1, 2$, definamos

$$\mathcal{W}_i = \{A \in \mathcal{A} : C_A^t \subset \mathcal{F}_i\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{W}_i$ es no vacío para cada $i \leq 2$. Sean $i \leq 2$ y $E \in \mathcal{F}_i$. Entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $E \in C_A^t$. De la conexidad de C_A^t y de que $C_A^t \subset \mathcal{L}$, se sigue que $C_A^t \subset \mathcal{F}_i$. De esto concluimos que $A \in \mathcal{W}_i$ y termina la demostración de que $\mathcal{W}_i$ es no vacío. Para demostrar que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son ajenos, supongamos lo contrario. Entonces existe $A \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$. Así que $C_A^t \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Por el Lema 8, $C_A^t \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son ajenos y establece que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son ajenos. Ahora, demostraremos que $\mathcal{W}_1$ es cerrado, la demostración de que $\mathcal{W}_2$ es cerrado es análoga. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{W}_1$ que converge a A, para algún $A \in \mathcal{A}$. Demostraremos que $A \in \mathcal{W}_1$. Dado que $\{C_{A_n}^t\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C(\mu^{-1}(t))$ (por el Teorema 5) y $C(\mu^{-1}(t))$ es compacto, podemos suponer que $\{C_{A_n}^t\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{C}$, para algún $\mathcal{C} \in C(\mu^{-1}(t))$. Debido a que $C_{A_n}^t \subset \mathcal{F}_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 3, se tiene que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_1$. Ahora necesitamos demostrar que $\mathcal{C} \subset C_A^t$. Para ver esta contención sea $E \in \mathcal{C}$. Por el Lema 2, existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que converge a E y $E_n \in C_{A_n}^t$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3, $A \subset E$. De donde $E \in C_A^t$. Esto demuestra que $\mathcal{C} \subset C_A^t$. Así, dado que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_1$, se sigue que C_A^t intersecta a $\mathcal{F}_1$. Como C_A^t es conexo y $C_A^t \subset \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, obtenemos que $C_A^t \subset \mathcal{F}_1$. De donde $A \in \mathcal{W}_1$. Esto demuestra que $\mathcal{W}_1$ es cerrado.

Finalmente veamos que $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{A}$. Para ver esta parte, es suficiente demostrar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Dado que C_A^t es conexo, $C_A^t \subset \mathcal{F}_1$ o $C_A^t \subset \mathcal{F}_2$. Así que $A \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$.

De donde concluimos que $\mathcal{A}$ no es conexo. Esta contradicción establece la conexidad de $\mathcal{L}$ y termina la demostración del teorema. ■

2.2.2 Teorema principal

En [14, Teorema 14.49, p. 458] se demuestra que la atriodicidad es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.

En topología general nos encontramos con el siguiente resultado, que es muy fácil de demostrar.

Teorema 7 *Sean Z un espacio topológico y N un subconjunto de Z. Si N y Z son conexos y $Z - N = M_1 \cup M_2$, donde M_1 y M_2 están separados, entonces $M_1 \cup N$ y $M_2 \cup N$ son conexos.*

Ahora demostraremos el siguiente resultado más fuerte, el cual lo usaremos en la demostración de que la atriodicidad es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

Teorema 8 *Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $\mu^{-1}(t_0)$ contiene un triodo, entonces existe $s \in (t_0, 1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ contiene un triodo débil para cada $t \in (t_0, s]$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{M}$ un triodo en $\mu^{-1}(t_0)$. Entonces existe un subcontinuo $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \backslash \mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{S}_i$, donde $\mathcal{S}_i$ y $\mathcal{S}_j$ están mutuamente separados siempre que $i \neq j$ y $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq 3$. Sea $\mathcal{A}_i = \mathcal{N} \cup \mathcal{S}_i$ para cada $i \leq 3$. Por el Teorema 7, tenemos que, para cada $i \leq 3$, $\mathcal{A}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$. Para cada $i \leq 3$, elegimos $E_i \in \mathcal{S}_i$. Dado que $\mathcal{S}_i$ y $\mathcal{S}_j$ están mutuamente separados siempre que $i \neq j$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, E_i) \cap \bigcup\limits_{j \neq i} \mathcal{A}_j = \emptyset$. Sea δ como en el Lema 5 para el número $\frac{\varepsilon}{2}$. Sean $s \in (t_0, 1]$ tal que $s - t_0 < \delta$ y $t \in (t_0, s]$.

Definamos, para cada $i \leq 3$,

$$\mathcal{T}_i = \bigcup\nolimits_{A \in \mathcal{A}_i} C_A^t.$$

Afirmamos que $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i$ es un triodo débil. Primero demostraremos que $\bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i \neq \emptyset$. Dado que $\mathcal{N} \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i$, tenemos que $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} C_A^t \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i$. De donde $\bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i$ es no vacío. Dado que cada $\mathcal{T}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ (por el Teorema 6), se sigue que $\mathcal{T}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Por último demostraremos que $\mathcal{T}_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{T}_j$. Debido a que $C_{E_i}^t \subset \mathcal{T}_i$, basta demostrar que $C_{E_i}^t \cap \bigcup_{j \neq i} \mathcal{T}_j = \emptyset$. Sea $E \in C_{E_i}^t$. Dado que $\mu(E) - \mu(E_i) < \delta$, por la elección de δ, $H(E, E_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, si $E \in \bigcup_{j \neq i} \mathcal{T}_j$, entonces existe $A \in \bigcup_{j \neq i} \mathcal{A}_j$ tal que $E \in C_A^i$. Debido a que $\mu(E) - \mu(A) < \delta$, por la elección de δ, $H(A, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. De donde concluimos que $A \in B_H(\varepsilon, E_i)) \cap \bigcup_{j \neq i} \mathcal{A}_j$. Esta contradicción establece que $\mathcal{T}_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{T}_j$ para cada $i \leq 3$. Por lo tanto $\mathcal{T}$ es un triodo débil. Esto completa la demostración del teorema. ■

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los Teoremas 8 y 4.

Corolario 1 *La atriodicidad es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

2.3 Conexidad local

2.3.1 Introducción

En esta sección recordamos el concepto de conexidad local y algunos resultados que nos serán de utilidad para la próxima sección.

Decimos que un espacio topológico Z es ***localmente conexo en un punto*** *p en Z, si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo C de X tal que $p \in C \subset U$. Decimos Z es* ***localmente conexo****, si es localmente conexo en cada uno de de sus puntos.*

El siguiente resultado es una caracterización de los continuos localmente conexos (ver [21, p. 23]).

Lema 9 *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, X es una unión finita de subcontinuos donde cada uno de ellos tiene diámetro menor que ε.*

Es muy importante saber que, si tenemos un subcontinuo de un nivel de Whitney con diámetro pequeño, entonces se puede obtener un nivel de Whitney para el hiperespacio de la unión de todos los elementos de ese subcontinuo, que también tiene diámetro pequeño. Esta idea se formaliza en el siguiente resultado.

Lema 10 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0, 1)$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $\eta > 0$ y $s \in (t_0, 1]$ tales que si $t \in (t_0, s]$ y $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$, con díam $[\mathcal{A}] < \frac{\eta}{2}$, entonces díam $[C(\sigma(\mathcal{A}), t_0)] < \varepsilon$.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea η como en el Lema 5 para el número $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea δ como en el Lema 5 para el número $\frac{\eta}{2}$. Sea $s \in (t_0, \text{mín}\{t_0 + \delta, 1\})$. Sean $t \in (t_0, s]$ y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que diám $[\mathcal{A}] < \frac{\eta}{2}$. Para ver que diám $[C(\sigma(\mathcal{A}), t_0)] < \varepsilon$, sean G un elemento de $\mathcal{A}$ fijo y $D \in C(G, t_0)$ también fijo. Basta ver que para cada $R \in C(\sigma(\mathcal{A}), t_0)$, $H(R, D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces elijamos $R \in C(\sigma(\mathcal{A}), t_0)$. Ahora de la elección de η y de que $\mu(D) = \mu(R)$, sólo necesitamos ver que $R \subset N(\eta, D)$. Entonces elijamos $x \in R$. Dado que $R \subset \sigma(\mathcal{A})$, existe $M \in \mathcal{A}$ tal que $x \in M$. Ya que el diám $[\mathcal{A}] < \frac{\eta}{2}$, $H(G, M) < \frac{\eta}{2}$. Por otra parte, debido a que $D \subset G$ y $\mu(G) - \mu(D) = t - t_0 < \delta$ y por la elección de δ, $H(D, G) < \frac{\eta}{2}$. De esta manera concluimos que $H(D, M) < \eta$. Así que $x \in N(\eta, D)$. Esto termina la demostración del lema. ■

2.3.2 Teorema principal.

En [14, Teorema 14.47, p. 456] se demuestra que la conexidad local es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. Con respecto de ser una propiedad secuencial decreciente de Whitney, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9 *La conexidad local es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0, 1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t, 1]$ tales que $t_n \to t$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es localmente conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usando el Lema 9 demostraremos que $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo. Para esto, sea $\varepsilon > 0$ y sean η y s como en el Lema 10 para el número ε. Sea m un número natural tal que $t_m \in (t_0, s]$. Dado que $\mu^{-1}(t_m)$ es localmente conexo, existe una sucesión finita de subcontinuos $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ de $\mu^{-1}(t_m)$ tal que $\mu^{-1}(t_m) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ y diám $[\mathcal{A}_i] < \frac{\eta}{2}$ para cada $i \leq n$.

Afirmamos que los elementos del conjunto $\{C(\sigma(\mathcal{A}_1), t), \ldots, C(\sigma(\mathcal{A}_n), t)\}$ tienen diámetro menor que ε y que $\mu^{-1}(t) = \bigcup_{i=1}^{n} C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$. Por la elección de los números η y t_m, se tiene que diám $[C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$. Para ver que $\mu^{-1}(t) = \bigcup_{i=1}^{n} C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$, sólo demostraremos que $\mu^{-1}(t) \subset \bigcup_{i=1}^{n} C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$. Sea $L \in \mu^{-1}(t)$. Por el Lema 8 existe $F \in \mu^{-1}(t_m)$ tal que $L \subset F$. Como $\mu^{-1}(t_m) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, $F \in \mathcal{A}_i$ para algún $i \leq n$. De donde $L \in C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$. La otra contención es clara.

Por lo tanto, usando el Lema 9, concluimos que $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo. ■

2.4 Encadenabilidad por continuos

2.4.1 Introducción

En esta parte introduciremos el concepto de encadenabilidad por continuos, además de algunos resultados muy útiles para la proxima sección.

Definición 9 *Una sucesión finita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una* ***cadena débil*** *siempre que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si $|i-j| \leq 1$.*

Definición 10 *Decimos que un continuo X es* ***encadenable por continuos*** *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada par de puntos $p \neq q$ en X, existe una cadena débil de subcontinuos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de X tal que $p \in A_1$, $q \in A_n$ y diám$[A_i] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$.*

Lema 11 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1)$. Si $A, B \in \mu^{-1}(t)$, con $A \neq B$, entonces existe $s > t$ tal que si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tales que $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ y $\mu(\sigma(\mathcal{A}))$, $\mu(\sigma(\mathcal{B})) \in (t,s)$. entonces $\sigma(\mathcal{A}) \neq \sigma(\mathcal{B})$.*

Demostración.

Podemos suponer que $A \backslash B \neq \emptyset$. El caso en que $B \backslash A \neq \emptyset$ es similar. Elijamos $a \in A \backslash B$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_d(\varepsilon, a) \cap B = \emptyset$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Sea $s = t + \delta$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tales que $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ y $\mu(\sigma(\mathcal{A}))$, $\mu(\sigma(\mathcal{B})) \in (t,s)$. Demostraremos que $\sigma(\mathcal{A}) \neq \sigma(\mathcal{B})$. Dado que $A \subset \sigma(\mathcal{A})$, basta ver que $a \notin \sigma(\mathcal{B})$. Dado que $\mu(\sigma(\mathcal{B})) - \mu(B) < \delta$ y $B \subset \sigma(\mathcal{B})$, por la elección de δ, se tiene que $H(\sigma(\mathcal{B}), B) < \varepsilon$. De donde $\sigma(\mathcal{B}) \subset N(\varepsilon, B)$. Dado que $B_d(\varepsilon, a) \cap B = \emptyset$, $a \notin \sigma(\mathcal{B})$. Esto demuestra el lema. ■

2.4.2 Teorema principal

En [7, Teorema 33.4, p. 248] se demuestra que la propiedad de ser encadenable por continuos es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En esta sección demostraremos que también es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

Teorema 10 *La encadenabilidad por continuos es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es encadenable por continuos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar que $\mu^{-1}(t)$ es encadenable por continuos, sean $\varepsilon > 0$ y A, $B \in \mu^{-1}(t)$, con $A \neq B$. Sea η como en el Lema 5 para el número $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea δ como en el Lema 5 para el número $\frac{\eta}{2}$. Sea s como en el Lema 11 para A y B. Sea m un número natural tal que $t_m \in (t, \text{mín}\{s, t+\delta\})$. Dado que $\{A\}$ y $\{B\} \in C(\mu^{-1}(t))$, por el Lema 7, existen $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2 \in C(\mu^{-1}(t))$ tales que $A \in \mathcal{M}_1$, $B \in \mathcal{M}_2$ y $\sigma(\mathcal{M}_1)$, $\sigma(\mathcal{M}_2) \in \mu^{-1}(t_m)$. Sean $E = \sigma(\mathcal{M}_1)$ y $F = \sigma(\mathcal{M}_2)$. Por la elección de s, se tiene que $E \neq F$. Dado que $\mu^{-1}(t_m)$ es encadenable por continuos, existe una cadena débil de subcontinuos $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ de $\mu^{-1}(t_m)$ tal que $E \in \mathcal{A}_1$, $F \in \mathcal{A}_n$ y diám $[\mathcal{A}_i] < \frac{\eta}{2}$ para cada $i \leq n$.

Afirmamos que $\{C(\sigma(\mathcal{A}_1), t), \ldots, C(\sigma(\mathcal{A}_n), t)\}$ es una cadena débil de subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in C(\sigma(\mathcal{A}_1), t)$, $B \in C(\sigma(\mathcal{A}_n), t)$ y diám $[C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que cada $C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Para ver que diám $[C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)] < \varepsilon$, sean G un elemento fijo de $\mathcal{A}_i$ y $D \in C(G, t)$ también fijo. Es suficiente ver que para cada $R \in C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$, se cumple que $H(R, D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces tomemos $R \in C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)$. Por la elección de δ, $H(D, G) < \frac{\eta}{2}$. Ahora necesitamos probar la siguiente contención $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset N(\eta, D)$. Para esta parte, sea $x \in \sigma(\mathcal{A}_i)$. Entonces existe $M \in \mathcal{A}_i$ tal que $x \in M$. Dado que diám $[\mathcal{A}_i] < \frac{\eta}{2}$ y $H(M, G) < \frac{\eta}{2}$, $H(M, D) < \eta$. De donde $x \in N(\eta, D)$. Esto completa la demostración de la contención $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset N(\eta, D)$. Dado que $R \subset \sigma(\mathcal{A}_i) \subset N(\eta, D)$ y $\mu(D) = \mu(R)$, por la elección de η, se tiene que $H(R, D) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera se sigue que diám $[C(\sigma(\mathcal{A}_i), t)] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$. Como $A \subset E \in \mathcal{A}_1$ y $B \subset F \in \mathcal{A}_n$, tenemos que $A \in C(\sigma(\mathcal{A}_1), t)$ y $B \in C(\sigma(\mathcal{A}_n), t)$. Finalmente veamos que $C(\sigma(\mathcal{A}_i), t) \cap C(\sigma(\mathcal{A}_{i+1}), t) \neq \emptyset$ para cada $i < n$. Para ver esta parte, tomemos $i < n$ fija. Dado que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1} \neq \emptyset$, existe un elemento $L \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1}$. Por el Lema 8, existe $K \in \mu^{-1}(t)$ tal que $K \subset L$. Ahora bien, debido a que $L \subset \sigma(\mathcal{A}_i) \cap \sigma(\mathcal{A}_{i+1})$, $K \in C(\sigma(\mathcal{A}_i), t) \cap C(\sigma(\mathcal{A}_{i+1}), t)$.

Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es encadenable por continuos. ■

2.5 No contener arcos

2.5.1 Teorema principal

En [14, Teorema 14.52, p. 460] se demuestra que la propiedad de no contener arcos es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En esta sección mostramos un teorema relacionado con esta propiedad.

Teorema 11 *La propiedad de no contener arcos es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.
Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$ y $\mu^{-1}(t_n)$ no contiene arcos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar que $\mu^{-1}(t)$ no contiene arcos, supongamos lo contrario. Entonces existe un arco α en $\mu^{-1}(t)$. Notemos que $\mu(\sigma(\alpha)) > t$. Afirmamos que $C(\sigma(\alpha), t)$ es conexo por arcos. Dado que $\mu(\sigma(\alpha)) > t$, $C(\sigma(\alpha), t)$ es no degenerado. Ahora, sean A, $B \in C(\sigma(\alpha), t)$ y $A \neq B$. Entonces existen A_1, $B_2 \in \alpha$ tales que $A \cap A_1 \neq \emptyset \neq B \cap B_2$. Para demostrar que existe un arco en $C(\sigma(\alpha), t)$ que une A con B, analicemos los siguientes casos: si $A = A_1$ y $B = B_2$, entonces existe un subarco α_1 de α que une a A con B. De donde α_1 es un arco en $C(\sigma(\alpha), t)$ que une a A con B. Entonces sólo nos hace falta probar que A se puede conectar con A_1 en $C(\sigma(\alpha), t)$ y lo mismo para B con B_1. Por el Lema 4, existe un arco α_1 en $C(A \cup A_1, t)$ que une a A con A_1. Como $A \cup A_1 \subset \sigma(\alpha)$, α_1 es un arco en $C(\sigma(\alpha), t)$. De donde A se puede conectar con A_1 en $C(\sigma(\alpha), t)$. Similarmente B puede ser conectado con B_1 en $C(\sigma(\alpha), t)$. Por tanto $C(\sigma(\alpha), t)$ es conexo por arcos

Por otra parte, dado que $C(\sigma(\alpha), t)$ es un nivel de Whitney para $C(\sigma(\alpha))$, usando que la propiedad de ser conexo por arcos es una propiedad creciente de Whitney (ver Definición 16 (ii) y [18, Proposicion 2, p. 151]), obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C(\sigma(\alpha), t_n)$ es conexo por arcos. Dado que $\mu(\sigma(\alpha)) > t$, existe n_0 un número natural tal que para cada $n \geq n_0$, se tiene que $t_n \in (t, \mu(\sigma(\alpha)))$. Así que, para cada $n \geq n_0$, tenemos que $C(\sigma(\alpha), t_n)$ es no degenerado y entonces $\mu^{-1}(t_n)$ contiene arcos. Esta contradicción termina la prueba del teorema. ■

2.6 Arco conexidad hereditaria

2.6.1 Introdución

En esta sección recordaremos los conceptos de arco conexidad y arco conexidad hereditaria: ·

Decimos que un espacio topológico Z es ***arco conexo o conexo por arcos*** *si cualesquiera dos puntos de Z, se pueden unir por un arco en Z. Decimos que un continuo Z es* ***hereditariamente arco conexo o hereditariamente conexo por arcos*** *si cada subcontinuo de Z es arco conexo.*

En el desarrollo de esta sección nos encontramos con la necesidad de mostrar la existencia de arcos en los niveles de Whitney de un hiperespacio de subcontinos de un continuo, que unen a dos elementos de ese nivel de Whitbey. Para esto primero necesitamos saber si estos subcontinuos son distintos, así que el siguiente lema nos da algunas condiciones que deben de satisfacer estos subcontinuos.

Lema 12 *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $p \neq q \in X$, entonces existe $s \in (0,1)$ tal que si A, $B \in C(X)$ son tales que $p \in A$, $q \in B$ y $\mu(A)$, $\mu(B) \in (0,s)$, entonces $A \neq B$.*

Demostración.
Sea $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$. Elijamos δ como en el Lema 5 para el número ε. Tomemos A, $B \in C(X)$ tales que $p \in A$, $q \in B$ y $\mu(A)$, $\mu(B) \in (0,\delta)$. Dado que $\mu(B) - \mu(\{q\}) < \delta$ y $q \in B$, por la elección de δ, tenemos que $H(B,\{q\}) < \varepsilon$. Así, $B \subset N(\varepsilon,\{q\})$. Por lo tanto $p \notin B$. ■

Dado que el intervalo $[0,1]$ es encadenable por continuos y esta propiedad se conserva bajo homeomorfismos entre continuos, se tiene el siguiente lema:

Lema 13 *Todo arco es encadenable por continuos.*

En el siguiente resultado mostramos que un arco contenido en un nivel de Whitney positivo, se puede dividir en un número finito de subarcos tales que la unión de los elementos de cada subarco tienen cierto tamaño, bajo alguna función de Whitney.

Lema 14 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si γ es un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos extremos A y B tal que $t < \mu(\sigma(\gamma))$, para alguna $t \in (t_0, 1]$, entonces existe una cadena débil de subarcos $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k\}$ de γ tal que $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_k$ y $\sigma(\mathcal{D}_i) \in \mu^{-1}(t)$, para cada $i \leq k$.*

Demostración.
Por la continuidad uniforme de μ, existe $\delta > 0$ tal que si $R, S \in C(X)$ y $H(R,S) < \delta$, entonces $|\mu(R) - \mu(S)| < t - t_0$. Dado que γ es encadenable por continuos (por el Lema 13), existe una cadena débil de subarcos $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ de γ tales que $A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}_k$ y diám $[\mathcal{C}_i] < \delta$, para cada $i \leq k$.

Afirmamos que $\mu(\sigma(\mathcal{C}_i)) < t$, para cada $i \leq k$. Para ver esto elijamos $C_i \in \mathcal{C}_i$ para cada $i \leq k$. Antes de continuar con la demostración de este hecho, necesitamos demostrar que $H(C_i, \sigma(\mathcal{C}_i)) < \delta$ para cada $i \leq k$. Por el Lema 1 y dado que $C_i \subset \sigma(\mathcal{C}_i)$, es suficiente demostrar que $\sigma(\mathcal{C}_i) \subset N(\delta, C_i)$. Sea $x \in \sigma(\mathcal{C}_i)$. Entonces existe $E \in \mathcal{C}_i$ tal que $x \in E$. Dado que el diám $[\mathcal{C}_i] < \delta$, $H(C_i, E) < \delta$. Se sigue del Lema 1 que $x \in N(\delta, C_i)$. Esto demuestra que $\sigma(\mathcal{C}_i) \subset N(\delta, C_i)$. Por tanto $H(C_i, \sigma(\mathcal{C}_i)) < \delta$.

Usando esta parte y por la elección de δ, tenemos que $\mu(\sigma(\mathcal{C}_i)) - t_0 = \mu(\sigma(\mathcal{C}_i)) - \mu(C_i) < t - t_0$. Así que $\mu(\sigma(\mathcal{C}_i)) < t$, para cada $i \leq k$.

Usando esta afirmación y el Lema 7, obtenemos una sucesión finita de subarcos $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k\}$ de γ tal que $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{D}_i$ y $\mu(\sigma(\mathcal{D}_i)) = t$, para cada $i \leq k$. Notemos que $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_k$. Dado que $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}$ es una cadena débil, $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k\}$ es también una cadena débil. Con esto demostramos el lema. ∎

Usando el Lema 13, es fácil de demostrar el siguiente lema.

Lema 15 *Si X es arco conexo, entonces X es encadenable por continuos.*

Lema 16 *Sea X un continuo. Entonces X es hereditariamente encadenable por continuos si y sólo si X es hereditariamente arco conexo.*

Demostración.
Sólo demostraremos la necesidad dado que la suficiencia está dada por el Lema 15. Entonces supongamos que X es hereditariamente encadenable por continuos. Sean A un subcontinuo de X, p y $q \in A$. Demostraremos que existe un arco en A, con puntos extremos p y q. Para hacer esto, sea B un

subcontinuo de A irreducible alrededor de p y q (ver Ejercicio 4.35 (b) de [NC]). Afirmamos que B es un arco con puntos extremos p y q. Primero necesitamos demostrar que B es localmente conexo. Esto lo haremos usando el Lema 9. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis B es encadenable por continuos. Entonces existe una cadena débil de subcontinuos $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de B tales que $p \in B_1$, $q \in B_n$ y diám $[B_i] < \varepsilon$ para cada i. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ es un subcontinuo de B que contiene a p y q. Por la irreducibilidad de B, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B$. Por el Lema 9, concluimos que B es localmente conexo. Así, por el Corolario 8.27 de [NC], B es conexo por arcos. Tomemos entonces un arco α en B con puntos extremos p y q. Aplicando de nuevo la irreduciblidad de B, obtenemos que $\alpha = B \subset A$. Por tanto A es arco conexo. Esto completa la demostración del lema. ∎

2.6.2 Teorema principal

Es conocido que la propiedad de ser hereditariamente arco conexo es una propiedad fuerte reversible de Whitney (ver Teorema 2.6, p. 306 de [1]). En realidad se demuestra que si todos los niveles Whitney positivos son hereditariamente arco conexos, entonces el continuo es un arco o un círculo. En [7, Pregunta 33.10, p. 250] aparece la siguiente pregunta: ¿ser hereditariamente arco conexo es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney? En el siguiente resultado se da una respuesta afirmativa.

Teorema 12 *La arco conexidad hereditaria es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: μ una función de Whitney para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1]$ tales que $t_n \to 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es hereditariamente arco conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 16 únicamente demostraremos que X es hereditariamente encadenable por continuos. Para hacer esto, sean D un subcontinuo no degenerado de X, p, $q \in D$, con $p \neq q$ y $\varepsilon > 0$. Para p y q, elijamos s_1 como en el Lema 12. Sea δ como en el Lema 5 para el número $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea m un número natural tal que $t_m < \text{mín}\{s_1, \mu(D), \frac{\delta}{2}\}$. Por el Lema 7, existen L_1, $L_2 \in C(D)$ tales que $p \in L_1$, $q \in L_2$ y $\mu(L_i) = t_m$, para cada $i \leq 2$. Por la elección de s_1, $L_1 \neq L_2$. Dado que $C(D, t_m)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_m)$ y $\mu^{-1}(t_m)$ es hereditariamente arco conexo, existe un arco γ en $C(D, t_m)$, con puntos extremos L_1 y L_2. Sea $s \in (t_m, \mu(\sigma(\gamma)))$ tal que $s - t_m < \frac{\delta}{2}$. Por el Lema 14, existe una cadena débil de subcontinuos $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_r\}$ de γ tal que $L_1 \in \mathcal{D}_1$, $L_2 \in \mathcal{D}_r$ y $\sigma(\mathcal{D}_i) \in \mu^{-1}(s)$ para cada $i \leq r$.

Afirmamos que $\{\sigma(\mathcal{D}_i) : i \leq r\}$ es también una cadena débil de subcontinuos de D tal que $p \in \sigma(\mathcal{D}_1)$, $q \in \sigma(\mathcal{D}_r)$ y diám $[\sigma(\mathcal{D}_i)] < \varepsilon$ para cada $i \leq r$. Debido a que $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_r\}$ es una cadena débil, $\{\sigma(\mathcal{D}_i) : i \leq r\}$ es también una cadena débil. Como $p \in L_1$, $q \in L_2$, $L_1 \in \mathcal{D}_1$ y $L_2 \in \mathcal{D}_r$, se tiene que $p \in \sigma(\mathcal{D}_1)$ y $q \in \sigma(\mathcal{D}_r)$. Finalmente veamos que el diám $[\sigma(\mathcal{D}_i)] < \varepsilon$. Basta demostrar que para cada $x \in \sigma(\mathcal{D}_i)$, se cumple que $H(\{x\}, \sigma(\mathcal{D}_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Elijamos $x \in \sigma(\mathcal{D}_i)$ y consideremos $L \in \mathcal{D}_i$ tal que $x \in L$. Notemos que $x \in \sigma(\mathcal{D}_i)$ y $\mu(\sigma(\mathcal{D}_i)) - \mu(\{x\}) = s$. Ya que $s - t_m < \frac{\delta}{2}$ y $t_m < \frac{\delta}{2}$, se tiene que $\mu(\sigma(\mathcal{D}_i)) - \mu(\{x\}) < \delta$. Por la elección de δ, se tiene que $H(\{x\}, \sigma(\mathcal{D}_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Concluimos que diám $[\sigma(\mathcal{D}_i)] < \varepsilon$. Esto demuestra que D es encadenable por continuos.

Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente encadenable por continuos. ■

2.7 Propiedad de Kelley

2.7.1 Introducción

En esta sección presentamos el concepto de propiedad de Kelley y algunos resultados que nos ayudarán más adelante.

Recordaremos el concepto de función tamaño.

Definición 11 *Decimos que una función continua $\omega : C(X) \to [0, \infty)$ es una **función tamaño** si cumple que $\omega(\{x\}) = 0$, para cada $x \in X$, y si $A \subset B$, entonces $\omega(A) \leq \omega(B)$.*

Necesitamos demostrar el siguiente resultado.

Lema 17 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0, 1)$. Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo no degenerado de $\mu^{-1}(t_0)$. Entonces para cada $t \in [t_0, \mu(\sigma(\mathcal{A})))$, el conjunto $X(\mathcal{A}, t) = \{B \in \mu^{-1}(t) :$ existe $\mathfrak{B} \in C(\mathcal{A})$ tal que $\sigma(\mathfrak{B}) = B\}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.*

Demostración.

Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(s) = s - t_0$. Notemos que f es un homeomorfismo. Definamos $\omega : C(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ por $\omega(\mathfrak{B}) = f(\mu(\sigma(\mathfrak{B})))$. Entonces ω cumple las siguientes condiciones:

i) ω es una función continua,

ii) para cada $D \in \mathcal{A}$, $\omega(\{D\}) = f(\mu(\sigma(\{D\}))) = 0$,

iii) si $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in C(\mathcal{A})$ son tales que $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$, entonces $\omega(\mathfrak{B}_1) \leq \omega(\mathfrak{B}_2)$.

Así que ω es una función tamaño. Entonces $\omega^{-1}(f(t))$ es un subcontinuo de $C(\mathcal{A})$, para cada $t \in [t_0, \mu(\sigma(\mathcal{A}))]$ (ver [17, p. 243]).

Necesitamos demostrar la siguiente afirmación:

(1) $\omega^{-1}(f(t)) = \{\mathfrak{B} \in C(\mathcal{A})\colon \mu(\sigma(\mathfrak{B})) = t\}$, para cada $t \in [t_0, \mu(\sigma(\mathcal{A}))]$.

Para probar (1), notemos que $\mathfrak{B} \in \omega^{-1}(f(t))$ si y sólo si $f(\mu(\sigma(\mathfrak{B}))) = f(t)$. Ya que f es inyectiva esto último es equivalente a $\mu(\sigma(\mathfrak{B})) = t$, con lo que (1) está demostrada.

Finalmente demostraremos que $\sigma(\omega^{-1}(f(t))) = X(\mathcal{A}, t)$. De la afirmación (1), concluimos que

$$\sigma(\omega^{-1}(f(t))) = \{\sigma(\mathfrak{B}) \in \mu^{-1}(t) : \mathfrak{B} \in C(\mathcal{A})\},$$

y dado que

$$X(\mathcal{A}, t) = \{\sigma(\mathfrak{B}) \in \mu^{-1}(t) : \mathfrak{B} \in C(\mathcal{A})\},$$

concluimos que

$$\sigma(\omega^{-1}(f(t))) = X(\mathcal{A}, t) \text{ para cada } t \in [t_0, \mu(\sigma(\mathcal{A}))].$$

Como σ es continua y $\omega^{-1}(f(t))$ es un subcontinuo de $C(\mathcal{A})$, $X(\mathcal{A}, t)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ para cada $t \in [t_0, \mu(\sigma(\mathcal{A}))]$. Esto completa la demostración del teorema. ■

Definición 12 *Decimos que X tiene la propiedad de Kelley siempre que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que cumple la siguiente condición:*

(*k*) *si p, $q \in X$, con $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.*

En el siguiente resultado se demuestra que la unión de todos los niveles de Whitney de los hiperespacios de cada uno de los elementos de un subcontinuo de un nivel de Whitney positivo, es un subcontinuo.

Lema 18 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $t \in (t_0, 1]$ y $\mathcal{D}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$, entonces el conjunto $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0) = \bigcup\{C(A, t_0) : A \in \mathcal{D}\}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$.*

Demostración.

Para demostrar que $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$ es cerrado en $\mu^{-1}(t_0)$, sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$ que converge a B, para algún $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Demostraremos que $B \in \mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $B_n \in C(A_n, t_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $\mathcal{D}$, podemos suponer que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}=1}^{\infty}$ converge a un elemento A de $\mathcal{D}$. Dado que $B_n \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B \subset A$ (por el Lema 3). De donde $B \in \mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$. Esto demuesta que $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$ es cerrado.

Para ver la conexidad de $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$, supongamos que no es conexo. Entonces existen dos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$ tales que $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Consideremos

$$\mathcal{M}_i = \{A \in \mathcal{D} : C(A, t_0) \subset \mathcal{F}_i\}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Afirmamos que $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son cerrados, ajenos y no vacíos en $\mathcal{D}$ tales que $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{D}$. Para ver que $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son ajenos, supongamos lo contrario. Entonces existe $A \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$. De donde $C(A, t_0) \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Notemos que $C(A, t_0) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. Ahora, demostraremos que $\mathcal{M}_1$ es no vacío, la demostración de que $\mathcal{M}_2$ es no vacío es análoga. Tomemos $E \in \mathcal{F}_1$ y $A \in \mathcal{D}$ tales que $E \in C(A, t_0)$. Dado que $C(A, t_0) \subset \mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ y $C(A, t_0)$ es conexo, se tiene que $C(A, t_0) \subset \mathcal{F}_1$. Así que $A \in \mathcal{M}_1$. Finalmente, demostraremos que $\mathcal{M}_1$ es cerrado, la demostración de que $\mathcal{M}_2$ es cerrado es análoga. Sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{M}_1$ tal que converge a un elemento L de $\mathcal{D}$. Demostraremos que $L \in \mathcal{M}_1$. Por la compacidad de $C(\mu^{-1}(t_0))$, podemos suponer que $\{C(L_n, t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un elemento $\mathcal{L}$ de $C(\mu^{-1}(t_0))$. Ahora, necesitamos ver que

(1) $\mathcal{L} \subset C(L, t_0) \cap \mathcal{F}_1$.

Primero veamos que $\mathcal{L} \subset C(L, t_0)$. Sea $E \in \mathcal{L}$. Como $\{C(L_n, t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{L}$, existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $E_n \in C(L_n, t_0)$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a E (por el Lema 2). Entonces $E \subset L$ (por el Lema 3) y $E \in C(L, t_0)$. Así, concluimos que $\mathcal{L} \subset C(L, t_0)$. Ahora, veamos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_1$. Dado que $C(L_n, t_0) \subset \mathcal{F}_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_1$ (por el Lema 3). Esto demuestra la afirmación (1).

De (1) y de que $C(L, t_0) \subset \mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$, obtenemos que $C(L, t_0) \subset \mathcal{F}_1$. Así $L \in \mathcal{M}_1$. Esto demuestra que $\mathcal{M}_1$ es cerrado en $\mathcal{D}$.

De esto concluimos que $\mathcal{D}$ no es conexo. Esta contradicción establece la conexidad de $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$. Por lo tanto $\mathbb{C}(\mathcal{D}, t_0)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$. ∎

Es fácil de demostrar el siguiente lema (ver [7, Ejercicio 50.8, p. 278])

Lema 19 *Un continuo X tiene la propiedad (k) si y sólo si para cada $p \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $A \in C(X)$, $p \in A$ y $q \in B_d(\delta, p)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.*

2.7.2 Teorema principal

En [7, Teorema 50.4, p. 277] se demuestra que el tener la propiedad de Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. Con respecto a esta propiedad tenemos el siguiente resultado:

Teorema 13 *La propiedad de Kelley es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0, 1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t, 1]$ tales que $t_n \to t$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad de Kelley para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad de Kelley, supongamos lo contrario. Entonces, por el Lema 19 existen $P \in \mu^{-1}(t)$ y $\varepsilon > 0$ tales que para $m \geq 1$, existen $Q_m \in \mu^{-1}(t)$ tal que $H(P, Q_m) < \frac{1}{m}$ y un subcontinuo $\mathcal{A}_m$ de $\mu^{-1}(t)$ con la propiedad de que $P \in \mathcal{A}_m$ y si $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $Q_m \in \mathcal{B}$, entonces $H^2(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}) \geq \varepsilon$. Ahora, por la compacidad de $C(\mu^{-1}(t))$, podemos suponer que $\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t))$.

Sea δ como en el Lema 5 para el número $\frac{\varepsilon}{12}$ y sea l un número natural tal que $t_l - t < \delta$.

Necesitamos demostrar que existe $\mathcal{D} \in C(\mu^{-1}(t))$ tal que $\mu(\sigma(\mathcal{D})) = t_l$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ y $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{6}$. Para cada $m \geq 1$, usando el Lema 7, existe un subcontinuo $\mathcal{D}_m$ de $\mu^{-1}(t)$ tal que $Q_m \in \mathcal{D}_m$ y $\mu(\sigma(\mathcal{D}_m)) = t_l$. Por la compacidad de $C(\mu^{-1}(t))$, podemos suponer que $\mathcal{D}_m \to \mathcal{D}$ para algún $\mathcal{D} \in C(\mu^{-1}(t))$. Ahora, veamos que $\mathcal{D}$ satisface las propiedades requeridas. De la continuidad de μ y σ, se sigue que $\mu(\sigma(\mathcal{D})) = t_l$. Para demostrar que $\mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ es un subcontinuo, basta ver que $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Dado que $Q_m \to P$, $\mathcal{D}_m \to \mathcal{D}$ y $Q_m \in \mathcal{D}_m$ para cada m, tenemos que $P \in \mathcal{D}$. Así, dado que $\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}$ y $P \in \mathcal{A}_m$, se tiene que $P \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$. Antes de ver que $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{6}$, primero veamos que diám $[\mathcal{D}] < \frac{\varepsilon}{6}$. Para esto, es suficiente demostrar que, para cada $E \in \mathcal{D}$, se cumple que $H(\sigma(\mathcal{D}), E) < \frac{\varepsilon}{12}$. Sea $E \in \mathcal{D}$. Dado que $E \subset \sigma(\mathcal{D})$ y $\mu(\sigma(\mathcal{D})) - \mu(E) = t_l - t < \delta$, por la elección de δ tenemos que $H(\sigma(\mathcal{D}), E) < \frac{\varepsilon}{12}$. De donde diám $[\mathcal{D}] < \frac{\varepsilon}{6}$. Por último, para demostrar que $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{6}$, necesitamos ver que $\mathcal{D} \subset N\left(\frac{\varepsilon}{6}, \mathcal{A}\right)$. Tomemos $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$. Entonces, debido a que diám $[\mathcal{D}] < \frac{\varepsilon}{6}$, tenemos que, para cada $S \in \mathcal{D}$, $H(K, S) < \frac{\varepsilon}{6}$. De esto concluimos que $\mathcal{D} \subset N\left(\frac{\varepsilon}{6}, \mathcal{A}\right)$.

Por otra parte, notemos que $\sigma(\mathcal{D}) \in X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l)$ (ver Lema 15). Dado que $\mu^{-1}(t_l)$ tiene la propiedad de Kelley, existe $\eta > 0$ tal que si $R \in \mu^{-1}(t_l)$ es tal que $H(\sigma(\mathcal{D}), R) < \eta$, entonces existe $\mathcal{C} \in C(\mu^{-1}(t_l))$ tal que $R \in \mathcal{C}$ y $H^2(X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l), \mathcal{C}) < \frac{\varepsilon}{12}$.

Sea r un número natural tal que $H^2(\mathcal{A}_r, \mathcal{A}) < \frac{\varepsilon}{12}$ y $H^2(\mathcal{D}_r, \mathcal{D}) < \eta$. Notemos que $H(\sigma(\mathcal{D}_r), \sigma(\mathcal{D})) < \eta$ (por el Lema 6). Así que existe $\mathcal{C} \in C(\mu^{-1}(t_l))$ tal que $\sigma(\mathcal{D}_r) \in \mathcal{C}$ y $H^2(X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l), \mathcal{C}) < \frac{\varepsilon}{12}$. Consideremos $\mathbb{C}(\mathcal{C}, t)$ como en el Lema 18. Dado que $\sigma(\mathcal{D}_r) \in \mathcal{C}$ y $Q_r \in \mathcal{D}_r$, obtenemos que $Q_r \in \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)$.

Ahora, afirmamos que $H^2(\mathbb{C}(\mathcal{C}, t), \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Para esto, primero veamos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{D} \subset N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)\right)$. Sea $R \in \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$. Por el Lema 7, existe $\mathcal{L} \in C(\mathcal{A} \cup \mathcal{D})$ tal que $R \in \mathcal{L}$ y $\mu(\sigma(\mathcal{L})) = t_l$. Sea $E = \sigma(\mathcal{L})$. Dado que $R \subset E$ y $\mu(E) - \mu(R) < \delta$, por la elección de δ, se tiene que $H(R, E) < \frac{\varepsilon}{12}$. Dado que $E \in X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l)$ y $X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{12}, \mathcal{C}\right)$, se sigue que existe $F \in \mathcal{C}$ tal que $H(E, F) < \frac{\varepsilon}{12}$. Sea $G \in C(F, t)$. Dado que $\mu(F) - \mu(G) = t_l - t < \delta$, por la elección de δ, se tiene que $H(F, G) < \frac{\varepsilon}{12}$. Así que $H(R, G) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dado que $G \in \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)$, concluimos que $R \in N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)\right)$. Esto demuestra que $\mathcal{A} \cup \mathcal{D} \subset N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)\right)$.

Para ver que $\mathbb{C}(\mathcal{C}, t) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}\right)$, sea $R \in \mathbb{C}(\mathcal{C}, t)$. Entonces existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $R \in C(G, t)$. Dado que $\mu(G) - \mu(R) = t_l - t < \delta$, por la elección de δ, se tiene que $H(R, G) < \frac{\varepsilon}{12}$. Dado que $\mathcal{C} \subset N\left(\frac{\varepsilon}{12}, X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l)\right)$, existe $F \in X(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, t_l)$ tal que $H(G, F) < \frac{\varepsilon}{12}$. Sea $\mathcal{L} \in C(\mathcal{A} \cup \mathcal{D})$ tal que $F = \sigma(\mathcal{L})$ y $\mu(\sigma(\mathcal{L})) = t_l$. Sea $E \in \mathcal{L}$. Dado que $E \subset F$ y

$\mu(F) - \mu(E) = t_l - t < \delta$, por la elección de δ, se tiene que $H(F,E) < \frac{\varepsilon}{12}$. Así que $H(R,E) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dado que $E \in \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$, concluimos que $R \in N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}\right)$. Por lo tanto $\mathbb{C}(\mathcal{C},t) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}\right)$. Esto termina la prueba de que $H^2(\mathbb{C}(\mathcal{C},t), \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Por lo tanto
$H^2(\mathcal{A}_r, \mathbb{C}(\mathcal{C},t)) \leq H^2(\mathcal{A}_r, \mathcal{A}) + H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{D}) +$
$H^2(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}, \mathbb{C}(\mathcal{C},t)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto contradice la elección de Q_r. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad de Kelley. ■

2.8 Irreducibilidad

2.8.1 Introducción

Otro concepto que también consideramos en este trabajo es el concepto de irreducibilidad.

Definición 13 *Decimos que X es* ***irreducible alrededor de un conjunto*** *Z si $Z \subset X$ y si ningún subcontinuo propio de X contiene a Z. Decimos que X es* ***irreducible*** *si X es irreducible alrededor de $\{p,q\}$ para algunos p, $q \in X$. Algunas veces decimos que X es* ***irreducible entre*** *p y q.*

El próximo resultado nos sera de mucha hayuda en los siguientes resultados (ver [14, Lema 1.28, p. 76]).

Teorema 14 *Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible para algún $t \in [0,1)$, entonces para cada subcontinuo propio $\mathcal{A}$ de $\mu^{-1}(t)$, se cumple que $\sigma(\mathcal{A}) \neq X$.*

Para el siguiente resultado [16, Ejercico 4.35, p. 68].

Teorema 15 *Si X es un continuo y $p \neq q \in X$, entonces X contiene un subcontinuo el cual es irreducible entre p y q.*

El siguiente teorema se debe a Alejandro Illanes (ver [7, Teorema 49.3, p. 274]).

Teorema 16 *Sea X un continuo. Si existe una función de Whitney μ para $C(X)$ y $t_0 \in (0,1)$ tales que $\mu^{-1}(t_0)$ es irreducible alrededor de un conjunto con n elementos, entonces X es irreducible alrededor de un conjunto con m elementos, para algún $m \leq n$.*

2.8.2 Teorema principal

En el Teorema 16 se demuestra que si un nivel positivo de Whitney es irreducible, entonces X es irreducible. Por tanto la irreducibilidad es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En el siguiente resultado se muestra lo referente a secuencialidad decreciente de Whitney.

Teorema 17 *La irreducibilidad es una propiedad secuencialmente decreciente de Whitney.*

Demostración.
Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es irreducible para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar que $\mu^{-1}(t)$ es irreducible, supongamos lo contrario.

Dado que X es irreducible (por el Teorema 16), existen p, $q \in X$ tales que X es irreducible entre p y q. Usando arcos ordenados y la continuidad de μ se pueden encontrar elementos A, $B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $p \in A$ y $q \in B$. Por la irreducibilidad de X, $A \neq B$. Sea $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t))$ tal que es irreducible entre A y B (por el Teorema 15). Dado que $\mu^{-1}(t)$ no es irrreducible, obtenemos que $\mathcal{A} \neq \mu^{-1}(t)$. Sean $D \in \mu^{-1}(t) \setminus \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_H(\varepsilon, D) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Por el Teorema 18, existe $E \in C(X)$ tal que $D \subsetneqq E \subset N(\delta, D)$. Sea m un número natural tal que $t_m \in (t, \min\{\mu(E), \mu(\sigma(\mathcal{A}))\})$.

Ahora necesitamos demostrar que el conjunto $X(\mathcal{A}, t_m)$ (ver Lema 17) satisface las siguientes propiedades:

(1) es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t_m)$ y

(2) $\sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q.

Para ver (1), por el Lema 17, tenemos que $X(\mathcal{A}, t_n)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Ahora, demostraremos que $X(\mathcal{A}, t_n)$ es un subconjunto propio de $\mu^{-1}(t)$. Por el Lema 8, existe $F \in C(E)$ tal que $F \in \mu^{-1}(t_m)$. Veamos que $F \notin X(\mathcal{A}, t_m)$. Para ver esta parte, supongamos que $F \in X(\mathcal{A}, t_m)$. Entonces existe $\mathcal{L} \in C(\mathcal{A})$ tal que $\sigma(\mathcal{L}) = F$. Afirmamos que para cada $L \in \mathcal{L}$, $L \subset N(\delta, D)$. En efecto, tomemos $L \in \mathcal{L}$. Entonces $L \subset F$. Así, dado que $F \subset E \subset N(\delta, D)$, obtenemos que $L \subset N(\delta, D)$. Entonces, por la elección de δ, se tiene que $H(L, D) < \varepsilon$. Así que $\mathcal{L} \subset B_H(\varepsilon, D)$. Ahora bien, debido a que $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, concluimos que $\mathcal{L} \subset B_H(\varepsilon, D) \cap \mathcal{A}$. Esto contradice la elección de ε. De donde $X(\mathcal{A}, t_m)$ es un subconjunto propio de $\mu^{-1}(t_m)$.

Demostraremos la parte (2). Usando el Teorema 14, la afirmación (1) y que $\mu^{-1}(t_m)$ es ireducible, obtenemos que $\sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$ es un subcontinuo propio de X. Veamos que p, $q \in \sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$. Dado que A y $B \in \mathcal{A}$, por el Lema 7, existen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in C(\mathcal{A})$ tales que $A \in \mathcal{H}_1$, $B \in \mathcal{H}_2$ y $\mu(\sigma(\mathcal{H}_i)) = t_m$ para cada $i \leq 2$. Sean $F_1 = \sigma(\mathcal{H}_1)$ y $F_2 = \sigma(\mathcal{H}_2)$. Notemos que F_1, $F_2 \in X(\mathcal{A}, t_m)$. Entonces $A \subset F_1 \subset \sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$ y $B \subset F_2 \subset \sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$. Así que p y $q \in \sigma(X(\mathcal{A}, t_m))$.

De la afirmación (2), concluimos que X no es irreducible entre p y q. Esta contradicción establece el teorema. ■

2.9 Indescomponibilidad

2.9.1 Introducción

En esta sección introducimos el concepto de indescomponibilidad y un teorema que nos será de utilidad.

Definición 14 *Un continuo no degenerado X es descomponible si es la unión de dos subcontinuos propios. Decimos que un continuo X es indescomponible si no es descomponible.*

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema de los golpes en la frontera (ver [16, Corolario 5.5, p. 74]).

Teorema 18 *Sea X un continuo no degenerado. Si A es un subcontinuo propio de X y U es un abierto en X que contiene a A, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$.*

Lema 20 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0, 1)$. Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$. Entonces para cada $t \in (t_0, 1]$, se tiene que el conjunto $X(\mathcal{A}, t_0, t) = \{K \in \mu^{-1}(t) \mid C(K, t_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.*

Demostración.

Para demostrar que $X(\mathcal{A}, t_0, t) \neq \emptyset$, sea $A \in \mathcal{A}$. Por el Lema 8, existe $B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \subset B$. Así que $B \in X(\mathcal{A}, t_0, t)$. Ahora, demostraremos que $X(\mathcal{A}, t_0, t)$ es cerrado en $\mu^{-1}(t)$. Sea $\{K_n\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $X(\mathcal{A}, t_0, t)$ tal que $K_n \to K$ para algún $K \in \mu^{-1}(t)$. Demostraremos que $K \in X(\mathcal{A}, t_0, t)$. Dado que $C(K_n, t_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos, por cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $A_n \in C(K_n, t_0) \cap \mathcal{A}$. Por la compacidad de $\mathcal{A}$, podemos suponer que $A_n \to A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Como $A_n \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset K$ (por el Lema 3). Así que $A \in C(K, t_0) \cap \mathcal{A}$. De donde $K \in X(\mathcal{A}, t_0, t)$.

Para demostrar la conexidad de $X(\mathcal{A}, t_0, t)$, supongamos que no es conexo. Entonces existen dos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ en $\mu^{-1}(t)$ tales que $X(\mathcal{A}, t_0, t) = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$. Para cada $i = 1, 2$, definamos:

$$\mathcal{D}_i = \bigcup\{C(K, t_0) \cap \mathcal{A} \mid K \in \mathfrak{B}_i\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son cerrados, ajenos y no vacíos en $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Para ver que $\mathcal{A} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, demostraremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Sea $L \in \mathcal{A}$. Por el Lema 8, existe $K \in C(X)$ tal que $K \in \mu^{-1}(t)$ y $L \subset K$. De donde $K \in X(\mathcal{A}, t_0, t)$. Así que $L \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Es claro que $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$. Si ocurriera lo contrario, entonces existen $K_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $K_2 \in \mathfrak{B}_2$ tales que $C(K_1, t_0) \cap C(K_2, t_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Sea $D \in C(K_1, t_0) \cap C(K_2, t_0) \cap \mathcal{A}$. Por el Lema 4, existe un arco α en $C(K_1 \cup K_2, t)$, que une a K_1 con K_2 tal que para cada $L \in \alpha$, se cumple que $D \subset L$. Así que, para cada $L \in \alpha$, obtenemos que $D \in C(L, t_0) \cap \mathcal{A}$. De aquí que $\alpha \subset X(\mathcal{A}, t_0, t)$. Ahora bien, de la conexidad de α, se tiene que $K_1 \in \mathfrak{B}_2$ o $K_2 \in \mathfrak{B}_1$. Esto es una contradicción. De esto concluimos que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$. Finalmente veamos que $\mathcal{D}_1$ es cerrado en $\mathcal{A}$, la demostración de que $\mathcal{D}_2$ es cerrado en $\mathcal{A}$ es análoga. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}_1$ tal que $E_n \to E$ para algún $E \in \mathcal{A}$. Demostraremos que $E \in \mathcal{D}_1$. Por cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $K_n \in \mathfrak{B}_1$ tal que $E_n \in C(K_n, t_0) \cap \mathcal{A}$. Por la compacidad de $\mathfrak{B}_1$, podemos suponer que $K_n \to K$ para algún $K \in \mathfrak{B}_1$. Debido a que $E_n \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 3, tenemos que $E \subset K$. Así que $E \in C(K, t_0) \cap \mathcal{A}$. De donde concluimos que $E \in \mathcal{D}_1$. Esto demuestra que $\mathcal{D}_1$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

De esta afirmación, obtenemos que $\mathcal{A}$ no es conexo. Esta contradicción establece la conexidad de $X(\mathcal{A}, t_0, t)$.

Por lo tanto $X(\mathcal{A}, t_0, t)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. ■

2.9.2 Teorema principal

En [14, Teorema 14.46 (1), p. 454] se demuestra que la indescomponibilidad es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En el siguiente teorema demostraremos que la indescomponibilidad es también una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

Teorema 19 *La indescomponibilidad es una propiedad secuencialmente decreciente de Whitney.*

Demostración.
Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$. Demostraremos que: si $\mu^{-1}(t)$ es descomponible, entonces existe un número natural m tal que $\mu^{-1}(t_m)$ es descomponible.

Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ subcontinuos propios de $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Sean $A_1 \in \mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{A}_2$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2 \backslash \mathcal{A}_1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, A_1) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = B_H(\varepsilon, A_2) \cap \mathcal{A}_1$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Por el Teorema 18, existen E_1 y $E_2 \in C(X)$ tales que $A_1 \subsetneqq E_1 \subset N(\delta, A_1)$ y $A_2 \subsetneqq E_2 \subset N(\delta, A_2)$. Sea m un número natural tal que $t_m \in (t, \text{mín}\{\mu(E_i), \mu(\sigma(\mathcal{A}_i)) : i \leq 2\})$. Por el Lema 8, existe $F_i \in C(E_i)$ tal que $A_i \subset F_i$ y $F_i \in \mu^{-1}(t_m)$ para cada $i \leq 2$.

Para cada $i \leq 2$, definamos $\mathcal{G}_i = X(\mathcal{A}_i, t, t_m)$. Afirmamos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son subcontinuos propios de $\mu^{-1}(t_m)$ tales que $\mu^{-1}(t_m) = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Por el Lema 20, se tiene que $\mathcal{G}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_m)$ para cada $i \leq 2$. Para ver que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son subconjuntos propios de $\mu^{-1}(t_m)$, demostraremos que $F_1 \notin \mathcal{G}_2$ y $F_2 \notin \mathcal{G}_1$. Por la elección de δ, tenemos que $C(F_1, t) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = C(F_2, t) \cap \mathcal{A}_1$. Así que $F_1 \notin \mathcal{G}_2$ y $F_2 \notin \mathcal{G}_1$. Finalmente, para ver que $\mu^{-1}(t_m) = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, demostraremos que $\mu^{-1}(t_m) \subset \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Sea $D \in \mu^{-1}(t_m)$. Dado que $C(D,t) \subset \mu^{-1}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, se sigue que $C(D,t) \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ o $C(D,t) \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. De donde $D \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Esto completa la demostración de la afirmación.

Por lo tanto $\mu^{-1}(t_m)$ es descomponible. ■

2.9.2 Teorema principal

En [14, Teorema 14.46 (1), p. 454] se demuestra que la indescomponibilidad es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En el siguiente teorema demostraremos que la indescomponibilidad es también una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

Teorema 19 *La indescomponibilidad es una propiedad secuencialmente decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$. Demostraremos que: si $\mu^{-1}(t)$ es descomponible, entonces existe un número natural m tal que $\mu^{-1}(t_m)$ es descomponible.

Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ subcontinuos propios de $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Sean $A_1 \in \mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{A}_2$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2 \backslash \mathcal{A}_1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, A_1) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = B_H(\varepsilon, A_2) \cap \mathcal{A}_1$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Por el Teorema 18, existen E_1 y $E_2 \in C(X)$ tales que $A_1 \subsetneq E_1 \subset N(\delta, A_1)$ y $A_2 \subsetneq E_2 \subset N(\delta, A_2)$. Sea m un número natural tal que $t_m \in (t, \text{mín}\{\mu(E_i), \mu(\sigma(\mathcal{A}_i)) : i \leq 2\})$. Por el Lema 8, existe $F_i \in C(E_i)$ tal que $A_i \subset F_i$ y $F_i \in \mu^{-1}(t_m)$ para cada $i \leq 2$.

Para cada $i \leq 2$, definamos $\mathcal{G}_i = X(\mathcal{A}_i, t, t_m)$. Afirmamos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son subcontinuos propios de $\mu^{-1}(t_m)$ tales que $\mu^{-1}(t_m) = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Por el Lema 20, se tiene que $\mathcal{G}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_m)$ para cada $i \leq 2$. Para ver que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son subconjuntos propios de $\mu^{-1}(t_m)$, demostraremos que $F_1 \notin \mathcal{G}_2$ y $F_2 \notin \mathcal{G}_1$. Por la elección de δ, tenemos que $C(F_1, t) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = C(F_2, t) \cap \mathcal{A}_1$. Así que $F_1 \notin \mathcal{G}_2$ y $F_2 \notin \mathcal{G}_1$. Finalmente, para ver que $\mu^{-1}(t_m) = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, demostraremos que $\mu^{-1}(t_m) \subset \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Sea $D \in \mu^{-1}(t_m)$. Dado que $C(D,t) \subset \mu^{-1}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, se sigue que $C(D,t) \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ o $C(D,t) \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. De donde $D \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Esto completa la demostración de la afirmación.

Por lo tanto $\mu^{-1}(t_m)$ es descomponible. ∎

2.10 Indescomponibilidad hereditaria

2.10.1 Teorema principal

En [14, Teorema 14.54 (1), p. 461] se demuestra que la indescomponibilidad hereditaria es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. En el siguiente teorema mostraremos que la indescomponibilidad hereditaria es una propiedad secuencial de Whitney.

*Decimos que un continuo es **hereditariamente indescomponible** si cada uno de sus subcontinuos no degenerados es indescomponible.*

Teorema 20 *La indescomponibilidad hereditaria es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.
Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$.

Demostraremos que: si $\mu^{-1}(t)$ contiene a un subcontinuo descomponible, entonces existe un número natural m tal que $\mu^{-1}(t_m)$ contiene a un subcontinuo descomponible.

Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo descomponible de $\mu^{-1}(t)$. Entonces existen $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ subcontinuos propios de $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Sean $A_1 \in \mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{A}_2$, $A_2 \in \mathcal{A}_2 \backslash \mathcal{A}_1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, A_1) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = B_H(\varepsilon, A_2) \cap \mathcal{A}_1$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Por el Teorema 18, existen E_1, $E_2 \in C(X)$ tales que $A_1 \subsetneq E_1 \subset N(\delta, A_1)$ y $A_2 \subsetneq E_2 \subset N(\delta, A_2)$. Sea m un número natural tal que t_m está en el intervalo abierto $(t, \min\{\mu(E_i), \mu(\sigma(\mathcal{A}_i)) : i \leq 2\})$. Por el Lema 8, para cada $i \leq 2$, existe $F_i \in C(E_i)$ tal que $A_i \subset F_i$ y $F_i \in \mu^{-1}(t_m)$.

Para cada $i \leq 2$, definamos $\mathcal{G}_i = X(\mathcal{A}_i, t, t_m)$. Afirmamos que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ es un subcontinuo descomponible de $\mu^{-1}(t_m)$. Para ver esta parte, por el Lema 20, $\mathcal{G}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_m)$ para cada $i \leq 2$. Ahora demostraremos que $\mathcal{G}_1 \subsetneq \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 \subsetneq \mathcal{G}_1$. Por la elección de δ, tenemos que $C(F_1, t) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset = C(F_2, t) \cap \mathcal{A}_1$. De donde $F_1 \notin \mathcal{G}_2$ y $F_2 \notin \mathcal{G}_1$. Así, dado que $F_1 \in \mathcal{G}_1$ y $F_2 \in \mathcal{G}_2$, obtenemos que $\mathcal{G}_1 \subsetneq \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 \subsetneq \mathcal{G}_1$. Por último demostraremos que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \neq \emptyset$. Sea $D \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Por el Lema 8, existe $L \in \mu^{-1}(t_m)$ tal que $D \subset L$. Así que $L \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

De lo anterior concluimos que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ es un subcontinuo descomponible de $\mu^{-1}(t_m)$. Esto completa la demostración del teorema. ∎

2.11 Unicoherencia

2.11.1 Teorema principal

En [14, Teorema 14.46 (2), p. 454] se demuestra que el ser unicoherente es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. Y en en el siguiente teorema presentamos la demostración, de que también es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

*Decimos que un continuo X es **unicoherente**, si para cualesquiera dos elementos A y B de $C(X)$, cumpliendo que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Teorema 21 *La unicoherencia es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t \in [0,1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t,1]$ tales que $t_n \to t$.

Veamos que: si $\mu^{-1}(t)$ no es unicoherente, entonces existe un número natural m tal que $\mu^{-1}(t_m)$ no es unicoherente.

Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ no es conexa. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ cerrados, ajenos y no vacíos en $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$X\,(i,n) = \{K \in \mu^{-1}(t_n) : C\,(K,t) \cap \mathcal{F}_i \neq \emptyset\} \text{ para cada } i \leq 2.$$

Necesitamos demostrar que:

(i) cada $X\,(i,n)$ es un subconjunto cerrado, no vacío de $\mu^{-1}(t_n)$,

(ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, $X\,(\mathcal{A}_1, t, t_n) \cap X\,(\mathcal{A}_2, t, t_n) = X\,(1,n) \cup X\,(2,n)$ y

(iii) existe un número natural m tal que $X\,(1,m) \cap X\,(2,m) = \emptyset$.

Para ver la parte (i), sean $i \leq 2$ fijo, n_0 un número natural, también fijo y $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $X\,(i,n_0)$ tal que $K_l \to K$ para algún $K \in \mu^{-1}(t_{n_0})$. Veamos que $K \in X(i,n_0)$. Dado que $C(K_l,t) \cap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ para cada l, existe $A_l \in C(K_l,t) \cap \mathcal{F}_i$ para cada l. Por la compacidad de $\mathcal{F}_i$, podemos suponer que $A_l \to A$ para algún $A \in \mathcal{F}_i$. Debido a que $A_l \subset K_l$ para cada l, por el Lema 3, se sigue que $A \subset K$. Así que $A \in C(K,t) \cap \mathcal{F}_i$. De modo que $K \in X(i, n_0)$. De esto concluimos que $X(i,n_0)$ es cerrado. Para ver que $X(i,n_0)$ es no vacío, sea $L \in \mathcal{F}_i$. Por el Lema 8, existe $E \in \mu^{-1}(t_{n_0})$ tal que $L \subset E$. Así que $E \in X(i,n_0)$. Esto completa la parte (i).

Veamos (ii). Sea n un número natural fijo. Veamos que $X(1,n) \cup X(2,n) \subset X(\mathcal{A}_1,t,t_n) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_n)$. Sea $K \in X(1,n) \cup X(2,n)$. Entonces $C(K,t) \cap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ para alguna $i \leq 2$. Como $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, tenemos que $C(K,t) \cap (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \neq \emptyset$. De donde $C(K,t) \cap \mathcal{A}_1 \neq \emptyset \neq C(K,t) \cap \mathcal{A}_2$. Esto implica que $K \in X(\mathcal{A}_1,t,t_n) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_n)$. Falta ver que $X(\mathcal{A}_1,t,t_n) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_n) \subset X(1,n) \cup X(2,n)$. Demostraremos que: si $K \notin X(1,n) \cup X(2,n)$, entonces $K \notin X(\mathcal{A}_1,t,t_n) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_n)$. Supongamos que existe $K \in \mu^{-1}(t_n)$ tal que $K \notin X(1,n) \cup X(2,n)$. Entonces $C(K,t) \cap [\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2] = \emptyset$. Ahora bien, debido a que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, obtenemos que $C(K,t) \subset \mu^{-1}(t) \backslash \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Así, dado que $C(K,t)$ es conexo y los conjuntos $(\mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{A}_2)$ y $(\mathcal{A}_2 \backslash \mathcal{A}_1)$ son abiertos y ajenos cuya unión es $\mu^{-1}(t) \backslash \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, concluimos que $C(K,t) \subset (\mathcal{A}_1 \backslash \mathcal{A}_2)$ o $C(K,t) \subset (\mathcal{A}_2 \backslash \mathcal{A}_1)$. Esto implica que $C(K,t) \cap \mathcal{A}_1 = \emptyset$ o $C(K,t) \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. De esta manera concluimos que $K \notin X(\mathcal{A}_1,t,t_n) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_n)$.

Para ver (iii), supongamos lo contrario. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $K_n \in X(1,n) \cap X(2,n)$. Por la compacidad de $C(X)$, podemos suponer que la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a K para algún $K \in C(X)$. Por la continuidad de μ, se tiene que $K \in \mu^{-1}(t)$. Afirmamos que $K \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Sea $i \leq 2$ fijo. Como $K_n \in X(i,n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in C(K_n,t) \cap \mathcal{F}_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $\mu^{-1}(t)$, podemos suponer que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a E para algún $E \in \mu^{-1}(t)$. Debido a que $\mathcal{F}_i$ es cerrado en $\mu^{-1}(t)$, $E \in \mathcal{F}_i$. Mostraremos que $E = K$. Ahora bien, como $E_n \subset K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $E \subset K$ (por el Lema 3). Así, dado que K, $E \in \mu^{-1}(t)$ y μ es una función de Whitney, tenemos que $E = K$. De donde $K \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Esta contradicción, establece que existe un número natural m tal que $X(1,m) \cap X(2,m) = \emptyset$.

De (i), (ii) y (iii), concluimos que $X(\mathcal{A}_1,t,t_m) \cap X(\mathcal{A}_2,t,t_m)$ no es conexo. De esta manera, dado que $X(\mathcal{A}_1,t,t_m)$, $X(\mathcal{A}_2,t,t_m)$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t_m)$ (por el Lema 20) y $X(\mathcal{A}_1,t,t_m) \cup X(\mathcal{A}_2,t,t_m) = \mu^{-1}(t_m)$, se sigue que $\mu^{-1}(t_m)$ no es unicoherente. ■

2.12 Otras propiedades

2.12.1 Introducción

La siguiente notación, nos simplificará la escritura de los resultados de las próximas secciones:

Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Para cada $t \in [0,1]$, definamos

$$\sigma_{t,\mu} : C(\mu^{-1}(t)) \to \mu^{-1}([t,1]) \text{ como}$$
$$\sigma_{t,\mu}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Notemos que $\sigma_{t,\mu}$ es la restricción de σ a $C(\mu^{-1}(t))$. De donde $\sigma_{t,\mu}$ es una función continua.

Definición 15 *Decimos que un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(X)$ es una **anticadena** si A, $B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, implica que $A = B$.*

Dado un continuo X, hagamos

$$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}.$$

El próximo resultado se debe a A. Illanes (ver [7, Ejercicio 23.8, p. 206]).

Lema 21 *Sea X un continuo y $\mathcal{A}$ un subconjunto compacto de $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Entonces $\mathcal{A}$ es un nivel de Whitney para $C(X)$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es una anticadena y $\mathcal{A}$ intersecta a cada arco ordenado α en $C(X)$ tal que uno de sus puntos extremos está en $F_1(X)$ y el otro es X.*

Lema 22 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$ es inyectiva, entonces para cada $t \in (t_0,1)$, se tiene que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ es un nivel de Whitney para $C(\mu^{-1}(t_0))$.*

Demostración.

Sea $t \in [t_0,1)$. Hagamos $\mathcal{M} = \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$. Demostraremos que $\mathcal{M}$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{M}$ está contenido en $C\left(\mu^{-1}(t_0)\right) \setminus \left(\left\{\mu^{-1}(t_0)\right\} \cup F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right)\right)$
2. $\mathcal{M}$ es una anticadena,
3. $\mathcal{M}$ intersecta a cada arco ordenado α en $C\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$ tal que uno de sus puntos extremos está en $F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$ y el otro es $\mu^{-1}(t_0)$.

Primero la parte 1). Demostraremos que $\mu^{-1}(t_0) \notin \mathcal{M}$ y que $\mathcal{M} \cap F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right) = \emptyset$. Si $\mu^{-1}(t_0) \in \mathcal{M}$, entonces $\sigma_{t_0,\mu}\left(\mu^{-1}(t_0)\right) = X \in \mu^{-1}(t)$. Esto contradice la elección de t. Ahora supongamos que $\mathcal{M} \cap F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right) \neq \emptyset$. Elijamos $\mathcal{A} \in \mathcal{M} \cap F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$. Entonces $\mu\left(\sigma(\mathcal{A})\right) = t$ y $\mathcal{A} = \{E\}$ para algún $E \in \mu^{-1}(t_0)$. Esto también contradice la elección de t. Esto demuestra 1).

Veamos que $\mathcal{M}$ es una anticadena. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Como $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{B})$ y $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{A})$, $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{B}) \in \mu^{-1}(t)$, se tiene que $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{A}) = \sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{B})$. De la inyectividad de $\sigma_{t_0,\mu}$, se sigue que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Para demostrar que $\mathcal{M}$ intersecta a cada arco ordenado en $C\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$ tal que uno de sus puntos extremos está en $F_1\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$ y el otro es $\mu^{-1}(t_0)$, consideremos un arco ordenado α en $C\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$ tal que uno de sus extremos es $\{E\}$ para algún $E \in \mu^{-1}(t_0)$ y el otro es $\mu^{-1}(t_0)$. Por el Lema 7, existe $\mathcal{A} \in \alpha$ tal que $\mu(\sigma(\mathcal{A})) = t$. De donde $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$.

Por lo tanto, usando el Lema 21, podemos concluir que $\mathcal{M}$ es un nivel de Whitney para $C\left(\mu^{-1}(t_0)\right)$. ■

2.12.2 Teorema principal

En [7] Capítulo VIII se tiene un estudio completo de las propiedades secuenciales fuertes reversibles de Whitney.

Mostramos en el siguiente resultado, una condición bajo la cual una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

Teorema 22 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\sigma_{t,\mu}|_{\sigma_{t,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t,1]))}$ es inyectiva para cada $t \in [0,1)$, entonces cualquier propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t_0 \in [t_0, 1)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(t_0, 1]$ tales que $t_n \to t_0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene $\mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathcal{P}$ es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney. Demostraremos que $\mu^{-1}(t_0)$ tiene $\mathcal{P}$. Dado que $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$ es una función inyectiva, por el Lema 22, para cada $t \in (t_0, 1)$, obtenemos que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ es un nivel de Whitney para $C(\mu^{-1}(t_0))$. De la inyectividad de la función $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$, se sigue que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$ para cada $t \in (t_0, 1)$. Demostraremos que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n)) \to F_1(\mu^{-1}(t_0))$. Primero, veamos que $F_1(\mu^{-1}(t_0)) \subset \liminf \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n))$. Sean $E \in \mu^{-1}(t_0)$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $E \in \mu^{-1}(t_0)$ y $E_n \in \mu^{-1}(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(\mu^{-1}(t_0))$ tal que $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{E}_n) = E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}$ para algún $\mathcal{E} \in C(\mu^{-1}(t_0))$. Notemos que $\sigma(\mathcal{E}) = E$. Como $\{E\} \in C(\mu^{-1}(t_0))$ y $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$ es inyectiva, tenemos que $\mathcal{E} = \{E\}$. Ahora bien, debido a que $\mathcal{E}_n \in \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{E\} \in \liminf \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n))$. De donde $F_1(\mu^{-1}(t_0)) \subset \liminf \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n))$.

Ahora, demostraremos que $\limsup \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n)) \subset F_1(\mu^{-1}(t_0))$. Sea $\mathcal{E} \in \limsup \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n))$ y una sucesión $\{\mathcal{E}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $C(\mu^{-1}(t_0))$ tal que converge a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_{n_k} \in \sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_{n_k}))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{E}_{n_k}) \to \sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{E})$. Como $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{E}_{n_k}) \in \mu^{-1}(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\sigma_{t_0,\mu}(\mathcal{E}) \in \mu^{-1}(t_0)$. Usando la inyectividad de la función $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$, tenemos que $\{E\} = \mathcal{E}$ para algún $E \in \mu^{-1}(t_0)$. De donde $\mathcal{E} \in F_1(\mu^{-1}(t_0))$.

Esto demuestra que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t_n)) \to F_1(\mu^{-1}(t_0))$.

Por lo tanto, usando lo anterior y debido a que $\mathcal{P}$ es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney, se sigue que $\mu^{-1}(t_0)$ tiene $\mathcal{P}$. Esto termina la demostración del teorema. ■

Decimos que un **continuo X tiene la propiedad cubriente** *si para cada subcontinuo propio $\mathcal{A}$ de $\mu^{-1}(t)$ se cumple que $\sigma(\mathcal{A}) \neq X$, para cada función de μ Whitney para $C(X)$ y para cada $t \in [0, 1]$.*

Observación. *Si X es un continuo con la propiedad cubriente y μ una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\sigma_{t,\mu}$ es inyectiva. Por lo tanto por el Teorema 22, cualquier propiedad secuencial fuerte reversible Whitney es una propiedad secuencial decreciente de Whitney en continuos que tienen la propiedad cubriente.*

Capítulo 3

Propiedades crecientes

Muchos autores se han dedicado a estudiar las propiedades de Whitney. Bastantes propiedades topológicas ya se sabe si son o no propiedades de Whitney. En [7, Sección VIII, p. 231] se encuentra una recopilación del trabajo que se hizo hasta 1999.

Es de nuestro interés estudiar la siguiente pregunta:

¿si un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t_0)$ tiene una propiedadad topológica $\mathcal{P}$, entonces el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ tiene $\mathcal{P}$ para cada $t \geq t_0$? Esta pregunta motiva la siguiente definición:

Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es:

una ***propiedad de Whitney*** *siempre que si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene $\mathcal{P}$, para cada μ función de Whitney para $C(X)$ y para cada $t \in [0,1)$.*

una ***propiedad creciente de Whitney*** *siempre que se cumpla la siguiente condición: si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$ es tal que $\mu^{-1}(t_0)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene $\mathcal{P}$ para cada $t \in [t_0, 1)$.*

Es conocido que las siguientes propiedades de Whitney son también propiedades crecientes de Whitney:

1. conexidad local (ver [18, Proposición 1, p. 150]),

2. ser un arco (ver [13, Teorema 4]),

3. ser una curva cerrada simple (ver [13, Teorema 4]),

4. conexidad por arcos (ver [18, Proposición 2, p. 151]),
5. indescomponibilidad hereditaria (ver [18, Proposición 8, p. 155]),
6. unicoherencia, para la clase de continuos de Peano (ver [6, Teorema A, p. 252]).

Se sabe que la aposindesis (ver [18, Proposición 9, p. 156]) y la descomponibilidad (ver [14, Teorema 14.11, p. 411]) son propiedades de Whitney. Sin embargo en este trabajo mostraremos, con ejemplos, que estas propiedades no son propiedades crecientes de Whitney.

3.1 Un resultado general

En esta sección demostraremos que las siguientes propiedades son propiedades crecientes de Whiyney.
(1) ser un solenoide particular (ver [14, Teorema 14.21, p. 422]),
(2) ser el Arcoiris ([7, Teorema 37.9, p. 258]),
(3) ser como círculo propio (ver [9, Teorema 6.2 (b), p. 161]),
(4) ser aplanable y no ser aplanable para la clase de los continuos como círculo propio (ver [7, Teoremas 54.1 y 54.2, p. 283]),
(5) encadenabilidad (ver [9, Teorema 6.2 (a), p. 161]),
(6) ser el pseudoarco (ver [7, Teorema 56.1, p. 286]),
(7) ser un pseudosolenoide (ver [7, Teorema 57.2, p. 286]),
(8) ser un pseudocírculo (ver [7, Teorema 57.4, p. 286]),
(9) ser hereditariamente indescomponible y como árbol (ver [7, Teorema 63.1, p. 292]),
(10) indescomponibilidad para la clase de los continuos encadenables (ver [3, Teorema 4.3, p. 172]).

Iniciamos demostrando el siguiente resultado.

Lema 23 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $\mu^{-1}(t_0)$ es tal que cada uno de sus subcontinuos propios y no degenerados son hereditariamente irreducibles, entonces $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$ es inyectiva.*

Demostración.

Primero necesitamos demostrar que, para cada $A \in \mu^{-1}([t,1))$, se cumple que $\sigma_{t,\mu}^{-1}(A) = \{C(A,t)\}$. Sea $A \in \mu^{-1}([t,1))$. Analicemos los siguientes casos:

Consideremos el caso en que $A \in \mu^{-1}(t)$. Sea $\mathcal{M} \in C(\mu^{-1}(t))$ tal que $\sigma(\mathcal{M}) = A$ y $D \in \mathcal{M}$. Dado que $D \subset \sigma(\mathcal{M})$ y D, $A \in \mu^{-1}(t)$, se sigue que $D = A$. De donde $\mathcal{M} = \{A\} = C(A,t)$.

Finalmente, consideremos el caso en que $t < \mu(A) < 1$. Necesitamos demostrar que:

(1) para cada $\mathcal{K} \in C(C(A,t)) \setminus \{C(A,t)\}$, se cumple que $\sigma(\mathcal{K}) \neq A$.

Dado que $C(A,t)$ es un subcontinuo propio y no degenerado de $\mu^{-1}(t)$, por hipótesis tenemos que $C(A,t)$ es hereditariamente irreducible. Ahora bien, de acuerdo con el Teorema 14, obtenemos que, para cada subcontinuo propio $\mathcal{K}$ de $C(A,t)$, $\sigma(\mathcal{K}) \neq A$. Esto termina la prueba de (1).

Si existe $\mathcal{M} \in C(\mu^{-1}(t))$ tal que $\sigma(\mathcal{M}) = A$, entonces $\mathcal{M} \subset C(A,t)$. De acuerdo con (1), se tiene que $\mathcal{M} = C(A,t)$.

Ahora veamos la inyectividad de la función $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$. Para esto, sean $\mathcal{L}$, $\mathcal{N} \in \sigma_{t,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$ tales que $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{N})$. Dado que $\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{L})) = \{C(\sigma(\mathcal{L}),t)\}$ y $\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{N})) = \{C(\sigma(\mathcal{N}),t)\}$, obtenemos que $\mathcal{L} = C(\sigma(\mathcal{L}),t) = C(\sigma(\mathcal{N}),t) = \mathcal{N}$. Por lo tanto $\sigma_{t,\mu}|_{\sigma_{t,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))}$ es inyectiva en $\sigma_{t,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$. Esto completa la demostración del lema. ∎

Teorema 23 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $\mathcal{P}$ una propiedad topologica y $t_0 \in [0,1)$. Supongamos que todo subcontinuo propio y no degenerado de $\mu^{-1}(t_0)$ es hereditariamente irreducible y $\mu^{-1}(t_0)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es una propiedad de Whitney. Entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada $t \in [t_0,1)$.*

Demostración.

Supongamos que existen: una función de Whitney μ para $C(X)$, $t_0 \in [0,1)$ tal que todo subcontinuo propio, no degenerado de $\mu^{-1}(t_0)$ es hereditariamente irreducible. Entonces por el Lema ??, $\sigma_{t_0,\mu}|_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$ es inyectiva. Por el Lema 22, se sigue que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ es un nivel de Whitney para $C(\mu^{-1}(t_0))$ para cada $t \in (t_0,1)$. Ahora bien, dado que $\mathcal{P}$ es una propiedad de Whitney, concluimos que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada $t \in (t_0, 1)$. De la inyectividad de la función $\sigma_{t_0,\mu} \mid_{\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}([t_0,1)))}$, se sigue que $\sigma_{t_0,\mu}^{-1}(\mu^{-1}(t))$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$ para cada $t \in (t_0, 1)$. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada $t \in [t_0, 1)$. Esto termina la prueba del teorema. ■

Corolario 2 *Cada una de las propiedades (1) a (10) es una propiedad creciente de Whitney.*

Demostración.
Cada uno de los continuos descritos en (1)-(10) tienen la propiedad de que cada uno de sus subcontinuos propios y no degenerados es hereditariamente hirreducible (ver [14, Ejercicios 1. 209.3 y 1. 209.4, p. 201] y [16, Teorema 12.5, p. 233]). ■

3.2 Conexidad por trayectorias uniforme

3.2.1 Introducción

En esta sección daremos algunos resultados que nos serán de utilidad para demostrar que la conexidad por trayectorias uniforme es una propiedad creciente de Whitney.

El siguiente resultado será de gran utilidad en las próximas secciones.

Lema 24 *Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y t, $t_0 \in [0, 1)$, con $t_0 < t$. Si A, $B \in \mu^{-1}(t)$, con $A \neq B$, entonces existen E, $F \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $E \subseteq A$, $F \subseteq B$ y $E \neq F$.*

Demostración.
Dado que $A \neq B$ y A, $B \in \mu^{-1}(t)$, existen $a \in A \backslash B$ y $b \in B \backslash A$. Por el Lema 8, existen E, $F \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $a \in E \subset A$ y $b \in F \subset B$. Entonces E y F cumplen las propiedades requeridas. ■

Recordemos el concepto de conexidad por trayectorias uniforme.

Definición 16 *Decimos que un continuo X es **uniformemente conexo por trayectorias** si existe una familia $\mathcal{F}$ de trayectorias en X (es decir funciones continuas de $[0, 1]$ en X) tal que:*

1. *cada dos puntos son unidos por una trayectoria de $\mathcal{F}$,*
2. *para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n tal que para cada $p \in \mathcal{F}$, existen números $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tales que díam $[p[t_{i-1}, t_i]] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$.*

En [11, Lema 2, p. 2], I. Krzemińska demuestra el siguiente resultado.

Lema 25 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número natural n tal que si A, $B \in \mu^{-1}(t)$, con $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe una trayectoria $q : [0,t] \to \mu^{-1}(t)$ que los une y diám $\left[q\left(\left[(i-1)\frac{t}{n}, i\frac{t}{n}\right]\right)\right] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$.*

Lema 26 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Sea $\varepsilon > 0$. Si $\{B_0, \ldots, B_{k+1}\}$ es una cadena débil de elementos de $\mu^{-1}(t)$, con $B_0 \neq B_{k+1}$, entonces existen un número natural m (que sólo depende de k y ε), una trayectoria $q : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ que une a los puntos B_0 y B_{k+1} y números $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tales que diám $[q[t_{i-1}, t_i]] < \varepsilon$ para cada $i \leq m$.*

Demostración.

Sea r un número natural como en el Lema 25 (que sólo depende del número ε) para el número ε. Sea $m = (k+1)r$. Dado que $\{B_0, \ldots, B_{k+1}\}$ es una cadena débil, por la elección de r, tenemos que existe una trayectoria $q_i : [0,t] \to \mu^{-1}(t)$ que une a los elementos B_i, B_{i+1} para cada $i < k+1$ tal que diám$\left[q_i\left(\left[(j-1)\frac{t}{r}, j\frac{t}{r}\right]\right)\right] < \varepsilon$ para cada $j \leq r$ y $i < k+1$.

Por otra parte, tomemos una partición del intervalo cerrado $[0,1]$, $P = \{x_0, \ldots, x_{k+1}\}$, y una familia de homeomorfismos $h_l : [x_l, x_{l+1}] \to [0,t]$ que preservan el orden entre los puntos, para cada $l < k+1$. Definamos

$$q : [0,1] \to \mu^{-1}(t) \text{ como}$$
$$q(x) = (q_i \circ h_i)(x) \quad \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{para cada } i < k+1.$$

Necesitamos ver que q es una trayectoria con las propiedades requeridas. Para ver esto, hagamos

$$R = \left\{h_l^{-1}\left(j\tfrac{t}{r}\right) : \text{para cada } 0 \leq l \leq k \text{ y } 0 \leq j < r\right\} \cup \left\{h_k^{-1}(t)\right\}.$$

Notemos que R tiene m elementos. Dado que P y $\{j\frac{t}{r} : 0 \leq j < r\}$ son particiones de los intervalos $[0,t]$ y $\left[0,(r-1)\frac{t}{r}\right]$ respectivamente, obtenemos que R es una partición de $[0,1]$, con m elementos. De la definición de q y por la forma como se eligieron las funciones q_j, se tiene que

$$\text{diám}[q\left([h_l^{-1}((j-1)\tfrac{t}{r}), h_l^{-1}(j\tfrac{t}{r})]\right)] < \varepsilon \text{ para cada } 0 \leq l \leq k \text{ y } 0 \leq j \leq r.$$

Esto termina la demostración del lema. ■

Recordemos el concepto de encadenabilidad uniforme por continuos.

Definición 17 *Decimos que un continuo X es* ***uniformemente encadenable por continuos*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n = n(\varepsilon)$ tal que para cada par de puntos $p \neq q \in X$, existe una cadena débil de subcontinuos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de X tal que $p \in A_1$, $q \in A_n$ y diám $[A_i] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$.*

En la demostración del Teorema 2 en [11, p. 5] se demuestra el siguiente resultado.

Lema 27 *Si X es un continuo uniformemente conexo por trayectorias, entonces él es uniformemente encadenable por continuos.*

La relación que hay entre los conceptos de encadenabilidad uniforme por continuos y conexidad por trayectorias uniforme, la damos en el siguiente resultado

Lema 28 *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $\mu^{-1}(t_0)$ es uniformemente encadenable por continuos, entonces $\mu^{-1}(t)$ es uniformemente conexo por trayectorias para cada $t \in (t_0, 1)$.*

Demostración.

Sean $t \in (t_0, 1)$ y $\varepsilon > 0$. Sea ε_1 como en el Lema 29 para los números ε y t. Tomemos k un número natural de acuerdo con la encadenabilidad por continuos uniforme de $\mu^{-1}(t_0)$, para el número ε_1.

Sean A, $B \in \mu^{-1}(t)$ y $A \neq B$. Por el Lema 24, existen $A_1 \neq B_1 \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$. Dado que $\mu^{-1}(t_0)$ es uniformemente encadenable por continuos, existe una k, que depende sólo de ε y una cadena débil de subcontinuos $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k\}$ de $\mu^{-1}(t_0)$ tal que $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $B_1 \in \mathcal{A}_1$ y diám

$[\mathcal{A}_i] < \varepsilon_1$ para cada $i \leq k$. Por la elección de ε_1, tenemos que $\mu(\sigma(\mathcal{A}_i)) < t$ para cada $i \leq k$. Por el Lema 8, existe $B_i \in \mu^{-1}(t)$ tal que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset B_i$ para cada $i \leq k$. Sean $A = B_0$ y $B = B_{k+1}$. Dado que $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ y $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k\}$ es una cadena débil, se sigue que $\{B_0, \ldots, B_{k+1}\}$ es una cadena débil. Usando el Lema 26, existen un número natural n (que sólo depende de k y ε), p una trayectoria que une a A con B y números $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tales que díam $[p[t_{i-1}, t_i]] < \varepsilon$ para cada $i \leq n$. Notemos que k no depende de la elección de los puntos A y B. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es uniformemente conexo por trayectorias. Así, termina la demostración del lema. ■

3.2.2 Teorema principal

En [11, Teorema 2, p. 5], demuestra que la conexidad por trayectorias uniforme es una propiedad de Whitney. En el siguiente teorema demostramos que también es una propiedad creciente de Whitney.

La demostración del siguiente resultado se sigue de los Lemas 27 y 28.

Teorema 24 *La conexidad por trayectorias uniforme es una propiedad creciente de Whitney.*

3.3 Encadenabilidad por continuos

3.3.1 Introducción

Para la definición de encadenable por continuos ver el capítulo 2, Sección 2.4.

En esta Sección sólo demostraremos el siguiente resultado.

Lema 29 *Sea μ una función de Whitney para $C(X)$, $t_0 \in (0,1)$ y $t \in (t_0, 1)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que cumple la siguiente condición:*

$$\text{si } \mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t_0)) \text{ es tal que diám } [\mathcal{A}] < \delta, \text{ entonces } \mu(\sigma(\mathcal{A})) < t.$$

Demostración.

Como $t - t_0 > 0$ y $\mu \circ \sigma : C(C(X)) \to [0,1]$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $H^2(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) < \delta$, entonces $|\mu(\sigma(\mathcal{A}_1)) - \mu(\sigma(\mathcal{A}_2))| < t - t_0$. Sean $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t_0))$ tal que diám$[\mathcal{A}] < \delta$ y $E \in \mathcal{A}$. Entonces $H^2(\mathcal{A}, \{E\}) < \delta$. Así que $|\mu(\sigma(\mathcal{A})) - \mu(E)| < t - t_0$. De donde $\mu(\sigma(\mathcal{A})) < t$. ■

3.3.2 Teorema principal

En esta sección mostraremos que la encadenabilidad por continuos es una propiedad creciente de Whitney (ver [7, Corolario 33.6, p. 249]). Antes de hacer esto, demostraremos el siguiente teorema más general.

Teorema 25 *Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$. Si $\mu^{-1}(t_0)$ es encadenable por continuos, entonces $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos, para cada $t \in (t_0, 1]$.*

Demostración.
Sea $t \in (t_0, 1]$. Para t y t_0, elijamos δ como en el Lema 29. Sean A, $B \in \mu^{-1}(t)$, con $A \neq B$. Por el Lema 24, existen E, $F \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $E \subseteq A$, $F \subseteq B$ y $E \neq F$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es encadenable por continuos, existe una cadena débil de subcontinuos $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ de $\mu^{-1}(t_0)$ tales que $E \in \mathcal{A}_1$, $F \in \mathcal{A}_n$ y díam $[\mathcal{A}_i] < \delta$ para cada $i \leq n$.

Por la elección de δ, se tiene que $\mu(\sigma(\mathcal{A}_i)) < t$ para cada $i \leq n$. Usando el Lema 8, existe $D_i \in \mu^{-1}(t)$ tal que $\sigma(\mathcal{A}_i) \subset D_i$ para cada $i \leq n$. Por el Lema 4, cada una de las parejas $\{A, D_1\}$, $\{D_1, D_2\}, \ldots, \{D_{n-1}, D_n\}$ y $\{D_n, B\}$ pueden ser conectadas por un arco en $\mu^{-1}(t)$. De donde A y B pueden ser conectados por un arco en $\mu^{-1}(t)$. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es conexo por arcos. ■

Dado que conexidad por arcos implica encadenabilidad por continuos, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3 *La encadenabilidad por continuos es una propiedad creciente de Whitney.*

3.4 Los spans

3.4.1 Introducción

En esta sección tenemos la siguiente aclaración de la notación:

* en las anteriores secciones usabamos la letra σ, para denotar a la función union, sin embargo en esta sección la utilizaremos para denotar algun tipo de span.

Acontinuación presentamos algunas definiciones referentes a los spans más conocidos.

Definición 18 *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. El span $\sigma(f)$, el semi-span $\sigma_0(f)$, el span suprayectivo $\sigma^*(f)$, el semi-span suprayectivo $\sigma_0^*(f)$, se definen por:*

1. $\sigma(f) = \sup\{\varepsilon \geq 0$: *existe un subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $p_1(Z) = P_2(Z)$ y $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ para cada $(x, y) \in Z\}$.*

2. $\sigma_0(f) = \sup\{\varepsilon \geq 0$: *existe un subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $p_1(Z) \subset P_2(Z)$ y $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ para cada $(x, y) \in Z\}$.*

3. $\sigma^*(f) = \sup\{\varepsilon \geq 0$: *existe un subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $p_1(Z) = X = P_2(Z)$ y $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ para cada $(x, y) \in Z\}$.*

4. $\sigma_0^*(f) = \sup\{\varepsilon \geq 0$: *existe un subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $p_1(Z) \subset P_2(Z) = X$ y $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ para cada $(x, y) \in Z\}$.*

   También definamos el span de X por: $\sigma(X) = \sigma(\mathrm{id}_X)$, el semi-span de X como: $\sigma_0(X) = \sigma_0(\mathrm{id}_X)$, el span suprayectivo de X como: $\sigma^*(X) = \sigma^*(\mathrm{id}_X)$, el semi-span suprayectivo de X como: $\sigma_0^*(X) = \sigma_0^*(\mathrm{id}_X)$.

El siguiente resultado lo demostro H. Hosokawa, pero esta demostración no aparece en ningún artículo publicado, así que nosotros presentamos su demostración.

Lema 30 *Sean X un continuo, $K, L \in C(X)$ y U, V conjuntos abiertos en X tales que $K \not\subseteq U$ y $L \not\subseteq V$. Entonces el conjunto $W = (K \times L) \setminus (U \times V)$ es un subcontinuo. $p_1(W) = K$ y $p_2(W) = L$. Además, si $K \subset V$ y $L \subset U$, entonces $W \cap \Delta_X = \emptyset$ (donde $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$).*

Demostración.

Claramente W es compacto. Elijamos dos puntos fijos $p \in K \setminus U$ y $q \in L \setminus V$. Sea $(x, y) \in W$. Entonces $x \in K \setminus U$ o $y \in L \setminus V$. Supongamos que $x \in K \setminus U$. Entonces $\{(x, y), (x, q)\}$ y $\{(x, q), (p, q)\}$ están contenidos en los subconjuntos conexos $\{x\} \times L$ y $K \times \{q\}$ de W respectivamente. De donde (x, y) y (p, q) están en la misma componente de W. Así que W es conexo.

Las otras afirmaciones de este lema son evidentes. ■

3.4.2 Teorema principal

En [5, Corolario 3.3, p. 39] demuestran que la propiedad de tener span cero es una propiedad de Whitney, para cualquiera de los tipos de span. Demostraremos también que es una propiedad creciente de Whitney para cualquiera de los tipos de span.

Sea X un continuo, es conocido que $\langle U\rangle = \{A \in C(X) : A \subset U\}$ es un conjunto abierto en $C(X)$, para cualquier abierto U de X (ver [14, Teorema 0.13, p. 10]).

Teorema 26 *La propiedad de tener span cero es una proiedad creciente de Whitney, para cualquiera de los tipos de span.*

Demostración.

Supongamos que existen: μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0,1)$ tal que $\tau(\mu^{-1}(t_0)) = 0$, donde τ es alguno de los siguientes spans $\tau = \sigma$, σ_0, σ^* o σ_0^*.

Sea $t \in [t_0, 1)$. Demostraremos que el teorema es cierto $\tau = \sigma$. Es decir, supondremos que $\sigma(\mu^{-1}(t_0)) = 0$ y veremos que $\sigma(\mu^{-1}(t)) = 0$, los otros casos se demuestran de manera similar. Si $\sigma(\mu^{-1}(t)) = 0$, entonces no hay nada que demostrar. Así, supongamos que $\sigma(\mu^{-1}(t)) > 0$. Entones existen $\varepsilon > 0$ y un subcontinuo $\mathcal{Z}$ de $\mu^{-1}(t) \times \mu^{-1}(t)$ tales que $H(A,B) \geq \varepsilon$ para cada $(A,B) \in \mathcal{Z}$ y $p_1(\mathcal{Z}) = p_2(\mathcal{Z})$. Sea δ como en el Lema 5 para el número ε. Necesitamos demostrar que, para cada $(A,B) \in \mathcal{Z}$, se tiene que $C(A,t_0) \not\subset \langle N(\delta,B)\rangle$ y $C(B,t_0) \not\subset \langle N(\delta,A)\rangle$. Para ver esta parte, supongamos, sin pérdida de generalidad que, el elemento $(A,B) \in \mathcal{Z}$ cumple que $C(A,t_0) \subset \langle N(\delta,B)\rangle$. Entonces $A \subset N(\delta,B)$. Así, por la elección de δ, tenemos que $H(A,B) < \varepsilon$. Esta contradicción establece la afirmación.

Para cada $(A,B) \in \mathcal{Z}$, definamos

$$\mathcal{M}(A,B) = C(A,t_0) \times C(B,t_0) \setminus \langle N(\delta,B)\rangle \times \langle N(\delta,A)\rangle.$$

Por el Lema 30, tenemos que, para cada $(A,B) \in \mathcal{Z}$, $\mathcal{M}(A,B)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0) \times \mu^{-1}(t_0)$, $p_1(\mathcal{M}(A,B)) = C(A,t_0)$ y $p_2(\mathcal{M}(A,B)) = C(B,t_0)$.

Definamos $\mathfrak{M} = \bigcup\{\mathcal{M}(A,B) : (A,B) \in \mathcal{Z}\}$. Afirmamos que $\mathfrak{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0) \times \mu^{-1}(t_0)$ tal que $p_1(\mathfrak{M}) = p_2(\mathfrak{M})$ y $H(E,F) \geq \delta$ para cada $(E,F) \in \mathfrak{M}$. Para ver que $H(E,F) \geq \delta$ para cada $(E,F) \in \mathfrak{M}$, sean $(E, F) \in \mathfrak{M}$ y $(A, B) \in \mathcal{Z}$ tales que $(E, F) \in \mathcal{M}(A, B)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $E \in C(A, t_0) \setminus \langle N(\delta, B) \rangle$. De donde $H(E, F) \geq \delta$. Para demostrar que $\mathfrak{M}$ es cerrado en $\mu^{-1}(t_0) \times \mu^{-1}(t_0)$, sea $\{(D_n, C_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathfrak{M}$ tal que converja a (D, C) para algún $(D, C) \in \mu^{-1}(t_0) \times \mu^{-1}(t_0)$. Demostraremos que $(D, C) \in \mathfrak{M}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $(A_n, B_n) \in \mathcal{Z}$ tal que $(D_n, C_n) \in \mathcal{M}(A_n, B_n)$. Dado que $\mathcal{Z}$ es compacto, podemos suponer que $(A_n, B_n) \to (A, B)$, para algún $(A, B) \in \mathcal{Z}$. Debido a que $D_n \subset A_n$ y $C_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $(D, C) \in C(A, t_0) \times C(B, t_0)$ (por el Lema 3). También, dado que $D_n \in C(A_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, B_n) \rangle$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$ o $C_n \in C(B_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, A_n) \rangle$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D_n \in C(A_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, B_n) \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos puntos $x_n \in D_n \setminus N(\delta, B_n)$. Podemos suponer que $x_n \to x$, para algún $x \in X$. Notemos que $x \in D$. Ahora, para demostrar que $D \in C(A, t_0) \setminus \langle N(\delta, B) \rangle$, basta con probar que $x \notin N(\delta, B)$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $\eta > 0$ y $b \in B$ tales que $d(x, b) < \delta - 2\eta$. Tomemos un número natural k tal que $H(B_r, B) < \eta$ y $d(x_r, x) < \eta$ para cada $r \geq k$. Dado que $B \subset N(\eta, B_r)$ para cada $r \geq k$, existe $b_r \in B_r$ tal que $d(b, b_r) < \eta$ para cada $r \geq k$. Así que $d(x_r, b_r) \leq d(x_r, x) + d(x, b) + d(b, b_r) < \eta + \delta - 2\eta + \eta = \delta$ para cada $r \geq k$. De donde $x_r \in N(\delta, B_r)$ para cada $r \geq k$. Esto contradice la elección de los puntos x_n. Así que $D \in C(A, t_0) \setminus \langle N(\delta, B) \rangle$. De donde $(D, C) \in \mathcal{M}(A, B)$. Esto demuestra que $\mathfrak{M}$ es cerrado.

Para demostrar la conexidad de $\mathfrak{M}$, supongamos que $\mathfrak{M}$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ de $\mathfrak{M}$ tales que $\mathfrak{M} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Para cada $i = 1, 2$, definamos

$$\mathcal{Z}_i = \{(A, B) \in \mathcal{Z} : \mathcal{M}(A, B) \subset \mathcal{H}_i\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{Z}_1$ y $\mathcal{Z}_2$ son cerrados, ajenos y no vacíos en $\mathcal{Z}$ tales que $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}$. De la conexidad de los conjuntos $\mathcal{M}(A, B)$, se sigue que $\mathcal{Z}_1$ y $\mathcal{Z}_2$ son ajenos, no vacíos y $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}$. Ahora, demostraremos que $\mathcal{Z}_1$ es cerrado en $\mathcal{Z}$, la demostración para $\mathcal{Z}_2$ es similar. Sea $\{(A_n, B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{Z}_1$ tal que converge a un elemento $(A, B) \in \mathcal{Z}$. Demostraremos que $\mathcal{M}(A, B) \subset \mathcal{H}_1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $(D_n, C_n) \in \mathcal{M}(A_n, B_n)$. De la compacidad de $\mathfrak{M}$, podemos suponer que $(D_n, C_n) \to (D, C)$ para algún $(D, C) \in \mathfrak{M}$. Dado que $\mathcal{M}(A_n, B_n) \subset \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_1$ es cerrado, concluimos que $(D, C) \in \mathcal{H}_1$.

Por otra parte, demostraremos que $(D, C) \in \mathcal{M}(A, B)$. Dado que

$D_n \in C(A_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, B_n) \rangle$ para una infinidad de números n o

$C_n \in C(B_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, A_n) \rangle$ para una infinidad de números n,

podemos suponer que $D_n \in C(A_n, t_0) \setminus \langle N(\delta, B_n) \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Elijamos puntos $x_n \in D_n \setminus N(\delta, B_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $x_n \to x$, para algún $x \in X$. Notemos que $x \in D$. Ahora, para demostrar que $D \in C(A, t_0) \setminus \langle N(\delta, B) \rangle$, basta mostrar que $x \notin N(\delta, B)$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $\eta > 0$ y $b \in B$ tales que $d(x, b) < \delta - 2\eta$. Elijamos un número natural k tal que $H(B_r, B) < \eta$ y $d(x_r, b) < \eta$ para cada $r \geq k$. Dado que $B \subset N(\eta, B_r)$ para cada $r \geq k$, existe $b_r \in B_r$ tal que $d(b, b_r) < \eta$ para cada $r \geq k$. Así que, $d(x_r, b_r) \leq d(x_r, x) + d(x, b) + d(b, b_r) < \eta + \delta - 2\eta + \eta = \delta$ para cada $r \geq k$. De donde $x_r \in N(\delta, B_r)$ para cada $r \geq k$. Esto contradice la elección de los puntos x_n. Así que $D \in C(A, t_0) \setminus \langle N(\delta, B) \rangle$. De donde $(D, C) \in \mathcal{M}(A, B)$.

Ahora bien, debido a que $\mathcal{M}(A, B) \subset \mathfrak{M}$ y $(D, C) \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{M}(A, B) \subset \mathcal{H}_1$. Esto demuestra que $\mathcal{Z}_1$ es cerrado en $\mathcal{Z}$.

De esta manera concluimos que $\mathcal{Z}$ no es conexo. Esta contradicción establece la conexidad de $\mathfrak{M}$.

Finalmente veamos que $p_1(\mathfrak{M}) = p_2(\mathfrak{M})$. $p_1(\mathfrak{M}) = \bigcup\{p_1(\mathcal{M}(A, B)) : (A, B) \in \mathcal{Z}\}$
$= \bigcup\{C(A, t_0) : (A, B) \in \mathcal{Z}\}$ debido a que $p_1(\mathcal{M}(A, B)) = C(A, t_0)$. Así que $p_1(\mathfrak{M}) = \bigcup\{C(A, t_0) : A \in p_1(\mathcal{Z})\}$ debido a que $p_1(\mathcal{Z}) = p_2(\mathcal{Z})$,
$= \bigcup\{C(A, t_0) : A \in p_2(\mathcal{Z})\}$
$= \bigcup\{C(B, t_0) : B \in p_2(\mathcal{Z})\}$ debido a que $p_2(\mathcal{M}(A, B)) = C(B, t_0)$,
$= \bigcup\{p_2(\mathcal{M}(A, B)) : (A, B) \in \mathcal{Z}\} = p_2(\mathfrak{M})$.

Por lo tanto $\sigma(\mu^{-1}(t_0)) \geq \delta$. Esta contradicción establece el teorema. ■

3.5 Aposindesis

En conocido que la aposindesis es una propiedad de Whitney (ver [18, Teorema 9, p. 156]) pero no es una propiedad secuencial decreciente de Whitney.

El siguiente resultado es fácil de demostrar (ver [7, Ejercicio 29.8, p. 239]).

Lema 31 *Sea X un continuo, sea $p \in X$ tal que X es conexo en pequeño en p, sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney para $C(X)$ y sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A$. Entonces $\mathcal{A}$ es conexo en pequeño en A.*

Acontinuación daremos un ejemplo de un continuo y de una función de Whitney que muestren que: *la aposindesis no es una propiedad creciente de Whitney.*

Construcción del ejemplo

Sean

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ J_1 &= \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\right\}, \\ J_2 &= \left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\right\} \text{ y} \\ C &= [0,1] \times [0,1]. \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$L'_n = \bigcup \{[0,1] \times \{\frac{k}{2n}\} : k = 0, 1, ..., 2n\} \text{ y}$$

$$M'_n = \bigcup \{\{\frac{k}{2n}\} \times [0,1] : k = 0, 1, ..., 2n\}.$$

Sea L_n (resp., M_n) el único arco contenido en $J_1 \cup J_2 \cup (\{\{0.1\} \times [0,1]\}) \cup L'_n$ (resp., $J_1 \cup J_2 \cup ([0,1] \times \{0,1\}) \cup M'_n$) que une a los puntos p_0 y $(2,2)$, y que contiene a L'_n (resp., M'_n).

Sea

$$K_n = \left(L_n \times \left\{\tfrac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(M_n \times \left\{\tfrac{1}{2n}\right\}\right) \cup \left(\{(2,2)\} \times \left[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{2n-1}\right]\right) \subset \mathbb{R}^3.$$

Sea

$$C^* = J_1 \cup J_2 \cup C$$

y finalmente, definimos

$$X = (C^* \times \{0\}) \cup (\bigcup \{K_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup (\{p_0\} \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^3.$$

X está representado en la Figura 1.

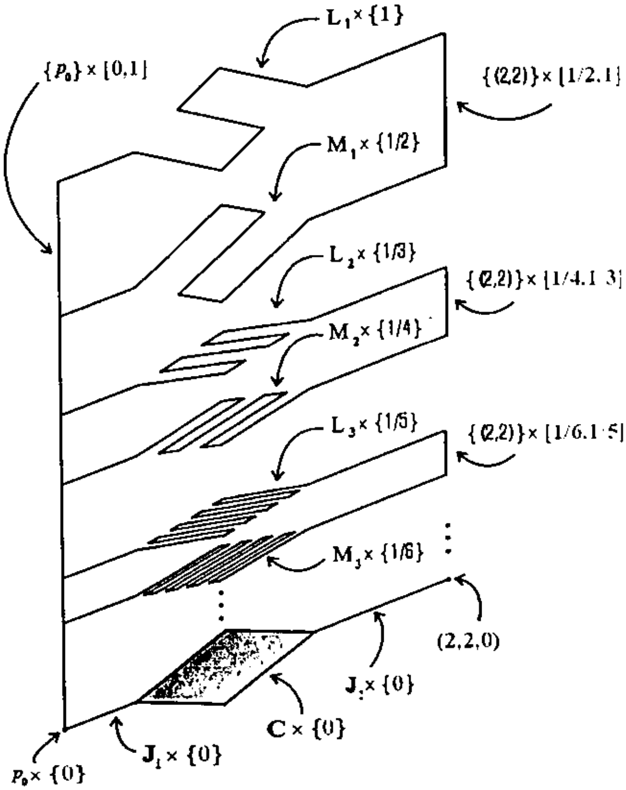

Figura 1

Claramente X es un continuo que es localmente conexo en todos los puntos del conjunto $(X - (C^* \times \{0\})) \cup \{p_0\}$.

Hacemos

$$R_0 = (J_1 \times \{0\}) \cup \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{(0,0)\}\right) \text{ y}$$

$$S_0 = (J_1 \times \{0\}) \cup \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{0\}\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$R_n = \left(J_1 \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\left(0, \frac{1}{2n-1}\right)\right\}\right) y$$

$$S_n = \left(J_1 \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right) \cup \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right).$$

Así $R_n, S_n \subset K_n$ por cada $n \in \mathbb{N}$ y las sucesiones $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a R_0 y S_0, respectivamente.

Sea

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \left\{[0,1] \times \{y\} \times \{z\} \subset X : (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \cup \left\{J_2 \times \{\frac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \\
&\quad \left\{J_2 \times \{0\}\right\} \cup \left\{\{u\} \times [0,1] \times \{w\} \subset X : (u,w) \in \mathbb{R}^2\right\} \cup \\
&\quad \{R_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \{S_n\}_{n=0}^{\infty}. \\
\mathcal{B}_2 &= \left\{(C \times \{z\}) \cap X : z \in \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}\right\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es cerrado en $C(X)$. Tomemos $0 < t_1 < t_2 < 1$. Definimos $\mu_1 : \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \to \{t_1, t_2\}$ por $\mu_1(\mathcal{B}_i) = \{t_i\}$ para cada $i \in \{1,2\}$. Es fácil verificar que μ_1 es una función de Whitney para $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Por el Teorema 16.10 de [7], μ_1 puede ser extendida a una función de Whitney, μ, para $C(X)$.

Necesitamos algunas construcciones y resultados auxiliares. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{A} \cap C\left(\left(L_n \times \left\{\tfrac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(\{(2,2)\} \times \left[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{2n-1}\right]\right) \cup \left(J_2 \times \left\{\tfrac{1}{2n}\right\}\right)\right) \text{ y}$$

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{A} \cap C\left(M_n \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right).$$

Como cada uno de los conjuntos $\left(L_n \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(\{(2,2)\} \times \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]\right) \cup \left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right)$ y $M_n \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ es un arco y los niveles de Whitney de los arcos son arcos también (ver [7, Teorema 31.1, p. 245]), tenemos que $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$ son arcos y se intersectan en $\left\{J_2 \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right\}$ y la unión $\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ es un arco que une a R_n con S_n.

Afirmación 1. *Las sucesiones $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, respectivamente, a los conjuntos*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0 &= (\mathcal{A} \cap C(([0,1] \times \{(0,0)\}) \cup J_1 \times \{0\})) \cup \\ &\quad \{([0,1] \times \{(y,0)\}) : y \in [0,1]\} \cup \\ &\quad (\mathcal{A} \cap C(([0,1] \times \{(1,0)\}) \cup J_2 \times \{0\})) \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 &= (\mathcal{A} \cap C((\{0\} \times [0,1] \times \{0\}) \cup (J_1 \times \{0\}))) \cup \\ &\quad \{(\{x\} \times [0,1] \times \{0\}) : x \in [0,1]\} \cup \\ &\quad (\mathcal{A} \cap C((\{1\} \times [0,1] \times \{0\}) \cup (J_2 \times \{0\}))).\end{aligned}$$

Probaremos que la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{C}_0$; la prueba de la otra convergencia se hace en forma similar. Claramente todos los elementos de $\mathcal{C}_0$ son límite de elementos que pertenecen a los respectivos $\mathcal{C}_n$.

Tomemos $D \in \mathcal{A}$ tal que $D = \text{Lim } D_k$, donde cada $D_k \in \mathcal{C}_{n_k}$ y $n_1 < n_2 < \ldots$. Entonces $D \subset C^* \times \{0\}$. Si ocurriera que $D \subset ([0,1] \times \{(1,0)\}) \cup (J_2 \times \{0\})$ o $D \subset ([0,1] \times \{(0,0)\}) \cup (J_1 \times \{0\})$, entonces, por definición, $D \in \mathcal{C}_0$. Supongamos que D no está contenido en ninguno de los conjuntos $([0,1] \times \{(1,0)\}) \cup (J_2 \times \{0\})$ y $([0,1] \times \{(0,0)\}) \cup (J_1 \times \{0\})$. Entonces existe un punto $p = (u,v,0) \in D$ tal que $0 < v < 1$. Si ocurriera que $(2,2,0) \in D$, entonces $D \subset J_2 \times \{0\}$ o $J_2 \times \{0\} \subset D$. Como ambos tienen la misma medida bajo μ, podemos concluir que $D = J_2 \times \{0\}$. Esto es contrario a lo que ya estamos suponiendo. De manera que $(2,2,0) \notin D$. Ya que $D \cap (\{(2,2)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, podemos suponer que $D_k \cap (\{(2,2)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la conexidad de D_k y como $D_k \subset \left(L_{n_k} \times \left\{\frac{1}{2n_k-1}\right\}\right) \cup \left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n_k}\right\}\right)$ y D_k no está contenido en $J_2 \times \left\{\frac{1}{2n_k}\right\}$, se tiene que $D_k \subset L_{n_k} \times \left\{\frac{1}{2n_k-1}\right\}$.

Necesitamos demostrar que

1. D no contiene puntos de la forma $(u_1, v_1, 0)$, con $0 \leq v_1$ y $v_1 \neq v$.

Supongamos que $(u_1, v_1, 0) \in D$, para algún v_1. Podemos suponer que $v < v_1$. Elegimos números $v < v_2 < v_3 < v_1$. Dado que $D_k \to D$, $(u_1, v_1, 0) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^3}$ $([-1,2] \times [v_3, 3] \times [-1,2]) \cap X$ y $(u, v, 0) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^3}$ $([-1,2] \times [-1, v_2] \times [-1,2]) \cap X$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq N$,

$$D_k \cap ([-1,2] \times [v_3, 3] \times [-1,2]) \neq \emptyset \text{ y}$$

$$D_k \cap ([-1,2] \times [-1, v_2] \times [-1,2]) \neq \emptyset.$$

Notemos que hay algún elemento de la forma $\frac{j_k}{2n_k}$ en el conjunto (v_2, v_3), con $k \geq N$. Por la construcción de L_{n_k} y la conexidad de D_k, tenemos que $[0,1] \times \left\{\left(\frac{j_k}{2n_k}, \frac{1}{2n_k-1}\right)\right\} \subset D_k$ para cada $k \geq N$. Podemos suponer que $\left\{\frac{j_k}{2n_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a un $v_0 \in [v_2, v_3]$ Entonces $[0,1] \times \{(v_0, 0)\} \subset D$. Como ambos conjuntos tienen la misma medida bajo μ, obtenemos que $[0,1] \times \{(v_0, 0)\} = D$. De esta manera, dado que $p \in D$, $v = v_0$. Esta contradicción, demuestra 1.

De 1, obtenemos que $D \cap C \subset [0,1] \times \{(v, 0)\}$. Ahora bien, dado que $0 < v$ y por la conexidad de D, tenemos que $D \subset [0,1] \times \{(v, 0)\}$ y como ambos conjuntos miden lo mismo bajo μ, concluimos que $D = [0,1] \times \{(v,0)\} \in \mathcal{C}_0$. Esto termina la demostración de que la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{C}_0$ y con esto termina la prueba de la afirmación 1.

Afirmación 2. *$\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{D}_0$ son dos arcos que se intersectan en $J_2 \times \{0\}$. De modo que $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0$ es un arco que une a R_0 con S_0.*

Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, sea $<_n$ el orden natural del arco $\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ en el que se cumple que $R_n <_n S_n$. Dados D, $E \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$, con $D \leq_n E$, denotamos por

$$[D,E]_n \text{ al conjunto } \{F \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n : D \leq_n F \leq_n E\}.$$

Definamos $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $\pi_2(x,y,z) = y$ y $\pi : X \to \mathbb{R}$ como $\pi(x,y,z) = (x,y,0)$.

Consideremos el arco

$$W_n = \left(L_n \times \left\{\tfrac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(\{(2,2)\} \times \left[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{2n-1}\right]\right).$$

Notemos que cuando avanzamos del extremo $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2n-1}\right)$ de W_n al otro extremo $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$ de W_n, las coordenadas en y es creciente (sin ser estrictamente creciente). Entonces podemos afirmar lo siguiente:

Observación 1. *Si E, $D \in \mathcal{A} \cap C(W_n)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $E \leq_n D$ si y sólo si, para cada $a \in D$, existe $e \in E$ tal que $\pi_2(e) \leq \pi_2(a)$.*

De manera similar se tiene que:

Observación 2. *Si E, $D \in \mathcal{C}_0$, entonces $E \leq_0 D$ si y sólo si, para cada $a \in D$, existe $e \in E$ tal que $\pi_2(e) \leq \pi_2(a)$.*

Observación 3. *Si E, $D \in \mathcal{D}_n$ y $n \geq 0$, entonces $E \leq_n D$ si y sólo si, para cada $a \in D$, existe $e \in E$ tal que $\pi_2(e) \geq \pi_2(a)$.*

Afirmación 3. *Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a E_0 y D_0, respectivamente, y que son tales D_n, $E_n \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ y $D_n \leq_n E_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces $D_0 \leq_0 E_0$.*

Para demostrar la afirmación 3, primero consideremos el caso en que E_n y $D_n \in C(W_n)$. Usaremos la Observación 2 para probar que $E \leq_0 D$. Tomemos $a \in D$. Por el Lema 2, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a \to a$ y $a_n \in D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Observación 1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $e_n \in E_n$ tal que $\pi_2(e_n) \leq \pi_2(a_n)$. Sea $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un $e \in X$. Entonces $e \in E$ (ver Lema 3) y $\pi_2(e) = \text{Lim } \pi_2(e_{n_k}) \leq \text{Lim } \pi_2(a_{n_k}) = \pi_2(a)$. Así que $\pi_2(e) \leq \pi_2(a)$. Por tanto $E \leq_0 D$.

En forma similar se trata el caso en que D_n y $E_n \in \mathcal{D}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, veamos el caso en que $E_n \in C(W_n)$ y $D_n \cap \left(\left\{(2,2) \times \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2n-1}\right]\right\}\right) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En este caso, $E_n \leq_n \left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right)$ y $(2,2) \in D$. Esto último implica que $D \subset J_2 \times \{0\}$ o $J_2 \times \{0\} \subset D$ y como ambos miden lo mismo bajo μ, tenemos que coinciden. Por el primer caso $E \leq_0 \text{Lim}\left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) = J_2 \times \{0\} = D$. Así que $E \leq D$.

El caso $E_n \cap \left(\left\{(2,2) \times \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2n-1}\right]\right\}\right) \neq \emptyset$ y $D_n \in \mathcal{D}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es similar.

Finalmente, si $E_n \in C(W_n)$ y $D_n \in \mathcal{D}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $E_n \leq_n \left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) \leq_n \left(J_2 \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right) \leq D_n$. Por los casos que ya vimos, $E \leq_0 ((J_2 \times \{0\})) \leq_0 D_0$. Así que $E_0 \leq_0 D_0$.

Observe que éstos son los únicos casos posibles y que cualesquiera sucesiones $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienen subsucesiones $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que caen en uno de estos casos, por lo que podemos concluir que $E \leq_0 D$.

Una consecuencia directa de la Afirmación 3 es la siguiente.

Afirmación 4. *Sea $D_0 \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0$ y sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $C(X)$, que converja a D_0 y que satisfaga que $D_n \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces las sucesiones de arcos $\{[R_n, D_n]_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{[D_n, S_n]_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen, respectivamente, a $[R_0, D_0]_0$ y $[D_0, S_0]_0$.*

Primera propiedad. *El nivel de Whiney $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_1)$ es aposindético.*

Sean A, $B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$. Tenemos que encontrar un subcontinuo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $B \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ y $A \notin \mathcal{B}$. Si ocurriera que B intersecta a $(X - (C^* \times \{0\}) \cup \{p_0\})$, entonces, por el Lema 31, $\mathcal{A}$ es conexo en pequeño en B. De manera que se puede encontrar $\mathcal{B}$ con las propiedades mencionadas. Por tanto, podemos suponer que

$$B \subset (C^* \times \{0\}) - \{p_0\}.$$

Primero analizaremos el caso en que A no está contenido en $C^* \times \{0\}$. En este caso existe un punto $a = (x, y, z) \in A$ tal que $z > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < z$. Entonces el conjunto $D = C^* \times \left[0, \frac{1}{n}\right] \cap X$ es un subcontinuo de X tal que $B \subset C^* \times [0, \frac{1}{n}) \cap X \subset \operatorname{int}_X(D)$ y $A \not\subset D$. Sea $\delta > 0$ tal que $N(\delta, B) \subset D$. En este caso hacemos $\mathcal{B} = C(D) \cap \mathcal{A}$. Entonces $B_H(\delta, B) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. De manera que $B \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ y $A \notin \mathcal{B}$. Por lo tanto, la pueba en este caso está terminada.

Supongamos que $A \subset C^* \times \{0\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $A \notin B_H(\varepsilon, B)$. Como C^* es localmente conexo, por el Lema 31, tenemos que $\mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\})$ es localmente conexo, así que existe un subcontinuo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\})$ tal que

$$B \in \operatorname{int}_{\mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\})}(\mathcal{B}) \text{ y } A \notin \mathcal{B}.$$

Tomemos un abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\}) \subset \mathcal{B}$. Ahora, consideremos dos casos:

Caso I. $B \notin \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0$.
Entonces $B \notin \bigcup \{\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$. En particular, $B \neq J_2 \times \{0\}$. Si ocurriera que $(2, 2, 0) \in B$, entonces $B \subset J_2 \times \{0\}$ o $J_2 \times \{0\} \subset B$ y como ambos tienen la misma medidad bajo μ, podemos concluir que $B = J_2 \times \{0\}$, lo cual es absurdo pues $J_2 \times \{0\} \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}_0$. De manera que $(2, 2, 0) \notin B$. Así que $B \cap (\{(2, 2)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, por tanto podemos suponer que ningún elemento de $\mathcal{U}$ intersecta a $\{(2, 2)\} \times \mathbb{R}$. Como $\bigcup \{\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ es cerrado, podemos suponer que $\mathcal{U} \cap \bigcup \{\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\} = \emptyset$. Como $p_0 \notin B$, entonces $B \cap (\{p_0\} \times [0, 1]) = \emptyset$. De manera que podemos suponer que ningún elemento de $\mathcal{U}$ intersecta a $\{p_0\} \times [0, 1]$.

Ahora queremos ver que $\mathcal{U} \subset C(C^* \times \{\{0\}\})$. Para esto, tomemos $D \in \mathcal{U}$. Entonces $D \cap (\{p_0\} \times [0, 1]) = \emptyset$. Así que $D \subset C^* \times \{0\}$ o $D \subset K_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $D \subset C^* \times \{0\}$ o $D \subset L_n \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ o $D \subset M_n \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Las ultimas dos condiciones no se pueden dar pues $D \notin \bigcup \{\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$. Por tanto $D \subset C^* \times \{0\}$. Hemos probado que $\mathcal{U} \subset C(C^* \times \{0\})$.

De manera que $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \mathcal{U} \cap \mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\}) \subset \mathcal{B}$. Por tanto $B \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ y como $A \notin \mathcal{B}$, la prueba en este caso está terminado.

Caso II. $B \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0$.
Notemos que $A \notin [R_0, B]_0$ o $A \notin [B, S_0]_0$ (puede no estar en ninguno). Vamos a analizar la primera posibilidad, la segunda es similar. Entonces existe $D \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{D}_0$ tal que $B <_n D$ y $A \notin [R_0, D]_n$. Elegimos una sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, que converja a D y que satisfaga que $D_n \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la afirmación 4, tenemos que

$$2)\ A \notin \bigcup \{[R_n, D_n]_n : n = 0, 1, 2, ...\}.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$T_n = R_n \cup R_0 \cup (\{p_0\} \times [0, 1]).$$

Observemos que T_n es un arco o un triodo. Entonces, por el Teorema 33.1 de [7], $\mathcal{A} \cap C(T_n)$ es conexo por trayectorias. Así que existe un arco $\gamma_n \subset \mathcal{A} \cap C(T_n)$ que une a R_n con R_0. Notemos que, si $E \in \bigcup \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\pi(E) \subset R_0$. Necesitamos demostrar que

$$3)\ A \notin \mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Para esto supongamos que $A \in \mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$, sea $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $E_m \to A$ y $E_m \in \bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. De donde $\pi(E_m) \subset R_0$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de π, $\pi(A) \subset R_0$. Dado que $\pi(A) = A$, obtenemos que $A \subset R_0$, y como ambos tienen la misma medida bajo μ, concluimos que $A = R_0$. Esto contradice 2).

Sea

$$\mathcal{K} = \mathcal{B} \cup \left(\mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right)\right) \cup \left(\bigcup\{[R_n, D_n]_n : n \in \{0,1,2,...\}\}\right).$$

Demostraremos que

a) $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $\mathcal{A}$ y

b) $B \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}}\mathcal{K}$ y $A \notin \mathcal{K}$.

Para el inciso a), dado que $R_0 \in \gamma_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo en $C(X)$. De donde $\mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Como $R_0 \in \gamma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$[R_0, D]_0 \cap \mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \neq \emptyset.$$

Así, dado que cada $[R_n, D_n]_n$ es un subcontinuo de X y $R_n \in [R_n, D_n]_n \cap \gamma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\mathrm{Cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \cup \left(\bigcup\{[R_n, D_n]_n : n \in \{0,1,2,...\}\}\right)$$

es un subcontinuo de $C(X)$. Ahora bien, usando que $B \in [R_0, D]_0 \cap \mathcal{B}$ y que $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $C(X)$, obtenemos que $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $C(X)$.

Demostremos b). De 1), 2) y 3), tenemos que $A \notin \mathcal{K}$. Veamos la otra parte. Sea

$$\mathcal{M} = \{F \in \mathcal{A} : F \cap (\{p_0\} \times [0,1]) \neq \emptyset\} \cup \left(\bigcup\{[D_n, S_n]_n : n \in \{0,1,2,...\}\}\right).$$

Dado que $\{F \in \mathcal{A} : F \cap (\{p_0\} \times [0,1]) \neq \emptyset\}$ es un subcontinuo de $C(X)$ y $\{F \in \mathcal{A} : F \cap (\{p_0\} \times [0,1]) \neq \emptyset\} \cap [D_n, S_n]_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \{0,1,2,...\}$, tenemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $C(X)$. Notemos que $B \notin \mathcal{M}$. Entonces, dado que $B \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}\cap C(C^* \times \{0\})}(\mathcal{B})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B\varepsilon^H(B) \cap \mathcal{M} = \emptyset \text{ y } B\varepsilon^H(B) \cap (\mathcal{A} \cap C(C^* \times \{0\})) \subset \mathcal{B}.$$

Necesitamos demostrar que

$$B\varepsilon^H(B) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{K}.$$

Para esto, sea $E \in B\varepsilon^H(B) \cap \mathcal{A}$. Si $E \in C(C^* \times \{0\})$, entonces $E \in \mathcal{B}$. De donde $E \in \mathcal{K}$. Entonces, supongamos que $E \notin C(C^* \times \{0\})$. Dado que $E \notin \mathcal{M}$, tenemos que $E \cap (\{p_0\} \times [0,1]) \neq \emptyset$. De donde $E \in \bigcup \{[R_n, D_n] : n \in \mathbb{N}\}$. De esta manera $E \in \mathcal{K}$. La prueba en este caso está terminada.

Segunda propiedad. $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_2)$ no es aposindético.

Recordemos que, para cada $z \in \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, $\mu((C \times \{z\}) \cap X) = t_2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por

$$Z_n = \left(K_n - \left(\left(J_1 \times \left\{\tfrac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(J_1 \times \left\{\tfrac{1}{2n}\right\}\right)\right)\right) \cup \left\{\left(0, 0, \tfrac{1}{2n-1}\right), \left(0, 0, \tfrac{1}{2n}\right)\right\}.$$

Notemos que Z_n es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, dado que, para cada $z \in \left\{\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}\right\}$, $(C \times \{z\}) \cap X$ es un subcontinuo propio de Z_n, por el Teorema 31.1 de [7], tenemos que $C(Z_n) \cap \mathcal{A}$ es un arco en $\mathcal{A}$ que une a $C \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\} \cap X$ con $C \times \left\{\frac{1}{2n}\right\} \cap X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Q_n \in C(Z_n) \cap \mathcal{A}$ tal que $\left(2, 2, \frac{1}{2n}\right) \in Q_n$.

Necesitamos demostrar que $\mathcal{A} - \left\{C \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\} \cap X, C \times \left\{\frac{1}{2n}\right\} \cap X\right\}$ no es conexo en $\mathcal{A}$. Observemos que, como K_n es un arco, por el Teorema 31.1 de [7], $C(K_n) \cap \mathcal{A}$ es un arco. También que $C(Z_n) \cap \mathcal{A}$ es un subarco de $C(K_n) \cap \mathcal{A}$ y no contiene a los extremos de $C(K_n) \cap \mathcal{A}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$Y_n = \left(X - \left(\left(J_2 \times \left\{\tfrac{1}{2n-1}\right\}\right) \cup \left(\{(2,2)\} \times \left[\tfrac{1}{2n-1}, \tfrac{1}{2n}\right]\right) \cup \left(J_2 \times \left\{\tfrac{1}{2n}\right\}\right)\right)\right) \cup \left\{\left(1, 1, \tfrac{1}{2n-1}\right), \left(1, 1, \tfrac{1}{2n}\right)\right\}.$$

Notemos que Y_n es un subcontinuo de X para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, por la construcción del continuo X, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

1. $Y_n \cap Z_n = \left(\left(C \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) \cap X\right) \cup \left(\left(C \times \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right) \cap X\right)$,

2. $Y_n \cup Z_n = X$.

Por cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos $\mathcal{G}_n = C(Y_n) \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{Z}_n = C(Z_n) \cap \mathcal{A}$, $L_n = C \times \left\{\frac{1}{n}\right\} \cap X$.

Necesitamos demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

3. $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{Z}_n = \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$,

4. $\mathcal{G}_n \cup \mathcal{Z}_n = \mathcal{A}$,

5. los conjuntos $\mathcal{G}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ y $\mathcal{Z}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ son abiertos, ajenos en $\mathcal{A}$ y su unión es $\mathcal{A} - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$.

Veamos 3. Sea $G \in \mathcal{G}_n \cap \mathcal{Z}_n$. Entonces, usando 1, la conexidad de G y dado que L_{2n-1}, L_{2n} son ajenos y ambos tienen el mismo tamaño bajo μ, tenemos que $G = L_{2n-1}$ o $G = L_{2n}$. Esto demuestra 3.

Demostraremos 4. Sea $Q \in \mathcal{A} - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$. Supongamos Q no está contenido en Y_n. Entonces existe $q \in Q$ tal que $q \notin Y_n$. Entonces $q \in Z_n - (L_{2n-1} \cup L_{2n})$. Si existe un elemento $p \in Q$ tal que $p \in Y_n - (L_{2n-1} \cup L_{2n})$, entonces, por la construcción de X y de la conexidad de Q, tenemos que $L_{2n-1} \subset Q$ o $L_{2n} \subset Q$. Usando que estos tres continuos tienen el mismo tamaño bajo μ, tenemos que $L_{2n-1} = Q$ o $L_{2n} = Q$. Esto contradice la elección del punto q. De esta manera y de las Afirmaciones 1y 2, obtenemos que $Q \subset Z_n$. Esto termina la prueba de 4.

Finalmente, la parte 5. La parte de que son ajenos se sigue de 3. Ahora, de 3 y 4, obtenemos que $\mathcal{A} - \mathcal{Z}_n = \mathcal{G}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ y $\mathcal{A} - \mathcal{G}_n = \mathcal{Z}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$. Así, dado que $\mathcal{Z}_n$ y $\mathcal{G}_n$ son cerrados en $\mathcal{A}$, concluimos que $\mathcal{G}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ y $\mathcal{Z}_n - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ son abiertos en $\mathcal{A}$. La última parte de 5, se sigue de 4. Esto termina la prueba de 5.

Usando 5, obtenemos que $\mathcal{A} - \{L_{2n-1}, L_{2n}\}$ no es conexo.

Ahora, por otra parte, podemos suponer que $Q_n \to Q$, para algún $Q \in C(X)$. Notemos que

i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \neq (C \times \{z\}) \cap X$, donde $z \in \left\{\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}\right\}$,

ii) $(2,2,0) \in Q$ y $Q \subset C_1 \times \{0\}$,

De ii), obtenemos que $C \neq Q$.

Para finalizar, demostraremos que

iii) si $Q \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K})$, para algún $\mathcal{K} \in C(\mathcal{A})$, entonces $C \in \mathcal{K}$.

Supongamos que $Q \in \mathrm{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K})$, para algún $\mathcal{K} \in C(\mathcal{A})$. Entonces existe un número natural N tal que $Q_n \in \mathrm{int}(\mathcal{K})$ para cada $n \geq N$. Entonces, por i), $Q_n \in \mathcal{K} \cap C(Y_n)$ y por ii) $Q_n \in \mathcal{K} \cap C(Z_n)$. De acuerdo con 5, $\left(C \times \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}\right) \cap X$ o $\left(C \subset \left\{\frac{1}{2n}\right\}\right) \cap X \in \mathcal{K}$ para cada $n \geq N$. De donde concluimos que $C \in \mathcal{K}$.

Por tanto $\mathcal{A}$ no es aposindético.

3.6 Descomponibilidad

En [14, Teorema 14.11, p. 411] se demuestra que la descomponibilidad es una propiedad de Whitney. En [18, Proposición 6, p. 154], A. Petrus demostro que:

Si $\mu^{-1}(t_0)$ esdescomponible, entonces existe $t_1 \in (t_0, 1]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es descomponible para cada $t \in [t_0, t_1]$. Nosotros mostraremos con un ejemplo que esta propiedad no es una propiedad creciente de Whitney.

Construcción del ejemplo

Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de Cantor y por ρ a la métrica usual de $\mathbb{R}^3$. Por cada $w \in \mathcal{C}$, consideremos

$$S_w = \left\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho\left((0, y, z), \left(0, \tfrac{1}{2}, 1\right)\right) = \left|w - \tfrac{1}{2}\right| \text{ y } z \geq 1\right\}.$$

Y sea

$$S = \bigcup \{S_w : w \in \mathcal{C}\}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ y para cada $v \in \left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right] \cap \mathcal{C}$, consideremos

$$R_v^n = \left\{(0, y, z) : \rho\left((0, y, z), \left(0, \tfrac{5}{2\cdot 3^n}, \tfrac{1}{n}\right)\right) = \left|v - \tfrac{5}{2\cdot 3^n}\right| \text{ y } z \leq \tfrac{1}{n}\right\}$$

y sea

$$R^n = \bigcup \left\{R_v^n : v \in \left[\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{1}{3^{n-1}}\right] \cap \mathcal{C}\right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$T_n = \{0\} \times \left(\left[\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{1}{3^{n-1}}\right] \cap \mathcal{C}\right) \times \left[\tfrac{1}{n}, 1\right].$$

Entonces, definimos

$$W = \bigcup \{R^n \cup T_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

W está representado en la Figura 2.

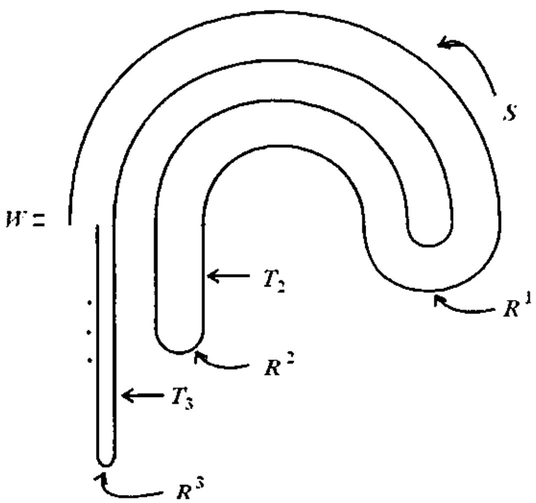

Figura 2

Consideremos la compactación Z del rayo $L = (0,1]$ ilustrada en la Figura 3 (ver la próxima hoja). Sea $\alpha : L \to Z$ un encaje tal que $\alpha(1) = (0,0,1)$, donde T es el triodo

$$T = \left(\left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \times \{0\} \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times \{0\} \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right).$$

Así α es de la forma $\alpha = (\alpha_1, 0, \alpha_2)$.

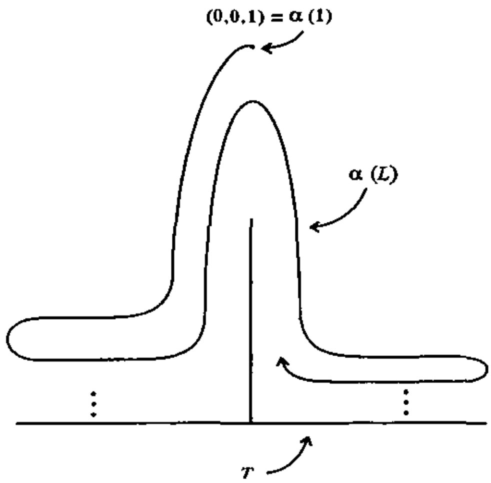

Figura 3

Finalmente definimos

$$Y = Z \cup S \cup \{(\alpha_1(z), y, \alpha_2(z)) : (y, z) \in W\}.$$

Antes de ver que Y es indescomponible necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 32 *Sean X_1 y Y_1 continuos no degenerados con Y_1 indescomponible. Si $f : X_1 \to Y_1$ es una función continua y suprayectiva tal que existe $y_0 \in Y_1$ tal que*

1. *$f^{-1}(y_0)$ un subcontinuo con interior vacío de X_1 y*

2. *para cada $y \in Y_1 - \{y_0\}$, $f^{-1}(y) \in F_1(X_1)$.*

Entonces X_1 es indescomponible.

Demostración.

Supongamos que existe $A \in C(X_1) - \{X_1\}$ tal que $\text{int}_{X_1}(A) \neq \emptyset$ (ver [12, p. 204]). Si ocurre que $f(A) = Y_1$, entonces, como $f^{-1}(y) \in F_1(X_1)$, para cada $y \in Y_1 - \{y_0\}$, $f^{-1}(y) \subset A$ para cada $y \in Y_1 - \{y_0\}$. De donde $X_1 - f^{-1}(y_0) \subset A$. Así que $X_1 = \text{Cl}_{X_1}(X_1 - f^{-1}(y_0)) \subset A$. De esta manera $X_1 = A$. De esta contradicción, tenemos que $f(A)$ está contenido propiamente en Y_1. Ahora, demostraremos que $\text{int}_{Y_1}(f(A)) \neq \emptyset$. Si $\text{int}_{X_1}(A) \cap X_1 - f^{-1}(y_0) = \emptyset$, entonces $\text{int}_{X_1}(A) \subset f^{-1}(y_0)$. Está contadicción, establece que $\text{int}_{X_1}(A) \cap X_1 - f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}_{X_1}(A) \cap X_1 - f^{-1}(y_0)$. Demostraremos que $f(x) \in \text{int}_{Y_1}(f(A))$. Sea U un abierto en X_1 tal que $x \in U$ y $U \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$. Entonces $x \in \text{int}_{X_1}(A) \cap U$ y $(\text{int}_{X_1}(A) \cap U) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$. Dado que $\text{int}_{X_1}(A) \cap U$ es abierto en $X_1 - f^{-1}(y_0)$ y $f \mid X_1 - f^{-1}(y_0)$ es continua y biyectiva, tenemos que $f(\text{int}_{X_1}(A) \cap U)$ es abierto en $Y_1 - \{y_0\}$. De esta manera, dado que $Y_1 - \{y_0\}$ es abierto en Y_1, $f(\text{int}_{X_1}(A) \cap U)$ es abierto en Y_1. De esto, podemos concluir que $f(\text{int}_{X_1}(A) \cap U)$ es un abierto en Y_1 que contiene a $f(x)$ y está contenido en $f(A)$. Esto muestra que $\text{int}_{Y_1}(f(A)) \neq \emptyset$ y $f(A)$ es un subcontinuo propio de Y_1. Esto contradice la indescomponibilidad de Y_1 y prueba que, para cada $A \in C(X_1) - \{X_1\}$, $\text{int}_{X_1}(A) = \emptyset$. ■

Para ver que Y es indescomponible, sea X el continuo Y/T, es decir, Y es el continuo que se obtiene de identificar T en un sólo punto. Observe que X es homeomorfo al continuo de Kanaster por lo que, si f es la función cociente de Y en X, entonces se tiene lo siguiente

1. la función f satisface las condiciones del Lema 32 y
2. Y es un continuo indescomponible.

Ahora, observemos que los únicos subcontinuos de T que son límite de subcontinuos de $\alpha(L)$ son:

1. conjuntos con un solo punto,
2. arcos contenidos en $\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \{(0,0)\}\right) \cup \left(\{0\} \times \{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ o en $\left(\{0\} \times \{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{(0,0)\}\right)$
3. subtriodos de T de la forma $\left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{0\}\right) \cup ([a, b] \times \{(0,0)\})$.

Afirmación 1. *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y) - C(T)$ que converge a un elemento de $A \in C(T)$, entonces A es uno de los continuos descritos en el párrafo anterior.*

Para probar la afirmación 1, notemos primero que $S \cap A = \emptyset$, así que podemos suponer que $A_n \cap S = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si una infinidad de conjuntos A_n está contenido en Z, entonces la afirmación se sigue de lo que ya observamos. Supongamos que ninguna A_n está contenida en Z. Entonces, cada A_n se puede escribir en la forma $A_n = \{(\alpha_1(z), y, \alpha_2(z)) : (y,z) \in B_n\}$ para alguna $B_n \subset W$. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $\varphi((x,y,z)) = (x,0,z)$. Entonces φ es continua. Sea $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_2(x,y,z) = y$. Como, para cada $a \in A_n$, $\varphi(a) = (\alpha_1(z), 0, \alpha_2(z)) \in L$, tenemos que $\varphi(A_n) \subset L_n$ y $\varphi(A_n) \to \varphi(A) = A$. Por tanto A es uno de los continuos que describimos anteriormente. Esto concluye la prueba de la afirmación 1.

Sea μ una función de Whitney para $C(Y)$.

Primera propiedad. *Sea $t_0 \in (0, \mu(T))$. Entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es descomponible.*

Para ver esto, sea $E \in C(T, t_0)$ tal que es un triodo que no tiene al punto $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Demostraremos que existe un número natural n tal que $B^H_{\frac{1}{n}}(E) \subset C(T, t_0)$. Supongamos lo contrario. Entonces, por cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in B^H_{\frac{1}{n}}(E) - C(T, t_0)$. Observemos que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a E. Esto es imposible por la Afirmación 1. Ahora bien, dado que $C(T, t_0)$ es un subcontinuo propio $\mu^{-1}(t_0)$, tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es descomponible.

Segunda propiedad.

Sea $t = \mu(T)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo al continuo de Knaster y por tanto indescomponible

3.7 Preguntas

En la seccion 2.6.2 nosotros demostramos que hereditariamente arco conexo es una propiedad secuencial fuente reversible de Whitney, tenemos la siguiente pregunta:

1. ¿Es hereditariamente arco conexo una propiedad decreciente Whitney?

2. ¿Qué otras propiedades secuencial fuerte reversible de Whitney son propiedades secuencial decreciente de Whitney?

En la sección 3.10 nosotros demostramos que la aposindesis no es una propiedad creciente de Whitney, siguiendo en esta dirección tenemos la siguiente pregunta:

3. ¿Es la propiedad de ser finitamente apsindético una propiedad creciente de Whitney?

4. ¿Qué otras propiedades de Whitney son propiedades creciente de Whitney?

Bibliografía

[1] E. Abo-Zeid, *Some properties of Whitney continua,* Topology Proc., 3 (1978), 301-312.

[2] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math., 1 (1951), 43-51.

[3] C. Eberhart and S. B. Nadler, Jr., *The dimension of certain hyperspaces,* Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 19 (1971), 1027-1034.

[4] L. Fearnley, *The pseudo-circle is unique*, Trans. Amer. Math. Soc., 149 (1972), 45-64.

[5] H. Hosokawa, *The span of Hyperspaces,* Houston J. Math., 25 (1999), 35-41.

[6] A. Illanes, *Multicoherence of Whitney leves*, Topology Appl., 68 (1996), 251-265.

[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Apllied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York. N.Y., 1999.

[8] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum,* Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22-36.

[9] J. Krasinkiewicz, *On the hiperspace of snake-like and circle-like continua,* Fund. Math., 83 (1974), 155-164.

[10] J. Krasinkiewicz and S. B. Nadler, Jr., *Whitney properties*, Fund. Math., 98 (1978), 165-180.

[11] I. Krzemińska, *Uniform pathwise connectedness and Whitney levels*, Topology Appl., 109 (2001), 167-172.

[12] J. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, New York, 1968.

[13] S. Lopéz, *Hyperspace locally two-cell at the top,* to appear in Seminary Lecture Notes, Proceedings of the continuum theory session of the AMS-SMM Joint Meeting, Marcel Dekker. Inc. 2001.

[14] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspace of sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. (1978).

[15] S. B. Nadler, Jr., *Whitney-reversible properties,* Fund. Math., 109 (1980), 235-248.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. (1992).

[17] S. B. Nadler, Jr. and T. West, *Size Levels for arcs,* Fund. Math., 141 (1992), 243-255.

[18] A. Petrus, *Whitney maps and Whitney properties of $C(X)$*, Topology Proc., 1 (1976), 147-172.

[19] J. T. Rogers, *Whitney continua in the hyperspace $C(X)$*, Pac. J. Math., 58 (1975), 569-548.

[20] R. H. Sorgenfrey, *Concerding triodic continua*, Amer. J. of Math., 66 (1944), 439-460.

[21] G. T. Whyburn, *Analitic Topology,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO, Facultad de Ciencias (Departamento de Matemáticas). Instituto Literario No. 100, Col. Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México. México.

e-mail address: forozco@coatepec.uaemex.mx