33

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA PARA PRINCIPIANTES

295990

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

MONTSERRAT GARCÍA CAMPOS

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

MEXICO, D.F.

2001

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"GEOMETRIA HIPERBOLICA PARA PRINCIPIANTES"

realizado por GARCIA CAMPOS MONTSERRAT

con número de cuenta 9450274-3, pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. FRANCISCO DE JESUS STRUCK CHAVEZ	
Propietario	DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER	
Propietario	DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO	
Suplente	M. en C. MANUEL CRUZ LOPEZ	
Suplente	M. en C. DIANA MAYA PADILLA	Diana Maya Padilla

Consejo Departamental de Matemáticas

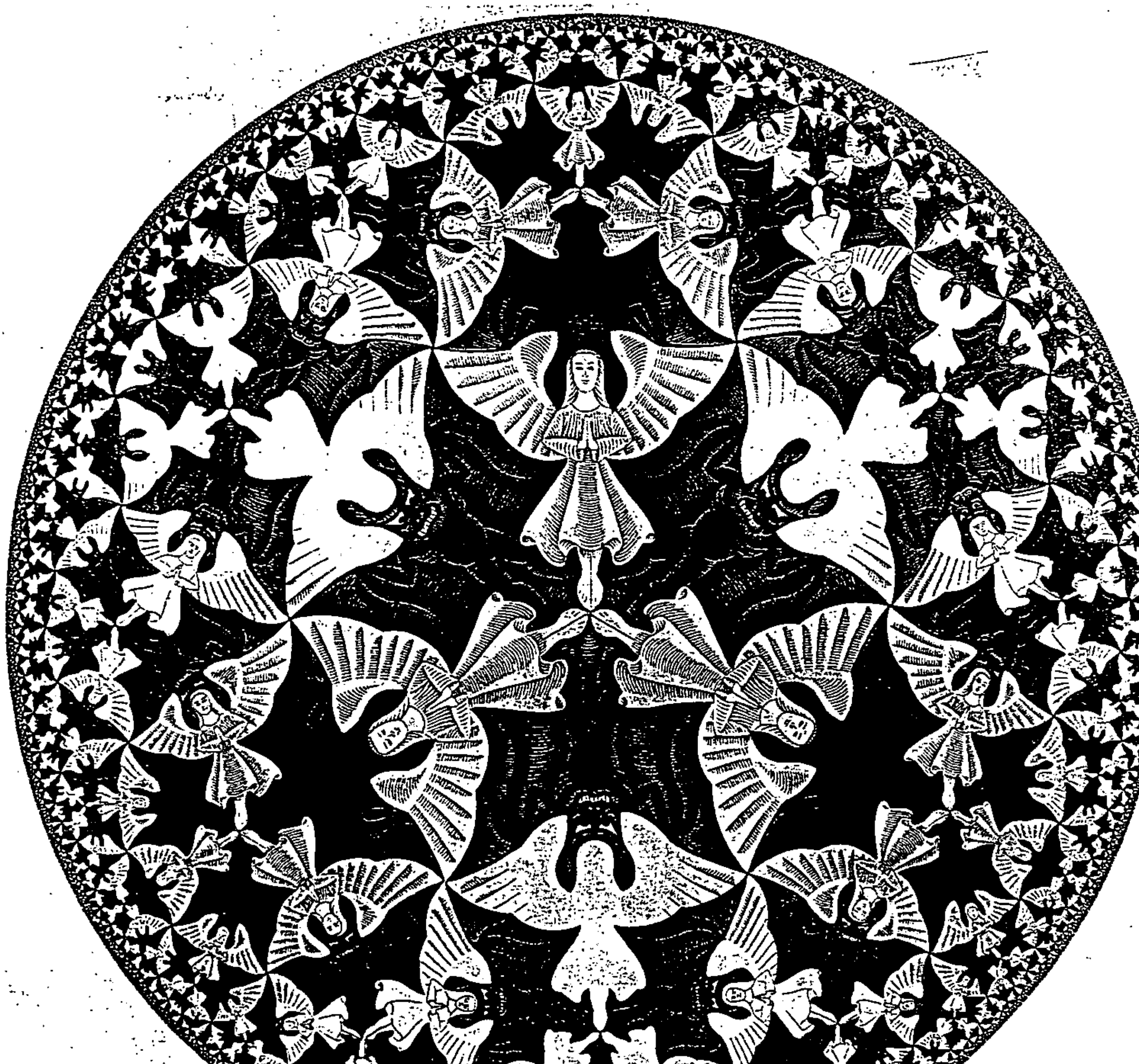
M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Let no one ignorant of geometry

enter this door.

—*Entrance to Plato's Academy*



Índice general

Introducción

Los orígenes de la Geometría están perdidos en el misticismo de la vieja historia. Siendo la Geometría el área primordial de las matemáticas griegas, la obra *Los Elementos* de Euclides fue el primer ejemplo importante de un sistema axiomático formal y se convirtió en un modelo para el razonamiento matemático.

Durante siglos se creyó que el quinto postulado de Euclides era en realidad una porposición demostrable con base en los cuatro postulados anteriores. Los intentos para demostrarlo no se hicieron en vano, la idea de negarlo para llegar a una contradicción, con lo cual en consecuencia estaría demostrado, derivó en el descubrimiento de las Geometrías no euclidianas.

Algunas de las ideas para demostrar la supuesta proposición resultaron ser enunciados equivalentes al quinto postulado. Uno de los más usados se debe a John Playfair (1795), que dice:

> **Axioma.** *Por un punto fuera de una línea dada pasa exactamente una paralela a la línea dada.*

Hay dos formas de negarlo:

1 Por un punto fuera de una línea dada pasa más de una paralela a la línea dada.

2 Por un punto fuera de una línea dada no pasa ninguna paralela a la línea dada.

Tomando la segunda negación y los cuatro primeros postulados de Euclides llegamos a una contradicción. Esto no quiere decir que no exista alguna geometría con esta negación, pero es necesario modificar otras hipótesis para derivar en la Geometría elíptica. No es parte de este trabajo el estudio de esta geometría.

Si tomamos la primera negación y los primeros cuatro postulados de Euclides, tenemos como consecuencia a la Geometría hiperbólica.

Hay mucho material relacionado con la Geometría no euclidiana que se presenta de forma inaccesible y aburrida para los principiantes en el área, es por eso que sentimos que no se deben escatimar esfuerzos para presentar este tema de la manera más simple y naturalmente posible, sin abrumar al estudiante con resultados extraños o inecesariamente separados de la idea euclidiana.

Los prerrequisitos necesarios para entender este trabajo son mínimos, solamente los primeros dos semestres de la licenciatura, que junto con un poco de interés en la Geometría son suficientes. Usualmente en los cursos donde se da algo de Geometría no euclidiana se pide al alumno que tenga conocimientos de cálculo y variable compleja; ni cálculo ni variable compleja son usados en este trabajo.

Presentamos a la Geomería hiperbólica de manera sintética. Tan sólo con la herramienta que se estudia en el curso de Geometría moderna II, logramos deducir la métrica hiperbólica; en otras palabras, con herramienta básica como son los conceptos de inversión y razón cruzada construimos la fórmula para la distancia entre cualesquiera dos puntos en los modelos del plano hiperbólico de Poincaré.

Dada la métrica presentamos algunos resultados sorprendentes que sobrepasan nuestra idea de lo que pasa en la Geometría euclidiana. Para estos resultados y para el capítulo final de este trabajo, necesitamos valernos de algunas construcciones con regla y compás; es por esto que dedicamos toda una sección para explicar cómo hacer algunas de las construcciones básicas en el plano hiperbólico, pero con nuestras herramientas euclidianas.

Finalmente presentamos las isometrías hiperbólicas, también de una forma sintética. Utilizando los resultados del primer capítulo sobre circunferencias coaxiales y las inversiones en ellas, demostramos que las isometrías hiperbólicas conformes tienen estructura de grupo.

Las Matemáticas no suelen ser consideradas como una fuente de sorpresas, pero ciertos resultados de la Geometría hiperbólica parecen extraños para alguien que sólo conoce la Geometría euclidiana. El encuentro con esta geometría, frecuentemente resulta sorprendente. Eventualmente este encuentro no solamente produce un profundo entendimiento de la Geometría euclidiana, también ofrece el soporte para el cuidadoso razonamiento de las pruebas de algunos resultados que en un momento parecían obvios.

El estudio de la Geometría euclidiana y la no euclidiana enriquece la formación matemática de cualquier estudiante de esta facultad y la finalidad de este trabajo es que su lectura y comprensión contribuyan a esta tarea.

Capítulo 1

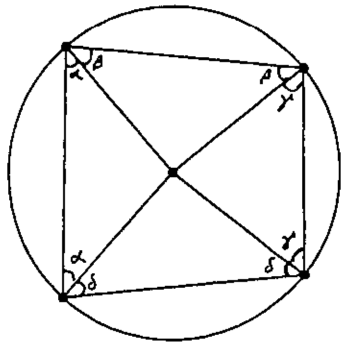
Geometría Moderna

En este capítulo estamos utilizando como espacio a la *Esfera de Riemann* la cual se define como: $\widehat{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$, esto es el plano más el punto al infinito. Y en este capítulo expondremos algunas definiciones, teoremas, lemas, etc. de conceptos básicos, y expondremos algunas de sus propiedades fundamentales que serán usadas posteriormente.

Definición. *Un conjunto de puntos que están sobre una misma circunferencia se les llama concíclicos. A un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos, se le llama cuadrilátero cíclico.*

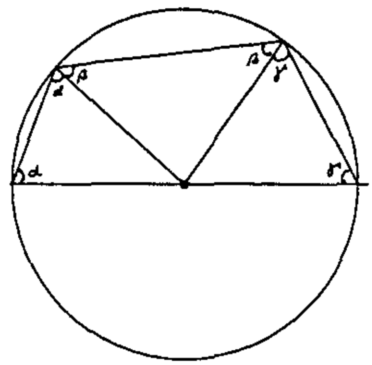
Un cuadrilátero cíclico cumple que sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman 180°.

Si el centro de la circunferencia se encuentra dentro del cuadrilátero; tracemos desde el centro de la circunferencia hacia los vértices del cuadrilátero líneas que determinan triángulos isósceles; con ángulos α, β, γ y δ respectivamente.



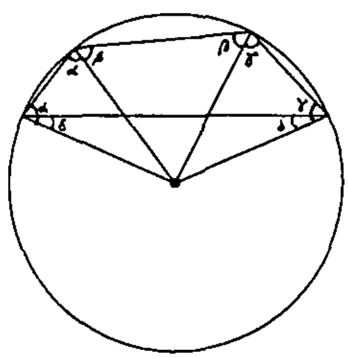
Sabemos que la suma de ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, por lo tanto $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$, si dividimos ambos lados de la ecuación por 2 tenemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. En la figura se ve que cada par de ángulos opuestos suman $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Si el centro de la circunferencia está sobre uno de los lados, trazamos desde el centro hacia los vértices del cuadrilátero líneas que determinan triángulos isósceles.

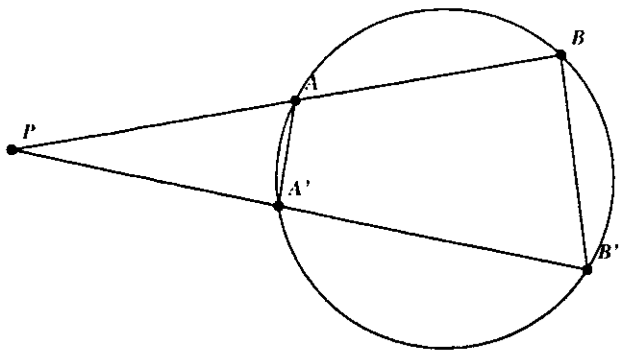


Con el mismo razonamiento que el anterior, tenemos que: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$ y por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; y otra vez ésta es la suma de los ángulos opuestos.

Si el centro de la circunferencia está fuera del cuadrilátero, trazamos líneas desde el centro hacia los vértices del cuadrilátero que determinan triángulos isósceles con ángulos α, β, γ y δ respesctivamente. Haciendo un razonamiento análogo a los anteriores, los ángulos del cuadrilátero inscrito en la circunferencia son: $(\alpha - \delta) + \alpha + \beta + \beta + \gamma + (\gamma - \delta) = 360°$ asociando los términos correspondientes tenemos que: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\delta = 360°$ por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma - \delta = 180°$ que es la suma de los ángulos opuestos como se puede ver en la figura.



Tracemos dos líneas que parten de un mismo punto P fuera de la circunferencia y que la intersecan en cuatro puntos A, B, A', B' respectivamente; entonces los triángulos $\triangle PAA'$ y $\triangle PB'B$ son semejantes puesto que los ángulos opuestos del cuadrilátero determinado por $AA'B'B$ son suplementarios.



Como los triángulos son semejantes, se cumple que:

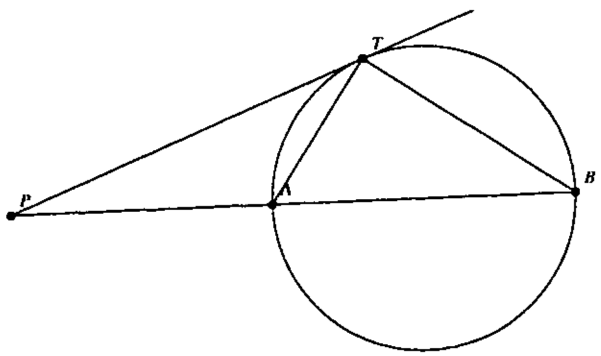
$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$$

Entonces:

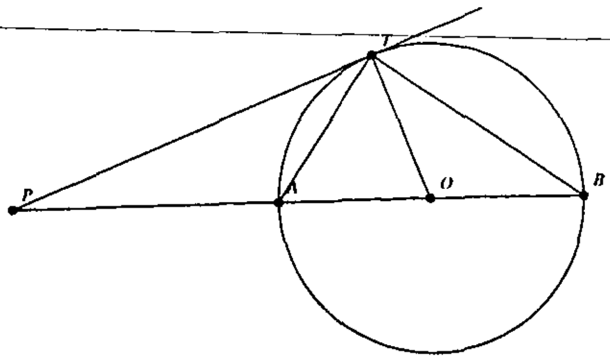
$$PA \cdot PB = PB' \cdot PA'$$

Y como tomamos dos líneas arbitrarias, entonces lo anterior se cumple para cualesquiera dos puntos sobre la circunferencia colineales con P.

Si una de las líneas que parte de P es tangente a la circunferencia en el punto T, también se cumple que $PA \cdot PB = PT \cdot PT$ para cualesquiera dos puntos A y B en la circunferencia colineales con P.

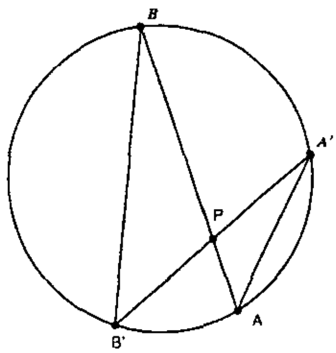


Sabemos que el producto $PA \cdot PB$ es constante para cualesquiera dos puntos sobre la circunferencia, en particular si AB determinan un diámetro de dicha cicunferencia; por lo que hay que verificar que los triángulos $\triangle PAT$ y $\triangle PTB$ son semejantes.



Tracemos el radio TO (donde O es el centro de la circunferencia) lo que nos determina que el ángulo $\angle PTO$ es recto, entonces $\angle PTA = 90° - \angle ATO$; por ser el segmento AB diámetro, el ángulo $\angle ATB$ es recto y con esto $\angle OTB = 90° - \angle ATO$ por lo tanto $\angle PTA = \angle OTB$; pero tenemos que el triángulo $\triangle BOT$ es isósceles con lo que $\angle PTA = \angle OBT$. Y ambos triángulos tienen ángulo común en P y por lo tanto son semejantes y se cumple la definición.

Cuando tomamos al punto P dentro de la circunferencia notamos que el producto de los segmentos PA y PB es constante,



Tenemos que $\triangle PAA'$ es semejante al $\triangle PBB'$, pues los ángulos subtienden la misma cuerda y por lo tanto $PA \cdot PB = PB' \cdot PA'$.

Definición. *La potencia de un punto respecto a una circunferencia es el producto de la distancia de cualesquiera dos puntos en la circunferencia tales que son colineales con el punto P, es decir:*

$$PA \cdot PB$$

Además si P está fuera de la cirunferencia y T es un punto sobre la circunferencia tal que PT es una línea tangente a dicha circunferencia

$$PA \cdot PB = (PT)^2$$

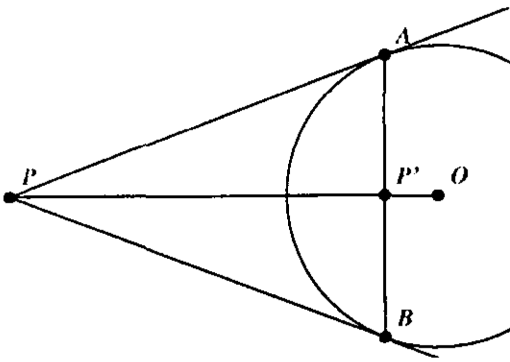
Supongamos cierta circunferencia C con centro O y radio r; y el punto P distinto de O.

Definición. *Tomemos sobre el rayo OP el punto P' de tal modo que el producto de los segmentos OP y OP' sea igual al cuadrado del radio de la circunferencia dada, es decir:*

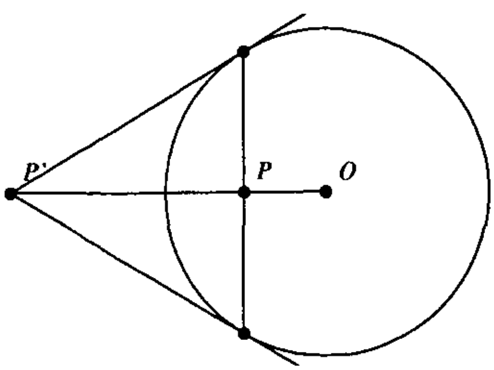
$$\mathbf{OP \cdot OP' = r^2}$$

El punto P' es el inverso de P respecto a la circunferencia C. La circunferencia C se llama circunferencia de inversión, su centro O se llama centro de inversión y la magnitud r^2, potencia de la inversión.

Sea P un punto fuera de la circunferencia de inversión C, y sean AP y BP tangentes trazadas hacia C desde P. Entonces el punto P' de intersección de las rectas AB y OP será el inverso del punto P.



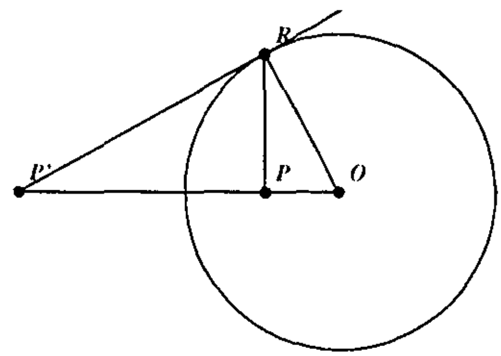
Si P está dentro de la circunferencia de inversión C, trazamos la línea perpendicular a OP que pasa por P; encontramos dos puntos sobre la circunferencia a partir de los cuales trazamos las tangentes a la circunferencia, el punto de intersección de las tangentes con la línea OP será el inverso P'.



Si el punto P' es el inverso del punto P, es evidente que el punto P es el inverso de P'.

Para verificar que $OP \cdot OP' = r^2$ se cumple, tomemos los siguientes triángulos semejantes:

$$\triangle ORP \sim \triangle ORP'$$



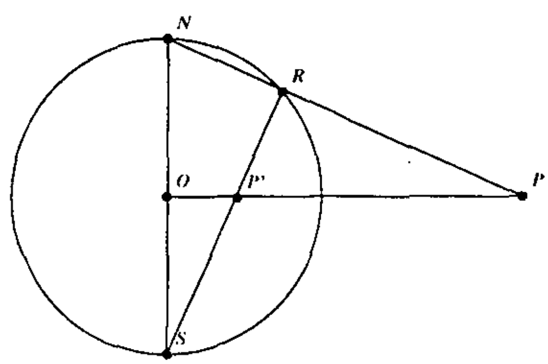
con lo que tenemos:

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OP'}$$

de donde:

$$OR^2 = OP \cdot OP'$$

Otro método para construir el inverso de un punto P es: Trazamos la línea desde P al centro O de la circunferencia y el diámetro NS perpendicular a PO, unimos con una línea recta a P con N para encontrar el punto de intersección R con la circunferencia; unimos R con S y donde interseque a la línea PO estará P'.



Para verificar que esta construcción es válida, notemos que los triángulos $\triangle OP'S$ y $\triangle RP'P$ son semejantes, ya que $\angle P'OS = \angle P'RP = 90°$, y el ángulo en P' es opuesto por el vértice. Además $\triangle RP'P \sim \triangle ONP$, pues tienen ángulo común en P y $\angle PON = \angle P'RP = 90°$; de las semejanzas anteriores se cumple:

$$\frac{OP'}{ON} = \frac{OS}{OP}$$

de donde:

$$OP \cdot OP' = OS \cdot ON$$

pero OS y ON son radios, por lo que:

$$OP \cdot OP' = r^2$$

Definición. *La transformación*[1] *que a cada punto P del plano le pone en correspondencia su inverso P' se llama inversión.*

De la definición de inversión se deduce que a cada punto P en un plano le corresponde el punto determinado y único P' del mismo plano, además si $OP > r$, entonces $OP' < r$. Notemos que el centro de la circunferencia de inversión se invierte en el punto al infinito.

Además si tomamos una circunferencia sobre el plano, ésta lo divide en dos; lo que está dentro de la circunferencia y lo que está fuera de la circunferencia. Con esto, y con el párrafo anterior notamos que bajo la inversión todos los puntos que están dentro de la circunferencia, se invierten en todos los puntos que están fuera de la circunferencia y por lo tanto, todos los puntos que están fuera de la circunferencia bajo la transformación, se invierten en todos los puntos que están dentro de la circunferencia, quedando la circunferencia fija bajo la transformación.

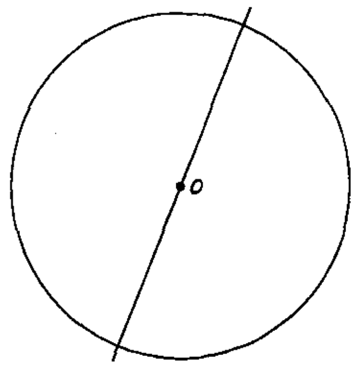
1.1 Inversos de líneas y circunferencias

Teorema 1.1. *La circunferencia de inversión C, queda fija bajo la transformación.*

Por definición el inverso de un punto P sobre C debe estar sobre el rayo que une al centro O con P y P' y debe cumplir que $OP \cdot OP' = r^2$, por lo tanto P' está sobre la circunferencia de inversión y más aún es fijo.

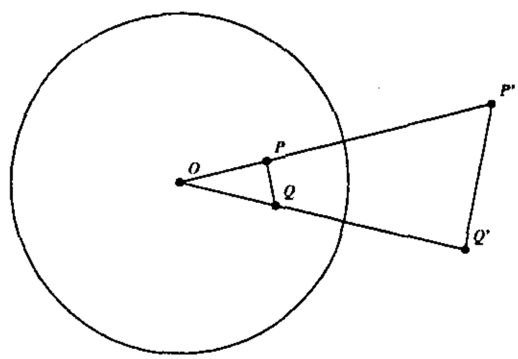
[1] Usaremos el término transformación en lugar de función biunívoca de un espacio en sí mismo.

Teorema 1.2. *Una recta que pasa a través del centro de inversión O es inversa a sí misma.*



Por la definición de inversión, un punto y su inverso están sobre el mismo rayo que parte de O.

Lema 1.3. *Si los puntos P' y Q' son inversos de los puntos P y Q con respecto a la circunferencia C, entonces $\angle OP'Q' = \angle OQP$, $\angle OQ'P' = \angle OPQ$.*

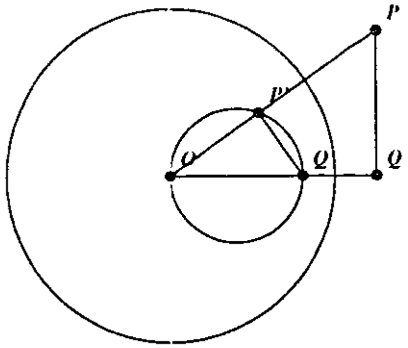


Por ser P' y Q' puntos inversos de P y Q se cumple: $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ con lo que

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$$

lo que quiere decir que los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$ tienen lados proporcionales y como tienen ángulo común en O, entonces $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ por lo que cumplen: $\angle OP'Q' = \angle OQP$, $\angle OQ'P' = \angle OPQ$.

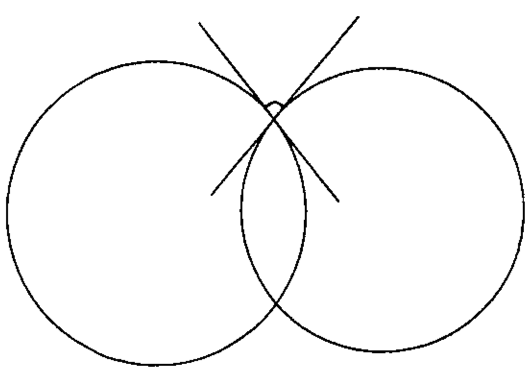
Teorema 1.4. *El inverso de la recta ℓ que no pasa a través del centro de inversión O, es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.*



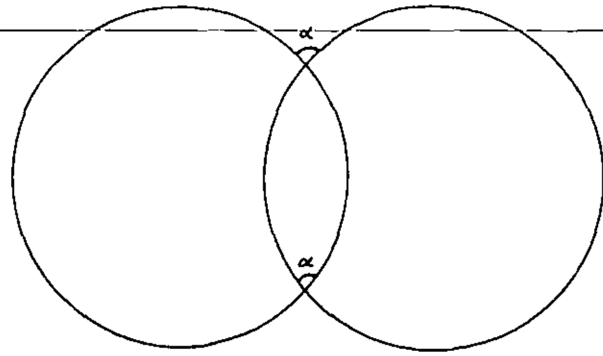
Tracemos la ortogonal a ℓ que pase por O, la intersección de estas rectas determina el punto Q; sea P cualquier otro punto sobre ℓ. Invertimos estos puntos respecto a la circunferencia y obtenemos P' y Q', si los unimos mediante una recta obtenemos los triángulos $\triangle OQP$ y $\triangle OP'Q'$ que son semejantes con ángulo recto en Q y P' respectivamente; por lo tanto existe una circunferencia que pasa por O, P' y Q'. Además la tangente a la circunferencia por el punto O es paralela a la línea PQ.

De la demostración se ve que el centro de esta circunferencia está en la perpendicular a ℓ que pasa por O.

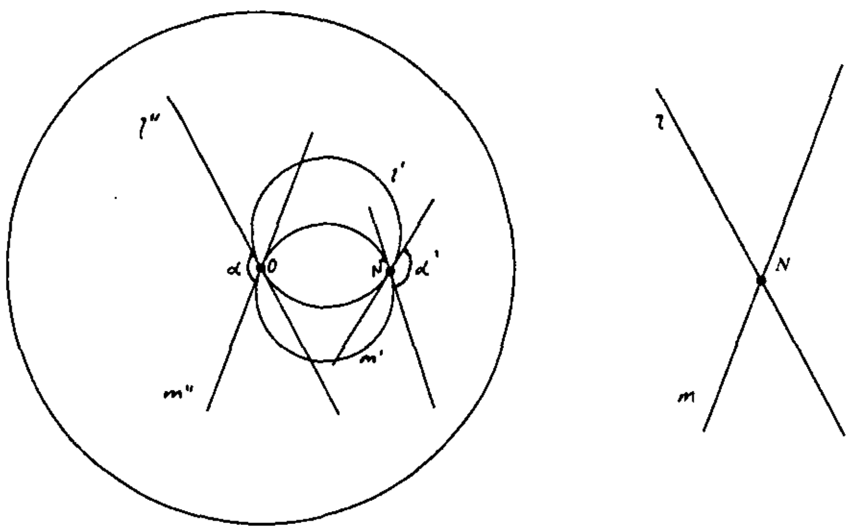
Definición. *El ángulo entre circunferencias se define como el ángulo entre las rectas tangentes a ambas circunferencias en el punto de intersección de las circunferencias.*



Lema 1.5. *El ángulo entre dos circunferencias que se intersecan es igual en ambos puntos de intersección.*



Teorema 1.6. *Si dos rectas se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, el ángulo de intersección en ese punto es igual en magnitud pero opuesto en dirección al ángulo de intersección de las circunferencias inversas a estas rectas en el inverso del punto de intersección.*



Sean ℓ y m dos rectas que se intersecan en un punto N y sea α el ángulo de intersección entre ellas.

La recta ℓ se invierte respecto a C en una circunferencia ℓ' que pasa por el centro de la circunferencia de inversión O; de la misma manera la recta m se invierte en una circunferencia m'.

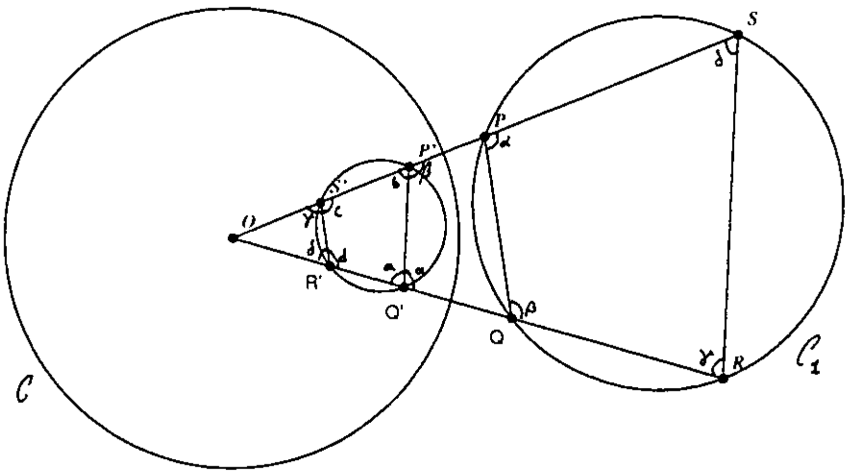
El punto N de intersección de las rectas ℓ y m se invierte en el otro punto de intersección de las circunferencias ℓ' y m'.

Trazo las tangentes a ℓ' y a m' por el punto O, ℓ'' y m'' son paralelas a ℓ y a m por lo que forman el mismo ángulo α, pues las perpendiculares a ℓ'' y a m'' que pasan por O, también pasan por el centro de ℓ' y m'.

Por el lema anterior tenemos que los ángulos α y α' son iguales. Por lo tanto la inversión preserva ángulos.

Para ver que tiene dirección opuesta, fijémonos primero que el ángulo α está definido en dirección contraria a las manecillas del reloj, es decir de ℓ a m y el ángulo en la imagen α' está definido en dirección de las manecillas del reloj, es decir de ℓ' a m'.

Teorema 1.7. *Circunferencias se invierten en circunferencias.*[2]



Tracemos dos rayos desde el punto O que corten a C_1; en cuatro puntos P, Q, R y S los que determinan un cuadrilátero cíclico con ángulos α, β, γ y δ respectivamente; invertimos los puntos respecto a C obteniendo P', Q', R', S'; unimos estos puntos para formar un cuadrilátero, ahora demostraremos que es cíclico. Por el lema 1.3, tenemos que los ángulos α, β, γ y δ del cuadrilátero cíclico en C_1 bajo la transformación son los ángulos α, β, γ y δ externos al cuadrilátero formado por los puntos inversos, como se muestra en la figura. Como los ángulos α y γ son suplementarios sus suplementos a y c también lo son; lo mismo sucede para b y d. Con lo que el cuadrilátero $S'R'Q'P'$ es cíclico.

Por lo tanto la circunferencia C_1 bajo la inversión va a una circunferencia C_2 que no pasa por el centro de inversión.

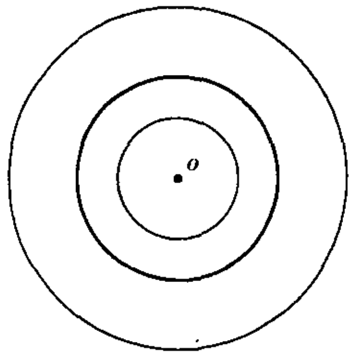
OBSERVACIÓN: Si en la circunferencia C_1 recorremos al cuadrilátero $PQRS$, en sentido contrario de las manecillas del reloj, su imagen en la circunferencia C_2, se recorre $P'Q'R'S'$, es decir en el sentido de las manecillas del reloj.

[2] Para la demostración se ilustra el caso en que una circunferencia está completamente fuera de la circunferencia de inversión, pero el argumento funciona para cualquier caso.

Corolario 1.8. *Dos circunferencias que se intersecan con cierto ángulo, se invierten conservando el mismo ángulo de intersección.*

La demostración de este corolario es análoga a la del teorema 1.5.

CASO A: El inverso de una circunferencia cuyo centro es el centro de inversión, es una circunferencia concéntrica con la circunferencia de inversión.



Sea P un punto cualquiera en la circunferencia C_1 con radio $OP = r_1$. Sea P' el inverso de P, por definición se cumple:

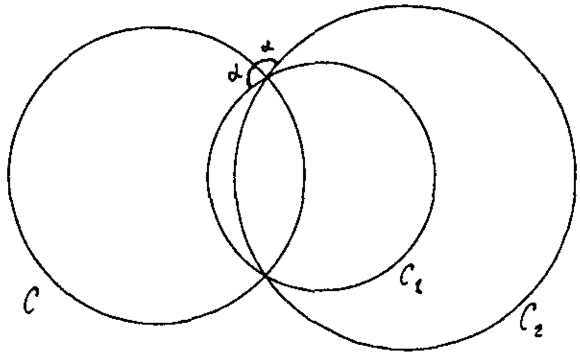
$$OP \cdot OP' = r^2$$

$$r_1 \cdot OP' = r^2$$

$$OP' = \frac{r^2}{r_1}$$

Por lo tanto P' está sobre una circunferencia.

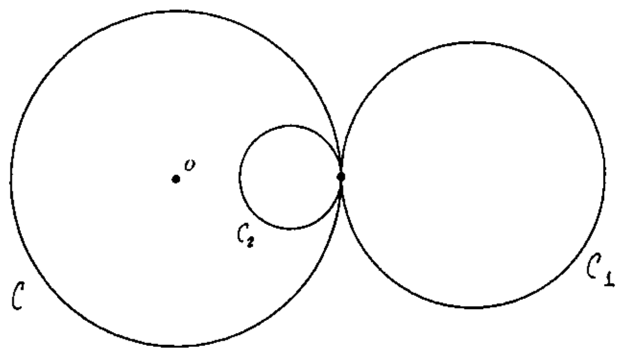
CASO B: Una circunferencia que interseca a la de inversión, se invierte en otra circunferencia que pasa por los puntos de intersección.



Como ya demostramos que la inversión conserva ángulos, y además que los puntos de intersección entre una circunferencia y la de inversión se invierten en sí mismos, entonces la circunferencia C_1 se invierte en una circunferencia C_2 que pasa por los puntos de intersección y con ángulo α entre C y C_2, que es el mismo ángulo entre C y C_1.

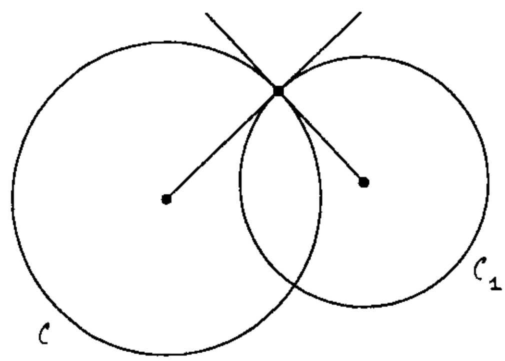
OBSERVACIÓN: Si recorremos al ángulo α de C hacia C_1, en el sentido de las manecillas del reloj; después de la inversión recorremos a α de C hacia C_2, éste va en sentido contrario a las manecillas del reloj.

CASO C: Una circunferencia C_1 que es tangente externamente a la de inversión, se invierte en una circunferencia tangente a la de inversión que está en el interior de C y que no pasa por el centro de inversión.



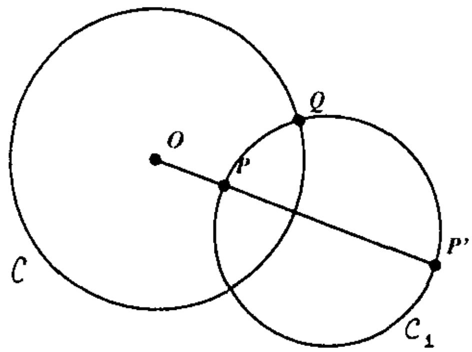
Como el punto de tangencia se invierte en sí mismo, y es el único punto en común de C_1 con la circunferencia de inversión, C_2 pasa por ese punto, y por el teorema 1.6 C_2 es una circunferencia en el interior de C que no pasa por O.

Teorema 1.9. *Una circunferencia ortogonal a la de inversión, se invierte en sí misma.*



Por el caso B, sabemos que C_1 se invierte en una circunferencia que pasa por los puntos de intersección, pero además la inversión conserva ángulos, por lo tanto C_1 se invierte en una circunferencia ortogonal a la de inversión, que es ella misma.

Teorema 1.10. *Si C_1 es ortogonal a C, entonces en cada rayo que parte de O e interseque a C_1 en dos puntos, lo hará en puntos inversos. Y si C_1 es una circunferencia que pasa por un punto y su respectivo inverso entonces C_1 es ortogonal a la circunferencia de inversión C.*

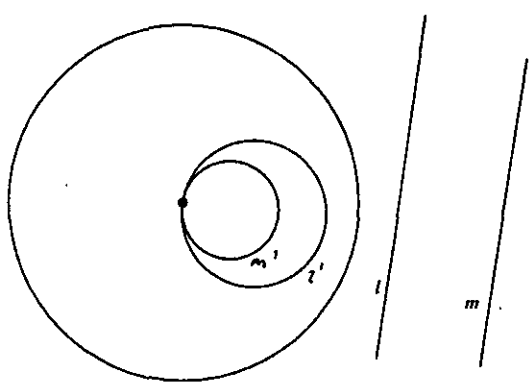


Por el teorema anterior, es claro que si C y C_1 son ortogonales, cada rayo que parte de O que interseca a C_1 en dos puntos, entonces esos puntos son inversos.

Partamos ahora de que P y P' son puntos inversos respecto a C y sea C_1 una circunferencia que pasa por P y P' y que interseca a C en Q.

La potencia de O respecto a C_1 es $OP \cdot OP' = r^2$; pero la distancia de $OQ = r$ pues OQ es radio de la circunferencia, esto implica que OQ es tangente a C_1 en el punto Q y por lo tanto C y C_1 son ortogonales.

Teorema 1.11. *Líneas paralelas que no pasan por el centro de inversión, se invierten en circunferencias que son tangentes en el centro de inversión.*



Sabemos que líneas se invierten en circunferencias, también que si las líneas no pasan por el centro de inversión, sus imágenes sí lo hacen.

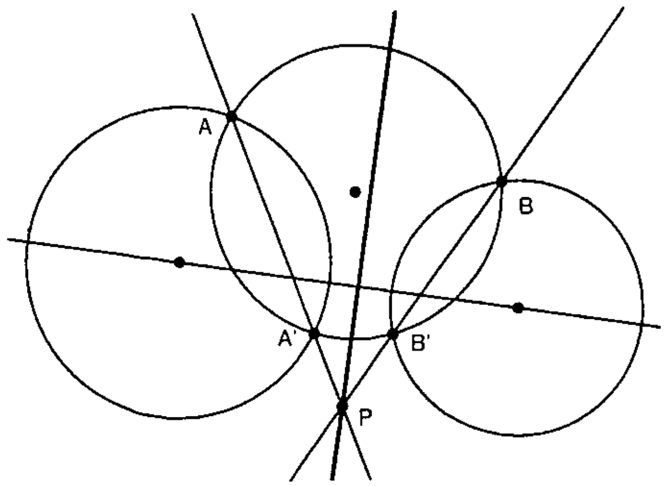
Si ℓ y m son dos líneas paralelas, decimos que se cortan en el punto al infinito, cuya imagen bajo la transformación es el centro de inversión O; por lo que líneas paralelas se invierten en circunferencias que son tangentes en el centro de inversión.

1.2 Circunferencias Coaxiales

Definición. *El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias respecto a las dos circunferencias es igual.*

Si las dos circunferencias se intersecan, su eje radical es la línea que pasa por los puntos de intersección A y B, puesto que cualquier punto en esa línea tiene potencia $PA \cdot PB$ para las dos circunferencias.

Para encontrar el eje radical de dos circunferencias que no se intersecan, trazamos una circunferencia que corte a ambas circunferencias en cuatro puntos distintos A, A', B y B'.



Trazamos las líneas AA' y BB', éstas se intersecan en un punto P que está sobre el eje radical puesto que $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$; ahora trazamos la perpendicular a la línea de los centros que pasa por P. Esa línea es el eje radical de ambas circunferencias.

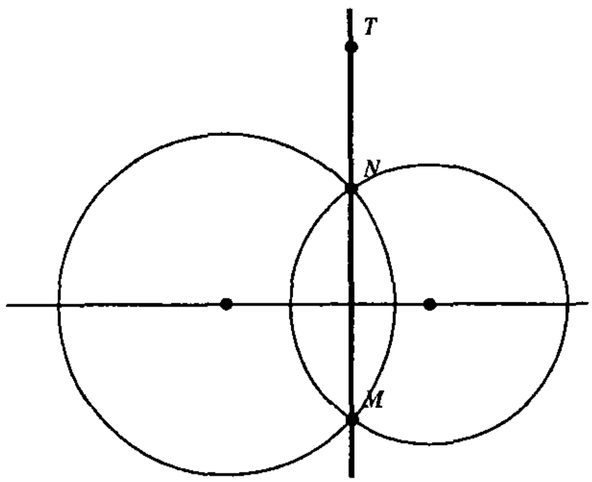
Además el eje radical es ortogonal a la línea de los centros de las circunferencias coaxiales.

Si un conjunto de circunferencias es tal que tienen el mismo eje radical tomadas de dos en dos, se dice que esas circunferencias son *coaxiales*. Los centros de las circunferencias coaxiales son colineales.

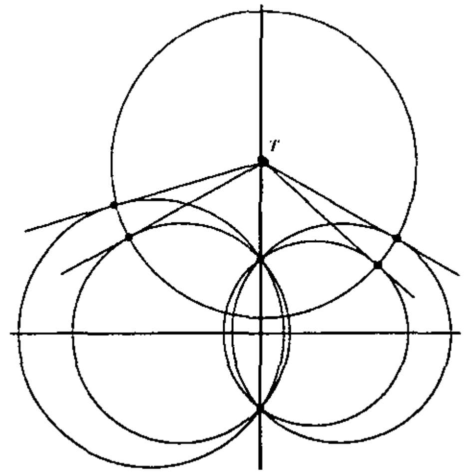
1.2.1 Circunferencias coaxiales que se intersecan y Circunferencias coaxiales que no se intersecan.

La familia de circunferencias $\mathcal{F}$ que pasan por dos puntos fijos, es la familia de circunferencias coaxiales que se intersecan; su eje radical está definido por la línea $\mathcal{L}$ que pasa por esos dos puntos N y M.

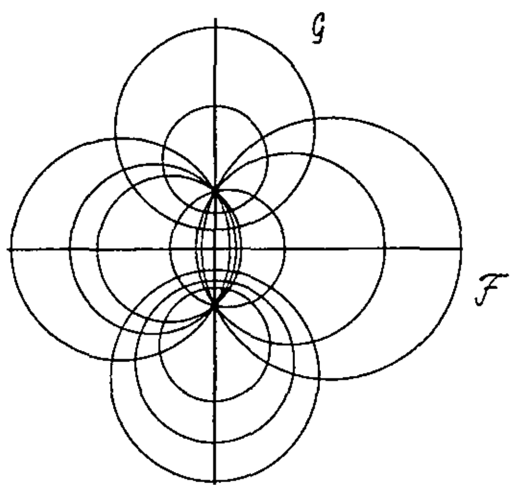
Veamos que efectivamente es una familia coaxial. Tomamos cualquier punto T sobre la línea $\mathcal{L}$, entonces: $TN \cdot TM$ es la potencia de T respecto a cualesquiera dos circunferencias que pasan por N y M; por lo tanto $\mathcal{L}$ es el eje radical de la familia de circunferencias coaxiales $\mathcal{F}$.



Si nos fijamos en un punto T (distinto a M y N y fuera del intervalo que determinan estos puntos) sobre el eje radical y a partir de éste trazamos líneas tangentes a las circunferencias de la familia $\mathcal{F}$, notamos que la distancia desde el punto T a todos los puntos de tangencia es la misma; a estas líneas tangentes las tomamos como radios de la circunferencia con centro en T, y por definición la circunferencia es ortogonal a todas las circunferencias de la familia $\mathcal{F}$.



Así definimos a la familia $\mathcal{G}$ como la familia de circunferencias con centro en cualquier punto sobre el eje radical y que son ortogonales a todas las circunferencias de la familia $\mathcal{F}$. El eje radical de la familia $\mathcal{G}$ es la línea de los centros de la familia $\mathcal{F}$, pues el eje radical es ortogonal a la línea de los centros. Sea P un punto en esta línea, trazamos la circunferencia con centro en P que pasa por los puntos de intersección de la familia $\mathcal{F}$ esta circunferencia es ortogonal a todas las de la familia $\mathcal{G}$; por lo tanto los radios de la circunferencia son las tangentes a la familia $\mathcal{G}$ y por lo tanto P tiene la misma potencia respecto a todas las circunferencias de la familia $\mathcal{G}$. Co lo que demostramos que la familia $\mathcal{G}$ también es una familia coaxial.



Cabe mencionar que a los ejes radicales de ambas familias, los podemos ver como circunferencias de radio infinito, por lo que también forman parte de sus respectivas familias.

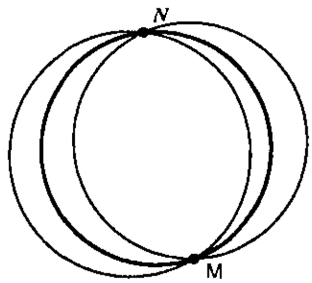
Notemos que la familia ortogonal a la familia de circunferencias que no se intersecan $\mathcal{G}$, es precisamente la familia de circunferencias que se intersecan, es decir, la familia

$\mathcal{F}$ de circunferencias que pasan por dos puntos.

OBSERVACIÓN: Si tomo cualquier punto en el plano, por éste siempre pasa una circunferencia de la familia $\mathcal{F}$ y una de la familia $\mathcal{G}$.

Con todo lo que ya sabemos de inversión, ahora mencionaremos algunos resultados interesantes al invertir con respecto a algunos miembros de las familias que presentamos anteriormente.

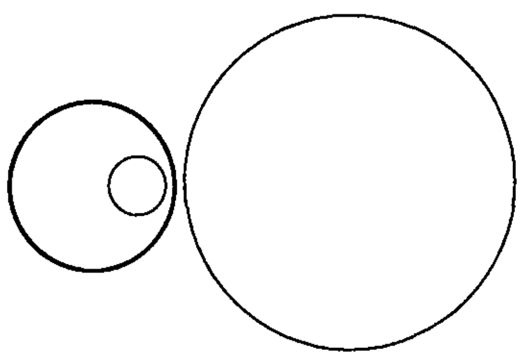
Si invertimos a un miembro f de la familia $\mathcal{F}$ respecto a una circunferencia de su propia familia, se invierte en otra circunferencia f' de la misma familia; puesto que N y M quedan fijos.



Dadas dos circunferencias siempre existe al menos una circunferencia de la familia coaxial que determinan respecto a la cual dicho par de circunferencias son inversas. En particular las circunferencias que bisectan el ángulo que forman las dos circunferencias, cumple esta propiedad.

Si invertimos a un miembro de la familia $\mathcal{F}$ respecto a un miembro de la familia ortogonal $\mathcal{G}$; por ser circunferencias ortogonales, se queda invariante.

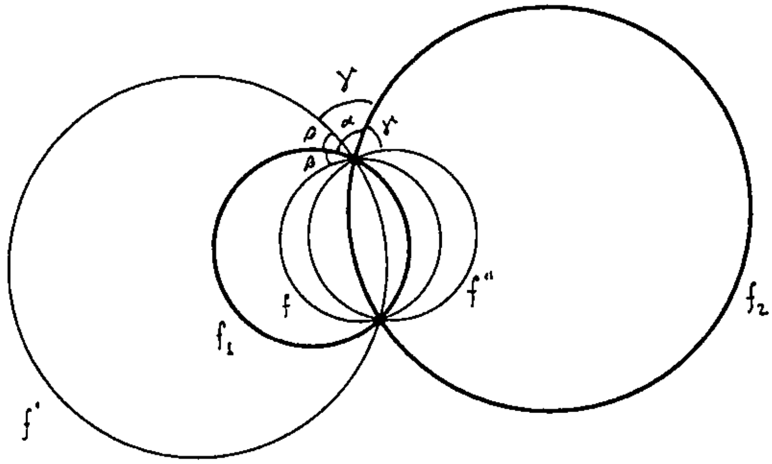
Si invertimos a un miembro de la familia $\mathcal{G}$ respecto a otro miembro de su propia familia, se invierte en otro miembro de su misma familia.



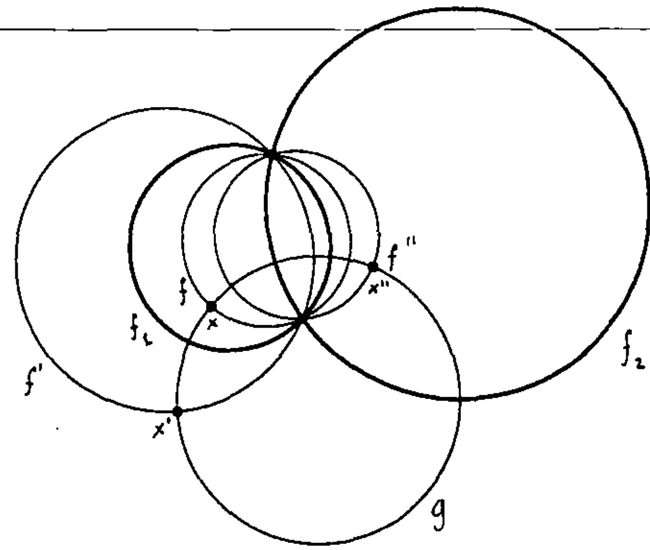
Si invertimos a un miembro de la familia $\mathcal{G}$ respecto a un miembro de $\mathcal{F}$, por ser circunferencias ortogonales, se invierte en sí misma.

Analizaremos que pasa al invertir a una circunferencia respecto a dos miembros de su propia familia, para lo cual tendremos dos casos:

CASO 1: Invertiremos una circunferencia f de la familia $\mathcal{F}$ respecto a dos miembros de su propia familia, f_1 y f_2 con ángulo α entre éstas. Sea β el ángulo entre f y f_1 al invertirla respecto a f_1, se va a otra circunferencia f' de la misma familia con ángulo β entre f_1 y f'; sea γ el ángulo entre f' y f_2 luego invertimos a f' respecto a f_2, invirtiéndose en otra circunferencia f'' con ángulo γ entre f_2 y f''. La circunferencia f se invirtió en otra circunferencia que está a dos veces el ángulo entre f_1 y f_2, es decir el ángulo entre f y f'' es 2α puesto que $\alpha = \beta + \gamma$.



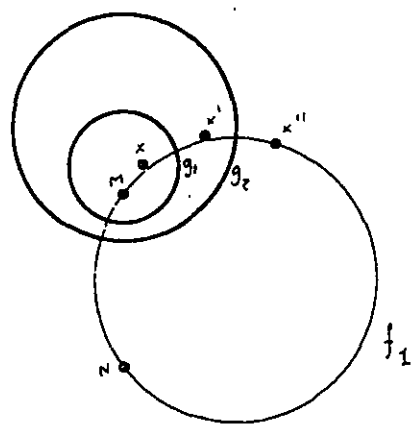
Fijémonos en un punto x que está en la intersección de una circunferencia g de la familia $\mathcal{G}$ y f, al invertirlo respecto a f_1, su imagen es un punto x' también sobre la intersección de g con f' ahora invertimos x' respecto a f_2, su imagen es un punto x'' sobre la intersección de g y f'', con ángulo α entre f_1 y f_2, pues la inversión preserva ángulos. Por lo tanto los puntos sobre g giran sobre ella un ángulo de 2α.



Invertiremos a una circunferencia g respecto a g_1 y g_2:

CASO 2: Sean M y N los dos puntos por donde pasan los miembros de la familia $\mathcal{F}$ y tomemos a un solo miembro f_1 de la familia $\mathcal{F}$, al invertir a la circunferencia f_1 respecto a dos circunferencias g_1 y g_2 de la familia $\mathcal{G}$ los puntos M y N quedan fijos puesto que son inversos respecto a g_1 y g_2. Todos los demás puntos de f_1, sin salirse de f_1, se alejan de uno de estos dos puntos y se acercan al otro. En la siguiente figura se observa que al invertir respecto a g_1 x va a x' y al invertir en g_2, x' va a x''; alejándose de M y acercándose a N. Llamaremos entonces, a M punto *repulsor*, y a N punto *atractor*.

La circunferencia g que pasa por x al invertir respecto a g_1, se invierte en g' que pasa por x'; y al invertir g' respecto a g_2, se invierte en g'' que pasa por x''.



En el caso 1 que explicamos anteriormente, pudimos determinar exactamente a que circunferencia va a dar la original después de dos inversiones; y nuestro criterio es el del ángulo. En este caso, no podemos determinar todavía exactamente a que circunferencia va a dar la original, pues necesitamos valernos de la razón cruzada que definiremos posteriormente.

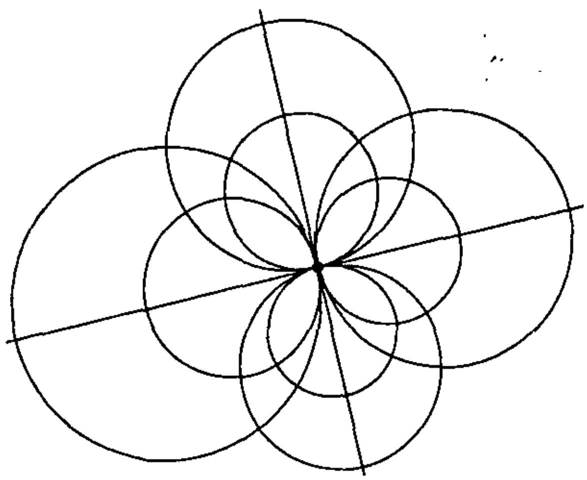
Lo que sí podemos decir es que si cambio el orden de inversión, es decir si primero invierto en g_2 y luego en g_1, los puntos de f_1 se acercan a M y me alejan de N; siendo entonces M atractor y N repulsor.

1.2.2 Circunferencias coaxiales tangentes

Son todas aquellas circunferencias que son tangentes en un punto; notemos que a esta familia $\mathcal{F}$ la podemos pensar como el caso límite entre las circunferencias coaxiales que se intersecan y la familia de circunferencias que son ajenas.

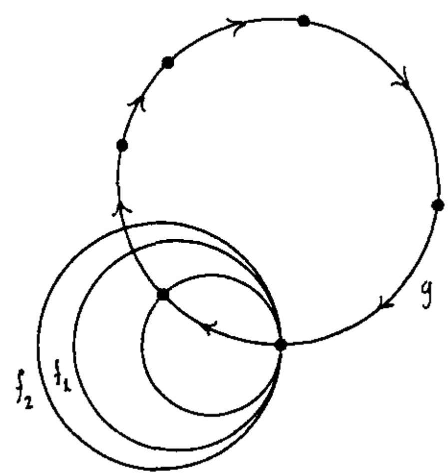
El eje radical de esta familia de circunferencias coaxiales, es la línea que pasa por el punto común a todas las circunferencias, y que es ortogonal a la línea de los centros.

La familia ortogonal $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, son todas las circunferencias ortogonales que pasan por el punto de tangencia; el eje radical es la línea tangente a todas las circunferencias de la familia y es ortogonal a la línea de los centros de $\mathcal{G}$.



Al igual que los casos anteriores si invertimos a una circunferencia respecto a otra de su misma familia, se va a una tercer circunferencia de la familia; y si invertimos a una circunferencia respecto a una de la familia ortogonal, se invierte en sí misma. Notemos que el punto de tangencia queda fijo bajo cualquier inversión.

Si invertimos una circunferencia g respecto a dos circunferencias de la familia $\mathcal{F}$, los puntos de g se quedan sobre g moviéndose, excepto el punto de tangencia, en el mismo sentido de modo que por un lado se alejan del punto de tangencia y por el otro se acercan; el punto de tangencia es un punto *silla*, pues es tanto atractor como repulsor.



1.3 Razón Cruzada

Definición. *El segmento AB se dice que está dividido armónicamente por C y D si:*

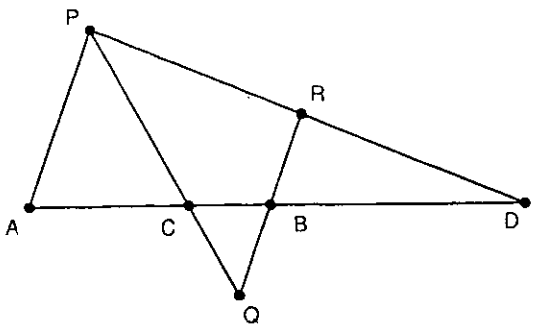
$$AC : CB = -AD : DB$$

Se dice que los puntos C y D son conjugados armónicos respecto a A y B lo que se denota: $(A, B; C, D)$.

De la ecuación anterior decimos que si CD son conjugados armónicos respecto a AB, entonces AB son conjugados armónicos respecto a CD es decir $(C, D; A, B)$; pues también se cumple que

$$CA : AD = -CB : BD$$

Para construir el conjugado armónico de una triada de puntos colineales, trazamos cualesquiera dos líneas paralelas que pasen por A y B, por C trazamos cualquier línea que interseque a las líneas paralelas en P y Q respectivamente. En QB tomamos R tal que $QB = BR$. La línea PR corta a la línea AB en el punto deseado D.



Para verificar que esta construcción es válida, tomemos los siguientes triángulos semejantes $\triangle APC \sim \triangle BQC$, con lo que:

$$AC : CB = AP : QB.$$

Y también por ser semejantes los triángulos $\triangle APD \sim \triangle BRD$, se cumple que:

$$AD : DB = -AP : BR,$$

y como construimos $QB = BR$, se sigue que:

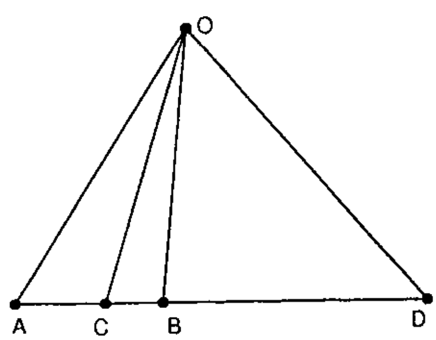
$$AC : CB = -AD : DB.$$

El caso especial en el que C sea punto medio del segmento AB, D es el punto al infinito en la línea AB.

Si A, B, C y D son puntos armónicos, cada una de las siete permutaciones en la que los pares conjugados A, B o C, D no son separados, también es armónica. Estas permutaciones son: $(A, B; D, C)$, $(B, A; C, D)$, $(B, A; D, C)$, $(C, D; A, B)$, $(C, D; B, A)$, $(D, C; B, A)$, $(D, C; A, B)$.

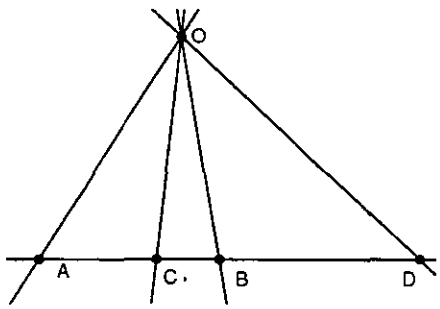
Definición. *Las líneas OA y OB se dice que están separadas armónicamente por las líneas OC y OD si:*

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} COB} = -\frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} DOB}$$



De la misma manera decimos que las líneas OC y OD son conjugadas armónicas respecto a las líneas OA y OB.

Teorema 1.12. *La hilera de puntos en que las líneas de un haz armónico corta cualquier línea que no pase por el vértice del haz, es una hilera armónica de puntos; además el haz de líneas obtenido al unir cuatro puntos armónicos a cualquier otro punto, que no esté sobre la misma línea, es un haz armónico.*



Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} COB} = -\frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} DOB} \quad \text{por} \quad \frac{OA}{BO}$$

obtenemos:

$$\frac{OA \operatorname{sen} AOC}{BO \operatorname{sen} COB} = -\frac{OA \operatorname{sen} AOD}{BO \operatorname{sen} DOB}$$
$$AC : CB = -AD : DB$$

Ya que en general para cualquier triángulo $\triangle OAB$ y C un punto sobre AB se cumple que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA \operatorname{sen} AOC}{BO \operatorname{sen} COB}$$

De la misma manera si partimos de:

$$AC : CB = -AD : DB$$

y la dividimos entre $\frac{OA}{BO}$ tenemos:

$$\frac{AC \cdot BO}{CB \cdot OA} = -\frac{BD \cdot AD}{OA \cdot DB}$$
$$\frac{BO \cdot OA \operatorname{sen} AOC}{OA \cdot BO \operatorname{sen} COB} = -\frac{BD \cdot OA \operatorname{sen} AOD}{OA \cdot BD \operatorname{sen} DOB}$$

Y obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} COB} = -\frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} DOB}$$

Corolario 1.13. *Si una línea transversal corta a las cuatro líneas de un haz en una hilera armónica de puntos, entonces cualquier otra transversal que corte al haz, lo cortará en una hilera armónica de puntos.*

Corolario 1.14. *Si un haz armónico corta a una línea en cuatro puntos, cualquier otro haz que pase por estos cuatro puntos es armónico.*

Si cuatro puntos A, B, C, D son armónicos, entonces:

$$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB} = -1$$

Definición. *Si cuatro puntos colineales tienen cualquier posición sobre la línea en la que se encuentran, definimos:*

$$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}$$

como la razón cruzada de los puntos A, B, C, D, y se denota por: $\{ABCD\}$.

De manera análoga definimos la razón cruzada de cualesquiera cuatro líneas concurrentes, como:

$$\frac{\operatorname{sen} AOC}{\operatorname{sen} COB}\Big/\frac{\operatorname{sen} AOD}{\operatorname{sen} DOB}$$

lo cual se denota por $\{abcd\}$.

Existen veinticuatro permutaciones para cuatro letras, por lo tanto veinticuatro posibles valores para la razón cruzada. Pero podemos agrupar a estas veinticuatro permutaciones en seis grupos de cuatro, tal que el valor de la razón cruzada es el mismo para todos los miembros de un grupo. Por ejemplo si $\{ABCD\} = \lambda$, entonces: $\{BADC\}$, $\{CDAB\}$ y $\{DCBA\}$ también tienen valor λ.

Si el valor de la razón cruzada para uno de esos grupos es λ, digamos $\{ABCD\} = \lambda$, entonces los valores para los otros grupos son: $\{ABDC\} = \frac{1}{\lambda}$, $\{ACBD\} = 1 - \lambda$, $\{ACDB\} = \frac{1}{1-\lambda}$, $\{ADBC\} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ y $\{ADCB\} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

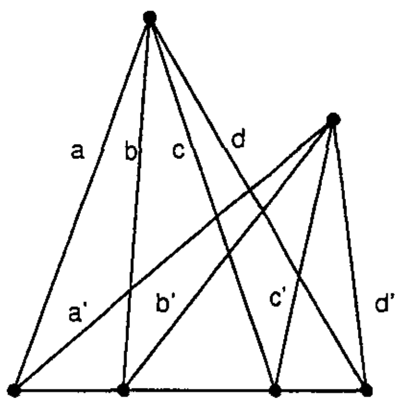
Si cuatro elementos, ya sean puntos o líneas, son armónicos, el valor de su razón cruzada es -1. El signo de la razón cruzada depende de si un par de puntos es separado o no por el otro; si lo son, la razón cruzada es positiva.

Teorema 1.15. *Si un haz $(abcd)$ de rectas corta a una recta en los puntos A, B, C, D entonces $\{abcd\} = \{ABCD\}$.*

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 1.11.

Corolario 1.16. *Si dos rectas cortan a un haz en A, B, C, D y A', B', C', D' respectivamente, entonces $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.*

Corolario 1.17. *Si dos haces $(abcd)$ y $(a'b'c'd')$ pasan por cuatro puntos coineales, entonces $\{abcd\} = \{a'b'c'd'\}$.*



La razón cruzada de cuatro puntos toma los valores 1, 0, ∞, si y sólo si dos de los puntos coinciden.

Por ejemplo, si $\{ABCD\} = \infty$, implica que: $\frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB} = \infty$, esto pasa si: $AD = 0$ y por lo tanto $A = D$; o si: $CB = 0$ y por lo tanto $C = B$; y sólo pasa en esos casos.

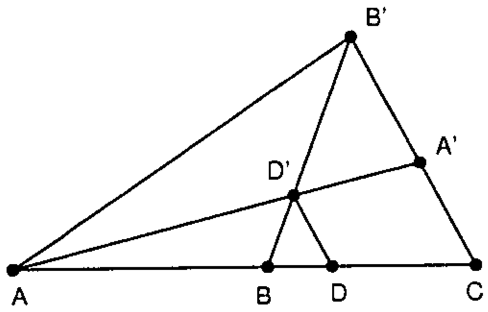
Si $\{ABCD\} = 0$, implica que: $\frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB} = 0$, esto pasa si: $AC = 0$ y por lo tanto $A = C$; o si: $DB = 0$ y por lo tanto $D = B$.

Si $\{ABCD\} = 1$, implica que: $\frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB} = 1$, esto pasa si: $AC = AD$ y $CB = DB$ y por lo tanto $C = D$; o si: $AB = 0$ y por lo tanto $A = B$.

Cabe mencionar que para calcular la razón cruzada también podemos tomar como uno de nuestros puntos, el punto al infinito y para encontrar el valor de la razón cruzada hay que calcular el límite cuando el punto tiende a infinito. Análogamente cuando el denominador es cero, se calcula la razón cruzada usando límites.

Si A, B, C son cualesquiera tres puntos colineales, existe un único punto D colineal con ellos tal que $\{ABCD\} = \lambda$, donde λ puede tomar valores tanto negativos como positivos.

Dados tres puntos colineales A, B y C, para construir el cuarto punto D tal que $\{ABCD\} = \lambda$ para λ dada, desde C trazamos una línea que interseque a la línea donde están A, B y C, sobre ésta tomamos A' y B' tales que $\frac{CA'}{CB'} = \lambda$. Las líneas AA' y BB' se intersecan en D', desde D' trazamos una paralela a CB', que intersecará a la línea AB en el punto deseado D. Para hacer esta construcción necesitamos que λ sea un número construible con regla y compás.



Para verificar que nuestra construcción es válida, dados los siguientes triángulos semejantes $\triangle BDD' \sim \triangle BCB'$ y $\triangle ADD' \sim \triangle ACA'$, tenemos que:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DD'}{CB'} \quad y \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DD'}{CA'}$$

dividiendo y reacomodando los términos tenemos:

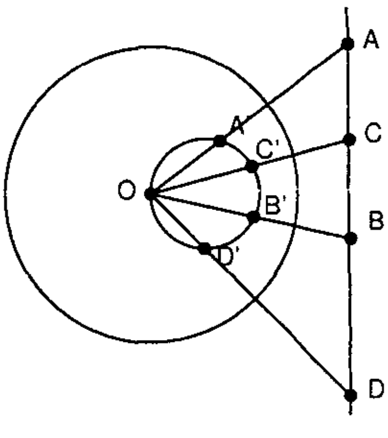
$$\frac{AC}{CB} \bigg/ \frac{AD}{DB} = \frac{CA'}{CB'} = \lambda$$

Una propiedad de la razón cruzada que usaremos frecuentemente es la siguiente:

~~**Teorema 1.18.** *Si A, B, C, D y E son cinco puntos en una recta en ese*~~ *orden, entonces:* $\{AEBC\} \cdot \{AECD\} = \{AEBD\}$

$$\begin{aligned}\{AEBC\} \cdot \{AECD\} &= \frac{AB}{BE}\Big/\frac{AC}{CE} \cdot \frac{AC}{CE}\Big/\frac{AD}{DE} \\ &= \frac{AB \cdot CE \cdot AC \cdot DE}{BE \cdot AC \cdot CE \cdot AD} \\ &= \frac{AB \cdot DE}{BE \cdot AD} = \{AEBD\}\end{aligned}$$

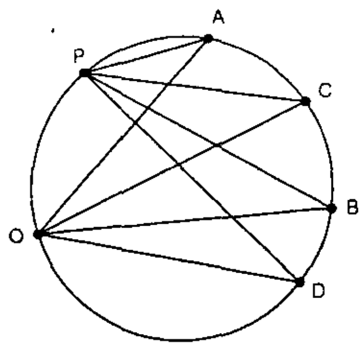
Para definir la razón cruzada de cuatro puntos sobre una circunferencia, recurriremos a la inversión. Sean A, B, C, D una hilera de puntos, la cual invertiremos respecto a una circunferencia; por lo que ya sabemos sobre inversión, la línea AD se invierte en una circunferencia que pasa por el centro de inversión, y los puntos A, B, C y D se invierten en puntos A', B', C', D' sobre esa circunferencia.



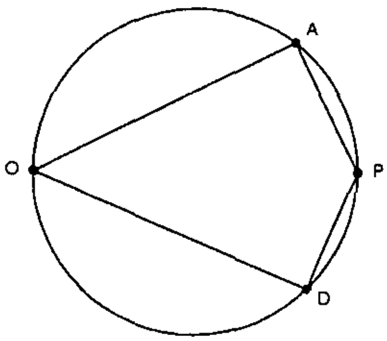
Para que la razón cruzada se conserve bajo inversión, definimos a la razón cruzada de cuatro puntos sobre una circunferencia como la razón cruzada de un haz con vértice sobre la circunferencia y que pase por los cuatro puntos.

En la figura se ve que si la razón cruzada de $\{ABCD\} = \lambda$, la razón cruzada de sus inversos también es λ.

Si tomamos cualquier otro punto P distinto de O que esté sobre la circunferencia, la razón cruzada es la misma. Si P está sobre el arco AOD y lo tomamos como vértice del haz armónico de $\{ABCD\}$; como ambos haces subtienden las mismas cuerdas, sus ángulos son iguales y por lo tanto tienen la misma razón cruzada.

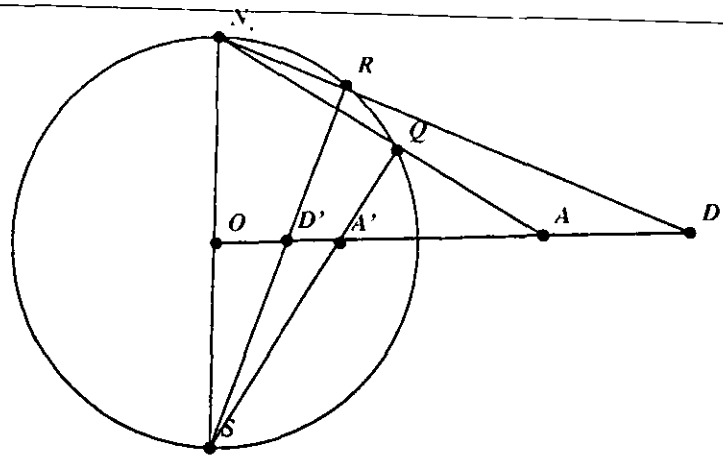


Ahora si tomamos otro punto P distinto de O pero en el arco que describen ACD de tal forma que no coincida con ninguno de los puntos A, B, C, o D, sabemos que sen $\angle AOD =$ sen $\angle APD$ por ser ángulos suplementarios; por el mismo razonamiento los senos de los ángulos del haz en O son iguales a los senos de los ángulos del haz en P. Y por lo tanto la razón cruzada no depende del vértice del haz.

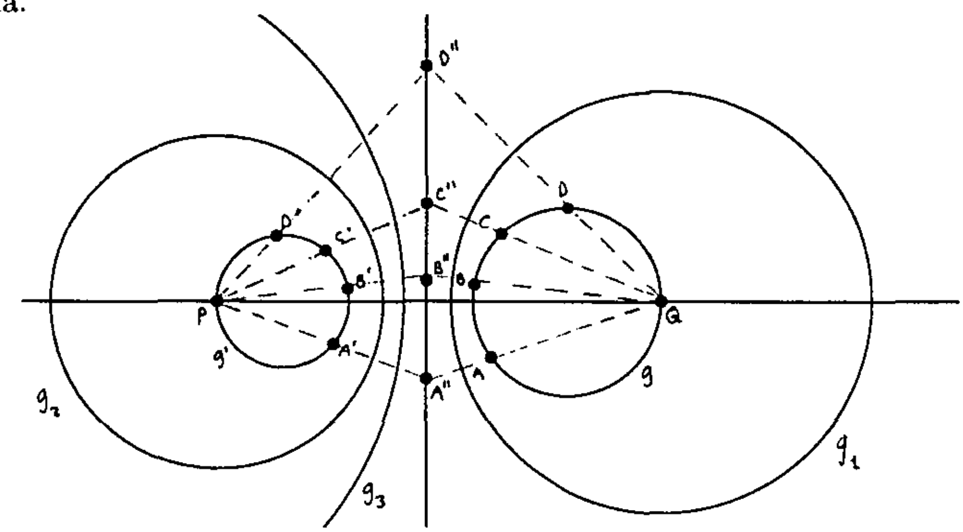


Ahora veremos que con la definición de razón cruzada para cuatro puntos en una circunferencia, ésta siempre se preserva bajo inversión. Veremos el caso en que los cuatro puntos están sobre una línea que pasa por el centro de inversión.

Usando la segunda construcción de el inverso de un punto respecto a una circunferencia, es fácil ver en la figura que: $\angle AND = \angle A'SD'$ puesto que ambos subtienden la cuerda QR de modo que al invertir cuatro puntos A, B, C, D sobre una recta que pasa por el centro de inversión se invierten en A', B', C', D' y el haz con vértice en N que pasa por A, B, C y D es igual al haz con vértice en S que pasa por sus inversos. Si la hilera de puntos tiene razón cruzada $\{ABCD\}$, entonces: $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.



Hemos demostrado que la inversión preserva la razón cruzada si los puntos originales son colineales, falta demostrar que ésto también se cumple para cualesquiera cuatro puntos sobre una circunferencia, es decir, que al invertirlos se preserva la razón cruzada.

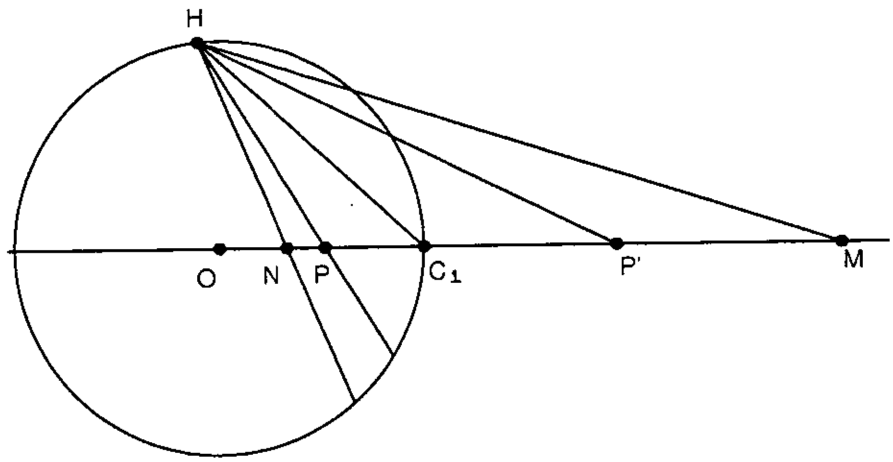


Sea g una circunferencia y sean A, B, C, D cuatro puntos sobre ella los que invertiremos respecto a la circunferencia g_3; los inversos A', B', C', D' están sobre una circunferencia g'. Estas circunferencias g y g' pertenecen a una familia coaxial, por lo tanto existe una única circunferencia g_2 de la familia con centro en P y una única circunferencia g_1 con centro en Q. Donde P y Q son las intersecciones de g' y g respectivamente con la línea de los centros.

Invertimos A, B, C, D respecto a g_1, éstos se invierten en A'', B'', C'' y D'' sobre el eje radical $\mathcal{L}$; invierto a estos puntos respecto a la circunferencia g_2 y se invierten exactamente en los puntos A', B', C', D', por lo tanto tiene la misma razón cruzada, es decir: $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.

Además en la sección de circunferencias coaxiales invertimos a un punto x sobre f_1 respecto a g_1 y g_2, teniendo un punto atractor y uno repulsor; además mencionamos que necesitaríamos de la razón cruzada para demostrar otro resultado. Pues como ya estamos en dicha sección, podremos saber exactamente a que circunferencia se invierte x.

Veamos qué pasa si invertimos los siguientes puntos de las circunferencias que pertenecen a la familia $\mathcal{G}$ y que están sobre la línea de los centros. En esta línea tenemos a los puntos N y su inverso M que son los dos puntos fijos por donde pasan todas las circunferencias de la familia $\mathcal{F}$. Tomemos la circunferencia g_1 con centro en O, que corte a la línea de los centros en C_1 y que en su interior esté N. Invirtamos un punto P entre N y C_1; se invierte en P' fuera de g_1 y notemos que C_1 es su propio inverso, pues está sobre la circunferencia de inversión.



Los puntos N, M, P yC_1 definen una hilera de puntos y como ya demostramos que la razón cruzada se preserva bajo inversión, entonces:

$$\{NMPC_1\} = \{MNP'C_1\}$$

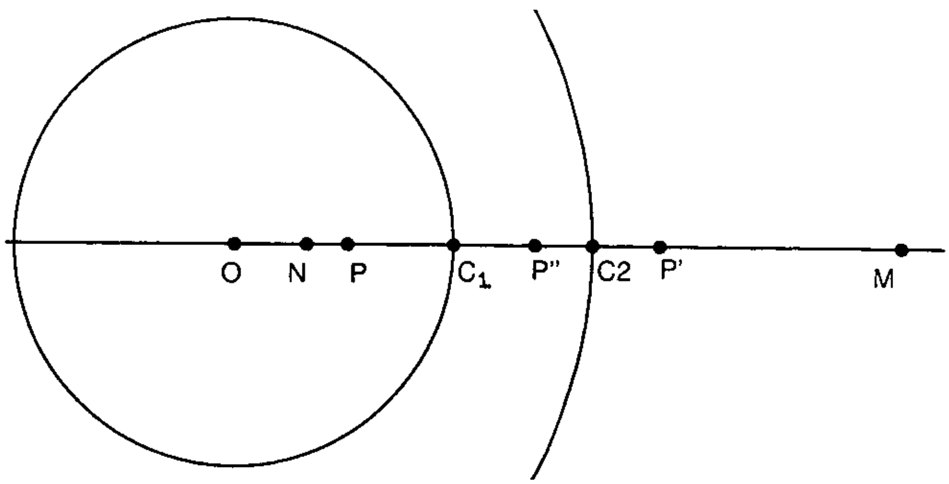
Dado que la razón cruzada es la misma para ciertas permutaciones que ya enlistamos anteriormente, entonces:

$$\{NMPC_1\} = \{MNP'C_1\} = \{NMC_1P'\}$$

Usando el teorema 1.18 tenemos que:

$$\{NMC_1P'\}^2 = \{NMPC_1\} \cdot \{NMC_1P'\} = \{NMPP'\}$$

Tomemos al punto C_2 de intersección de otra circunferencia de $\mathcal{G}$ con la línea de los centros; y sea P'' el inverso de P' respecto a la circunferencia g_2.



Usando los mismos argumentos que en el caso anterior sabemos que:

$$\{NMP'C_2\}^2 = \{NMP'C_2\} \cdot \{NMC_2P''\} = \{NMP'P''\}$$

Con lo anterior tenemos lo siguiente:

$$\{NMPP'\} = \{NMC_1P'\}^2 \quad \text{y} \quad \{NMP'P''\} = \{NMP'C_2\}^2$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned}\{NMPP'\} \cdot \{NMP'P''\} &= \{NMC_1P'\}^2 \cdot \{NMP'C_2\}^2 \\ &= (\{NMC_1P'\} \cdot \{NMP'C_2\})^2\end{aligned}$$

Usando el teorema 1.18, tenemos que:

$$\{NMPP''\} = \{NMC_1C_2\}^2$$

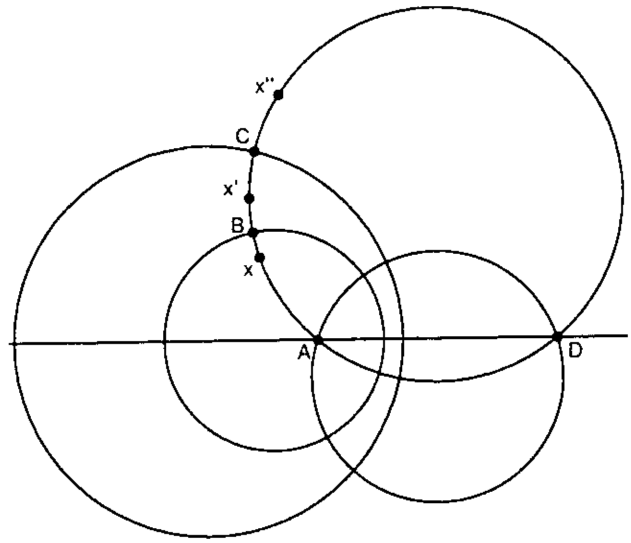
Con esto estamos diciendo que la razón cruzada de $\{NMPP''\}$ es el cuadrado de la razón cruzada de $\{NMC_1C_2\}$.

En la construcción anterior utilizamos puntos sobre la línea de los centros, con esto podemos asegurar que si tomamos cualquier otro punto Q sobre la circunferencia de la familia $\mathcal{G}$ que pasa por P, Q también está en una circunferencia f de la familia $\mathcal{F}$; al invertir en g_1, Q va a Q' sobre la circunferencia g' que pasa por P' sin salirse de la circunferencia f. Al volver a invertir f respecto a g_2 Q' se va a Q'' sobre las circunferencias f y g''; es inmediato que para el punto Q se cumple:

$$\{NMQQ''\} = \{NMC_1C_2\}^2$$

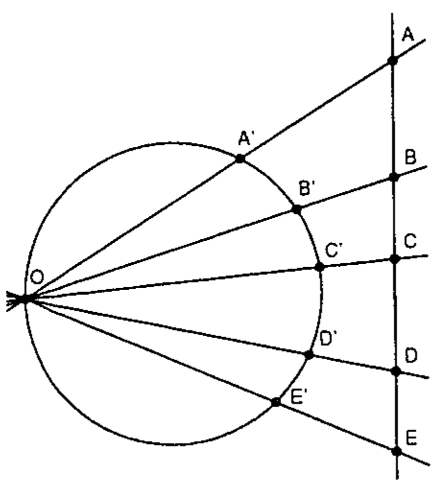
Puesto que existe una circunferencia de la familia $\mathcal{F}$ que bajo inversión, manda al eje radical de esta familia en la circunferencia f.

En particular esto se cumple para la única circunferencia de la familia f que es ortogonal a la línea de los centros de $\mathcal{G}$.



La razón cruzada de cinco puntos sobre una circunferencia, también cumple una propiedad análoga al teorema 1.13: $\{A'E'B'C'\} \cdot \{A'E'C'D'\} = \{A'E'B'D'\}$

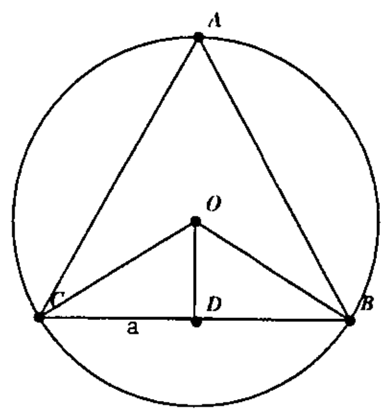
Para demostrarlo tomamos a A, B, C, D, E como los puntos de una hilera y los invertimos respecto a una circunferencia, y como la inversión preserva la razón cruzada, y la hilera cae sobre cinco puntos en una circunferencia, también se cumple esta propiedad para los puntos sobre la circunferencia.



En esta sección definimos la razón cruzada de cuatro puntos sobre una circunferencia como la razón cruzada de un haz con vértice en la circunferencia que pasa por los cuatro puntos. Ahora demostraremos que también se puede calcular la razón cruzada a partir de las longitudes de las cuerdas que unen a estos cuatro puntos.

Proposición 1.19. *Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos sobre una circunferencia, entonces $\{ABCD\} = e(\frac{AC}{CB}/\frac{AD}{DB})$, donde AC, CB, AD, DB, son las longitudes de las cuerdas y e toma el valor de -1 o $+1$ según si los pares A, B y C, D están o no separados entre sí.*

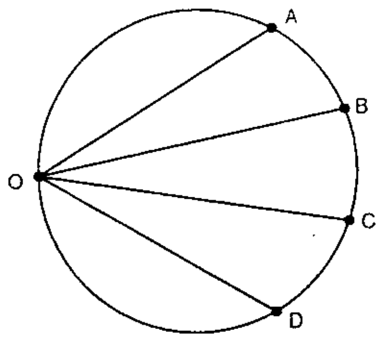
Para comprobar la proposición, usaremos la ley de senos que demostraremos a continuación:



Sea $\triangle ABC$ un triángulo y tracemos la circunferencia circunscrita. Unamos B y C con el centro O y tracemos la mediatriz de a como se muestra en la figura. Los ángulos $\angle BOD$ y $\angle DOC$ son iguales; además, los dos miden α, por lo cual $a = 2r \operatorname{sen} \alpha$ donde r es el radio de la circunferencia y despejando tenemos: $2r = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$. Tomaremos sólo el ángulo α, pero la demostración es análoga para los otros ángulos β y γ. Por lo tanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

Usando ésto demostraremos la proposición anterior.



Tomemos a O como vértice del haz de líneas $(OAOBOCOD)$ y aplicando el resultado anterior, es decir:

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{2r \operatorname{sen} AOC}{2r \operatorname{sen} COB}}{\frac{2r \operatorname{sen} AOD}{2r \operatorname{sen} DOB}}$$

donde AC, CB, AD, DB, son las longitudes de las cuerdas. Eliminando $2r$ tenemos que:

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \{ABCD\}.$$

Donde AC, CB, AD y DB son las longitudes de las cuerdas.

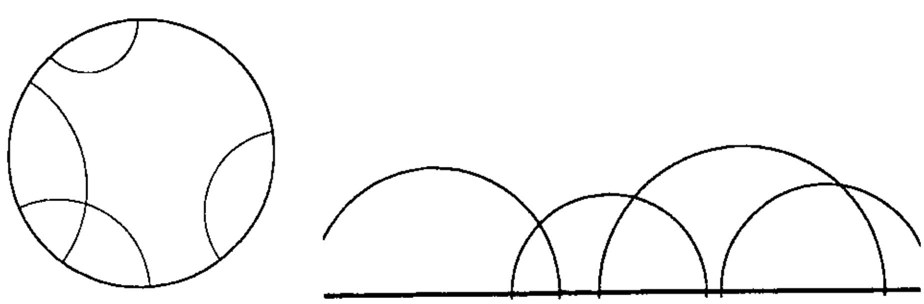
Capítulo 2

Geometría Hiperbólica

Out of nothing
I have created a strange new universe.
—János Bolyai

En este capítulo, revisaremos algunas de las propiedades de la inversión que ya estudiamos en el capítulo anterior y las usaremos para construir dos modelos de la Geometría Hiperbólica; el del disco Δ y el del semiplano superior H^2, ambos modelos de Poincaré y al mismo tiempo iremos descubriendo una Geometría sorprendente.

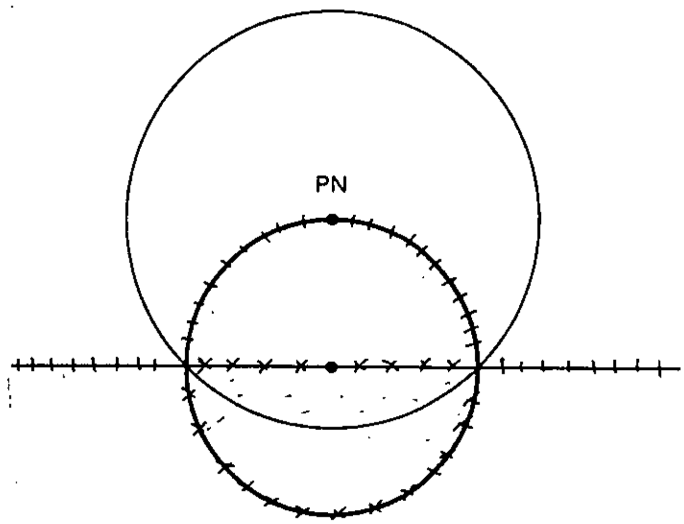
Tomemos un disco y cualquier circunferencia ortogonales a él, si invertimos este disco respecto a esta circunferencia, sabemos que los puntos del disco, incluidos los de su frontera, se quedan invariantes; a los puntos de este disco les llamaremos Δ. De la misma manera si tomamos a cualquier circunferencia ortogonal a una recta H dada e invertimos a los puntos del semiplano que determina H respecto a esta circunferencia, los puntos del semiplano, y los puntos sobre H, se quedan invariantes bajo la transformación; a los puntos del semiplano determinado por H les llamaremos H^2. Es importante notar que ninguno de nuestros modelos contiene a su frontera, es decir ni la frontera del disco ni la línea H contienen puntos de nuestro espacio; aunque posteriormente nos referiremos a ellas con frecuencia porque en ambos modelos éstas son las líneas al infinito.



Dado que en este capítulo usaremos indistintamente ambos modelos, mostraremos que mediante dos inversiones podemos pasar del modelo del disco al del semiplano y viceversa. Sabemos como invertir a una circunferencia en una recta y una recta en una circunferencia, en particular [1] tomaremos al disco unitario Δ y lo invertiremos respecto a una circunferencia con centro en el polo norte de Δ y radio $\sqrt{2}$.

La frontera de Δ se invierte en la línea H que pasa por el centro de Δ, los puntos de Δ que están en el interior de la circunferencia de inversión, se invierten en los puntos del semiplano inferior de H fuera de Δ; y los puntos que están dentro de Δ y fuera de la circunferencia de inversión, se invierten en los puntos del semi plano inferior dentro de Δ. De modo que la imagen del disco bajo la inversión es el semiplano inferior.

Debemos invertir después respecto a H, ya que nos interesa preservar la orientación y además queremos el modelo del semiplano superior. Con esto tenemos el modelo llamado H^2 del semiplano superior determinado por H.

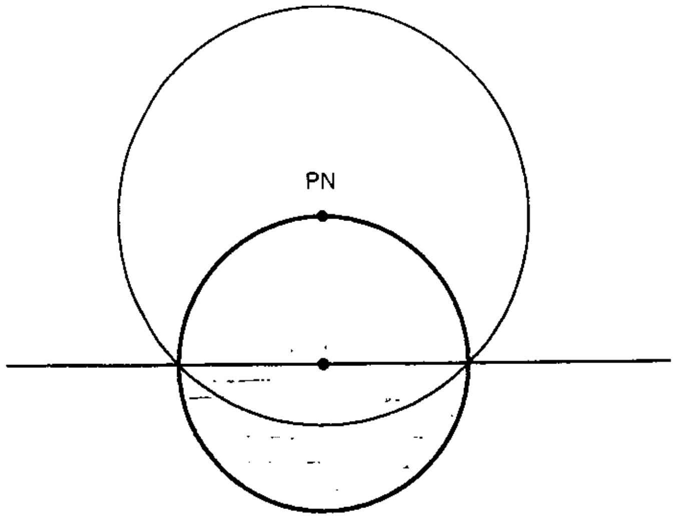


Para pasar del semiplano superior al disco, debemos hacer las mismas inversiones, pero en el orden contrario para seguir preservando la orientación.

Esto es, ahora debemos invertir primero respecto a H, entonces el semiplano superior se invierte en el semiplano inferior y después al invertir respecto a la circunferencia con centro en el polo norte y radio $\sqrt{2}$, los puntos del semiplano inferior se

[1] Dado que es muy común trabajar la Geometría Hiperbólica en el plano de los números complejos y que en este caso se acostumbra usar el semiplano superior como H^2 y al disco unitario como Δ, hacemos esta construcción para una circunferencia unitaria y una recta que pasa por el centro. Como en este trabajo no usamos coordenadas puede ser cualquier disco y cualquier semiplano.

invierten en los puntos del interior de Δ.



Si en el modelo del disco tomamos una circunferencia ortogonal a la frontera de Δ, al invertir a Δ y pasar al semiplano, también la circunferencia ortogonal se invertirá en una circunferencia ortogonal a H. Del mismo modo si tomamos circunferencias ortogonales en el modelo del semiplano y al invertir pasamos al modelo del disco, las circunferencias se invierten en circunferencias ortogonales en Δ.

2.1 Distancia

En esta sección vamos a definir la distancia hiperbólica o métrica hiperbólica adecuada para esta Geometría. Recordemos que en la Geometría Euclidiana las reflexiones preservan la distancia, y cualquier isometría se puede construir a partir de composiciones de reflexiones; tomando esta idea queremos definir una distancia que se preserve bajo inversiones, es decir, que la distancia entre dos puntos sea la misma que la distancia entre sus inversos. Evidentemente la distancia euclidiana no cumple esta propiedad.

Además queremos que las reflexiones preserven la distancia; por lo que sólo consideraremos circunferencias ortogonales a la frontera del espacio. En otras palabras queremos que todas las inversiones que dejaron fijos a Δ o a H^2 sean isometrías.

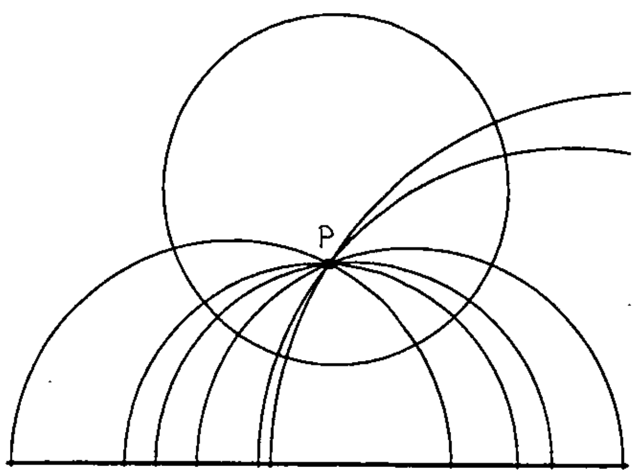
Para definir esta distancia trabajaremos en el modelo H^2 y posteriormente demostraremos que la distancia en ambos modelos es la misma si transformamos uno en el otro como lo explicamos en la sección anterior.

Tomamos todas las cicunferencias ortogonales a H que pasan por un punto P en H^2,

~~todas estas circunferencias se intersecan también en un punto Q que es el inverso~~ de P respecto a H y por lo tanto forman una familia coaxial $\mathcal{F}$ que se interseca en dos puntos. Como sólo nos interesa lo que pasa en H^2, dibujaremos sólo las semicircunferencias contenidas en H^2. Consideremos también una circunferencia g ortogonal a la familia $\mathcal{F}$; sabemos que al invertir a g respecto a cada una de las circunferencias de la familia $\mathcal{F}$ la dejarán invariante por las propiedades de inversión que explicamos en el capítulo anterior.

Sean Q y Q' cualesquiera dos puntos sobre g, la recta euclidiana que los une corta a H en un punto, Q y Q' son inversos respecto a la circunferencia con centro en ese punto que pasa por P; si la recta QQ' es paralela a H, entonces los puntos serán inversos respecto al eje radical de la familia $\mathcal{F}$.

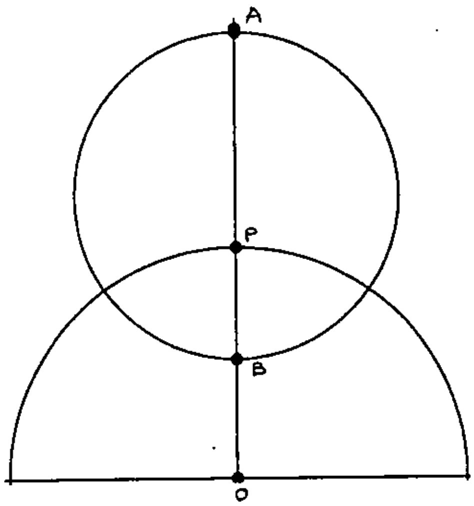
Nuestra hipótesis importante es que la distancia hiperbólica se preserva bajo inversión, entonces la distancia del punto P a cualquier punto sobre g es la misma, por lo tanto P es el centro de la circunferencia g, le llamaremos *centro hiperbólico*, nótese que éste no coincide con el centro euclidiano; notemos que los segmentos de circunferencias que pasan por P que quedan en el interior de g cumplen exactamente con lo que cumplen los diámetros en una circunferencia euclidiana; son ortogonales a la circunferencia, pasan por el centro y que todos miden lo mismo.



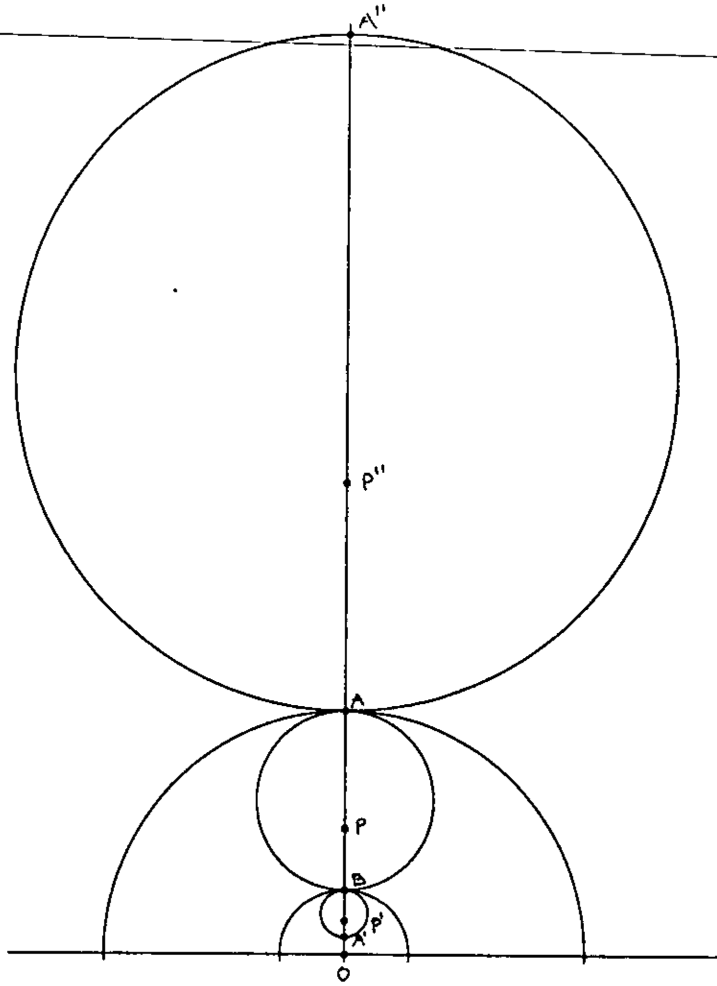
2.1.1 Distancia entre dos puntos sobre una recta vertical

Primero definiremos la distancia solamente para puntos sobre una recta vertical ℓ y luego generalizaremos la definición para cualesquiera dos puntos en el plano.

Tomemos a la recta H que dejamos invariante, y a la línea ℓ que pasa por P y es ortogonal a H; si llamamos O al punto de intersección de ambas líneas y nos fijamos en los puntos de intersección de g con ℓ, nos determina a los puntos A y B. Notemos que P con la métrica hiperbólica, es el punto medio de AB, pues es el centro de la circunferencia con diámetro AB, pero con la métrica euclidiana OP es la media geométrica de OA y OB, es decir: $OA \cdot OB = (OP)^2$, pues si invertimos respecto a la circunferencia con centro en O que pasa por P los puntos A y B son inversos.



Invertiremos a la circunferencia g con centro hiperbólico en P respecto a una circunferencia ortogonal a H que pase por A y tenga centro en O, g se invierte en otra circunferencia con centro en el inverso P'' de P; es decir que centros hiperbólicos se invierten en centros hiperbólicos, ya que por hipótesis la métrica que vamos a definir se preserva bajo inversión y como $PA = PB$, entonces se debe cumplir que $P''A = PA$; además el punto B se invirtió en A''. Ya sabíamos que $PA = PB$, y como nuestra métrica se preserva bajo inversión, también $P''A'' = P''A = PA = PB$. Volvamos a invertir a nuestra circunferencia g, ahora con respecto a una circunferencia ortogonal a H con centro en O que pase por B; g se invierte en otra circunferncia con centro en P' que es inverso de P; y el punto A se invirtió en A' y dada nuestra métrica, cumplen también que: $P'B = P'A' = PA = PB$.



Supongamos que la distancia euclidiana de O al punto B es 1, y la de O a el punto P es 2,[2] por propiedades de inversión el punto P' (que es el inverso de P respecto a la circunferencia que pasa por B) está en el $1/2$, P'' está en el 8. De la misma manera vemos que el punto A está en el 4, A' está en el $1/4$ y A'' está en el 16.

Comprobemos que esto es cierto para A y P'' y para los otros puntos el cálculo será análogo.

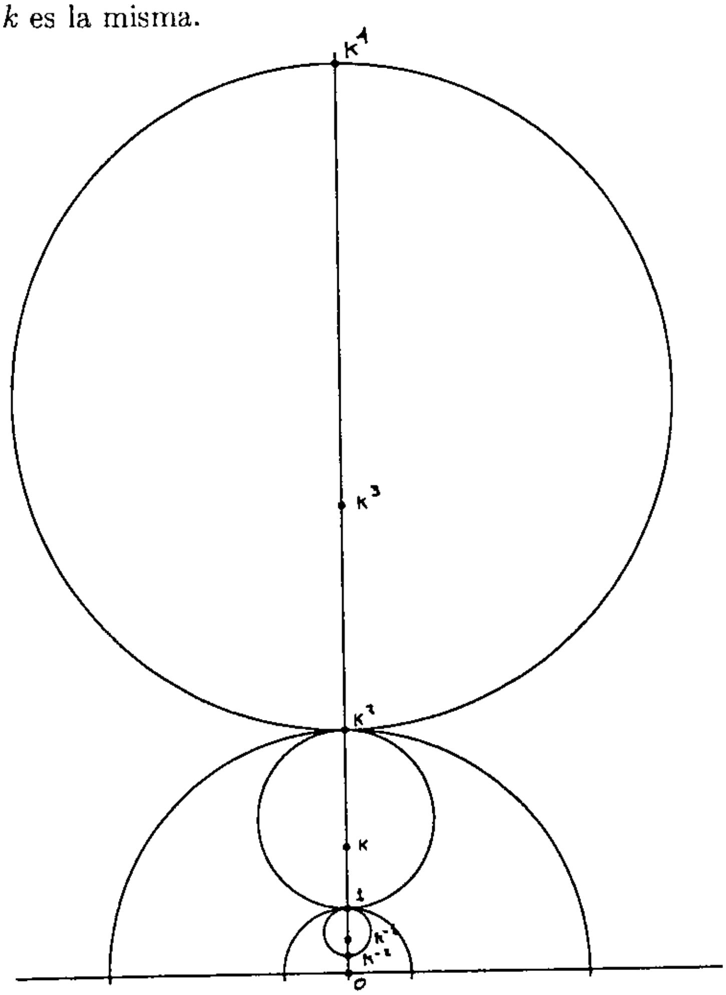
Como B está en el 1 y P en el 2 y sabemos que el centro hiperbólico es la media geométrica de las longitudes euclidianas de OB y OA, entonces OA debe medir 4; como P'' es el inverso de P respecto a una circunferencia de radio 4, entonces OP'' mide 8.

De lo anterior podemos ver que las distancias hiperbólicas del 16 al 8, del 8 al 4,

[2] Por comodidad abusaremos del lenguaje y en ocasiones llamaremos a la distancia OB simplemente B, como si la línea ℓ fuera el eje vertical de un sistema coordenado.

del 4 al 2, del 2 al 1, del 1 al 1/2, del 1/2 al 1/4 son iguales.

Si en vez de poner al punto P en el 2, lo hubiéramos puesto en k y el punto B lo dejamos en el 1, podemos dar la relación entre los puntos de la recta ℓ, notando que el punto A es k^2, el punto P' es $1/k = k^{-1}$, el punto A' es $1/k^2 = k^{-2}$, $P'' = k^3$, $A'' = k^4$; podemos repetir el proceso de invertir circunferencias hacia arriba y hacia abajo muchas veces, y obtendríamos que la distancia hiperbólica entre dos potencias consecutivas de k es la misma.



Nuestra intención es definir una distancia, es decir una función d que cumpla:

1. $d(AB) \geqslant 0$ y $d(AB) = 0 \iff A = B$

2. $d(AB) = d(BA)$

3. $d(AB) \leq d(AC) + d(CB)$ y $d(AB) = d(AC) + d(CB)$ para puntos colineales.

Es decir, queremos saber cómo definir la distancia entre dos puntos en este raro modelo del plano y hasta el momento lo único que sabemos es que sobre una recta vertical la distancia entre cualesquiera dos potencias consecitivas de k es la misma. Y queremos conservar esta condición además de las tres propiedades que definen distancia.

La distancia usual, es decir la distancia euclidiana, no nos sirve porque

$$k^1 - k^0 = k - 1 \neq 1 - 1/k = k^0 - k^{-1}$$

por lo tanto no cumple con la condición que necesitamos.

Pareciera que nos conviene tomar el cociente de las distancias euclidianas de los puntos a H, pues queremos que la distancia entre dos potencias consecutivas sea la misma, esto es:

$$\frac{k^{n+1}}{k^n} = k$$

para toda n y por lo tanto la distancia entre potencias consecutivas es la misma. Este cociente siempre es positivo pero no cumple que es cero si y sólo si los dos puntos son el mismo, puesto que

$$\frac{k^n}{k^n} = 1 \neq 0$$

por lo que el cociente no cumple la primera propiedad.

Evidentemente la segunda propiedad no se cumple ya que:

$$k = \frac{k^{n+1}}{k^n} \neq \frac{k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{k}$$

Tampoco se cumple que la distancia sea aditiva para puntos colineales, es decir $d(AB) + d(BC) = d(AC)$; veamos qué pasa con esta propiedad:

Si $p > q > r$, entonces:

$$d(k^p, k^q) = \frac{k^p}{k^q} = k^{p-q} \quad y \quad d(k^q, k^r) = \frac{k^q}{k^r} = k^{q-r}$$

pero

$$d(k^p, k^r) = \frac{k^p}{k^r}$$

claramente la distancia así definida no es aditiva para puntos colineales, pues:

$$k^{p-q} + k^{q-r} \neq k^{p-r}$$

sin embargo se ve que:

$$k^{p-q} \cdot k^{q-r} = k^{p-r}$$

Notemos que los exponentes sí son aditivos, ésto sugiere que si queremos que la distancia sea aditiva, entonces tomemos el logaritmo base k del cociente entre dos potencias de k, para así sólo quedarnos con los exponentes. Tendremos que tomar el valor absoluto para que se cumpla que $d(k^p, k^q) = d(k^q, k^p)$.

Si en general definimos la distancia para puntos sobre ℓ como el valor absoluto del logaritmo del cociente tenemos:

$$d(k^p, k^q) = |\log_k(k^p/k^q)| = |\log_k(k^p) - \log_k(k^q)| = |p - q|$$

cumple que la distancia entre potencias consecutivas de k es siempre la misma y además es exactamente 1 y también cumple las tres propiedades de distancia; como estamos trabajando con puntos colineales, no podemos verificar la desigualdad del triángulo para puntos no colineales.

Para cualesquiera dos puntos P y Q sobre ℓ definimos la distancia:

$$d(P, Q) = |\log_k(P/Q)| = |\log_k(P) - \log_k(Q)|$$

puesto que a P lo podemos expresar como $k^{\log_k(P)}$.

La distancia que acabamos de definir cumple las propiedades de distancia para cualquier k; tomando el logaritmo base k la distancia entre el 1 y k es 1.

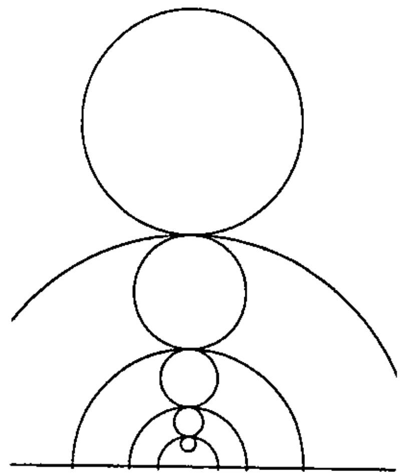
Dado que el logaritmo natural (base e) es el más común, es conveniente tomar $k = e$, entonces la distancia hiperbólica sobre una recta vertical es:

$$d(P, Q) = |\ln(P/Q)| \quad \text{ó} \quad |\ln(P) - \ln(Q)|$$

Observemos que la distancia de cualquier punto a la línea H es infinita: Recordemos que $d(P, Q) = |\ln(P/Q)|$ si hacemos tender Q a 0. Así tenemos que:

$$\lim_{Q \to 0} \ln(P/Q) = \infty$$

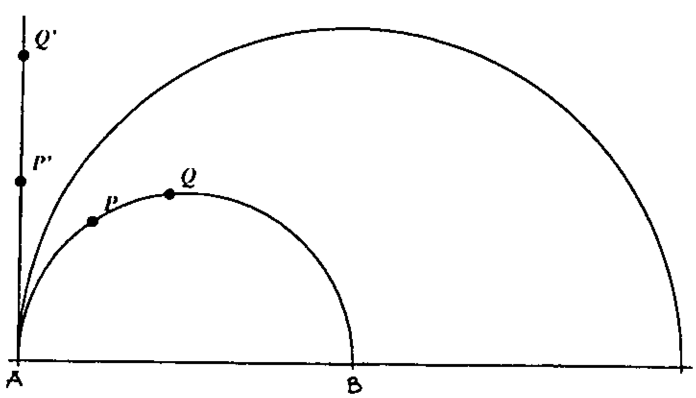
Geométricamente construimos la métrica hiperbólica invirtiendo una circunferencia respecto a varias circunferencias ortogonales a H y bajo la hipótesis de que la inversión preserva distancias, si repetimos éste proceso hacia abajo, es decir para acercarnos a la línea H, cada vez nos acercamos más "lentamente" a H. Podríamos repetir el procedimiento de inversión una infinidad de veces sin llegar a H.



2.1.2 Distancia entre dos puntos cualesquiera en H^2

Una vez habiendo definido la distancia para puntos sobre una recta vertical, estamos en condiciones de generalizar esta distancia para cualesquiera dos puntos en H^2.

Tomamos dos puntos P y Q sobre el plano superior definido por H: Trazamos la circunferencia C ortogonal a H que pasa por P y Q y sean A y B los puntos de intersección de esta circunferencia con H; invertimos esta circunferencia respecto a otra circunferencia con centro en B que pase por A. La imagen de la circunferencia C es una recta ortogonal a H que pasa por A; y la imagen de P y Q son dos puntos P' y Q' sobre esa recta; la distancia entre P y Q debe ser la misma que la distancia entre P' y Q' puesto que son inversos respecto a una circunferencia ortogonal a H y usando la distancia definida en la sección anterior podemos medir su distancia, puesto que están en una recta vertical, como: $d(PQ) = d(P'Q') = |\ln(P'/Q')|$



Verificaremos que esta definición es efectivamente una distancia, ya que cumple las tres propiedades siguientes:

1. $d(PQ) \geqslant 0$ y $d(PQ) = 0 \iff P = Q$

2. $d(PQ) = d(QP)$

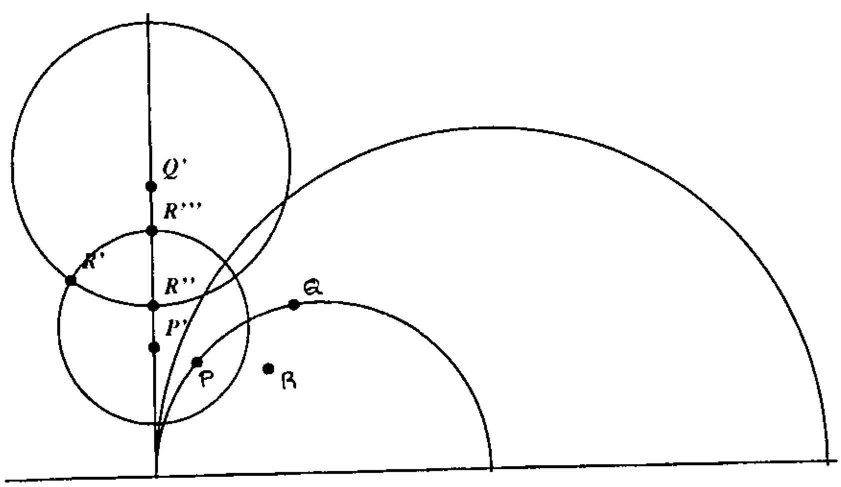
3. $d(PQ) \leq d(PR) + d(RQ)$

Es fácil verificar que la propiedad 1 se cumple: La distancia siempre es mayor que cero puesto que la definimos con valor absoluto.

Si $P = Q$, tenemos que $P' = Q'$ y por lo tanto $|\ln(P') - \ln(Q')| = 0$ con lo que $d(PP) = d(PQ) = 0$. Ahora bien, si tenemos que $d(PQ) = 0$, también $d(P'Q') = 0$, esto implica que $|\ln(P') - \ln(Q')| = 0$, es decir que $\ln(P') = \ln(Q')$ y por lo tanto $P' = Q'$ y $P = Q$.

La propiedad 2 se cumple ya que: $d(PQ) = d(P'Q') = |\ln(P') - \ln(Q')| = |\ln(Q') - \ln(P')| = d(Q'P') = d(QP)$.

Finalmente para demostrar la desigualdad del triángulo, tomamos cualquier otro punto R en el plano (en este caso tomamos a R dentro de la circunferencia C) y lo invertimos respecto a la misma circunferencia con centro en B; su imagen es el punto R' que claramente no está sobre la recta $P'Q'$. Para calcular la distancia de P' a R' y de Q' a R', tomamos la circunferencia con centro hiperbólico en Q' que pase por R' y el punto donde interseque a la recta será R'', como R' y R'' están en una circunferencia con centro en Q' sabemos que sus distancias al centro son iguales; análogamente trazamos la circunferencia con centro hiperbólico en P' que pase por R' y R''' es el punto de intersección de la circunferencia con la recta.



Tenemos que los puntos anteriores cumplen:

$$d(PR) + d(RQ) = d(P'R') + d(R'Q') = d(P'R''') + d(R''Q')$$

pero

$$d(P'R''') + d(R''Q') = d(P'R'') + d(R''R''') + d(R''R''') + d(R'''Q')$$

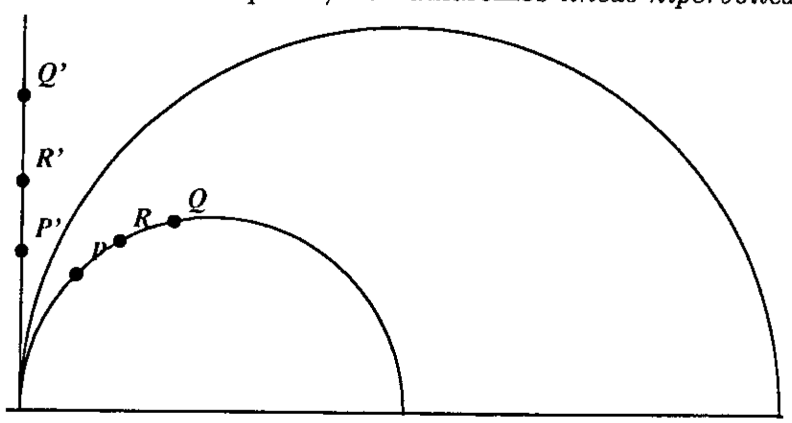
reacomodando los términos tenemos:

$$d(P'R'') + d(R''R''') + d(R'''Q') + d(R''R''') = d(P'Q') + d(R''R''')$$

por lo tanto se cumple:

$$d(PR) + d(RQ) = d(P'Q') + d(R''R''') \geq d(P'Q') = d(PQ)$$

Nos hace falta saber cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad del triángulo, para lo cual tomamos R sobre la circunferencia C y su imagen R' está sobre la recta $P'Q'$, notemos que $d(PQ) = d(PR) + d(RQ)$; es decir se cumple la igualdad en la desigualdad del triángulo, por lo tanto la circunferencia ortogonal a H que pasa por P y Q es el camino más corto entre los dos puntos P y Q. Por lo cual en la Geometría Hiperbólica se considera a las circunferencias ortogonales a H como rectas para el modelo del semiplano, les llamaremos *líneas hiperbólicas.*

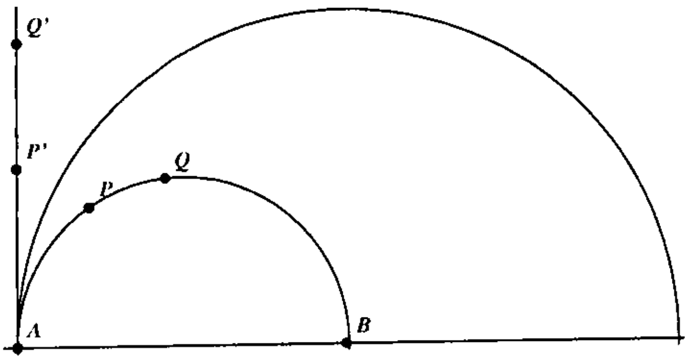


2.1.3 Distancia hiperbólica

Hemos definido la distancia para cualesquiera dos puntos P y Q en H^2 pero a pesar de que la distancia está bien definida, el procedimiento para medir es complicado, pues si queremos saber cuál es la distancia entre dos puntos, es necesario invertirlos primero en dos puntos P' y Q' sobre una recta vertical y en este caso ya podemos calcular la distancia hiperbólica a partir de las distancias euclidianas de P' y Q' a la recta H.

Ahora definiremos la distancia de una forma en la cual podamos calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos en términos de distancias euclidianas, sin necesidad de invertir.

Sean P y Q dos puntos en H^2 y sean A y B los puntos de intersección de la circunferencia $\mathcal{C}$ ortogonal a H que pasa por P y Q con la línea H, como en la sección anterior invertimos a esta circunferencia respecto a otra circunferencia con centro en B y que pase por A; la imagen de $\mathcal{C}$ es la recta ℓ; y la imagen de los puntos P y Q son P' y Q', la imagen de A es A y la imagen de B es el punto al infinito.



Como vimos en el capítulo anterior la razón cruzada se preserva bajo inversión, por lo tanto:

$$\{ABPQ\} = \{A\infty P'Q'\} = \frac{AP'}{P'\infty}\bigg/\frac{AQ'}{Q'\infty} = \frac{P'}{Q'}$$

Anteriormente definimos la distancia de P' a Q' como $|\ln(P'/Q')|$; pero acabamos de demostrar que $P'/Q' = \{ABPQ\}$, por lo tanto podemos definir a la distancia hiperbólica como: $d(PQ) = |\ln(\{ABPQ\})|$ donde $\{ABPQ\}$ es la razón cruzada de cuatro puntos cíclicos además P y Q son los puntos en el plano, y A y B son puntos sobre H. Definimos la razón cruzada de puntos cíclicos en el capítulo anterior y demostramos que se puede obtener a partir de las longitudes de las cuerdas; de modo que ya podemos calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos mediante las medidas euclidianas de las cuerdas AP, PB, AQ y QB. Es decir la distancia hiperbólica entre P y Q es:

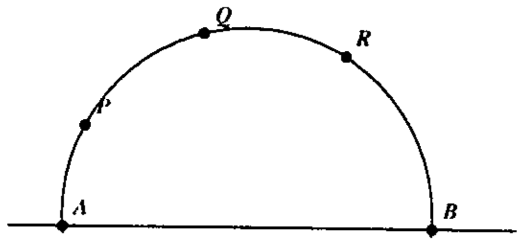
$$\mathbf{d(PQ)} = \left|\ln\left(\frac{\mathbf{AP/PB}}{\mathbf{AQ/QB}}\right)\right|$$

Debido a que hemos logrado expresar a la distancia hiperbólica en términos de la

~~razón cruzada, también podemos retomar todas las propiedades que explicamos en~~ el capítulo pasado y tener resultados importantes como son:

1. Sean P, Q y R puntos en H^2 y sean A y B los extremos de la línea hiperbólica que los contiene, como muestra la figura, una de las propiedades que cumple la razón cruzada y que podemos aplicar para puntos en el espacio hiperbólico es:

$$\{ABPQ\} \cdot \{ABQR\} = \{ABPR\}$$
$$\ln(\{ABPQ\} \cdot \{ABQR\}) = \ln(\{ABPR\})$$
$$\ln(\{ABPQ\}) + \ln(\{ABQR\}) = \ln(\{ABPR\})$$

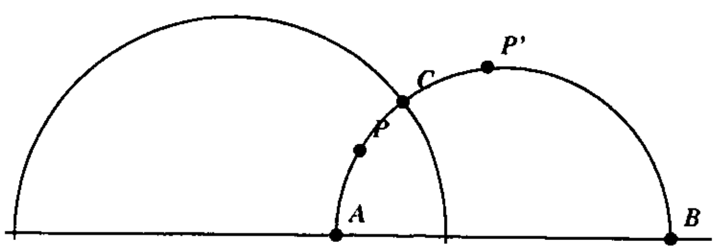


Con este cálculo comprobamos que la distancia definida con la razón cruzada, es aditiva si los puntos son colineales.

2. Tomemos dos líneas hiperbólicas que se intersecan en un punto C, es decir dos semicircunferencias con centro sobre H, y sean los puntos A, B y P como se ilustra en la figura. Invertimos el punto P respecto a la línea hiperbólica que no pasa por AB, su imagen es el punto P'. Otra de las propiedades de la razón cruzada que heredamos para puntos hiperbólicos es que la razón cruzada se preserva bajo inversión, por lo tanto:

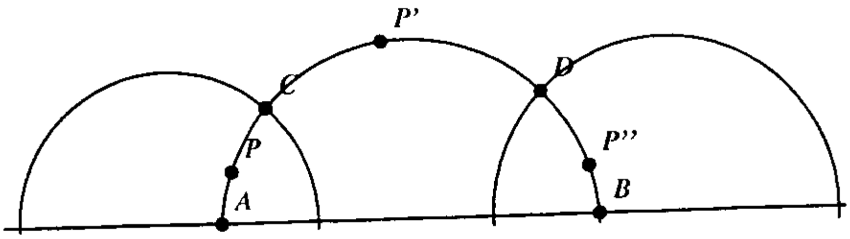
$$d(PC) = \ln(\{ABPC\}) = \ln(\{ABCP'\}) = d(CP')$$
$$\ln(\{ABPC\}^2) = \ln(\{ABPP'\})$$
$$2\ln(\{ABPC\}) = \ln(\{ABPP'\})$$
$$2d(PC) = d(PP')$$

Lo que demuestra que C es el punto medio de el segmento PP'



3. Ahora tomemos dos líneas hiperbólicas ajenas y la ortogonal común a ambas líneas; sean A, P, C y D puntos sobre la ortogonal común como se muestra en la figura.

Invirtamos el punto P respecto a la línea que pasa por C, siendo P' su imagen, ahora invertimos P' respecto a la línea que pasa por D y obtenemos P''



Con las dos propiedades de razón cruzada que acabamos de comprobar que se siguen cumpliendo en el modelo del plano hiperbólico, tenemos que:

$$d(PP'') = \ln\{ABPC\} + \ln\{ABCP'\} + \ln\{ABP'D\} + \ln\{ABDP''\}$$

como C es punto medio de PP' y D es punto medio de $P'P''$, podemos escribir la ecuación anterior como sigue:

$$\begin{aligned} d(PP') &= \ln\{ABCP'\} + \ln\{ABP''D\} + \ln\{ABCP'\} + \ln\{ABP''D\} \\ &= d(CD) + d(CD) \end{aligned}$$

por lo tanto:

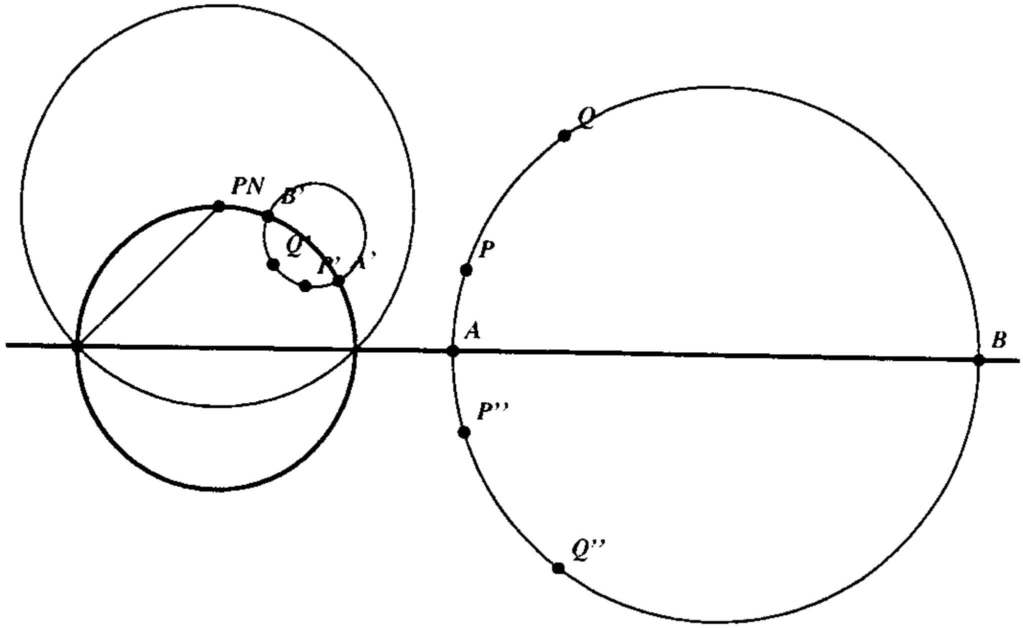
$$d(PP'') = 2d(CD)$$

Que es uno de los resultados importantes que mostramos en el capítulo anterior para circunferencias coaxiales.

2.1.4 Distancia en Δ

Al principio de este capítulo explicamos cómo usando sólo la inversión podemos pasar de un modelo a otro, es decir como podemos pasar del modelo de la Geometría hiperbólica del disco Δ al modelo del semiplano superior H^2 y viceversa. Definimos una distancia, y para ésto usamos el modelo H^2. Esta definición de distancia es independiente del modelo en el que estemos trabajando; verificaremos que efectivamente puedo mandar líneas hiperbólicas en el modelo H^2 en líneas hiperbólicas en el modelo Δ y que se seguirá cumpliendo la definición de distancia tanto en un modelo como en el otro.

Primero tenemos que invertir a la línea que pasa por los puntos P y Q en el plano superior, respecto a la línea H, pues tenemos que seguir el mismo procedimiento que explicamos al principio de este capítulo; además como nos interesa preservar la orientación, sabemos que debemos invertir un número par de veces para que ésto ocurra. La imagen de la línea es la que está en el semiplano inferior y que pasa por los puntos P'' y Q'' que son los inversos de P y Q respectivamente. Ahora debemos invertir a la línea $P''Q''$ respecto a la circunferencia con centro en el polo norte de Δ, invirtiéndose en la línea $P'Q'$ dentro de Δ.



Si en el modelo del semiplano H^2 sabemos que los puntos A, B, P y Q cumplen que: $d(PQ) = |\ln\{ABPQ\}|$, entonces los puntos dentro del modelo del disco también cumplen: $d(P'Q') = |\ln\{A'B'P'Q'\}|$; ya que la inversión preserva la razón cruzada y por lo tanto se sigue cumpliendo la definición de distancia en cualquier modelo.

Es por esto que de ahora en adelante trabajaremos tanto en Δ como en H^2, usaremos un modelo indistintamente del otro y sólo por la facilidad para ilustrar los resultados que expondremos usaremos algún modelo en particular.

Capítulo 3

El plano hiperbólico

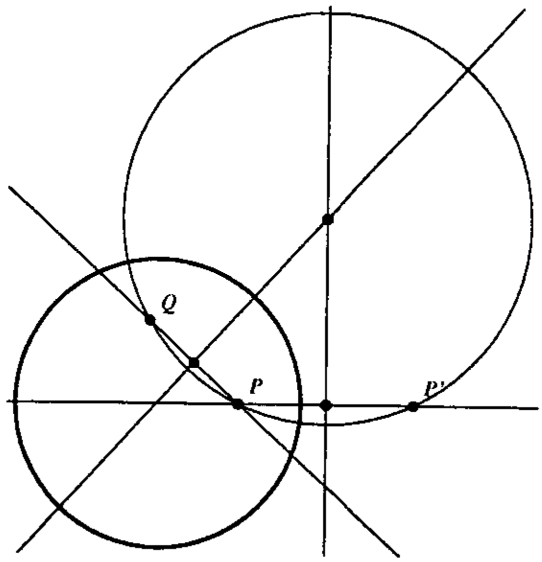
En este capítulo trataremos de habituarnos a trabajar en esta rara Geometría, para lo cual primero necesitamos saber hacer ciertas construcciones con regla y compás euclidianos que utilizaremos más adelante; posteriormente mostraremos algunos resultados que para nuestros ojos euclidianos pudieran parecer extraños.

3.1 Construcciones con regla y compás

En esta sección explicaremos como se hacen algunas construcciones para la Geometría Hiperbólica con regla y compás euclidianos, utilizando algunas de las construcciones que ya sabemos hacer en la Geometría Euclidiana. No significa que las construcciones que sabemos hacer en el plano euclidiano no funcionen en el hiperbólico, si tuviéramos herramientas hiperbólicas, es decir, una regla hiperbólica y un compás hiperbólico, podríamos reproducir nuestras construcciones euclidianas y funcionarían perfectamente; pero como no contamos con estas herramientas, debemos usar las euclidianas para hacer construcciones hiperbólicas. Las construcciones las haremos en el modelo del disco para facilitar su ilustración.

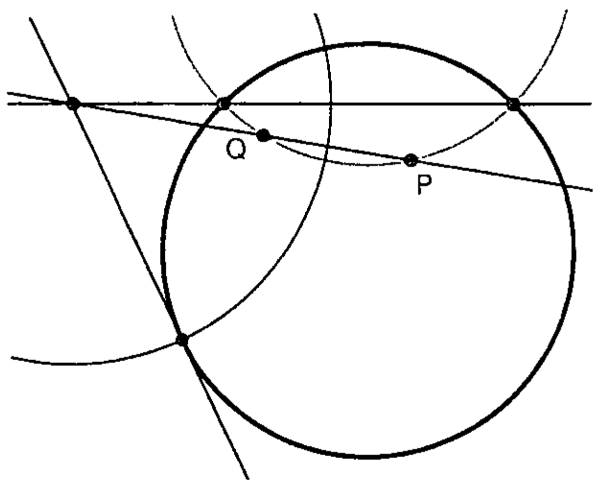
1 Dados dos puntos trazar la línea hiperbólica que los une.

Dados dos puntos P y Q en el modelo del disco, encontramos P' inverso de P respecto a Δ, y trazamos la mediatriz euclidiana del segmento PP' y la mediatriz euclidiana de PQ. El punto de intersección de ambas mediatrices será el centro de la circunferencia ortogonal a Δ, que es la línea hiperbólica que pasa por P y Q.



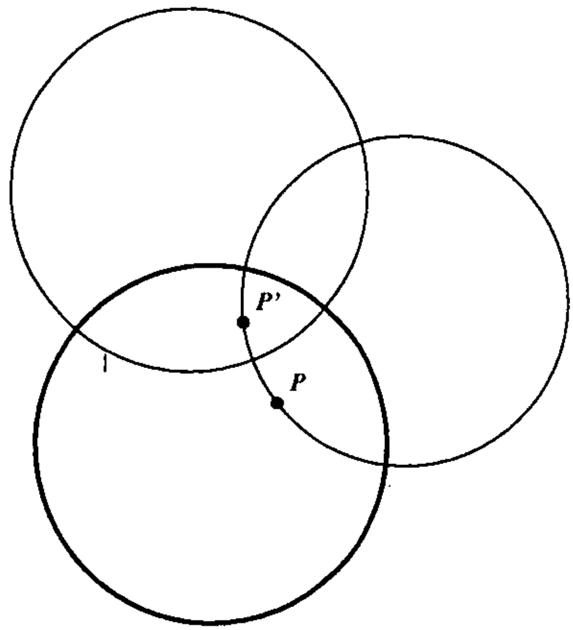
2 Dados dos puntos trazar la mediatriz hiperbólica.

Dados dos puntos P y Q en el modelo del disco, trazamos la recta hiperbólica que los une; como es una circunferencia ortogonal a Δ que se intersecan en dos puntos en la frontera, podemos trazar el eje radical de ambas circunferencias. En la intersección del eje radical, con la recta euclidiana que une a P y Q, está el centro de una circunferencia, para encontrar el radio, desde el centro trazo la tangente a Δ, el radio será la distancia del centro al punto de tangencia. Si trazamos la circunferencia con ese centro y ese radio, obtenemos la mediatriz hiperbólica de la línea hiperbólica que pasa por P y Q. Es mediatriz porque P y Q son inversos respecto a ella.



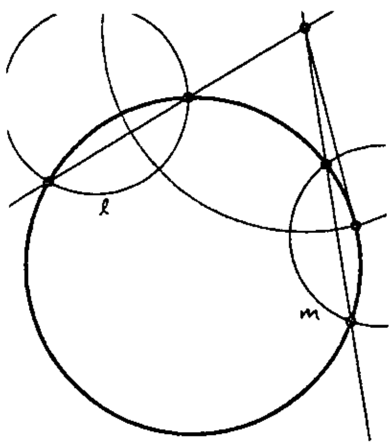
3 Dada una línea hiperbólica ℓ y un punto P fuera de ella trazar la perpendicular a ℓ que pase por P.

Como la recta ℓ es una circunferencia ortogonal a Δ encontramos P' inverso de P respecto a esta circunferencia; y dados dos puntos P y P', trazamos la línea hiperbólica que los une y habremos trazado la línea hiperbólica perpendicular a ℓ que pasa por P.



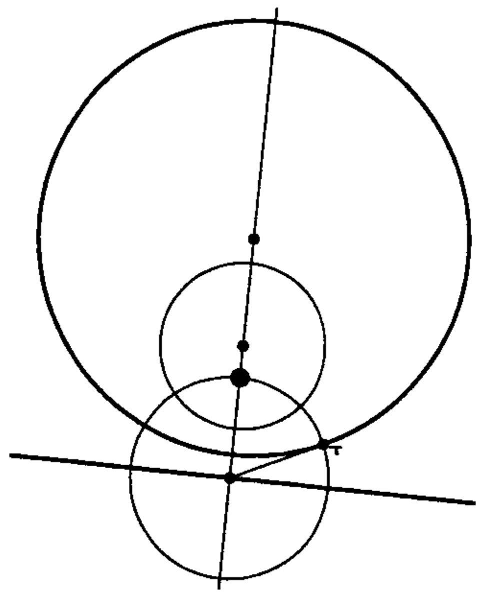
4 Dadas dos rectas hiperbólicas paralelas trazar la perpendicular común.

Supongamos que tenemos dos líneas hiperbólicas paralelas en el modelo del disco como muestra la figura, trazamos las rectas euclidianas que unen a los puntos de las paralelas que están sobre la frontera de Δ donde se intersequen dichas rectas, estará el centro de la circunferencia que será la perpendicular común; desde el centro trazamos la tangente a Δ y el segmento del centro al punto de tangencia es el radio. Trazamos la circunferencia con dicho centro y dicho radio, y esa es la línea hiperbólica perpendicular a ambas paralelas.



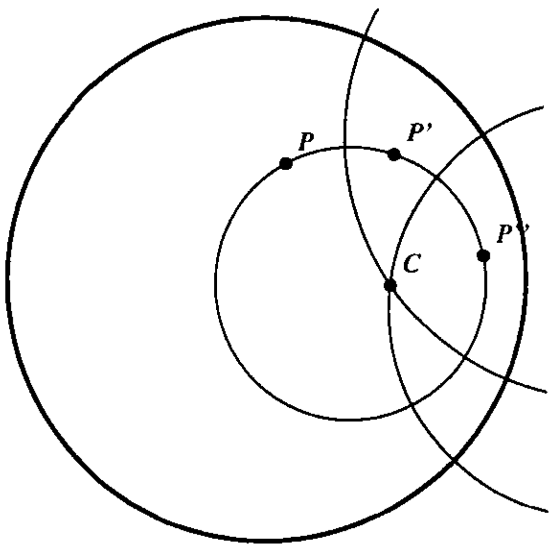
5 ~~Dada una circunferencia encontrar su centro hiperbólico.~~

Tomamos una circunferencia totalmente contenida en el interior de Δ. esta circunferencia y Δ forman parte de una familia de circunferencias coaxiales que no se intersecan, por lo que podemos encontrar su eje radical. Además los centros euclidianos y los centros hiperbólicos de la circunferencia en el interior de Δ y de Δ, están sobre la misma recta euclidiana. Con centro en el punto de intersección de la recta de los centros y el eje radical de las circunferencias y con radio el segmento definido por este punto y el punto de tangencia a Δ desde el centro, trazamos una circunferencia y donde corte a la recta de los centros, estará el centro hiperbólico de la circunferencia dada. La línea que acabamos de construir es ortogonal a la circunferencia dada y por lo tanto pasa por el centro.



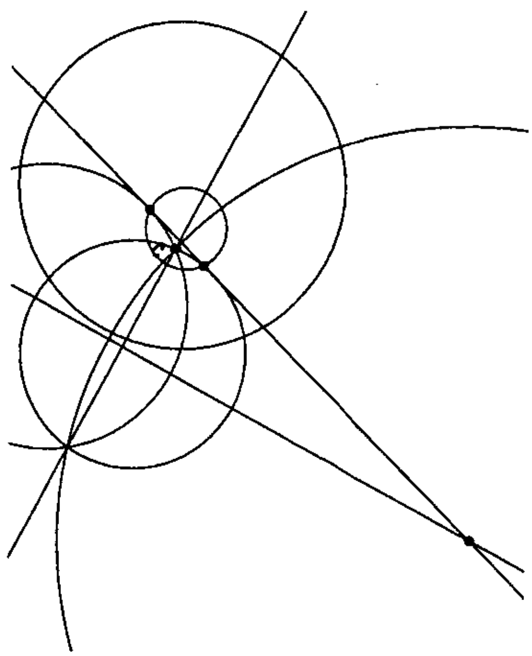
6 Dados dos puntos C y P construir la circunferencia con centro hiperbólico en C y que pase por P.

Trazamos una línea hiperbólica cualquiera que pase por C y encontramos el inverso P' de P resecto a esa línea, trazamos cualquier otra línea hiperbólica que pase por C, y encontramos P'' el inverso de P respecto a esa otra línea. Las distancias hiperbólicas CP, CP' y CP'' son iguales; por lo tanto si trazamos la única circunferencia euclidiana que pasa por P, P' y P'', ésta tendrá centro hiperbólico en C.



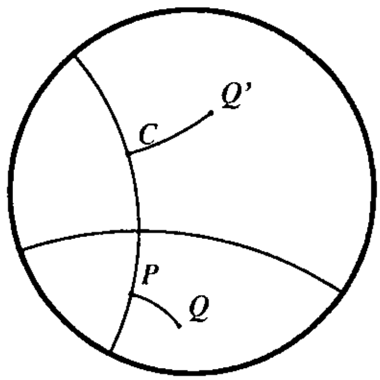
7 Dadas dos rectas hiperbólicas que se intersecan, encontrar su bisectriz hiperbólica.

Supongamos que las rectas se intersecan en un punto C dentro de Δ; estas rectas hiperbólicas son dos circunferencias de una familia de circunferencias coaxiales que se intersecan, por lo que podemos trazar el eje radical; si con centro en el eje radical trazamos dos circunferencias ortogonales a las rectas hiperbólicas, donde una de ellas sea el eje radical de la familia ortogonal. Unimos los puntos de intersección de la circunferencia ortogonal con las líneas hiperbólicas (como se muestra en la figura), la intersección de esta línea con el eje radical de la familia $\mathcal{G}$ nos determina el centro de la circunferencia que será la bisectriz; trazamos la circunferencia euclidiana con ese centro y que pase por el punto C, y esa circunferencia será la bisectriz hiperbólica de las dos líneas hiperbólicas que se intersecan en el punto C. Es bisectriz porque los puntos de intersección de g con las líneas dadas son inversos respecto a la circunferencia que construimos, y por lo tanto el ángulo entre la circunferencia y ambas líneas hiperbólicas es el mismo.



8 Dado un punto C y y el segmento PQ, trazar la circunferencia con centro C y radio PQ.

Trazamos la línea hiperbólica que pase por C y por P, trazamos la mediatriz hiperbólica de CP; como esta mediatriz es una circunferencia, invertimos a Q respecto a la mediatriz y obtenemos Q', si invertimos a P se invierte en C. Trazamos la circunferencia con centro en C y que pase por Q', y tendrá radio PQ.



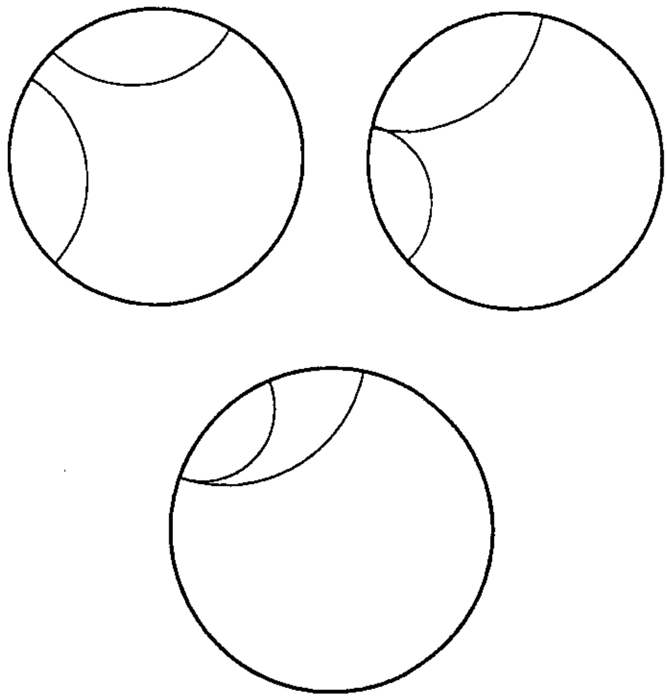
3.2 Algunas propiedades del plano hiperbólico

Es importante notar que en general parece que la Geometría Hiperbólica está fuera de la realidad, pero no es así, lo que pasa es que nuestra visión es muy limitada y no porque seamos miopes o usemos lentes; lo que queremos decir es que simplemente somos *humanos euclidianos* y por lo tanto tenemos ojos euclidianos y lo hiperbólico lo vemos distorsionado; y es ésto lo que vamos a hacer notar en esta sección.

Cuando definimos la métrica a base de inversión, demostramos que la distancia de cualquier punto a la línea H o a la frontera de Δ es infinita; sin embargo pudimos dibujar tanto la frontera de Δ como a H aún cuando están en el infinito. En cambio en el modelo de la Geometría Euclidiana eso no lo podemos hacer; hay que tener cuidado porque sólo estamos trabajando en modelos de la Geometría Hiperbólica.

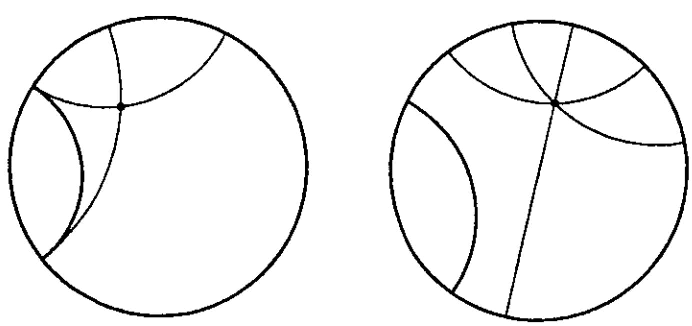
Notemos que conforme algún objeto se acerca a la frontera, para nuestra visión euclidiana parecerá que se hace pequeño, sin embargo con la métrica hiperbólica el objeto mide lo mismo en cualquier parte del modelo.

En la escuela primaria nos enseñaron que las líneas paralelas son aquellas que no se cortan; años posteriores nos dijeron que las paralelas son aquellas líneas que se cortan en el punto al infinito; la pregunta obligada es: ¿Quién mintió? En este trabajo no es nuestro interés contestar esa pregunta; lo importante es hacer notar que en nuestros modelos hiperbólicos tenemos a la línea al infinito a la mano (recordemos que esta línea no es parte de nuestro modelo) y por lo tanto podemos dibujar a nuestras líneas hiperbólicas paralelas como aquellas que no se cortan o como las que se cortan en el infinito.



Todas las líneas hiperbólicas de las figuras anteriores por definición son paralelas. Lo que nos lleva a distinguir entre las que se cortan que llamaremos *estrictamente paralelas* y las que no se cortan que llamaremos *ultraparalelas.*

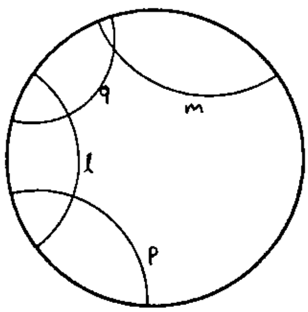
La propiedad de transitividad de las paralelas en la Geometría Euclidiana, no se cumple en la Hiperbólica, ya que dos líneas paralelas a una tercera se pueden cortar.



Además es claro que por el punto P fuera de una línea pasan una infinidad de paralelas a esa línea dada. Dos estrictamente paralelas que se muestran en la figura de la izquierda y una infinidad de líneas ultraparalelas que pasan por ese punto, tres de las cuales se ilustran en la figura.

Como ya mencionamos hay distintos tipos de paralelas, las ultraparalelas y las estrictamente paralelas; recordando que en la Geometría Euclidiana sólo hay una clase de líneas paralelas y por lo tanto toda perpendicular a una línea lo es también a todas sus paralelas, la pregunta natural es ¿Seguirá siendo cierto ésto? Es decir dadas dos paralelas ¿toda perpendicular a la primera será perpendicular a la segunda? ¡claramente no!

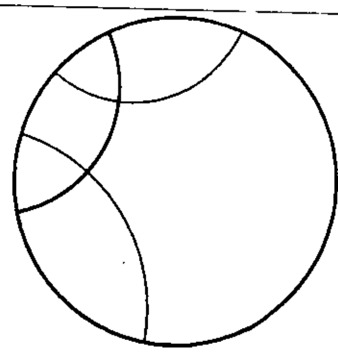
En la figura, ℓ y m son paralelas, p es ortogonal a ℓ y no corta a m, q también es ortogonal a ℓ y claramente no es ortogonal a m.



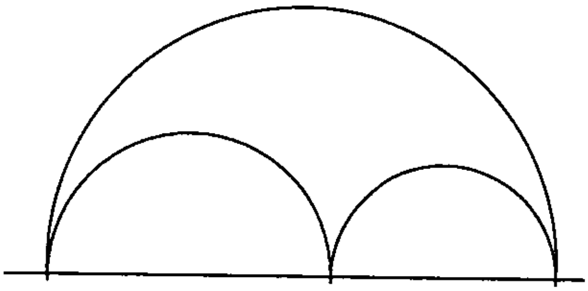
Entonces ¿tendrán las líneas paralelas hiperbólicas perpendicular común?

Como en esta Geometría las líneas son las circunferencias ortogonales a la frontera del modelo, si tenemos dos líneas hiperbólicas paralelas, digamos de las que se cortan en la frontera, necesitaríamos construir una tercer circunferencia ortogonal a la frontera (para que sea línea hiperbólica), y que a su vez sea ortogonal a ambas paralelas. Hacer esta construcción es imposible, porque como ℓ y m son tangentes cualquier circunferencia ortogonal a ellas, tiene que ser tangente a la frontera y por lo tanto no es línea hiperbólica; por lo que podemos concluir que las líneas estrictamente paralelas no tiene perpendicular común.

Cuando las líneas paralelas son ultraparalelas, siempre podemos construir una línea (una circunferencia ortogonal a la frontera) que sea ortogonal a ambas líneas paralelas. Esta línea es única porque en la familia coaxial ortogonal a ℓ y m sólo existe una circunferencia ortogonal a la frontera.



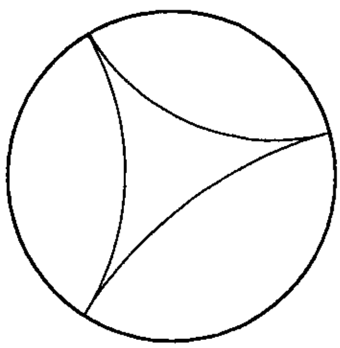
Si tomamos el modelo del semiplano H^2, podemos construir tres líneas tales que no son concurrentes, y que se intersecan en la frontera dos a dos como se ilustra en la figura.



Estas tres líneas forman un triángulo, sólo que sus vértices están en la línea al infinito, es decir en la frontera. A un triángulo cuyos vértices están fuera del modelo le llamaremos *triángulo ideal*

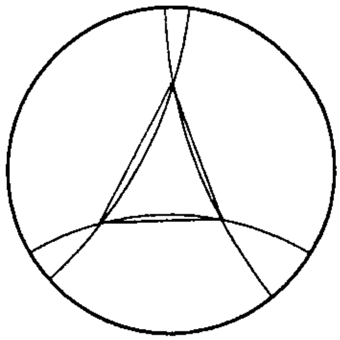
Si quisiéramos saber cúal es la suma de los ángulos internos de este triángulo ideal, puesto que las líneas paralelas forman ángulo cero entre ellas, entonces la suma de los ángulos de el triángulo que dibujamos es cero.

Veamos que lo mismo pasa en el modelo del disco



Éste también es un triángulo ideal cuya medida de ángulos interiores es cero, pues las tres líneas que lo forman son paralelas.

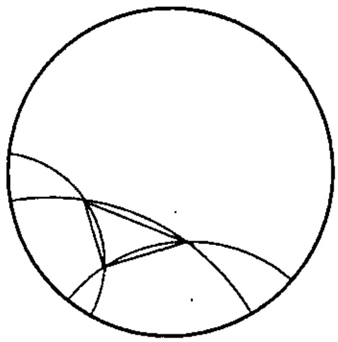
Acabamos de mostrar un triángulo ideal cuya suma de ángulos internos es cero, por lo tanto no se cumple la propiedad euclidiana de los triángulos cuya suma de ángulos interiores es siempre 180°. ¿Cómo será en general la suma de los ángulos de los triángulos hiperbólicos? Veamos que pasa con un triángulo $\triangle ABC$ que contiene al centro de Δ:



Uniendo los vértices con rectas euclidianas se ve que cada ángulo entre las líneas hiperbólicas es menor que su correspondiente con rectas euclidianas y por lo tanto la suma de sus ángulos es menor que 180°.

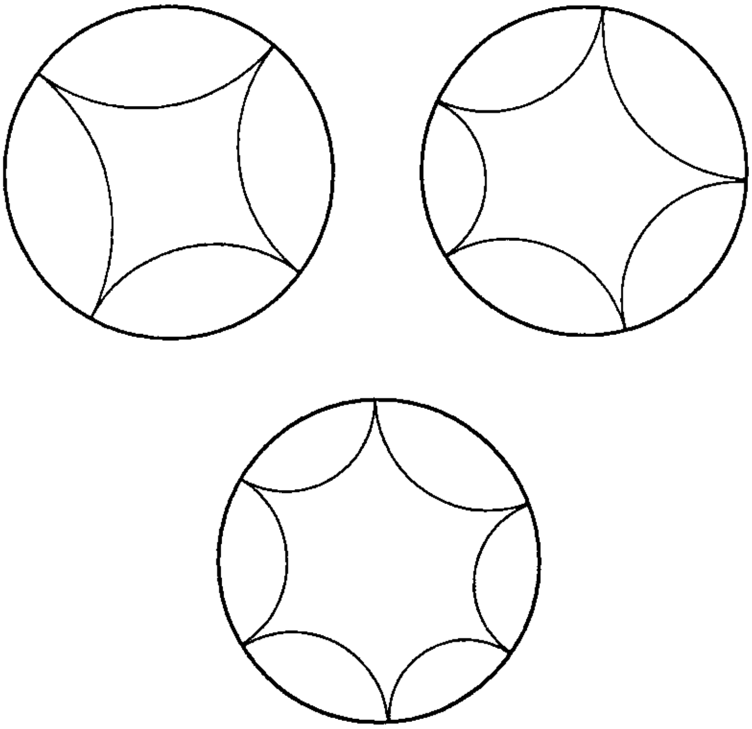
En general podemos decir que la suma de ángulos de un triángulo hiperbólico es menor que 180°.

Veamos que ocurre si el centro de Δ no está dentro del triángulo:

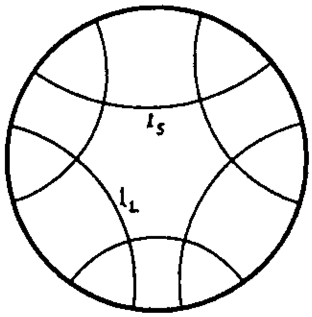


En este caso no es inmediato comparar los ángulos del triángulo hiperbólico con los del euclidiano, pero mas adelante demostraremos (en el capítulo de isometrías) que siempre podemos construir un triángulo congruente que contenga al centro del disco.

Dado que por un punto fuera de una línea dada pasan una infinidad de paralelas, podemos construir polígonos de tantos lados como queramos en los cuales todos sus lados son paralelos y todos sus vértices están en la frontera; llamaremos a estos polígonos *polígonos ideales*. Ilustramos polígonos de 4, 5 y 6 lados.



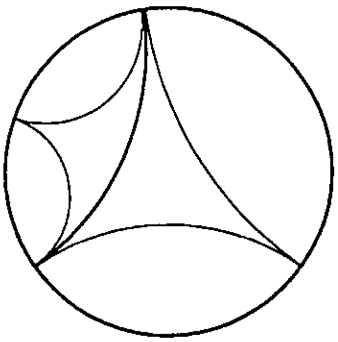
Un polígono con todos sus ángulos rectos es un rectángulo; los rectángulos euclidianos siempre tienen cuatro lados; construiremos un rectángulo hiperbólico de seis lados.



Trazamos una línea ℓ_1, trazamos ℓ_2 ortogonal a ℓ_1, ℓ_3 ortogonal a ℓ_2, ℓ_4 ortogonal a ℓ_3 y ℓ_5 ortogonal a ℓ_4; como ℓ_1 y ℓ_5 son ultraparalelas tienen una perpendicular común ℓ_6. De la misma forma podemos construir rectángulos del número de lados que queramos, siempre y cuando sean más de cuatro; porque no es posible construir rectángulos de cuatro lados.

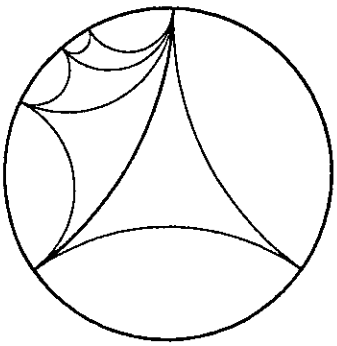
Supongamos que existiera un rectángulo de cuatro lados, entonces la suma de sus ángulos internos sería 360°; una de sus diagonales lo dividiría en dos triángulos, la suma de los ángulos internos de los dos es 360° y como la suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico es menor que 180°, entonces es imposible que la suma de los ángulos internos de los dos triángulos sea 360°.

Nuestra primera observación como seres euclidianos fue el que aparentemente los objetos se van haciendo chiquitos conforme se acercan a la frontera del modelo, retomando esta idea y con la propiedad de que la inversión preserva distancia, que explicamos en el segundo capítulo, veamos qué sucede si invertimos un triángulo con vértices en el infinito, es decir tomemos una línea en la cual vamos a invertir a las dos líneas restantes.

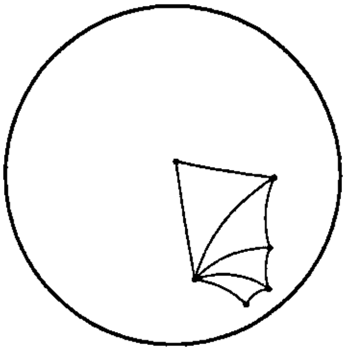


El triángulo original y el triángulo inverso, son congruentes, es decir cada una de las líneas que los conforman miden lo mismo; y aunque el triángulo inverso parece ser más pequeño que el original, para un ser con vista hiperbólica no lo es.

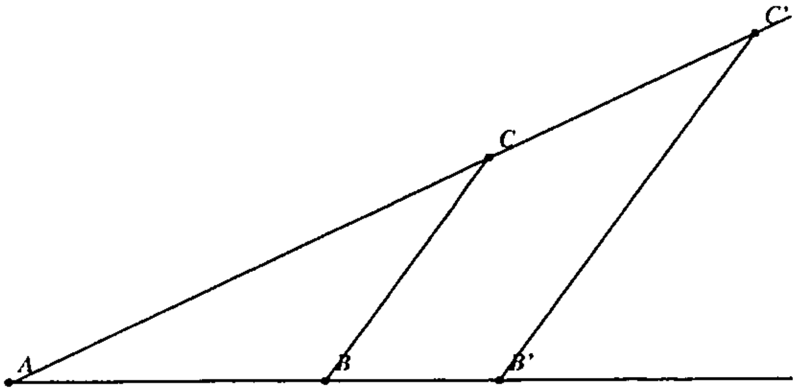
Si repetimos el proceso de inversión, cada vez los triángulos son más pequeños para nuestra vista euclidiana, pero podemos asegurar que hiperbólicamente son iguales.



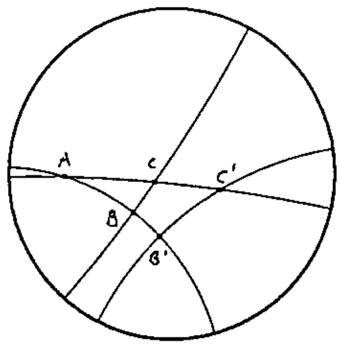
El proceso anterior lo aplicamos ahora a un triángulo con vértices en el interior de Δ y también observamos como al acercarse a la frontera desde nuestra visión euclidiana, los triángulos se hacen pequeños pero hiperbólicamente son congruentes.



Otra propiedad extraña para un ser euclidiano en un mundo hiperbólico es que si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales, no necesariamente son semejantes. Recordemos como construimos un triángulo euclidiano semejante a otro: Sea ABC un triángulo, prolongamos los lados AB y AC, copiamos el ángulo $\angle ABC$ a un punto B' sobre AB determinando el punto C'; los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ son semejantes, en particular el ángulo $\angle ACB$ es igual al ángulo $\angle AC'B'$.



Hagamos la misma construcción para el triángulo hiperbólico ABC



Es claro que los ángulos $\angle ACB$ y $\angle AC'B'$ no son iguales y por lo tanto los triángulos no son semejantes.

Capítulo 4

Isometrías

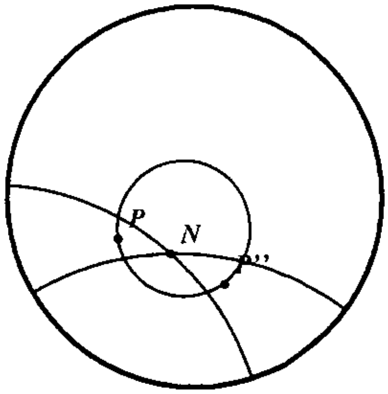
Por la forma en que construimos la métrica hiperbólica sabemos que las reflexiones (inversiones) en las líneas hiperbólicas son isometrías, pero una reflexión cambia el sentido de los ángulos; en esta sección vamos a estudiar a las isometrías que preservan el sentido de los ángulos, y éstas se llaman *isometrías conformes.*

Como una reflexión cambia el sentido de los ángulos, la composición de dos reflexiones o de un número par de reflexiones preserva la orientación de los ángulos.

Analizaremos primero qué pasa al invertir en dos líneas hiperbólicas, en otras palabras dado un punto P en el plano hiperbólico, queremos saber cuál es su imagen al reflejarlo en dos líneas. Encontraremos esta imagen usando regla y compás y las construcciones del capítulo 3.

Tenemos tres casos cunado las líneas se intersecan, cuando son estrictamente paralelas y cuando las líneas son ultraparalelas.

CASO 1.



En este caso el punto N de intersección de las líneas ℓ y m es fijo. Si tomo cualquier punto P en Δ, siempre puedo encontrar una circunferencia g de la familia coaxial ortogonal a ℓ y m que pase por P; demostramos en el capítulo anterior que al invertir a P respecto a ℓ y m en este orden, la imagen permanece en g recorriendo dos veces el ángulo entre ℓ y m. Es decir tenemos una rotación de los puntos del disco alrededor del punto N. Si invertimos cambiando el orden, primero en m y luego en ℓ, la rotación es en el sentido inverso. Esta es llamada ***transformación elíptica.***

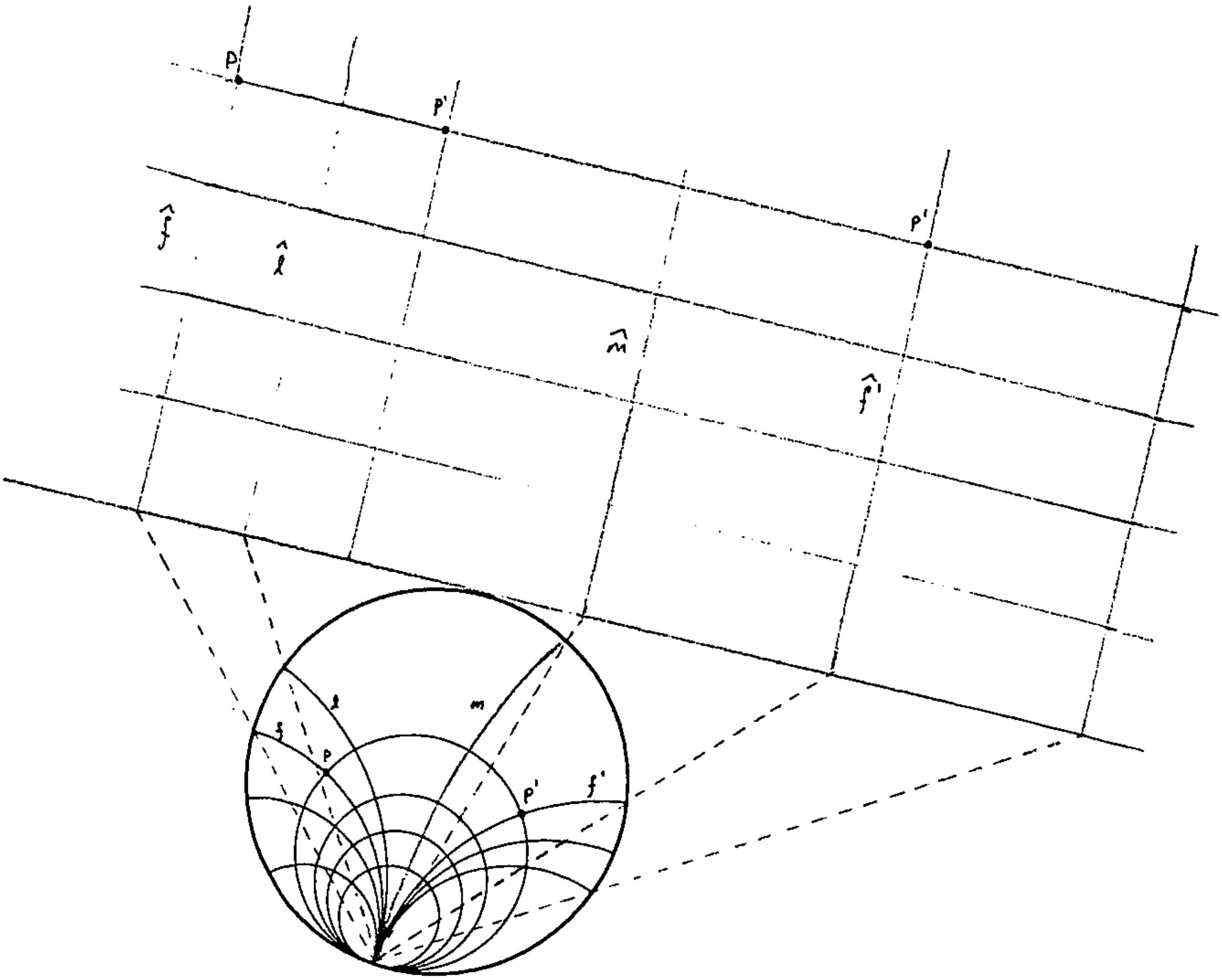
CASO 2. Sea N el punto en la frontera en el que se cortan ℓ y m, si invertimos a Δ respecto a una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en N y radio igual al diámetro de Δ; la frontera del disco se invierte en una recta H, N se invierte en el punto al infinito y las líneas de la familia $\mathcal{F}$ a la que pertenecen ℓ y m se invierten en la familia de rectas (euclidianas) ortogonales a H. La familia de circunferencias ortogonales $\mathcal{G}$ se invierte en la familia de rectas euclidianas paralelas a H.

Tomamos un punto P en Δ, P está en una circunferencia f de la familia $\mathcal{F}$ y en una circunferencia g de $\mathcal{G}$.

Al invertir en cualquier línea de la familia $\mathcal{F}$, la imagen P' de P debe permanecer en g.

Al invertir respecto a $\mathcal{C}$, f, ℓ y m se van a rectas $\hat{f}$, $\hat{\ell}$ y $\hat{m}$ ortogonales a H. Para determinar exactamente cuál es la imagen de estas líneas, basta ver a dónde van sus extremos distintos de N (como se muestra en la figura); reflejando $\hat{f}$ en $\hat{\ell}$ y $\hat{m}$ obtenemos otra recta $\hat{f}'$; al regresar al disco, ésta se invierte en f'. P' está en la intersección de esta línea con g.

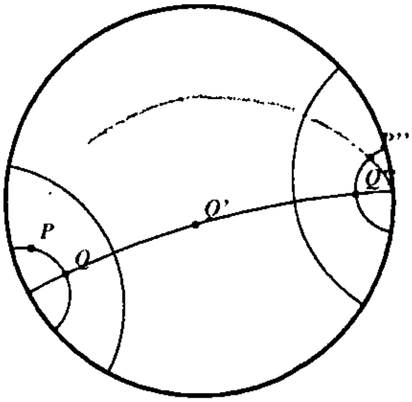
parabólica.



Aquí tenemos un único punto fijo N y que al igual que el caso límite de las familias de circunferencias coaxiales, es un punto silla. Esta es llamada *transformación parabólica.*

CASO 3. En este caso trazamos la perpendicular común a ℓ y m la cual interseca a la frontera en N y M, como vimos en la sección de circunferencias coaxiales, M es un punto atractor y N es un repulsor. Tomamos un punto P sobre la circunferencia ortogonal a ambas y lo invertimos respecto a ℓ y m respetando el orden de inversión, entonces $d(PP'') = 2d(CD)$ como demostramos en la sección 2.1.3.

Si el punto P es cualquier punto en Δ, P se invierte en un punto P'' ambos sobre la misma circunferencia f de la familia coaxial que pasa por N y M. Trazamos la línea ortogonal a la línea NM que pase por P, ésta determina un punto Q sobre NM; sabemos que le hace la transformación a Q puesto que está en la línea NM, sea Q'' la imagen de Q; trazando la ortogonal a NM que pase por Q'' y en la intersección de esta línea con f está P''.



f es una circunferencia euclidiana, la que usamos como línea auxiliar en la construcción anterior, pero desde el punto de vista hiperbólico, f no es una línea ni una circunferencia. (Transformación hiperbólica)

Todas las transformaciones que se pueden hacer componiendo dos reflexiones tienen estructura de grupo:

Si invertimos dos veces respecto a la misma línea obtenemos la identidad.

Dado que una inversión es su propia función inversa, si aplicamos la operación en el orden contrario, obtenemos la transformación inversa; es decir: $(f \circ g)^{-1} = g \circ f$.

La propiedad asociativa se hereda del hecho de que todas las funciones son asociativas.

Que la composición de las transformaciones sea cerrada, en este caso quiere decir:

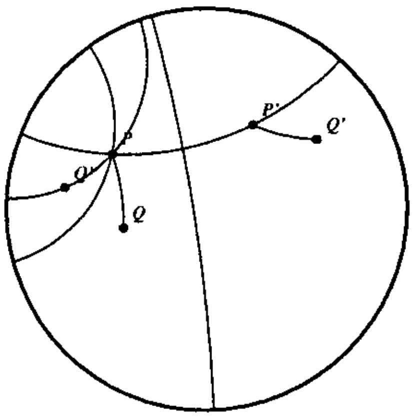
Al componer dos funciones de este tipo realizamos cuatro inversiones; debemos comprobar que hacer ésto es una transformación dentro del grupo, es decir, que podemos obtener el mismo resultado con sólo dos reflexiones.

Un primer paso para demostrar este hecho es notar que dos puntos definen totalmente a una transformación que preserva distancias y ángulos con orientación (isometría conforme).

Sean P y Q dos puntos y P' y Q' sus imágenes, y sea S cualquier otro punto en el espacio. La imagen S' de S debe distar de P' y Q' lo mismo que S de P y Q.

Sólo hay dos puntos en el espacio que cumplen esta propiedad: Las intersecciones de la circunferencia con centro en P' y radio PS y la circunferencia con centro en Q' y radio QS. La orientación nos permite saber cuál de los dos puntos es el indicado.

Sean P' y Q' las imágenes de P y Q después de aplicarles a éstos cualquier número par de reflexiones; tenemos que demostrar que podemos llevar P' a P y Q' a Q con sólo dos reflexiones.



Trazamos la línea PP' y su mediatriz, invertimos el segmento $P'Q'$ respecto a la mediatriz. El punto P' se invierte en P y el punto Q' en Q''; trazamos la línea PQ'' y trazamos la bisectriz del ángulo $\angle Q''PQ$. Invertimos el segmento PQ'' respecto a la bisectriz; el punto P se invierte en sí mismo y el punto Q'' se invierte exactamente en el punto Q.

Notemos que tomamos dos segmentos arbitrarios y con sólo dos reflexiones mandamos a uno en el otro, que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto la composición de dos reflexiones es una transformación dentro del grupo; y por lo tanto las isometrías conformes tienen estructura de grupo.

Bibliografía

[1] Gans, David, *An Introduction to Non–Euclidean Geometry*, Academic Press Inc., New York, 1973.

[2] Greenberg, Marvin J., *Euclidean and Non–Euclidean Geometries*, W. H. Freeman and Co., New York, 1999.

[3] Shively, Levi S., *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1963.