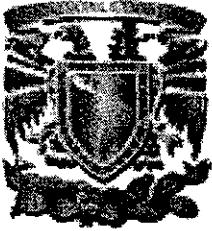


01190



Universidad Nacional Autónoma de México  
División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ingeniería

8

23540

**ANÁLISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR CONJUGADA  
EN FLUIDOS NO-NEWTONIANOS EN TUBERÍAS**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:

**M. EN I. NESTOR DANIEL LUNA GONZÁLEZ**

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE



MEXICO, D. F.

SEPTIEMBRE DE 2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Deseo agradecer al Dr. Federico Méndez Lavielle  
su constante apoyo en la realización de este trabajo.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1	Generalidades . . . . .	7
1.2	Antecedentes . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Análisis del problema en estado permanente</b>	<b>15</b>
2.1	Modelo físico . . . . .	15
2.2	Modelo matemático . . . . .	16
2.2.1	Flujo no-newtoniano . . . . .	16
2.2.2	Pared del Tubo . . . . .	19
2.3	Estimación de los órdenes de magnitud . . . . .	20
2.3.1	Generalidades . . . . .	20
2.3.2	Análisis de órdenes de magnitud . . . . .	20
2.4	Ecuaciones adimensionales . . . . .	24
2.4.1	Fluido no-newtoniano . . . . .	24
2.4.2	Pared del tubo . . . . .	25
2.5	Metodología de solución . . . . .	26
2.5.1	Reformulación del problema . . . . .	26
2.5.2	Límite térmicamente delgado ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ ) . . . . .	27
2.5.3	Límite térmicamente grueso ( $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$ ) . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Análisis del problema en estado transitorio</b>	<b>39</b>
3.1	Modelo físico . . . . .	39
3.2	Modelo matemático . . . . .	40

## RESUMEN

Uno de los temas de primordial importancia en diversas áreas de la ingeniería es el estudio de los procesos unitarios. Dentro de este rubro, el diseño, cálculo y construcción de redes de tuberías ya sea en plantas de generación de potencia, plantas y plataformas petroleras así como demás industrias, son un ejemplo claro de la relevancia que tiene el transporte de fluidos. De igual trascendencia resultan los parámetros, tales como flujo másico, diámetro de la tubería y factor de fricción en las paredes; sin embargo, en algunas ocasiones la sustancia a desplazar tiene propiedades de transporte diferentes a las convencionales. Muestra de estas sustancias son las denominadas *no-newtonianas*, ya que no cumplen con la ley de Newton de la viscosidad y, por ende, requieren de una ecuación constitutiva para la viscosidad, alterando así el cálculo y diseño de tuberías para su transporte. Para tal fin, la ciencia que estudia el movimiento de fluidos viscosos o deformaciones plásticas de materiales sólidos se le conoce como *Reología*, la cual tiene una gran importancia en las industrias de alimentos, petroleras, polímeros y pinturas por nombrar sólo algunas.

Desgraciadamente, la complejidad de las ecuaciones constitutivas remiten a dichos estudios a un ámbito teórico, mientras que en las aplicaciones de ingeniería se hace uso de correlaciones experimentales.

Otro fenómeno de transporte vinculado al movimiento de fluidos es el de energía, ya que en muchas ocasiones los fluidos requieren ser calentados y/o enfriados durante el proceso de transportación. Para ello se cuenta con una amplia gama de equipos y elementos llamados intercambiadores de calor que logran tales propósitos. De esta forma, se pretende que la transferencia de calor y el transporte de fluidos se lleve a cabo de manera simultánea. Lo anterior se logra debido a que la conductividad térmica de la pared del tubo es finita. Así, el análisis de dichos efectos conductivos-convectivos (sólido-fluido) se definen como *problemas conjugados de transferencia de calor*.

Dado este panorama, en el presente trabajo se estudia el proceso de transferencia de calor conjugada en un fluido no-newtoniano en tuberías. Para su análisis, la tesis se divide en dos secciones, en la primera de ellas se estudia el proceso de transferencia de calor en estado

permanente y en la segunda, en estado transitorio. En ambos casos se parte de la hipótesis de que el fluido no-newtoniano, que se rige por la ley de potencia, está hidrodinámicamente desarrollado en régimen laminar, con lo cual la ecuación de cantidad de movimiento puede resolverse e integrarse a la ecuación de la energía del fluido. La ecuación de la energía del fluido es adimensionalizada y resuelta por métodos analíticos para posteriormente ser acoplada a la ecuación de Laplace en el sólido, exigiendo las condiciones de continuidad en el flujo de calor y en la temperatura. La solución a esta ecuación es obtenida mediante la técnica de diferencias finitas. Asimismo, se exploran diversos límites térmicos para los cuales se emplean herramientas analíticas, numéricas y asintóticas (teoría de perturbaciones). Los resultados sobre la transferencia de calor muestran la influencia de cuatro parámetros adimensionales, uno de ellos es el parámetro de conducción, dos más representan la influencia de los efectos geométricos del sistema y el último corresponde al índice de potencia del fluido no-newtoniano. Con los resultados obtenidos pueden realizarse estimaciones en procesos de transferencia de calor de sustancias pseudoplásticas, newtonianas y/o dilatantes. Ahora bien, con la idea de validar el modelo general, se presentan gráficas y tablas comparativas de los valores del número de Nusselt con respecto a los datos experimentales mostradas en la literatura.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Generalidades

Una de las formas más sencillas en que los fluidos pueden ser clasificados se resume de la siguiente manera: *i*) atendiendo a la respuesta a una presión aplicada de manera externa; o bien, *ii*) de acuerdo a los efectos producidos bajo la acción de un esfuerzo cortante.

Mientras la compresibilidad afecta directamente a los gases, los líquidos son considerados como incompresibles y su respuesta al esfuerzo cortante tiene mayor importancia. Para caracterizar dicha respuesta se tiene el esquema de flujo uni-dimensional mostrado en la figura (1-1), del cual puede obtenerse fácilmente la ley de Newton de la viscosidad,  $\tau = \mu (du/dy)$ , donde  $\mu$  representa una constante de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, la cual es llamada viscosidad Newtoniana, que depende únicamente de la presión y de la temperatura del fluido. Cuando esto no sucede y la viscosidad es función de otros factores como el tiempo o la rapidez de deformación, al fluido se le conoce como un fluido *Reológico*. Las comentadas excepciones a la ley de Newton de la viscosidad son por demás frecuentes, denominándose a este tipo de fluidos como fluidos *no-newtonianos*. Estrictamente hablando, un fluido no-newtoniano es aquel fluido cuya curva de flujo en un diagrama cortante-rapidez de deformación, figura (1-2), es no-lineal o no pasa por el origen. Otra forma de mostrar la no-linealidad de los fluidos no-newtonianos es presentada por la figura (1-3), en donde es fácil distinguir la no dependencia de la rapidez de deformación sobre la viscosidad de un fluido Newtoniano.



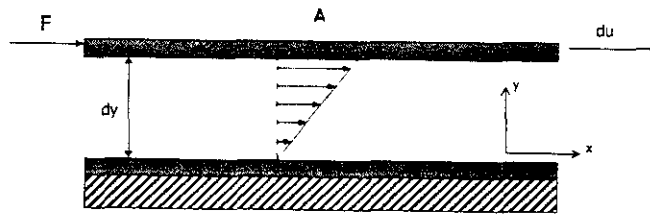


Figura 1-1: Representación esquemática de un flujo uni-direccional por la acción de un esfuerzo cortante.

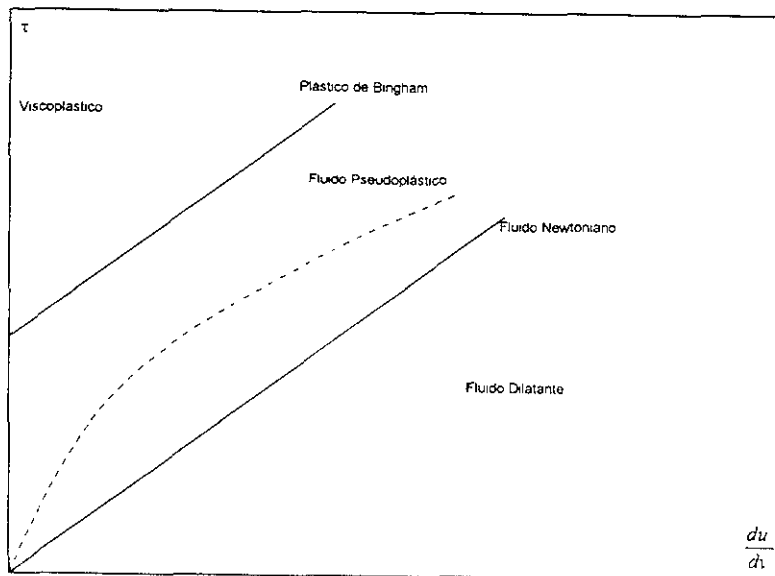


Figura 1-2: Clasificación reológica de los fluidos no-Newtonianos: curvas de flujo.

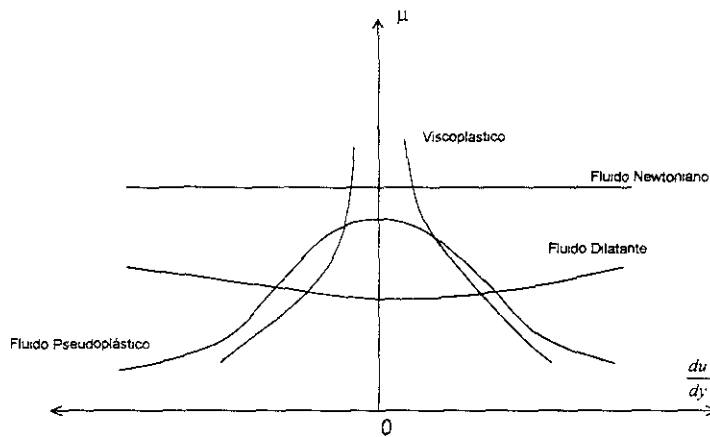


Figura 1-3: Clasificación reológica de los fluidos no-Newtonianos: curvas viscosidad-rapidez de deformación.

Para su análisis, los fluidos no-newtonianos se dividen en tres grupos, como se presenta en la figura (1-4) y que se detallan a continuación:

a) *Fluidos que no dependen del tiempo.* A estos fluidos se les conoce como una generalización de los fluidos Newtonianos, ya que el valor del cortante puede ser determinado por un valor de la rapidez de deformación según lo muestra la figura (1-2). Dentro de este grupo se encuentran los siguientes fluidos: *Pseudoplásticos*, cuyo valor del cortante disminuye conforme la rapidez de deformación se incrementa; *Dilatantes*, en donde el valor del cortante aumenta a medida de que la rapidez de deformación se incrementa; y los *Viscoplásticos*, que son aquellos fluidos que presentan un esfuerzo de fluencia.

b) *Fluidos dependientes del tiempo.* Son fluidos más complejos cuya relación entre el cortante y la rapidez de deformación depende, entre otras cosas, de la duración del cortante y la historia cinemática de éste. De este grupo pueden distinguirse a los fluidos *Reopécticos* y *Tixotrópicos*.

c) *Fluidos visco-elásticos.* Son sustancias que exhiben características de fluidos ideales y elasticidad de sólidos, mostrando una reconstitución parcial después de la deformación.

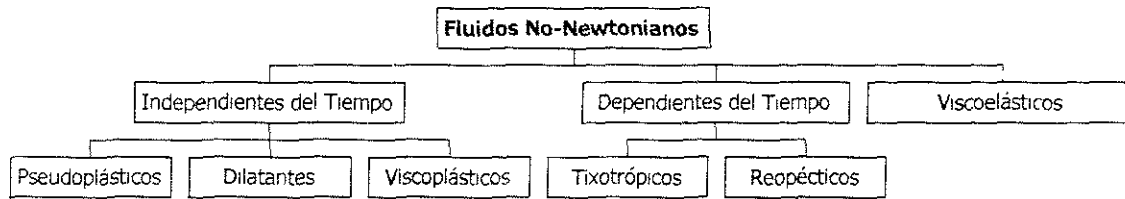


Figura 1-4: Clasificación reológica de los fluidos no-Newtonianos.

Para cada fluido comentado, se tiene una serie de modelos matemáticos los cuales son discutidos a detalle en textos como Harris [1], Wilkinson [2], Skelland[3] y Bird et al. [4]. Además de dichos modelos, en las citadas referencias se pueden obtener las características de flujo de los diferentes fluidos no-newtonianos. Desgraciadamente, el aspecto de transferencia de calor no ha sido estudiado a detalle, lo cual representa la motivación principal del presente trabajo.

## 1.2 Antecedentes

El primer estudio sobre la transferencia de calor en tuberías, fue llevado a cabo por Graetz [5] en 1883 para un flujo tapón (*slug flow*) y para un flujo de Poiseuille en 1885, presentando la solución en función de una serie infinita. En 1956, los valores numéricos de la solución de Graetz fueron presentados por Sellars [6]. Este problema clásico puede revisarse con suficiente detalle en textos como el de Shah y London [7], o la obra de Kays y Crawford [8]. En general, los avances más significativos se han concentrado en incluir diversos factores al modelo de Graetz que enriquezcan sensiblemente el estudio del mismo. Tales factores se pueden enumerar como disipación viscosa, difusividad térmica, efectos transitorios y turbulentos, efectos conjugados y demás.

Como una extensión del clásico problema de Graetz, el análisis de la transferencia de calor en flujos no-newtonianos en tuberías ha recibido considerable atención en la última década. Aspectos fundamentales de este problema son documentados recientemente en Chhabra y Ri-

chardson [9], también detallados en Cho y Hartnett[10], Harnett y Cho [11] y en el texto clásico de Skelland [3]. Aun y cuando los ejemplos contenidos en las referencias anteriores versan sobre la transferencia de calor de o hacia un fluido no-newtoniano en tuberías que puede ser influenciado por diversos factores, es importante señalar que no se ha tomado en cuenta el efecto de la conductividad térmica finita del tubo. De esta forma, la hipótesis convencional de temperatura uniforme o flujo de calor constante en la pared del tubo dejaría de ser válida y el proceso de transferencia de calor se llevaría a cabo de manera conjunta con los efectos de conducción-convección. Para el análisis del problema de Graetz, generalmente los dos mecanismos de transferencia de calor se desacoplan, estudiándose los efectos convectivos del fluido mediante un análisis de convección de calor forzada en régimen laminar con temperatura de superficie constante o con flujo de calor pre-establecido.

Por otro lado, la solución al problema de transferencia de calor de un flujo no-newtoniano a través de un tubo circular con condición de frontera térmica pre-determinada, se ha estudiado con cierto detalle para el caso de un flujo laminar totalmente desarrollado. Desde el análisis experimental de Pigford [12] en 1955, al estudiar la región de entrada térmica con temperatura de pared constante, un gran número de investigaciones con condiciones de frontera pre-determinadas se han desarrollado con el afán de tener un mejor entendimiento del proceso térmico. El primer estudio analítico que extiende la solución de un fluido Newtoniano a un fluido que obedece la ley de potencia fue obtenido por Bird [13], empleando una solución en forma de sumatorias para la temperatura de un fluido en régimen laminar en la región de entrada térmica para la condición de flujo de calor constante en la pared. Bird et al. [14], aplicaron la conocida aproximación de Leveque [15] para calcular la transferencia de calor que resulta cuando la condición de frontera corresponde a un flujo de calor uniforme en la pared del tubo, así como la condición de temperatura constante para un fluido que se rige por la ley de potencia. La idea principal de la aproximación de Leveque es asumir que la capa límite térmica está confinada a una pequeña región del fluido adyacente a la pared del tubo. Esta es una excelente aproximación para elevados gastos máscicos, tubos cortos y/o valores del número de Graetz elevados. Los anteriores resultados se resumen en Bird [4].

Asimismo, Metzner et al. [16] presentaron el primer análisis teórico y experimental para determinar las variables importantes en el proceso de transferencia de calor en fluidos no-

## Capítulo 2

# Análisis del problema en estado permanente

### 2.1 Modelo físico

Como se mencionó en el capítulo introductorio, existen diversas relaciones matemáticas que permiten modelar las características de flujo de un fluido no-newtoniano; en este sentido, se eligió el modelo de *ley de potencia*, también conocido como *modelo de Ostwald de Waele*, en virtud de que esta relación puede caracterizar más de un fluido (Pseudoplásticos, Newtonianos y Dilatantes), además de poseer ciertas bondades en lo que se refiere al análisis matemático.

El modelo físico simplificado que se estudia en el presente trabajo se muestra en la figura (2-1). Un fluido viscoso no-newtoniano caracterizado por la ley de potencia, fluye en régimen laminar completamente desarrollado dentro de un tubo liso de radio interno  $R$  y espesor  $h$ . Por simplicidad se asume que el fluido ingresa a una temperatura constante  $T_0$  y en una zona localizada de la superficie externa del tubo, de longitud  $L$ , se extrae una tasa de calor uniforme ( $q_e$ ), lo que provoca una delgada capa límite térmica,  $\delta$ , en la superficie interna del tubo. Debido a la conductividad térmica finita de la pared del tubo,  $\lambda_w$ , la rapidez de transferencia de calor retirada es influenciada por los efectos difusivos del sólido en las direcciones radial y longitudinal. De esta manera, el proceso de transferencia de calor se lleva a cabo de forma conjunta entre el fluido no-newtoniano y la pared del tubo. A este tipo de problemas en donde se acoplan los efectos conductivos-convectivos son conocidos como *problemas conjugados*.

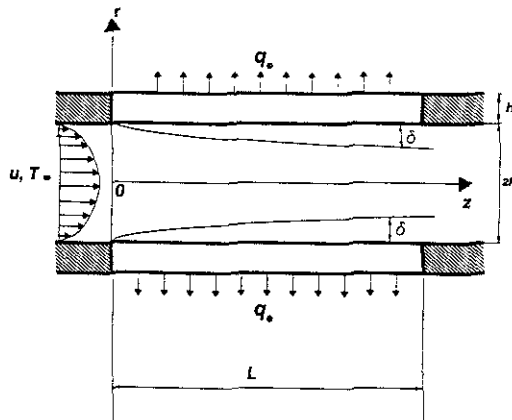


Figura 2-1: Modelo físico a estudiar.

El origen del sistema coordenado se coloca en el centro del tubo, de manera que el eje de simetría  $z$  inicia en donde se presenta el salto en el flujo de calor y coincide a su vez con la dirección del flujo no-newtoniano, tal y como se muestra en la figura (2-1), mientras que el eje  $r$  apunta hacia afuera en la dirección radial, siendo normal a la superficie del tubo. Por simplicidad, se asume que las condiciones térmicas en los bordes del tubo ( $z = 0, L$ ) son adiabáticas; así como propiedades térmicas del fluido constantes y despreciables los efectos de disipación viscosa.

## 2.2 Modelo matemático

### 2.2.1 Flujo no-newtoniano

*Ecuación de continuidad:*

Escribiendo la ecuación de la continuidad para un flujo bi-dimensional en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z) = 0.$$

Debido a que se asume flujo completamente desarrollado, no existe componente de velocidad en la coordenada radial  $u_r = 0$ , de donde se puede concluir que la velocidad axial es, a lo más, función de la coordenada radial,  $u_z = u_z(r)$ .

**Ecuación de cantidad de movimiento:**

Partiendo de la ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas para un fluido completamente desarrollado en régimen laminar,

$$0 = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.2)$$

donde el esfuerzo cortante,  $\tau_{rz}$ , para un fluido que se rige por la ley de potencia se define como:

$$\tau_{rz} = -k \left( \frac{du_z}{dr} \right)^n, \quad (2.3)$$

$k$  es una función de peso que tiene la finalidad de mantener la homogeneidad dimensional de la ecuación (2.3), y  $n$  es el índice de potencia del fluido no-newtoniano; la ecuación (2.2) puede ser directamente integrada al tomar la información de la ecuación (2.1) que establece que la presión es, a lo más, función de la coordenada longitudinal,  $P = P(z)$ . Por lo anterior y con las siguientes condiciones de frontera para la velocidad,

$$u_z(r = R) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (2.4)$$

se obtiene fácilmente la ecuación que describe el campo de velocidades de un fluido de potencia dentro de un tubo,

$$u_z(r) = \left\{ \frac{1}{2k} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \right\}^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) R^{(n+1)/n} \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]^{(n+1)/n}. \quad (2.5)$$

Ahora bien, debido a que la velocidad máxima del flujo se presenta en la zona central del tubo ( $r = 0$ ), es posible establecer el término de velocidad máxima de la ecuación (2.5), mediante la

siguiente expresión:

$$u_{\max} = \left\{ \frac{1}{2k} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \right\}^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) R^{(n+1)/n}, \quad (2.6)$$

de esta manera, la ecuación (2.5) puede escribirse como:

$$u_z(r) = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right]. \quad (2.7)$$

De la misma forma, si se desea calcular el flujo volumétrico que pasa por una sección del tubo, se emplea la integral,

$$Q = \int_0^R 2\pi r u_z(r) dr. \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en (2.8), integrando y ordenando términos, se obtiene el valor del flujo volumétrico en función del término de velocidad máxima,

$$Q = \frac{(n+1)}{(3n+1)} \pi u_{\max} R^2. \quad (2.9)$$

Por otra parte, empleando la definición de flujo volumétrico,  $Q = \bar{u} \pi R^2$ , e igualándola con la ecuación (2.9), se obtiene la relación entre velocidad media y velocidad máxima del flujo del fluido de potencia,

$$\bar{u} = \left( \frac{n+1}{3n+1} \right) u_{\max}. \quad (2.10)$$

Con lo anterior, el perfil de velocidades del fluido no-newtoniano puede escribirse de la siguiente manera, que es la forma convencional en que aparece definido en la literatura [3],[4],[9],[35],

$$u = \frac{3n-1}{n-1} \bar{u} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right], \quad (2.11)$$

donde:

$$\bar{u} = \left[ \frac{1}{2k} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \right]^{1/n} \left( \frac{n}{3n+1} \right) R^{(n+1)/n}.$$



### *Ecuación de la energía:*

Debido a que no se consideran efectos de disipación viscosa en el fluido, la ecuación de la energía en coordenadas cilíndricas bi-dimensional se escribe de la siguiente manera,

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}, \quad (2.12)$$

con sus respectivas condiciones de frontera y de continuidad en la temperatura,

$$T(0, r) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(z, R) = T_w(z, R). \quad (2.14)$$

### **2.2.2 Pared del Tubo**

La ecuación de conducción de calor, que en este caso es la ecuación de Laplace, se escribe en coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.15)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera.

Condiciones Adiabáticas:

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial z} \right|_{z=0,L} = 0. \quad (2.16)$$

Superficie Interna:

$$\lambda_u \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=R} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (2.17)$$

Superficie Externa:

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=R+h} = q_e. \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.17), que corresponden a las condiciones de continuidad de la temperatura y del flujo de calor respectivamente, representan los efectos de transferencia de calor conjugada. La ecuación (2.17) establece que el calor desprendido por el fluido no-newtoniano es

el mismo que el calor admitido por conducción en la cara interior de la pared del tubo, mientras que la ecuación (2.14) establece que la temperatura del fluido y el sólido es la misma.

## 2.3 Estimación de los órdenes de magnitud

En este apartado, se analizará los órdenes de magnitud del proceso *transferencia de calor en estado permanente* para obtener parámetros adimensionales que relacionen la propiedades físicas del fenómeno.

### 2.3.1 Generalidades

Al igual que diversas áreas de la ingeniería, los problemas de transferencia de calor se caracterizan por la multiplicidad de variables y propiedades físicas involucradas, provocando que los resultados de los análisis tanto experimentales como teóricos dependan de más de una variable. Por lo anterior, se recomienda que previo a resolver un problema físico, sea aplicado un *análisis de órdenes de magnitud* con la idea de generar parámetros adimensionales representativos, a la vez de obtener mayor información física del problema [36].

El objeto de introducir un análisis de órdenes de magnitud empleando los conceptos y principios básicos del proceso de transferencia de calor, se reduce a obtener una estimación global de las variables físicas involucradas. Esto significa, por ejemplo, que si una de las variables físicas de interés es el espesor de capa límite térmica, el objetivo es determinar la dependencia funcional con otras variables. Hay que comentar que al análisis de órdenes de magnitud está íntimamente ligado al análisis dimensional de un problema. Si el análisis de órdenes de magnitud es llevado a cabo de manera correcta, se pueden anticipar resultados valiosos. Una espléndida referencia que da cuenta de los aspectos fundamentales sobre el análisis de escalas resulta ser el texto de Bejan [36].

### 2.3.2 Análisis de órdenes de magnitud

A partir del campo de velocidades establecido en (2.11) e introduciendo, con la aproximación de Leveque [15], una nueva escala espacial  $\xi$  próxima a la pared del tubo de orden de magnitud

de la unidad,

$$\frac{1 - r/R}{\delta/R} = \xi = O(1),$$

donde  $\delta$  representa el espesor de capa límite térmica; puede demostrarse fácilmente que el campo de velocidades próximo a la pared del tubo en función del espesor de capa térmica, viene dado por:

$$u(r) \sim \bar{u} \left( \frac{3n+1}{n} \right) \frac{\delta}{R}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, haciendo un balance entre los términos convectivos y difusivos en la ecuación de la energía del fluido no-newtoniano, se obtiene:

$$\bar{u} \left( \frac{3n+1}{n} \right) \frac{\delta}{R} \frac{\Delta T_f}{L} \sim \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta T_f}{\delta^2}, \quad (2.20)$$

donde  $\Delta T_f$  representa la caída de temperatura en el fluido. Finalmente, determinando el orden de magnitud del espesor de capa límite térmica,

$$\frac{\delta}{L} \sim \left[ \frac{n}{3n+1} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{1}{Pe} \right]^{1/3}. \quad (2.21)$$

En la expresión anterior,  $Pe$  corresponde al número de Peclet,  $Pe = \rho \bar{c} u R / \lambda$ .  $\rho$ ,  $c$  y  $\lambda$  representan la densidad, el calor específico y la conductividad térmica del fluido, respectivamente.

Por otro lado, debido a la hipótesis de que los extremos del tubo ( $z = 0, L$ ) son adiabáticos, se asume que el calor total transferido por el fluido es del mismo orden de magnitud al calor retirado en la superficie externa del tubo, esto es:

$$q_f \sim \left( 1 + \frac{h}{R} \right) q_e, \quad (2.22)$$

y equivalentemente, el calor transferido por el fluido es del mismo orden de magnitud que el conducido transversalmente por la pared del tubo, esto es:

$$A_i q_f \sim A_i \lambda_w \frac{\Delta T_w}{\Delta r}, \quad A_e q_e \sim A_e \lambda_w \frac{\Delta T_w}{\Delta r}, \quad (2.23)$$

donde  $A_i$  y  $A_e$  corresponden a las superficies interna y externa del tubo respectivamente, mien-

tras  $\Delta T_w$  representa la caída de temperatura en la pared del tubo en la dirección radial. Sustituyendo los valores de las áreas correspondientes en (2.23) y factorizando,

$$q_f + \left(1 + \frac{h}{R}\right) q_e \sim 2\lambda_w \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \frac{\Delta T_w}{h}. \quad (2.24)$$

Combinando las relaciones (2.22) y (2.24) se tiene que,

$$\Delta T_w \sim \frac{q_e h \left(1 + \frac{h}{R}\right)}{\lambda_w \left(1 + \frac{h}{2R}\right)}. \quad (2.25)$$

Por otro lado, el cambio global en la temperatura del sistema puede escribirse de la siguiente manera,

$$\Delta T = \Delta T_f + \Delta T_w. \quad (2.26)$$

Con esta relación y mediante la expresión (2.25) para  $\Delta T_w$  y con la ayuda de la ley de Fourier en el fluido,  $\Delta T_f \sim q_f \delta / \lambda_f$ , es posible determinar las caídas de temperatura en el sólido y el fluido relativas al sistema de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{1}{1 + \Delta T_f / \Delta T_w}, \quad y \quad \frac{\Delta T_f}{\Delta T_w} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3}, \quad (2.27)$$

se tiene que:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3}}, \quad \frac{\Delta T_f}{\Delta T} \sim \frac{\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3}}{1 + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3}}, \quad (2.28)$$

donde  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_0$  son los parámetros térmicos y geométricos que se definen a través de:

$$\alpha = \frac{\lambda_w h}{\lambda_f L} (1 + \varepsilon_0/2) \left[ \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{Pe} \right]^{1/3}, \quad \varepsilon = \frac{h}{L} \quad y \quad \varepsilon_0 = \frac{h}{R}. \quad (2.29)$$

Empleando la primera relación de (2.28) junto con la relación (2.25), se obtiene que el cambio global de temperatura en el sistema es del orden,

$$\Delta T \sim \frac{q_e h (1 + \varepsilon_0)}{\lambda_w (1 + \varepsilon_0/2)} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3} \right]. \quad (2.30)$$

Debido a que  $\Delta T$  representa una constante de referencia en el proceso de adimensionaliza-

ción de la temperatura, por simplicidad se requiere que dicho valor sea el máximo que pueda. Asumiendo que en general  $n$  es un parámetro del orden de la unidad, la relación (2.30) puede reducirse a:

$$\Delta T_c \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{(1 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0/2)} \frac{q_e h}{\lambda_w}, \quad (2.31)$$

La expresión anterior se estimó de la relación (2.30), pensando que tanto el flujo de calor  $q_e$ , como la conductividad térmica y los factores geométricos del tubo ( $\varepsilon, \varepsilon_0$ ) son constantes. Entonces el parámetro que afecta más sensiblemente el orden de magnitud de  $\Delta T_c$  es el cociente  $\alpha/\varepsilon^2$ ; bastando con tomar el límite  $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$  con la idea de tener un valor característico de  $\Delta T_c$  en el proceso de adimensionalización.

Con las relaciones anteriores es posible estimar el orden de magnitud del número de Nusselt,

$$Nu \sim \frac{hL_c}{\lambda_f} \sim \frac{q_f R}{\Delta T \lambda_f} \sim \frac{\Delta T_f R}{\Delta T_c \delta} \sim \left[ \left( \frac{3n+1}{n} \right) \frac{Gr}{\pi} \right]^{1/3}, \quad (2.32)$$

donde  $h$  corresponde al coeficiente convectivo del fluido de potencia,  $R$  el radio y  $Gr = \pi R Pe/L$  representa el número de Graetz. Esta derivación del número de Nusselt es por demás conocida y reportada en la literatura, [10] [11]. De las relaciones anteriores pueden obtenerse interesantes límites asintóticos, los cuales establecen los aspectos físicos del proceso de transferencia de calor. Básicamente, se pueden distinguir tres casos:  $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ ,  $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$  y  $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$  asumiendo que el índice de potencia  $n$  es del orden de la unidad.

Para valores de  $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ , de la relación (2.28) se obtiene:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^{1/3}, \quad \frac{\Delta T_f}{\Delta T} \sim 1, \quad (2.33)$$

lo anterior indica que las variaciones de temperatura transversal en la pared del tubo comparadas con el cambio de temperatura global  $\Delta T$  son muy pequeñas, del orden de  $\varepsilon^2/\alpha$  a lo más. Este es el límite térmico conocido como *térmicamente delgado*, [32].

Para valores  $\alpha/\varepsilon^2 \sim 1$ , se tiene el mismo orden en las relaciones,

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{1}{1 + \left( \frac{n}{3n+1} \right)^{1/3}}, \quad \frac{\Delta T_f}{\Delta T} \sim \frac{1}{1 + \left( \frac{3n+1}{n} \right)^{1/3}}. \quad (2.34)$$

Mientras que para valores  $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$ , se tiene,

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim 1, \quad \frac{\Delta T_f}{\Delta T} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^{1/3}, \quad (2.35)$$

en ambos casos, la caída de temperatura transversal en la pared del tubo es del orden de magnitud del gradiente global para valores finitos de  $n$ . Este es el llamado límite *térmicamente grueso*.

## 2.4 Ecuaciones adimensionales

En este apartado se obtendrá el conjunto de ecuaciones adimensionales que describen el fenómeno físico; para tal efecto, se emplearán los valores característicos de adimensionalización estimados en la sección anterior.

### 2.4.1 Fluido no-newtoniano

En virtud del conocimiento del campo de velocidades para el flujo de potencia, la ecuación de la energía para el fluido puede adimensionalizarse al introducir las siguientes variables adimensionales y el campo de velocidades,

$$\theta = \frac{T_b - T}{\Delta T_c}, \quad \chi = \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad (2.36)$$

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left( \frac{3n+1}{n+1} \right) \left( 1 - \eta^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (2.37)$$

donde  $\Delta T_c$  representa la caída de temperatura característica dada por la relación (2.31). Sustituyendo las variables anteriores en las ecuaciones (2.12)-(2.14), se obtiene la ecuación de la energía en forma adimensional,

$$\left( \frac{3n+1}{n+1} \right) \left( 1 - \eta^{(n+1)/n} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{L}{R} \right) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{Pe} \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2}, \quad (2.38)$$

con las siguientes condiciones de frontera y de continuidad en la temperatura,

$$\theta(0, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\chi \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.39)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \theta(\chi, 1) = \theta_w(\chi, 0). \quad (2.40)$$

### 2.4.2 Pared del tubo

Llevando a cabo el mismo procedimiento para la ecuación de Laplace en la pared del tubo, se sustituyen las siguientes variables adimensionales,

$$\theta_w = \frac{T_0 - T_w}{\Delta T_c}, \quad \sigma = \frac{r - R}{h}, \quad (2.41)$$

en las ecuaciones (2.15)-(2.18) con la finalidad de obtener la ecuación de la energía adimensional para el sólido,

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1 + \sigma \varepsilon_0)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (1 + \sigma \varepsilon_0) \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (2.42)$$

así como también sus correspondientes condiciones de frontera, que se detallan a continuación

*Condiciones Adiabáticas:*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = 0. \quad (2.43)$$

*Superficie Interna:*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{\lambda}{\lambda_w} \frac{h}{R} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}. \quad (2.44)$$

*Superficie Externa*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1} = \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha (1 + \varepsilon_0)}. \quad (2.45)$$

Como fue comentado con anterioridad, las ecuaciones de la energía correspondientes al fluido no-newtoniano y la pared del tubo, están acopladas mediante las condiciones de continuidad del flujo de calor y de la temperatura. Otro factor que influye en la solución del conjunto de ecuaciones (2.38)-(2.45), es la variedad de parámetros involucrados, lo que genera una multiplicidad de soluciones. Por lo anterior, la temperatura adimensional de la pared del tubo, dependerá en general de la siguiente relación funcional:

$$\theta_w = \theta_w(\chi, \sigma : \alpha, \varepsilon, \varepsilon_0, n), \quad \text{para } Gz \gg 1.$$

Por otro lado, el flujo de calor adimensional local o número de Nusselt local,  $Nu_\chi = qL_c / (\lambda \Delta T)$ , a la superficie externa del tubo se define como

$$Nu_\chi = \frac{2q_e R}{\lambda(T_b - T_w(z, R + h))} = \frac{2}{\theta_w(\chi, 1)} \left(\frac{Gz}{\pi}\right)^{1/3}. \quad (2.46)$$

Con lo que el número de Nusselt global puede ser obtenido mediante,

$$Nu = 2 \left(\frac{Gz}{\pi}\right)^{1/3} \int_0^1 \frac{d\chi}{\theta_w(\chi, 1)}, \quad (2.47)$$

donde  $T_b$  es la temperatura promedio o de corriente libre del fluido y en primera aproximación coincide con el valor de  $T_\infty$ . La corrección de orden superior a  $T_b - T_\infty$ , es del orden de  $T_\infty Gz^{-1}$  y para valores de  $Gz \gg 1$  resulta insignificante tal contribución.

Por lo anterior, la relación funcional para el número de Nusselt puede escribirse como:

$$Nu_\chi = Nu_\chi(\chi : \alpha, \varepsilon, \varepsilon_0, n, Gz)$$

## 2.5 Metodología de solución

### 2.5.1 Reformulación del problema

El conjunto de ecuaciones (2.38)-(2.45) que describen completamente el proceso de la transferencia de calor conjugada, será resuelto mediante técnicas analíticas y numéricas. En el caso de la ecuación de la energía para el fluido de potencia, se aplica junto con la teoría de capa límite, técnicas analíticas, ya que se trata de una ecuación lineal. Por simplicidad, dicha metodología de solución es mostrada en el apéndice A. En lo referente a la ecuación de Laplace adimensional (2.42) con sus condiciones de frontera respectivas (2.43)-(2.45), se resuelve de manera numérica con la finalidad de tomar en cuenta la conductividad térmica finita de la pared del tubo, así como los efectos geométricos en el tubo representados por  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_0$ .

Contando con la solución de la ecuación de la energía del fluido en función de la temperatura de pared del tubo (apéndice A), se sustituye esto en la ecuación (2.44) que representa la continuidad en el flujo de calor, con lo cual se obtiene,

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} C_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wl} + \int_0^\chi K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\}, \quad (2.48)$$

donde  $\theta_{wl}$  es la temperatura adimensional en el borde principal del tubo ( $\chi = 0$ ),  $C_0$  corres-



ponde a una constante cuyo valor es  $C_0 = 12^{1/3}/\Gamma(1/3) = 0.8546$ , mientras que  $K(\chi, \chi') = (1 - \chi'/\chi)^{-1/3}$  representa el kernel continuo para el problema considerado.

Con todo lo anterior, el problema consiste en resolver la ecuación diferencial parcial lineal (2.42) con las condiciones de frontera definidas en (2.43), (2.45) y (2.48). Además de darle solución numérica a este conjunto de ecuaciones, se exploran diversos límites térmicos, atendiendo a los valores del parámetro  $\alpha/\varepsilon^2$ .

### 2.5.2 Límite térmicamente delgado ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ )

Como fue comentado anteriormente, este límite representa, en primera aproximación, que no existan gradientes térmicos en la coordenada radial; por lo tanto, la pared del tubo depende únicamente de la coordenada  $\chi$ , como se anticipó en la relación (2.33). Por lo que la temperatura del tubo puede expresarse mediante la siguiente expansión,

$$\theta_w(\chi, \sigma) = \theta_{w0}(\chi) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \theta_{w1}(\chi, \sigma) + \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)^2 \theta_{w2}(\chi, \sigma) + \dots \quad (2.49)$$

Sustituyendo la serie anterior en la ecuación (2.42) y reteniendo solamente el primer término de la expansión, se tiene que:

$$\alpha \frac{d^2 \theta_{w0}}{d\chi^2} + \frac{1}{(1 + \sigma \varepsilon_0)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (1 + \sigma \varepsilon_0) \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento para las condiciones de frontera,

*Superficie Interna:*

$$\frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = C_0 (1 + \varepsilon_0/2) \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wi} + \int_0^{\chi} K(\chi, \chi') \frac{d\theta_{w0}}{d\chi'} d\chi' \right\}. \quad (2.51)$$

*Superficie Externa:*

$$\frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=1} = \frac{(1 + \varepsilon_0/2)}{(1 + \varepsilon_0)}. \quad (2.52)$$

Ahora bien, puesto que en primera aproximación  $\theta_{w0}$  no es función de la coordenada  $\sigma$ , es posible integrar la ecuación (2.50) a lo largo de la coordenada transversal. Aplicando las

condiciones de frontera en este proceso se tiene que:

$$\alpha(1 + \varepsilon_0/2) \frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial \chi^2} + (1 + \varepsilon_0) \left. \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1} - \left. \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0, \quad (2.53)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.53) las condiciones de frontera (2.51) y (2.52) se obtiene una ecuación integro-diferencial que describe la temperatura de pared del tubo en el *límite térmicamente delgado*,

$$\alpha \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} + 1 = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left( \theta_{wt} + \int_0^\chi K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right). \quad (2.54)$$

En esta ecuación, el primer término del lado izquierdo corresponde a la conducción de calor axial en la pared del tubo, mientras que el segundo término del lado izquierdo representa el calor removido en la superficie externa del tubo. El término del lado derecho representa al calor transferido por el fluido no-newtoniano a la pared interna del tubo. Las condiciones adiabáticas en los bordes del tubo continúan siendo,

$$\left. \frac{d\theta_w}{d\chi} \right|_{\chi=0,1} = 0. \quad (2.55)$$

La ecuación (2.54) junto con las condiciones de frontera (2.55), representa el proceso de conducción de calor que está gobernado por una ecuación integro-diferencial para  $\theta_w$  con dos parámetros adimensionales  $\alpha$  y  $n$ . En las siguientes secciones se analizará los límites caracterizados por valores grandes y/o pequeños del parámetro  $\alpha$  para diferentes valores finitos de  $n$ .

### Solución Numérica (Runge-Kutta Cuarto Orden)

Por tratarse (2.54) de una ecuación integro-diferencial ordinaria de segundo orden, ésta puede resolverse mediante el algoritmo conocido como Runge-Kutta de cuarto orden [37]. Para aplicar la metodología propuesta en [37] y [38] se requiere analizar previamente y por separado el término integral de la ecuación (2.54).

Sea  $f(\chi)$  el término integral de la ecuación (2.54), el cual puede ser aproximado como un

número finito de sumas de la siguiente forma:

$$f(\chi) = \int_0^{\chi'} \frac{d\chi'}{(\chi - \chi')^{1/3}} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right) \simeq \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi} \left( \frac{d\chi'}{(\chi - \chi')^{1/3}} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \right)$$

llevando a cabo la integral se tiene que:

$$f(\chi) = -\frac{3}{2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k (\chi - \chi')^{2/3} \Big|_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi},$$

evaluando los límites de integración y recordando que  $\chi = N\Delta\chi$ , se factoriza el término  $\Delta\chi^{2/3}$ , con lo que se tiene:

$$f(\chi) = \frac{3}{2} \Delta\chi^{2/3} \sum_{k=1}^N \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi} \right)_k \left[ (N+1-k)^{2/3} - (N-k)^{2/3} \right].$$

Ordenando y evaluando para  $k = N$ ,

$$f(\chi) = \frac{3}{2} \left( \frac{\chi}{N} \right)^{2/3} \left( \frac{d\theta_w}{d\chi} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\chi}{N} \right)^{2/3} \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \left[ (N+1-k)^{2/3} - (N-k)^{2/3} \right].$$

Llevando esta relación a la ecuación (2.54), se tiene que:

$$\alpha \frac{d^2\theta_w}{d\chi^2} + 1 = \frac{\theta_{wl} C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} + \frac{3C_0}{2} \left( \frac{\chi}{N} \right)^{2/3} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left\{ \left( \frac{d\theta_w}{d\chi} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \left[ (N+1-k)^{2/3} - (N-k)^{2/3} \right] \right\}. \quad (2.56)$$

De esta manera, la ecuación (2.54) se transforma en una ecuación diferencial de segundo orden (2.56). Para concluir y poder así aplicar el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden a la ecuación (2.56), se requiere conocer el valor de la temperatura en el borde principal de la pared del tubo,  $\theta_{wl}$ . Para tal efecto se implementa una sub-rutina de "shooting", la cual propone un valor de temperatura en el borde,  $\theta_{wl}$ , resuelve la ecuación mediante Runge-Kutta [37], guarda para este valor de temperatura supuesto y almacena en memoria los valores de temperatura correspondientes al borde secundario de la pared del tubo, ya que debe cumplirse con la condición adiabática. En el siguiente paso, la sub-rutina establece otro valor de temperatura de borde

principal,  $\theta_{wl}$ , nuevamente resuelve la ecuación (2.56) y registra los valores de temperatura de pared del borde secundario. Con las dos iteraciones anteriores se interpola linealmente para satisfacer la condición adiabática en el borde de salida y poder así obtener el valor adecuado de temperatura en el borde principal de la pared del tubo. Para este valor de  $\theta_{wl}$  calculado, se obtiene la solución de la ecuación (2.56) que representa el perfil de temperatura adimensional en la pared del tubo. A partir de estos valores de temperatura de pared se calcula el número de Nusselt local y promedio que aparecen en el capítulo de resultados como soluciones numéricas al límite térmicamente delgado en el análisis permanente.

### Solución Asintótica para el Límite $\alpha \rightarrow \infty$

**Generalidades** La *Teoría de Perturbaciones* es una amplia colección de métodos analíticos para obtener la solución de una ecuación diferencial. El procedimiento general de la teoría de perturbaciones es identificar un parámetro pequeño generalmente denotado por  $\varepsilon$  [39], tal que cuando  $\varepsilon = 0$  el problema puede ser resuelto. La solución global al problema analizado se obtiene por un análisis local en las proximidades de  $\varepsilon = 0$ .

La tendencia de la teoría de perturbaciones es descomponer un problema dado en un número infinito de problemas relativamente sencillos. Una solución de perturbación es construida por un análisis local en las vecindades de  $\varepsilon = 0$  como una serie de potencias en  $\varepsilon$ :

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Esta serie se denomina *serie de perturbación*. Un rasgo distintivo de esta serie, es que  $y_n(x)$  puede calcularse en términos de  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ . Es fácil advertir que la serie de perturbación para  $y(x)$  es local en  $\varepsilon$  pero global en  $x$ . Si el valor de  $\varepsilon$  es muy pequeño, se espera que la solución para  $y(x)$  sea aproximada con suficiente exactitud, por unos cuantos términos de la serie.

**Teoría de Perturbación Regular y Singular** La técnica formal de la teoría de perturbaciones es una generalización natural de los análisis locales que involucran la aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales en un punto  $x = a$ , por el desarrollo de una solución en forma de serie en las vecindades del punto  $a$  en potencias de un parámetro pequeño. Una vez

que el orden principal de la solución en la proximidad de  $x = a$  sea obtenido, los subsecuentes términos de la expansión son calculados de forma recursiva.

Esta analogía entre el análisis local y la teoría de perturbaciones, es el punto de partida para clasificar los problemas de perturbación en regulares y singulares.

Se define a un problema de *perturbación regular* como uno cuya serie de perturbación en potencias de  $\varepsilon$  tiene un rango de convergencia infinito. Un rasgo fundamental de todos los problemas de perturbación regular, es que la solución exacta para valores pequeños de  $|\varepsilon|$  tiende al valor del orden cero de la solución de perturbaciones ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Siendo los siguientes términos pequeñas correcciones al orden cero.

Por otro lado, se define a un problema de *perturbación singular* como uno cuya serie de perturbación no toma la forma de una serie de potencias, o si la toma, tiene un rango de convergencia finito. Esto debido a que para valores de  $\varepsilon = 0$  se pierde información del problema físico, con ello se establece un análisis local en las zonas donde la solución no se cumple cuando  $\varepsilon = 0$ . Para ello se cuenta con herramientas asintóticas como lo son la teoría de escalas múltiples, análisis de capa límite, técnica de acoplamiento asintótico y más. El caso cuando el parámetro de perturbación  $\varepsilon$  multiplica a la derivada de orden mayor es un claro ejemplo de cuando debe aplicarse un análisis de perturbación singular.

**Aplicación de la Teoría de Perturbación Regular** Analizando la ecuación (2.54) para valores de  $\alpha \gg 1$ , se puede establecer una serie de solución a dicha ecuación.

Por lo comentado en la parte introductoria a éste capítulo, en este límite es posible obtener la solución del problema mediante el método de *perturbación regular* de la teoría de perturbaciones al considerar como parámetro de perturbación al recíproco del parámetro de conducción  $\alpha$ , esto es  $\alpha^{-1}$ . Para ello se considera que los cambios de temperatura de la pared del tubo,  $\theta_w$ , son pequeños en la coordenada longitudinal, del orden de  $\alpha^{-1}$ .

Asumiendo entonces que la temperatura adimensional de la pared del tubo puede representarse como una serie de la siguiente manera,

$$\theta_w(\chi) = \theta_0(\chi) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{-j} \theta_j(\chi), \quad (2.57)$$

e introduciendo esta serie en las ecuaciones (2.54) y (2.55), se obtiene una ecuación en función

del parámetro de perturbación,  $\alpha^{-1}$ . Con esto, se agrupan términos con semejante potencia en  $\alpha$ , lo que genera el siguiente conjunto de ecuaciones<sup>1</sup>:

$$\alpha^0 \quad \frac{d^2\theta_0}{d\chi^2} = 0, \quad (2.58)$$

$$\alpha^{-1} \quad \frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} + 1 = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left( \theta_{01} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_0}{d\chi'} d\chi' \right), \quad (2.59)$$

$$\alpha^{-2} \quad \frac{d^2\theta_2}{d\chi^2} = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left( \theta_{11} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_1}{d\chi'} d\chi' \right), \quad (2.60)$$

$$\alpha^{-3} \quad \frac{d^2\theta_3}{d\chi^2} = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left( \theta_{21} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_2}{d\chi'} d\chi' \right), \quad (2.61)$$

con las siguientes condiciones de frontera,

$$\left. \frac{d\theta_i}{d\chi} \right|_{\chi=0,1} = 0 \quad \text{para todo } i \geq 0. \quad (2.62)$$

La solución al conjunto de ecuaciones (2.58)-(2.62) se obtiene al resolver cada una de ellas de forma secuencial; es decir, se integra una sola vez la ecuación (2.58) y se evalúan las condiciones de frontera establecidas en (2.62), lo que da como resultado que el primer término de la solución,  $\theta_0$ , sea una constante,  $\theta_0 = cte$ . Para conocer el valor de dicha constante, es necesario resolver el siguiente orden de la expansión en  $\alpha^{-1}$ , que corresponde a la ecuación (2.59) simplificada, ya que el término integral desaparece al ser  $\theta_0 = cte$ , esto es:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} + 1 = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \theta_0. \quad (2.63)$$

Es importante mencionar que  $\theta_{01} = \theta_0$  ya que la temperatura en el orden cero es uniforme. Integrando la ecuación (2.63) y aplicando las condiciones de frontera (2.62), se obtiene que la temperatura adimensional en el orden principal es una función del índice de potencia del fluido

---

<sup>1</sup>por simplicidad se ha omitido el subíndice  $w$

de la siguiente forma:

$$\theta_0 = (2/3)^{1/3} \Gamma(4/3) \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \doteq 0.78 \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3}. \quad (2.64)$$

De igual manera, introduciendo la solución de  $\theta_0$  en la ecuación (2.59) se obtiene,

$$\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} + 1 = \frac{2}{3}\chi^{-1/3}, \quad (2.65)$$

e integrando (2.65) dos veces y aplicando las condiciones de frontera (2.62), se tiene que:

$$\theta_1(\chi) = -\frac{1}{2}\chi^2 + \frac{3}{5}\chi^{5/3} + C_1, \quad (2.66)$$

donde  $C_1$  es una constante de integración relacionada con la temperatura en el borde principal del tubo y que se determinará al resolver el siguiente orden de la expansión en  $\alpha$ . Sustituyendo las soluciones de  $\theta_0$  y  $\theta_1$  en ecuación (2.60) y resolviendo las integrales definidas, se tiene que:

$$\frac{d^2\theta_2}{d\chi^2} = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left( C_1 - \chi^2 B(2, 2/3) + \chi^{5/3} B(5/3, 2/3) \right), \quad (2.67)$$

donde  $B(a, b)$  representa la función beta completa [40]. Integrando (2.67) y evaluando nuevamente las condiciones de frontera definidas en (2.62) se obtiene que el valor  $C_1$  viene dado por:

$$C_1 = \frac{1}{4}B(2, 2/3) - \frac{2}{7}B(5/3, 2/3) \doteq -0.0683. \quad (2.68)$$

Nuevamente, empleando este procedimiento para obtener el siguiente orden de la expansión.  $\theta_2(\chi)$ , se integra con respecto a la coordenada longitudinal  $\chi$  la ecuación (2.67), con esto,

$$\begin{aligned} \theta_2(\chi : n) = C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} & \left\{ -\frac{9}{88}\chi^{11/3} B(2, 2/3) \right. \\ & \left. + \frac{9}{70}\chi^{10/3} B(5/3, 2/3) - \frac{9}{10}\chi^{5/3} C_1 + C_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde,

$$C_2 = \frac{3}{52}B(2, 2/3) + B(11/3, 2/3)$$

$$-\frac{1}{14}B(5/3, 2/3)B(10/3, 2/3) - \frac{3}{7}C_1B(5/3, 2/3) \doteq 0.0145. \quad (2.70)$$

Finalmente, la temperatura adimensional de pared del tubo hasta términos de orden  $\alpha^{-2}$ , se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \theta_w(\chi : n) = & 0.78 \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} + \frac{1}{\alpha} \left( -0.5\chi^2 + 0.6\chi^{5/3} + C_1 \right) \\ & + \frac{C_0}{\alpha^2} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left\{ -0.092\chi^{11/3} + 0.132\chi^{10/3} + 0.9C_1\chi^{5/3} + C_2 \right\} + O(\alpha^{-3}), \end{aligned} \quad (2.71)$$

y el número de Nusselt correspondiente toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \frac{Nu_\chi}{Gz^{1/3}} = & \frac{1.4962}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{2/3} \left\{ 0.78 \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} + \frac{1}{\alpha} [C_1 - 0.9\chi^2 + 1.0267\chi^{5/3}] \right. \\ & \left. + \frac{C_0}{\alpha^2} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} [C_2 - 0.19801\chi^{11/3} + 0.27588\chi^{10/3} + -0.10518\chi^{5/3}] \right\} + O(\alpha^{-3}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Mientras que el número de Nusselt global en un segundo orden corresponde a:

$$\frac{Nu}{Gz^{1/3}} = \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left\{ 1.7503 + \frac{0.0064}{\alpha} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \right\} + O(\alpha^{-2}). \quad (2.73)$$

El orden principal del lado derecho de las ecuaciones anteriores representa la solución clásica mostrada por Metzner [41] para un tubo con temperatura constante. También puede apreciarse de la ecuación (2.73) que el valor del número de Nusselt se incrementa a medida que el valor de  $\alpha$  disminuye.

### Solución Analítica para el Límite $\alpha \rightarrow 0$ (Inversión de Abel)

Para valores de  $\alpha$  pequeños comparados con la unidad pero grandes comparados con  $\varepsilon^2$ , la aproximación del límite térmicamente delgado es aún válida. En este caso, el término de conducción de calor longitudinal de la ecuación (2.54) puede ser despreciado en primera aproximación. Lo que implica que la pared del tubo es mala conductora y que no existirá difusión de calor longitudinal. Por lo que se retoma la solución clásica de tubo con flujo de calor pre-establecido en la frontera. Por otro lado, este límite es singular ya que no se cumplen con las condiciones adiabáticas en los bordes de la pared del tubo, lo cual provoca la aparición de dos capas límites



en los extremos del tubo. La estructuras de tales capas térmicas, no se analizan en el presente trabajo, ya que dichas capas térmicas sólo presentan una influencia local en el proceso. Fuera de esta zonas internas, la conducción de calor longitudinal en la pared del tubo es despreciable, reduciendo así el carácter o complejidad de la ecuación a una de primer orden,

$$1 = \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left[ \int_0^{\theta_w} K(\chi, \chi') d\theta'_w + \theta_{wl} \right]. \quad (2.74)$$

Debido a la baja conductividad térmica del tubo, la temperatura en el borde principal es prácticamente la misma que la del fluido de potencia en  $\chi = 0$ , de modo que  $\theta_{wl} = 0$ . Por lo que la ecuación (2.74) se reduce a:

$$1 = \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \int_0^{\theta_w} K(\chi, \chi') d\theta'_w. \quad (2.75)$$

Para resolver la ecuación anterior, se aplica el teorema de inversión de Abel [42]. La inversión de Abel se aplica cuando el integrando de una ecuación es desconocido, mientras que la función solución es dada, de la siguiente manera,

$$f(z) = \int_a^b \frac{G(y) dy}{(z-y)^\beta},$$

donde la función  $G(y)$  es desconocida, mientras  $f(z)$  es una función conocida y  $0 < \beta < 1$ . La solución a la ecuación anterior se obtiene mediante transformada de Laplace y el teorema de convolución [42], donde:

$$G(y) = \frac{\text{sen}(\beta\pi)}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^b \frac{f(y)}{(z-y)^{1-\beta}}.$$

Aplicando entonces la inversión de Abel a la ecuación (2.75) se obtiene:

$$\theta_w(\chi) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3}. \quad (2.76)$$

Para este caso, los números de Nusselt local y global se pueden escribir como:

$$\frac{Nu_\chi}{Gz^{1/3}} = \frac{1.411}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3}. \quad (2.77)$$

$$\frac{Nu}{Gz^{1/3}} = 2.1165 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3}. \quad (2.78)$$

Las soluciones mostradas por las ecuaciones (2.76) y (2.77) han sido reportadas como correlaciones para flujo de calor constante en la frontera por Mizushina et al. [43] y por Bird et al. [4]; así como por Cho y Hartnett [10].

Comparando los números de Nusselt globales, ecuaciones (2.73) y (2.78), se concluye que el efecto de conducción de calor longitudinal reduce aproximadamente en un 17% la razón de transferencia de calor.

### 2.5.3 Límite térmicamente grueso ( $\alpha/\varepsilon^2 \ll 1$ )

#### Solución Analítica

Para valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  del orden de la unidad, las variaciones de temperatura adimensional de la pared del tubo en la dirección radial son importantes y del mismo orden de magnitud de la diferencia de temperatura global en el sistema,  $\Delta T$ . Este es el caso conocido como *límite térmicamente grueso*, y en el cual no se justifica asumir que la temperatura sea sólo función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , sino también de la coordenada radial  $\sigma$ .

Por lo tanto, la ecuación de la energía adimensional de la pared del tubo (2.42) toma la siguiente forma, al despreciar ahora los efectos de conducción de calor axial,

$$(1 + \sigma\varepsilon_0) \frac{\partial \theta_w(\chi, \sigma)}{\partial \sigma} = (1 + \varepsilon_0) \frac{\partial \theta_w(\chi)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=1} = \frac{\partial \theta_w(\chi)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0}, \quad (2.79)$$

la ecuación anterior se genera al integrar (2.42) con respecto a la coordenada transversal. La solución de la ecuación (2.79) se obtiene al tomar la primera igualdad del lado derecho y al reemplazar las condiciones de frontera (2.45) y (2.48), lo que conduce a:

$$1 = \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left[ \int_0^{\theta_w} K(\chi, \chi') d\theta'_w \right] \quad (2.80)$$

que resulta ser la misma ecuación obtenida para el límite térmicamente delgado cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , representado por la ecuación (2.74) y cuya solución es la ecuación (2.76),

$$\theta_w(\chi) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3}, \quad (2.81)$$

esta ecuación representa la variación de temperatura en la cara interior del tubo ( $\sigma = 0$ ). Para tomar en cuenta ahora los efectos radiales de transferencia de calor, se emplea el lado izquierdo de la igualdad (2.79),

$$(1 + \sigma\varepsilon_0) \frac{\partial \theta_w(\chi, \sigma)}{\partial \sigma} = (1 + \varepsilon_0) \left. \frac{\partial \theta_w(\chi)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1}, \quad (2.82)$$

y sustituyendo la condición de frontera (2.45),

$$\frac{\partial \theta_w(\chi, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha (1 + \sigma\varepsilon_0)}, \quad (2.83)$$

se puede integrar directamente la ecuación anterior y se obtiene:

$$\theta_w(\chi, \sigma) = \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha \varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0\sigma) + F(\chi) \quad (2.84)$$

donde  $F(\chi)$  representa la temperatura para  $\sigma = 0$ . De esta forma, sustituyendo la ecuación (2.81) en (2.84) se obtiene la solución final para el límite térmicamente grueso,

$$\theta_w(\chi, \sigma : n) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3} + \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha \varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0\sigma). \quad (2.85)$$

Equivalentemente, el número de Nusselt correspondiente al sustituir en la ecuación (2.46) resulta.

$$\frac{Nu_\chi}{Gz^{1/3}} = \frac{2}{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3} + \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha \varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0\sigma)}. \quad (2.86)$$

Como un análisis adicional a la ecuación anterior, se asume que el efecto de curvatura es despreciable, de modo que el número de Nusselt aplicable para el límite térmicamente grueso puede describirse de la siguiente manera:

$$\frac{Nu_\chi}{Gz^{1/3}} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha}}, \quad (2.87)$$

mientras que el número de Nusselt global toma la siguiente forma, según ecuación (2.47),

$$\frac{Nu}{Gz^{1/3}} = \frac{2b}{\pi^{1/3}} \left( \frac{3}{2} - 3b \frac{\varepsilon^2}{\alpha} + 3b^2 \frac{\varepsilon^4}{\alpha^2} \ln \left( \frac{b + \alpha/\varepsilon^2}{b} \right) \right), \quad (2.88)$$

donde,

$$b = \frac{2\pi C_0}{3\sqrt{3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} = 1.0334 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3}.$$

Para valores grandes de  $\varepsilon^2/\alpha$  comparados con la unidad, el comportamiento asintótico es dado por,

$$\frac{Nu}{Gz^{1/3}} \sim 1.3656 \frac{\alpha}{\varepsilon^2} - 0.99109 \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \right)^2 + O \left( \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \right)^3. \quad (2.89)$$

El primer término del lado derecho corresponde al caso de que únicamente exista conducción de calor transversal. Por el otro lado, para valores de  $\varepsilon^2/\alpha$  pequeños comparados con la unidad, el comportamiento asintótico esta dado por

$$\frac{Nu}{Gz^{1/3}} \sim 2.1167 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} - 4.3748 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{2/3} \frac{\varepsilon^2}{\alpha} + O \left( \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right)^2, \quad (2.90)$$

que es el caso de conducción de calor longitudinal.

## Capítulo 3

# Análisis del problema en estado transitorio

### 3.1 Modelo físico

El modelo físico simplificado que se estudia en el presente capítulo es similar al de la figura (2-1), con las siguientes características. Un fluido viscoso no-newtoniano caracterizado por la ley de potencia, fluye en régimen laminar completamente desarrollado dentro de un tubo liso de radio interno  $R$  y espesor  $h$ . Por simplicidad se asume que el fluido ingresa a una temperatura constante  $T_0$  y en una zona localizada de la superficie externa del tubo, de longitud  $L$ , en el instante  $t = 0$ , se extrae una tasa uniforme de calor ( $q_e$ ).

Debido a la conductividad térmica finita de la pared del tubo,  $\lambda_w$ , la tasa de calor retirada es influenciada por los efectos de conducción de calor en el sólido en las direcciones radial y longitudinal, así como los efectos de acumulación en éste. Por lo cual, el proceso de transferencia de calor se lleva a cabo de forma conjunta entre el fluido no-newtoniano y la pared del tubo. De esta manera, se pretende determinar la evolución de la temperatura del sistema convectivo-conductivo en función del tiempo.

Cabe mencionar que la hipótesis de flujo hidrodinámicamente desarrollado no se ve alterada ya que sólo se pretende estudiar el transitorio térmico en la pared del tubo y en el fluido mismo. Con lo que la aplicación del salto de flujo de calor en la superficie externa del tubo no modifica el campo de velocidades, por lo que la solución obtenida en el estado permanente para la ecuación

de cantidad de movimiento aún es válida.

## 3.2 Modelo matemático

### 3.2.1 Fluido no-newtoniano

Partiendo de la solución de la ecuación de cantidad de movimiento para un fluido no-newtoniano completamente desarrollado en régimen laminar,

$$u(r) = \frac{3n+1}{n+1} \bar{u} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right], \quad (3.1)$$

la ecuación de la energía para el fluido no-newtoniano en régimen laminar y transitorio corresponde a:

$$\rho c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right\}, \quad (3.2)$$

considerando que los efectos de disipación viscosa son despreciables.

Las condiciones inicial, de frontera y de continuidad en la temperatura correspondientes a la ecuación (3.2) son,

$$T(z, r, 0) = T_0, \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T(z, R, t) = T_w(z, R, t), \quad (3.4)$$

$$T(0, r, t) = T_0, \quad \left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Pared del Tubo

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para un análisis transitorio y bi-dimensional, puede escribirse como:

$$\rho_w c_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = \lambda_w \left\{ \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) \right\} \quad (3.6)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera e inicial,

*Condiciones Inicial*

$$T_w(z, r, 0) = T_0 \quad (3.7)$$

*Condiciones Adiabáticas*

$$\left. \frac{\partial T_w(r, t)}{\partial z} \right|_{z=0, L} = 0, \quad (3.8)$$

*Superficie Interna*

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T_w(z, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = \lambda \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (3.9)$$

*Superficie Externa*

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=R+h} = q_e. \quad (3.10)$$

Las condiciones de continuidad en la temperatura y en el flujo de calor correspondientes a las ecuaciones (3.4) y (3.9), incorporan al análisis de la pared del tubo los efectos conjugados de transferencia de calor.

### 3.3 Estimación de los órdenes de magnitud

En relación al orden de magnitud del espesor de capa límite térmica ( $\delta$ ), se toma el espesor máximo que corresponde al orden de magnitud estimado en el análisis permanente. Lo anterior corresponde a la expresión (2.21) obtenida en el capítulo 2;

$$\frac{\delta}{L} \sim \left[ \frac{n}{3n+1} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{1}{Pe} \right]^{1/3}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, debido a las condiciones adiabáticas en ambos extremos del tubo y considerando las direcciones de los flujos de calor que atraviesan las superficies del tubo ( $q_f$  y  $q_e$ ), es posible establecer el orden de magnitud del calor almacenado en el sólido a través del tiempo. La diferencia de calor global entre el fluido de potencia y el calor removido en la superficie externa del tubo es proporcional al calor acumulado en la pared de éste último,

$$q_f - \left( 1 + \frac{h}{R} \right) q_e \sim \rho_w c_w h \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) \frac{T_{w0} - T_{w\infty}}{t_e}, \quad (3.12)$$

donde  $t_e$  representa el tiempo característico de evolución del proceso,  $\rho_w$  y  $c_w$  representan la densidad y calor específico de la pared del tubo, respectivamente.  $T_{w0}$  y  $T_{w\infty}$  representan las temperaturas de la pared del tubo en el inicio y cuando se alcanza el estado permanente del proceso, respectivamente. Por otro lado, los órdenes de magnitud de ambos flujos de calor se

relacionan mediante,

$$q_f + \left(1 + \frac{h}{R}\right) q_e \sim 2\lambda_w \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \frac{\Delta T_w}{h}. \quad (3.13)$$

donde  $\Delta T_w$  representa la caída de temperatura en la pared del tubo en la dirección radial. De la relación (3.12), se aprecia que para tiempos de evolución largos ( $t_e \rightarrow \infty$ ), se recobra la relación para estado permanente,

$$q_{f\infty} \sim \left(1 + \frac{h}{R}\right) q_e, \quad (3.14)$$

Introduciendo (3.14) en relación (3.13) se obtiene el orden de magnitud del cambio de temperatura en la pared del tubo en el estado permanente,

$$\Delta T_{w\infty} \sim \frac{q_e h \left(1 + \frac{h}{R}\right)}{\lambda_w \left(1 + \frac{h}{2R}\right)}. \quad (3.15)$$

Por otro lado, el cambio de temperatura global en el sistema puede ser estimado mediante la relación

$$\Delta T = \Delta T_f + \Delta T_w,$$

y de esta forma es posible obtener la caída de temperatura relativa de la pared del tubo y del fluido con respecto a la global del sistema. Para esto, es necesario emplear la relación anterior junto con (3.15) y la ley de Fourier correspondiente al fluido ( $\Delta T_f \sim q_f \delta / \lambda_f$ ), entonces:

$$\frac{\Delta T_{w\infty}}{\Delta T_\infty} \sim \frac{1}{1 + \Delta T_{f\infty} / \Delta T_{w\infty}}, \quad (3.16)$$

donde,

$$\frac{\Delta T_{f\infty}}{\Delta T_{w\infty}} \sim \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{1/3}, \quad (3.17)$$

y  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_0$  corresponden al parámetro de conducción y las relaciones geométricas del tubo respectivamente, definidos en el capítulo anterior.

Para valores de  $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ , la variación transversal de temperatura en la pared del tubo comparado con el cambio global  $\Delta T_\infty$  es muy pequeño, del orden de  $\varepsilon^2/\alpha$  a lo más. Esto representa nuevamente, el límite de pared *térmicamente delgado*. Por otro lado, para valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  del orden de la unidad, la caída de temperatura transversal en la pared del tubo es



del orden de magnitud del cambio global. Este representa el límite de pared *térmicamente grueso*. Empleando las relaciones (3.15) junto con (3.16), se tiene que el cambio global de la temperatura del sistema se puede escribir como:

$$\Delta T_{\infty} \sim \frac{q_e h}{\lambda_w} \frac{(1 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0/2)} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left( \frac{n}{3n + 1} \right)^{1/3} \right], \quad (3.18)$$

considerando que el índice de potencia toma valores del orden de la unidad; puede determinarse el valor característico de la caída de temperatura,  $\Delta T_c$ , que se emplea en el proceso de adimensionalización y corresponde a:

$$\Delta T_c \sim \frac{\alpha q_e h}{\varepsilon^2 \lambda_w} \frac{(1 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0/2)}. \quad (3.19)$$

Por otro lado, el valor final de la temperatura en el plano medio de la pared del tubo puede ser evaluado mediante,

$$T_{w_{\infty}} \sim T_{f_0} - \Delta T_{f_{\infty}} - \frac{1}{2} \Delta T_{w_{\infty}}, \quad (3.20)$$

donde los subíndices 0 e  $\infty$  corresponden a las condiciones iniciales y de estado permanente respectivamente. Empleando las relaciones (3.15) y (3.17) para evaluar los órdenes de magnitud de  $\Delta T_{f_{\infty}}$  y  $\Delta T_{w_{\infty}}$  en (3.20), se obtiene,

$$T_{w_{\infty}} \sim T_{f_0} - \frac{q_e h}{\lambda_w} \frac{(1 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0/2)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left( \frac{n}{3n + 1} \right)^{1/3} \right], \quad (3.21)$$

con lo que basta con sustituir la relación (3.21) en la (3.12) para obtener el orden de magnitud del tiempo de evolución del proceso,  $t_e$ ,

$$t_e \sim \rho_w c_w h \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \left\{ \frac{T_{w_0} - T_{f_0}}{q_e (1 + \varepsilon_0)} + \frac{h}{\lambda_w (1 + \varepsilon_0/2)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left( \frac{n}{3n + 1} \right)^{1/3} \right] \right\}. \quad (3.22)$$

De la relación anterior puede asumirse, sin pérdida de generalidad, que el valor de la temperatura de pared al inicio del proceso ( $T_{w_0}$ ) sea el mismo que el valor de la temperatura inicial del fluido de potencia,  $T_{f_0} = T_0$ ; de esta forma, (3.22) se simplifica a:

$$t_e \sim t_d \left[ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^{1/3} \right], \quad (3.23)$$

donde  $t_d$  es el tiempo de difusión en la pared del tubo en la dirección radial,  $t_d \sim h^2 \rho_w c_w / \lambda_w$ . El correspondiente tiempo de difusión en la pared en la dirección longitudinal es  $t_{dL} = \rho_w c_w L^2 / \lambda_w$ . Con lo que el tiempo de evolución del proceso puede escribirse de la siguiente manera,

$$t_e \sim \alpha t_{dL}. \quad (3.24)$$

Resulta de gran utilidad conocer el orden de magnitud del tiempo de evolución con respecto a los tiempos característicos involucrados en el problema. Uno de estos tiempos es el tiempo de residencia,  $t_R$ , el cual define la escala de tiempo que tarda una partícula en pasar por una sección de longitud  $L$  a velocidad media,  $\bar{u}$ . La relación del tiempo de residencia con respecto al tiempo de evolución del proceso se define como:

$$Ho = \frac{t_R}{t_e} = \frac{L/\bar{u}}{\alpha t_{dL}} = \frac{1}{\alpha Pe} \frac{R \lambda_w}{L \lambda} \frac{\rho c}{\rho_w c_w} = \frac{\pi}{\alpha Gz} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\lambda_w}{\lambda} \frac{\rho c}{\rho_w c_w}, \quad (3.25)$$

donde  $Ho$  corresponde al número de *homocronicidad* del problema [44] y relaciona el tiempo requerido para que una partícula pase la sección  $L$  con respecto al tiempo necesario para que térmicamente sufra algún efecto, que en este caso se toma como el tiempo de evolución en la pared del tubo. Para establecer el orden de magnitud del número de homocronicidad, se presentan las tablas 1, 2 y 3, en las cuales se muestran diferentes longitudes de tubos, basados en la relación  $R/L$ . Los datos mostrados son resultados experimentales presentados en [45]

$R/L=1/950$	$\alpha$	$Re$	$Pr$	$Gz$	$Ho$
<i>Al - Separan</i>	$1.19 \times 10^{-5}$	3060	29.2	295.5	0.5554
<i>Cu - Separan</i>	$2.01 \times 10^{-5}$	3060	29.2	295.5	0.4522
<i>Al - Polyox</i>	$1.25 \times 10^{-5}$	1830	42.2	255.4	0.6161
<i>Cu - Polyox</i>	$2.12 \times 10^{-5}$	1830	42.2	255.4	0.4984

Tabla 1. Determinación del número de homocronicidad para tubos largos.

$R/L=1/50$	$\alpha$	$Re$	$Pr$	$Gz$	$Ho$
<i>Al – Separan</i>	$1.61 \times 10^{-3}$	3060	29.2	5614.2	0.0780
<i>Cu – Separan</i>	$2.73 \times 10^{-3}$	3060	29.2	5614.2	0.0635
<i>Al – Polyox</i>	$1.695 \times 10^{-3}$	1830	42.2	4852.3	0.0860
<i>Cu – Polyox</i>	$2.86 \times 10^{-3}$	1830	42.2	4852.3	0.0700

Tabla 2. Determinación del número de homocronicidad para tubos de longitud media.

$R/L=1$	$\alpha$	$Re$	$Pr$	$Gz$	$Ho$
<i>Al – Separan</i>	1.093	3060	29.2	280708	0.0057
<i>Cu – Separan</i>	1.850	3060	29.2	280708	0.0047
<i>Al – Polyox</i>	1.148	1830	42.2	242613	0.0063
<i>Cu – Polyox</i>	1.942	1830	42.2	242613	0.0052

Tabla 3. Determinación del número de homocronicidad para tubos cortos

De estas se desprende que el valor estimado del número de homocronicidad es menor a la unidad. Esto implica que el tiempo que requiere una partícula para percibir algún efecto térmico debido al efecto transitorio en la pared del tubo, es pequeño comparado con el tiempo en que dicha partícula pasa por la sección en análisis. Con lo anterior, se puede establecer que el proceso de transferencia de calor en el fluido, para las condiciones establecidas, se lleva a cabo en régimen cuasi-permanente como se verá a continuación.

### 3.4 Ecuaciones adimensionales

#### 3.4.1 Fluido no-newtoniano

El proceso de adimensionalización de la ecuación de la energía para el fluido de potencia en estado transitorio consiste en introducir las siguientes variables adimensionales en la ecuación (3.2) junto con sus respectivas condiciones de frontera e inicial definidas en (3.3)-(3.5),

$$\theta = \frac{T_0 - T}{\Delta T_c}, \quad \chi = \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t}{\alpha \rho_w c_w L^2 / \lambda_w}, \quad (3.26)$$

con esto se obtiene la ecuación de la energía para el fluido de potencia en forma adimensional,

$$Ho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( \frac{3n+1}{n+1} \right) (1 - \eta^{(n+1)/n}) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{L}{R} \right) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{Pe} \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2}. \quad (3.27)$$

En (3.27) puede notarse la aparición del número de homocronicidad, el cual multiplica al término temporal; esto implica que puede ser despreciado dicho término para valores de  $Ho$  pequeños ( $Ho \ll 1$ ) y con ello, la solución a la ecuación (3.27) se lleva a cabo con ayuda del método desarrollado en apéndice A. Para esto, como se comentó anteriormente, el proceso de transferencia de calor en el fluido de potencia se lleva a cabo de manera cuasi-permanente.

Las condiciones de frontera e inicial que complementan el problema corresponden a:

$$\theta(\chi, \eta, \tau = 0) = 0 \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \theta(\tau, \chi, 1) = \theta_w(\tau, \chi, 0) \quad (3.29)$$

$$\theta(0, \eta, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(\eta, \tau)}{\partial \chi} \right|_{\chi \rightarrow \infty} = 0, \quad (3.30)$$

### 3.4.2 Pared del tubo

Para obtener la ecuación adimensional de la energía en la pared del tubo, se requiere sustituir las siguientes variables adimensionales en la ecuación (3.6) junto con sus condiciones de frontera, inicial y de continuidad en el flujo de calor (3.7)-(3.10),

$$\theta_w = \frac{T_0 - T_w}{\Delta T_c}, \quad \sigma = \frac{r - R}{h}, \quad \tau = \frac{t}{\alpha \rho_w c_w L^2 / \lambda_w} \quad (3.31)$$

realizando lo anterior se obtiene la ecuación de la energía adimensional para la pared del tubo,

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1 + \sigma \varepsilon_0)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (1 + \sigma \varepsilon_0) \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right), \quad (3.32)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera e inicial,

*Condiciones Inicial :*

$$\theta_w(\chi, \sigma, 0) = 0. \quad (3.33)$$

*Condiciones Adiabáticas:*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = 0. \quad (3.34)$$

*Superficie Interna:*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{\lambda}{\lambda_w} \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}. \quad (3.35)$$

*Superficie Externa:*

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1} = \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha (1 + \varepsilon_0)}. \quad (3.36)$$

Al igual que en el análisis en estado permanente, existen diversos parámetros que intervienen en la solución del sistema de ecuaciones (3.27)-(3.30) y (3.32)-(3.36), añadiéndose como variable adicional el tiempo. Con lo que el perfil de temperatura en la pared del tubo tiene la siguiente relación funcional:

$$\theta_w = \theta_w (\chi, \sigma, \tau : n, \alpha, \varepsilon, \varepsilon_0).$$

Es importante mencionar que en el análisis transitorio, el cálculo del número de Nusselt no es tan relevante, ya que el cálculo del flujo de calor adimensional se realiza en condiciones de estado permanente. Es decir, no resulta representativo estimar un flujo de calor función del tiempo bajo las condiciones de frontera establecidas en este problema, en donde el estado permanente se alcanza y se analiza a detalle.

## 3.5 Metodología de solución

### 3.5.1 Reformulación del problema

El conjunto de ecuaciones (3.27)-(3.36) presentado en la sección anterior, se resuelve mediante técnicas analíticas, asintóticas y numéricas.

En el caso de la ecuación de la energía en el fluido, como fue comentado con anterioridad, la solución se obtiene analíticamente al aplicar la teoría de capa límite, tomando en cuenta que el cociente de los tiempos de residencia a los tiempos de evolución del proceso, representado por el número de homocronicidad, son pequeños comparados con la unidad ( $Ho \ll 1$ ). En esta caso es posible analizar la ecuación de la energía del fluido de potencia como un estado cuasi-permanente y la solución mostrada en el apéndice A es igualmente aplicable.

La ecuación de la energía adimensional para el sólido (3.32), con sus condiciones de frontera respectivas (3.33)-(3.36), debe resolverse de manera numérica con la finalidad de tomar en cuenta los efectos geométricos del tubo, así como al parámetro de conjugación  $\alpha$ . Por la hipótesis cuasi-permanente en el fluido, se sustituye la solución obtenida en el apéndice A para el flujo de potencia en la condición de continuidad en el flujo de calor (3.35), de modo que ésta se describe como:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} C_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wl} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\} \quad (3.37)$$

donde  $C_0 = 12^{1/3}/\Gamma(1/3) = 0.8546$ . La ecuación (3.37) es la misma condición de continuidad en el flujo de calor obtenida para el caso permanente. En consecuencia el sistema de ecuaciones resultantes puede resolverse siguiendo la estructura de los límites asintóticos tratados para el caso permanente.

### 3.5.2 Límite térmicamente delgado ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ )

En este límite, la temperatura adimensional de la pared del tubo no depende, en primera aproximación, de la coordenada  $\sigma$ , como se anticipó en la relación (3.16). De esta forma, la temperatura del tubo puede expresarse de la siguiente manera,

$$\theta_w(\chi, \sigma, \tau) = \theta_{w0}(\chi, \tau) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \theta_{w1}(\chi, \sigma, \tau) + \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)^2 \theta_{w2}(\chi, \sigma, \tau) + \dots, \quad (3.38)$$

sustituyendo la expansión anterior en la ecuación (3.32), se tiene que la ecuación de la energía hasta términos de orden cero se escribe como:

$$\frac{\partial \theta_{w0}}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial \chi^2} + \frac{1}{(1 + \sigma \varepsilon_0)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (1 + \sigma \varepsilon_0) \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right). \quad (3.39)$$

Realizando el mismo procedimiento en las condiciones de frontera, se tiene para la

*Superficie Interna:*

$$\frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{C_0}{\chi^{1/3}} (1 + \varepsilon_0/2) \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3} \left\{ \theta_{wl} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta_{w0}}{d\chi'} d\chi' \right\} \quad (3.40)$$

*Superficie Externa:*

$$\left. \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1} = \frac{(1 + \varepsilon_0/2)}{(1 + \varepsilon_0)}, \quad (3.41)$$

tanto la condición inicial, como las condiciones adiabáticas permanecen sin cambio a las mostradas en (3.33) y (3.34).

Ahora bien, puesto que en primera aproximación  $\theta_{w0}$  no es función de la coordenada  $\sigma$ , es posible integrar la ecuación (3.39) a lo largo de la coordenada transversal,

$$\frac{\partial \theta_{w0}}{\partial \tau} = \alpha (1 + \varepsilon_0/2) \frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial \chi^2} + (1 + \varepsilon_0) \left. \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1} - \left. \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}, \quad (3.42)$$

sustituyendo ahora en la ecuación (3.42) las condiciones (3.40) y (3.41), se obtiene la ecuación transitoria integro-diferencial que describe la temperatura de la pared del tubo en el límite térmicamente delgado, esto es:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + 1 - \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left( \theta_{wl} + \int_0^\chi K(\chi, \chi') \frac{d\theta_w'}{d\chi'} d\chi' \right). \quad (3.43)$$

En el primer término del lado derecho de la ecuación (3.43), corresponde a los efectos de difusión axial en la pared del tubo, mientras que el segundo término representa el calor removido en la superficie externa del tubo, siendo el tercer término del mismo lado el calor transferido por el fluido no-newtoniano a la pared interna del tubo. El lado izquierdo de la ecuación (3.43) representa los efectos de acumulación de energía. Las condiciones en los bordes, así como la condición inicial de la temperatura del tubo continúan siendo:

$$\theta_w(\chi, 0) = 0, \quad (3.44)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = 0. \quad (3.45)$$

La ecuación (3.43) junto con las respectivas condiciones de frontera e inicial (3.44) y (3.45) representan una ecuación integro-diferencial para  $\theta_w(\tau, \chi)$  con dos parámetros adimensionales  $\alpha$  y  $n$ .

## Solución Numérica al Límite Térmicamente Delgado

El método numérico de solución de la ecuación (3.43) consiste en un esquema convencional de diferencias finitas. La ecuación para el límite térmicamente delgado es discretizada siguiendo el esquema descrito en [46]. Considerando una malla unitaria se aplica el esquema implícito de Crank-Nicholson para obtener resultados con un error del  $\Delta\chi^2$ . El tamaño de la malla propuesto a lo largo del tubo es de  $\Delta\chi = 0.01$  con incrementos en el tiempo de  $\Delta\tau = 0.01$ . Por tratarse de un esquema numérico de diferencias finitas implícito, no existe problema alguno con la convergencia del método, únicamente aplicar de forma correcta el proceso de discretización en la ecuación (3.43), para ello es indispensable analizar previamente el término integro-diferencial.

$$f(\chi) = \chi^{-1/3} \int_0^\chi \left(1 - \frac{\chi'}{\chi}\right)^{-1/3} \frac{d\theta_w}{d\chi'} d\chi', \quad (3.46)$$

haciendo  $\chi = i\Delta\chi$ , aproximando la integral como un número finito de sumas de la siguiente manera,

$$f(i\Delta\chi) \int_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi} \sum_{k=1}^i \left(\frac{d\theta}{d\chi'}\right)_k \frac{d\chi'}{(\chi - \chi')^{1/3}}, \quad (3.47)$$

y utilizando el siguiente cambio de variable:

$$u = (\chi - \chi')^{1/3}, \quad d\chi' = -3u^2 du, \quad (3.48)$$

es posible aproximar la expresión (3.47) de la siguiente manera,

$$f(i\Delta\chi) = \sum_{k=1}^i \left(\frac{d\theta}{d\chi'}\right)_k \int_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi} -3u du, \quad (3.49)$$

e integrando,

$$f(i\Delta\chi) = \sum_{k=1}^i \left(\frac{d\theta}{d\chi'}\right)_k \left(-\frac{3}{2}u^2\right) \Big|_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi} = \sum_{k=1}^i \left(\frac{d\theta}{d\chi'}\right)_k \left(-\frac{3}{2}(\chi - \chi')^{2/3}\right) \Big|_{(k-1)\Delta\chi}^{k\Delta\chi}, \quad (3.50)$$

y evaluando los límites de integración, se tiene que:

$$f(i\Delta\chi) = \frac{3}{2}\Delta\chi^{2/3} \sum_{k=1}^i \left(\frac{d\theta}{d\chi'}\right)_k \left[(i+1-k)^{2/3} - (i-k)^{2/3}\right]. \quad (3.51)$$



donde el gradiente  $d\theta/d\chi'$  mediante Crank-Nicholson se escribe como:

$$\frac{d\theta}{d\chi'} = \frac{1}{4\Delta\chi} \left\{ \theta_{k+1}^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1} + \theta_{k+1}^n - \theta_{k-1}^n \right\}. \quad (3.52)$$

Con lo anterior, la parte integro-diferencial de la ecuación (3.43) toma la siguiente forma en diferencias finitas,

$$f(i\Delta\chi) = \frac{3}{8\Delta\chi^{1/3}} \sum_{k=1}^i \left\{ \theta_{k+1}^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1} + \theta_{k+1}^n - \theta_{k-1}^n \right\} \left[ (i+1-k)^{2/3} - (i-k)^{2/3} \right]. \quad (3.53)$$

Aplicando el esquema de diferencias finitas a toda la ecuación (3.43), se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{(\theta_i^{n+1} - \theta_i^n)}{\Delta\tau} &= \frac{\alpha}{2\Delta\chi^2} \left\{ \theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1} + \theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n \right\} + 1 \\ &- \frac{3}{8\Delta\chi^{1/3}} \sum_{k=1}^i \left\{ \theta_{k+1}^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1} + \theta_{k+1}^n - \theta_{k-1}^n \right\} \left[ (i+1-k)^{2/3} - (i-k)^{2/3} \right] \\ &- \frac{C_0}{(i\Delta\chi)^{-1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \theta_0^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En la ecuación anterior, es evidente la existencia de la singularidad en  $i = 0$  ( $\chi = 0$ ). Mediante una expansión de Taylor en la proximidad de este punto se determina que,

$$\theta_0 = \frac{25\alpha}{18C_0(\Delta\chi)^{5/3} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} + 25\alpha} \theta_1, \quad \chi \rightarrow 0. \quad (3.55)$$

Incluyendo el término anterior en la ecuación (3.54), se obtiene la ecuación que describe la temperatura de pared del tubo en su límite térmicamente delgado en diferencias finitas,

$$\begin{aligned} \frac{C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3}}{(i\Delta\chi)^{1/3}} \left\{ \frac{25\alpha}{18C_0\Delta\chi^{5/3} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} + 25\alpha} \right\} \theta_1^{n+1} - \left\{ \frac{\alpha}{2\Delta\chi^2} \right\} \theta_{i-1}^{n+1} \\ + \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{\alpha}{\Delta\chi^2} \right\} \theta_i^{n+1} - \left\{ \frac{\alpha}{2\Delta\chi^2} \right\} \theta_{i+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3C_0 \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3}}{8\Delta\chi^{1/3}} \sum_{k=1}^i \left\{ \theta_{k+1}^{n+1} - \theta_{k-1}^{n+1} \right\} \left[ (i+1-k)^{2/3} - (i-k)^{2/3} \right] = \\
& 1 + \left\{ \frac{\alpha}{2\Delta\chi^2} \right\} \theta_{i-1}^n + \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\alpha}{\Delta\chi^2} \right\} \theta_i^n + \left\{ \frac{\alpha}{2\Delta\chi^2} \right\} \theta_{i\tau+1}^n \\
& - \frac{3C_0 \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3}}{8\Delta\chi^{1/3}} \sum_{k=1}^i \left\{ \theta_{k+1}^n - \theta_{k-1}^n \right\} \left[ (i+1-k)^{2/3} - (i-k)^{2/3} \right]. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

La solución a esta ecuación, se obtiene numéricamente mediante un programa realizado en lenguaje FORTRAN 77. Para llevar a cabo lo anterior, se establecen valores arbitrarios a los parámetros  $\alpha$  y  $n$ . Las corridas numéricas se realizaron en una estación de trabajo  $O_2$  de *Silicon Graphics*.

### Solución Asintótica para $\alpha \gg 1$

**Generalidades** Como fue comentado en el Capítulo 2, las series de perturbación se dividen para su análisis en dos, la primera de ellas, la serie de *perturbación regular*, se tiene cuando el término de orden cero de la expansión representa la solución del problema y los demás términos son pequeñas correcciones a éste. La segunda serie de perturbación es conocida como una serie de *perturbación singular* y se presenta cuando al hacer cero el parámetro de perturbación se pierde información física del problema. Diversos problemas físicos se caracterizan por la presencia de pequeñas perturbaciones que, debido a su influencia a lo largo del tiempo, tienen efectos de acumulación nada despreciables; en estos casos se aplica un análisis local como lo es la *Teoría de Escalas Múltiples* [39], [47].

**Solución Mediante Escalas Múltiples** En el límite de  $\alpha \gg 1$  la solución mediante series de perturbación de la ecuación (3.43) es singular debido a que la condición inicial no se satisface, por lo que se establecen dos escalas de tiempo en el problema. Una escala larga  $s$  del orden de la unidad,  $s = \tau \sim 1$ , que controla el proceso global de la respuesta transitoria en la pared del tubo y una escala corta  $\kappa$  del orden de  $\tau\alpha \sim \kappa = O(1)$  al inicio del proceso. Para resolver tal problema, se aplica el método de escalas múltiples de la teoría de perturbaciones; de esta

forma, se asume la siguiente expansión en la temperatura de la pared del tubo,

$$\theta_w(\chi, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{-j} \theta_j(\chi, s, \kappa), \quad (3.57)$$

donde las escalas de tiempo  $s$  y  $\kappa$  se definen como,

$$s = \tau \left( 1 + \frac{\omega_1}{\alpha} + \frac{\omega_2}{\alpha^2} + \frac{\omega_3}{\alpha^3} + \dots \right), \quad \kappa = \alpha\tau. \quad (3.58)$$

Con lo que el término temporal de la ecuación (3.43) toma la forma,

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial \theta_w}{\partial \kappa} + \left( 1 + \frac{\omega_1}{\alpha} + \frac{\omega_2}{\alpha^2} + \frac{\omega_3}{\alpha^3} + \dots \right) \frac{\partial \theta_w}{\partial s}, \quad (3.59)$$

e introduciendo las ecuaciones (3.57) y (3.59) en ecuaciones (3.43), (3.44) y (3.45), se obtiene después de agrupar términos con semejante potencia en  $\alpha$  y omitiendo el subíndice  $w$ .

$\alpha^0$  :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \kappa} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2}, \quad (3.60)$$

$\alpha^{-1}$  :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa} + \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \chi^2} + 1 - \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left( \theta_{0i} + \int_{\theta_{1i}}^{\theta_1} K(\chi, \chi') d\theta'_0 \right), \quad (3.61)$$

$\alpha^{-2}$  :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \kappa} + \frac{\partial \theta_1}{\partial s} + \omega_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi^2} - \frac{C_0}{\chi^{1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \left( \theta_{1i} + \int_{\theta_{1i}}^{\theta_1} K(\chi, \chi') d\theta'_1 \right), \quad (3.62)$$

con las siguientes condiciones de frontera e inicial,

$$\theta_i(\chi, 0, 0) = 0 \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0,1} = 0 \quad \text{para todo } i \geq 0. \quad (3.63)$$

Para obtener el orden principal u orden cero de la serie propuesta en (3.57), se integra la ecuación (3.60) y evaluando los límites de integración de  $\chi = 0$  a  $\chi = 1$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^1 \theta_0(\chi, \kappa) d\chi = 0, \quad (3.64)$$

de donde se concluye que el orden cero de la expansión,  $\theta_0$ , no es una función de la escala de tiempo corta,  $\kappa$ , ni de la coordenada longitudinal  $\chi$ , siendo a lo más, función de la escala de tiempo larga  $s$ , de forma que  $\theta_0 = \theta_0(s)$ .

Para encontrar la función anteriormente comentada, es necesario integrar el siguiente orden de la expansión,  $\alpha^{-1}$ , mostrada en la ecuación (3.61). Al hacer esto y aplicar sus condiciones adiabáticas resulta,

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^1 \theta_1 d\chi = 1 - \frac{3}{2} C_0 \theta_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} - \frac{d\theta_0}{ds}, \quad (3.65)$$

de donde debe cumplirse con:

$$\frac{d\theta_0}{ds} + \frac{3}{2} C_0 \theta_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} = 1, \quad (3.66)$$

para evitar la aparición de términos seculares en  $\theta_1$ . Un *término secular* se define como un elemento de la solución cuyo valor para tiempos cortos es acotado pero a través del tiempo tiende a diverger. Esto se debe a que el término no homogéneo forma parte de la solución global de la ecuación integro-diferencial [39].

Integrando directamente (3.66) y utilizando la condición inicial del problema,  $\theta_0(s=0) = 0$  la solución para  $\theta_0$  corresponde a:

$$\theta_0(s) = \frac{1}{\beta'} [1 - \exp(-\beta' s)]. \quad (3.67)$$

donde,

$$\beta' = \frac{3}{2} C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3}, \quad (3.68)$$

es fácil distinguir que  $\beta'$  representa el recíproco de la temperatura de pared del tubo en el estado permanente para valores de  $\alpha \gg 1$ , (2.64); de esta forma, puede apreciarse de la ecuación (3.67) que para tiempos de evolución largos se recobra al análisis en estado permanente.

Introduciendo la solución  $\theta_0(s)$  en de la ecuación (3.61) y ordenando términos, la ecuación en  $\theta_1$  se transforma en:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \kappa} = [1 - \exp(-\beta' s)] \left( \frac{2}{3} \chi^{-1/3} - 1 \right), \quad (3.69)$$

cuya solución para  $\theta_1(\chi, s, \kappa)$  puede expresarse de la siguiente manera al integrar con respecto a la coordenada  $\chi$ ,

$$\theta_1(\chi, s, \kappa) = \theta_0(s) \beta' \left( \frac{3}{5} \chi^{5/3} - \frac{1}{2} \chi^2 + g(\kappa, \chi) \right). \quad (3.70)$$

Ahora bien, sustituyendo la ecuación anterior en ecuación (3.69) con el objeto de obtener una ecuación para la función desconocida  $g(\chi, \kappa)$ , se tiene que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \chi^2} - \frac{\partial g}{\partial \kappa} = 0, \quad (3.71)$$

y la solución propuesta en (3.70) será válida siempre y cuando se logre resolver (3.71) con las siguientes condiciones de frontera e inicial,

$$g(\chi, 0) = - \left( \frac{3}{5} \chi^{5/3} - \frac{1}{2} \chi^2 \right), \quad \frac{\partial g}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0,1} = 0. \quad (3.72)$$

La solución de la ecuación (3.71) es presentada en el apéndice B, ya que se requiere un análisis matemático detallado. De esta forma, utilizando variable compleja [48], la solución de la ecuación (3.71) corresponde a,

$$g(\chi, \kappa) = -\frac{7}{120} + \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\chi)}{(n\pi)^{8/3}} \exp\left[-(n\pi)^2 \kappa\right]. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, la solución del primer orden de la expansión, ecuación (3.70) resulta ser finalmente,

$$\begin{aligned} \theta_1(\chi, s, \kappa) = [1 - \exp(-\beta's)] \left\{ \frac{3}{5} \chi^{5/3} - \frac{1}{2} \chi^2 - \frac{7}{120} \right. \\ \left. + \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\chi)}{(n\pi)^{8/3}} \exp\left[-(n\pi)^2 \kappa\right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde la temperatura en el borde principal en primer orden corresponde,

$$\theta_1(0, s, \kappa) = [1 - \exp(-\beta's)] \left\{ \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-(n\pi)^2 \kappa\right]}{(n\pi)^{8/3}} - \frac{7}{120} \right\}. \quad (3.75)$$

Para concluir con el análisis de escalas múltiples, se requiere determinar el valor del término  $\omega_1$  para evitar que éste se convierta en término secular y poder así evaluar la escala de tiempo

larga  $s$  mostrada en ecuación (3.58). Sustituyendo los términos de  $\theta_0$  y  $\theta_1$  en la ecuación (3.62),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi^2} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \kappa} &= \beta' \exp(-\beta' s) \left\{ \frac{3}{5} \chi^{5/3} - \frac{1}{2} \chi^2 - \frac{7}{120} + \frac{\omega_1}{\beta'} \right\} \\ &+ C_0 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_0(s) \beta' \left[ \chi^{5/3} B(5/3, 2/3) - \chi^2 B(2, 2/3) - \frac{7}{120} \right] \right\} \\ &- \frac{C_0}{\chi^{-1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \theta_0(s) \beta' \Gamma(5/3) \left\{ \int_0^\chi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi\chi')}{(n\pi)^{5/3}} \exp[-(n\pi)^2 \kappa] d\chi' \right. \\ &\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \kappa]}{(n\pi)^{8/3}} \right\} + \beta' \exp(-\beta' s) \Gamma(5/3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\chi)}{(n\pi)^{8/3}} \exp[-(n\pi)^2 \kappa], \end{aligned} \quad (3.76)$$

integrando ecuación (3.76) con respecto a la coordenada longitudinal y aplicando las condiciones adiabáticas en los límites  $\chi = 0$  y  $\chi = 1$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^1 \theta_2 d\chi &= D \exp[-\beta' s] + \beta' \left\{ \frac{2}{7} B(5/3, 2/3) - \frac{1}{4} B(2, 2/3) - \frac{7}{120} \right\} \\ &\int_0^1 \left\{ -\frac{C_0}{\chi^{-1/3}} \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \theta_0(s) \beta' \Gamma(5/3) \left\{ \int_0^\chi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi\chi')}{(n\pi)^{5/3}} \exp[-(n\pi)^2 \kappa] d\chi' \right. \right. \\ &\left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \kappa]}{(n\pi)^{8/3}} \right\} \right\} d\chi + \int_0^1 \left\{ \beta' \exp(-\beta' s) \Gamma(5/3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\chi)}{(n\pi)^{8/3}} \exp[-(n\pi)^2 \kappa] \right\} d\chi, \end{aligned} \quad (3.77)$$

donde  $D$  se define como:

$$D = \omega_1 - \beta' \left\{ \frac{2}{7} B\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4} B\left(2, \frac{2}{3}\right) - \frac{7}{120} \right\}, \quad (3.78)$$

y tiene que ser cero con la finalidad de que no se convierta  $\omega_1$  en un término secular; de esta forma,

$$\omega_1 = \beta' \left\{ \frac{2}{7} B(5/3, 2/3) - \frac{1}{4} B(2, 2/3) - \frac{7}{120} \right\}. \quad (3.79)$$

Finalmente, la temperatura adimensional en la pared del tubo corresponde a:

$$\theta_w(\chi, s, \kappa : \alpha) = \frac{1}{\beta'} (1 - \exp[-\beta' s]) \left\{ 1 + \frac{\beta'}{\alpha} \left[ \frac{3}{5} \chi^{5/3} - \frac{1}{2} \chi^2 - \frac{7}{120} \right] \right\}$$

$$+\Gamma \left( \frac{5}{3} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\chi)}{(n\pi)^{8/3}} \exp \left[ -(n\pi)^2 \kappa \right] \Bigg\} \quad (3.80)$$

para las escalas de tiempo definidas en la ecuación (3.58).

### 3.5.3 Solución numérica global

Como fue comentado en el apartado de reformulación del problema, el conjunto de ecuaciones (3.32)-(3.37) debe resolverse de manera numérica, de tal forma que los efectos geométricos y del parámetro de conjugación sean tomados en cuenta. Por lo anterior, se aplica un análisis convencional de diferencias finitas como se muestra a continuación.

En lo que respecta a la ecuación de la energía adimensional de la pared del tubo, al igual que en las condiciones de frontera, se aplica un esquema implícito con la finalidad de que el método numérico sea estable. Con lo anterior se tiene que la ecuación de la energía adimensional de la pared del tubo a resolver corresponde a:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \sigma^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon_0}{(1 + \sigma \varepsilon_0)} \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma}, \quad (3.81)$$

tomando el siguiente esquema de discretización

$$\theta(\chi, \sigma, \tau) \longrightarrow \Theta(j, i, n)$$

$$\chi = j\Delta\chi, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

$$\sigma = i\Delta y, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\tau = n\Delta\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

donde las diferenciales parciales se aproximan a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma^2} = \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} = \frac{\Theta_{i,j+1} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i,j-1}}{\Delta \chi^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j}^{anterior}}{\Delta \tau}$$

aplicando discretización propuesta en (3.81),

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\Theta_{i,j+1} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i,j-1}}{\Delta \chi^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{\Delta y^2} \\ & + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon_0}{(1 + i\Delta y \varepsilon_0)} \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2\Delta y} = \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j}^{anterior}}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (3.82)$$

factorizando términos,

$$\begin{aligned} & \Theta_{i+1,j} \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\Delta \chi^2}{\Delta y^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon_0}{(1 + i\Delta y \varepsilon_0)} \frac{\Delta \chi^2}{2\Delta y} \right\} \\ & + \Theta_{i,j} \left\{ -2\alpha - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\Delta \chi^2}{\Delta y^2} - \frac{\Delta \chi^2}{\Delta \tau} \right\} \\ & + \Theta_{i-1,j} \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\Delta \chi^2}{\Delta y^2} - \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon_0}{(1 + i\Delta y \varepsilon_0)} \frac{\Delta \chi^2}{2\Delta y} \right\} \\ & + \Theta_{i,j+1} \{\alpha\} + \Theta_{i,j-1} \{\alpha\} = \Theta_{i,j}^{anterior} \left( -\frac{\Delta \chi^2}{\Delta \tau} \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Con lo que finalmente se obtiene la ecuación de la energía en el tubo en diferencias finitas. Aplicando el mismo esquema de diferencias finitas a las correspondientes condiciones de frontera e inicial,

*Condiciones Inicial :*

$$\Theta(j, i, 0) = 0. \quad (3.84)$$

*Condiciones Adiabáticas:*

$$\left. \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{\Delta \chi} \right|_{j=1,M} = 0. \quad (3.85)$$

*Superficie Interna:*

$$\left. \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{\Delta y} \right|_{i=1} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} C_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wi} + \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\}. \quad (3.86)$$

*Superficie Externa:*

$$\left. \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{\Delta y} \right|_{i=N} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{(1 + \varepsilon_0/2)}{(1 + \varepsilon_0)}. \quad (3.87)$$



De las condiciones de frontera anteriores, nuevamente se tiene la necesidad de realizar un análisis particular a la parte integral de la ecuación (3.86). Para tal efecto se asume que la integral se puede aproximar como un número finito de sumas de la siguiente manera:

$$q(\chi) = \int_0^\chi \frac{1}{(1 - \chi'/\chi)^{1/3}} \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' = \sum_{k=1}^{j-1} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \int_{(j-1)\Delta\chi}^{j\Delta\chi} \frac{d\chi'}{(1 - \chi'/\chi)^{1/3}}, \quad (3.88)$$

para poder evaluar la parte integral, es necesario que previamente se lleve a cabo el siguiente cambio de variable  $u = \chi'/\chi$ ,  $d\chi' = \chi du$ ; entonces,

$$q(\chi) = \sum_{k=1}^{j-1} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \int_{(j-1)\Delta\chi}^{j\Delta\chi} \frac{\chi du}{(1 - u)^{1/3}}, \quad (3.89)$$

e integrando y empleando la definición de beta incompleta,

$$B\chi(a, b, \chi) = \int_0^\chi \chi u^{1-a} (1 - u)^{b-1} d\chi$$

se tiene que:

$$q(\chi) = j\Delta\chi \sum_{k=1}^{j-1} \left( \frac{d\theta'_w}{d\chi'} \right)_k \left[ B\chi\left(1, 2/3, \frac{k}{j-1}\right) - B\chi\left(1, 2/3, \frac{k-1}{j-1}\right) \right]. \quad (3.90)$$

Asimismo, se aplica la discretización al gradiente de temperatura adimensional en la coordenada longitudinal sobre la variable muda  $\chi'$ ,

$$q(\chi) = j\Delta\chi \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Theta_{i,k+1} - \Theta_{i,k}}{\Delta\chi'} \left[ B\chi\left(1, 2/3, \frac{k}{j-1}\right) - B\chi\left(1, 2/3, \frac{k-1}{j-1}\right) \right]. \quad (3.91)$$

Llevando la ecuación (3.91) en (3.86) y considerando que  $\Delta\chi' = \Delta\chi$ ,

$$\frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{\Delta y} \Big|_{z=1} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} C_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1/3} (\Delta\chi)^{-1/3} \left\{ \Theta_{i,1} + j \sum_{k=1}^{j-1} (\Theta_{i,k+1} - \Theta_{i,k}) \left[ B\chi\left(1, 2/3, \frac{k}{j-1}\right) - B\chi\left(1, 2/3, \frac{k-1}{j-1}\right) \right] \right\}, \quad (3.92)$$

se obtiene la ecuación discretizada de la condición de continuidad en flujo de calor. La ecuación (3.92) junto con el sistema previo (3.83)-(3.87) son resueltas mediante un programa en *Fortran*.

## Capítulo 4

# Resultados y conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para el problema de transferencia de calor conjugada en fluidos no-newtonianos en tuberías en sus análisis permanente (Capítulo 2) y transitorio (Capítulo 3). En ambos casos se muestran los perfiles de temperatura de la pared del tubo obtenidos mediante técnicas numéricas y asintóticas, así como analíticas cuando fue posible.

De manera general los resultados tienen la finalidad:

- a) Demostrar la influencia de los efectos conjugados de transferencia de calor en fluidos no-newtonianos.
- b) Dado los valores del cociente  $\alpha/\varepsilon^2$  estudiar los límites térmicos relevantes.
- c) Demostrar la influencia del índice de potencia  $n$  en el proceso de transferencia de calor conjugada.
- d) Presentar la metodología general para el tratamiento de los problemas conjugados en transferencia de calor.
- e) Mostrar la validez de los métodos asintóticos para algunos valores del parámetro  $\alpha/\varepsilon^2$  y  $\alpha$ .
- f) Comparar resultados asintóticos con herramientas numéricas.
- g) Validar resultados con datos experimentales citados en la literatura.

## 4.1 Análisis permanente

El proceso de transferencia de calor es controlado por cuatro parámetros adimensionales:  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_0$  para valores del número de Graetz mucho mayores a la unidad. El índice de potencia  $n$  establece las características del fluido y con el se determina si se trata de un fluido Newtoniano ( $n = 1$ ), un fluido pseudoplástico ( $n < 1$ ) o un fluido dilatante ( $n > 1$ ). El parámetro  $\alpha$  relaciona los efectos de conducción de calor longitudinal en la pared del tubo al ser un cociente entre las conductividades térmicas de la pared del tubo y el fluido de potencia, tal y como lo muestra la ecuación (2.29). De este modo, la conducción de calor longitudinal es importante para valores no muy pequeños de  $\alpha$  comparados con la unidad. Otro parámetro relevante se representa mediante el cociente  $\alpha/\varepsilon^2$ , el cual determina el régimen térmico en la pared del tubo. El inverso de este parámetro es conocido como el número de Brun o parámetro de conjugación. Para valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  mucho mayores a la unidad, la variación de la temperatura en la dirección radial en la pared del tubo es despreciable comparado con el cambio global provocado por el flujo de calor externo. Este límite es el llamado térmicamente delgado. En éste régimen, los gradientes de temperatura en la pared del tubo son del orden de  $\Delta T_c/\alpha L$ , para valores no muy pequeños del parámetro  $\alpha$  y del orden de  $\Delta T_c/L$  para valores pequeños de  $\alpha$ . Importantes gradientes de temperatura aparecen en el límite térmicamente grueso, con gradientes del orden de  $\Delta T_c/h$ . En el límite de valores de  $\alpha$  mucho mayores a la unidad, la temperatura de pared adimensional es prácticamente uniforme y es proporcionada en primera aproximación por el primer término de la ecuación (2.71). De esta relación,  $\theta_0$  es una función del índice de potencia alcanzando el límite asintótico de  $\theta_0 \rightarrow 0.8586$  para el caso de un fluido dilatante ( $n > 1$ ). Por el contrario, para valores de  $n < 1$ , que corresponde a un fluido pseudoplástico, la temperatura de pared en unidades físicas es mayor que para un fluido dilatante; indicando esto un gran calentamiento de la pared del material para un flujo pseudoplástico.

Obviamente para valores de  $n \ll 1$ , la temperatura adimensional de la pared del tubo tiende a cero, sugiriendo que es fácil alcanzar el equilibrio térmico con el fluido. Lo anterior es un resultado esperado, en virtud de que el decremento de los valores del índice de potencia, provoca una reducción del espesor de capa límite térmica en el fluido de potencia, lo que puede ser fácilmente verificado de la relación (2.21).

Por otro lado, para valores de  $\alpha \rightarrow 0$ , la ecuación que representa el límite térmicamente

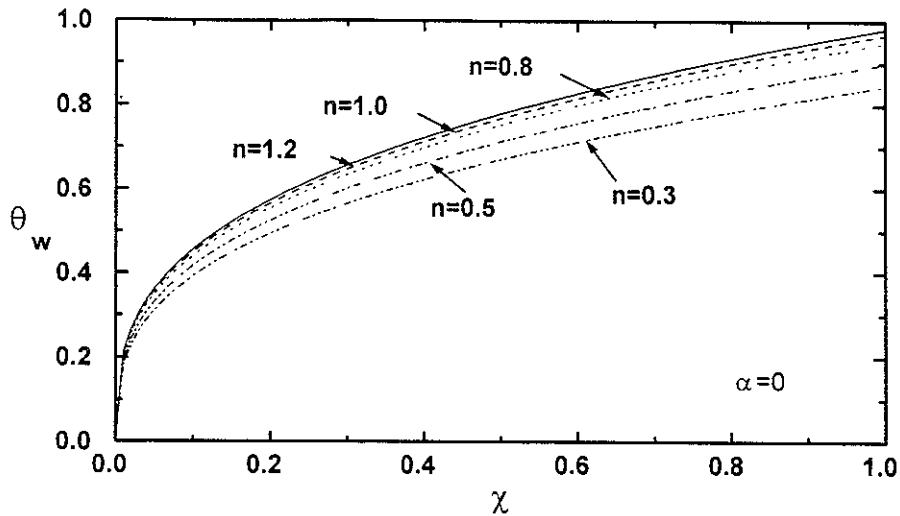


Figura 4-1: Temperatura adimensional de pared para  $\alpha = 0$  y diferentes valores de  $n$ .

delgado (2.54) es singular. Eso significa que es necesario incluir dos capas térmicas internas en ambos bordes de la pared del tubo. Sin embargo, estas capas límites térmicas sólo tienen una influencia local, razón por la cual no se estudia la solución en dichas regiones. Fuera de éstas, existe una zona externa de la temperatura adimensional de la pared del tubo la cual es mostrada en la figura (4-1) como una función de la coordenada longitudinal para  $\alpha = 0$  y diferentes valores del índice  $n$ . En esta figura se emplea la solución dada por la relación (2.76).

Resulta evidente de la figura (4-1) que cuando los valores del índice de potencia se incrementan, el valor de la temperatura adimensional también se incrementa, esto debido a los altos valores de resistencia térmica del fluido de potencia.

En la figura (4-2) aparecen las soluciones numérica y asintótica de la ecuación (2.54) para la temperatura adimensional de la pared del tubo como una función de la coordenada longitudinal  $\chi$  para  $\alpha = 1$  y diferentes valores del índice de potencia  $n$ . Por otro lado, aún y cuando la solución asintótica para valores de  $\alpha \gg 1$  en el límite térmicamente delgado ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ ) ofrece

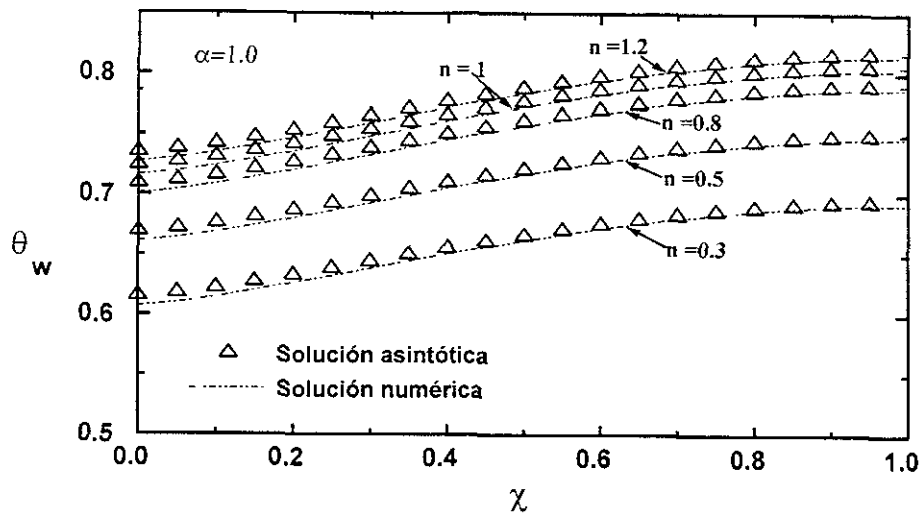


Figura 4-2: Temperatura adimensional de pared para  $\alpha = 1$  y diferentes valores de  $n$ .

excelentes resultados, se confirma que aún para valores de  $\alpha \sim 1$  proporciona una excelente aproximación con respecto a la solución numérica.

En la figura (4-3) la misma dependencia paramétrica de la temperatura de pared adimensional se muestra para valores de  $\alpha = 10$ . Obviamente, en este caso la concordancia entre las soluciones numérica y asintótica se incrementa al grado de que se hace imperceptible la diferencia. De esta figura se puede apreciar que para valores del parámetro  $\alpha$  mucho mayores a la unidad, la temperatura adimensional de la pared del tubo tiende a alcanzar un valor uniforme, dependiendo solamente del valor del índice de potencia  $n$ , lo cual confirma el caso de temperatura uniforme en la superficie externa del tubo.

En la figura (4-4) se muestra la relación  $Nu_\chi/Gz^{1/3}$ , presentada en la ecuación (2.77), como una función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para diferentes valores del índice de potencia  $n$  y  $\alpha = 0$ . Para este conjunto de valores de los parámetros  $\alpha$  y  $n$ , la relación  $Nu_\chi/Gz^{1/3}$  muestra una muy sensible dependencia para valores muy pequeños de  $n$ . Por lo tanto, la razón de transferencia de calor adimensional se incrementa drásticamente para valores de  $n$  pequeños.

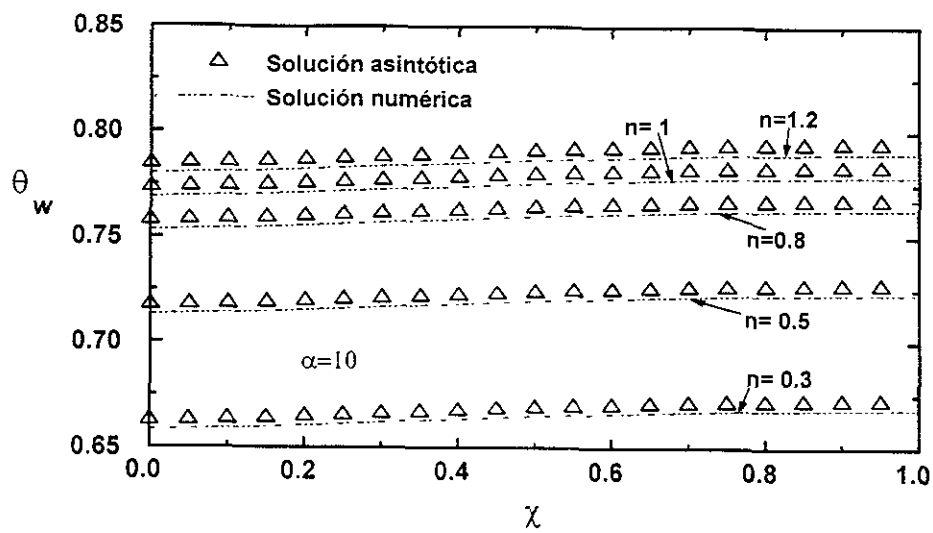


Figura 4-3: Temperatura adimensional de pared para  $\alpha = 10$  y diferentes valores de  $n$ .

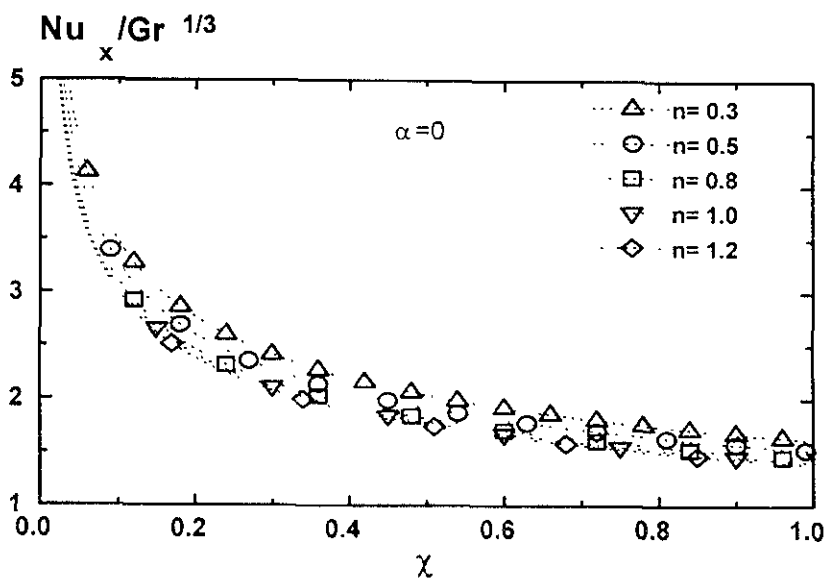


Figura 4-4: Número de Nusselt local para  $\alpha = 0$  y diferentes valores de  $n$ .

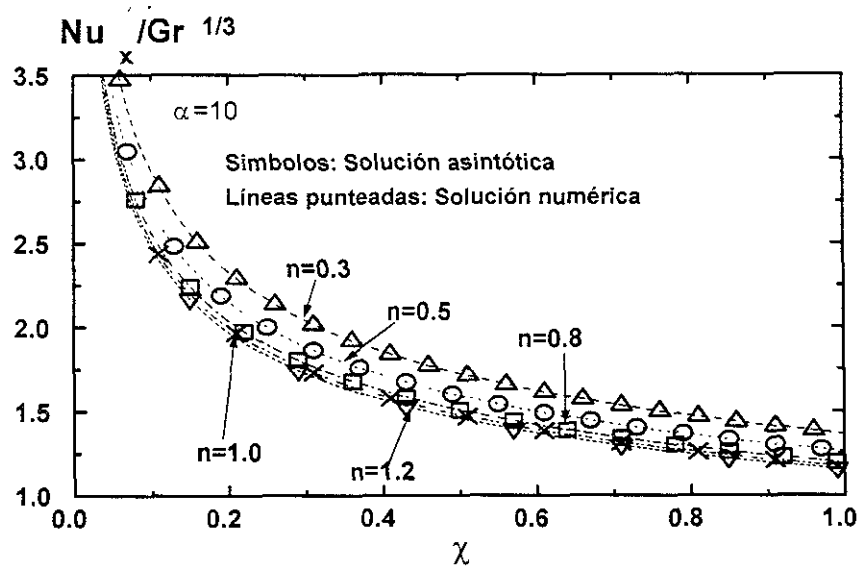


Figura 4-5: Número de Nusselt local para  $\alpha = 10$  y diferentes valores de  $n$ .

Esta tendencia también se verifica en la figura (4-5), donde la misma relación  $Nu_x / Gr^{1/3}$  se grafica para  $\alpha = 10$  y diversos valores de  $n$ . Analizando las figuras (4-4) y (4-5), se puede concluir que para valores fijos de  $\alpha$ , el flujo de calor adimensional es siempre favorable para valores pequeños del índice de potencia.

Por otro lado, la figura (4-6) muestra el valor promedio o global de la relación  $Nu / Gr^{1/3}$  como una función de  $\alpha$ . En esta figura, se presentan las soluciones numéricas y asintóticas en términos de  $\alpha^{-1}$  y  $\alpha^{-2}$ . En ella también se puede distinguir que para valores críticos de  $\alpha \sim 1$  las soluciones de la teoría de perturbación no son ya válidas. Sin embargo, se separaron ambas soluciones asintóticas para mostrar que la solución de segundo orden de la expansión representa una mejor aproximación con respecto a los resultados numéricos. En ellas también se reportó el valor asintótico para  $Nu / Gr^{1/3}$  con  $\alpha = 0$ , empleando la ecuación (2.77). Es evidente que la solución numérica tiende a validar las soluciones asintóticas.

Finalmente, atendiendo al análisis permanente, la figura (4-7) muestra el número de Nusselt global mediante la relación  $Nu / Gr^{1/3}$  para los límites térmicos delgado y grueso como una

$Nu/Gz^{1/3}$

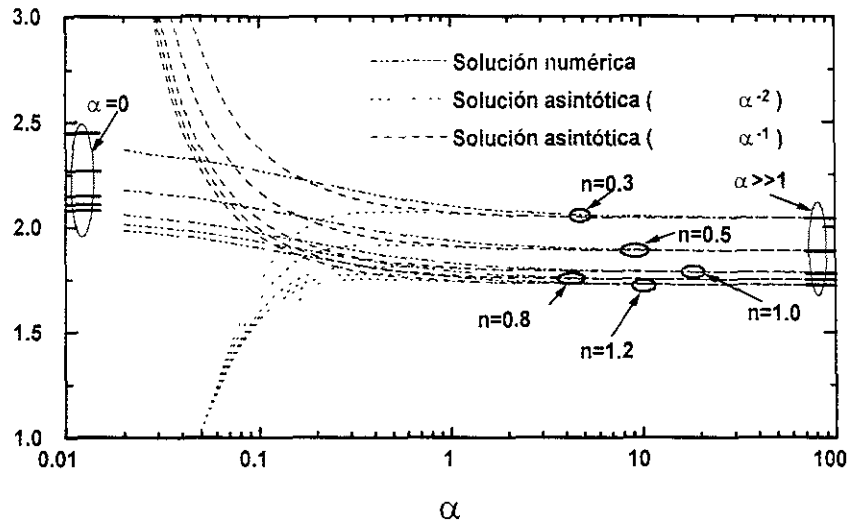


Figura 4-6: Número de Nusselt global para diferentes valores de  $n$ .

función de  $\alpha$  y de  $\alpha/\varepsilon^2$ , respectivamente. Para valores de  $\alpha$  muy pequeños comparados con  $\varepsilon^2$  (límite térmicamente grueso) el número de Nusselt global es pequeño y básicamente el proceso de transferencia de calor se debe a la conducción de calor a través de la pared del tubo. Conforme el valor de  $\alpha$  se incrementa, el número de Nusselt se verá incrementado drásticamente hasta alcanzar un valor máximo para valores de  $\varepsilon^2 \ll \alpha \ll 1$ . En este punto, la conducción de calor longitudinal a través de la pared del tubo es despreciable, puesto que el valor de  $\alpha$  es aún muy pequeño comparado con la unidad. Según se incrementa el valor de  $\alpha$ , la conducción de calor longitudinal a lo largo de la pared del tubo es ahora importante y sus efectos tienden a reducir el valor del número de Nusselt global, alcanzando éste un valor finito conforme  $\alpha \rightarrow \infty$ .



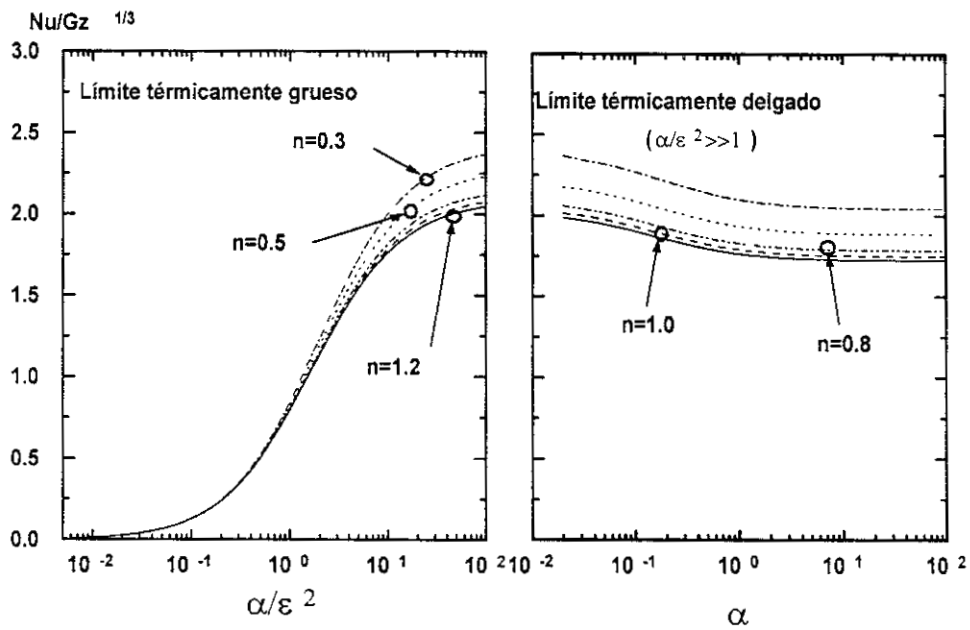


Figura 4-7: Número de Nusselt global como una función de  $\alpha$  y  $\epsilon$  para diferentes valores de  $n$ . Los límites térmicamente delgado y térmicamente grueso son mostrados.

$R/L=1/950$	$Gz$	$\alpha$	$\alpha/\varepsilon^2$	$n$	$Nu/Gz^{1/3}[13]$	$Nu/Gz^{1/3}$	%Dif.
<i>Al - Separan</i>	296	$1 \times 10^{-5}$	1191	0.787	2.157	2.163	0.31
<i>Cu - Separan</i>	296	$2 \times 10^{-5}$	2015	0.787	2.157	2.163	0.31
<i>Al - Polyox</i>	255	$1 \times 10^{-5}$	1250	0.764	2.163	2.170	0.31
<i>Cu - Polyox</i>	255	$2 \times 10^{-5}$	2115	0.764	2.163	2.170	0.31

Tabla 4. Cálculo de los números de Nusselt global en tubos largos para diferentes sustancias

$R/L=1/50$	$Gz$	$\alpha$	$\alpha/\varepsilon^2$	$n$	$Nu/Gz^{1/3}[13]$	$Nu/Gz^{1/3}$	%Dif.
<i>Al - Separan</i>	5614	$2 \times 10^{-3}$	403	0.787	2.157	2.163	0.31
<i>Cu - Separan</i>	5614	$3 \times 10^{-3}$	681	0.787	2.157	2.163	0.31
<i>Al - Polyox</i>	4852	$2 \times 10^{-3}$	423	0.764	2.163	2.170	0.31
<i>Cu - Polyox</i>	4852	$3 \times 10^{-3}$	715	0.764	2.163	2.170	0.31

Tabla 5. Cálculo de los números de Nusselt global en tubos de longitud media para diferentes sustancias.

$R/L=1$	$Gz$	$\alpha$	$\alpha/\varepsilon^2$	$n$	$Nu/Gz^{1/3}[13]$	$Nu/Gz^{1/3}$	%Dif.
<i>Al - Separan</i>	280708	1.1	109	0.787	2.157	1.795	16.76
<i>Cu - Separan</i>	280708	1.9	185	0.787	2.157	1.793	16.88
<i>Al - Polyox</i>	242613	1.2	115	0.764	2.163	1.800	16.78
<i>Cu - Polyox</i>	242613	1.9	194	0.764	2.163	1.798	16.89

Tabla 6 Cálculo de los números de Nusselt global en tubos cortos para diferentes sustancias

A manera de constatar e ilustrar los resultados obtenidos se presentan las tablas 4, 5 y 6, en donde se muestra la influencia de la conducción de calor longitudinal en la pared del tubo en el proceso representado por la relación  $Nu/Gz^{1/3}$ . En la tabla 4 se emplean los datos reportados por Cho y Hartnett [10] para tubos largos. Se calculan los respectivos valores de  $\alpha$  y  $\alpha/\varepsilon^2$  a la vez de asumir un  $\varepsilon = h/L = 10^{-4}$ , se establecen las propiedades térmicas de dos tubos metálicos (Aluminio y Cobre). En todos los casos experimentales, los valores de  $\alpha$  son muy pequeños, próximos a cero, pero con valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  grandes comparados con la unidad. Por lo anterior, se concluye que la solución que es adaptable al análisis experimental es la analizada en el límite

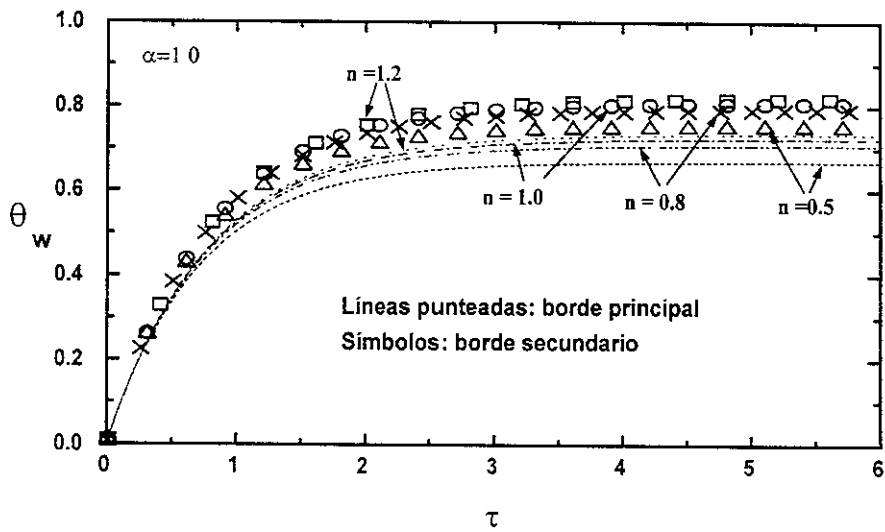


Figura 4-8: Comparación de la temperatura adimensional en los bordes principal ( $\chi = 0$ ) y secundario ( $\chi = 1$ ) para diferentes valores de  $n$  y  $\alpha = 1.0$

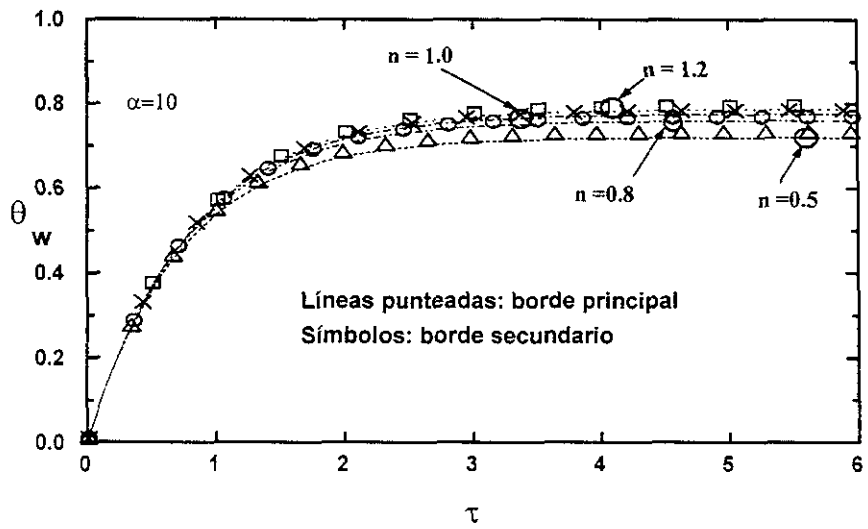


Figura 4-9: Comparación de la temperatura adimensional en los bordes principal ( $\chi = 0$ ) y secundario ( $\chi = 1$ ) para diferentes valores de  $n$  y  $\alpha = 10$ .

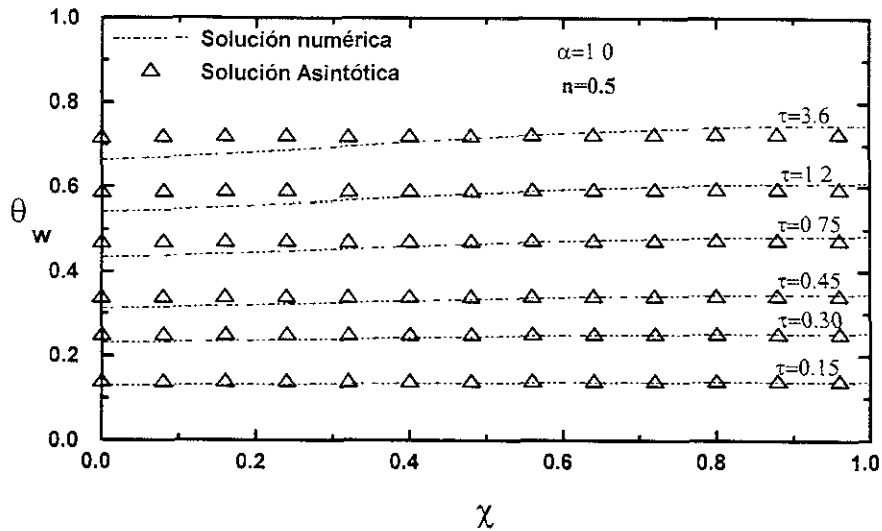


Figura 4-10: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 0.5$  y  $\alpha = 1.0$

gradientes térmicos en la coordenada longitudinal y el perfil de temperatura se aproxima a una línea recta conforme el tiempo evoluciona. Por otro lado, para establecer una comparación entre los métodos de solución empleados en la resolución de la ecuación (3.43), se presenta la figura (4-10), en ella se muestra la evolución de temperatura adimensional de la pared del tubo como una función de la coordenada longitudinal para diferentes tiempos y valores del índice de potencia  $n = 0.5$  y del parámetro de conjugación de  $\alpha = 1.0$ . Cabe destacar que la solución asintótica obtenida mediante el esquema de escalas múltiples presenta una distribución de temperatura prácticamente lineal, lo que sugiere la necesidad de calcular un término superior en la expansión asintótica. Desgraciadamente, el cálculo de dicho término resulta ser por demás complicado. Sin embargo, el término comentado de la expansión no aporta mayor información del fenómeno físico.

Para confirmar lo ya comentado en la figura (4-10) se presenta las figuras (4-11) y (4-12) para una combinación semejante de parámetros, excepto por el valor del índice de potencia que varía de  $n = 0.5$  a  $n = 1$  y  $n = 1.2$ , respectivamente. De ellas se desprende que para

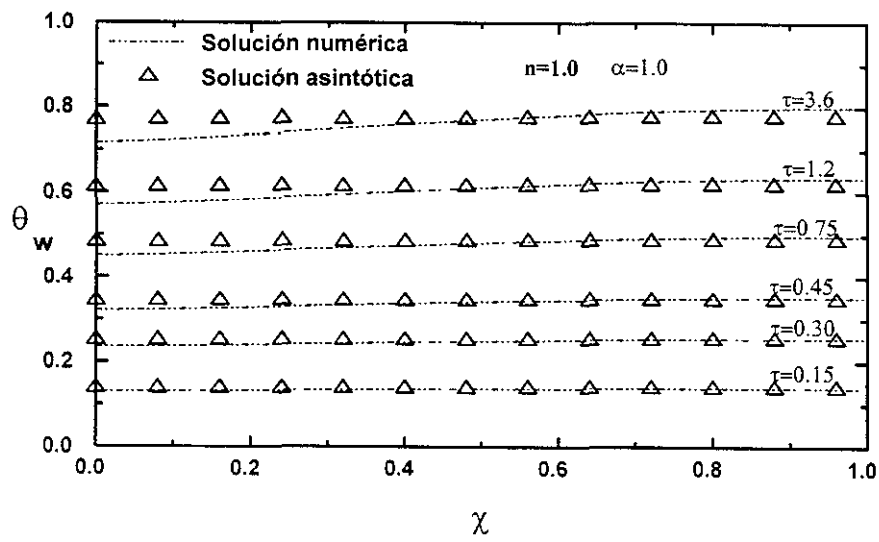


Figura 4-11: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 1.0$  y  $\alpha = 1.0$

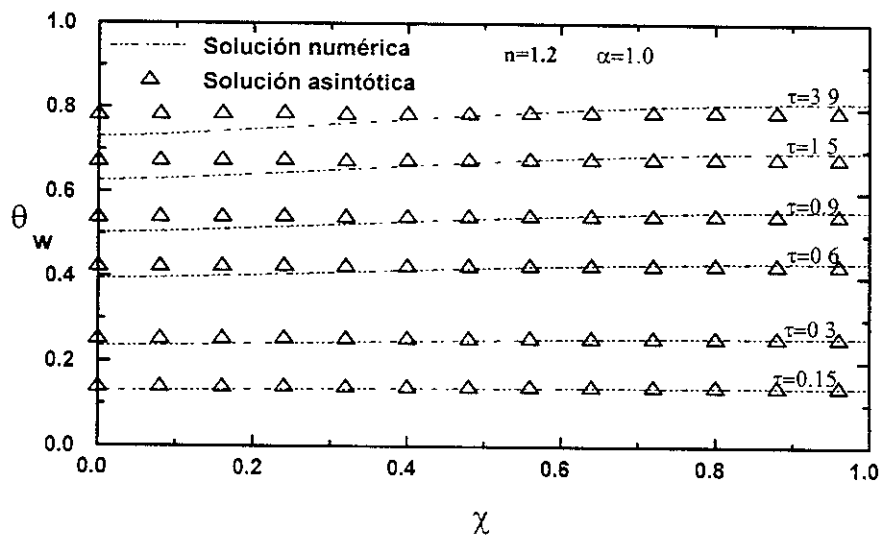


Figura 4-12: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 1.2$  y  $\alpha = 1.0$

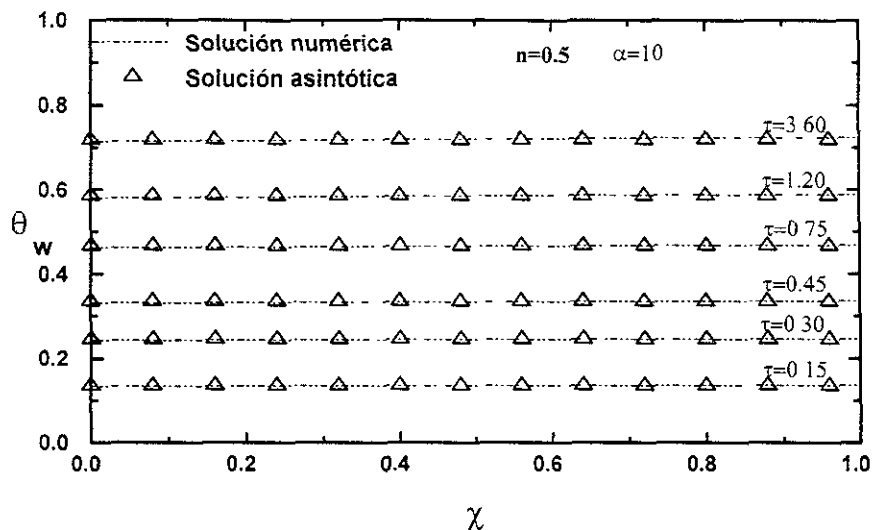


Figura 4-13: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 0.5$  y  $\alpha = 10$ .

fluidos dilatantes, el valor de la temperatura adimensional en el tubo es mayor que para fluidos pseudoplásticos. Esto corrobora los resultados obtenidos en el análisis permanente.

Las figuras (4-13)-(4-15) nuevamente muestran la evolución de la temperatura adimensional en la pared del tubo como una función de la coordenada longitudinal  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional y diferentes valores del índice de potencia  $n$ . En ellas se puede determinar la influencia del parámetro  $\alpha$  al comparar con las figuras (4-10)-(4-12) ya que se incrementa de  $\alpha = 1$  a  $\alpha = 10$ .

Cabe recordar que para valores elevados del parámetro de conjugación ( $\alpha = 10$ ), la pared del tubo es buena conductora térmica, a la vez de que se establece una mejor aproximación de la solución asintótica con respecto a la numérica.

Por último, en las figuras (4-16)-(4-18) se presenta la evolución de la temperatura adimensional promedio de la pared del tubo con respecto al tiempo adimensional para diferentes valores del parámetro de conjugación  $\alpha$  y distintos  $n$ .

En la figura (4-16) se observa la evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo



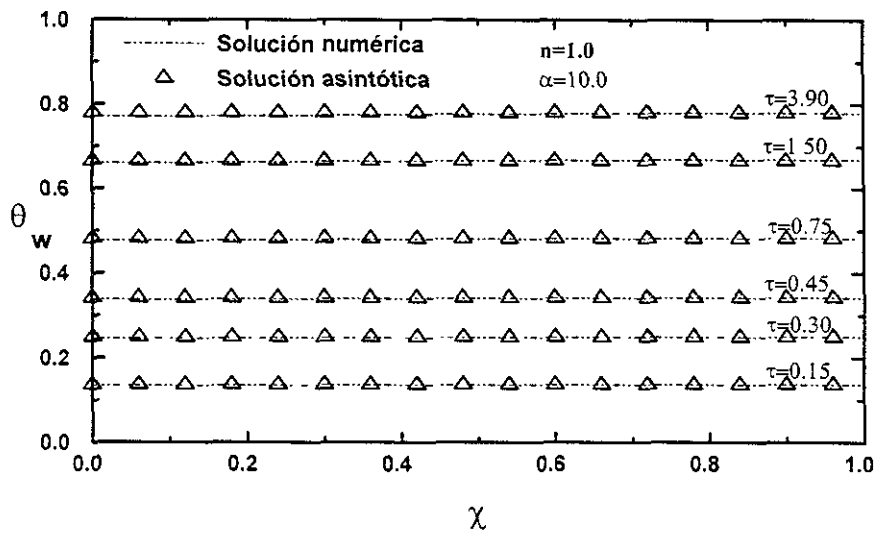


Figura 4-14: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 1.0$  y  $\alpha = 10$ .

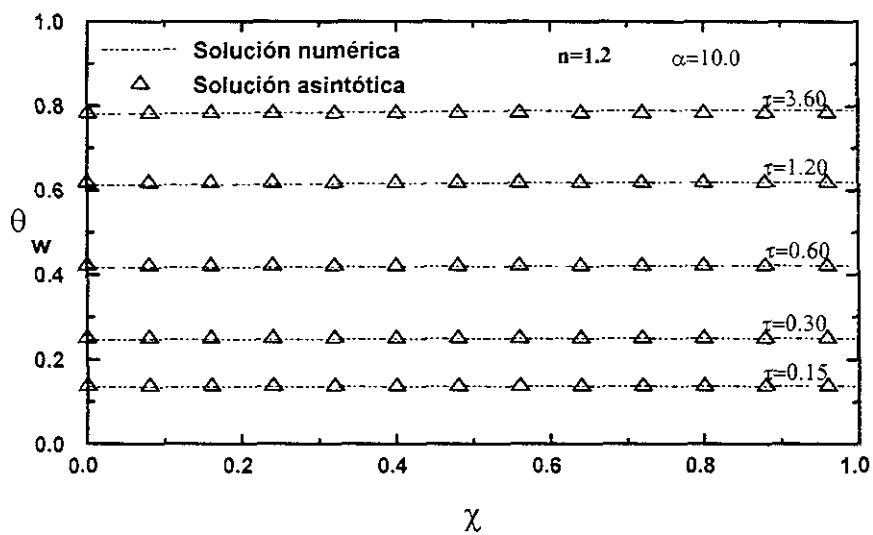


Figura 4-15: Evolución de la temperatura adimensional de la pared del tubo como función de  $\chi$  para diferentes valores del tiempo adimensional, con  $n = 1.2$  y  $\alpha = 10$ .

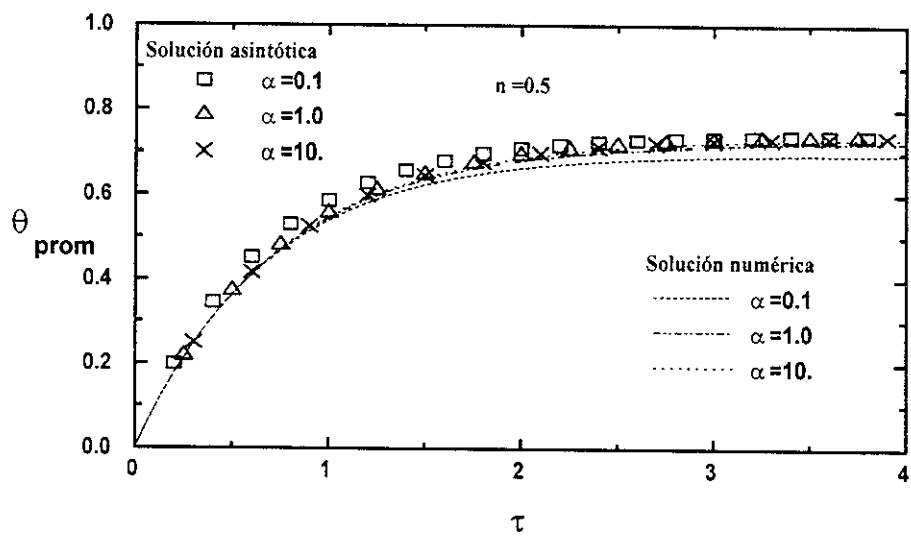


Figura 4-16: Evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con  $n = 0.5$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

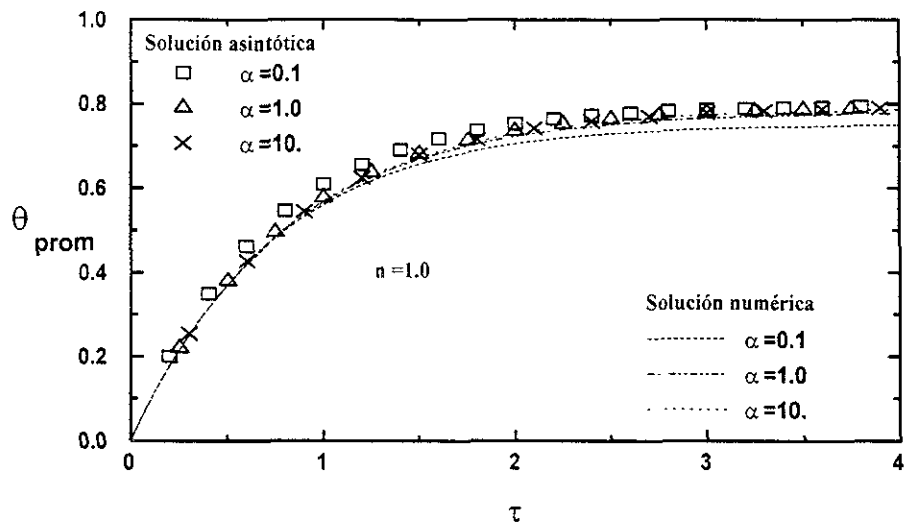


Figura 4-17: Evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con  $n = 1.0$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

con respecto al tiempo en el límite térmicamente delgado. Asimismo, también se muestra, para un valor dado del índice de potencia,  $n = 0.5$ , la comparación de los métodos de solución empleados en éste límite. Para establecer tal comparación se recurre a la definición de temperatura promedio de la siguiente forma  $\theta_{prom} = \int_0^1 \theta_w d\chi$ ,

Al igual que en la figura (4-16), la figura (4-17) muestra la evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con respecto al tiempo adimensional, en dichas figuras se establecen diversos valores del parámetro de conjugación  $\alpha$ . Para todos los valores mostrados de este parámetro de conjugación se cumple con el límite térmicamente delgado ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ ) y la variación del valor de este parámetro muestra la aproximación que tiene el método analítico con respecto al método numérico.

Finalmente se presenta la figura (4-18), que al igual que las dos anteriores, muestra la evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con respecto al tiempo adimensional, sólo que para el valor del índice de potencia de  $n = 1.2$ . En este sentido, se puede observar en dichas figuras, que el valor numérico y asintótico al que tienden, es el mismo valor establecido en

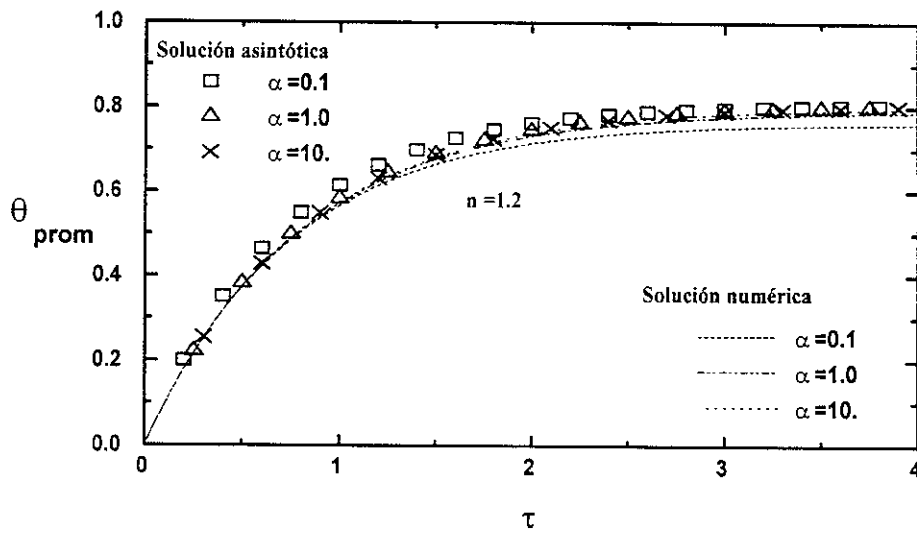


Figura 4-18: Evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con  $n = 1.2$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

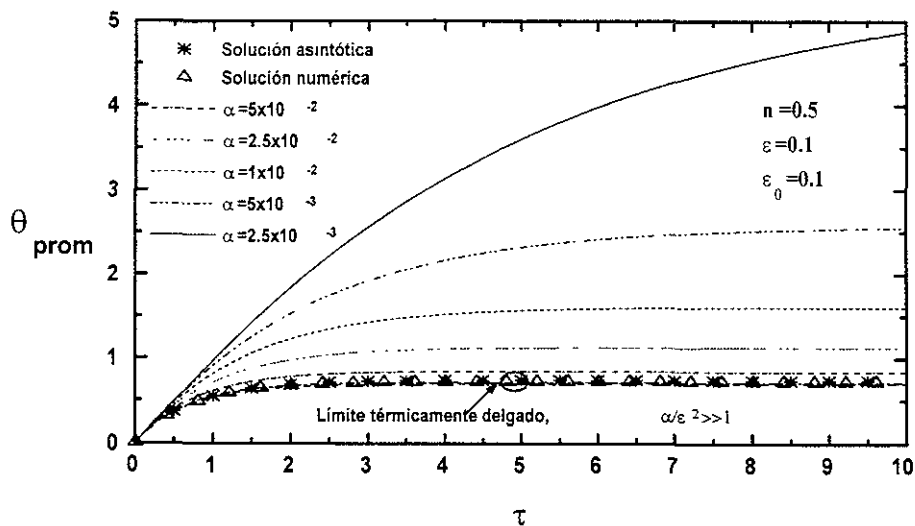


Figura 4-19: Evolución de la temperatura promedio adimensional de la pared del tubo para  $n = 0.5$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

el análisis permanente; específicamente para cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  la temperatura promedio tiende al valor mostrado en la ecuación (2.64).

#### 4.2.2 Análisis numérico global

En el presente apartado se muestran las gráficas del perfil de temperatura adimensional de la pared del tubo obtenidas numéricamente mediante el método de diferencias finitas, para ello se define a la variable de temperatura de pared de tubo promedio de la siguiente manera  $\theta_{prom} = \int_0^1 \int_0^1 \theta d\chi d\sigma$ . Por lo anteriormente comentado, las figuras (4-19)-(4-21) muestran la evolución de la temperatura promedio de la pared del tubo con respecto al tiempo adimensional para diferentes valores del parámetro de conjugación  $\alpha$  y valores del índice de potencia  $n$ . En la figura anterior, se pueden apreciar las diferentes tendencias conforme el valor del parámetro de conjugación disminuye, esto se debe a que el cociente  $\alpha/\epsilon^2$  también disminuye al grado de que el límite térmico cambia de un límite térmicamente delgado,  $\alpha/\epsilon^2 \gg 1$ , a un límite térmicamente grueso,  $\alpha/\epsilon^2 \ll 1$ . Con la idea de analizar y comparar los resultados de las figuras (4-19)-(4-

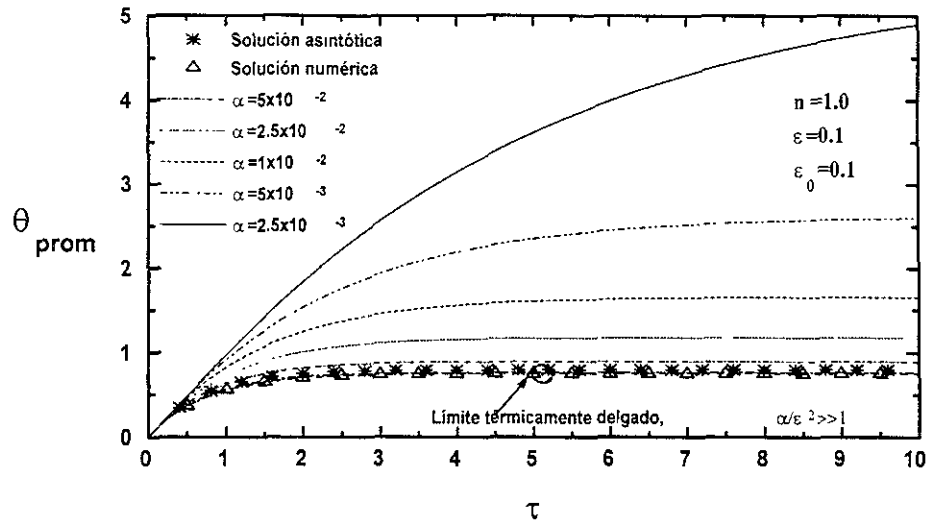


Figura 4-20: Evolución de la temperatura promedio adimensional para  $n = 1$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

21), conviene retomar la solución asintótica del análisis permanente en el límite térmicamente delgado que establece la ecuación (2.85),

$$\theta_w(\chi, \sigma : n) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \chi^{1/3} + \frac{\varepsilon^2 (1 + \varepsilon_0/2)}{\alpha \varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \sigma).$$

aplicando la definición de temperatura promedio descrita anteriormente y considerando valores de  $\varepsilon_0$  pequeños, se obtiene:

$$\theta_w(\chi, \sigma : n) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi C_0} \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} (1 + \varepsilon_0/2).$$

Que es el valor numérico al que debe de tender la temperatura promedio adimensional en el estado permanente. Dicho valor es fácil de verificar al tomar al cociente  $\alpha/\varepsilon^2$  como el valor principal en orden de magnitud para el límite térmicamente grueso. De igual forma, en las (4-19)-(4-21) se presenta el límite térmicamente delgado. En éste límite aparecen tres curvas de

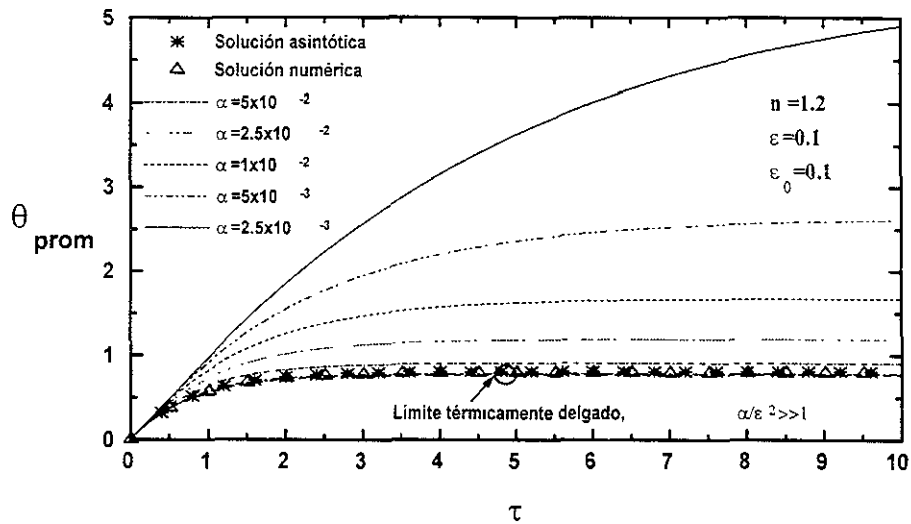


Figura 4-21: Temperatura promedio adimensional de la pared del tubo con  $n = 1.2$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

temperatura promedio adimensional, para valores del parámetro de conjugación  $\alpha = 10, 1, 0.1$ . pero debido a que el cociente  $\alpha/\epsilon^2$  es en orden de magnitud grande, no existen gradientes de temperatura radial, de tal forma que la solución de la temperatura promedio en la pared del tubo se aproxima al análisis realizado en el estado permanente y transitorio en dicho límite. Con esto, el valor de la temperatura promedio depende en primera aproximación del valor del índice de potencia  $n$ , de la forma en que se muestra en la ecuación (2.64)

$$\theta_0 = (2/3)^{1/3} \Gamma(4/3) \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3} \doteq 0.78 \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^{1/3}$$

Con lo mostrado por las tres figuras anteriores, se corrobora y se extienden los resultados de los análisis asintóticos del presente trabajo. Para el caso permanente se recupera las soluciones de temperatura promedio descritas en los límites térmicos tanto delgado como grueso; mientras que para el análisis transitorio, se identifican los tiempos en que se alcanza el estado permanente para el límite térmicamente delgado: siendo una aportación de la solución global, la obtención



del tiempo adimensional en que se llega al estado permanente en el límite térmicamente grueso. Finalmente, se debe señalar que no existe necesidad de generar más gráficas del límite térmicamente grueso, ya que como se comenta anteriormente, el valor de la temperatura en éste límite depende del cociente  $\alpha/\varepsilon^2$ , de tal forma que dichas gráficas corresponden a una amplia gama de valores adimensionales que puedan tomar cada uno de estos parámetros por separado.

### 4.3 Comentarios finales

El proceso de transferencia de calor conjugada de un fluido de potencia con un perfil de velocidades completamente desarrollado en contacto con una superficie interna de un tubo circular recto conductor de calor se analizó para valores del número de Graetz elevados, empleando técnicas tanto analíticas como numéricas. Debido a la conductividad térmica finita del material de la pared del tubo y el establecimiento de un flujo de calor en la superficie externa del tubo, la transferencia de calor por conducción radial y axial a lo largo de la pared del tubo es un mecanismo que puede modificar sustancialmente las estimaciones previas del número de Nusselt basados en condiciones de frontera pre-establecidas. Lo anterior es particularmente válido para valores finitos del parámetro de conjugación  $\alpha/\varepsilon^2$ . En este sentido, la transferencia de calor por convección a través de la superficie interna del tubo, es controlado por la conducción de calor axial en la pared del tubo, lo que conduce a la evolución de la temperatura de la pared. En cuanto al análisis global, se desarrolló un programa de diferencias finitas con la finalidad de corroborar los efectos geométricos del problema.

## Apéndice A

En el presente apartado se emplean técnicas analíticas para obtener la solución de la ecuación de la energía del fluido no-newtoniano. A partir de las ecuaciones adimensionales (2.38) y (3.27)

$$\left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \left(1 - \eta^{(n+1)/n}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{L}{R}\right) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{Pe} \left(\frac{R}{L}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} \quad (\text{A.1})$$

con sus condiciones de frontera y continuidad en la temperatura con el sólido,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \theta(\chi, 1) = \theta_w(\chi, 0) \quad (\text{A.2})$$

$$\theta(0, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{\chi \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{A.3})$$

y debido a que los valores del número de Peclet son grandes ( $Pe = RePr$ ) -ver tablas 4-6-, los efectos de difusión de calor longitudinal son despreciables, a la vez de que el espesor de capa límite térmica se restringe a una pequeña zona en las proximidades de la pared del tubo. De esta forma, en la coordenada radial se propone una nueva variable adimensional del orden de magnitud de la unidad de la siguiente forma:

$$\xi = \frac{(1-\eta)}{\delta/R} \quad (\text{A.4})$$

que al sustituirla en la ecuación (A.1) se obtiene,

$$\xi \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (\text{A.5})$$

con las siguientes condiciones de frontera y de continuidad en la temperatura,

$$\theta(\chi = 0, \xi) = 0, \quad \theta(\chi, \xi = 0) = \theta_w(\chi), \quad \text{y} \quad \theta(\chi, \xi \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Proponiendo el siguiente cambio de variables de cuasi semejanza:

$$\theta = \theta_w \varphi, \quad \zeta = \frac{\xi}{\chi^{1/3}}, \quad (\text{A.7})$$

la ecuación de la energía (A.5) se transforma en,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{3} \zeta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \chi \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}, \quad (\text{A.8})$$

con las siguientes condiciones de frontera,

$$\varphi(0, \zeta) = \varphi(\chi, \zeta \rightarrow \infty) = 0, \quad \varphi(\chi, 0) = 1. \quad (\text{A.9})$$

Aplicando la integral de Stieltjes que establece que la temperatura en la frontera del fluido es variable en la coordenada longitudinal, la cual puede dividirse en dos contribuciones, una continua y otra discreta. Con lo que el perfil de temperaturas se divide en pequeños escalones de temperatura constante de forma que las variaciones en la coordenada  $\chi$  son imperceptibles. Por lo anterior, la ecuación de la energía para el fluido (A.8), puede ser resuelta para un sólo escalón y posteriormente sumar todas las soluciones correspondientes a todos los escalones y obtener así el perfil de temperatura en el fluido.

La ecuación (A.8) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + \frac{1}{3} \zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} = 0, \quad (\text{A.10})$$

con sus respectivas condiciones de frontera,

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\zeta \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Integrando la ecuación (A.10) y evaluando las condiciones de frontera dadas por (A.11), se puede fácilmente demostrar que:

$$\varphi(\zeta) = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_{\zeta}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{9}\zeta^3\right) d\zeta. \quad (\text{A.12})$$

La ecuación anterior corresponde a la solución del perfil de temperaturas en el fluido no-newtoniano. Para incorporar la información mostrada en la ecuación (A.12) en el análisis del sólido, es necesario calcular el flujo de calor adimensional que el fluido proporciona a la pared interna del tubo. Esto se representa mediante la condición de continuidad en el flujo de

calor en la pared del tubo.

Por otro lado, empleando la condición de continuidad en la temperatura, la temperatura del fluido dimensional puede escribirse como:

$$T - T_0 = -\Delta T_c \theta = -\Delta T_c \theta_w \varphi = (T_w - T_0) \varphi, \quad (\text{A.13})$$

con lo cual la temperatura del fluido se escribe en función de la temperatura de pared. Aplicando el principio de superposición a la solución obtenida en (A.12) mediante la ecuación (A.13) al sumar las contribuciones discretas y continuas [8], se tiene que:

$$T - T_0 = \int_0^x \varphi(\chi) \frac{dT_w}{d\chi'} d\chi' + \sum_{j=1}^k \varphi(\chi) \Delta T_w. \quad (\text{A.14})$$

De igual manera, para calcular el flujo de calor del fluido no-newtoniano a la pared interna del tubo, se deriva la temperatura dimensional del fluido representada en la ecuación (A.14) mediante ley de Fourier, esto es:

$$q_f = -\lambda \left\{ \int_0^x \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial r} \Big|_{r=R} \frac{dT_w}{d\chi'} d\chi' + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial r} \Big|_{r=R} \Delta T_w \right\}, \quad (\text{A.15})$$

donde  $\partial \varphi / \partial r$  es fácilmente obtenida de la ecuación (A.12),

$$\frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left[ \frac{3n+1}{n} \frac{Gz}{\pi} \right]^{1/3} \chi^{-1/3}. \quad (\text{A.16})$$

Es importante hacer notar que la solución mostrada en (A.15) y (A.16), corresponde a un sólo escalón. Por lo que es necesario sumar todas las contribuciones con base en la variable muda  $\chi'$ , de la siguiente manera  $\varphi(\chi) \rightarrow \varphi(\chi - \chi')$ , con lo cual, la ecuación (A.16) se reescribe:

$$\frac{\partial \varphi(\chi - \chi')}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left[ \frac{3n+1}{n} \frac{Gz}{\pi} \right]^{1/3} \chi^{-1/3} \{1 - \chi'/\chi\}^{-1/3}. \quad (\text{A.17})$$

Introduciendo (A.17) en la ecuación del flujo de calor (A.15),

$$q_f = -\frac{\lambda}{R} \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Gz}{\pi} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \int_0^x K(\chi, \chi') \frac{dT_w}{d\chi'} d\chi' + \sum_{j=1}^k \Delta T_w \right\} \quad (\text{A.18})$$

donde  $K(\chi, \chi') = (1 - \chi'/\chi)^{-1/3}$  representa el kernel de la parte continua del flujo de calor. Escribiendo (A.18) en forma adimensional,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left( \frac{3n+1}{n} \frac{Gz}{\pi} \right)^{1/3} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wl} + \int_0^\chi K(\chi, \chi') \frac{d\theta_w}{d\chi'} d\chi' \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo (A.19) en la ecuación de continuidad del flujo de calor (2.44) se obtiene la condición de flujo de calor adimensional en la frontera interna de la pared del tubo, requerida para la solución del sistema,

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{1/3} \frac{(12)^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \chi^{-1/3} \left\{ \theta_{wl} + \int_0^\chi K(\chi, \chi') \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\}, \quad (\text{A.20})$$

donde  $\theta_{wl}$  es el valor de la temperatura adimensional en el borde principal de la pared del tubo.

## Apéndice B

En este apartado, se obtendrá la solución de la función  $g(\chi, \kappa)$  que aparece en la ecuación (3.71),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \chi^2} - \frac{\partial g}{\partial \kappa} = 0, \quad (\text{B.1})$$

con las siguientes condiciones de frontera e inicial,

$$g(\chi, 0) = -\left(\frac{3}{5}\chi^{5/3} - \frac{1}{2}\chi^2\right), \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \chi}\right|_{\chi=0,1} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Proponiendo que la solución de la función  $g(\chi, \kappa)$  se pueda escribir como el producto de dos funciones independientes,

$$g(\chi, \kappa) = X(\chi) \cdot Y(\kappa) \quad (\text{B.3})$$

y sustituyendo (B.3) en la ecuación (B.1), se tiene que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d\chi^2} = \frac{1}{Y} \frac{dY}{d\kappa} = -\lambda_n^2,$$

donde  $Y(\kappa)$  representa el término temporal del problema y cuya solución corresponde a:

$$Y(\kappa) = a_1 \exp(-\lambda_n^2 \kappa), \quad (\text{B.4})$$

mientras que  $X(\chi)$  corresponde a la parte espacial del problema y su solución se representa por una combinación lineal de la siguiente manera,

$$X(\chi) = a_2 \cos(\lambda_n \chi) + a_3 \text{sen}(\lambda_n \chi). \quad (\text{B.5})$$

Evalutando las condiciones de frontera dadas en ecuación (B.2)

$$X(\chi = 0) = \lambda_n a_3 \cos(0) = 0, \quad (\text{B.6})$$

se obtiene que  $a_3 = 0$ , mientras que

$$X(\chi = 1) = -\lambda_n a_2 \text{sen}(\lambda_n) = 0 \quad (\text{B.7})$$

los valores propios resultan ser dados por  $\lambda_n = n\pi$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

La solución general para  $g(\chi, \kappa)$  se construye por una superposición lineal de las ecuaciones (B.4) y (B.5) en (B.3); empleando la información de (B.6) y (B.7),

$$g(\chi, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n \chi) \exp(-\lambda_n^2 \kappa). \quad (\text{B.8})$$

Esta solución satisface la ecuación (B.1) y sus correspondientes condiciones de frontera del problema, pero no satisface necesariamente la condición inicial.. Por lo tanto, la aplicación de la condición inicial en ecuación (B.8) da como resultado,

$$g(\chi, 0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\lambda_n \chi) = \frac{1}{2}\chi^2 - \frac{3}{5}\chi^{5/3} \quad (\text{B.9})$$

donde el valor de la constante  $C_0$  es:

$$C_0 = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}\chi^2 - \frac{3}{5}\chi^{5/3} \right) d\chi = -\frac{7}{120}, \quad (\text{B.10})$$

mientras que el resto de los valores de  $C_n$  son determinados mediante la teoría de funciones ortogonales [49] ,

$$C_n = 2 \int_0^1 \cos(\lambda_n \chi) \left( \frac{1}{2}\chi^2 - \frac{3}{5}\chi^{5/3} \right) d\chi. \quad (\text{B.11})$$

Integrando por partes la ecuación (B.11) se tiene que,

$$C_n = \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \chi^{-1/3} \cos(\lambda_n \chi) d\chi, \quad (\text{B.12})$$

cuya solución debe obtenerse haciendo un mapeo en el plano complejo mediante el teorema del residuo [50], [48]. Aplicando el siguiente cambio de variable en el plano complejo,

$$\Psi = \lambda_n \chi, \quad \text{para } \chi \rightarrow \infty \quad (\text{B.13})$$

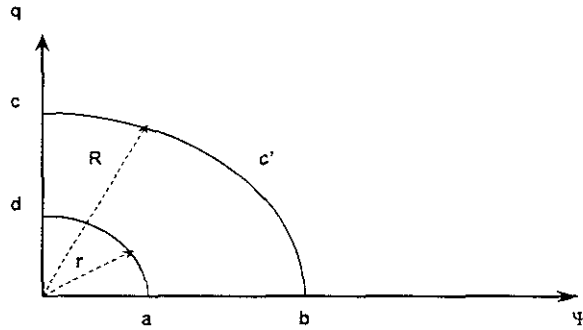


Figura 4-22: Contorno de integración en el plano complejo.

la ecuación (B.12) se transforma en:

$$C_n = \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda_n^{8/3}} \int_0^\infty \frac{\cos(\Psi)}{\Psi^{1/3}} d\Psi, \quad (\text{B.14})$$

puesto que existe una singularidad en  $\Psi = 0$  se emplea el método de los residuos en el contorno de integración representado en la figura (4-22),

y por definición de integral de línea,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^{1/3}} dz = \int_{ab} \frac{e^{iz}}{z^{1/3}} dz + \int_{bc} \frac{e^{iz}}{z^{1/3}} dz + \int_{cd} \frac{e^{iz}}{z^{1/3}} dz + \int_{da} \frac{e^{iz}}{z^{1/3}} dz = 0 \quad (\text{B.15})$$

donde  $z = \Psi + iq$  por lo que los límites del anterior contorno de integración se definen como,

$$\text{Trayectoria } ab: \quad z = \Psi, \quad \text{para} \quad r \leq \Psi \leq R,$$

$$\text{Trayectoria } bc: \quad z = Re^{i\phi}, \quad \text{para} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Trayectoria } cd: \quad z = qe^{i\pi/2}, \quad \text{para} \quad R \leq q \leq r, \quad (\text{B.16})$$



Trayectoria  $da$ :  $z = re^{i\phi}$ , para  $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0$ .

Con lo anterior, es necesario evaluar la variable en el plano complejo para la singularidad  $\Psi = 0$ . Para ello se aplica límites de  $r \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$  con el objeto de obtener la solución de la región próxima a la singularidad. Con esto las integrales correspondientes a los contornos de integración  $bc$  y  $da$  tienden a cero, por lo que la ecuación (B.15) se reduce a:

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\Psi}}{\Psi^{1/3}} d\Psi = \int_0^\infty \exp\left(iqe^{\pi i/2}\right) q^{-1/3} e^{\pi i/3} dq \quad (\text{B.17})$$

y debido a que  $\exp\left(iqe^{\pi i/2}\right) = e^{-q}$ , la ecuación anterior puede describirse como,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \Psi + i \operatorname{sen} \Psi}{\Psi^{1/3}} d\Psi = (\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)) \int_0^\infty e^{-q} q^{-1/3} dq. \quad (\text{B.18})$$

Igualando parte real y parte imaginaria en ambos lados de la ecuación (B.18), se tiene que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \Psi}{\Psi^{1/3}} d\Psi = \cos(\pi/3) \int_0^\infty e^{-q} q^{-1/3} dq, \quad (\text{B.19})$$

e introduciendo este resultado en la ecuación (B.14) se obtiene:

$$C_n = \frac{2}{3} \frac{\Gamma(2/3)}{\lambda_n^{8/3}}. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, sustituyendo el valor del coeficiente  $C_n$  en la ecuación (B.8) junto con la ecuación (B.10),  $g(\chi, \kappa)$  puede escribirse como:

$$g(\chi, \kappa) = -\frac{7}{120} + \frac{2}{3} \Gamma(2/3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n \chi)}{\lambda_n^{8/3}} \exp\left(-\lambda_n^2 \kappa\right). \quad (\text{B.19})$$

que es la expresión introducida en la ecuación (3.73).

# Bibliografía

- [1] Harris, J., *Rheology and Non-Newtonian Flow*, Longman Group Limited, New York (1977).
- [2] Wilkinson, W. L., *Non-Newtonian Fluids: Fluids Mechanics, Mixing and Heat Transfer*. Pergamon Press, Great Britain (1960).
- [3] Skelland, A. H. P., *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, John Wiley and Sons (1967).
- [4] Bird, R. B., Armstrong, R. C. y Hassager, O., *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1: Fluids Mechanics, John Wiley and Sons (1977).
- [5] Graetz L., "Über die wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten", *Ann. Phys. Chem*, pt. 1: Vol. 18, pp. 74-79; pt. 2: vol. 25, pp. 337-357 (1883).
- [6] Sellars, J. R., Tribus, M. y Klein, J. S., "Heat transfer to lamianr flow in a round tube or flat conduit: The Graetz problem extended", *ASME Trans.*, Vol. 78, pp. 441-448 (1956).
- [7] Shah R. K. y London, A. L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press. New York (1978).
- [8] Kays, W. M. y Crawford, M. E., *Convective Heat and Mass Transfer*, Segunda Edición, McGraw-Hill, New York (1980).
- [9] Chhabra, R. P. y Richardson, J. F., *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*. Butterworth-Heinemann, Gran Bretaña (1999).
- [10] Cho, Y. I. y Hartnett, J. P., "Non-Newtonian fluids in circular pipe flow", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 13, pp.59-141 (1982).

- [11] Hartnett J. P. y Cho, Y. I., *Handbook of Heat Transfer*, Tercera Edición, McGraw-Hill, New York (1998).
- [12] Pigford, R. L., *Chem. Eng. Prog. Symp. Series*, Vol. **51**, pp. 79 (1955).
- [13] Bird, R. B., "Aur theorie des wärmeübergangs an nicht-Newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung", *Chem. Ing. Tech.*, Vol 31, pp. 569 (1959).
- [14] Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, Jonh Wiley and Son, New York (1960).
- [15] Leveque, M. A., "Les lois de la transmission de la chaleur par convection", *Annales des Mines Memories*, Series 12, Vol. **13**, pp. 201-299, 305-362, 381-415 (1928).
- [16] Metzner, A. B., Vaughn, R. D. y Houghton, G. L. "Heat transfer to non-Newtonian fluids". *AIChE Journal*, Vol. **3**, No. 1, pp. 92-100 (1957).
- [17] Mahalingam, R., Tilton, L. O. y Coulson, J. M. "Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian fluids", *Chemical Engineering Science*, Vol. **30**, pp. 921-929 (1975).
- [18] Richadson, S. M., "Extended Leveque solutions for flows of power-law fluid in pipes and chanelns", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **22**, pp. 1417-1423 (1979).
- [19] Basu, T. y Roy, D. N., "Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **28**, No. 3, pp. 699-701 (1985).
- [20] Liou, C. T. and Wang F. S., "Solutions to the extended Graetz problem for a power-law fluid with viscous dissipation and different entransce boundary conditions", *Numerical Heat Transfer A*, Vol. **17**, pp. 91-108 (1990).
- [21] Lawal, A. and Mujumdar, A. S., "The effect of viscous dissipation in heat transfer to power-law fluids in arbitrary cross-sectional ducts", *Warme Stoffübertragung*, Vol. **27**, pp. 437-446 (1992).
- [22] Barletta, A., "Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **40**, No. 1, pp. 15-26 (1997).

- [23] Bilir, S., "Numerical solution of Graetz problem with axial conduction", *Numerical Heat Transfer A*, Vol. **21**, pp. 493-500 (1992).
- [24] Johnston, P. R., "A solution method for the Graetz problem for non-Newtonian fluids with Dirichlet and Neumann boundary conditions", *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. **19**, No. 2, pp. 1-19 (1994).
- [25] Khellaf, K. y Lauriat, G., "A new analytical solution for the heat transfer in the entrance region for ducts: hydrodynamically developed flows of power-law fluids with constant wall temperature", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **40**, pp. 3443-3447 (1997).
- [26] Luikov, A. V., "Conjugate Convective Heat Transfer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **17**, pp. 257-265 (1974).
- [27] Treviño, C. y Liñan, A., "External heating of a flat plate in a convective flow", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **27**, pp. 1067-1073 (1984).
- [28] Anand, N. K. y Tree, D. R., "Some studies of the effects of axial conduction in a tube wall on the steady-state laminar convective heat transfer", *Journal of Heat Transfer*, **19**, pp. 1025-1028 (1987).
- [29] Lin, T. F. y Kuo, J. C., "Transient conjugated heat transfer in fully developed laminar pipe flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **31**, pp. 1093-1102 (1988).
- [30] Yan, W. M., Tsay, Y. L. y Lin T. F., "Transient conjugated heat transfer in laminar pipe flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **32**, pp. 775-777 (1989).
- [31] Al-Nimr, M. A. y Hader, M. A., "Transient conjugated heat transfer in developing laminar pipe flows", *Transactions of the ASME*, Vol. **116**, pp. 234-236 (1994).
- [32] Méndez, F. y Treviño, C., "The conjugate conduction-natural convection heat transfer along a thin vertical plate with non-uniform internal heat generation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **43**, pp. 2739-2748 (2000).
- [33] Bautista, O., Méndez, F. y Treviño, C., "Graetz problem for the conjugated conduction film condensation process", *ASME Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. **14**, pp. 1-7 (2000).

- [34] Treviño, C., Espinoza, A. y Méndez, F., "Steady-state analysis of the conjugate heat transfer between forced counterflowing streams", *ASME Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 476-483 (1996).
- [35] Wilkison, W. L., *Non-Newtonian Fluids: Fluids Mechanics, Mixing and Heat Transfer*, Pergamon Press, pp. 62 (1960).
- [36] Bejan, A., *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> Edition, New York (1995).
- [37] Nakayama, Akira, *PC-Aided Numerical Heat Transfer and Convective Flow*, CRC Press, USA (1995).
- [38] White, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Segunda Edición (1992).
- [39] Bender, M. C. y Orszag, A. S., *Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers*, McGraw-Hill (1978).
- [40] Abramowitz, M., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Ed. Milton Abramowitz (1965).
- [41] Metzner, A. B. y Reed, J. C., "Flow of non-Newtonian fluids-correlation of the laminar transition and turbulent flow regions", *AIChE Journal*, Vol. 1, pp. 434 (1955).
- [42] Arfken, G. B., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, pp. 734-736 (1970).
- [43] Mizushima, T., Ito, R., Kuriwake, Y. y Yahikazawa, K., "Boundary layer heat transfer in a circular tube to Newtonian and non-Newtonian fluids", *Kagaku Kogaku*, Vol. 31, pp. 250 (1967).
- [44] *Encyclopedia of science and technology*, 3ed, McGraw-Hill, New York (1970).
- [45] Harnet, J. P., Ng, K. S. y Tung T.T., "Heat transfer of concentrated drag reducing viscoelastic polycrylamide solutions", *AIChE, Heat Transfer Conf.*, 17th, p. 74 (1977).
- [46] Cebeci, T. y Bradshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer Verlag, New York (1988).

- [47]. Kevorkian, J. y Cole, J. D., *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer (1996).
- [48] Churchill, R. V., *Complex Variables and Applications*, 2nd. Edition, McGraw-Hill (1960).
- [49] Özisik, Necati, *Heat Conduction*, John Wiley and Sons (1980).
- [50] Wylie, C. R., *Matemáticas Superiores para Ingeniería*, cuarta Edición, McGraw-Hill, México (1982).