

03091



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

4

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
DE LA TIERRA

ANALISIS DE LA ECUACION DE VORTICIDAD
BAROTROPICA ATMOSFERICA POR MEDIO DEL
METODO ESPECTRAL

T E S I S

Que para obtener el grado de doctor en
Ciencias (Física de la Atmósfera)

p r e s e n t a:

ISMAEL PEREZ GARCIA

Handwritten signature or mark

México D.F.

2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNAM

**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
DE LA TIERRA**

**ANALISIS DE LA ECUACION DE VORTICIDAD
BAROTROPICA ATMOSFERICA POR MEDIO DEL
METODO ESPECTRAL**

TESIS

**Que para obtener el grado de doctor en Ciencias (Física de la Atmósfera)
presenta**

ISMAEL PEREZ GARCIA

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Yuri Skiba, tutor de esta tesis, por su interés prestado en el desarrollo de este trabajo y comentarios muy valiosos. También agradezco al Dr. Julián Adem, Dr. Víctor M. Mendoza, Dr. Ernesto Caetano, Dr. Luis Miguel Villegas, Dr. Arturo Quintanar y Dr. Ricardo Prieto por sus críticas constructivas, comentarios y por haber aceptado ser sinodales del examen de grado.

Hago extenso mi agradecimiento a Alejandro Aguilar Sierra por su apoyo en algunos gráficos por computadora, por la instalación de Software (Linux, NCARGraphics, LyX, etc.) en nuestras PC y por el formato final de la tesis. Jorge Zíntzún dio buenas ideas en la optimización de los programas de cálculo y Ma. Elena Castillo ayudó en la revisión del texto.

Esta tesis se realizó en el Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM. Los cálculos se realizaron en la supercomputadora CRAY-YMP de la DGSCA de la UNAM, bajo los proyectos SC-006196 y SC-011800.

Finalmente agradezco a mis padres, por haberme hecho vivir mi infancia en un mundo donde la predicción del tiempo es de gran importancia para la agricultura.

Índice General

1	INTRODUCCION	9
2	ANALISIS ARMONICO SOBRE LA ESFERA	13
3	CLASE DE SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACION DE VORTICIDAD SOBRE LA ESFERA	19
3.1	CONSTRUCCION DE FUNCIONES SOBRE LA ESFERA	19
3.2	SOLUCIONES CLASICAS	22
3.3	SOLUCIONES GENERALIZADAS	28
3.4	SOLUCIONES GLOBALES	33
4	INTEGRACION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD SOBRE LA ESFERA USANDO EL METODO ESPECTRAL	43
4.1	FORMA ESPECTRAL DE LA EVB SOBRE LA ESFERA	44
4.2	ESQUEMA NUMERICO DE INTEGRACION TEMPORAL	47
4.3	INVARIANTES DE MOVIMIENTO Y ERRORES DE APROXIMACION	49
4.4	EXPERIMENTOS NUMERICOS	52
4.5	INTEGRACION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD CON FORZAMIENTO Y DISIPACION	69
4.6	INTEGRACION IMPLICITA	69
5	ESTABILIDAD LINEAL DE FLUJOS SOBRE LA ESFERA	75
5.1	INTRODUCCION	75
5.2	EL METODO DE ESTABILIDAD DE MODOS NORMALES	78
5.3	CONDICIONES DE INESTABILIDAD	81
5.4	EXPERIMENTOS NUMERICOS	87
5.4.1	Estabilidad lineal de flujo zonal	87
5.4.2	Estabilidad lineal de ondas Rossby-Haurwitz	107
5.4.3	Inestabilidad de soluciones generalizadas	134
6	CONCLUSIONES	151

Resumen

En este estudio, desde varias perspectivas y usando el método espectral se ha analizado la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente sobre la esfera. El objetivo principal fue analizar el modelo analítico, el modelo espectral numérico (de valores iniciales y el de estabilidad), y pruebas del modelo espectral con flujos analíticos (PL, RH, Wu-Verkley, modones). Se ha desarrollado un conjunto de códigos para resolver numéricamente la ecuación de vorticidad barotrópica (EVB) sobre la esfera en términos de armónicos esféricos, entre los que destacan el código del modelo espectral para integrar la EVB como un problema de valores iniciales y el código para estudiar la inestabilidad de soluciones de la EVB. El código del modelo espectral se compiló en Fortran 77 en el ambiente de la supercomputadora Cray YMP y el algoritmo de estabilidad también en Fortran 77 pero compilado en cualquier estación de trabajo.

Se analizó la clase de soluciones exactas de la EVB, que son los flujos zonales, ondas Rossby Haurwitz (RH), las soluciones aisladas (modones), y las soluciones globales llamadas ondas Wu-Verkley que son formadas por varias ondas RH. Donde se hizo el intento de conectar métodos modernos de la teoría de funciones definidas sobre la esfera, con la representación de funciones en términos de armónicos esféricos, se trató de dar una formulación matemática rigurosa de los distintos aspectos conectados con la construcción de estas soluciones exactas de la EVB. También se contruyó una 'solución' la cual es menos idealizada. Esta solución se usó para realizar un experimento sobre la variabilidad de baja frecuencia. Los modones son modelos matemáticos simples del fenómeno del bloqueo atmosférico. Un problema central, en el pronóstico del tiempo a mediano como a largo plazo, es la acción de bloqueo que adquiere el flujo de los oestes (cresta subtropical) el cual no se puede explicar en términos de las ondas RH. Por lo tanto se intenta desarrollar más teorías sobre la modelación de este fenómeno. Para este fin se resolvió numericamente la EVB sobre la esfera usando el método numérico de transformada espectral y se probó con la clase de soluciones exactas de la EVB. Se enfatizó en estudiar el comportamiento del error relativo entre la solución exacta y la solución numérica, y en preservar la energía cinética total, la enstrofia integral y la estructura geométrica de las soluciones (flujos zonales, ondas de Rossby-Haurwitz, soluciones de Wu-Verkley, y modones bipolares de Verkley). Analizando los resultados preliminares de los experimentos se propusieron algunas alternativas de cómo resolverlas más eficientemente que fué el de incorporar un filtro numérico en el esquema de integración leapfrog y el de proponer un método implícito (el cual no se probó) en la forma espectral para integrar la EVB. Algunos autores indican que ciertos patrones de variabilidad de baja frecuencia, estan conectados con el proceso de inestabilidad

barotrópica. Se desarrolló un algoritmo numérico para estudiar la inestabilidad barotrópica de flujos ideales arbitrarios sobre la esfera en rotación. Se probó con la clase de soluciones exactas de la EVB, y los resultados de los experimentos numéricos de estabilidad se checaron con algunas estimaciones teóricas desarrolladas hasta ahora. Todavía hay bastantes preguntas que quedan sin responder sobre la inestabilidad de varias configuraciones (barotrópica) del flujo atmosférico de gran escala y su influencia sobre la variabilidad de baja frecuencia. Que en nuestro caso serían, la inestabilidad de las ondas RH y estructuras no lineales tales como modones y ondas Wu-Verkley. La estructura espectral de estos modos observados o analíticos puede contribuir a una mejor comprensión de las anomalías persistentes del flujo atmosférico y por lo tanto la variabilidad de baja frecuencia.

Capítulo 1

INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales de la meteorología actual es el desarrollo de modelos o métodos de predicción del tiempo a corto y a largo plazo. Se sabe que, el modelo de predicción del tiempo cuyos cálculos se realizaron por primera vez sobre una computadora, fue el modelo barotrópico basado en la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente (Charney *et al.*, 1950); desde entonces se han desarrollado modelos más avanzados de predicción del tiempo que se basan en las leyes de conservación de la dinámica de fluidos y de la termodinámica, y actualmente varios de estos modelos están en operación en algunos centros meteorológicos. Estos modelos operacionales (globales) son muy complejos pero limitados, y es difícil dar una interpretación de cómo evoluciona el patrón de flujo global atmosférico a mediano y a largo plazo. Ha habido progresos en el pronóstico a mediano plazo en los últimos 25 años, por lo que los pronósticos a 6 días sobre la región europea actualmente son buenos principalmente en invierno. Un problema central tanto a mediano como a largo plazo es el fenómeno de bloqueo (Rex, 1950a,b). El fenómeno de bloqueo, es la estructura o configuración meridional que adquiere el flujo atmosférico de los oestes parecido a la cresta subtropical (Pérez, 1993, 1996). El tiempo de vida observado de una acción de bloqueo atmosférico es de 10-30 días (Rex, 1950a, b; Trield *et al.*, 1981; Butchart *et al.*, 1987; Anderson, 1992; Verkley, 1993; Neven, 1993). Según Hollingsworth *et al.*, (1987) se requiere realizar más estudios sobre el diagnóstico, desarrollar teorías y modelación de este fenómeno. Estas estructuras no se pueden explicar en términos de las ondas Rossby-Haurwitz (RH), las cuales son soluciones exactas de la ecuación de vorticidad no divergente sobre la esfera. En este sentido muchos trabajos se han publicado desde que Stern (1975) desarrolló la teoría de modones sobre el plano beta y sus aplicaciones a la acción de bloqueo atmosférico (Larichev y Resnik, 1976; Flier *et al.*, 1980; Mc Williams, 1980; Verkeley, 1984; Tribia, 1984; Haines y Marshall, 1987, entre otros). Los modones son nuevas soluciones no lineales de la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente (EVB) sobre la esfera, y su configuración se parece a los centros de alta y baja del bloqueo atmosférico. Uno podría afirmar que la EVB sin forzamiento y sin viscosidad es un modelo simplificado de la dinámica atmosférica y por lo tanto los modones son también modelos matemáticos muy simplificados del fenómeno de bloqueo atmosférico.

El desarrollo de métodos de predicción a largo plazo depende también de qué tanto conozcamos la física de las anomalías (de circulación atmosférica, Wallace y Blackmon,

1983) persistentes. Muchas observaciones y teorías se han desarrollado para tratar de explicar las anomalías persistentes y la variabilidad de baja frecuencia, entre las que destacan la teoría de dispersión de ondas Rossby (Rossby *et al.*, 1939; Haurwitz, 1940; Yeh, 1949; Hoskins *et al.* 1977; Hoskins y Karoly, 1981; Webster, 1981), las teorías de inestabilidad barotrópica (Simmons *et al.*, 1983; Frederiksen *et al.*, 1987; Dikii, 1976; Baines, 1976; Haarsma y Opsteeg, 1988; Skiba, 1989; Anderson, 1991; Skiba (1994, 1998, 2000); Borges y Sardeshmukh, 1997; Skiba y Adem, 1998; Skiba y Strelkov, 2000) y la teoría de equilibrio múltiple (Charney y DeVore, 1979; Legras y Ghil, 1985) o dinámica de modos libres (Wu, 1993; Wu y Verkley, 1993). Un modo libre es una solución exacta de una ecuación de vorticidad potencial que se le puede excitar a través de un forzamiento. Un caso particular de la ecuación de vorticidad potencial, es la EVB en el cual el flujo a gran escala se considera ideal (sin forzamiento y sin disipación). En los mapas meteorológicos, los modos libres en ciertos aspectos se parecen a los centros de alta y baja de bloqueo. Por otro lado, también los modones se parecen a los centros de alta y baja de bloqueo (acción de bloqueo), tienen una estructura bipolar (Verkley, 1984, 1987), tripolar, y cuadripolar (Neven, 1993) y son soluciones exactas de la ecuación de vorticidad barotrópica.

Si la inestabilidad barotrópica (IB) es una fuente importante de variabilidad de baja frecuencia, entonces esto podría hacer una contribución significativa en el crecimiento de error en las integraciones numéricas a mediano plazo. Simmons *et al.*, 1983, proponen que mucha de la variabilidad de baja frecuencia de la circulación del HN podría atribuirse a la inestabilidad barotrópica de los vientos troposféricos superiores asociado con la variación este-oeste de la corriente de chorro. Esto implica que la estructura del modo normal más inestable resaltaría más en los mapas de anomalías promedio. Andrews (1984) ha cuestionado la forma en que en Simmons *et al.*, 1983, se ataca el problema de IB para un flujo que no es una solución estacionaria de la EVB (Borges y Sardeshmukh, 1995). Ellos forzaron el flujo básico para que fuera estacionario con un forzamiento estacionario arbitrario, indicando que es crucial la forma matemática del forzamiento en el problema de estabilidad que resulta.

En este trabajo se pretende tomar la perspectiva de la dinámica de modos libres y de inestabilidad barotrópica, por lo que se tiene que construir la maquinaria para realizar estos estudios. Esta maquinaria consiste en examinar la clase de soluciones exactas de la EVB y después realizar experimentos numéricos que reproduzcan esta clase de soluciones, primero como un problema de valores iniciales y después como un problema algebraico para el caso de la inestabilidad de las soluciones. Por lo tanto el objetivo del trabajo de tesis doctoral es: Desarrollar un modelo espectral para integrar la ecuación de vorticidad sobre la esfera y desarrollar un método numérico para estudiar la estabilidad de flujos barotrópicos sobre la esfera en rotación. En el capítulo 2, se repasan los elementos del análisis armónico sobre la esfera (método espectral). En los siguientes el trabajo se efectúa en la forma siguiente:

a).- La construcción de una 'solución' parecida al modo libre Wu-Verkley pero menos idealizada es decir soluciones que de algún modo tienen incorporadas las observaciones meteorológicas. No estudiaremos los flujos derivados de climatologías observadas, sino soluciones libres estacionarias de la EVB sobre la esfera que sean cercanas al flujo

climatológico observado en un sentido global, lo cual se discute en el capítulo 3. Según Rochas, (1986) hay dos razones para investigar nuevas soluciones exactas de la EVB, y son que éstas pueden usarse para probar métodos numéricos que resuelvan tales ecuaciones y también pueden ayudar a explicar el mecanismo físico representado por las ecuaciones. La principal ventaja de una nueva solución es que representa patrones parecidos a los observados en el campo medio troposférico superior. Para ver más claramente la clase de soluciones exactas, en el trabajo se intenta dar un formalismo más matemático usando métodos modernos de la teoría de funciones.

b).-Análisis del modelo numérico para integrar la ecuación de vorticidad atmosférica no divergente usando el método espectral. Uno de los problemas importantes en el uso de estos modelos es el desarrollo de métodos numéricos especiales para integrarlos. Esto se describe en el capítulo 4, donde se realizan simulaciones numéricas con flujos zonales, ondas RH y también experimentos numéricos con la interacción de modones.

Pierrehumbert y Malguzzi (1984), demostraron que para el plano beta, un forzamiento de vorticidad (modones en su experimento) localizado, cuya forma espacial satisface la ecuación de vorticidad puede producir flujos de equilibrio múltiple. Wu (1993) al usar un modelo espectral dependiente del tiempo, parecida al del inciso b con forzamiento y disipación, demostró que las soluciones libres Wu-Verkley un poco degeneradas pueden, por resonancia, excitarse a una amplitud finita, y que los procesos de inestabilidad barotrópica y resonancia no lineal de ondas planetarias son el mecanismo que dispara los regímenes de flujos diferentes en ambos hemisferios. Según Wu esto es una regla que podría generar la variabilidad de baja frecuencia que se observa en la atmósfera. Estos experimentos los repetimos con la 'solución', construida en el capítulo 3 menos idealizada. La estabilidad de esta solución se probó con integraciones en el tiempo usando el modelo espectral; para esta solución, la estabilidad mostró oscilaciones entre dos tipos de regímenes parecidos a los encontrados por Wu en 1993. También, al realizar integraciones a largo plazo (150 días) con forzamiento y disipación, y al calcular la anomalía de flujo promedio de los resultados de los primeros 100 días, observamos la existencia de ciertos patrones de variabilidad de baja frecuencia, los cuales podrían estar conectados con el proceso de inestabilidad barotrópica. Simmons *et al.*, 1983 incorporaron un término de forzamiento artificial, tomando un estado básico observado que fue el patrón climatológico de enero en 300 mb, obteniendo varios modos con el método matricial y en la truncación triangular 21 (T_{21}).

c).-En el capítulo 5 se describe un algoritmo numérico para estudiar la inestabilidad lineal de flujos básicos que son soluciones exactas de la ecuación de vorticidad sobre la esfera. Es evidente desde hace mucho tiempo que el problema de inestabilidad barotrópica del flujo atmosférico ya se ha estudiado (Kuo, 1949; Lorenz, 1972; Baines, 1976; Simmon *et al.*, 1983, Zang, 1988; Skiba, 1989; Anderson, 1991; Borges y Sardeshmukh, 1995; Skiba (1994, 1998, 2000); Skiba y Adem, 1998; Skiba y Strelkov. 2000). Lorenz reexaminó el mecanismo de inestabilidad barotrópica con variación zonal incorporada al flujo básico en la forma de una única onda Rossby, demostró que este flujo 2-dimensional es inestable, y sugirió que tiene implicación en el pronóstico de largo plazo. El algoritmo numérico para estudiar la inestabilidad lineal de flujo no divergente

sobre la esfera, de este trabajo de tesis, se prueba con la clase de soluciones exactas de la ecuación de vorticidad no lineal que son los flujos zonales (del tipo polinomios de Legendre), Ondas Rossby-Haurwitz zonal, modones monopolares de Verkley zonal, flujo zonal observado y soluciones exactas más complicadas (ondas RH, soluciones libres Wu-Verkley y modones). En casi todos los experimentos con flujos zonales, que se realizaron, notamos que el número de onda zonal del modo más inestable fue $m = 2$, y los siguientes fueron $m=3$ y $m=1$, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos por Baines (1976). Por otro lado, todavía hay bastantes preguntas que quedan sin responder sobre la inestabilidad de varias configuraciones (barotrópica) del flujo atmosférico de gran escala y su influencia sobre la variabilidad de baja frecuencia. Que en nuestro caso serían: la inestabilidad de las ondas RH y estructuras no lineales tales como modones y ondas Wu-Verkley. La estructura espectral de estos modos observados o analíticos puede contribuir a una mejor comprensión de las anomalías persistentes en el flujo atmosférico y por lo tanto la variabilidad de baja frecuencia.

Capítulo 2

ANÁLISIS ARMONICO SOBRE LA ESFERA

En este capítulo se revisan los elementos esenciales del análisis de Fourier sobre la esfera, los cuales se usan en el método espectral y en el desarrollo de los algoritmos numéricos de los capítulos 4-5.

Sea $S_a^2 = \{x \in R^3 : |x| = a\}$ la esfera de radio a con centro en el origen del espacio euclideo R^3 ; si $a = 1$, $S_a^2 = S^2$ es la esfera unitaria sobre la cual se trabajará la tesis. Definamos $C_c^\infty(S^2)$ como el espacio de funciones $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ con valores complejos continuas (espacio de funciones ortogonales a una constante) sobre S^2 con todas sus ∞ -derivadas continua. Sean $f, g \in C_c^\infty(S^2)$, definamos un producto escalar y una norma como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} fg^* ds, \quad \|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

donde $s=(\lambda, \mu)$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ es la longitud, $\mu = \text{sen}\phi$, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, el seno de la latitud, g^* es el conjugado de g y $ds = d\lambda d\mu$ es un elemento de superficie sobre S^2 . La completación de $C_c^\infty(S^2)$ con respecto a la norma $\|f\|$ es el espacio de Hilbert $L_o^2(S^2) = \{f : \int |f|^2 ds < \infty\} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{H}_r \oplus \dots$, es decir, la suma directa de subespacios de dimensión finita $\mathbf{H}_r = \{Y : -\Delta Y = \chi_r Y\}$; los elementos $Y \in \mathbf{H}_r$ se llaman polinomios esféricos homogéneos de grado r , χ_r es un eigenvalor del problema espectral $-\Delta Y = \chi_r Y$, donde Δ es la expresión del Laplaciano sobre la superficie de la esfera S^2 :

$$\Delta = \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right). \quad (2.2)$$

Las funciones asociadas de Legendre hipergeométricas $H(\mu) = P_\nu^m(\mu)$ y $H(\mu) = Q_\nu^m(\mu)$ son soluciones de la ecuación hipergeométrica de Legendre:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 H}{d\phi^2} - \mu \cos \phi \frac{dH}{d\phi} + [\nu(\nu+1) \cos^2 \phi - m^2] H = 0.$$

Esta ecuación surge al resolver por el método de separación de variables la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, donde $P_\nu^m(\mu)$ es la función de Legendre de primer tipo y $Q_\nu^m(\mu)$ es la función de Legendre de segundo tipo, de orden m y grado complejo ν .

Una expresión explícita de $P_\nu^m(\mu)$ para $-1 < \mu < 1$ se puede encontrar en Abramowitz y Stegun (1965) o Verkleij (1984):

$$P_\nu^m(\mu) = \frac{(-\nu)_m (\nu+1)_m}{m!} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{m/2} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_j (\nu+1)_j}{(m+1)_j j!} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^j \right], \quad (2.3)$$

para $\nu = \alpha$ o complejo $\nu = \frac{1}{2} + ik$, donde $(q)_j$ es el símbolo Pochhammer definido como $(q)_0 = 1$, $(q)_j = q(q+1)\cdots(q+j-1)$, para cada $q \in \mathbb{C}$ y j entero no negativo. Los $(q)_j$ se obtienen de la función gamma $\Gamma(z)$ con argumento complejo $z \in \mathbb{C}$, donde $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$, de tal forma que $\Gamma(m+1) = m!$ y $\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} = (-1)^m (-\nu)_m (\nu+1)_m$. El desarrollo en serie (2.3) para $\nu = n$ converge con $j = n$ y en este caso se obtienen las funciones asociadas de Legendre. Las funciones (2.3) cumplen las siguientes relaciones de recurrencia

$$(\nu - m + 1) P_{\nu+1}^m(\mu) = (2\nu + 1) \mu P_\nu^m(\mu) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(\mu),$$

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_\nu^m(\mu)}{d\mu} = \mu\nu P_\nu^m(\mu) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(\mu).$$

Los polinomios armónicos complejos o armónicos esféricos

$\{Y_1^1, \dots, Y_n^{a_n}\} = \{Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu)e^{im\lambda}, |m| \leq n\}$ forman una base ortonormal en $C_c^\infty(S^2)$ o bien son funciones propias del operador Laplace-Beltrami $A = (-\Delta)$ en S^2 :

$$AY_n^m = \chi_n Y_n^m, \langle Y_n^m, Y_{n'}^{m'} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \chi_n = n(n+1),$$

m , es el número de onda zonal o modo de Fourier y $P_n^m(\mu)$ son los polinomios asociados de Legendre normalizados dados como

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^n n!}} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n,$$

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu).$$

Los P_n^m son ortonormales en μ

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu = \delta_{nn}.$$

Sea $H_n^m(\mu) = (1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu}$, entonces tenemos también las propiedades $Y_n^{-m} = (Y_n^m)^*$, $P_n^m(-\mu) = P_n^m(\mu)$, $H_n^m(-\mu) = -H_n^m(\mu)$, para $n - |m|$ par y $P_n^m(-\mu) = -P_n^m(\mu)$, $H_n^m(-\mu) = H_n^m(\mu)$, para $n - |m|$ impar.

Si $f \in L^2(S^2)$, existe una representación única $f = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$, donde la serie de la derecha converge a f en la norma L^2 . F_n es la proyección ortogonal de f sobre \mathbf{H}_n y $F_n = \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m$, siendo $a_n = \dim(\mathbf{H}_n) = 2n + 1$, con los coeficientes de Fourier $f_n^m = \langle f, Y_n^m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f Y_n^{m*} ds$.

Denotamos por $P^N = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{H}_i = \{\psi \in L_o^2(S^2) : T_N \psi(\lambda, \mu)\}$, el espacio de polinomios esféricos de grado N , tal que la proyección ortogonal (sin tomar en cuenta $n=0$) es

$$T_N \psi(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \langle \psi, Y_n^m \rangle Y_n^m = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \langle \psi, Y_n^m \rangle Y_n^m = \sum_{m=-M}^M \psi^m(\mu) e^{im\lambda}. \quad (2.4)$$

M es el modo de Fourier más alto y $N(m)$ es el grado más alto de la función asociada de Legendre en la representación norte-sur y los coeficientes de representación espectral están dados por

$$\psi_n^m = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \right) P_n^m(\mu) d\mu \quad (2.5)$$

en la truncación triangular $M = N$ y $(m, n) \in T_N \leftrightarrow 0 \leq |m| \leq n \leq N$. Para la T_N se tiene la propiedad de la invarianza respecto de una transformación de coordenadas esféricas. El espacio físico se aproxima por una malla de $I \times J$ puntos.

Para transformar del espacio espectral ψ_n^m al espacio físico $\psi(\lambda_i, \mu_j)$, se aplica primero la transformada de Legendre inversa:

$$\psi^m(\mu_j) = \sum_{n=|m|}^N \psi_n^m P_n^m(\mu_j)$$

y luego la transformada de Fourier inversa (FFT^{-1}):

$$\psi_N = T_N \psi(\lambda_i, \mu_j) = \sum_{m=-N}^N \psi^m(\mu_j) e^{im\lambda_i}$$

Primero: calculamos la contribución simétrica ($n - m$ par)

$$\psi_S^m(\mu) = \sum_{n=|m|}^{N_1} \psi_n^m P_n^m(\mu)$$

y luego la contribución antisimétrica ($n - m$ impar)

$$\psi_A^m(\mu) = \sum_{n=|m|+1}^{N_2} \psi_n^m P_n^m(\mu).$$

Enseguida combinamos estas contribuciones en la forma

$$\psi^m(\mu_j) = \psi_S^m(\mu_j) + \psi_A^m(\mu_j)$$

$$\psi^m(-\mu_j) = \psi_S^m(\mu_j) - \psi_A^m(\mu_j)$$

como $\psi^m(\mu_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda$, al aplicar una FFT^{-1} a esta integral tenemos $\psi^{\sim}(\lambda, \mu) = T_N \psi$.

A cada armónico Y_n^m u onda se le asocia la pareja (m, n) , m es el número de ondas en la dirección zonal y $(n - m)$ el número de nodos o ceros entre los polos, no incluyendo los polos.

Para calcular ψ_n^m de $\psi(\lambda, \mu)$, la integral interna $\psi^m(\mu)$ en la ecuación (2.5) se resuelve mediante una FFT y la integral exterior se ejecuta vía cuadratura Gaussiana usando J puntos de cuadratura $\mu_j \in [-1, 1]$: Primero se calculan las componentes simétricas

$$\psi_S^m(\mu_j) = \frac{1}{2} [\psi^m(\mu_j) + \psi^m(-\mu_j)]$$

y luego la componente antisimétrica

$$\psi_A^m(\mu_j) = \frac{1}{2} [\psi^m(\mu_j) - \psi^m(-\mu_j)].$$

Entonces los coeficientes espectrales de ψ se calculan como

$$\psi_n^m = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^I (\psi_S^m)_j(\mu_j) P_n^m(\mu_j) 2\omega_j \text{ para } n - m \text{ par} \\ \sum_{j=1}^I (\psi_A^m)_j(\mu_j) P_n^m(\mu_j) 2\omega_j \text{ para } n - m \text{ impar} \end{array} \right\}$$

donde $I = \frac{J}{2}$.

Proposición. Sea la amplitud espectral o mod $\psi_n^m = |\psi_n^m| = |\psi_n^m \psi_n^{m*}|^{1/2}$ y la fase espectral o $\text{Arg } \psi_n^m = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im } \psi_n^m}{\text{Re } \psi_n^m} \right)$. Entonces el ángulo de fase espectral de un modo (m, n) es $\Phi(m, n) = m\lambda + \text{Arg } \psi_n^m$ y la velocidad de fase de este modo es

$$c(m, n) = -\frac{\partial \Phi(m, n)}{\partial t} / \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(m, n) = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} \text{Arg } \psi_n^m.$$

Dem. En efecto, sean los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ y $(z_1 z_2)^* = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(y_1 y_2 + x_2 y_1)$ entonces $z_1 z_2 + z_1^* z_2^* = 2(x_1 x_2 - y_1 y_2)$. Sea (m, n) con $m > 0$ el modo o la onda de componentes

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &= \psi_n^m Y_n^m + \psi_n^{-m} Y_n^{-m} = 2P_n^m(\mu) \text{Re} [\psi_n^m e^{im\lambda}] \\ &= 2P_n^m(\mu) [\text{Re} \psi_n^m \cos m\lambda - \text{Im } \psi_n^m \text{sen } m\lambda] \\ &= \frac{2P_n^m(\mu) \text{Im } \psi_n^m}{\text{sen Arg } \psi_n^m} [\cos(\text{Arg } \psi_n^m) \cos m\lambda - \text{sen}(\text{Arg } \psi_n^m) \text{sen } m\lambda] \\ &= P_n^m(\mu) 2 |\psi_n^m| \cos \Phi(m, n). \end{aligned}$$

Ya que $\text{sen Arg } \psi_n^m = \frac{\text{Im} \psi_n^m}{|\psi_n^m|}$, la amplitud del modo (m,n) es $z = 2 |\psi_n^m|$. Para $m=0$, el factor 2 en la amplitud se omite. La fase espectral puede normalizarse con m y 2π , así que la longitud actual θ_n^m de la cresta en $P_n^m(\mu)z \cos m(\lambda - \theta_n^m)$ sería $\theta_n^m = -\text{Arg } \psi_n^m/m$.

Usando los armónicos esféricos sobre S^2 se puede definir un tipo especial de *derivada generalizada* que permite definir el grado de suavidad de alguna función en S^2 . Para $\psi \in L_0^2(S^2)$, $\forall \alpha \in R$ (Gadzhiev,1981; Kamzolov, 1982; Ivanov, 1983; Skiba, 1989; Ivanov y Skiba, 1990) como:

$$(-\Delta)^\alpha f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \chi_n^\alpha f_n^m Y_n^m = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^\alpha F_n.$$

En este caso se formaron (Skiba, 1989) los espacios de Hilbert $H_0^\alpha(S^2) = \{\psi : \psi \in L_0^2(S^2)\}$, donde $L_0^2(S^2) = \{\psi : \psi \in L^2(S^2), \int_{S^2} \psi ds = 0\}$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \langle f, g \rangle_{H_0^\alpha(S^2)} = \langle (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} g \rangle$$

y norma

$$\|\psi\|_\alpha^2 = \|\psi\|_{H_0^\alpha(S^2)}^2 = \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \psi\|_{L_0^2(S^2)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \chi_n^\alpha |\psi_n^m|^2$$

Proposición (Skiba, 1989). a.- $\|\psi\|_\alpha \geq \chi_1^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|\psi\|_\beta$, para los reales $\alpha \geq \beta$, $\psi \in H_0^\alpha(S^2)$, $\chi_n = n(n+1)$.

b.- $\chi_1 \|\psi\|^2 \leq \|\nabla \psi\|^2 = \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \psi\|^2$, $\psi \in H_0^1(S^2)$.

c.- $\|\psi\|_{L_0^4(S^2)}^2 \leq 2^{\frac{1}{4}} \|\psi\|_{L_0^2(S^2)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \psi\|_{L_0^2(S^2)}^{\frac{1}{2}}$.

Capítulo 3

CLASE DE SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACION DE VORTICIDAD SOBRE LA ESFERA

En este trabajo se trata de relacionar métodos modernos de la teoría de funciones definidas sobre la esfera, con la representación de funciones en términos de armónicos esféricos. Hasta ahora las soluciones exactas analíticas encontradas de la ecuación de vorticidad barotrópica atmosférica (sin forzamiento y sin disipación), han sido los flujos zonales, ondas Rossby Haurwitz (RH), las soluciones aisladas (modones), y las soluciones globales llamadas onda Wu-Verkley que son formadas por varias ondas RH. Es el propósito de este capítulo reexaminar esta clase de soluciones en el contexto de variedades (Matsushima, 1972; Loomis y Sterberg, 1990; Szeptycki, 1973) y 'construir' una solución que sea menos idealizada. La estabilidad de esta nueva solución se prueba en el capítulo 4, principalmente con integraciones en el tiempo, usando un modelo barotrópico global espectral con la inclusión de forzamiento y disipación, y se investiga la excitación resonante de esta solución.

3.1 CONSTRUCCION DE FUNCIONES SOBRE LA ESFERA

Sea $S^2 = \{x \in \mathcal{R}^3 : |x| = 1\}$ la esfera unitaria en \mathcal{R}^3 . Se consideran algunas funciones f (clase de soluciones exactas de la EVB) sobre la esfera S^2 vista como una variedad, $f : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ que son soluciones exactas de la ecuación de vorticidad sobre la esfera. Se construye un atlas $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell), l = \iota, \kappa\}$ formado por cartas locales o sistemas de coordenadas locales, tales que $\bigcup_{\ell} \Omega_\ell = S^2$, así que las coordenadas de un punto $Q \in \Omega_\ell$ relacionado al homeomorfismo $\varphi_\ell : \Omega_\ell \rightarrow U_\ell \subset \mathcal{R}_\ell^2$ son las coordenadas del punto $\varphi_\ell(Q)$ que está en \mathcal{R}_ℓ^2 . Para una carta local $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$, la función $f \circ \varphi_\iota^{-1}$ es un mapeo de un conjunto abierto $U_\iota = \varphi_\iota(\Omega_\iota) \subset \mathcal{R}^2$ en \mathcal{R} y representa f en el sistema de coordenadas local.

Definición (Carta coordenada). Una carta coordenada sobre un conjunto S^2 es un par (Ω, φ) , donde $\Omega \subset S^2$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^2$ una biyección y $\varphi(\Omega) \subset \mathcal{R}^2$ es un conjunto

abierto.

Si (Ω, φ) es una carta coordenada, se llama a Ω el dominio de la carta coordenada y φ la coordenada. Todavía no mencionamos que Ω sea un abierto en S^2 , ya que S^2 aun no es un espacio topológico.

Definición (Atlas sobre S^2). Un atlas para el conjunto S^2 es una colección $\{(\Omega_l, \varphi_l) : l \in N\}$ de cartas coordenadas tal que:

i) Para $\iota, \kappa \in N$, $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$, $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$ entonces los conjuntos $\varphi_\iota(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa)$ y $\varphi_\kappa(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa)$ son abiertos y el mapeo $\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1} |_{\varphi_\iota(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa)} : \varphi_\iota(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa) \rightarrow \varphi_\kappa(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa)$ es un difeomorfismo. Lo anterior indica que $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ y $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$ son compatibles; ii) $S^2 = \cup_{l \in N} \Omega_l$

Definición (Variedad). La esfera unitaria S^2 es una variedad que contiene un atlas.

Ahora deseamos definir funciones diferenciales sobre la variedad S^2 y para esto se consideran las coordenadas como una herramienta para decidir cuáles de las muchas funciones sobre S^2 son diferenciables ya que como Ω_ι es sólo un conjunto todavía no tiene sentido preguntarse si la función $f : \Omega_\iota \rightarrow R$ es diferenciable. Pero al considerar la función $f \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(\Omega_\iota) \rightarrow R$, $f \circ \varphi_\iota^{-1}$ es una función definida sobre un conjunto abierto $\varphi_\iota(\Omega_\iota) \subset \mathcal{R}^2$ y se entiende que tales funciones son diferenciables.

Consideramos ahora qué pasa cuando cambiamos coordenadas a alguna otra carta coordenada $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$, y por conveniencia, supongamos que $\Omega_\iota = \Omega_\kappa$. Entonces es posible que $f \circ \varphi_\iota^{-1}$ sea diferenciable pero que $f \circ \varphi_\kappa^{-1}$ no lo sea.

Para comparar, sea $f \circ \varphi_\iota^{-1} = f \circ \varphi_\kappa^{-1} \circ (\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1})$ donde el mapeo $\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(\Omega_\iota) \rightarrow \varphi_\kappa(\Omega_\kappa)$ es una biyección entre subconjuntos abiertos de R^2 . Entonces una condición suficiente para que $f \circ \varphi_\iota^{-1}$ sea diferenciable, si $f \circ \varphi_\kappa^{-1}$ lo es, es que $\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1}$ sea diferenciable.

La esfera S^2 es una variedad diferenciable conexa y compacta. Puesto que S^2 es compacta ésta no puede cubrirse por una única carta. Considere el atlas C^∞ , $\{(\Omega_\iota, \varphi_\iota), (\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)\}$ donde cada carta corresponde a un grupo coordenado geográfico (Richtmyer, 1981; Skiba, 1989), con más precisión, la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ corresponde al polo N, la $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$ al polo N', Ω_ι y Ω_κ son los abiertos de S^2 dados por $\Omega_\iota = S^2 - \Gamma_\iota$, $\Omega_\kappa = S^2 - \Gamma_\kappa$, donde $\Gamma_\iota = \{x \in S^2 : |\lambda(x)| = \pi, \mu(x) \in [-1, 1], (\lambda, \mu) = (x_\iota^1, x_\iota^2)\}$, $\Gamma_\kappa = \{x \in S^2 : |\lambda'(x)| = \pi, \mu'(x) \in [-1, 1], (\lambda', \mu') = (x_\kappa^1, x_\kappa^2)\}$, satisfacen $\Gamma_\iota \cap \Gamma_\kappa = \emptyset$, $\mu = \text{sen } \phi$, ϕ es la latitud y λ la longitud. Las líneas $\Gamma_\iota, \Gamma_\kappa$ son los meridianos internacionales del tiempo relativos a N y N' respectivamente (ver Fig. 3.1). Para que el mapeo φ_ι sea 1-1 es necesario omitir el polo norte y el polo sur ($\phi = \pm \frac{\pi}{2}$) y la línea internacional del tiempo Γ_ι ($\lambda = \pm \pi$).

La $\varphi_\ell : S^2 \rightarrow U_\ell \subset \mathcal{R}_\ell^2$, $\ell = \iota, \kappa$, es una biyección, con inverso $\varphi_\ell^{-1} : U_\ell \rightarrow S^2$ definido como $s = \varphi_\ell^{-1}(x_\ell^1, x_\ell^2) = (\sqrt{1 - (x_\ell^2)^2} \cos x_\ell^1, \sqrt{1 - (x_\ell^2)^2} \text{sen } x_\ell^1, x_\ell^2)$. Sea $Q \in S^2$, entonces $\varphi_\iota(Q) = (x_\iota^1(Q), x_\iota^2(Q)) = (\lambda(Q), \mu(Q))$ y $\varphi_\kappa(Q) = (x_\kappa^1(Q), x_\kappa^2(Q)) = (\lambda'(Q), \mu'(Q))$ son las coordenadas locales asociadas a la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ y $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$ respectivamente. El atlas $\{(\Omega_\iota, \varphi_\iota), (\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)\}$ determina una estructura diferenciable sobre S^2 , $\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa \neq \emptyset$, $\Omega_\iota \cup \Omega_\kappa$ cubre a S^2 , son compatibles y definen el difeomorfismo $\varphi_{\iota\kappa}(Y) = \varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1}(Y)$ entre dos sistemas de coordenadas. Para obtener las fórmulas de transformación $\varphi_{\iota\kappa} = (\varphi_{\iota\kappa}^1, \varphi_{\iota\kappa}^2)$ se usan las relaciones trigonométricas de un triángulo esférico NQN' relativo a las coordenadas (λ, μ) y (λ', μ') y tenemos:

$$\varphi_{l\kappa}^1(x_l^1, x_l^2) = x_\kappa^1(x_l^1, x_l^2) = \lambda'(\lambda, \mu) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{sen}(\lambda - \lambda_0)}{\mu_0 \cos(\lambda - \lambda_0) - \mu \sqrt{\frac{1-\mu_0^2}{1-\mu^2}}} \right], \quad (3.1)$$

$$\varphi_{l\kappa}^2(x_l^1, x_l^2) = x_\kappa^2(x_l^1, x_l^2) = \mu'(\lambda, \mu) = \left[\mu\mu_0 + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_0^2} \cos(\lambda - \lambda_0) \right], \quad (3.2)$$

donde (λ_0, μ_0) son las coordenadas de N' visto desde el sistema geográfico (λ, μ) . En términos del atlas se dice que la función $f : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ es diferenciable de clase C^r en $Q \in S^2$ si existe una carta $(\Omega_\ell, \varphi_\ell)$ con $Q \in \Omega_\ell$ tal que $f \circ \varphi_\ell^{-1}$ es una función diferenciable C^r sobre el subconjunto $\varphi_\ell(\Omega_\ell) \subset \mathcal{R}_\ell^2$ y $F_\ell = f \circ \varphi_\ell^{-1}$ es la expresión en coordenadas de f .

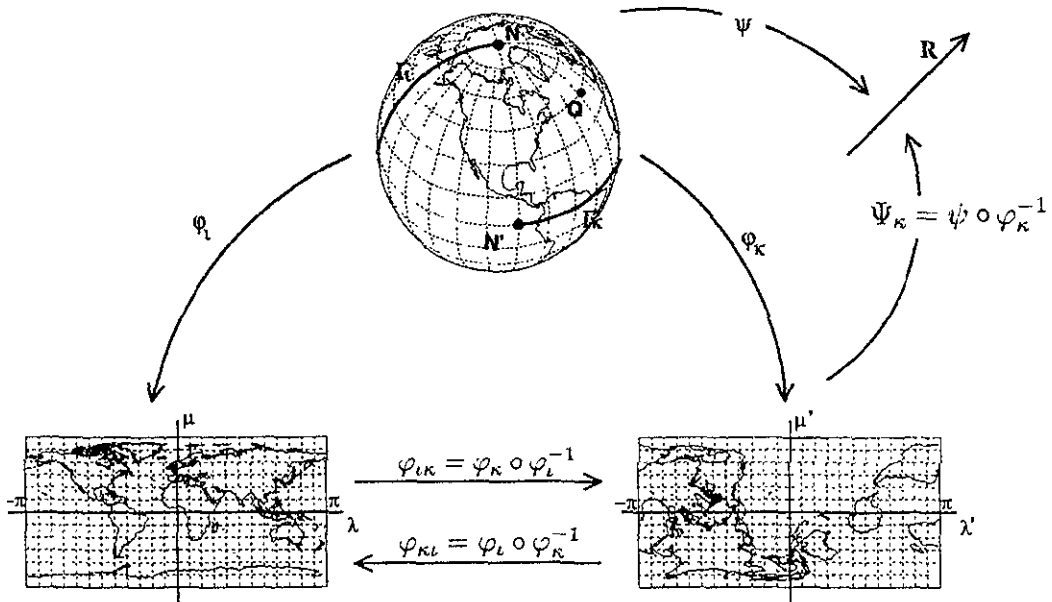


Fig. 3.1 Un atlas sobre la esfera S^2 o grupo coordenado geográfico.

Proposición(forma no dimensional). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces la ecuación de vorticidad en la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ en su forma no dimensional es

$$\frac{\partial \Delta \Psi_\iota}{\partial t} + J(\Psi_\iota, \Delta \Psi_\iota + 2\mu) = 0$$

donde $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : U_\iota \subset \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r es la función de corriente no dimensional

Dem. Sea la ecuación de vorticidad en su forma dimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi_\iota^*}{\partial t^*} &= -J^*(\Psi_\iota^*, \Delta \Psi_\iota^* + 2\Omega\mu) = -J^*(\Psi_\iota^*, \Delta \Psi_\iota^*) - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \Psi_\iota^*}{\partial \lambda} \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Psi_\iota^*}{\partial \mu} \frac{\partial \Delta \Psi_\iota^*}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi_\iota^*}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta \Psi_\iota^*}{\partial \mu} \right) - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \Psi_\iota^*}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

donde (*) indica, con dimensiones, $\Psi_\iota^* = \psi^* \circ \varphi_\iota^{-1} : U_\iota \subset \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r es la función de corriente dimensional, $\Omega = \frac{\pi}{43200 \text{ s}}$, $t^* = \Omega^{-1}t$, $t = \Omega t^*$, $\Psi_\iota = \Omega^{-1}a^{-2}\Psi_\iota^*$, $\Psi_\iota^* = \Omega a^2 \Psi_\iota$, $\Delta^* = a^{-2}\Delta$, $J^* = a^{-2}J$ y el viento $u^* = \Omega a u$. Sean las relaciones $\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{\partial t}{\partial t^*} \frac{\partial}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial t}$ entonces

$$\frac{\partial \Delta \Psi_\iota^*}{\partial t^*} = \Omega \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2} \Delta \Omega a^2 \Psi_\iota) = \Omega^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_\iota$$

$$J^*(\Psi_\iota^*, \Delta \Psi_\iota^*) = a^{-2} J(\Psi_\iota^*, \Delta \Psi_\iota^*) = a^{-2} \Omega a^2 J(\Psi_\iota, a^{-2} \Delta \Omega a^2 \Psi_\iota) = \Omega^2 J(\Psi_\iota, \Delta \Psi_\iota)$$

$$J^*(\Psi_\iota^*, 2\Omega\mu) = a^{-2} J(\Omega a^2 \Psi_\iota, 2\Omega\mu) = \Omega^2 J(\Psi_\iota, 2\mu)$$

de donde obtenemos el resultado esperado.

3.2 SOLUCIONES CLASICAS

Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función de corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r , tal que la función de corriente en el sistema de coordenadas local $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : U_\iota \subset \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r satisface la ecuación de vorticidad (en forma no dimensional):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi_\iota}{\partial t} + J(\Psi_\iota, \Delta \Psi_\iota + 2\mu) &= 0, \quad (\lambda, \mu) \in U_\iota, t \in (0, T] \\ \Psi_\iota(\lambda, \mu, 0) &= \Psi_{\iota 0}(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in U_\iota \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $J(c, g) = \frac{\partial c}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial c}{\partial \mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = (\mathbf{k} \times \nabla c) \cdot \nabla g = \mathbf{v} \cdot \nabla g$, es el jacobiano, $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla c = \{u, v\} = \left\{ -\sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial c}{\partial \mu}, \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right\}$ el campo vectorial de velocidad del viento sobre la superficie de la esfera, $grad c = \nabla c = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \frac{\partial c}{\partial \lambda}, \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial c}{\partial \mu} \right\}$, $c = \Psi_\iota$, $\xi = \Delta \Psi_\iota = div$

$grad \Psi_\iota$, es la vorticidad relativa, $q = \Delta \Psi_\iota + 2\mu$ la vorticidad potencial o absoluta y k es un vector unitario normal a la superficie de la esfera. Es natural suponer que todas las funciones tienen período 2π para la variable λ y regular en $\mu = \pm 1$

Proposición(Flujo zonal). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo *flujo zonal* $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : U_\iota \subset \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^N b_n P_n^0(\mu) \in P^N \quad (3.4)$$

es una solución exacta de la ecuación de vorticidad (3.3) siendo b_n constantes.

Dem. Es claro que el resultado se obtiene de (3.3).

Proposición(Polinomio homogéneo). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo *polinomio Homogéneo* $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu; t) = \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda - ct, \mu) \in \mathbf{H}_n \quad (3.5)$$

es una solución exacta de la ecuación de vorticidad (3.3), con $n \geq 2$, donde a_m pueden ser factores complejos y la velocidad de fase satisface

$$c = -\frac{2}{\chi_n}.$$

Dem. Sea $\Psi_\iota \in \mathbf{H}_n$, con $\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) = \Psi_n(\lambda - ct, \mu) = \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda - ct, \mu)$, entonces $\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = -2\Psi'$ y $\frac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda} = \Psi'$ donde $\Psi' = \sum_{m=-n}^n i m a_m Y_n^m(\lambda - ct, \mu)$. También tenemos las siguientes expresiones:

$$\Delta \Psi_\iota = -\chi_n \Psi_n; \frac{\partial \Delta \Psi_\iota}{\partial \mu} = -\chi_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial \mu}; \Delta \Psi_\iota + 2\mu = -\chi_n \Psi_\iota + 2\mu; \frac{\partial \Delta \Psi_\iota}{\partial t} = c \chi_n \Psi'$$

Ahora de la EVB:

$$\Delta \frac{\partial \Psi_\iota}{\partial t} = \chi_n c \Psi' = J(-\chi_n \Psi_n + 2\mu, \Psi_n) = -2 \frac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda} = -2 \Psi'$$

de donde obtenemos el resultado.

Proposición (Onda Rossby-Haurwitz). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) = -\omega \mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_{in}^m Y_n^m(\lambda - ct, \mu) \in \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_n \quad (3.6)$$

con $n \geq 1$, llamada *onda Rossby-Haurwitz (RH)*, es una solución exacta de la ecuación de vorticidad si su velocidad angular c satisface

$$c = \omega - \frac{2(\omega + 1)}{\chi_n}; \quad (3.7)$$

aquí el término $-\omega\mu$ es el término de rotación como un cuerpo rígido.

Dem. Aquí Ψ_t se puede expresar como

$$\Psi_t(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \Psi_n(\lambda - ct, \mu),$$

donde $\Psi_n(\lambda - ct, \mu) = \sum_{m=-n}^n \Psi_{in}^m Y_n^m(\lambda - ct, \mu)$, es claro que

$$\Delta\Psi_t = 2\omega\mu - \chi_n\Psi_n = -\chi_n\Psi_t + (2\omega - \chi_n\omega)\mu,$$

por lo tanto

$$\Delta\Psi_t + 2\mu = -\chi_n\Psi_t - \chi_n\left(\omega - \frac{2(\omega + 1)}{\chi_n}\right)\mu = -\chi_n\Psi_t + [(2 - \chi_n)\omega + 2]\mu,$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta\Psi_t = -\chi_n\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda}, \Delta\frac{\partial\Psi_t}{\partial t} = \chi_n c\Psi', \frac{\partial}{\partial\mu}\Delta\Psi_t = (2 - \chi_n)\omega - \chi_n\frac{\partial\Psi_t}{\partial\mu},$$

donde $\Psi' = \sum_{m=-n}^n im\Psi_{in}^m Y_n^m(\lambda - ct, \mu)$, así que de la EVB (3.3):

$$\begin{aligned} \Delta\frac{\partial\Psi_t}{\partial t} &= -J(\Psi_t, \Delta\Psi_t + 2\mu) = \frac{\partial\Psi_t}{\partial\mu}\frac{\partial\Delta\Psi_t}{\partial\lambda} - \frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda}\frac{\partial\Delta\Psi_t}{\partial\mu} - 2\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} \\ &= \left[\frac{\partial\Psi_t}{\partial\mu} \left(-\chi_n\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} \right) - \frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} \left((2 - \chi_n)\omega - \chi_n\frac{\partial\Psi_t}{\partial\mu} \right) \right] - 2\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \chi_n c\Psi' &= -\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} (2 - \chi_n)\omega - 2\frac{\partial\Psi_t}{\partial\lambda} = -[(2 - \chi_n)\omega + 2]\Psi' \\ &= -[-\omega\chi_n + 2(\omega + 1)]\Psi' \end{aligned}$$

así que obtenemos

$$c = \omega - \frac{2(\omega + 1)}{\chi_n}.$$

En la figura 3.2a-b mostramos la función de corriente de varias ondas RH:

$$\Psi(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \Psi_n^m P_n^m(\mu) \cos(m\lambda - ct) \quad (3.8)$$

definidas por los parámetros $(m, n) = (2, 5)$, y $(3, 6)$ y en forma nodimensional. En la figura 3.3c-d se muestra la función de corriente y el campo de viento (vectores) de estas mismas ondas RH (m, n) pero ahora en forma dimensional. Donde podemos observar que las intensidades de los vientos máximos están entre 30 a 50 m/s.

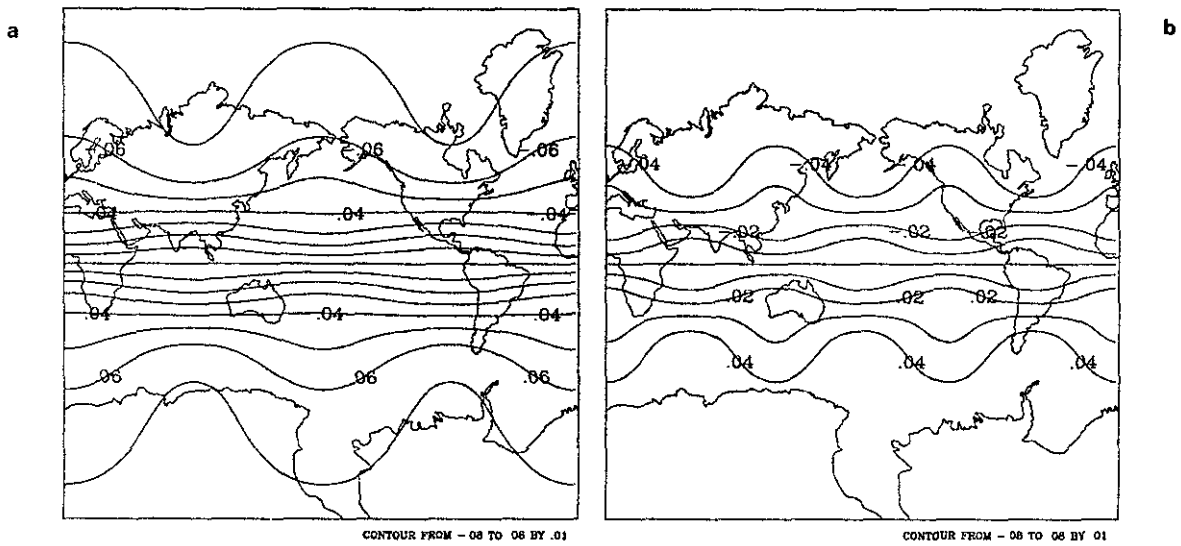


Fig. 3.2 Función de corriente de ondas Rossby-Haurwitz: $\Psi(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \Psi_n^m P_n^m(\mu) \cos(m\lambda)$, con $(m,n)=(2,5)$ (a) y $(m,n)=(3,6)$ (b).

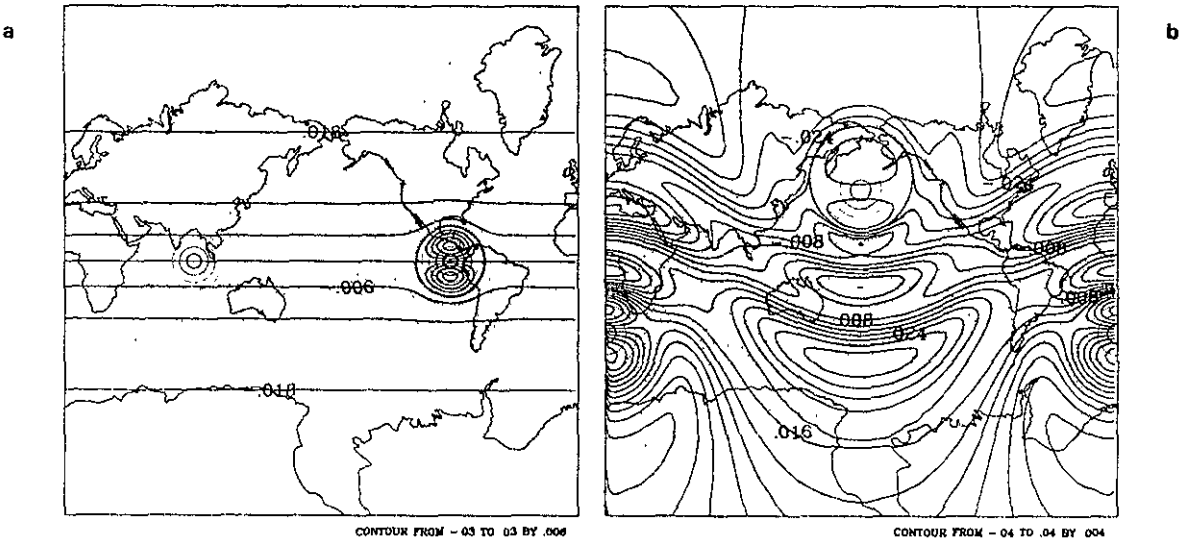


Fig. 3.3 Función de corriente del modón ecuatorial aislado de Verkley (1984) (a), y del modón uniforme de Verkley (1990) localizado sobre el golfo de Alaska (b). Los puntos indican una malla del sistema primado cada $5 \times 5^\circ$ y se dibuja la frontera de la región interna del modón.

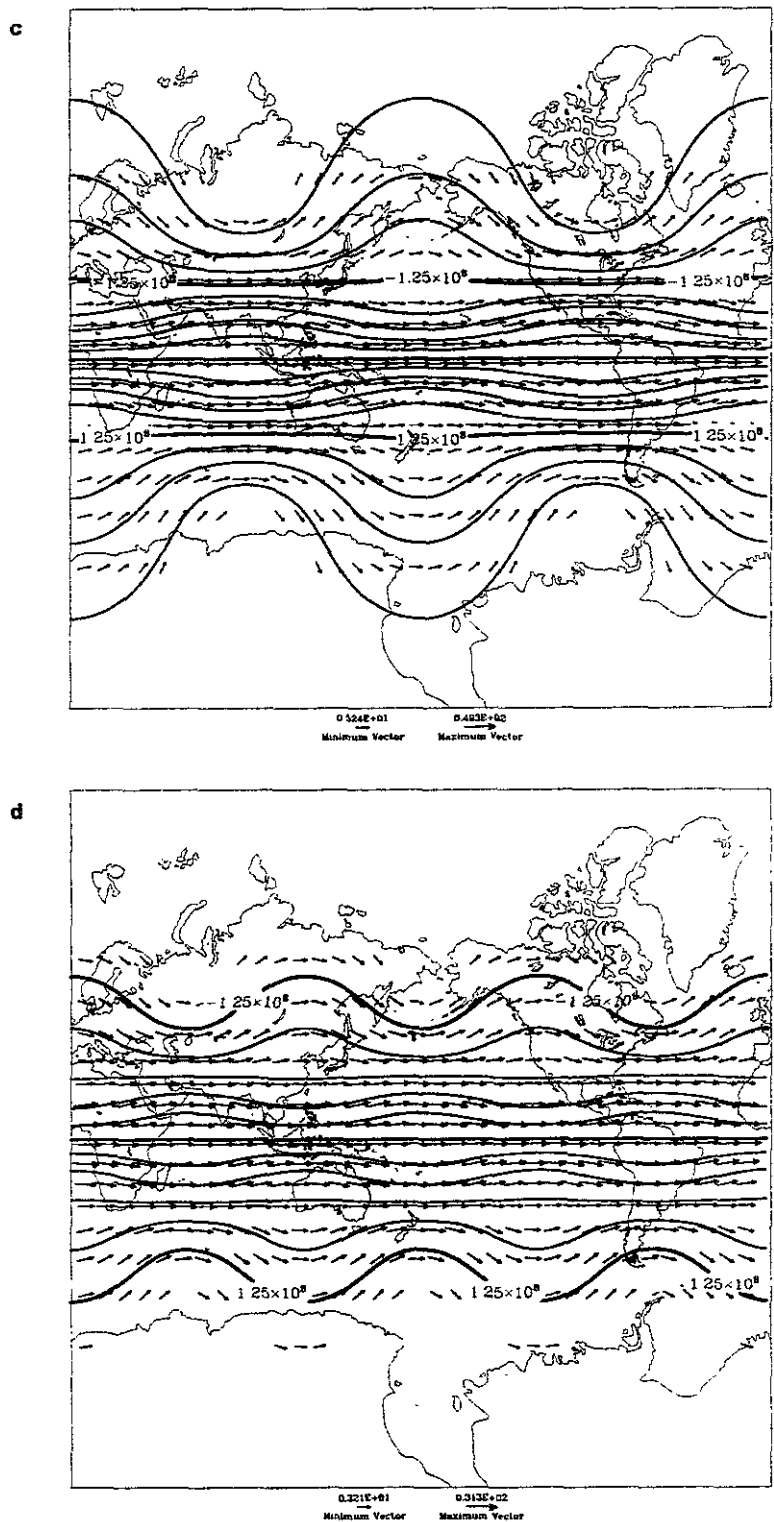


Fig. 3.3c-d. Función de corriente $\Psi(\lambda, \mu)$ y el campo de viento, de las ondas Rossby-Haurwitz: con $(m, n) = (2, 5)$ (c) y $(m, n) = (3, 6)$ (d) de la fig. 3.2. En dimensiones de m^2/s , y m/s respectivamente.

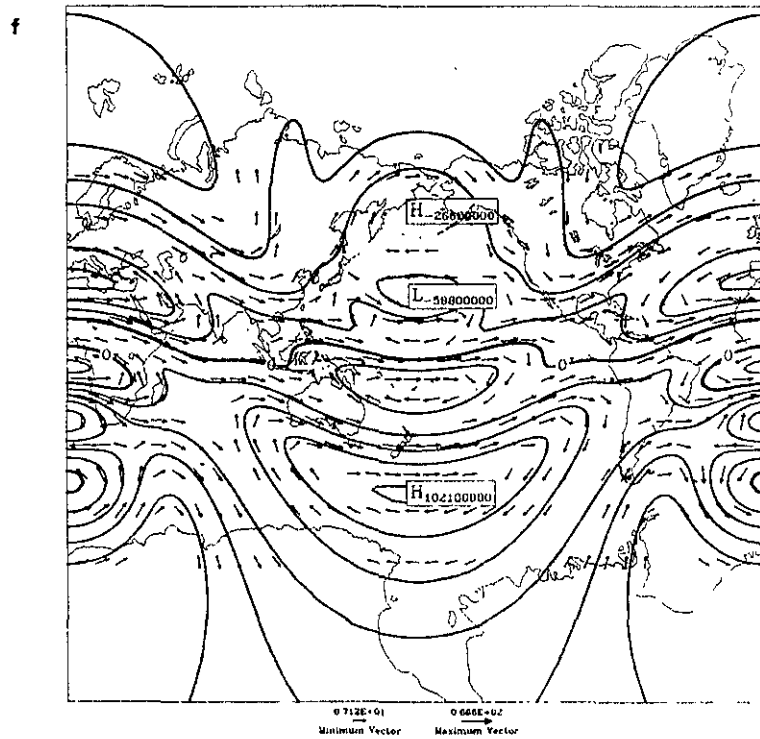
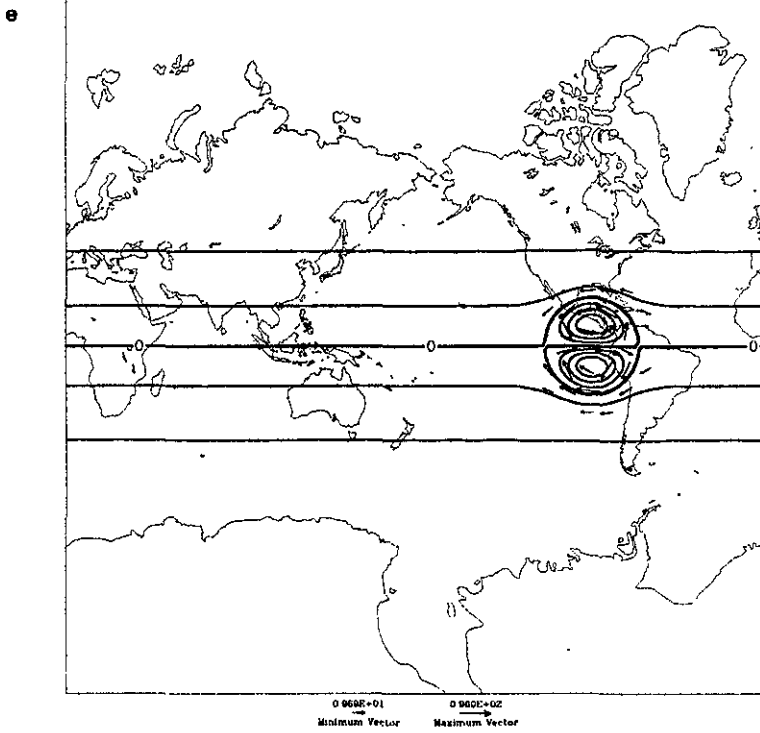


Fig. 3.3e-f. Función de corriente Ψ ($\lambda\mu$) y el campo de viento, del modón de Verkleij (1984) (e) y del modón de Verkleij (1990) (f) de la fig. 3.3. En dimensiones de m^2/s , y m/s respectivamente.

3.3 SOLUCIONES GENERALIZADAS

Proposición (Solución Thompson, 1982; Verkley, 1984). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) = Y_\nu(\lambda', \mu') - \omega\mu + D \quad (3.9)$$

es una solución exacta de la ecuación de vorticidad sobre la esfera, donde Y_ν es una eigenfunción del operador Laplace Δ de grado ν . La ecuación (3.9) describe una configuración en el cual la estructura Y_ν se mueve con velocidad constante c_ν y sin cambiar de tamaño y forma en el flujo zonal $-\omega\mu$. Donde el polo $N'(\lambda_0, \mu_0)$, ($\lambda_0 = c_\nu t$, $\mu_0 = cte$), del sistema primado (λ', μ') se mueve a lo largo de un círculo de latitud $\mu = cte$ con una velocidad angular constante:

$$c_\nu = \omega - \frac{2(\omega + 1)}{\chi_\nu} \quad (3.10)$$

donde χ_ν es un eigenvalor del problema espectral $\Delta Y_\nu = -\chi_\nu Y_\nu$.

Dem. En particular para un armónico esférico $Y(\lambda', \mu')$ de grado n , se tiene que $\chi_\nu = \chi_n = n(n+1)$, entonces (3.9) es una onda Rossby-Haurwitz ya que

$$Y_n^m(\lambda', \mu') = \sum_{k=-n}^n D_{mk}^n(\gamma, \Theta, 0) Y_n^k(\lambda, \mu)$$

el cual liga los armónicos esféricos $Y_n^m(\lambda', \mu')$ y $Y_n^k(\lambda, \mu)$ para dos sistemas de coordenadas geográficas $\{(\Omega_\iota, \varphi_\iota), (\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)\}$; $\gamma(t) = c_\nu t$ es el ángulo de Euler entre los ejes $0x_2$ ó $0x'_2$ de dos sistemas cartesianos (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3) ; Θ es el ángulo de Euler entre los polos N y N' . Siendo $D_{mk}^n(\gamma, \Theta, 0) = d_{mk}^n(\mu_0) e^{im\gamma}$ la función Wigner's (Skiba, 1993). En el caso en que el polo N' coincide con el polo N o sea $\mu_0 = 1$ entonces $D_{mk}^n = 0$.

En los dos sistemas se cumple que $\lambda' = \lambda'(\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0)$, $\mu' = \mu'(\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0)$, $\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}$ y $\frac{\partial \mu'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\partial \mu'}{\partial \lambda}$.

Entonces tenemos por la regla de la cadena

$$\frac{\partial q(\lambda', \mu')}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial t}, \quad (3.11)$$

a pero como $\frac{\partial \lambda'}{\partial t} = \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} = c_\nu \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda_0} = -c_\nu \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}$; $\frac{\partial \mu'}{\partial t} = \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} = -c_\nu \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda}$, (3.11) se reduce

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\lambda', \mu')}{\partial t} &= -c_\nu \frac{\partial q}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} - c_\nu \frac{\partial q}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda} \\ &= -c_\nu \left[\frac{\partial q}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda} + \frac{\partial q}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda} \right] = -c_\nu \frac{\partial q(\lambda', \mu')}{\partial \lambda} = J(c_\nu \mu, q). \end{aligned}$$

Al usar las relaciones anteriores y las igualdades:

$$\begin{aligned}\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) &= \Psi_\kappa(\lambda', \mu'), \\ q(\lambda, \mu, t) &= q(\lambda', \mu') ; J'(\Psi_{\kappa_1}, \Psi_{\kappa_2}) = J(\Psi_{\iota_1}, \Psi_{\iota_2}), \\ \Delta\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) &= \Delta'\Psi_\kappa(\lambda', \mu') ; q(\lambda', \mu') = \Delta\Psi_\kappa(\lambda', \mu') + 2\mu,\end{aligned}$$

la ecuación (3.11) se transforma en

$$J(\bar{\Psi}, q) = 0, \quad (3.12)$$

donde $\bar{\Psi} = \Psi_\iota + 2c_\nu\mu$. Una derivada $\Lambda = \frac{dq}{d\bar{\Psi}}$ en un diagrama $(q, \bar{\Psi})$ puede considerarse como un potencial o índice de refracción. Por otro lado $\frac{\partial\Delta\Psi_\iota}{\partial t} = c_\nu\chi_\nu\frac{\partial Y_\nu}{\partial\lambda}$ y $J(\Psi_\iota, \Delta\Psi_\iota + 2\mu) = [2 + \omega(2 - \chi_\nu)]\frac{\partial Y_\nu}{\partial\lambda}$ lo cual da el resultado (3.10).

La clase de soluciones exactas estacionarias o soluciones que se mueven uniformemente sin cambiar de forma a lo largo de un círculo de latitud y que satisfacen una relación funcional (3.12) de la forma $q = F(\bar{\Psi})$ se llaman soluciones libres. Las ondas Rossby-Haurwitz (RH) son soluciones lineales de la ecuación (3.3), se caracterizan por tener una relación lineal entre q y $\bar{\Psi}$, y son (soluciones libres) modelos de las ondas planetarias atmosféricas observadas que se propagan hacia el oeste en la atmósfera.

Otra clase de soluciones exactas de la ecuación (3.3), parecidas a (3.9) son los *modones* y se caracterizan por tener una relación lineal multivaluada por trozos entre q y $\bar{\Psi}$. Los modones son soluciones altamente no lineales y su configuración se parece a los centros de alta y baja de bloqueo atmosférico. Hay varios tipos de modones: Modones tipo onda, modones aislados y modones uniformes. Los modones tipo onda, son vórtices bipolares, los cuales se propagan hacia el oeste y pueden volverse estacionarios en el flujo de los oestes (Verkley, 1987; Neven, 1992, 2001). Los modones aislados son vórtices bipolar que se propagan hacia el este y pueden volverse estacionarios en los flujos del este (Tribbia, 1984; Verkley, 1984). Los modones uniformes tienen una región interna con q uniforme y en la región externa el campo es ondulatorio (Verkley, 1990).

La solución modón se construye (Verkley, 1984, 1987, 1990; Neven, 1993) al dividir la esfera S^2 en dos regiones: la región interna S_i y la región externa S_e separada por una frontera circular donde $\bar{\Psi}$, q y $\bar{\Psi}'$ son continuas. Se incorporan dos sistemas de coordenadas (λ, μ) , (λ', μ') , el primado cuyo polo $N' = (\lambda_0, \mu_0) = (cte + c_\nu t, cte)$ se mueve a lo largo de un círculo de latitud constante y con velocidad angular c_ν . La transformación de coordenadas del sistema fijo (λ, μ) a la esfera en rotación, con polo N , al sistema móvil (λ', μ') con polo N' , está dada por las ecuaciones (3.1) y (3.2). El centro del modón es el polo N' , el radio del modón es $\theta_a = \frac{\pi}{2} - \phi_a$ y ϕ_a es la latitud de la frontera circular. La función de corriente para cada región se descompone como la fórmula (3.9). Sobre la variedad S^2 la construcción del modón se interpreta como la :

Proposición (Construcción del Modón Verkley, 1984 o del modón cuadrupolar de Neven, 1992). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y $\psi = \psi_1 + \psi_2 : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ la función

corriente de C^r . Entonces el mapeo $\Psi_i = (\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi_i^{-1} : \mathcal{R}_i^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r puede ser de la forma $\Psi_i(\lambda, \mu) = (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') + (\psi_2 \circ \varphi_i^{-1})(\lambda, \mu)$.

Dem. Es claro que el resultado se obtiene de

$$\begin{aligned}\Psi_i(\lambda, \mu) &= \psi_1 \circ \varphi_i^{-1}(\lambda, \mu) + \psi_2 \circ \varphi_i^{-1}(\lambda, \mu) \\ &= (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1}) \circ (\varphi_\kappa \circ \varphi_i^{-1})(\lambda, \mu) + (\psi_2 \circ \varphi_i^{-1})(\lambda, \mu) \\ &= (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1}) \circ \varphi_{i\kappa}(\lambda, \mu) + (\psi_2 \circ \varphi_i^{-1})(\lambda, \mu).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Para el caso del modón de Verkley (1984) ψ es C^2 y

$$(\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') = X(\lambda', \mu') = X^m(\mu') + X^d(\mu') \cos \lambda' \rightarrow Y_\nu(\lambda', \mu') = \sum_{\ell=0}^1 A_\ell Y_\nu^\ell(\lambda', \mu'),$$

consiste de las componentes monopolar y dipolar:

$$X^d(\mu') = (c_\nu - \omega) \sqrt{1 - \mu_a^2} \sqrt{1 - \mu_0^2} f^d(\mu')$$

$$X^m(\mu') = (c_\nu - \omega) \mu_0 \sqrt{1 - \mu_a^2} f^m(\mu'),$$

donde $\mu_0 = \sin \phi_0$, $\mu_a = \sin \phi_a$. Siendo

$$f^d(\mu) = \begin{cases} -bB(1, 1, \mu) + (1+b) \left(\frac{1-\mu^2}{1-\mu_a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } \mu \geq \mu_a \\ P(1, 1, -\mu), & \text{si } \mu < \mu_a \end{cases}$$

y

$$f^m(\mu) = \begin{cases} -bB(0, 1, \mu) + (1+b) \frac{\mu - \mu_a}{\sqrt{1 - \mu_a^2}} - P(0, 1, -\mu_a) + bB(0, 1, \mu_a), & \text{si } \mu \geq \mu_a \\ -P(1, 1, -\mu), & \text{si } \mu < \mu_a, \end{cases}$$

donde $b = \frac{(k^2 + \frac{1}{4}) + 2}{\alpha(\alpha+1) - 2}$ y

$$B(r, s, \mu) = \frac{P_\alpha^r(\mu)}{P_\alpha^s(\mu_a)}; P(r, s, \mu) = \frac{P_{-0.5+ik}^r(\mu)}{P_{-0.5+ik}^s(-\mu_a)}.$$

Por otro lado

$$(\psi_2 \circ \varphi_i^{-1})(\lambda, \mu) = -\omega\mu + D,$$

donde el término $-\omega\mu$ es un flujo zonal con velocidad angular ω , y D es una constante arbitraria. Los términos en la expresión de Y_ν se llaman momentos multipolares de Y_ν y su forma explícita está en Verkley (1984), Skiba (1989) o Pérez y Skiba (1999); Y_ν es una eigenfunción del operador Laplace Δ con eigenvalor $\chi_\nu = -\nu(\nu+1)$, es decir $\Delta Y_\nu = \chi_\nu Y_\nu$ y $Y_\nu^\ell(\lambda', \mu') = \{P_\nu^\ell(\mu') e^{i\ell\lambda'}\}$ son los armónicos esféricos en el sistema de coordenadas local $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$ con grado ν real o complejo. Un modón se caracteriza por la

velocidad de fase c_ν , la latitud central del $\mu_0 = \text{sen } \phi_0 (N')$, el número de onda interno α y el número de onda externo σ .

Se generó numéricamente el modón Verkley ψ sobre el sistema de coordenado local $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$, es decir $\Psi_\kappa = \psi \circ \varphi_\kappa^{-1} : U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2 \rightarrow \mathcal{R}$, tomando una retícula en $U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2$ de $5^\circ \times 5^\circ$, donde se considera la región interna y externa discutida arriba. También se generó una retícula o malla Gaussiana de trabajo de (128, 64) puntos sobre el sistema de coordenado local $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ los cuales fueron mapeados al dominio U_κ usando las ecuaciones (3.1) y (3.2). Sobre los (128, 64) puntos Gaussianos ya en U_κ se interpolaron los valores de Ψ_κ , usando un esquema de interpolación de Lagrange de 9 puntos. La función resultante (modón de Verkley ecuatorial, 1984) ya vista en el sistema de coordenado local $U_\iota \subset \mathcal{R}_\iota^2$ se muestra en la Fig. 3.3a. Este modón pequeño se definió por los parámetros: $k = 10$, $\alpha = 10$, $\mu_a = \text{sen } 66.14^\circ$, $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 270^\circ$ y $D_0 = 0$. En la figura 3.3e se muestra la función de corriente y el campo de viento (vectores) de este mismo modón pero ahora en forma dimensional. Donde podemos observar que las intensidades de los vientos máximos se localizan en la región interna y son del orden de 90 m/s.

Para el Modón cuadrupolar Neven (1993) se tiene que

$$(\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') = X^q(\mu') \cos 2(\lambda' - \lambda_R) + X^d(\mu') \cos \lambda' + X^m(\mu') \rightarrow$$

$$Y_\nu(\lambda', \mu') = \sum_{\ell=0}^2 A_\ell Y_\nu^\ell(\lambda', \mu'),$$

donde la forma explícita de cada término y su significado están en Neven (1993).

Puesto que estamos interesados también en construir campos que puedan describir el bloqueo atmosférico, en este sentido el modón uniforme de Verkley (1990) da una buena descripción de este fenómeno y es lo que se discute enseguida. Sea una solución generalizada aislada (Modón uniforme) estacionaria o que se propaga zonalmente en una latitud con una velocidad angular c_ν y que son soluciones de la ecuación de vorticidad sobre la esfera (3.3). Estas soluciones libres se caracterizan por tener una región interior S_i en la cual q es constante, la región S_i está separada del resto de la esfera S_e por una curva o frontera circular B , sobre esta curva $q = b$ y $\psi = d$. El significado de la ecuación $J(\bar{\Psi}, q) = 0$ es que algunos de los campos $\bar{\Psi}$ o q es una constante. En los estudios del bloqueo atmosférico de Illari (1984) y Crum and Stevens (1988) notaron valores relativamente bajos y uniformes de la vorticidad potencial isentrópica en la región del bloqueo. Para construir la solución modón uniforme, que es estacionaria o que se propaga longitudinalmente con velocidad de fase c_ν , se supondrá que el sistema primado depende sólo de (λ', μ') , así que

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu, t) = \Psi_\kappa(\lambda', \mu'),$$

$$q_\iota(\lambda, \mu, t) = q_\kappa(\lambda', \mu') = \Delta \Psi_\kappa + 2\mu,$$

ya que $\Delta' \Psi_\kappa = \Delta \Psi_\iota$.

Proposición. (Construcción del Modón Verkley uniforme, 1990). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi = \psi_1 + \psi_2 : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo $\Psi_\kappa = (\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi_\kappa^{-1} : \mathcal{R}_\kappa^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r puede ser de la forma

$$\Psi_\kappa(\lambda', \mu') = (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') + (\psi_2 \circ \varphi_\iota^{-1})(\lambda, \mu). \quad (3.14)$$

Dem. En efecto es claro que

$$\begin{aligned} \Psi_\kappa(\lambda', \mu') &= \psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1}(\lambda', \mu') + \psi_2 \circ \varphi_\kappa^{-1}(\lambda', \mu') \\ &= (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1}) \circ (\lambda', \mu') + (\psi_2 \circ \varphi_\iota^{-1}) \circ (\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') \\ &= (\psi_1 \circ \varphi_\kappa^{-1})(\lambda', \mu') + (\psi_2 \circ \varphi_\iota^{-1}) \circ \varphi_{\kappa\iota}(\lambda', \mu'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

ya que $(\lambda, \mu) = \varphi_{\kappa\iota}(\lambda', \mu')$.

En el sistema primado sean las regiones exterior $\varphi_\kappa(S_e)$ e interior $\varphi_\kappa(S_i)$. Siguiendo a Verkley (1990) buscamos soluciones de (3.3) sobre la esfera de la forma general, para un modón uniforme, es claro de (3.14), que ésta puede proponerse de la forma

$$\Psi_\kappa(\lambda', \mu') = \begin{cases} Y_e(\lambda', \mu') - \omega_e \mu + D_e \text{ en } \varphi_\kappa(S_e) \\ Y_i(\lambda', \mu') - \omega_i \mu + D_i \text{ en } \varphi_\kappa(S_i) \end{cases} \quad (3.16)$$

tal que

$$\Delta' Y_e = -\chi^e Y_e ; \Delta' Y_i = e_i, \quad (3.17)$$

siendo χ^e y e_i constantes. Ciertas condiciones de continuidad se deben satisfacer al generar estas funciones $(\Psi_\kappa(\lambda', \mu'), \frac{\partial \Psi_\kappa}{\partial \mu'}, \Delta' \Psi_\kappa)$ en el borde de la región interior. Las funciones especiales (Verkley ,1990) que pueden satisfacer (3.16) y (3.17) son:

$$S_\sigma^m(\theta') = P_\sigma^m(-\cos \theta'), \text{ si } m \geq 0, \sigma \geq -\frac{1}{2}$$

y

$$T^m(\theta') = \begin{cases} Ln \cos(\frac{\theta'}{2}), \text{ si } m = 0 \\ -\left[\frac{(m-1)!}{2}\right] [\tan(\frac{\theta'}{2})]^m & \text{ si } m > 0, \end{cases}$$

donde P_σ^m es la función asociada de Legendre de orden m y grado real σ , siendo m el número de onda zonal, $\theta' = \frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1} \mu$, A y B son constantes por determinarse de las condiciones de continuidad. La función $S_\sigma^m(\theta')$ es regular en $\theta' = \pi$ y singular en $\theta' = 0$. La función $T^m(\theta')$ es regular en $\theta' = 0$ y singular en $\theta' = \pi$.

De (3.16) la vorticidad absoluta adquiere la forma:

$$q(\lambda', \mu') = \begin{cases} -\chi^e Y_e(\lambda', \mu') + (2 + 2\omega_e)\mu \text{ en } \varphi_\kappa(S_e) \\ e_i + (2 + 2\omega_i)\mu \text{ en } \varphi_\kappa(S_i), \end{cases}$$

para hallar una expresión más explícita del modón, se debe dar la forma funcional de los Y_e y Y_i según Verkley estos son:

$$Y_e(\lambda', \mu') = A_0 S_\sigma^1(\theta') \cos \lambda' + B_0 S_\sigma^0(\theta')$$

$$Y_i(\lambda', \mu') = A_i T^1(\theta') \cos \lambda' + B_i T^0(\theta')$$

que satisfagan (3.16) y (3.17); donde las A_s y los B_s son constantes. Como el bloqueo atmosférico es un fenómeno estacionario entonces, se supone $c_\nu = 0$ el cual como una consecuencia se toma aproximadamente $\sigma = 8.06$.

Se generó numéricamente el modón Verkley uniforme ψ , con los parámetros $\phi_a = \frac{5\pi}{12}$, $\sigma = 8.06$, $\omega_o = 0.028$, $\lambda_o = 180^\circ$, $\varphi_o = \frac{\pi}{4}$, sobre el sistema de coordenado local $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$, es decir $\Psi_\kappa = \psi \circ \varphi_\kappa^{-1} : U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2 \rightarrow \mathcal{R}$, tomando una retícula en $U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2$ de $5^\circ \times 5^\circ$, donde se considera la región interna y externa. Sobre la malla de (128, 64) puntos gaussianos ya en U_κ se interpolaron los valores de Ψ_κ , usando el esquema de interpolación de Lagrange de 9 puntos. La función resultante (modón de Verkley uniforme) ya vista en el sistema de coordenado local $U_i \subset \mathcal{R}_i^2$ se muestra en la Fig. 3.3b. En la figura 3.3f se muestra la función de corriente y el campo de viento (vectores) de este modón uniforme pero ahora en forma dimensional. Donde podemos observar que las intensidades de los vientos máximos en la región externa son del orden de 60 m/s.

3.4 SOLUCIONES GLOBALES

A pesar de que el modón de Verkley, (1990) tiene una estructura ondulatoria en la región exterior S_e , ésta todavía está muy idealizada y es por esto que se buscó soluciones que tuvieran un carácter más realista. A este fin, Wu and Verkley (1993), propusieron un nuevo tipo de soluciones que aquí las llamaremos globales. Enseguida se construirá la solución Wu-Verkley el cual es de naturaleza diferente a las ondas RH y modones. Sin embargo esto no le quita interés a realizar más estudios con el modón de Verkley, 1990 y su relación con el fenómeno de bloqueo.

Proposición(Wu-Verkley 1993). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = i, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo Wu-Verkley $\Psi_i = \psi \circ \varphi_i^{-1} : \mathcal{R}_i^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_i(\lambda, \mu, t) = \begin{cases} Y_1(\lambda - ct, \mu) - \omega_1 \mu + D_1 \forall(\lambda, \mu) \in S_1 \\ Y_0(\lambda - ct, \mu) - \omega_0 \mu + D_0 \forall(\lambda, \mu) \in S_0 \\ Y_2(\lambda - ct, \mu) - \omega_2 \mu + D_2 \forall(\lambda, \mu) \in S_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

es una solución exacta de la ec. de vorticidad (3.3) sobre la esfera S^2 , donde $S_0 = [-\pi, \pi] \times [-\mu_0, \mu_0]$, $S_1 = [-\pi, \pi] \times [\mu_0, 1]$, $S_2 = [-\pi, \pi] \times [-1, -\mu_0]$, con $\mu_0 = \text{sen} \phi_0$, $\varphi_i(S_e) = S_1 \cup S_2$ y $\varphi_i(S_i) = S_0$.

Aquí las eigenfunciones Y_i ($\Delta Y_i = -\chi_i Y_i$), adquieren la forma

$$Y_1(\lambda - ct, \mu) = A_1 P_\alpha^0(\mu) + B_1 P_\alpha^m(\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

$$Y_0(\lambda - ct, \mu) = A_0 T_\sigma^0(\mu) + B_0 T_\sigma^m(\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

$$Y_2(\lambda - ct, \mu) = -A_1 P_\alpha^0(-\mu) - B_1 P_\alpha^m(-\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

siendo α o σ números reales,

$$T_\sigma^m(\mu) = P_\sigma^m(\mu) - P_\sigma^m(-\mu)$$

y $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Los parámetros α , m y μ_0 se eligen al satisfacer la condición

$$P_\alpha^m(\mu_0) = T_\sigma^m(\mu_0) = 0,$$

con $\omega_2 = \omega_1$, $D_2 = -D_1$ y $\chi_2 = \chi_1$. Tal que $\chi_1 = \chi_\alpha = \alpha(\alpha + 1)$, $\chi_0 = \chi_\sigma = \sigma(\sigma + 1)$ y las velocidades de fase

$$\begin{aligned} c &= c_\alpha(\mu) = \omega_1 - \frac{2(\omega_1 + 1)}{\chi_\alpha} \text{ en } S_1, \\ c &= c_\sigma(\mu) = \omega_0 - \frac{2(\omega_0 + 1)}{\chi_\sigma} \text{ en } S_0, \\ c &= c_\alpha(\mu) = \omega_2 - \frac{2(\omega_2 + 1)}{\chi_\alpha} \text{ en } S_2. \end{aligned}$$

Las funciones de Legendre $P_\alpha^m(\mu)$ se calculan como

$$P_\alpha^m(\mu) = \frac{(-\alpha)_m (\alpha + 1)_m}{m!} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_j (\alpha + 1)_j}{(m + 1)!} \left(\frac{1 - \mu}{2} \right)^j,$$

donde $(q)_j$ es el símbolo Pochhammer definido como

$$(q)_0 = 1,$$

$$(q)_j = q(q + 1) \cdots (q + j - 1),$$

para cualesquiera número complejo q y entero no-negativo j . Existiendo las relaciones con la función gamma compleja en la forma $(q)_j = \frac{\Gamma(q+j)}{\Gamma(q)}$, $(-1)^m (-\alpha)_m (\alpha + 1)_m = \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)}$, que satisface las propiedades $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(m + 1) = m!$ y $\Gamma(q + 1) = q\Gamma(q)$. Para $\alpha = n$ un número entero, las funciones de Legendre son polinomios no normalizados; por ejemplo $P_0^0(\mu) = 1$, $P_1^0(\mu) = \mu$, $P_2^0(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$. Para generar las otras funciones usamos las relaciones de recurrencia

$$(\alpha - m + 1) P_{\alpha+1}^m(\mu) = (2\alpha + 1) P_\alpha^m(\mu) - (\alpha + m) P_{\alpha-1}^m(\mu)$$

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_\alpha^m(\mu)}{d\mu} = \alpha \mu P_\alpha^m(\mu) - (\alpha + m) P_{\alpha-1}^m(\mu)$$

La amplitud

$$B_o = B_1 \frac{\frac{dP_\alpha^m(\mu_o)}{d\mu}}{\frac{dT_\sigma^m(\mu_o)}{d\mu}}$$

se obtiene de la condición de continuidad de la parte ondulatoria, con B_1 arbitrario. Por otro lado, constantes A_1 , A_0 y $(D_0 - D_1)$ se obtienen de las condiciones de continuidad de la parte zonal (Wu-Verkley, 1993). Estas soluciones se caracterizan por tener una relación multilinear en $(q, \bar{\Psi})$ parecida a las de los modones. En la figura 3.4a-d se presentan varios ejemplos (sobre el sistema de coordenadas local $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$) de la función de corriente estacionaria (Wu-Verkley), que se obtiene con los parámetros $\alpha = 4.542$, $\sigma = 5.7704$, $m = 2$ y $\mu_o = \text{sen } 29.9908^\circ$, para distintas amplitudes $B_1 = 0.001$, 0.002 , 0.003 y 0.004 respectivamente.

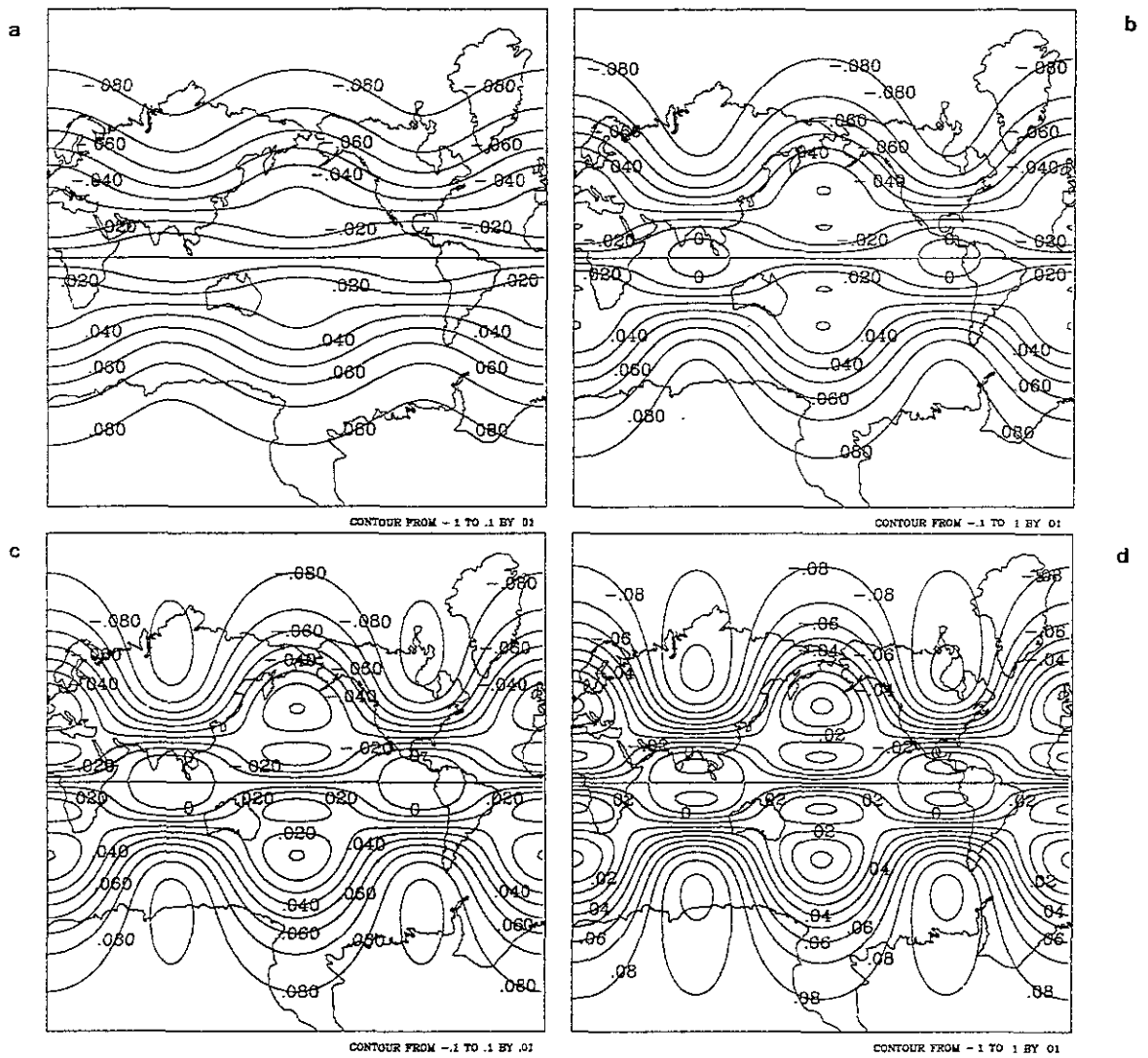


Fig. 3.4. Función de corriente de la onda Wu-Verkley en distintas amplitudes: $B_1=0.001$ (a), $B_2=0.002$ (b), $B_3=0.003$ (c), $B_4=0.004$ (d).

La solución Wu-Verkley puede incluir como un caso especial a las soluciones clásicas RH si $\alpha = \sigma = n$, pero estas ondas RH son muy idealizadas lejos de parecerse a la climatología observada. Por otro lado las Ondas Wu-Verkley son muy parecidas a las climatologías observadas, con corrientes de chorro en latitudes medias y conteniendo la acción de bloqueo atmosférico.

A pesar de que las ondas Wu-Verkley son muy parecidas a la climatología, éstas todavía son un poco idealizadas. Por lo que sería interesante que estas soluciones tuvieran incorporada la climatología, que es la idea que se discute enseguida.

Sea un flujo zonal $\Psi_0(\mu)$ y la función de corriente básica Ψ de la ecuación de vorticidad no divergente sobre la esfera. Si escribimos el flujo total como un flujo zonal Wu-Verkley y una desviación Ψ' ,

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = \Psi_0(\mu) + \Psi'(\lambda, \mu, t). \quad (3.19)$$

La función de corriente obtenida por Wu-Verkley (1993), para la desviación está dada en la ecuación (3.21) de abajo y es la misma que usamos. Wu-Verkley (1993), construyó un flujo zonal simétrico Ψ_0 , el cual tiene como función de corriente antisimétrica la expresión

$$\Psi_0(\mu) = \begin{cases} A_1 P_\alpha^0(\mu) - \omega_1 \mu + C & \text{si } \mu > \mu_0 \\ A_0 T_\sigma^0(\mu) - \omega_0 \mu & \text{si } |\mu| \leq \mu_0 \\ -A_1 P_\alpha^0(-\mu) - \omega_2 \mu - C & \text{si } \mu < -\mu_0, \end{cases} \quad (3.20)$$

donde $\mu_0 = \sin \phi_0$, ϕ_0 es la latitud de la interface entre la región interna

$\varphi_i(S_i) = S_0 = \{(\lambda, \mu) \in \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_\kappa) : \mu \in (-\mu_0, \mu_0)\}$, y externa $\varphi_e(S_e) = S_1 \cup S_2 = \{(\lambda, \mu) \in \varphi_e(\Omega_i \cap \Omega_\kappa) : \mu \in (\mu_0, 1] \cup [-1, \mu_0), 0 < \mu_0 < 1\}$.

Para la desviación o la función de corriente de la onda antisimétrica analítica $\Psi'(\lambda, \mu, t)$, de un flujo zonal simétrico con respecto al ecuador, construida por Wu (1993) y Wu-Verkley (1993) es:

$$\Psi'(\lambda, \mu, t) = \text{Re} \begin{cases} B_1 P_\alpha^m(\mu) e^{im(\lambda-ct)} & \text{si } \mu > \mu_0 \\ B_0 T_\sigma^m(\mu) e^{im(\lambda-ct)} & \text{si } |\mu| \leq \mu_0 \\ -B_1 P_\alpha^m(-\mu) e^{im(\lambda-ct)} & \text{si } \mu < -\mu_0, \end{cases} \quad (3.21)$$

donde c es la velocidad de fase, B_0 y B_1 son constantes.

Para nuestro caso el flujo zonal $\Psi_0(\mu)$ se construye en cierto modo de acuerdo a las 'observaciones' en la forma: la distribución latitudinal del viento zonal observado, puede expresarse en general como un polinomio en μ de la forma $u(\mu) = (1 - \mu^2)^{1/2} \sum_{i=0}^N a_i \mu^i$, donde a_i son constantes.

En la atmósfera el viento zonal $u(\mu)$ es simétrico con respecto al ecuador (funciones pares), ver Fig. 3.5a. Así que la función de corriente zonal se puede expresar en series de polinomios de Legendre normalizados como (Baer, 1968)

$$\Psi_0(\mu) = \sum_{i=0}^N a_i \frac{\mu^{2i+1}}{2i+1} = \sum_{j=0}^N b_j P_{2j+1}^0, \quad (3.22)$$

donde los coeficientes se eligen de tal forma que la serie representa el flujo zonal observado y

$$b_j = 2^{2j+1} \sqrt{2(2j+1)+1} \sum_{i=j}^N (2i)! \frac{(j+i+1)}{(i-j)!(2i+2j+3)!} a_i. \quad (3.23)$$

Con $N = 7$ y usando los coeficientes (Baer, 1968), $a_0 = -0.2$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 97.00$, $a_3 = -545.00$, $a_4 = 1312.0$, $a_5 = 1632.0$, $a_6 = -1024$, y $a_7 = -256.00$, obtuvimos los valores $b_0 = 0.2677$, $b_1 = 8.20 \times 10^{-2}$, $b_2 = -5.95 \times 10^{-2}$, $b_3 = 1.067 \times 10^{-2}$, $b_4 = 2.1981 \times 10^{-3}$, $b_5 = -3.71 \times 10^{-3}$, $b_6 = 2.57 \times 10^{-3}$ y $b_7 = -6.475 \times 10^{-4}$. Escalándolos mostramos en la Fig. 3.5b el perfil de flujo zonal muy realista parecido a los campos observados de la Fig. 3.5a. Por lo tanto, tiene sentido físico expresar $\Psi_0(\mu)$ como una combinación lineal de los polinomios de Legendre P_n^0 .

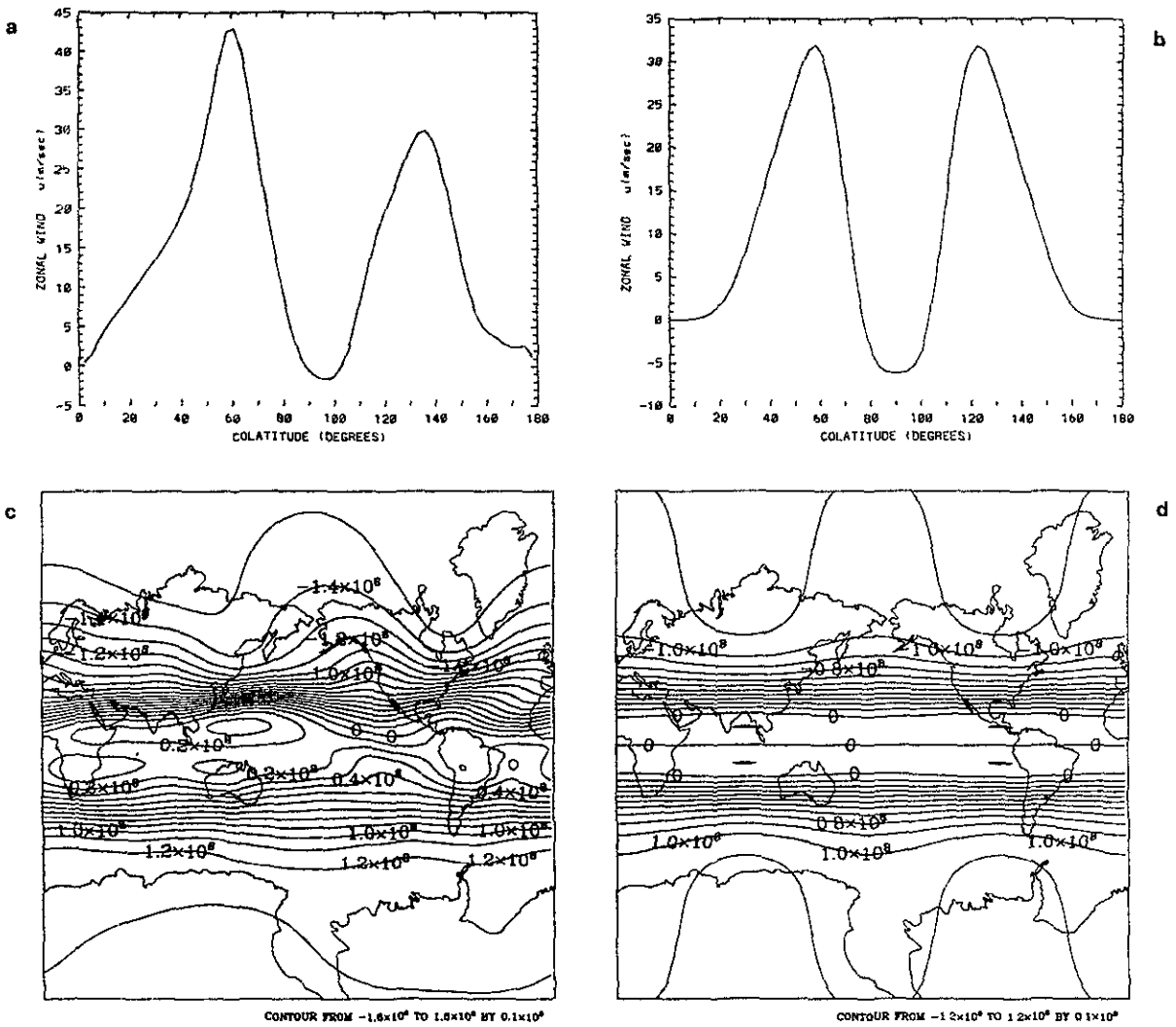


Fig. 3.5. Perfil de el flujo zonal de enero en 200mb (a), perfil de flujo zonal (b) obtenido por la ec. (3.22); función de corriente climatológico de enero (c) en 200mb y función de corriente (d) obtenido por la ec. (3.26) en dimensiones de m^2/s .

La función de corriente del campo climatológico de enero del nivel de 200mb se muestra en la Fig. 3.5c, y en la fig. 3.5d presentamos la solución construida siguiendo las ecuaciones (3.19), (3.21) y (3.22) donde podemos observar que ésta es "más parecida a la climatología" (a la Fig. 3.5c). El flujo zonal descrito por la ecuación (3.4 ó 3.22) contiene el término de superrotación, el cual determina la velocidad de fase del patrón de ondas. Se conjetura que la velocidad de fase de la nueva solución es dispersiva, depende también de (λ, μ, t) , y del orden de las funciones de Legendre α ó σ . En las regiones polares ($|\mu| \geq \mu_0$) el patrón de ondas se propaga de acuerdo con

$$c_\alpha = c_\alpha(\lambda, \mu, t). \quad (3.24)$$

En los trópicos ($|\mu| \leq \mu_0$) la velocidad de fase de la onda se determina de

$$c_\sigma = c_\sigma(\lambda, \mu, t) \quad (3.25)$$

como se establece en la siguiente.

Conjetura(Pérez G. I.). Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r . Entonces el mapeo $\Psi = \psi \circ \varphi_\iota^{-1} : \mathcal{R}_\iota^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r de la forma

$$\Psi_\iota(\lambda, \mu) = \text{Re} \begin{cases} b_0 P_1^0(\mu) + \sum_{n=1}^N b_n P_{2n+1}^0(\mu) + \\ B_1 P_\alpha^m(\mu) e^{i\Theta(\lambda, \mu, t)} \quad \forall (\lambda, \mu) \in S_1 \quad \text{si } \mu > \mu_0 \\ b_0 P_1^0(\mu) + \sum_{n=1}^N b_n P_{2n+1}^0(\mu) + \\ B_0 T_\sigma^m(\mu) e^{i\Theta(\lambda, \mu, t)} \quad \forall (\lambda, \mu) \in S_0 \quad \text{si } |\mu| \leq \mu_0 \\ b_0 P_1^0(\mu) + \sum_{n=1}^N b_n P_{2n+1}^0(\mu) - \\ B_1 P_\alpha^m(-\mu) e^{i\Theta(\lambda, \mu, t)} \quad \forall (\lambda, \mu) \in S_2 \quad \text{si } \mu < -\mu_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

con $N > 0$ en 'algunos' casos es una solución exacta de la ec. de vorticidad (3.3) sobre la esfera S^2 , donde $S_0 = [-\pi, \pi] \times [-\mu_0, \mu_0]$, $S_1 = [-\pi, \pi] \times [\mu_0, 1]$, $S_2 = [-\pi, \pi] \times [-1, -\mu_0]$, con $\mu_0 = \text{sen} \phi_0$, $\Theta(\lambda, \mu, t) = m\lambda - mc(\lambda, \mu, t)t$, c es la velocidad de fase, dada por la expresiones (3.24), y (3.25), para la región externa $\varphi_\iota(S_e) = S_1 \cup S_2$ y interna $\varphi_\iota(S_i) = S_0$ respectivamente.

Dem. En la región externa S_e y en el sistema de coordenada local $\iota, \forall (\lambda, \mu) \in S_1 \cup S_2$ si $\mu > \mu_0$ ó $\mu < -\mu_0$. Sea la función de corriente $\Psi(\lambda, \mu, t)$ de la forma 3.19, entonces de la ecuación 3.3 obtenemos

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} (\Delta \Psi_o + \Delta \Psi' + 2\mu) - \left(\frac{\partial \Psi_o}{\partial \mu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.27)$$

Sean la velocidad zonal $U_o(\mu) = -\sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial \Psi_o}{\partial \mu}$ y la velocidad angular zonal $W_o(\mu) = -\frac{\partial \Psi_o}{\partial \mu} = \frac{U_o(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}}$, entonces al usar estas expresiones en 3.27 se obtiene

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Delta \Psi_o}{\partial \mu} + 2 \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda} + W_o(\mu) \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial \lambda} + J(\Psi', \Delta \Psi') = 0. \quad (3.28)$$

Por simplicidad supongamos ahora que para todo t la Ψ' cumple la propiedad $\Delta \Psi' = -\chi_\alpha \Psi'$, ya que $\Psi'(\lambda, \mu, t) = B_1 P_\alpha^m(\mu) e^{im(\lambda-ct)} = B(t) Y_\alpha^m(\lambda, \mu)$. Entonces tenemos que

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = -\chi_\alpha \frac{\partial \Psi'}{\partial t}; \quad \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial \lambda} = -\chi_\alpha \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda},$$

lo cual dá que 3.28 se simplifica a

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial t} + \left[W_o(\mu) - \frac{2}{\chi_\alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \Psi_o(\mu)}{\partial \mu} + 1 \right) \right] \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda} = 0. \quad (3.29)$$

Esta ecuación indica como el campo $\Psi'(\lambda, \mu, t)$ rota alrededor del eje terrestre con una velocidad de fase

$$c_\alpha(\mu) = W_o(\mu) - \frac{2}{\chi_\alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \Psi_o(\mu)}{\partial \mu} + 1 \right).$$

Ahora como $\Psi'(\lambda, \mu, t) = B(t) Y_\alpha^m(\lambda, \mu)$, entonces 3.29 se reduce a

$$\left[\frac{\partial B(t)}{\partial t} - i\nu_\alpha^m(\mu) B(t) \right] Y_\alpha^m(\lambda, \mu) = 0,$$

siendo $\nu_\alpha^m(\mu) = -mc_\alpha(\mu) = \frac{m}{\chi_\alpha} \left[2 - \left(\frac{\partial \Delta \Psi_o(\mu)}{\partial \mu} + \chi_\alpha W_o(\mu) \right) \right]$. Por lo tanto, para que $Y_\alpha^m(\lambda, \mu)$ sea una solución a la ecuación 3.28 se requiere que

$$\frac{\partial \Delta \Psi_o(\mu)}{\partial \mu} + \chi_\alpha W_o(\mu) = \frac{d^2}{d\mu^2} (1 - \mu^2) W_o(\mu) + \chi_\alpha W_o(\mu) = C \quad (3.30)$$

donde C es una constante por determinarse. Sí $\alpha = n = K + 1$, Chen, 1993 ha demostrado que $W_o(\mu)$ es una solución de 3.30 cuando ésta es un polinomio en μ de la forma

$$W_o(\mu) = \sum_{k=0}^K w_k \mu^k,$$

donde las constantes w_k , para $k = 0, 1, 2, \dots, K$, son constantes por determinarse. Por ejemplo para $K=2L=4$ par, $C = [(2L+1)(2L+2) - 2] w_0 + 2w_2$ y la velocidad de fase

$$c_\alpha = w_o - \frac{2}{\chi_n} (1 + w_0 - w_2). \quad (3.31)$$

Para K impar, por ejemplo $K=2L+1=3$, $C = [(2L+2)(2L+3) - 2] w_0$ y la velocidad de fase

$$c_\alpha = w_o - \frac{2}{\chi_n} (1 + w_0), \quad (3.32)$$

es la misma que las de ondas RH, y de 3.31 tiene que el término de superrotación es $w_0 - w_2$.

Por otro lado nosotros tenemos que

$$W_o(\mu) = -\frac{\partial \Psi_o}{\partial \mu} = -\sum_{i=0}^N a_i \mu^{2i} = \sum_{j=0}^N b_j \frac{\partial P_{2j+1}^o}{\partial \mu},$$

y hemos supuesto que $\forall t$ la Ψ' en $\Psi(\lambda, \mu, t) = \Psi_o(\mu) + \Psi'(\lambda, \mu, t)$ cumple la propiedad $\Delta \Psi' = -\chi_\alpha \Psi'$, lo cual no es válido en general, así que el patrón de ondas es dispersivas, en las regiones polares ($|\mu| \geq \mu_o$), se propaga de acuerdo con $c_\alpha = c_\alpha(\lambda, \mu, t)$ y su expresión explícita es tema de trabajo futuro.

Capítulo 4

INTEGRACION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD SOBRE LA ESFERA USANDO EL METODO ESPECTRAL

La incorporación de armónicos esféricos en problemas de la atmósfera se inició con los trabajos de Margules (1892, 1893), Hough (1897, 1898) y en problemas meteorológicos por Haurwitz (1940), quien resolvió la ecuación de vorticidad linealizada de Rossby *et al*, (1939). Los análisis de la EVB en términos de armónicos esféricos fueron realizados en los trabajos de Ertel (1943), Craig (1945), Blinova (1946), Neamtam (1946) y Silberman (1954) quien obtuvo los coeficientes de interacción del término no lineal de la EVB. Adem (1956) estudió las soluciones en serie de la EVB sobre el plano Beta. Platzman (1960, 1962), Kubota *et al*, (1961), Baer (1961, 1964), Robert (1966), Ellsasser (1966) y Mireles (1968) también trataron con la forma espectral de la ecuación de vorticidad sobre la esfera, pero sin encontrar un método eficiente de resolverla. El método de transformada espectral para evaluar los términos no-lineales fue ideado por Orszag (1970, 1971), Eliassen, Machenhauer y Rasmussen (1970), y continuado por Machenhauer y Rasmussen (1972), Bourke (1972) y Machenhauer (1979). En este capítulo se analiza el método numérico para resolver la EVB sobre la esfera usando la técnica de transformada espectral, se prueba con la clase de soluciones exactas de EVB y se proponen algunas alternativas de resolverla más eficientemente. Entre las alternativas está la de incorporar un filtro numérico en el esquema de integración leapfrog que elimine el modo numérico y el de proponer un método implícito para integrar la EVB en forma espectral. Para el desarrollo del programa se evitó hacer códigos sobre el cálculo de funciones especiales tales como los polinomios de Legendre, funciones asociadas de Legendre, función Gamma y los de FFT; ya que estos problemas son clásicos y existen ya programas hechos y que se pueden acceder por internet. En particular se usan algunas subrutinas del código de Jakob *et al*, (1993) (los que calculan las funciones asociadas de Legendre y transformada de Fourier rápida, FFT). Se hizo el programa para el cálculo de las funciones asociadas de Legendre de grado complejo las cuales se usan para construir las soluciones generalizadas y globales de la EVB discutidas en el capítulo anterior.

4.1 FORMA ESPECTRAL DE LA EVB SOBRE LA ESFERA

En este capítulo se discute el desarrollo del código del modelo espectral para la EVB sobre la esfera, usando la técnica de transformada espectral, y se prueba con la clase de soluciones exactas de EVB. Enseguida, describiremos brevemente, la diferencia que existe entre el método de Silberman (1954) de los coeficientes de interacción del término no lineal de la ecuación de vorticidad y el método de transformada espectral, ideado por Orzag (1970), para evaluar dicho término y también la diferencia entre este último método y el método de transformada espectral de Machenhauer (1979).

Sea $\{(\Omega_\ell, \varphi_\ell)\}$, $\ell = \iota, \kappa$ un atlas de la esfera unitaria S^2 y la función corriente $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{R}$ de C^r , donde $\Psi = \psi \circ \varphi^{-1}$ es la función de corriente no-dimensional definida sobre la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$. Entonces la ecuación de vorticidad en la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ en su forma no dimensional es:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = F(\lambda, \mu) - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \quad (4.1)$$

donde $\xi = \Delta \Psi$ es la vorticidad relativa, Ψ la función de corriente, λ longitud y $\mu = \text{sen}$

ϕ , y ϕ la latitud y $F(\lambda, \mu)$ es el término no lineal. El método espectral aplicado a (4.1) por Silberman (1954), Kubota (1960), Platzman (1962), en general consistió de lo siguiente: Sea $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_S f g^* ds$ un producto escalar, $Y_\alpha = Y_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\lambda, \mu) = P_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\mu) e^{im_\alpha \lambda}$, un armónico esférico de grado n_α , $\alpha = (m_\alpha, n_\alpha)$, donde $P_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\mu)$ es un polinomio asociado de Legendre normalizado. Entonces al desarrollar en series de armónicos esféricos $\Psi = \sum_{m_\gamma=-N}^N \sum_{n_\gamma=|m_\gamma|}^N \Psi_{n_\gamma}^{m_\gamma} Y_{n_\gamma}^{m_\gamma}(\lambda, \mu)$, $\xi = \sum_{m_\gamma=-N}^N \sum_{n_\gamma=|m_\gamma|}^N \xi_{n_\gamma}^{m_\gamma} Y_{n_\gamma}^{m_\gamma}(\lambda, \mu)$ después de insertarlos en (4.1) y multiplicar escalarmente a (4.1) por Y_γ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial t} &= -\chi_{n_\gamma} \frac{\partial \Psi_{n_\gamma}^{m_\gamma}}{\partial t} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{m_\alpha=-N}^N \sum_{n_\alpha=|m_\alpha|}^N \sum_{m_\beta=-N}^N \sum_{n_\beta=|m_\beta|}^N (\chi_{n_\alpha} - \chi_{n_\beta}) \Psi_{n_\alpha}^{m_\alpha} \Psi_{n_\beta}^{m_\beta} I_{\alpha\gamma\beta} - 2im_\gamma \Psi_{n_\gamma}^{m_\gamma} \\ &= F_{n_\gamma}^{m_\gamma} - 2im_\gamma \Psi_{n_\gamma}^{m_\gamma} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $I_{\alpha\gamma\beta}$ es la matriz interacción y los elementos o los coeficientes de interacción distintos de cero para $m_\gamma = m_\alpha + m_\beta$ (regla de onda) son:

$$I_{\alpha\gamma\beta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{n_\gamma}^{m_\gamma}(\phi) \left(m_\beta P_{n_\beta}^{m_\beta}(\phi) \frac{dP_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\phi)}{d\phi} - m_\alpha P_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\phi) \frac{dP_{n_\beta}^{m_\beta}(\phi)}{d\phi} \right) d\phi. \quad (4.3)$$

Los coeficientes de la matriz interacción se anulan, a menos que también se satisfagan las reglas :

$$|n_\alpha - n_\beta| < n_\gamma < |n_\alpha + n_\beta|, \text{ (regla del triángulo)}$$

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma = \text{Impar}, \text{ (regla de paridad)}$$

$$m_\alpha^2 + m_\beta^2 \neq 0, \text{ (regla del triángulo)} \quad (4.4)$$

El problema, con el método de coeficientes de interacción para calcular los términos no lineales es que se requiere la multiplicación simultánea de las series espectrales, la cual consume bastante tiempo, hay acumulación de errores de redondeo al realizar muchas operaciones y por lo tanto, no fue competitivo con el método de diferencias finitas en el tratamiento del término no lineal (Pérez, *et al*, 1986)

Al inicio de los 70s, Orzag (1970) y Eliassen, Machenhauer y Rassmussen (1970) sugirieron una nueva idea (el método de transformada espectral) para evaluar el término no lineal. El método de transformada en general se basa en dos formas discretas de las integrales que intervienen en el cálculo de los coeficientes espectrales (Orzag 1970, formuló el método de transformada, incorporando la transformada de Legendre y la transformada de Fourier rápida; Machenhauer, (1979) da una recopilación de sus resultados obtenidos al inicio de los 70s) como:

$$F_n^m = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \right] P_n^m(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 F^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (4.5)$$

y la del coeficiente de Fourier

$$\begin{aligned} F^m(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (4.6) \\ &= \frac{1}{2\pi(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} (1-\mu^2) \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right] e^{-im\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left[-\Psi^{(\mu)}(\lambda, \mu) \xi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) + \Psi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) \xi^{(\mu)}(\lambda, \mu) \right] e^{-im\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

donde $\Psi^{(\mu)}(\lambda, \mu) = -(1-\mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu}$, $\xi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}$, $\Psi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$ y $\xi^{(\mu)}(\lambda, \mu) = -(1-\mu^2) \frac{\partial \xi}{\partial \mu}$.

Para describirlo brevemente, consideremos sólo el segundo término de (4.6); supongamos que

$$h(\lambda, \mu) = \Psi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) \xi^{(\mu)}(\lambda, \mu)$$

y

$$h_n^m = \langle h, Y_n^m \rangle = \int_{-1}^1 h^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (4.7)$$

donde h^m es el coeficiente de Fourier. Por otro lado $h(\lambda, \mu)$ puede ser representada por una serie de Fourier de la forma (la restricción de h a un círculo de latitud, $\mu = cte$)

$$h(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=|m|}^{\infty} h_n^m P_n^m(\mu) \right) e^{im\lambda} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^m(\mu) e^{im\lambda} \approx \sum_{m=-N}^N h^m(\mu) e^{im\lambda},$$

así que el coeficiente de Fourier en (4.7)

$$\begin{aligned} h^m(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) \xi^{(\mu)}(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \\ &\approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h(\lambda_k, \mu) e^{-im\lambda_k}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\lambda_k = \frac{2\pi k}{K}$ y K es el número de puntos de la malla en la dirección longitudinal.

Para calcular el coeficiente h_n^m y por lo tanto, los coeficientes $\Psi_n^{(\lambda)m}$ y $\xi_n^{(\mu)m}$ se procede generando primero una malla de $K \times J$ puntos, Orzag (1970) tomó a $K = 4N$ puntos λ_k y $J = 4N$ donde N es el grado de truncación más alto, esto para impedir el aliasing. Según Orzag (1970) la ventaja del Método de Transformada contra el coeficiente de interacción es que se reducen N^2 operaciones, mientras que antes para el de coeficiente de interacción se realizaban N^5 , por ejemplo, para un modelo hemisférico, con $N = 37$, usando (4.2) se requieren del orden de 2×10^6 operaciones en cada paso de tiempo y con el método de transformada de 140×10^3 operaciones reales. Eliassen, Machenhauer y Rasmussen (1970) fueron los primeros en sugerir el uso de integración por cuadratura y de una malla gaussiana de $K \times J$, puntos, donde la distribución latitudinal de los μ_j son las raíces de un polinomio de Legendre $P_J(\mu)$ de grado J . Después Orzag (1971) y Machanhauer y Rasmussen (1972) demostraron que $(3N+1)$ puntos de la malla a lo largo de cada círculo de latitud son suficientes para impedir el aliasing.

Ahora, como

$$\Psi^{(\lambda)}(\lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \Psi^{(\lambda)m}(\mu) e^{im\lambda}; \quad \xi^{(\mu)}(\lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \xi^{(\mu)m}(\mu) e^{im\lambda}, \quad (4.9)$$

entonces sobre cada círculo de latitud, μ_j , $j=1,2, \dots, J$, se calculan los coeficientes de Fourier

$$\Psi^{(\lambda)m}(\mu) = im \sum_{n=|m|}^N \Psi_n^m P_n^m(\mu); \quad \xi^{(\mu)m}(\lambda, \mu) = \sum_{n=|m|}^N \xi_n^m H_n^m(\mu),$$

así que con una FFT se calculan los valores de (4.9) en los puntos $\lambda_k = \frac{2\pi k}{K}$, $k=1, \dots, K$, con lo cual ya se pueden realizar los productos sobre la malla para obtener $h_{kj} = \Psi_{kj}^{(\lambda)} \xi_{kj}^{(\mu)}$. Después para encontrar los coeficientes de Fourier de h sobre cada círculo de latitud se realiza una transformada de Fourier directa es decir $h^m(\mu_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_{kj} e^{-im\lambda_k}$. Finalmente, se usan las fórmulas de cuadratura Gaussiana para calcular los coeficientes espectrales

$$h_n^m = \sum_{j=1}^J h_m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) w_j,$$

donde $w_j = \frac{2(1-\mu_j^2)}{[JP_{J-1}(\mu_j)]^2}$ son los pesos gaussianos y $P_{J-1}(\mu_j)$ es un polinomio de Legendre de grado $J-1$.

4.2 ESQUEMA NUMERICO DE INTEGRACION TEMPORAL

Sea una onda RH

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda - c_n t, \mu),$$

la cual es una solución exacta de la ecuación de vorticidad sobre la esfera:

$$\Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \mu} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}, \quad (4.10)$$

donde c_n es la velocidad de fase dado por

$$c_n = \omega - \frac{2(\omega + 1)}{\chi_n},$$

para cada n existe una solución numérica RH inicialmente igual a

$$\Psi(\lambda, \mu, 0) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu).$$

Consideremos una solución numérica de (4.10) usando el esquema de diferencia adelantada, suponiendo que no hay errores numéricos asociados con el cálculo del jacobiano (los cuales sí los hay como se demuestra abajo)

$$\frac{\Delta \Psi_N(0 + \Delta t) - \Delta \Psi_N(0)}{\Delta t} = -[(2 - \chi_n)\omega + 2] \sum_{m=-n}^n im \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu),$$

y como

$$\Delta\Psi = -\chi_n\Psi + (2\omega - \chi_n\omega)\mu,$$

entonces obtenemos que la solución numérica es

$$\Psi_N(0 + \Delta t) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n (1 - \Delta t c_n i m) \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu),$$

y la solución analítica sería

$$\begin{aligned} \Psi_A(0 + \Delta t) &= -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n e^{-imc_n\Delta t} \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &\simeq -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \left[1 - \Delta t c_n i m + \frac{(-\Delta t c_n i m)^2}{2!} + \dots \right] \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Con el fin de probar la calidad del resultado numérico usamos los errores absoluto y relativo definidos respectivamente como:

$$E_A = \|\Psi_N - \Psi_A\| \quad \text{y} \quad E_R = \frac{\|\Psi_N - \Psi_A\|}{\|\Psi_A\|} \quad (4.11)$$

entonces podemos observar que la calidad del pronóstico se deteriora, o sea, hay errores asociados con el esquema de diferencia temporal:

$$E_A = \|\Psi_N - \Psi_A\| = \left\| \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(imc_n\Delta t)^2}{2!} + \dots \right] \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \right\|$$

lo cual indica que la solución numérica se moverá menos rápido.

Una forma de resolver el problema de inestabilidad computacional en integraciones a largo plazo es incorporar un filtro numérico en el proceso de integración temporal que controle el modo computacional en el esquema leapfrog. En muchos modelos de pronóstico numérico del tiempo es común usar el esquema de filtrado temporal (Robert 1966, Asselin 1972):

$$\bar{\xi}^{n\Delta t} = \xi^{n\Delta t} + \gamma \left[\bar{\xi}^{(n-1)\Delta t} - 2\xi^{n\Delta t} + \xi^{(n+1)\Delta t} \right],$$

donde γ es una constante.

Sea la forma espectral de la ecuación de vorticidad

$$\frac{d\xi_n^m}{dt} = F_n^m - 2im\Psi_n^m,$$

donde F_n^m contiene el término no lineal. En el modelo barotrópico espectral, se aplicó el esquema leapfrog y el filtro temporal en la forma siguiente: En los primeros 3 pasos, se aplica una diferencia adelantada con un inicio suave:

$$(\xi_n^m)^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} = (\xi_n^m)^{t_0} + \frac{\Delta t}{2} [(F_n^m)^{t_0} - 2im(\Psi_n^m)^{t_0}]$$

$$(\xi_n^m)^{t_0+\Delta t} = (\xi_n^m)^{t_0} + \Delta t [(F_n^m)^{t_0+\frac{\Delta t}{2}} - 2im(\Psi_n^m)^{t_0+\frac{\Delta t}{2}}]$$

$$(\xi_n^m)^{t_0+2\Delta t} = (\xi_n^m)^{t_0} + 2\Delta t [(F_n^m)^{t_0+\Delta t} - 2im(\Psi_n^m)^{t_0+\Delta t}],$$

donde Δt es el paso de tiempo, en este momento de integración, algún modo computacional se ha desarrollado, ya que la diferencia adelantada es inestable y por lo tanto, es momento de filtrar en la forma:

$$\overline{(\xi_n^m)^{t_0+\Delta t}} = (\xi_n^m)^{t_0+\Delta t} + \gamma \left[\overline{(\xi_n^m)^{t_0}} - 2(\xi_n^m)^{t_0+\Delta t} + (\xi_n^m)^{t_0+2\Delta t} \right],$$

donde por simplicidad escribimos

$$\overline{(\xi_n^m)^{t_0}} = (\xi_n^m)^{t_0}.$$

En general, de aquí en adelante se usa el esquema leapfrog, y el filtro numérico como:

$$(\xi_n^m)^{t_0+(k+1)\Delta t} = \overline{(\xi_n^m)^{t_0+(k-1)\Delta t}} + 2\Delta t [(F_n^m)^{t_0+k\Delta t} - 2im(\Psi_n^m)^{t_0+k\Delta t}],$$

$$\overline{(\xi_n^m)^{t_0+k\Delta t}} = (\xi_n^m)^{t_0+k\Delta t} + \gamma \left[\overline{(\xi_n^m)^{t_0+(k-1)\Delta t}} - 2(\xi_n^m)^{t_0+k\Delta t} + (\xi_n^m)^{t_0+(k+1)\Delta t} \right],$$

con $k = 2, 3, 4, \dots$

4.3 INVARIANTES DE MOVIMIENTO Y ERRORES DE APROXIMACION

Introduzcamos los conceptos de energía cinética K y enstrofía E :

$$K = \frac{1}{2} \|\nabla\Psi\|^2 = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Psi \Delta\Psi d\mu d\lambda, \quad E = \frac{1}{2} \|\Delta\Psi\|^2$$

Definición. La energía cinética media global y enstrofía media global espectral se definen como

$$K_g = \frac{K_N}{4\pi}, \quad E_g = \frac{E_N}{4\pi},$$

donde $K_N = T_N K$ y $E_N = T_N E$. Siendo

$$K_N = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \chi_n \sum_{m=-n}^n |\Psi_n^m|^2 = \sum_{n=1}^N K_n,$$

$$E_N = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \chi_n^2 \sum_{m=-n}^n |\Psi_n^m|^2,$$

con $K_n = \chi_n \sum_{m=-n}^n |\Psi_n^m|^2$ la parte de la energía total concentrada en el sub-espacio H_n de polinomios esféricos homogéneos y

$$T_N \Psi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m.$$

Proposición. En la EVB (4.1) la energía cinética y enstrofia se conservan.

Dem. Multiplicamos escalarmente a la ecuación (4.1) por Ψ y por $\Delta\Psi$ respectivamente, para obtener

$$\frac{dK}{dt} = -\langle \Psi, \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle = -\langle \Psi, J(\Psi, \Delta\Psi + 2\mu) \rangle = \langle J(\Psi, \Psi), \Delta\Psi + 2\mu \rangle = 0,$$

$$\frac{dE}{dt} = \langle \Delta\Psi, \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle = \langle \Delta\Psi, J(\Delta\Psi + 2\mu, \Psi) \rangle = \langle J(\Delta\Psi, \Delta\Psi), \Psi \rangle + \langle J(\Delta\Psi, 2\mu), \Psi \rangle = 0.$$

Proposición(Desigualdad de Nikolsky-Favard). Sea $\Psi \in P^N$, $\beta > 0$, y $0 < \alpha$. Entonces

$$\|\Psi\|_{\alpha} \leq N^{\beta} \|\Psi\|_{\alpha-\beta}.$$

Dem(Paweke, 1972; Ivanov, 1983). Se sigue para $m \neq 0$ que

$$\|\Psi\|_{\alpha}^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \chi_n^{\alpha} |\Psi_n^m|^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \chi_n^{\alpha-\beta} \chi_n^{\beta} |\Psi_n^m|^2 \leq (N(N+1))^{\beta} \|\Psi\|_{\alpha-\beta}^2.$$

Es bien conocido que para $\Psi \in L_0^2(S^2)$ tal que $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m$, entonces

$$\|\Psi - T_N \Psi\| \rightarrow \infty \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Proposición. Sea $\Psi \in H_0^{\alpha}(S^2)$ y $0 \leq \beta \leq \alpha$. Entonces

$$\|\Psi - T_N \Psi\|_{\beta} \leq cN^{\beta-\alpha} \|\Psi\|_{\alpha}.$$

Dem. Es claro que

$$\begin{aligned}
\| \Psi - T_N \Psi \|_\beta^2 &\leq c \sum_{m=-N}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^\beta | \Psi_n^m |^2 + c \sum_{|m|>N} \sum_{n=|m|}^{\infty} \chi_n^\beta | \Psi_n^m |^2 \\
&\leq c \sum_{m=-N}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^\beta | \Psi_n^m |^2 + c \sum_{|m|>N} \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^\beta | \Psi_n^m |^2 \leq c N^{2\beta-2\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^\alpha | \Psi_n^m |^2 \\
&\leq c N^{2\beta-2\alpha} \| \Psi \|_\alpha^2 .
\end{aligned}$$

Proposición. (Skiba, 1989). Sea $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}^+$ y $\forall \Psi \in H_o^{\alpha+\beta}(S^2)$. Entonces

$$\| \Psi - T_N \Psi \|_\alpha \leq N^{-\beta} \| \Psi \|_{\alpha+\beta} .$$

Dem. Como $\chi_{N+1} = (N+1)(N+2) > N^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\| \Psi - T_N \Psi \|_\alpha^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^\alpha \sum_{m=-n}^n | \Psi_n^m |^2 \leq \chi_{N+1}^{-\beta} \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n^{\alpha+\beta} \sum_{m=-n}^n | \Psi_n^m |^2 \\
&\leq N^{-2\beta} \| \Psi \|_{\alpha+\beta}^2 .
\end{aligned}$$

Esta proposición permite estimar la razón de convergencia de la serie Fourier -Laplace de una función $f(\lambda, \mu)$ sobre la esfera que tiene $\alpha + \beta$ derivadas de $L_o^2(S^2)$.

Sea $p \in \mathbf{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. La cerradura de $C_c^\infty(S^2)$ en la norma

$$\| \Psi \|_{L^p} = \left(\int_{S^2} | \Psi |^p ds \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

es el espacio de *Banach* de funciones medibles sobre la esfera S^2 y denotada como $L^p(S^2)$. El espacio

$$W_p^r(S^2) = \left\{ \Psi \in L^p(S^2) \mid (-\Delta)^{\frac{r}{2}} \Psi \in L^p(S^2) \right\} ,$$

consiste sólo de aquellas funciones $\Psi \in L^p$ que tienen norma finita $\| (-\Delta)^{\frac{r}{2}} \Psi \|_{L^p}$. En particular $W_p^0(S^2) = L^p(S^2)$ y $H^r = W_2^r(S^2)$.

Proposición. $\| \psi \|_{L^p(S^2)} \leq K_o \| \psi \|^{1-\alpha} \| \Delta \psi \|^\alpha$, donde $K_o = \max \left\{ 2, \frac{p}{2} \right\}^\alpha$, $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$, $p \in [2, \infty)$.

Dem. (Skiba, 1989).

Proposición(Gadzhiev, 1981). Sea $\Psi \in W_p^1(S^2)$. Entonces

$$C_1 \| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi \|_{L^p} \leq \| \nabla \Psi \|_{L^p} \leq C_2 \| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \Psi \|_{L^p} ,$$

donde C_1 y C_2 son constantes de Ψ .

Proposición (Skiba, 1998). Sea $\Psi \in H^{\frac{1}{2}}(S^2)$. Entonces

$$\| \Psi \|_{L^4} \leq C_o \| \Psi \|_{\frac{1}{2}} .$$

Proposición (Skiba, 1998). Sea $f, g \in W_4^1(S^2)$. Entonces

$$\| J(f, g) \|_{L^2} \leq \| \nabla f \|_{L^4} \| \nabla g \|_{L^4},$$

donde C_1 y C_2 son constantes de Ψ .

Dem. Como $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \mathbf{v} \cdot \nabla g = (\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \nabla g$, es el jacobiano, entonces el resultado se sigue de la desigualdad $| J(f, g) | \leq | \nabla f | | \nabla g |$ y de la desigualdad de Schwartz.

Proposición (Pérez y Skiba 1999). Sea $\beta > 0$, el error introducido al truncar el término del jacobiano es

$$\delta J \leq N^{-\beta} \left(R \| \Delta \Psi \|_{\frac{1}{2}+\beta}^2 + \| J(\Psi, \Delta \Psi) \|_{\beta} \right) \quad (4.12)$$

Dem. Como $f = T_N f + (I - T_N) f$ y $\| T_N \| \leq 1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \delta J &= \| J(\Psi, \Delta \Psi) - T_N J(\Psi_N, \Delta \Psi_N) \| \leq \| T_N \{ J(\Psi, \Delta \Psi) - J(\Psi_N, \Delta \Psi_N) \} \| + \\ &\| (I - T_N) J(\Psi, \Delta \Psi) \| \leq \| J(\Psi - \Psi_N, \Delta \Psi) \| + \| J(\Psi_N, \Delta(\Psi - \Psi_N)) \| + \\ &\| (I - T_N) J(\Psi, \Delta \Psi) \| \end{aligned}$$

usando la desigualdades

$$\| J(\Psi, \Phi) \| \leq C \| \Psi \|_{\frac{1}{2}} \| \Phi \|_{\frac{1}{2}}, \| f \|_{\alpha} \leq 2^{-\frac{\beta}{2}} \| f \|_{\beta+\alpha}$$

y las proposiciones anteriores, y la última proposición del capítulo 2 obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta J &\leq C \left(\| \Psi - \Psi_N \|_{\frac{1}{2}} \| \Delta \Psi \|_{\frac{1}{2}} + \| \Psi_N \|_{\frac{1}{2}} \| \Delta(\Psi - \Psi_N) \|_{\frac{1}{2}} + N^{-\beta} \| J(\Psi, \Delta \Psi) \|_{\beta} \right) \\ &\leq N^{-\beta} \left\{ C \| \Psi \|_{\frac{1}{2}+\beta} \| \Delta \Psi \|_{\frac{1}{2}} + \| \Psi \|_{\frac{1}{2}} \| \Delta \Psi \|_{\frac{1}{2}+\beta} + \| J(\Psi, \Delta \Psi) \|_{\beta} \right\} \\ &\leq N^{-\beta} \left\{ R \| \Delta \Psi \|_{\frac{1}{2}+\beta}^2 + \| J(\Psi, \Delta \Psi) \|_{\beta} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$, C y R son constantes independientes de Ψ . Como puede notarse los errores de aproximación decrecen cuando tanto N como el grado de suavidad β de las funciones $\Delta \Psi$, $J(\Psi, \Delta \Psi)$ aumentan. Las funciones más suaves son los flujos zonales, y las ondas RH y las menos suaves son los modones y la onda Wu-Verkley.

4.4 EXPERIMENTOS NUMERICOS

1) *Flujo zonal*. El flujo zonal especificado por una combinación lineal de polinomios de Legendre:

$$\Psi(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^N \Psi_n^0 P_n^0(\mu),$$

el cual es una solución exacta de la ecuación de vorticidad barotrópica (EVB), donde $P_n^0(\mu)$ es el polinomio de Legendre normalizado de grado n . La función de corriente de la solución numérica correspondiente se obtuvo por 240 horas o más. Se realizaron integraciones con distintas truncaciones N , el jacobiano de esquema numérico fue igual a cero y no hubo oscilaciones de la $K_g = \frac{K_N}{4\pi}$ y $E_g = \frac{E_N}{4\pi}$. La estructura geométrica de la solución zonal numérica se conservó bien en el tiempo (no se presenta aquí) y la precisión de reproducir la solución analítica depende sólo de la truncación N .

2) *Onda Rossby – Haurwitz (RH)*. Para cada n , podemos encontrar una solución RH exacta de la EVB como

$$\Psi(\lambda, \mu, 0) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu)$$

y comparemos ésta con la correspondiente solución analítica

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda - c_n t, \mu)$$

donde c_n es la velocidad de fase. La solución *RH* es una onda que se está propagando zonalmente en el subespacio $\mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_n$. En particular consideremos la función de corriente de la onda numérica *RH* :

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \Psi_n^m P_n^m(\mu) \cos m(\lambda - c_n t), \quad (4.13)$$

donde $n = 3$, $m = 1$, con $\Psi_n^m = \omega = 337.59 \times 10^{-5}$ y en $t = 0$ (ver fig. 4.1a). Se integró hasta 240 horas con la versión del modelo de T_{31} y el campo de función de corriente se muestra en la fig. 4.1b. De aquí en adelante (sólo en el cap. 4) todos los gráficos de función de corriente se han premultiplicado por 10^{-7} (excepto la fig. 4.2a-l y fig. 4.9a-d). Como podemos notar, la solución numérica se mueve al oeste sin cambiar su estructura geométrica y está de acuerdo con la solución analítica (4.13). La onda numérica realiza una rotación alrededor de la tierra aproximadamente en 6 días y la solución analítica fué un poco adelantada, esto debido a los errores de aproximación discutidos arriba. La energía cinética media global y enstrofia ($K_g = \frac{K_N}{4\pi}$ y $E_g = \frac{E_N}{4\pi}$) demostraron muy poca variación no excediendo $7 \times 10^{-4} \%$ y $4 \times 10^{-4} \%$ respectivamente (fig. 4.1c-d). Estas oscilaciones se deben a haber usado el esquema leap-frog sin aplicar un esquema de filtrado. Se realizaron (experimentos sin filtro) integraciones por 10 días o más, con varias ondas *RH* (distintos n), y los resultados demostraron que las estructuras geométricas de estas soluciones se reproducen muy bien. Mas sin embargo no hay una coincidencia total en la fase de estas ondas, y como se demostró arriba, las soluciones numéricas se mueven más lento, esto por el tipo de esquema de integración temporal. Por otro lado los errores al calcular el jacobiano son casi cero ya que con las estimaciones calculadas en las proposiciones anteriores, indican que los errores de truncación decrecen rápidamente conforme se aumenta N y también porque la onda *RH* es una solución infinitamente suave i.e. $C_c^\infty(S^2)$. En la figura 4.6a, curva A se demuestra el comportamiento del error relativo y como podemos observar, éste es el error más pequeño de todas las otras curvas relacionadas con las otras soluciones exactas de la EVB.

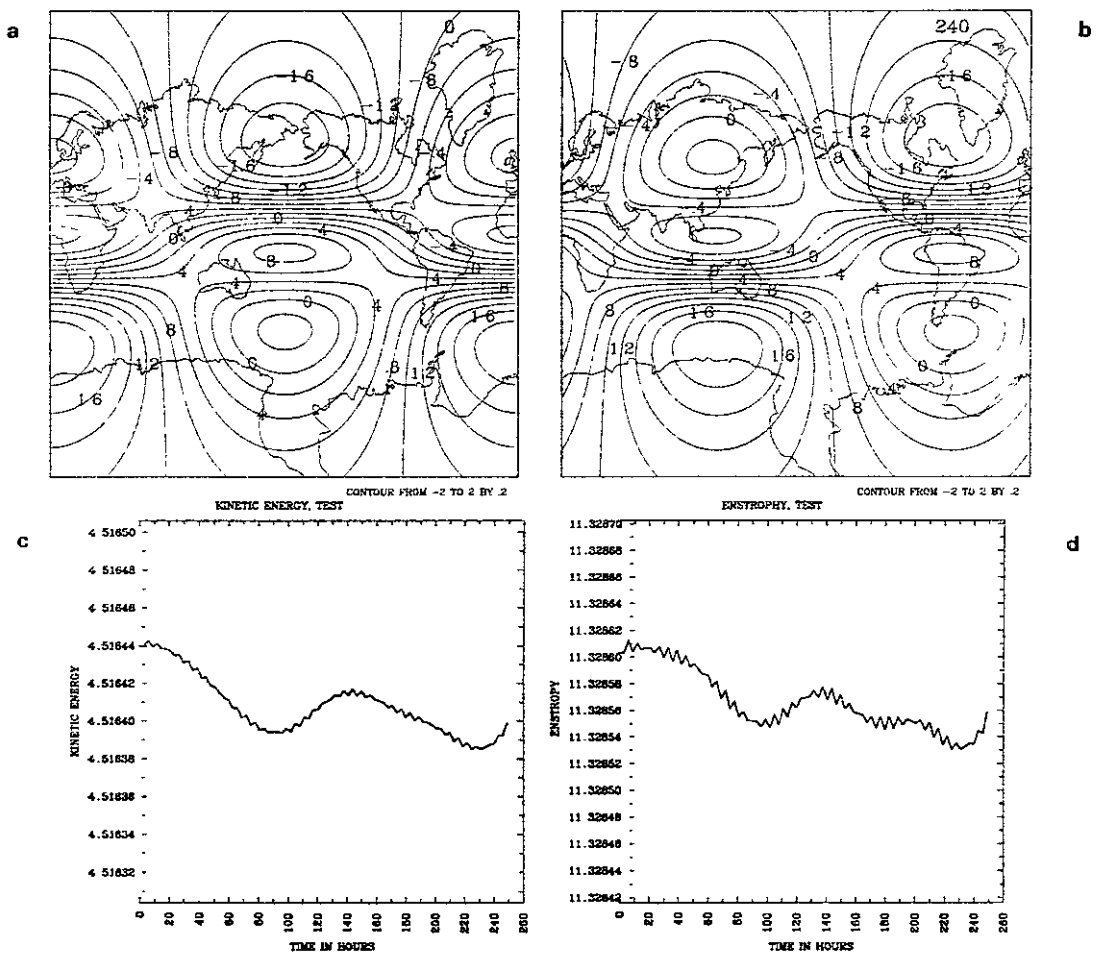


Fig. 4.1 La función de corriente $\Psi(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \Psi_3^1 P_3^1(\mu) \cos(\lambda - c_N t)$ de la solución numérica RH, en el momento inicial $t=0$ (a), y a $t=240$ horas (b) de integración del modelo en T31. Evolución de la energía cinética media global (c) y la enstrofia media global (d).

3) *Solución global Wu-Verkley*. Como se demostró en el capítulo anterior, también se han reproducido numéricamente las ondas *Wu-Verkley* (1993). Para tener una solución antisimétrica, se ha elegido $\omega_2 = \omega_1$, $D_2 = -D_1$ y $\chi_2 = \chi_1$ donde

$$\chi_1 = -\alpha(\alpha + 1), \chi_0 = -\sigma(\sigma + 1) \quad (4.14)$$

Por lo tanto la solución total (3.18) consiste de una parte zonal dependiente sólo de μ y la parte ondulatoria depende tanto de λ como de μ . Debido a las condiciones de continuidad (ecuaciones 4.21 y 4.22 de Wu y Verkley, 1993), tanto la parte zonal, la parte ondulatoria de la función de corriente, velocidad y vorticidad de la solución Wu-Verkley (3.18) son continuas en toda la esfera (Wu y Verkley 1993).

Para $m = 2$, $\mu_0 = \sin 29.998$, $\alpha = 4.542$, $\sigma = 5.7704672$, y la función de corriente de la solución estacionaria Wu-Verkley calculada numéricamente se presenta en la fig. 4.2 en el momento inicial (a), a 240 horas (b), 480 horas (c), y 720 horas (d) de integración con el T_{31} .

La solución numérica conservó bien su estructura geométrica durante los 10 días de integración y está en concordancia con la solución analítica Wu-Verkley (3.18). Por otro lado, distinto al caso estacionario, la solución numérica se mueve muy lentamente hacia el oeste. La razón de crecimiento del error relativo (4.11) para la solución Wu-Verkley es poca (fig. 4.6a, curva B), pero alta comparada con la onda RH (fig. 4.6a, curva A). Los errores moderados absoluto y relativo obtenidos en esta solución parece ser muy estable a pequeños errores iniciales del modelo. La evolución de la energía cinética media global y enstrofia ($K_g = \frac{K_N}{4\pi}$ y $E_g = \frac{E_N}{4\pi}$) de la solución Wu-Verkley demostraron muy poca variación (fig. 4.3a-b) y no excedieron en $5 \times 10^{-5}\%$.

Veamos ahora los resultados de los experimentos que se realizaron con la incorporación de un filtro para el modo numérico que surge en el esquema leap-frog. Para ver la evolución de la solución Wu-Verkley con la incorporación del filtro, se usó el modelo espectral sin forzamiento y sin disipación y en la truncación T_{31} . Se realizaron integraciones hasta 30 días y con pasos de tiempo de 1 hora. Se buscó un γ óptimo, con $\gamma = 0.06$, la solución numérica Wu-Verkley demostró ser muy robusta, su configuración se preservó bien, y sólo con ligeros cambios en las regiones de contornos cerrados. Ahora, se han realizado integraciones a más largo plazo, en Pérez y Skiba (1999) se realizaron integraciones sólo a 10 días, y los errores relativos para el caso presente han disminuido bastante. En la Fig. 4.6b se muestra el comportamiento del error relativo para los 20 días de integración, y la configuración de gran escala del patrón de función de corriente también se ha mantenido más estacionaria ver fig. 4.2e-h (y fig. 2 de Pérez y Skiba 1999), donde mostramos el campo de función de corriente inicial (fig.4.2e), 10 días (Fig. 4.2f), 20 días (Fig. 4.2g) y 30 días (Fig. 4.2h) de integración. En la figura 4.2i-j, y 4.2k-l, se muestra la función de corriente y el campo de viento (vectores) para estos mismos periodos. Donde podemos observar que las intensidades de los vientos máximos están entre 40 a 50 m/s. En conclusión, este esquema de filtrado ha respondido bien para la solución Wu-Verkley y sería interesante probarlo con los modones.

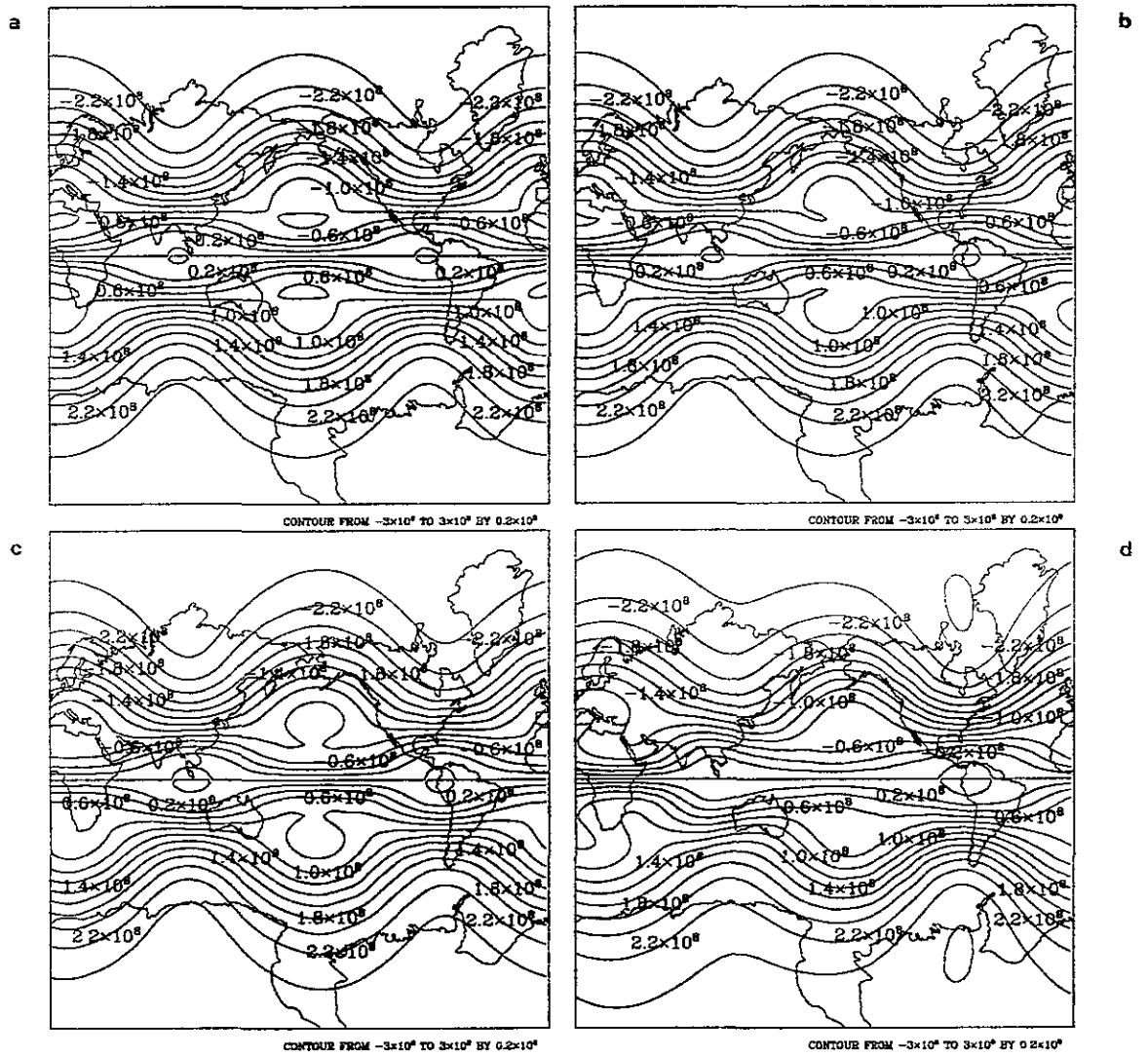


Fig. 4.2a-d. La función de corriente de la solución numérica Wu-Verkley, en el momento inicial (a), a 240 horas (b), 480 horas (c) y a 720 horas de integración (d). Experimento sin la incorporación de un filtro y en unidades de m^2/s .

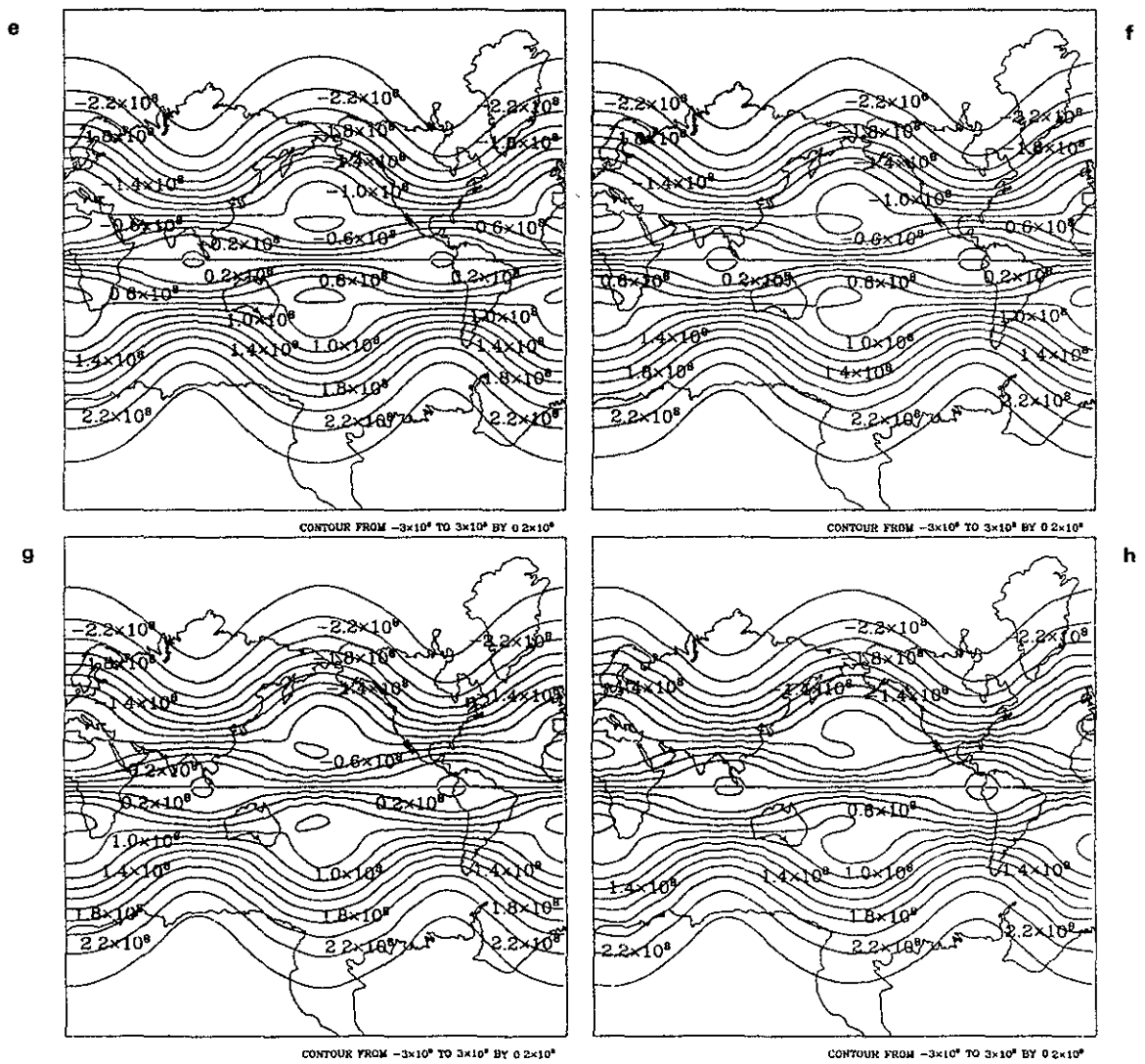


Fig. 4.2e-h. La función de corriente de la solución numérica Wu-Verkley, en el momento inicial (e), a 240 horas (f), 480 horas (g) y a 720 horas de integración (h). Experimento con la incorporación de un filtro y en unidades de m^2/s .

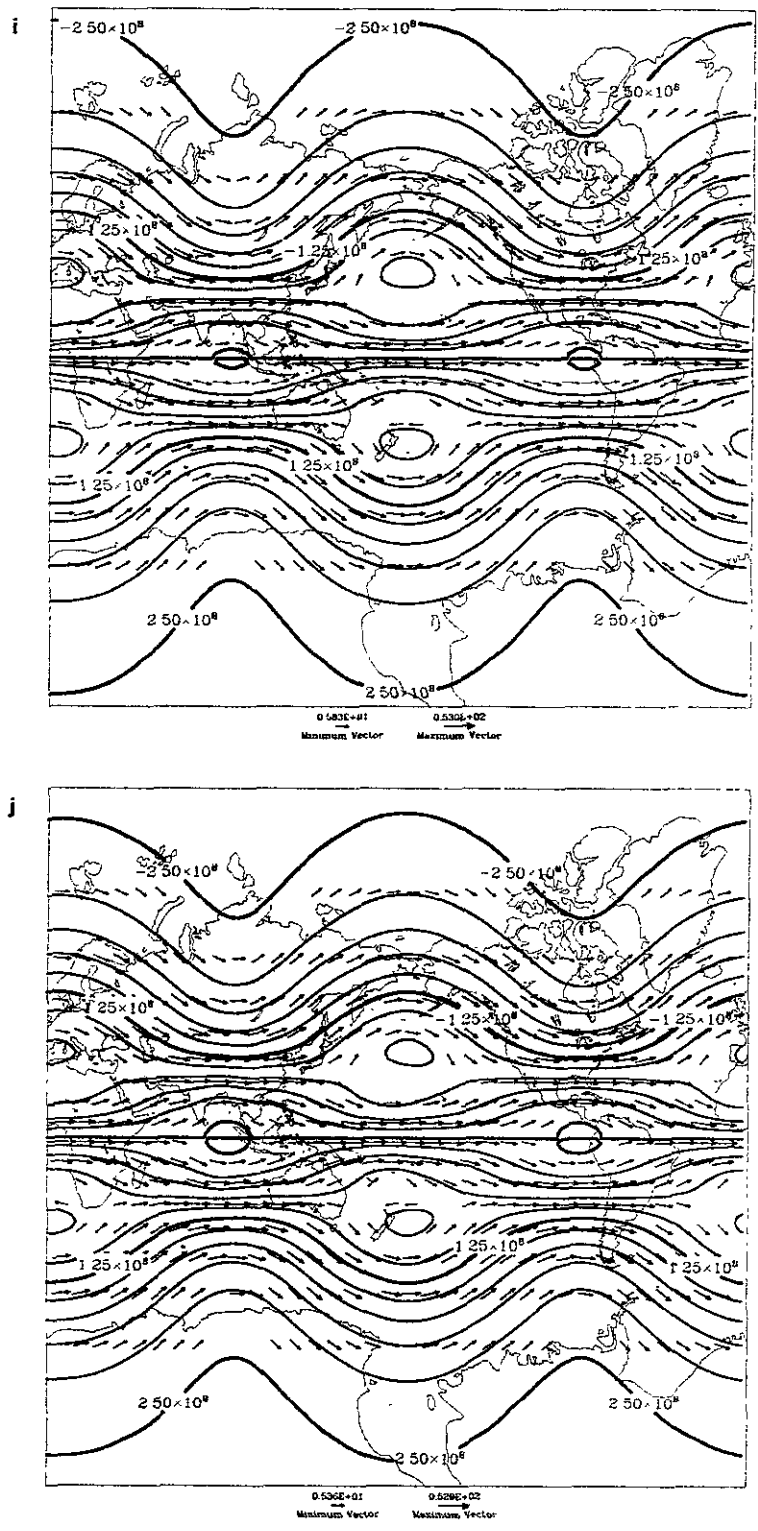
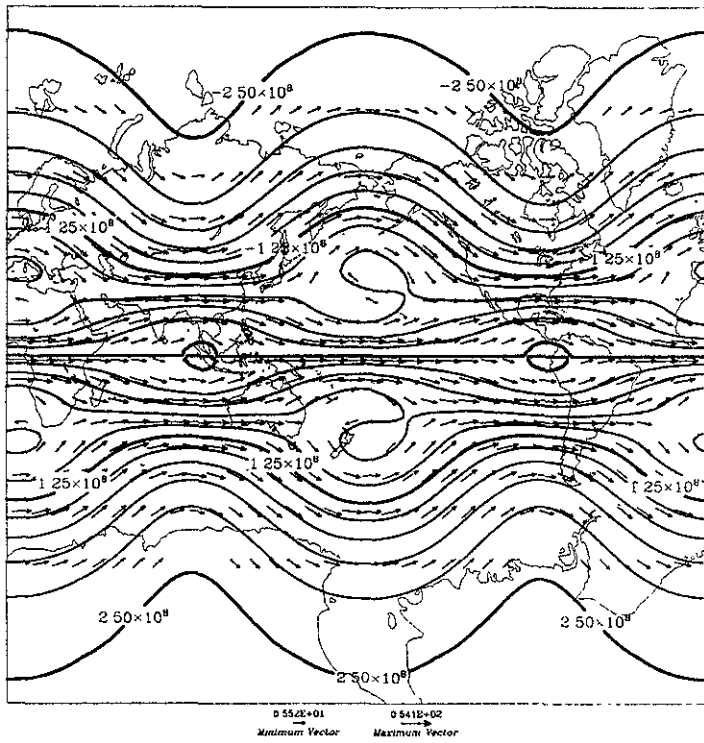


Fig. 4.2i-j. Función de corriente $\Psi(\lambda, \mu, t)$ y el campo de viento de la onda Wu-Verkley, en $t=0$ (i) y en $t=240$ horas (j) como en la fig. 4.2e-f. En dimensiones de m^2/s , y m/s respectivamente.

k



l

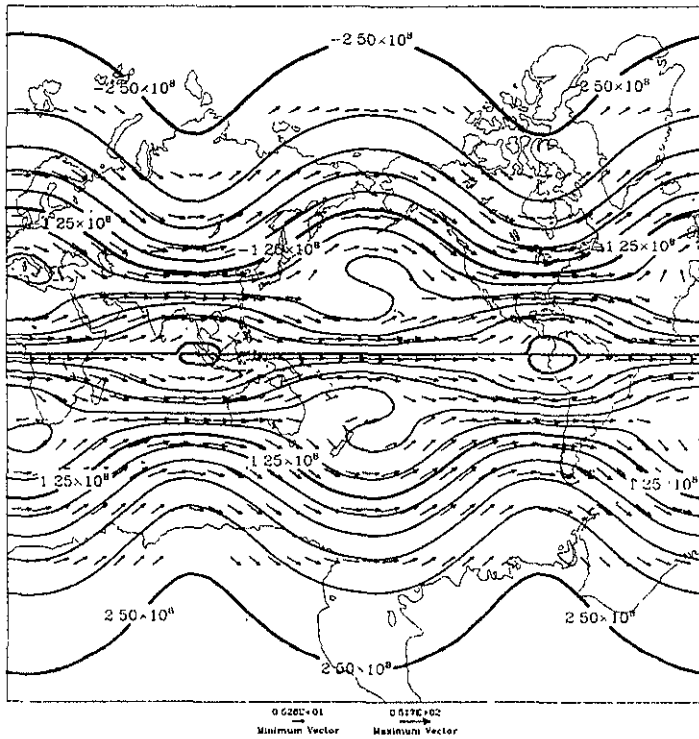


Fig. 4.2k-l. Función de corriente $\Psi(\lambda, \mu, t)$ y el campo de viento de la onda Wu-Verkley, en $t=480$ horas (k) y en $t=720$ horas (l) como en la fig. 4.2g-h. En dimensiones de m^2/s , y m/s respectivamente.

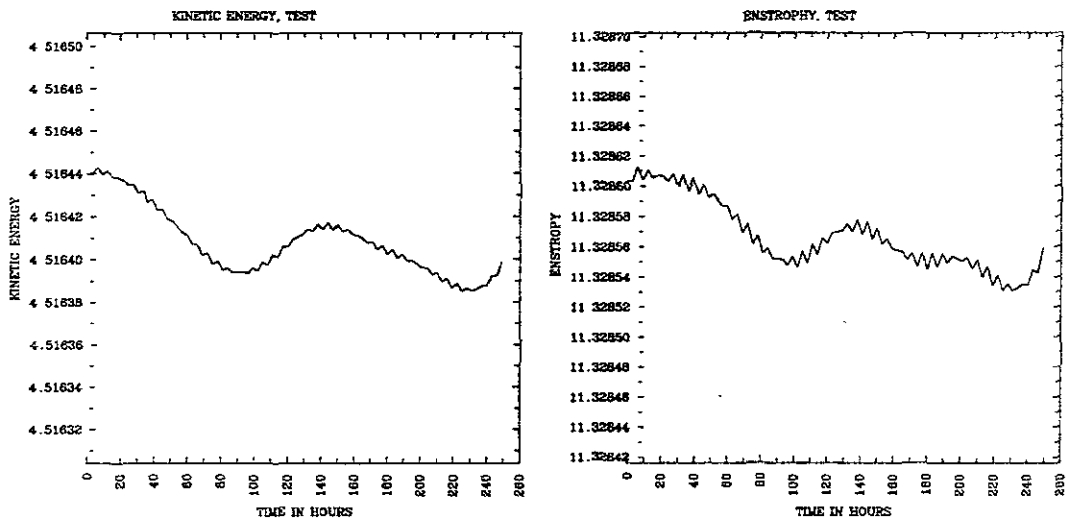


Fig. 4.3. Evolución de la energía cinética media global y enstrofia media global (premultiplicados por 10^{-17}) de la solución numérica Wu-Verkley dada en la fig. 4.2a-b.

3) *Modón dipolar Verkley (1984)*. También se han reproducido numéricamente los modones dipolar de Verkley (1984,1987 y 1990). Primeramente se ha realizado experimentos numéricos (sin filtro) con el modón dipolar de lado pequeño ecuatorial (fig. 3.3a) definido por las ecuaciones (3.13), con $k = 10$, $\alpha = 10$, $\lambda_0 = 270^\circ$, $\mu_0 = 0$, $\mu_a = \text{sen } 66.14^\circ$, y $D_0 = 0$. El paso de tiempo del modelo fue de $\Delta t = 1$ hora. La función de corriente de la solución numérica en el momento inicial está dada cuando el centro del modón está en $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 270^\circ$ (fig. 4.4a), después de 240 horas de integración con el esquema T_{31} (fig 4.4b). No hubo diferencias significantes cuando también se realizaron los cálculos con la versión T_{20} y T_{42} . Por lo tanto durante los 10 días de integración que se realizaron, el modón numérico está en razonable concordancia con la solución analítica y se conservó bien su estructura geométrica. Por otro lado, todavía hay errores numéricos asociados con la integración temporal, así que realizamos integraciones a 20 días con la versión T_{31} y usando un esquema de filtrado. Como podemos observar en este caso no hay mayor dispersión de energía (fig. 4.4d), que con el caso sin filtro (fig 4.4c). Más sin embargo como lo demuestra la gráfica de fig. 4.6a el modón pequeño es más inestable que la onda *RH* y la solución Wu-Verkley, ya que la razón de crecimiento de su error relativo es más alto. Un comportamiento similar se ha demostrado para modones pequeños sobre el plano-beta. En este trabajo también se ha simulado numéricamente el comportamiento de un modón de Verkley de gran escala ($k = 2$, $\alpha = 3$, $\mu_0 = 0$, $D_0 = 0$, $\lambda_0 = 270^\circ$ y $\mu_a = \text{sin } 16^\circ$), el cual se mueve muy rápido, cerca de una revolución cada 20 horas. Muy distinto al modón pequeño, este modón gigante conserva su forma durante casi 8 días y el paso de tiempo de integración es muy corto $\Delta t = 20$ seg (fig.4.4e-f). Durante este periodo la variación en la energía cinética y enstrofia no excedió $2 \times 10^{-3}\%$ para el modón pequeño (fig 4.5a-b) y $10^{-5}\%$ para el modón gigante (fig 4.5c-d). Después de 8 días de integración con este modón grande, la variación de energía cinética y enstrofia llega a ser grande, apareciendo distorsiones de pequeña escala y la razón de crecimiento del error relativo aumenta. Estos experimentos demuestran que con el fin de mejorar la precisión de los cálculos por decrecer el número Courant, es necesario decrecer el paso de tiempo y filtrar el modo numérico que aparece en el esquema leap-frog. Por lo que entonces se realizó una serie de experimentos ya con la incorporación del filtro numérico. Los resultados demostraron grandes mejoras, el modón gigante conservó su forma durante más de 13 días con un paso de tiempo también de $\Delta t = 20$ seg .

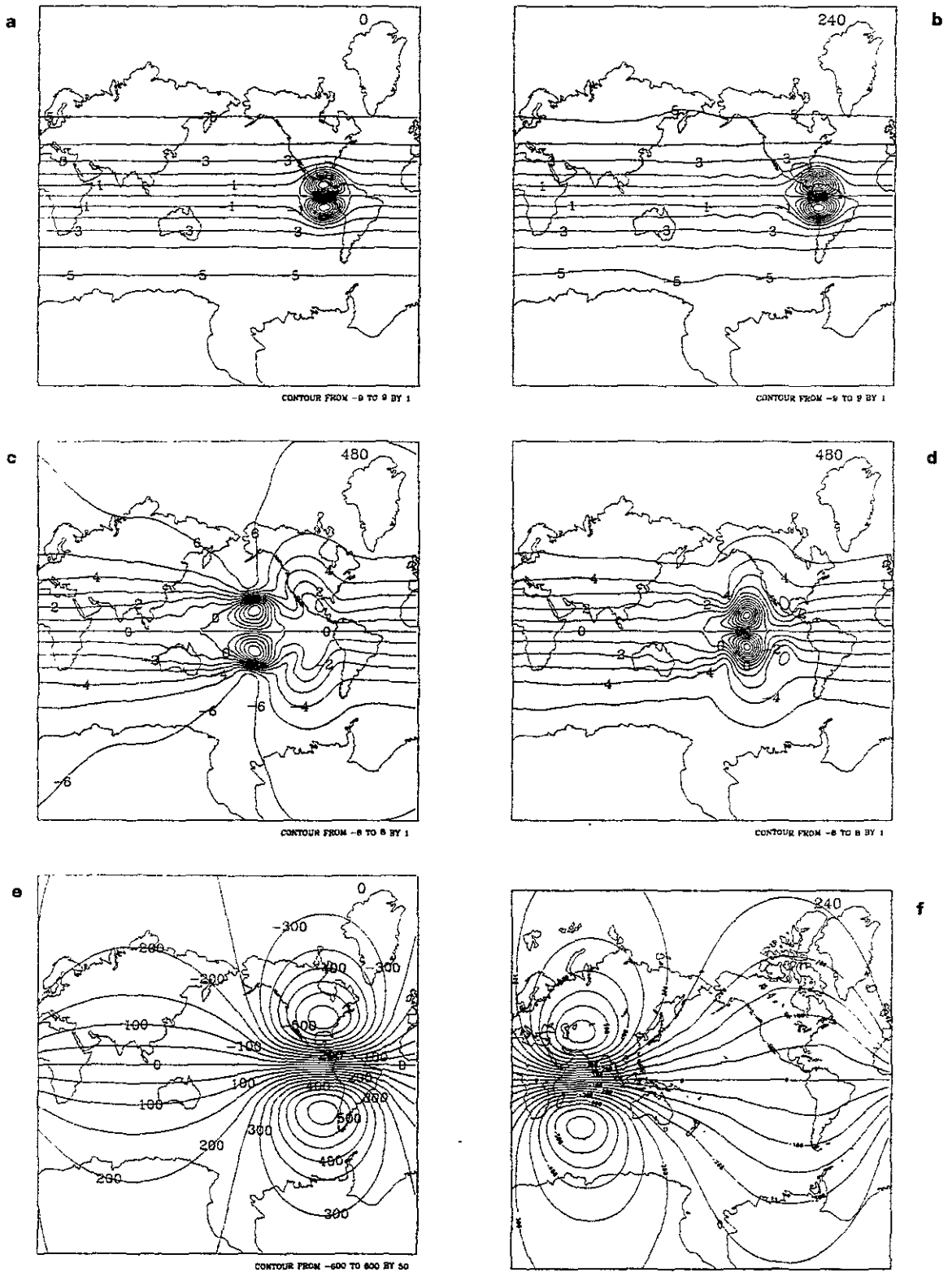


Fig. 4.4. La función de corriente del modón ecuatorial pequeño en $t=0$ (a), en $t=240$ hrs (b), en $t=480$ hrs (c) experimentos sin filtro respectivamente, y en $t=480$ hrs (d) exp. con filtro; el modón gigante en $t=0$ (e) y en $t=240$ hrs (f).

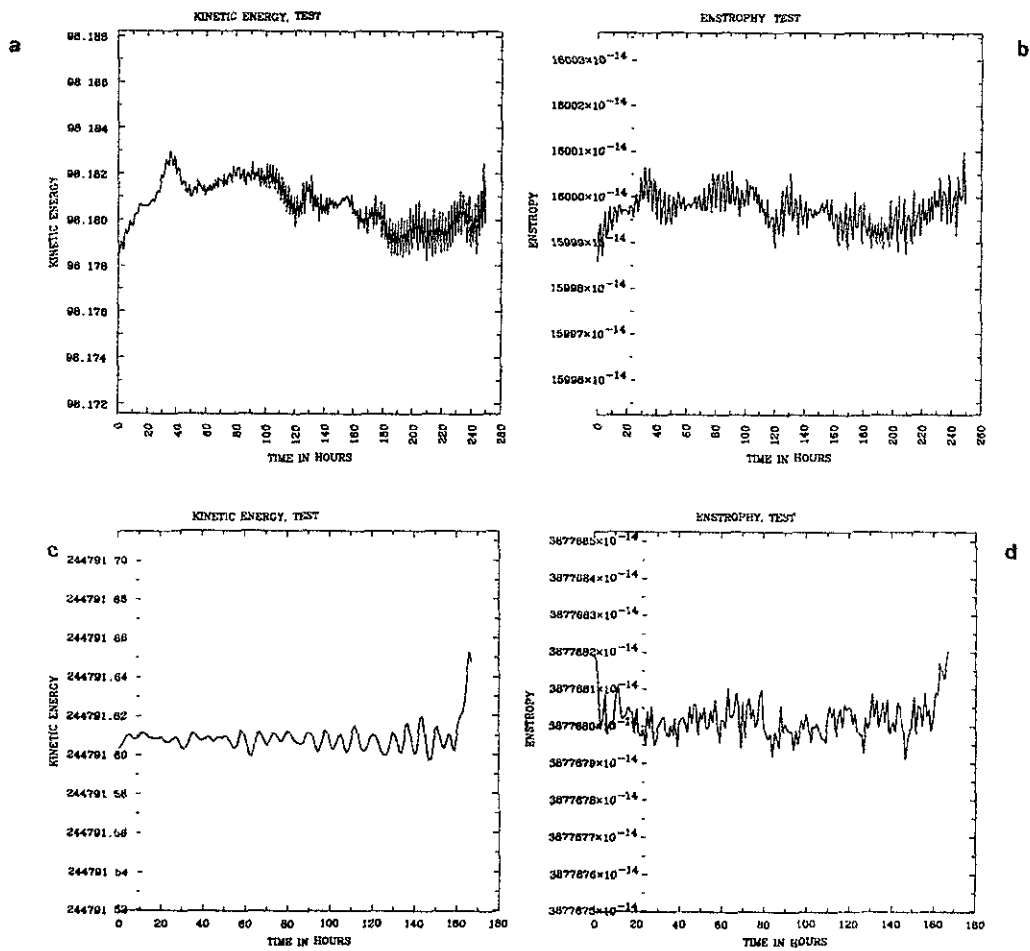


Fig. 4.5. Evolución de la energía cinética media global y enstrofia media global del modón pequeño (a)-(b) y del modón gigante (c)-(d) presentada en la Fig. 4.4 respectivamente. Cuando no se usa filtro.

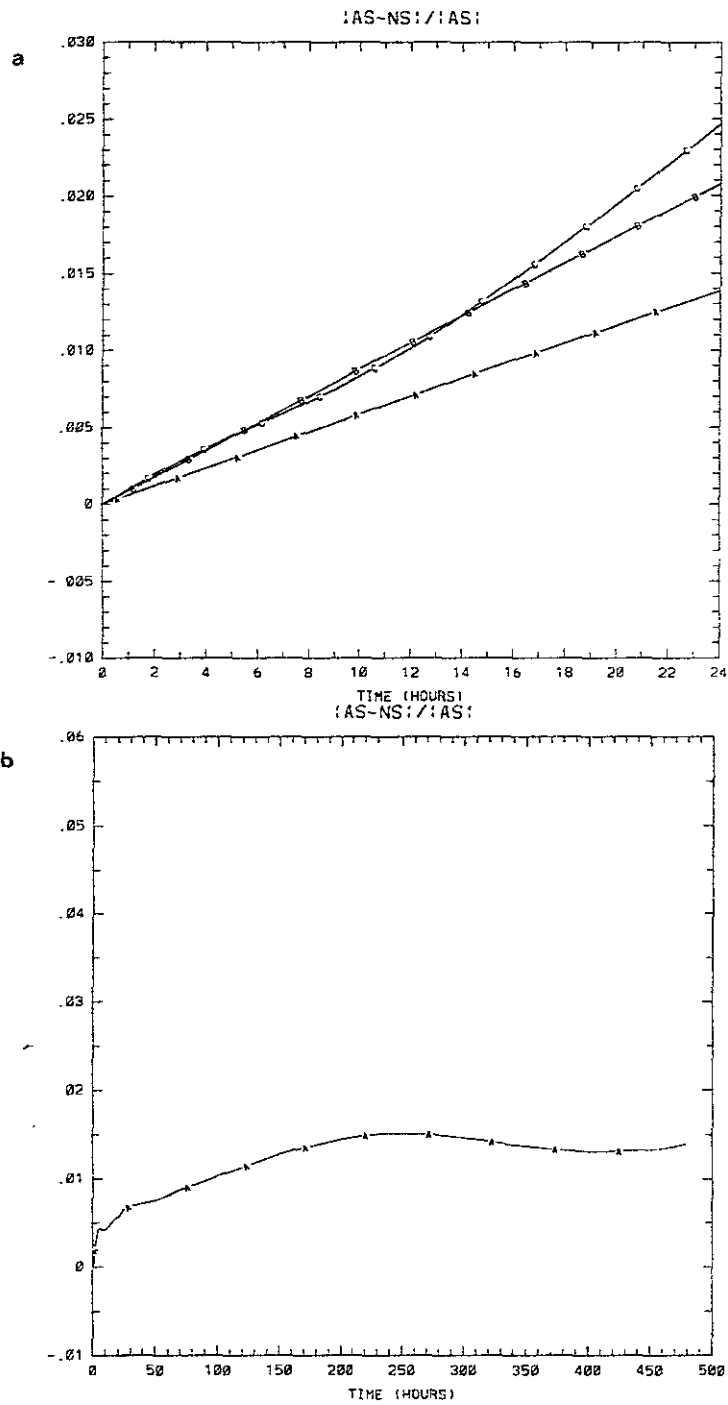


Fig. 4.6. a).-El comportamiento de el error relativo (11) para la onda Rossby-Haurwitz (A), la solución Wu-Verkley (B) y para el modón pequeño (C). b).- Comportamiento de el error relativo para la onda Wu-Verkley (A) a 20 días con la incorporación de un filtro.

El siguiente experimento que se realizó es sobre la interacción de modones lo cual confirma la opinión de otros autores que el modón es muy estable a perturbaciones de pequeña escala (McWilliams *et al*, 1981; McWilliams and Zabusky, 1982).

3) *Interacción de dos modones.* Supongamos que en el momento inicial $t = 0$ una solución exacta de la EVB es ψ , el cual es la suma de dos modones de Verkley Φ y Ψ , cuyos centros se localizan a la misma latitud : $\psi(0) = \Phi(0) + \Psi(0)$. Entonces en el tiempo t , la solución $\psi(t)$ es

$$\psi(t) = \Phi(t) + \psi'(t)$$

donde $\psi'(t)$ se considera como una perturbación del modón $\Phi(t)$. Es claro que en el momento inicial $\psi'(0) = \Psi(0)$. Del análisis de estabilidad de la EVB obtenemos que la perturbación $\psi'(t)$ está gobernada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' + J(\psi', \Delta \psi') = F(\psi') = J(\Delta \psi', \Phi) + J(\Delta \Phi, \psi') \quad (4.15)$$

Si los modones Φ y Ψ están muy separados entonces el forzamiento $F(\psi')$ es relativamente pequeño y el comportamiento de la perturbación $\psi'(t)$ en el estado inicial es similar en apariencia al del modón $\Psi(t)$. Como es claro la suma de dos soluciones exactas de la EVB es también una solución exacta. Esta situación fue también simulada en T_{31} , con modones de lado intermedio ($k = 2$, $\alpha = 4$, $\mu_0 = 0$, $D_0 = 0$ y $\mu_a = \sin 36.5^\circ$) que también se mueven rápidamente. La función de corriente de esta solución se presenta en la figura 4.7a-d en $t = 0$ y en 24, 48 y 72 horas de integración, respectivamente.

Consideremos ahora el caso general de dos modones Φ y Ψ de tamaños diferentes y velocidades diferentes. Para Φ consideremos el modón gigante y Ψ al modón mediano. La integración se realizó con el T_{31} , y con un paso de tiempo muy pequeño $\Delta t = 20s$. Conforme los modones se separan, el comportamiento de la perturbación $\psi'(t)$ se comporta al del modón Ψ . Mas si embargo, conforme avanza el tiempo los 2 modones se aproximan y entonces la interacción no lineal es muy intensa (fig. 4.8a). Durante la interacción no lineal, la evolución de la perturbación $\psi'(t)$, básicamente se determina por excitación de la resonancia no lineal en la ecuación no lineal (4.15) debido al forzamiento $F(\psi')$. Como puede observarse, tanto la amplitud como el tamaño del modón medio, aumenta a expensas de la pérdida de energía y decrecimiento del modón gigante (fig. 4.8b-e). El resultado de la interacción no lineal está determinada por la estructura geométrica del forzamiento y da la apariencia como si los dos modones intercambiaran lugares. Evidentemente esta transformación no puede explicarse sólo por los procesos advectivos, puesto que los dos modones se mueven hacia el este, y después de la interacción (fig. 4.8e) el modón pequeño está detrás de su posición inicial como se ve en la fig. 4.8a. Podemos ver que cuando el sistema se recupera de la resonancia, el modón gigante sobrevive después de la interacción, mientras que el modón medio desaparece (fig. 4.8f).

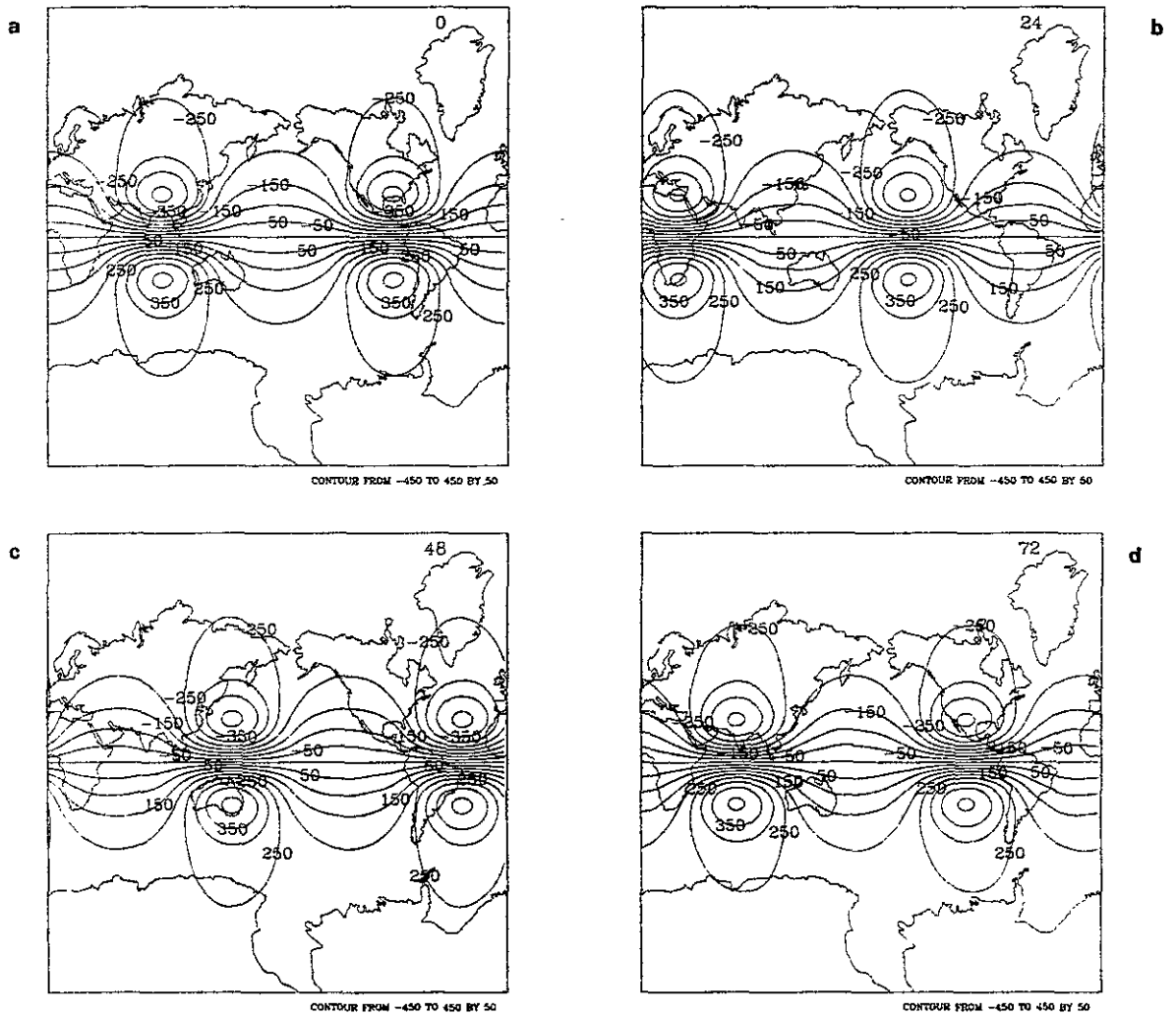


Fig. 4.7. La función de corriente de la solución de la EVB, que inicialmente es la suma de dos modones iguales, de tamaño mediano, en $t=0$ (a), $t=24$ hrs (b), $t=48$ hrs (c), y en $t=72$ hrs (d).

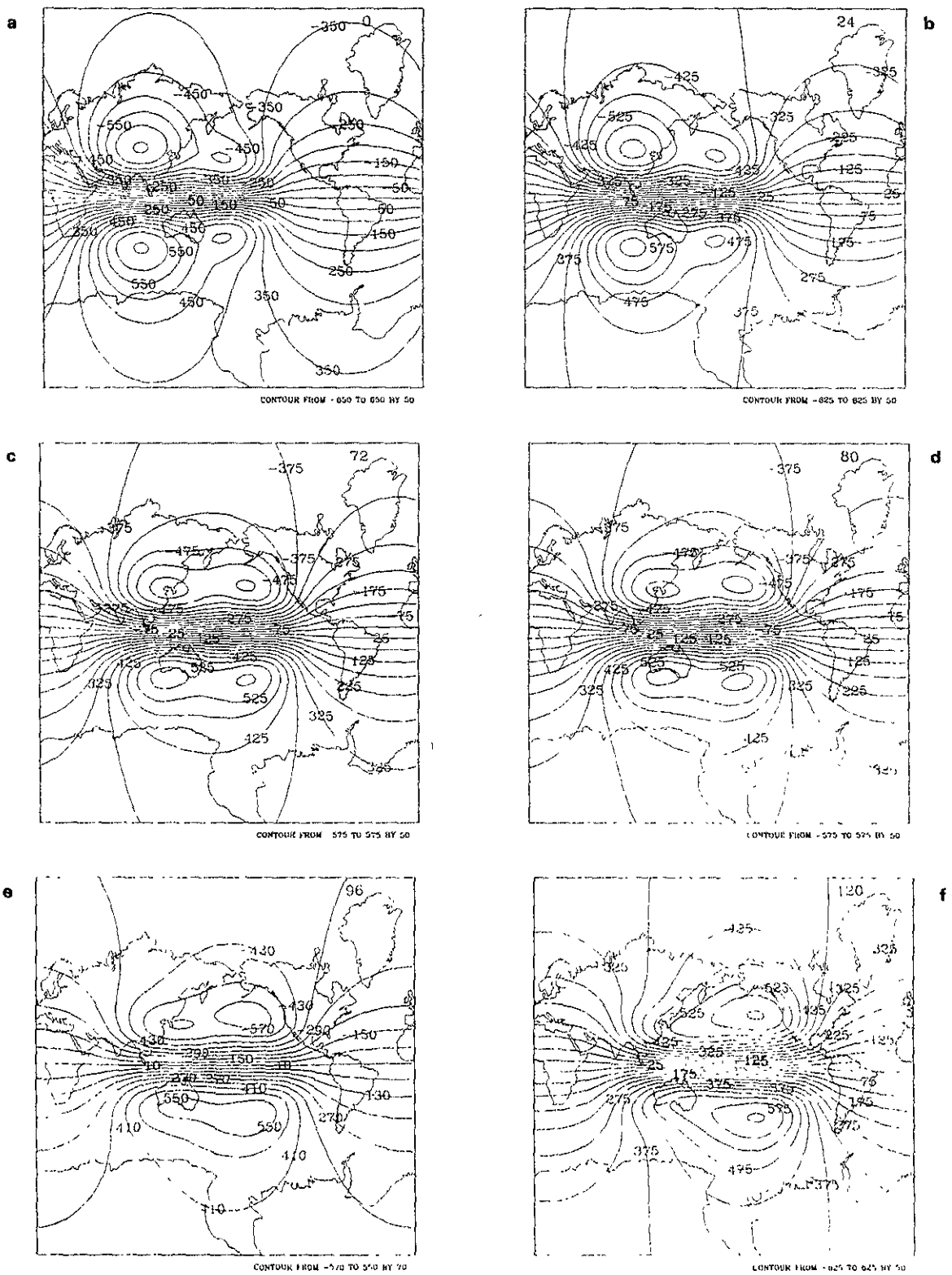


Fig. 4.8. Interacción no lineal de dos modones. Función de corriente de la solución que inicialmente es la suma del modón mediano dada en la fig. 4.7. y del modón gigante dada en la fig. 4.4e. en $t=0$ (a), $t=24$ min (b), $t=72$ min (c), $t=80$ min (d), $t=96$ min (e) y en $t=120$ min (f).

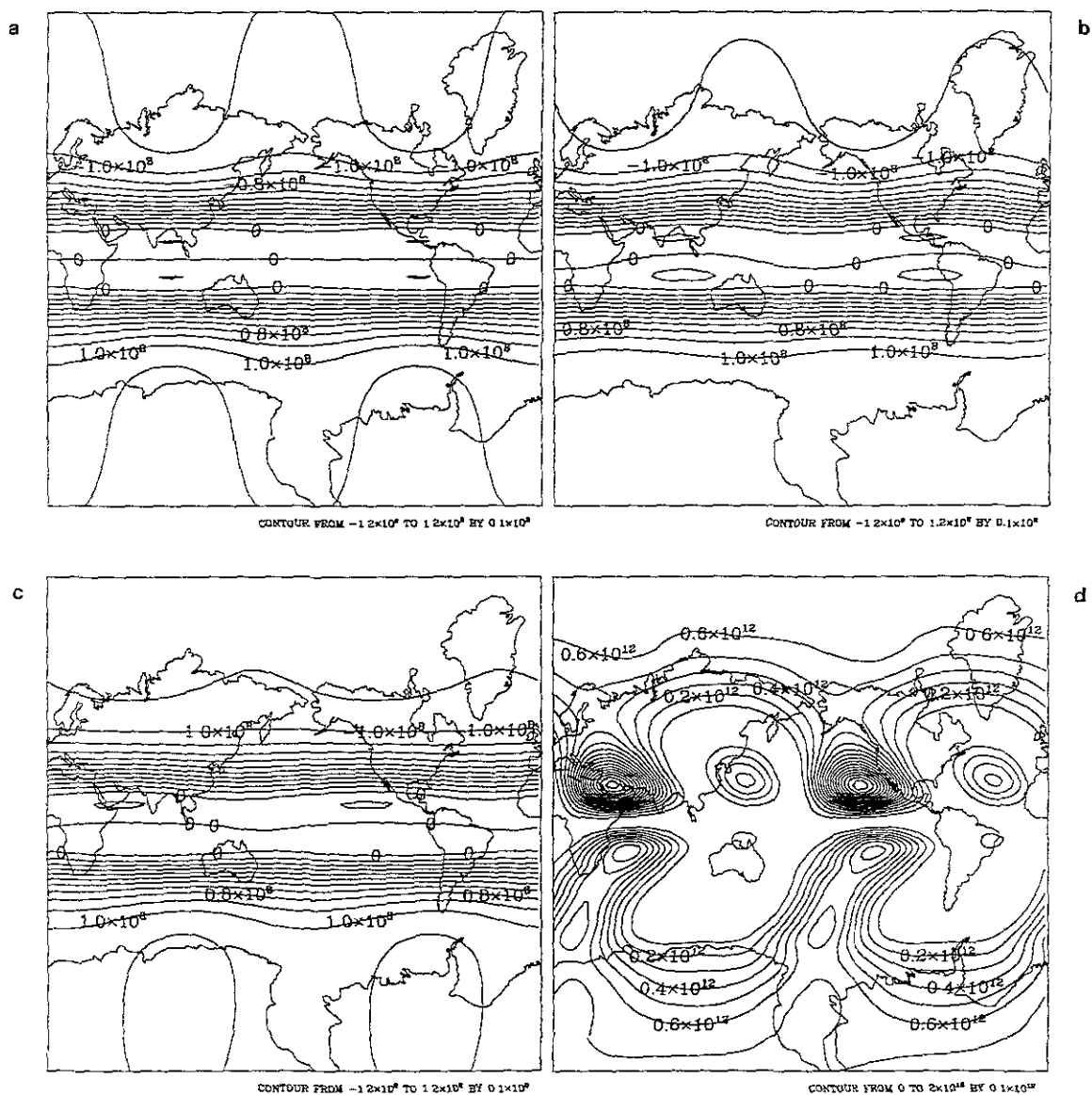


Fig. 4.9. Función de corriente (en unidades de m^2/s), inicial (a) de la solución de la ec. (3.26), en $t=12$ días (b), en $t=29$ días (c) y anomalía de flujo promedio temporal $(\Psi - \bar{\Psi})^2$ (d), del campo de función de corriente, en los primeros 100 días de integración del modelo barotrópico con forzamiento y disipación (4.17).

4.5 INTEGRACION DE LA ECUACION DE VORTICIDAD CON FORZAMIENTO Y DISIPACION

Sea la ecuación de vorticidad sobre la esfera S^2 con forzamiento y disipación (forma no-dimensional):

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = -\sigma \Delta \Psi - \nu(s) (-\Delta)^{s+1} \Psi + F_s \quad (4.16)$$

donde con dimensiones $\sigma \approx 1.65 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, es el drag lineal o término de amortiguamiento lineal, con dimensiones T^{-1} , $\nu(s)$ es el coeficiente de difusión turbulento que tiene dimensiones de $L^{2s} T^{-1}$ y s es un número real, si $s = 1$, entonces tenemos el término de difusión fickiana o de viscosidad molecular de aire $\nu(1) \approx 1.4 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$; si $s = 2$, esto se llama el coeficiente de difusión biarmónica y es del orden (Hoskins y Ambrizi 1993) de $\nu(2) \approx 2.338 \times 10^{16} \frac{m^4}{s}$.

Como un caso especial de (4.16) sea la ecuación de vorticidad con forzamiento, y con disipación de la forma:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = -\sigma \Delta \Psi + F_s, \quad (4.17)$$

donde el forzamiento $F_s = \sigma \Delta \Psi_s$, σ es ahora el coeficiente de disipación o de amortiguamiento lineal, σ^{-1} representa una escala de tiempo de relajación de un proceso Newtoniano, si σ^{-1} es pequeño, entonces tenemos un intenso forzamiento/disipación. Puede demostrarse que si Ψ_s es una solución libre estacionaria (digamos la onda Wu-Verkley), entonces el flujo que gobierna la ecuación (4.17), rápidamente se ajusta hacia Ψ_s . Siguiendo a Wu (1993) se integró el modelo espectral global, en T_{31} , de la ecuación (4.17) con forzamiento y disipación, usando al Ψ_s como la solución libre Wu-Verkley y como Ψ (la generada por la ecuación 3.26, fig 4.9a). Se integró el modelo (4.17) hasta 150 días con un valor del coeficiente de disipación $\sigma = 5.78 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$. Las integraciones demostraron oscilaciones entre dos tipos de regímenes: de índice alto e índice bajo, o sea los dos hemisferios se comportaron en fases opuestas; cuando el HN estuvo en un índice bajo, el HS fue de índice alto (fig. 4.9b) o viceversa (fig. 4.9c). Es probable que esta alternancia se deba al proceso de inestabilidad barotrópica, lo cual para algunos autores tiene relación con el fenómeno de teleconexiones (fig. 4.9d).

La trayectoria de las integraciones en el modelo en un espacio fase adecuado, demostraría que hay dos puntos de atracción donde el flujo del modelo viaja casiperiódicamente. Es necesario realizar más integraciones para checar estos resultados y encontrar el espacio fase adecuado para 'demostrar' geoméricamente como es la estructura de este atractor.

4.6 INTEGRACION IMPLICITA

Veamos ahora cómo integraríamos la ecuación de vorticidad:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = 0, \quad (4.18)$$

o la más general

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = -\sigma \Delta \Psi + \nu \Delta^2 \Psi + F_s,$$

de forma *implícita* usando el método espectral. Hay varias formas de resolver espectralmente en la EVB usando el método implícito:

a).- El más sencillo es usando un desarrollo en serie (Adem, 1956): La ecuación (4.18) es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\xi(t_0 + \Delta t) - \xi(t_0)}{\Delta t} &= G(t_0 + \Delta t) \\ &= -J(\Psi(t_0 + \Delta t), \xi(t_0 + \Delta t) + 2\mu) \approx G(t_0) + \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)\Delta t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t_0)\Delta t^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde se ha aplicado un desarrollo en series de Taylor al jacobiano y

$$\begin{aligned} G(t_0) &= -J(\Psi(t_0), \xi(t_0) + 2\mu) = -J(\Psi(t_0), \xi(t_0) + 2\mu) - 2 \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \lambda} \\ &= F(t_0) - 2 \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

cuya forma espectral es

$$\frac{d\xi_n^m(t_0)}{dt} = F_n^m(t_0) - 2im\Psi_n^m(t_0), \quad (4.20)$$

o en términos de la función de corriente espectral:

$$\frac{\partial \Psi_n^m(t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_n} F_n^m(t_0) + \frac{2im}{\chi_n} \Psi_n^m(t_0) = -\frac{1}{\chi_n} G_n^m(t_0),$$

así que

$$\frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial t} = \Delta^{-1} G(t_0) = - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \chi_n^{-1} G_n^m Y_n^m = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial t} Y_n^m,$$

habiendo obtenido los valores de $G(t_0)$ y la tendencia $\frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial t}$. Enseguida se calcula la forma espectral del segundo término de la derecha de (4.19) más explícito, esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(t_0) &= J\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}(t_0), \Psi(t_0)\right) + J\left(\xi(t_0), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0)\right) - 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - \frac{\partial G}{\partial \mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}\right)}_{G_A(\lambda, \mu)} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta^{-1} G}{\partial \mu} - \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \Delta^{-1} G}{\partial \lambda}\right)}_{G_B(\lambda, \mu)} - 2 \frac{\partial \Delta^{-1} G}{\partial \lambda}(t_0) \\ &= G_A(\lambda, \mu) + G_B(\lambda, \mu) - 2 \frac{\partial \Delta^{-1} G}{\partial \lambda}(t_0). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Enseguida se procede calcular la forma espectral de $G_A(\lambda, \mu)$, $G_B(\lambda, \mu)$ así que

$$\frac{\partial G_n^m(t_0)}{\partial t} = G_{A_n}^m(t_0) + G_{B_n}^m(t_0) - 2im\left(\frac{\partial \Psi_n^m}{\partial t}\right),$$

de donde podemos obtener también

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial G_n^m}{\partial t} Y_n^m,$$

así que la forma espectral a una aproximación a primer orden de

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} \approx G(t_0) + \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)\Delta t + \dots,$$

sería

$$\frac{\xi_n^m(t_0 + \Delta t) - \xi_n^m(t_0)}{\Delta t} = F_n^m(t_0) - 2im\Psi_n^m(t_0) + G_{A_n}^m(t_0) + G_{B_n}^m(t_0) - 2im\left(\frac{\partial \Psi_n^m}{\partial t}\right).$$

Como un ejemplo de aplicación de este esquema consideremos una onda RH analítica y el desarrollo de Taylor a primer orden :

$$\Psi_A(\lambda, \mu, t) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda - c_n t, \mu),$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} \approx G(t_0) + \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)\Delta t + \dots,$$

el cual también para cada n existe una solución numérica RH inicialmente igual a

$$\Psi(\lambda, \mu, 0) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) = \Psi(0)$$

Consideremos una solución numérica 'implícita', usando el esquema de diferencia adelantada y procediendo similarmente como arriba:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Psi_N(0 + \Delta t) - \Delta \Psi_N(0)}{\Delta t} &= G(t_0) + \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)\Delta t + \dots \\ &= G(t_0) + c_n \chi_n \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\ &= G(t_0) - c_n \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} \right) + \dots \\ &= -[(2 - \chi_n)\omega + 2] \sum_{m=-n}^n im\Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) + c_n \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ &\quad \left\{ [(2 - \chi_n)\omega + 2] \sum_{m=-n}^n im\Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \right\} \end{aligned}$$

$$= c_n \chi_n \sum_{m=-n}^n im \Psi_n^m Y_n^m - \chi_n \sum_{m=-n}^n (imc_n)^2 \Delta t \Psi_n^m Y_n^m,$$

ya que $c_n \chi_n = (\chi_n - 2)\omega - 2$, entonces obtenemos que la solución numérica ahora es

$$\Psi_N(0 + \Delta t) \approx -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \left[1 + (-\Delta t c_n im) + \frac{(-\Delta t c_n im)^2}{2!} \right] \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu),$$

lo cual da una mejor aproximación a la solución analítica que la dada arriba por el método explícito.

$$\begin{aligned} \Psi_A(0 + \Delta t) &= -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n e^{-imc_n \Delta t} \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &\simeq -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \left[1 + (-\Delta t c_n im) + \frac{(-\Delta t c_n im)^2}{2!} + \dots \right] \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

A tercer término de (4.19):

$$G(t_0 + \Delta t) \approx G(t_0) + \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)\Delta t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t_0)\Delta t^2 + \dots,$$

ésta se desarrolla como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t_0) &= (J(\Delta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0), \Psi(t_0)) + 2J(\Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0)) + J(\Delta \Psi(t_0), \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0)) \\ &\quad - 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0)) \\ &= (J(\frac{\partial G}{\partial t}(t_0), \Psi(t_0)) + 2J(G(t_0), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t_0)) + J(\Delta \Psi(t_0), \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0)) \\ &\quad - 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0)) \\ &= (\frac{\partial G_t}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - \frac{\partial G_t}{\partial \mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}) + 2(\frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} (\frac{\partial \Psi}{\partial t}) - \frac{\partial G}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\frac{\partial \Psi}{\partial t})) \\ &\quad + (\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}) - 2\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2})) - 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t_0), \end{aligned}$$

cada uno de los términos es posible calcularlos, y se determinan usando la información de (4.21). El esquema (4.19) puede mejorarse al usar un leap-frog en el primer término, a partir del tercer paso de integración. Así que esta idea de integración espectral parece ser más general que el que se ha usado (leap-frog) con sólo la inclusión del término de (4.19).

b).-La otra idea más general de como resolver la EVB es usar el esquema Crank-Nicholson:

$$\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} = -\frac{1}{a^2} J(\Psi^{\sim}, \xi^{\sim} + 2\Omega\mu), \quad (4.22)$$

donde $\xi^{\sim} = \frac{\xi^{k+1} + \xi^k}{2}$. Sea un producto escalar de 2 funciones f, g , $\langle f, g \rangle = \int_S f g^* ds$, y norma $\|f\|$. Multiplicando escalarmente (4.22) por ξ^{\sim} obtenemos

$$\left\langle \xi^{\sim}, \frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} \right\rangle = \frac{\|\xi^{k+1}\|^2 - \|\xi^k\|^2}{2\Delta t} = -\langle \xi^{\sim}, J(\Psi^{\sim}, \xi^{\sim} + 2\mu) \rangle = 0.$$

lo cual implica que $\|\xi^{k+1}\|^2 = \|\xi^k\|^2$ e indica que en el esquema se sigue preservando la conservación de la enstrofia y por lo tanto el esquema es incondicionalmente estable. Ahora (4.22) puede desarrollarse en la forma

$$\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} = -J(\Psi^{\sim}, \xi^{\sim}) - 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi^{\sim} \quad (4.23)$$

$$= -\frac{1}{2} [J(\Psi^{k+1}, \xi^{k+1}) + J(\Psi^k, \xi^k)] - \frac{1}{2} [J(\Psi^{k+1}, \xi^k) + J(\Psi^k, \xi^{k+1})] - 2\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\Psi^{k+1} + \Psi^k}{2} \right)$$

La forma espectral del primero y último son directos de obtener, donde hay problemas es en el segundo, esto es por la inclusion de dos niveles de tiempo. Despreciando éste segundo término momentáneamente, entonces la forma espectral de la ecuación (4.23) sería a una primera aproximación:

$$\frac{(\xi_n^m)^{k+1} - (\xi_n^m)^k}{\Delta t} = F_n^{m\sim}(t_0) - 2im\Psi_n^{m\sim}(t_0) = \frac{(F_n^m)^{k+1} + (F_n^m)^k}{2} + \frac{2im}{\chi_n} \left[\frac{(\xi_n^m)^{k+1} + (\xi_n^m)^k}{2} \right]$$

ya que $\xi_n^m = -\frac{1}{a^2} \Psi_n^m$ y agrupando la expresión anterior obtenemos

$$\left(1 - \frac{im\Delta t}{\chi_n}\right) (\xi_n^m)^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} (F_n^m)^{k+1} = \left(1 + \frac{im\Delta t}{\chi_n}\right) (\xi_n^m)^k + \frac{\Delta t}{2} (F_n^m)^k = (c_n^m)^k, \quad (4.24)$$

con $(m, n) \in T_N \iff 0 \leq |m| \leq n \leq N$. Sea el espacio vectorial complejo $C^{(N+1)^2}$, tal que para $x, y, c \in C^{(N+1)^2}$, con

$$x = (\xi_0^0, \xi_1^{-1}, \xi_1^0, \xi_1^1, \dots, \xi_N^{M-1}, \xi_N^M)^{k+1} = (x_1, \dots, x_{(N+1)^2}),$$

$$y = (F_0^0, F_1^{-1}, F_1^0, F_1^1, \dots, F_N^{M-1}, F_N^M)^{k+1} = (y_1, \dots, y_{(N+1)^2}),$$

$$, c = (c_0^0, c_1^{-1}, c_1^0, c_1^1, \dots, c_N^{M-1}, c_N^M)^k = (c_1, \dots, c_{(N+1)^2}), \quad x_l = a_l + b_l i.$$

Obtenemos que (4.24) se expresa como un sistema de ecuaciones $F(x, y) = 0$, donde $F : C^{(N+1)^2} \times C^{(N+1)^2} \rightarrow C^{(N+1)^2}$ y con componentes $F = (f_1, f_2, \dots, f_{(N+1)^2})$. Por ejemplo para un T_1 , tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
a^{00}x_1 + by_1 &= c_1 \rightarrow f_1(x, y) = 0, \text{ con } x_2, \dots, x_{(N+1)^2} = 0, y_2, \dots, y_{(N+1)^2} = 0 \\
a^{1-1}x_2 + by_2 &= c_2 \rightarrow f_2(x, y) = 0, \dots\dots\dots \\
a^{10}x_3 + by_3 &= c_3 \rightarrow f_3(x, y) = 0, \dots\dots\dots \\
a^{11}x_4 + by_4 &= c_4 \rightarrow f_4(x, y) = 0, \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

donde $a^{nm} = (1 - \frac{im\Delta t}{\chi^n})$ y $b = -\frac{\Delta t}{2}$. Este sistema se puede resolver por un método iterativo o de eliminación Gaussiana.

Algoritmo. Sea la función $F : C^{(N+1)^2} \times C^{(N+1)^2} \rightarrow C^{(N+1)^2}$, el problema consiste en encontrar una solución del sistema

$$F(x^{(k+1)\Delta t}, y^{(k+1)\Delta t}) = 0,$$

Posible solución. Lo cual se podría resolver por un método iterativo especial:

- a) Calcular $F(z_i^{(k+1)\Delta t})$, con $z_i = (x_i, y_i)$ es el aceptable entonces STOP; en otro caso calcular $F(z_i^{(k+1)\Delta t})$.
- b) Resolver el sistema lineal $F'(z_i^{(k+1)\Delta t})s_i = -F(z_i^{(k+1)\Delta t})$, para s_i y poner $z_{i+1}^{(k+1)\Delta t} = z_i^{(k+1)\Delta t} + s_i$ donde F' es el jacobiano de F .

Capítulo 5

ESTABILIDAD LINEAL DE FLUJOS SOBRE LA ESFERA

5.1 INTRODUCCION

El proceso de inestabilidad el cual depende de la existencia de cizallamiento horizontal de un flujo básico suficientemente grande, se llama inestabilidad barotrópica (Pedlosky, 1987). El problema de inestabilidad barotrópica de un flujo atmosférico no-divergente, se ha investigado ya desde hace muchos años (Kuo, 1949; Lorenz, 1972; Simmons *et al.*, 1983; Haarsma y Opsteegh, 1988; etc.). Lorenz (1972) explica que debido a este problema hay una pérdida de predictabilidad con el tiempo del flujo atmosférico. Por otro lado, Simmons *et al.* (1983) han indicado que el problema de inestabilidad barotrópica da como respuesta ciertos patrones de variabilidad de baja frecuencia, que se observan en la atmósfera barotrópica. Hay dos tipos de estabilidad: estabilidad lineal y estabilidad no lineal. Estabilidad lineal está asociada con sistemas dinámicos linealizados alrededor de una solución básica o de equilibrio. Estabilidad no lineal significa que el sistema no lineal es estable bajo perturbaciones de amplitud pequeñas pero finitas (Liapunov, 1966; Arnold, 1965).

También son bien conocidas varias condiciones necesarias de estabilidad hidrodinámica. El más familiar es el teorema de punto de inflexión de Rayleigh, 1880 para flujos zonales (ver por ejemplo, Pedlosky, 1987; Drazin y Reid, 1981; Green, 1995):

Proposición 1 (Rayleigh, 1880; Kuo, 1949). Sea $\tilde{U}(y)$ la componente del viento básico, en la dirección x , en el plano (x,y) , $\tilde{V} = 0$, y en un canal contenida entre las paredes rígidas $y=\pm Y$. Entonces el flujo zonal puede ser inestable solo si el gradiente de vorticidad $(-\tilde{U}_{yy}) = \frac{\partial \tilde{\xi}(y)}{\partial y}$ asume valores tanto positivo y negativo entre las paredes.

Dem. Sea la ecuación de vorticidad linealizada en el plano:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \tilde{U}(y) \frac{\partial \xi'}{\partial x} + (-\tilde{U}_{yy}) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

donde, ψ es la función de corriente, $\xi' = \Delta \psi'$, $(u', v') = (-\psi'_y, \psi'_x)$ denota la perturbación de vorticidad y la perturbación de velocidad en la dirección x y y respectivamente. Rayleigh supone una solución (solución de modo normal) de forma compleja

$\psi' = \widehat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}$, donde k es el número de onda constante, y c una velocidad de fase constante, así que insertando esta expresión en (5.1) obtenemos la ecuación de Rayleigh

$$\widehat{\psi}_{yy} - k^2\widehat{\psi} = \frac{\widetilde{U}_{yy}}{\widetilde{U} - c}\widehat{\psi},$$

con $c = c_r + i c_i$. La ecuación de Rayleigh correspondiente al plano beta (Kuo,1949)

$$(\widetilde{U} - c)(\widehat{\psi}_{yy} - k^2\widehat{\psi}) + (\beta - \widetilde{U}_{yy})\widehat{\psi} = 0,$$

lo cual indica que para $\widetilde{U} - c = 0$ hay una latitud crítica donde la velocidad de fase es igual a la velocidad zonal. Multiplicando la ecuación por $\widehat{\psi}^*$ e integrando entre $\pm Y$ obtenemos

$$\int_{-Y}^Y \left[\frac{d}{dy}(\widehat{\psi}_y \widehat{\psi}^*) - |\widehat{\psi}_y|^2 - k^2 |\widehat{\psi}|^2 \right] dy = \int_{-Y}^Y \frac{(\widetilde{U}_{yy} - \beta) |\widehat{\psi}|^2}{(\widetilde{U} - c)} dy.$$

Aplicando las condiciones de frontera $\widehat{\psi}(\pm Y) = 0$, y suponiendo $c_i \neq 0$ (indica la existencia de ondas inestables) obtenemos

$$c_i \int_{-Y}^Y \frac{(\widetilde{U}_{yy} - \beta) |\widehat{\psi}|^2}{|\widetilde{U} - c|^2} dy = 0,$$

lo cual implica que la condición necesaria para la inestabilidad barotrópica es que

$$-\left(\frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial y} - \beta\right) \Big|_{y=y_s} = (\widetilde{U}_{yy} - \beta) = 0 \text{ en algún } y_s \in (-Y, Y)$$

$$\text{o sea que } -\frac{d}{dy}(\xi + f) = 0$$

e indica (Haltiner y Williams 1980) que la vorticidad absoluta debe tener un máximo o un mínimo en algún punto y_s .

Sea la ecuación de vorticidad linealizada sobre la esfera, tal que el estado básico depende sólo de la latitud ϕ :

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = -\frac{1}{\cos \phi} \widetilde{U}(\phi) \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\widetilde{\xi} + 2 \text{sen} \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda}, \quad (5.2)$$

donde $\widetilde{U}(y) = -\frac{\partial \widetilde{\Psi}}{\partial \phi}$ y $\xi = \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \tan \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}$. Suponiendo que la perturbación es de la forma

$$\Psi' = \text{Re} \widehat{\Psi}(\phi) e^{im(\lambda-ct)}, \quad (5.3)$$

donde m es el número de onda zonal y c velocidad angular de fase. Sustituyendo (5.3) en (5.2) obtenemos la ecuación de Rayleigh-Kuo sobre una esfera en rotación

$$\left[\widehat{\Psi}_{\phi\phi} - \tan \phi \widehat{\Psi}_{\phi} - \frac{m^2}{\cos^2 \phi} \widehat{\Psi} \right] = - \frac{(-\widetilde{U}_{\phi\phi} + \tan \phi \widetilde{U}_{\phi} + 2\widetilde{U} + 2)}{(\widetilde{U} - c)} \widehat{\Psi}. \quad (5.4)$$

Multiplicando (5.4) por $\widehat{\Psi}^*$, integrando sobre toda la esfera y tomando la parte imaginaria se sigue que la derivada de la vorticidad absoluta $(-\widetilde{U}_{\phi\phi} + \tan \phi \widetilde{U}_{\phi} + 2\widetilde{U} + 2)$ debe cambiar de signo al menos una vez en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto según Rayleigh-Kuo, una condición necesaria para la inestabilidad de un flujo zonal ideal sobre una esfera en rotación es que la derivada de la vorticidad absoluta :

$$\left(\Delta \widetilde{\Psi} + 2\mu \right)_{\phi} = -\widetilde{U}_{\phi\phi} + \tan \phi \widetilde{U}_{\phi} + 2\widetilde{U} + 2,$$

cambie de signo en alguna latitud ϕ_0 , donde \widetilde{U} es el viento zonal básico y $\widetilde{V} = 0$.

Considerando a un flujo total como la suma de un flujo zonal más una perturbación, y como la energía cinética total se conserva, por lo tanto la perturbación inestable toma energía del flujo zonal. Esto, para algunos autores es el mecanismo de inestabilidad barotrópica para flujos zonales. La condición necesaria de estabilidad de Rayleigh-Kuo, fue casi la única condición de estabilidad teórica útil conocida para flujos zonales. Notemos que esta condición es limitada, ya que cada flujo zonal básico especificado por un polinomio de Legendre (PL) : $aP_n^0(\mu)$ cumple esta condición si $n \geq 3$ y si la amplitud a es muy grande (Baines, 1976; Skiba, 2000). Por otra parte todavía hay bastantes preguntas que quedan por responder sobre la inestabilidad barotrópica en la esfera. Sea Ψ una solución básica de la EVB sobre la esfera

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = 0. \quad (5.5)$$

La estabilidad de una solución básica estacionaria de (5.5) es de considerable interés hidrodinámico y geofísico. La aplicación de métodos numéricos permiten indagar en estos problemas. En este capítulo describimos un algoritmo numérico desarrollado para la inestabilidad de modos normales de un flujo estacionario en un fluido no divergente (descrito por la ecuación 5.5) sobre la esfera en rotación. Se prueba el algoritmo para flujos zonales (Flujos polinomios de Legendre PL, ondas Rossby-Haurwitz zonales, RHZ modones monopolar zonal y flujo zonal observado) y después a flujos más complicados (ondas RH, modones y soluciones Wu-Verkley).

El estudio del algoritmo de estabilidad numérica se ha probado aquí usando algunos resultados teóricos de estabilidad de modos normales obtenidos para las soluciones exactas de la ecuación EVB (5.5). En particular se usa la condición necesaria de estabilidad de Rayleigh-Kuo. No usamos la condición de estabilidad de Tung (1981), ya que su aplicación práctica no es fácil; en lugar se utiliza las condiciones de estabilidad de Skiba (2000), Skiba y Strelkov (2000) los cuales se aplican para flujos zonales, ondas RH y modones.

5.2 EL METODO DE ESTABILIDAD DE MODOS NORMALES

Enseguida se describe el método de modos normales para el estudio de la inestabilidad exponencial de un flujo estacionario $\psi : \Omega_\iota \subset S^2 \rightarrow R$, con $\Psi_\iota = \psi \circ \varphi_\iota$, $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ un atlas de un sistema de coordenadas local $(x_\iota^1, x_\iota^2) = (\lambda, \mu)$ y por simplicidad de notación denotamos a $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_\iota$. (para más detalles acerca del método de modos normales se pueden ver los trabajos de Hoskins (1973), Baines (1976), Simmons *et al.* (1983), Verkley (1987), Dymnikov y Skiba (1987), Skiba (1989), Skiba y Adem (1998)). Sea $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ la solución (función de corriente básica) de la ecuación de vorticidad (5.5) sobre la esfera S^2 . La evolución de una perturbación infinitesimal $\Psi'(\lambda, \mu, t)$ de $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ está descrita por (en forma no dimensional)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \mathcal{L}\xi', \\ \xi' \Big|_{t=t_0} &= \xi'_0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde $\xi' = \Delta\Psi'$ es la perturbación de vorticidad,

$$\mathcal{L}\xi' = -J(\tilde{\Psi}, \xi') - J(\Delta^{-1}\xi', \tilde{q}), \quad (5.7)$$

es un operador lineal definido sobre funciones valuadas en los complejos suficientemente suaves, $\tilde{q} = \Delta\tilde{\Psi} + 2\mu$ es la vorticidad absoluta. Para un sistema de coordenadas local $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$, el producto escalar y norma de funciones $f, g : \varphi_\iota(\Omega_\iota) \subset R^2 \rightarrow C$ se definen respectivamente como

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} f g^* ds \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f g^* d\lambda d\mu; \quad \|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2},$$

donde g^* es el conjugado complejo de g . Se construirá la matriz que representa al operador \mathcal{L} del problema (5.6)-(5.7) en el espacio $\mathcal{P}^N = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_3 \oplus \dots \oplus \mathbf{H}_{2N+1}$ de polinomios esféricos de grado $\leq N$, supongamos que $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ pertenecen a \mathcal{P}^M , $\Psi'(\lambda, \mu, t)$ y $\xi'(\lambda, \mu, t) = \Delta\Psi'(\lambda, \mu, t)$ pertenece a \mathcal{P}^N ($M < N$). Así que

$$\tilde{\Psi} = \sum_{\beta}^N \tilde{\Psi}_{\beta} Y_{\beta}, \quad \Psi' = \Delta^{-1}\xi' = - \sum_{\alpha}^N \chi_{\alpha}^{-1} \xi'_{\alpha} Y_{\alpha}, \quad \xi' = \sum_{\alpha}^N \xi'_{\alpha} Y_{\alpha}, \quad (5.8)$$

por simplicidad, de aquí en adelante usamos la notación generalmente aceptada (Platzman, 1962; Merilees, 68; Hoskins, 1973; Machenauer, 1977; Skiba, 1989; Pérez y Skiba, 1999): $\alpha \equiv (m_{\alpha}, n_{\alpha})$, $Y_{\alpha} \equiv P_{n_{\alpha}}^{m_{\alpha}}(\mu) e^{im_{\alpha}\lambda}$, $\chi_{\alpha} \equiv n_{\alpha}(n_{\alpha} + 1)$, $\xi'_{\alpha} \equiv \xi_{n_{\alpha}}^{m_{\alpha}}$, y

$$\sum_{\alpha}^N \equiv \sum_{n_{\alpha}=1}^N \sum_{m_{\alpha}=-n_{\alpha}}^N.$$

Substituyendo (5.8) en (5.6), (5.7) y tomando el producto escalar de la ecuación obtenida por el armónico Y_{α} nos da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \xi'_{\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} Y_{\alpha} Y_{\alpha}^* ds &= \sum_{\alpha} \langle \mathcal{L} \xi', Y_{\alpha} \rangle \\
\frac{d}{dt} \xi'_{\alpha} &= \langle \mathcal{L} \xi', Y_{\alpha} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_S (\mathcal{L} \xi') Y_{\alpha}^* ds \\
&= \langle -J(\tilde{\Psi}, \sum_{\gamma} \xi'_{\gamma} Y_{\gamma}) + J(\Delta \tilde{\Psi} + 2\mu, -\sum_{\gamma} \xi'_{\gamma} \chi_{\gamma}^{-1} Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \\
&= \sum_{\gamma} \left[\langle -J(\tilde{\Psi}, Y_{\gamma}) - J(\chi_{\gamma}^{-1}(\Delta \tilde{\Psi} + 2\mu), Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \right] \xi'_{\gamma} \\
&= \sum_{\gamma} L_{\alpha\gamma} \xi'_{\gamma},
\end{aligned}$$

donde

$$L_{\alpha\gamma} = \langle \mathcal{L} Y_{\gamma}, Y_{\alpha} \rangle \quad (5.9)$$

es el elemento (α, γ) de la matriz L representando al operador \mathcal{L} en el subespacio \mathcal{P}^N .
 Substituyendo (5.7) en (5.9) da

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\gamma} &= -\langle J(\tilde{\Psi} + \chi_{\gamma}^{-1}(\tilde{\xi} + 2\mu), Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \\
&= \sum_{\beta(1)}^M -(\chi_{\gamma}^{-1} - \chi_{\beta}^{-1}) \langle J(Y_{\beta}, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \tilde{\xi}_{\beta} - 2\chi_{\gamma}^{-1} \langle J(\mu, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \\
&= \sum_{\beta(1)}^M -(\chi_{\gamma}^{-1} - \chi_{\beta}^{-1}) \langle J(Y_{\beta}, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \tilde{\xi}_{\beta} + 2\chi_{\gamma}^{-1} im_{\gamma},
\end{aligned} \quad (5.10)$$

ya que

$$\tilde{\Psi} + \chi_{\gamma}^{-1}(\tilde{\xi} + 2\mu) = \sum_{\beta(1)}^M (\chi_{\gamma}^{-1} - \chi_{\beta}^{-1}) \tilde{\xi}_{\beta} Y_{\beta} + 2\mu \chi_{\gamma}^{-1}; \quad \langle J(\mu, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle = -im_{\gamma}$$

y también se puede obtener que

$$\begin{aligned}
\langle J(Y_{\beta}, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} J(Y_{\beta}, Y_{\gamma}) Y_{\alpha}^* ds \\
&= i \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)} P_{\alpha}(\mu) [m_{\beta} P_{\beta}(\mu) H_{\gamma}(\mu) - m_{\gamma} P_{\gamma}(\mu) H_{\beta}(\mu)] d\mu \right]
\end{aligned}$$

donde $H_{\alpha}(\mu) = (1 - \mu^2) \frac{dP_{\alpha}}{d\mu}$. Por lo tanto en el subespacio \mathcal{P}^N , el problema (5.6) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi} = L\vec{\xi}. \quad (5.11)$$

Los elementos de la matriz (5.10) pueden escribirse como

$$L_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta}^M B_{\beta\alpha\gamma}\tilde{\xi}_{\beta} + D_{\alpha\gamma}, \quad (5.12)$$

donde $D_{\alpha\gamma} = i2m_{\gamma}\chi_{\gamma}^{-1}\delta_{\alpha\gamma}$ es el elemento diagonal imaginario puro de L , ya que $\delta_{\alpha\gamma} \equiv \delta_{n_{\alpha}n_{\gamma}}\delta_{m_{\alpha}m_{\gamma}}$ y

$$B_{\beta\alpha\gamma} = i(\chi_{\beta}^{-1} - \chi_{\gamma}^{-1}) \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)} P_{\alpha}(\mu) [m_{\beta}P_{\beta}(\mu)H_{\gamma}(\mu) - m_{\gamma}P_{\gamma}(\mu)H_{\beta}(\mu)] d\mu$$

es el coeficiente de interacción triada no lineal y la integral se calcula con fórmulas de cuadratura Gaussiana. Considerando la perturbación infinitesimal (5.8) en la forma de un modo normal

$$\Psi'(\lambda, \mu, t) = \widehat{\Psi}(\lambda, \mu)e^{\varpi t}, \xi'(\lambda, \mu, t) = \Delta\widehat{\Psi}(\lambda, \mu)e^{\varpi t} \quad (5.13)$$

donde

$$\widehat{\Psi}(\lambda, \mu) = \widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu) + i\widehat{\Psi}_i(\lambda, \mu) = |\widehat{\Psi}(\lambda, \mu)|e^{i\theta},$$

es la amplitud, y $\theta \equiv \theta(\lambda, \mu) = \arg \widehat{\Psi}(\lambda, \mu) = \arctan \left\{ \frac{\widehat{\Psi}_i(\lambda, \mu)}{\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)} \right\}$ es la fase inicial del modo. Así que obtenemos el problema espectral

$$\mathcal{L}\widehat{V} = \varpi\widehat{V},$$

para el operador \mathcal{L} donde $\varpi = \omega_r + i\omega_i$ es el eigenvalor o valor característico, y $\widehat{V}(\lambda, \mu) = \Delta\widehat{\Psi}(\lambda, \mu)$ es la correspondiente eigenfunción o función característica. La ω_r y ω_i son sin dimensiones. La función de corriente de un modo normal (5.13) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Psi'(\lambda, \mu, t) &= |\widehat{\Psi}(\lambda, \mu)|e^{\omega_r t} \cos \left[\arg \widehat{\Psi}(\lambda, \mu) + \omega_i t \right] \\ &= e^{\omega_r t} \left[\widehat{\Psi}_r \cos(\omega_i t) - \widehat{\Psi}_i \text{sen}(\omega_i t) \right] \\ &= |\widehat{\Psi}(\lambda, \mu)|e^{\omega_r t} e^{i(\theta + \omega_i t)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por lo tanto, un modo normal (5.13) o (5.14) es inestable si $\omega_r > 0$, amortiguado si $\omega_r < 0$, neutral si $\omega_r = 0$, y estacionario si $\omega_i = 0$. El umbral temporal (folding-time) τ_e y el periodo T del modo (5.13) son determinados (en días) como $\tau_e = \frac{1}{2\pi|\omega_r|}$ y $T = \frac{1}{|\omega_i|}$, respectivamente

El problema espectral diferencial $\mathcal{L}\widehat{V} = \varpi\widehat{V}$ se reduce entonces al problema algebraico

$$L\vec{v} = \varpi\vec{v}, \quad (5.15)$$

en el subespacio \mathcal{P}^N , donde $\vec{v} = \{\widehat{V}_\gamma\} = \{-\chi_\gamma \widehat{\Psi}_\gamma\}$ es el vector característico cuyas componentes son los coeficientes de Fourier \widehat{V}_γ de la función característica \widehat{V} con $n_\gamma \leq N$.

5.3 CONDICIONES DE INESTABILIDAD

Reescribiendo la Proposición 1 anterior como

Proposición 1. (Rayleig-Kuo). Sea $\widetilde{\Psi}(\mu)$ un flujo zonal básico sobre S^2 . Entonces el modo normal (5.3) puede ser inestable sólo si la derivada $\frac{d}{d\mu}\widetilde{q}$ de la vorticidad absoluta $\widetilde{q} = \Delta\widetilde{\Psi} + 2\mu$ del flujo $\widetilde{\Psi}(\mu)$ cambia de signo en al menos en un punto del intervalo $(-1,1)$.

Consideremos un flujo básico PL solución exacta de la EVB(5.5):

$$\widetilde{\Psi}(\mu) = aP_n^0(\mu), \quad (5.16)$$

entonces

$$\frac{d}{d\mu}\widetilde{q} = 2 - a\chi_n \frac{d}{d\mu}P_n. \quad (5.17)$$

Ahora según Rayleig-Kuo, algún modo normal (5.3) inestable o amortiguado necesita satisfacer la condición

$$\int_{-1}^{+1} |\widehat{\Psi}(\mu)|^2 \frac{d}{d\mu}\widetilde{q}(\mu) = 0, \quad (5.18)$$

el cual es sólo posible si $\frac{d}{d\mu}\widetilde{q}(\mu)$ cambia de signo en algún punto del intervalo $(-1,1)$. De (5.17) y (5.18), se sigue que para el flujo (5.16), el término de rotación (primer término de 5.17 del lado derecho) es un factor de estabilización que impide la formación de puntos de inflexión. Por otro lado el segundo término de (5.17) del lado derecho, es un desestabilizador que aumenta con el grado n y disminuye con la amplitud a . Notemos que la condición necesaria de inestabilidad de Kuo es limitada, ya que cada flujo PL (5.16) de grado $n \geq 3$, satisface la condición si su amplitud a es muy grande.

Proposición 2. (Hoskins, 1973; Baines, 1976; Zang, 1988). Existe una amplitud crítica para la inestabilidad (para flujos básicos PL y ondas RH) y también una dependencia directa de la razón de crecimiento del modo inestable sobre la amplitud.

Lo anterior se observó numericamente.

Proposición 3. (Baines, 1976). Algún modo (5.3) del flujo LP (5.16) de grado $n = 1$ o $n = 2$ es estable linealmente.

Dem. Por ejemplo, si $n = 1$, $\frac{d}{d\mu}\widetilde{q} = 2(1 - a)$, el cual tiene el mismo signo en el intervalo $(-1, 1)$ para cualquier a , por lo tanto no se cumple la condición de Rayleigh-Kuo, el flujo es estable, y todos los modos son neutrales. Si $n = 2$, entonces $\frac{d}{d\mu}\widetilde{q} = 2(1 - 2a\mu)$, $\mu = \frac{1}{2a}$ es el punto de inflexión, sin embargo el flujo $\widetilde{\Psi}(\mu) = aP_2^0(\mu)$ es estable para cualquier a (Baines, 1976). Por lo tanto la existencia de puntos de inflexión, es sólo una condición necesaria de inestabilidad.

Proposición 4. (Skiba y Adem, 1998). Sea $n \geq 3$. Algún modo (5.3) del flujo LP (5.6) puede ser inestable sólo si el número de onda zonal m del modo satisface la condición $0 < |m| < n$.

Se probará el algoritmo de estabilidad de modos normales también con ondas *RH* estacionarias:

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (5.19)$$

donde, $n \geq 2$ y $\omega = \frac{2}{\chi_n - 2}$, el cual contiene como caso particular a la onda *RH* zonal:

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + aP_n^0(\mu), \quad (5.20)$$

siendo la amplitud $a \neq 0$ real arbitraria y se verificará el resultado con la estimación teórica:

Proposición 5. (Skiba, 2000). Sea $\tilde{\Psi}$ un flujo básico PL (5.16) o una onda *RH* (5.19) con $n \geq 2$. Entonces la amplitud $\hat{\Psi}$ de cada modo inestable o amortiguado (5.13) debe satisfacer la condición

$$\chi_{\hat{\Psi}} = \frac{\eta(\hat{\Psi})}{K(\hat{\Psi})} = \chi_n, \quad (5.21)$$

donde $\chi_{\hat{\Psi}}$ es el cuadrado del número espectral de Fjörtoft (1953), promedio de la amplitud del modo Ψ , y $K(\hat{\Psi}) = \frac{1}{2} \|\nabla \hat{\Psi}\|^2$ y $\eta(\hat{\Psi}) = \frac{1}{2} \|\Delta \hat{\Psi}\|^2$ son la energía cinética total y enstrofia de la amplitud $\hat{\Psi}$.

Dem. Sea la ecuación lineal que gobierna una perturbación infinitesimal de función de corriente $\Psi'(\lambda, \mu, t)$:

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = -J(\tilde{\Psi}, \xi') - J(\Delta^{-1} \xi', \Delta \tilde{\Psi} + 2\mu). \quad (5.22)$$

donde $\tilde{\Psi}$ es una solución básica: onda básica Rossby-Haurwitz (*RH*) estacionaria

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu),$$

donde $n \geq 2$, $\omega = \frac{2}{\chi_n - 2}$. La vorticidad absoluta de esta onda *RH* es

$$\Delta \tilde{\Psi} + 2\mu = -\chi_n \tilde{\Psi}.$$

Así que (5.22) para la onda *RH* puede escribirse como

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = -J(\tilde{\Psi}, \xi') - J(\Delta^{-1} \xi', \Delta \tilde{\Psi} + 2\mu) = -J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi' + \chi_n \Psi') \quad (5.23)$$

y para flujo básico PL, $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = aP_n^0(\mu)$ como

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = -J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi' + \chi_n \Psi') - 2J(\Psi', \mu).$$

Supongamos que la solución de (5.23) es en la forma de modos normales:

$$\Psi'(\lambda, \mu, t) = \hat{\Psi}(\lambda, \mu) e^{\varpi t},$$

donde $\varpi = \omega_r + i\omega_i \in C$ y $\hat{\Psi}(\lambda, \mu) = \hat{\Psi}_r(\lambda, \mu) + \hat{\Psi}_i(\lambda, \mu)i$ es la amplitud. Por lo que (5.23) se reduce a:

$$\varpi \Delta \hat{\Psi} = -J(\tilde{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} + \chi_n \hat{\Psi}), \quad (5.24)$$

Ahora multiplicando (5.24) escalarmente con $\Delta \hat{\Psi} + \chi_n \hat{\Psi}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle -\varpi \Delta \hat{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} + \chi_n \hat{\Psi} \rangle &= \langle -\varpi \Delta \hat{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} \rangle + \langle -\varpi \Delta \hat{\Psi}, \chi_n \hat{\Psi} \rangle \\ &= \langle J(\tilde{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} + \chi_n \hat{\Psi}), \Delta \hat{\Psi} + \chi_n \hat{\Psi} \rangle = 0 \end{aligned}$$

considerando la parte real se llega:

$$\begin{aligned} -\omega_r \frac{1}{2} \|\Delta \hat{\Psi}\|^2 + \omega_r \chi_n \frac{1}{2} \|\nabla \hat{\Psi}\|^2 &= -\omega_r \eta_{\hat{\Psi}} + \omega_r \chi_n K_{\hat{\Psi}} \\ &= \left(-\omega_r \frac{\eta(\hat{\Psi})}{K(\hat{\Psi})} + \omega_r \chi_n \right) K(\hat{\Psi}) = \omega_r (-\chi_{\hat{\Psi}} + \chi_n) K(\hat{\Psi}) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que $\omega_r \neq 0$ y por lo tanto para un modo estable o inestable obtenemos finalmente

$$\chi_{\hat{\Psi}} = \frac{\eta(\hat{\Psi})}{K(\hat{\Psi})} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{n'=1}^N \chi_{n'}^2 \sum_{m=-n'}^{n'} |\hat{\Psi}_{n'}^m|^2}{\frac{1}{2} \sum_{n'=1}^N \chi_{n'} \sum_{m=-n'}^{n'} |\hat{\Psi}_{n'}^m|^2} = \chi_n,$$

lo cual es una condición necesaria para inestabilidad de modos normales de una onda RH. Para un flujo PL se llega a la misma condición necesaria.

A pesar de las condiciones de inestabilidad de modos normales, la inestabilidad para los flujos polinomios de Legendre $aP_n^0(\mu)$, $n \geq 3$, todavía no se comprende totalmente. En este trabajo realizamos experimentos numéricos con $n = 1, \dots, 7$.

Proposición 6. (Skiba y Strelkov, 2000). Sea $\tilde{\Psi}$ una onda Wu-Verkley (WV) o un modón (monopolar, dipolar, tripolar y cuádrupolar de Neven 1993). Entonces el número espectral de Fjortoft de la amplitud del modo $\hat{\Psi}$ (5.13) es inestable o amortiguado si satisface la condición

$$\chi_{\Psi} = [\chi_{\alpha}^{-1}(1 - \delta) + \chi_{\sigma}^{-1}\delta]^{-1}, \quad (5.25)$$

donde $\delta = \frac{\eta^o}{\eta}$, $1 - \delta = \frac{\eta^i}{\eta}$, ($0 \leq \delta \leq 1$) son las fracciones de la enstrofia concentrada en las regiones S_o y S_i ; α y σ son los grados de los armónicos esféricos representando la $\tilde{\Psi}$ en la región interna y en la región externa respectivamente.

Dem. Sea una solución generalizada básica estacionaria (onda WV o modón) de la ecuación de vorticidad sobre la esfera:

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = \begin{cases} X_o(\lambda, \mu) - \omega_o\mu + D_o & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ X_i(\lambda, \mu) - \omega_i\mu + D_i & \text{en } \varphi_i(S_i), \end{cases} \quad (5.26)$$

donde X_i y X_o son eigenfunciones del operador Laplace sobre la esfera, tal que $\Delta X_i = -\chi_{\alpha}X_i$ y $\Delta X_o = -\chi_{\sigma}X_o$. En la región interna del modón $\varphi_{\kappa}(S_i) = \{(\lambda', \mu') : \mu' > \mu_a\}$ y en la región externa del modón $\varphi_{\kappa}(S_o) = \{(\lambda', \mu') : \mu' < \mu_a\}$, $0 < \mu_a < 1$. Aquí $\omega_o = 2/(\chi_{\sigma} - 2)$; $\omega_i = 2/(\chi_{\alpha} - 2)$; también la vorticidad absoluta

$$\Delta \tilde{\Psi}(\lambda, \mu) + 2\mu = \begin{cases} -\chi_{\sigma}(\tilde{\Psi} - D_o) & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ -\chi_{\alpha}(\tilde{\Psi} - D_i) & \text{en } \varphi_i(S_i). \end{cases} \quad (5.27)$$

Entonces la EVB linealizada (5.22) se cumple

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi') + J(\Psi', \Delta \tilde{\Psi} + 2\mu) = \begin{cases} 0 & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ 0 & \text{en } \varphi_i(S_i), \end{cases}$$

y sea

$$J(\Psi', \Delta \tilde{\Psi} + 2\mu) = \begin{cases} -\chi_{\sigma}J(\Psi', \tilde{\Psi}) \\ -\chi_{\alpha}J(\Psi', \tilde{\Psi}) \end{cases} = -q(\chi)J(\Psi', \tilde{\Psi}),$$

donde

$$q(\chi) = \begin{cases} \chi_{\sigma} & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ \chi_{\alpha} & \text{en } \varphi_i(S_i). \end{cases}$$

Entonces la EVB linealizada se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi') + q(\chi)J(\tilde{\Psi}, \Psi') &= 0 \\ \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi' + q\Psi') &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (5.28) por $\Delta \Psi' + q\Psi'$ y tomando la parte real obtenemos

$$\text{Re} \left\langle \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t}, \Delta \Psi' + q\Psi' \right\rangle + \text{Re} \langle J(\tilde{\Psi}, \Delta \Psi' + q\Psi'), \Delta \Psi' + q\Psi' \rangle = 0.$$

Como $\text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_{\kappa}(S_i), \varphi_{\kappa}(S_o)} J(\tilde{\Psi}, g)g^* ds = 0$, entonces

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \Delta \Psi'_t (\Delta \Psi' + \chi_\alpha \Psi')^* ds = 0 \rightarrow \langle \Delta \Psi'_t, \Delta \Psi' \rangle + \operatorname{Re} \chi_\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \Delta \Psi'_t \Psi' ds = 0,$$

y

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_o)} \Delta \Psi'_t (\Delta \Psi' + \chi_\sigma \Psi')^* ds = 0 \rightarrow \langle \Delta \Psi'_t, \Delta \Psi' \rangle + \operatorname{Re} \chi_\sigma \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_o)} \Delta \Psi'_t \Psi' ds = 0.$$

Ahora para la región interna tenemos que

$$\eta_t^i = -\operatorname{Re} \chi_\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \Delta \Psi'_t \cdot \Psi'^* ds \quad (5.29)$$

ya que $\eta_i = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_i)} |\Delta \Psi'|^2 ds$ y similarmente para la región externa

$$\eta_t^o = -\operatorname{Re} \chi_\sigma \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_\kappa(S_o)} \Delta \Psi'_t \cdot \Psi'^* ds \quad (5.30)$$

Sumando (5.29) y (5.30) obtenemos

$$\chi_\alpha^{-1} \eta_t^i + \chi_\sigma^{-1} \eta_t^o + \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \Delta \Psi'_t \cdot \Psi'^* ds = 0$$

del cual nos da

$$\frac{\partial}{\partial t} [\chi_\alpha^{-1} \eta^i + \chi_\sigma^{-1} \eta^o - K] = 0. \quad (5.31)$$

Ahora usando $\delta = \frac{\eta^o}{\eta}$, $1-\delta = \frac{\eta^i}{\eta}$, $\chi_F = \chi_{\widehat{\Psi}} = \frac{\eta(\widehat{\Psi})}{K(\widehat{\Psi})}$, entonces $\eta^i = (1-\delta)\chi_F K$ y $\eta^o = \delta\chi_F K$. Así que la expresión (5.31) queda $\frac{\partial}{\partial t} [\chi_\alpha^{-1}(1-\delta) + \chi_\sigma^{-1}\delta]\chi_F K - K] = 0$, de la cual, finalmente obtenemos el resultado esperado:

$$\chi_{\widehat{\Psi}} = [\chi_\alpha^{-1}(1-\delta) + \chi_\sigma^{-1}\delta]^{-1}.$$

Como un caso especial de la proposición anterior, para el caso de una onda Wu-Verkley zonal o modón zonal ésta se reduce al :

Corolario. Sea $\widetilde{\Psi}$ un flujo básico Wu-Verkley zonal de un modón monopolar zonal o dipolar de Verkley (1990), con vorticidad absoluta uniforme en la región interna $\varphi_i(S_i)$. Entonces la amplitud $\widehat{\Psi}$ de cada modo inestable o amortiguado (5.13) necesita satisfacer la condición

$$\chi_{\widehat{\Psi}} = \sigma(\sigma + 1) \quad (5.32)$$

donde σ es el grado del modón zonal en la región externa. Por otro lado la vorticidad de cada modo inestable necesita ser cero en la región S_i .

Proposición 7. Sea $\tilde{\Psi}$ un flujo básico, el cual es una solución exacta de la EVB. Entonces la evolución de la energía cinética de perturbaciones $K(\Psi') = \frac{1}{2}\|\nabla\Psi'\|^2$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & -\frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu} \tilde{u}(\mu) \cdot (u'v') ds - \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \tilde{u} \cdot (u'v') ds \quad (5.33) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} v' \frac{d}{d\mu} (\tilde{u} \cdot u') ds + \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \tilde{v} \cdot u' \frac{\partial v'}{\partial \lambda} ds - \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \sqrt{1-\mu^2} \tilde{v} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial \mu} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \mu \tilde{v} \cdot u'^2 ds + \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \frac{\tilde{u} \cdot v'}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial \lambda} ds \end{aligned}$$

Dem. Al considerar un producto escalar con respecto a la Ψ' y usar las relaciones $\langle J(\psi, f), F(\psi) \rangle = 0$, $\langle J(\psi, \mu), \Delta^n \psi \rangle = 0$, y $\langle J(\psi, f), h \rangle = -\langle J(f, h), \psi \rangle = -\langle J(\psi, h), f \rangle$ a la ecuación (5.22) obtenemos:

$$\frac{dK}{dt} = -\langle J(\tilde{\Psi}, \Delta\Psi'), \Psi' \rangle = -\langle J(\tilde{\Psi}, \Psi'), \Delta\Psi' \rangle$$

y usando las relaciones entre la función de corriente, y las componentes del viento

$$\tilde{u} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mu}, \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \lambda}, u' = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial \Psi'}{\partial \mu}, v' = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda}$$

y la vorticidad relativa en términos del viento $\Delta\Psi' = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial v'}{\partial \lambda} - \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial u'}{\partial \mu} + \frac{\mu u'}{\sqrt{1-\mu^2}}$ obtenemos el resultado.

La ecuación (5.33) indica que para perturbaciones alargadas zonalmente ($u'^2 > v'^2$) en las regiones de difluencia ($\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} < 0$) se extrae energía del flujo básico. Para perturbaciones alargadas meridionalmente ($u'^2 < v'^2$) y en las regiones de confluencia ($\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} > 0$) también se extrae energía del flujo básico.

Como un caso particular del resultado anterior para flujos zonales obtenemos el

Corolario (Pérez y Skiba, 2001). Sea $\tilde{\Psi}$ un flujo básico zonal, el cual es una solución exacta de la EVB. Entonces la evolución de la energía cinética de perturbaciones $K(\Psi') = \frac{1}{2}\|\nabla\Psi'\|^2$ para este flujo zonal satisface

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu} \tilde{u}(\mu) \cdot (u'v') ds - \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \tilde{u} \cdot (u'v') ds \quad (5.34)$$

el cual describe la evolución de la energía total $K(\Psi')$ de una perturbación infinitesimal $\Psi'(\lambda, \mu, t)$ a un flujo zonal $\tilde{\Psi}(\mu)$ sobre la esfera S^2 .

Esta ecuación es útil en el estudio de la estructura espacial de perturbaciones inestables locales sobre la esfera. Usualmente, perturbaciones importantes localizadas están en las regiones relacionadas con patrones que distinguen el flujo básico. Parecido a la ecuación de energía de la perturbación sobre el plano - β (Pedlosky, 1987), su análogo esférico (5.34) tiene una integral más, que contiene el producto de la velocidad básica

\tilde{u} con $u'v'$. Mientras que la primera integral, domina principalmente, en la lateral de las corrientes de chorro básico localizado en los trópicos y en latitudes medias (donde tanto $\frac{d}{d\mu}\tilde{u}(\mu)$ como $\sqrt{1-\mu^2}$ son grandes), la segunda integral puede ser significativa, en las partes centrales de las corrientes de chorro intenso (zonas donde la velocidad \tilde{u} es grande), y especialmente cuando tales jets se localizan en las regiones polares (donde $\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$ es grande).

En la ecuación (5.34), el signo de $\frac{d}{dt}K$ depende del signo de los productos $\frac{d}{d\mu}\tilde{u}(\mu) \cdot (u'v')$ y $\tilde{u} \cdot (u'v')$ en varias regiones sobre la esfera. En el caso cuando la primera integral es dominante, se puede afirmar que el crecimiento (o decrecimiento) de la energía de la perturbación, toma lugar en las regiones donde la inclinación de los contornos de función de corriente de la perturbación Ψ' es opuesta a (o coincide con) a la inclinación del perfil de la velocidad básica $\tilde{u}(\mu)$, es decir, en las regiones donde el producto $\frac{d}{d\mu}\tilde{u}(\mu) \cdot u'v'$ es positivo (negativo) (Pedlosky, 1987).

5.4 EXPERIMENTOS NUMERICOS

Probaremos el algoritmo de estabilidad de modos normales con varios tipos de flujos zonales : flujos polinomiales de Legendre (LP), ondas Rossby-Haurwitz zonales, modos monopolares zonales, y flujo zonal observado. Después se probará el algoritmo con ondas más complicadas, tales como las ondas Rossby-Haurwitz, modones de Verkley y soluciones Wu-Verkley que son soluciones exactas de la EVB

5.4.1 Estabilidad lineal de flujo zonal

En este caso estamos analizando flujos de la forma $\Psi(\lambda, \mu, t) = \tilde{\Psi}(\mu) + \Psi'(\lambda, \mu, t)$ donde $\tilde{\Psi}(\mu)$ es la función de corriente básica. Notemos que para un flujo zonal, la estructura del modo (5.13) es

$$\Psi'(\lambda, \mu, t) = \hat{\Psi}(\mu)e^{im\lambda}e^{\omega t} = \text{Re}\hat{\Psi}(\mu)e^{im(\lambda-ct)} \quad (5.35)$$

aquí $c = c_r + i c_i$ es la velocidad de fase compleja, $c_r = -\frac{\omega_r}{m}$, $c_i = \frac{\omega_i}{m}$, la parte real ω_r determina la razón de crecimiento o decrecimiento exponencial en el umbral dimensional $\tau_e = \frac{1}{2\pi|\omega_r|}$ (en días) y ω_i determina la frecuencia de oscilación con periodo dimensional $T = \frac{1}{|\omega_i|}$ (en días). Aquí ω_r , y ω_i son sin dimensiones, siendo $\Omega = \frac{\pi}{43200}$ s y $t = \Omega t^* = \frac{2\pi}{d^2 a} t$, indicando el t^* con dimensiones de s.

Para comprobar los resultados numéricos del algoritmo de estabilidad estos se comparan con los siguientes hechos teóricos:

- a) los eigenvalores o valores característicos deben aparecer en grupos de 4 eigenvalores localizados simétricamente alrededor del origen del plano complejo (Arnold, 1965);
- b) cualquier flujo PL de grado uno o dos, debe ser estable y tener sólo modos neutrales (Proposición 2);
- c) para un flujo básico PL de grado n , el número de onda zonal m de cada modo inestable debe pertenecer al intervalo $0 < |m| < n$ (Proposición 4);

d) cualquier flujo PL de grado n y también alguna onda RH zonal puede tener modos inestables, sólo si se cumple la condición de Rayleigh-Kuo (Proposición 1);

e) si el grado n de algún flujo PL es impar, entonces todos los modos se dividen en dos grupos: los modos simétricos y los antisimétricos alrededor del ecuador (Skiba, 1989; Skiba and Adem, 1998);

f) el número espectral de la amplitud de cada modo inestable necesita ser igual a un número específico (Proposición 5 y 6);

g) la amplitud de cada modo inestable necesita ser ortogonal al flujo básico en el producto interno de la energía (Skiba, 2000);

h) la razón de crecimiento del modo más inestable es acotado superiormente por una estimación teórica (Skiba, 2000);

i) para el modon de Verkley (1990), la vorticidad de cada modo inestable necesita ser cero en la región interna del modón $\varphi_i(S_i)$;

j) la generación y disipación de energía de la perturbación puede explicarse con ayuda de la fórmula (5.34).

Los requisitos a) y h) se han cumplido en todos los experimentos. también g) indica que la amplitud de cada modo inestable necesita ser ortogonal al flujo básico en el producto interno de la energía: $\langle \tilde{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} \rangle = 0$. Esta propiedad siempre se cumplió para flujos zonales, ya que todos los modos calculados tiene la forma (5.3):

$$\Psi'(\lambda, \mu, t) = \hat{\Psi}(\mu) e^{im\lambda} e^{\omega t} = \text{Re} \hat{\Psi}(\mu) e^{im(\lambda - ct)} \quad (5.36)$$

Es decir que tiene una estructura armónica en la dirección λ :

$$\langle \tilde{\Psi}, \Delta \hat{\Psi} \rangle = \langle \Delta \tilde{\Psi}, \hat{\Psi} \rangle = \int_{-1}^1 \Delta \tilde{\Psi}(\mu) \hat{\Psi}^*(\mu) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\lambda} d\lambda \right\} d\mu = 0$$

a) Flujo polinomio de Legendre.

Este flujo (5.16) está descrito por el único Polinomio de Legendre de grado $n \geq 1$ como

$$\tilde{\Psi}(\mu) = a P_n^0(\mu) \quad (5.37)$$

donde a es la amplitud. La matriz estabilidad L para estos flujos (ver ecuación 5.12) fue analíticamente analizada por Skiba y Adem (1988).

1. Sea $n = 1$. En este caso la matriz estabilidad L es la diagonal, con elementos imaginarios puros $L_{\alpha\alpha}$. Así que, los valores característicos coinciden con los elementos diagonales y por lo tanto $\omega_r = 0$ para cualquier eigenvalor. Por lo tanto todos los modos son neutrales y para cualquier valor de la amplitud a del flujo PL. La amplitud de cada modo coincide con el correspondiente armónico esférico $Y_\alpha(\lambda, \mu)$, y por lo tanto es simétrico o antisimétrico alrededor del ecuador, dependiendo de que $n - m$ sea par o impar.

2. Sea ahora $n = 2$. Entonces la matriz estabilidad L es la tridiagonal, y los cálculos obtuvimos que $\omega_r = 0$, para todos los eigenvalores, o sea que, todos los modos son neutrales. Por lo tanto, cualquier flujo PL de grado uno o dos es exponencialmente estable, lo cual está de acuerdo con la proposición 3.

3. Sea $n = 3$ y $a = 0.08$. Aquí n es impar, y está de acuerdo con la condición e), por lo tanto la amplitud de todos los modos, puede ser de dos tipos: simétrica o antisimétrica alrededor del ecuador $\mu = 0$. El modo más inestable (5.13) es simétrica alrededor del ecuador, teniendo $\omega_r = 0.2073$ y como número de onda zonal $m = 2$, y el número espectral $\chi_{\hat{\psi}}$ de su amplitud es igual a 11.999 (el correspondiente número dado según la proposición 5 que es $\chi_3 = 12$). El segundo modo inestable tiene el valor $\omega_r = 0.1576$ y como número de onda zonal $m = 1$, ésta es antisimétrica alrededor del ecuador, y el número espectral $\chi_{\hat{\psi}}$ de su amplitud también como 11.999, ver tabla 1. Los números espectral $\chi_{\hat{\psi}}$ numéricos para cada modo normal deben de ser igual o aproximarse al valor teórico $\chi_3 = 12 = 3(3+1) = n(n+1)$ ya que cada modo normal tiene el mismo flujo básico $\tilde{\Psi}(\mu) = aP_n^0(\mu)$. El perfil de la velocidad del flujo básico \tilde{u} se demuestra en la figura 5.1a, mientras que las partes reales de la amplitud $\hat{\Psi}_r$ del primero y segundo modos más inestables se presentan en la Figura 5.1.b y la Figura 5.1.c, respectivamente. Todos los gráficos de flujos básicos $\tilde{\Psi}$ y la parte real de la amplitud $\hat{\Psi}_r$ que se presentan en este capítulo están dadas sin dimensiones. Por conveniencia y con el propósito de explicar los resultados se usa la fórmula (5.34). Las figuras del campo de función de corriente de la amplitud de la perturbación (fig. 5.1b-c) se marcaron con los símbolos '+ + +' y '...' en las posiciones de los jets del flujo básico que son las crestas y los valles del campo de velocidades \tilde{u} , respectivamente de fig. 5.1a. En efecto, el perfil de la componente \tilde{u} tiene la misma inclinación dentro de cada región (en el canal) entre las dos líneas vecinas marcadas con símbolos diferentes, y esta inclinación se cambia al pasar de una región a otra. Puede notarse que en todos los modos, con valores de la amplitud distinta de cero, están confinadas en la misma banda latitudinal (Tung, 1981). Un análisis de los campos demuestra que ambas integrales de la fórmula (5.34) contribuyen a la inestabilidad para el modo más inestable (fig.5.1a), mientras que la primera integral es la que domina en generar la inestabilidad en el segundo modo (fig.5.1b). Puede notarse también que los valores de $u'v'$ son más pequeños en el segundo caso. En los experimentos que se realizaron, la magnitud de $|\omega_r|$ aumenta con el aumento de la amplitud del flujo básico a . Este hecho está de acuerdo con el requerimiento teórico h. Usamos este requerimiento para controlar la razón de crecimiento de los modos inestables. Los parámetros principales de los dos modos más inestables (con número de onda zonal m , la parte real ω_r y la parte imaginaria ω_i del eigenvalor, número espectral $\chi_{\hat{\psi}}$, e-umbral temporal τ_e , y el periodo T) se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. *Los modos más inestables del flujo PL (5.37), $n = 3$, $a = 0.08$*

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.2073	-0.7334	11.9999	0.76	1.36
2	1	0.1576	0.0670	11.9999	1.00	14.90

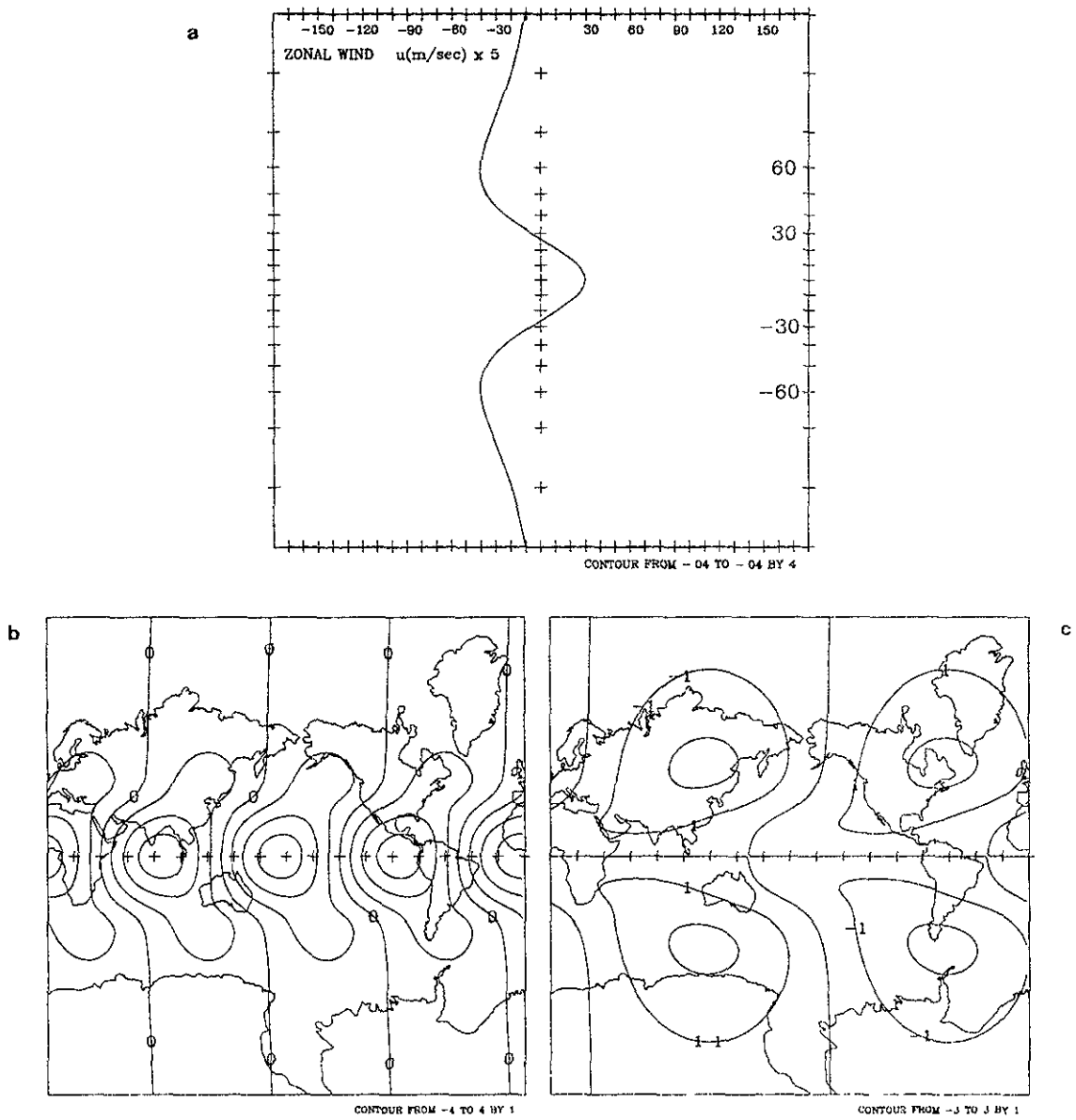


Fig. 5.1 El perfil de velocidad $\tilde{u}(\mu)$ de el flujo polinomio de Legendre (5.37) con $n=3$, $a=0.08$ (a), y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_I(\lambda, \mu)$ de los dos modos más inestables correspondiente a $\omega_I=0.2073$ (b) y $\omega_I=0.1576$ (c).

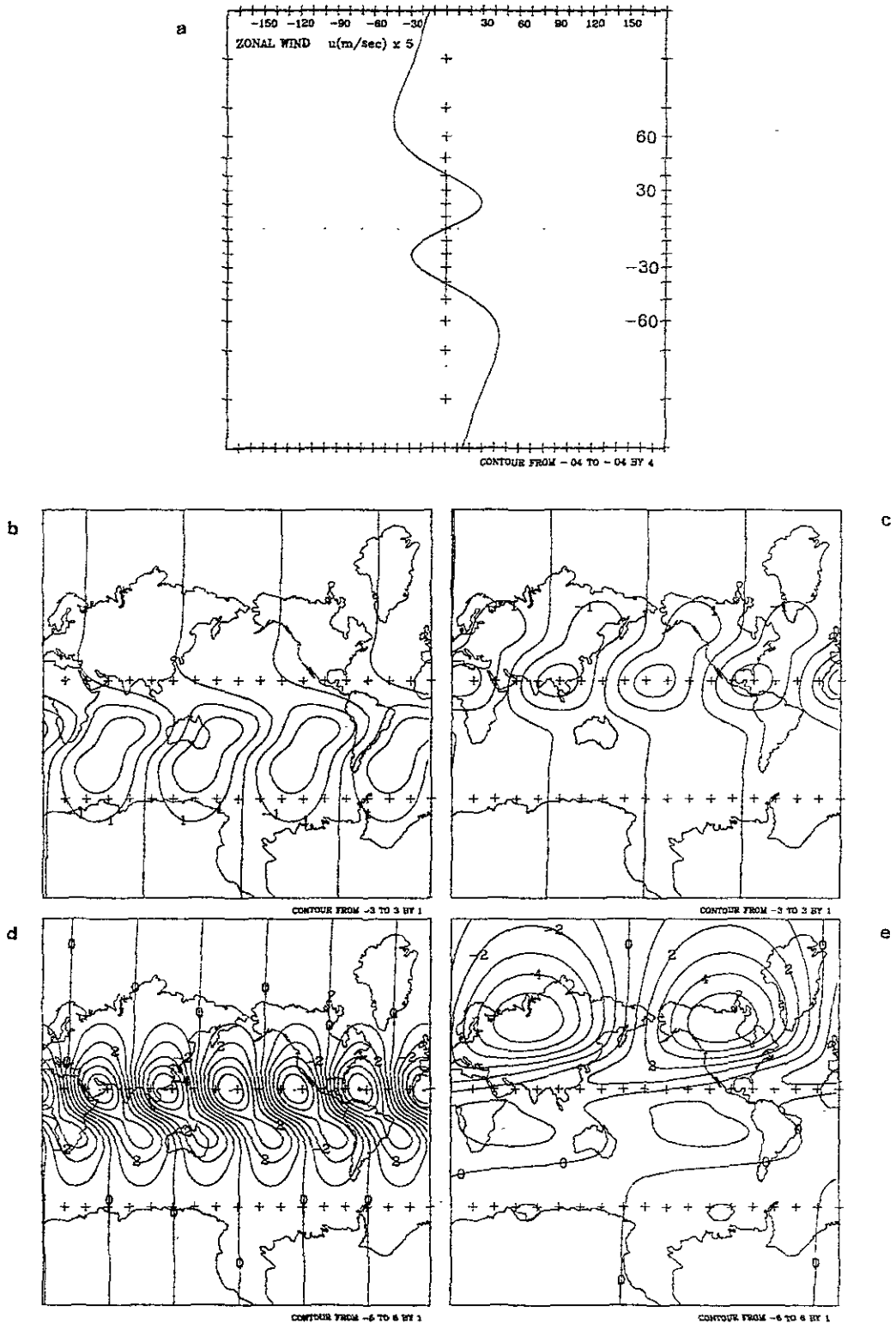


Fig. 5.2. El perfil de velocidad $\tilde{u}(\mu)$ de el flujo polinomio de Legendre (5.37) con $n = 4$, $a = 0.06$ (a), y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de los cuatro modos más inestables correspondiente a $\omega_r = 0.2604$ (b), $\omega_r = 0.2373$ (c), $\omega_r = 0.1924$ (d) y $\omega_r = 0.1485$ (e).

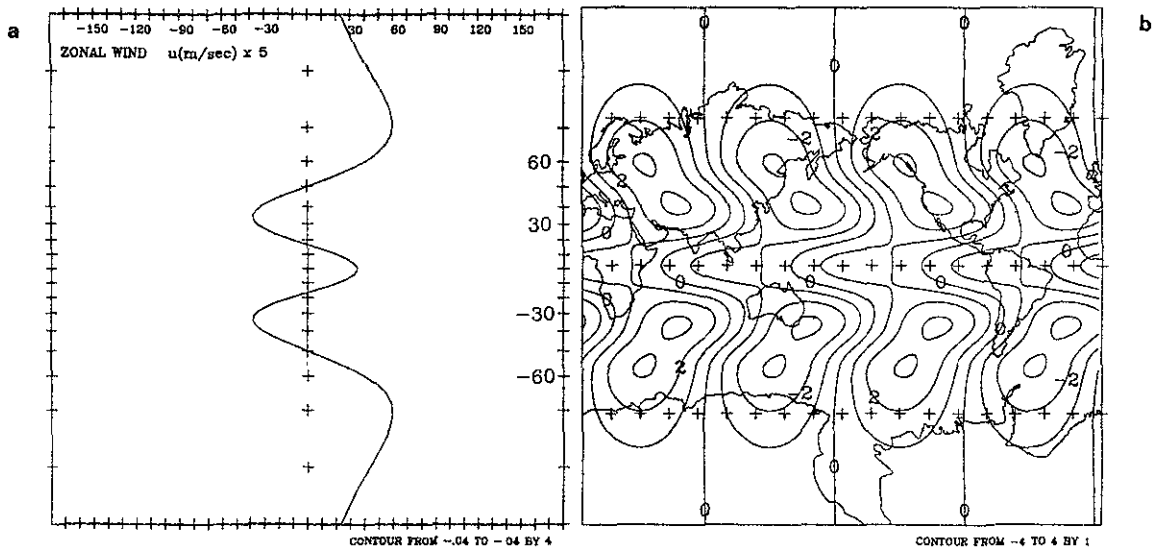


Fig. 5.3. El perfil de velocidad $\tilde{u}(u)$ del flujo polinomio de Legendre (5.37) con $n = 5$, $a = -0.06$ (a), y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_r(\lambda\mu)$ del modo más inestable correspondiente a $\omega_r = 0.4922$ (b).

4. Sea $n = 4$ y $a = 0.06$. El perfil de la velocidad del flujo básico \tilde{u} se demuestra en la figura 5.2a, mientras que los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los cuatro modos más inestables se presentan en las figuras 5.2b-e. Como n es par, la amplitud de todos los modos son asimétricos alrededor del ecuador, en este caso las perturbaciones se localizan básicamente en los dos hemisferios. El número espectral $\chi_{\widehat{\Psi}}$ de su amplitud casi coincide con el valor teórico $\chi_4 = 20$ indicado por la proposición 5. Un análisis de los campos, demuestra que ambas integrales de la fórmula (5.34) contribuyen a la inestabilidad de los primeros tres modos más inestables (Figuras 5.2b-d), para el cuarto modo inestable, la contribución de la primera integral en generar la inestabilidad es más débil (Figura 5.2e). Los parámetros de estos modos se dan en la tabla 2. Es de notarse que los requisitos c), f) - h) se cumplieron también.

Tabla 2. Los cuatro modos más inestables del flujo PL (5.13), $n = 4$, $a = 0.06$.

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\widehat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.2604	-0.1099	19.9999	0.61	9.09
2	2	0.2373	0.6876	19.9999	0.67	1.45
3	3	0.1924	0.4080	19.9999	0.82	2.45
4	1	0.1485	-0.0578	20.0000	1.07	17.28

5. Sea ahora $n = 5$ y $a = -0.06$. El perfil de la velocidad de el flujo básico \tilde{u} se demuestra en la figura 5.3a, y los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ del modo más inestable se presenta en la figura 5.3b. El número de onda zonal del modo es $m = 2$, y la amplitud del modo es simétrica alrededor del ecuador (n es par). Las perturbaciones se localizan en la vecindad de las dos corrientes de chorro y las dos integrales de la fórmula (5.34) contribuyen a la inestabilidad, dominando más el primero. Los parámetros principales de los siete modos más inestables se dan en la tabla 3. Como es de observarse los requerimientos c), f) - h) quedan satisfechos y el número de onda zonal dominante fue $m = 2$ y $m = 3$.

Tabla 3. Los Siete modos más inestables del flujo PL (5.37), $n = 5$, $a = -0.06$

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\widehat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.4922	0.0592	29.9999	0.32	16.87
2	2	0.4688	0.1809	30.0000	0.33	5.52
3	4	0.3630	0.4042	29.9999	0.43	2.47
4	3	0.3222	0.0110	30.0000	0.49	90.82
5	3	0.2745	0.3886	29.9999	0.57	2.57
6	2	0.1662	-0.6740	29.9999	0.95	1.48
7	1	0.1421	0.1088	29.9999	1.11	9.18

6. Consideremos el caso de $n = 6$ y $a = 0.03$. Los parámetros principales de los siete modos más inestables se dan en la tabla 4. Las perturbaciones inestables se localizan en el hemisferio norte (modos 2, 3 y 4), en el hemisferio sur (los modos 1, 6 y 7), y en los trópicos (el modo 5). Como se ve en la tabla 4 los requerimientos c), f) - h) quedan también aclarados.

Tabla 4. Los siete modos más inestables del flujo PL (5.37), $n = 6$, $a = 0.03$

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.3471	0.1376	41.9999	0.45	7.26
2	2	0.3435	0.5340	41.9999	0.46	1.87
3	3	0.2700	0.3556	41.9999	0.58	2.81
4	4	0.2463	0.2251	42.0000	0.64	4.44
5	5	0.2137	-0.3101	42.0000	0.74	3.22
6	4	0.1994	0.3646	42.0000	0.79	2.74
7	3	0.1798	0.0786	42.0000	0.88	12.71

7. Sea $n = 7$ y $a = 0.01$. Los parámetros principales de los doce modos más inestables para este caso, se dan en la tabla 5. La mayor parte de los modos (modos 1, 2, 6, 7 y 8-12) son simétricos alrededor del ecuador (requerimiento e) y se localiza en latitudes medias. También las condiciones c), f) - h) quedan cumplidos.

Tabla 5. Los doce modos más inestables del flujo PL (5.37), $n = 7$, $a = 0.01$

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.1245	-0.3719	56.0000	1.27	2.68
2	2	0.1181	0.4005	56.0000	1.34	2.49
3	4	0.1153	0.1564	55.9999	1.37	6.39
4	5	0.1115	-0.2715	55.9999	1.42	3.68
5	6	0.1112	-0.2732	56.0000	1.43	3.65
6	4	0.1027	0.1891	55.9999	1.54	5.28
7	3	0.0828	0.3586	55.9999	1.91	2.78
8	5	0.0786	-0.1774	56.0000	2.02	5.63
9	1	0.0755	0.0630	56.0000	2.10	15.86
10	3	0.0739	0.0983	56.0000	2.15	10.16
11	1	0.0727	0.0635	56.0000	2.18	15.73
12	2	0.0645	0.0271	56.0000	2.46	36.81

b) Ondas zonales de Rossby-Haurwitz (5.14).

Estas ondas básicas son de la forma

$$\tilde{\Psi}(\mu) = -\frac{2}{(\chi_n - 2)}\mu + aP_n^0(\mu) \quad (5.38)$$

donde $\chi_n = n(n + 1)$, $n > 1$ y $a = 0$ es la amplitud. Esta es un caso (zonal) particular de la onda RH estacionaria

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\frac{2}{(\chi_n - 2)}\mu + \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu)$$

el cual es una solución exacta de la EVB (5.5).

1. Consideremos al caso de $n = 5$ y $a = 0.0052$. El perfil de velocidad del flujo básico \tilde{u} es simétrico alrededor del ecuador (figura 5.4a) y tiene un jet en latitudes medias. Tenemos cuatro modos inestables diferentes, siendo el primero casi estacionario (ver

tabla 6). El número espectral $\chi_{\widehat{\Psi}}$ de la amplitud de estos modos casi coincide con la estimación teórica $\chi_5 = 30$ indicada por la proposición 5. La parte real del modo (5.35) puede escribirse también como

$$\Psi'_r(\lambda, \mu, t) = \left| \widehat{\Psi}(\mu) \right| e^{\omega_r t} \cos m \left(\lambda + \frac{\theta(\mu)}{m} + \frac{\omega_i}{m} t \right) \quad (5.39)$$

o bien

$$\Psi'_r(\lambda, \mu, t) = e^{\omega_r t} \left[\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu) \cos \omega_i t - \widehat{\Psi}_i(\lambda, \mu) \sin \omega_i t \right]$$

donde $\frac{\omega_r}{m}$ es velocidad de fase, y la fase inicial $\frac{\theta(\mu)}{m}$ depende de μ . Para $\frac{\omega_r}{m}$ positivo (o negativo) el modo se mueve al oeste (al este). Los contornos de la parte real (5.39) del modo más inestable se da en la figura 5.4b-d, en los instantes $t = 0$, $t = T/8$ y $t = T/4$, respectivamente. El modo se mueve muy lentamente hacia el oeste. La variación espacial del campo (5.39) con el tiempo se debe a la dependencia de la fase inicial $\frac{\theta(\mu)}{m}$ con el μ . La amplitud de modo más inestable es antisimétrica alrededor del ecuador (n es impar). Un análisis demuestra que ambas intergrales de la fórmula (5.34) contribuyen a la inestabilidad. Así que los casos f) - h) quedan satisfechos.

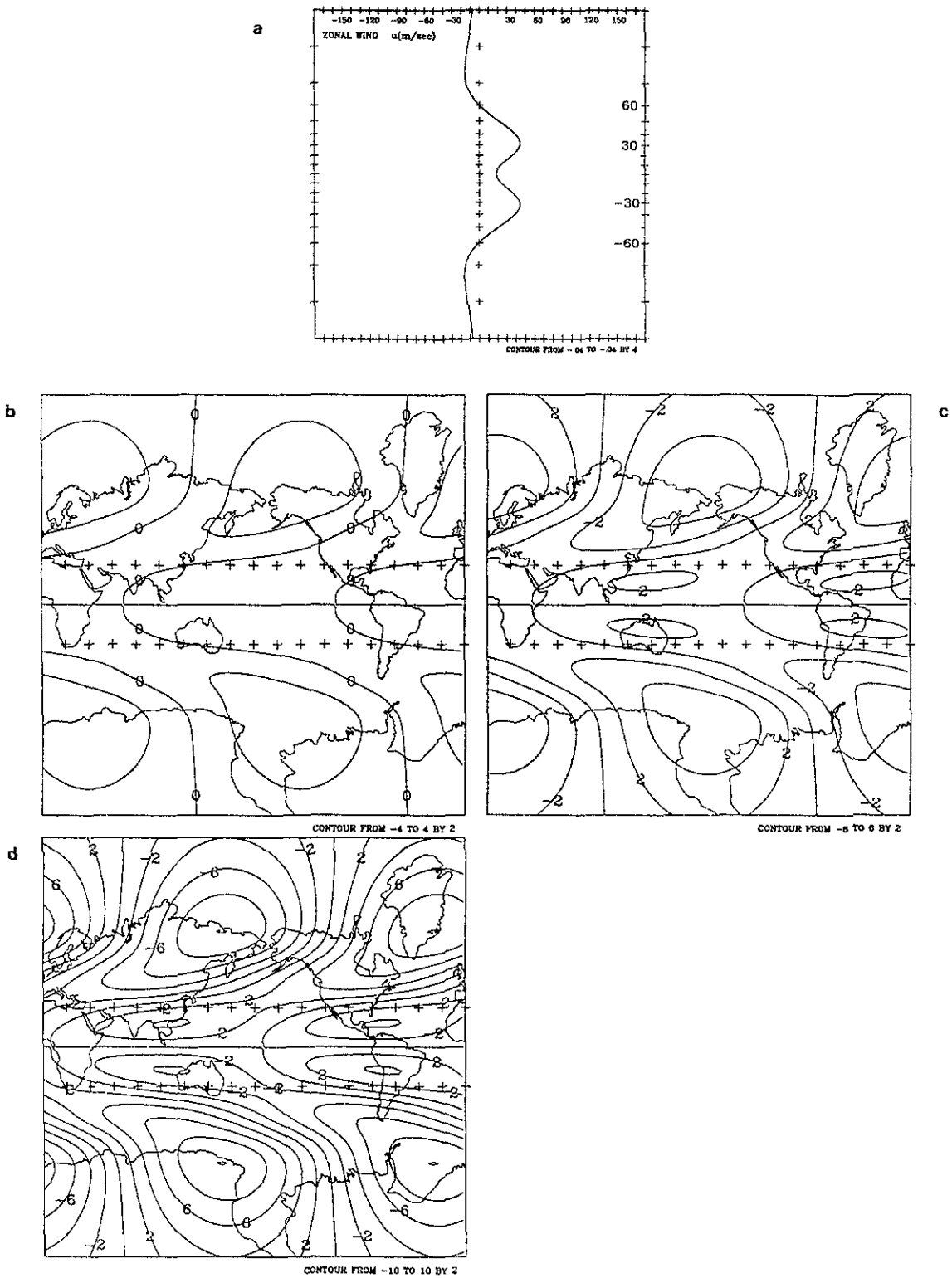


Fig. 5.4. Perfil de velocidad $\bar{u}(\mu)$ de la onda Rossby-Haurwitz zonal (5.38) con $n = 5$, $a = -0.0052$ (a), y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_R(\lambda, \mu, t)$ del modo más inestable ($\omega_r = -0.0268$) en $t=0$ (b), $t=T/8$ (c) y $t=T/4$ (d).

Tabla 6. Los cuatro modos más inestables del flujo zonal RH (5.38), $n = 5$, $a = 0.0052$

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	1	0.0268	0.0064	30.0000	5.92	155.15
2	1	0.0151	0.0287	30.0000	10.52	34.74
3	3	0.0142	-0.1255	29.9999	11.16	7.97
4	2	0.0041	-0.2510	30.0000	38.20	3.98

2. Sea $n = 6$ y $a = 0.002$. Tenemos tres modos inestables diferentes, siendo los primeros dos casi estacionarios (ver tabla 7). El número espectral $\chi_{\hat{\Psi}}$ de la amplitud de estos modos coincide con el valor teórico $\chi_6 = 42$ indicado por la proposición 5.

Tabla 7. Los tres modos más inestables del flujo zonal RH (5.38), $n = 6$, $a = 0.002$.

Modeo	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	1	0.0103	0.0128	42.000	15.31	77.68
2	2	0.0085	0.0303	42.000	18.51	32.90
3	2	0.0014	0.1031	42.000	107.15	9.69

3. Sea $n = 7$ y $a = -0.004$. El perfil de velocidad del flujo básico \tilde{u} es simétrico alrededor del ecuador (figura 5.5a) y hay cuatro corrientes de chorro. Los parámetros principales de los ocho modos más inestables se dan en la tabla 8. Casi todos ellos son estacionarios. El número espectral $\chi_{\hat{\Psi}}$ de la amplitud de estos modos prácticamente coinciden con la estimación teórica $\chi_7 = 56$ indicada por la proposición 5. Los contornos de $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ para el modo más inestable correspondiente al $\omega_r = 0.0515$ se muestran en la figura 5b.

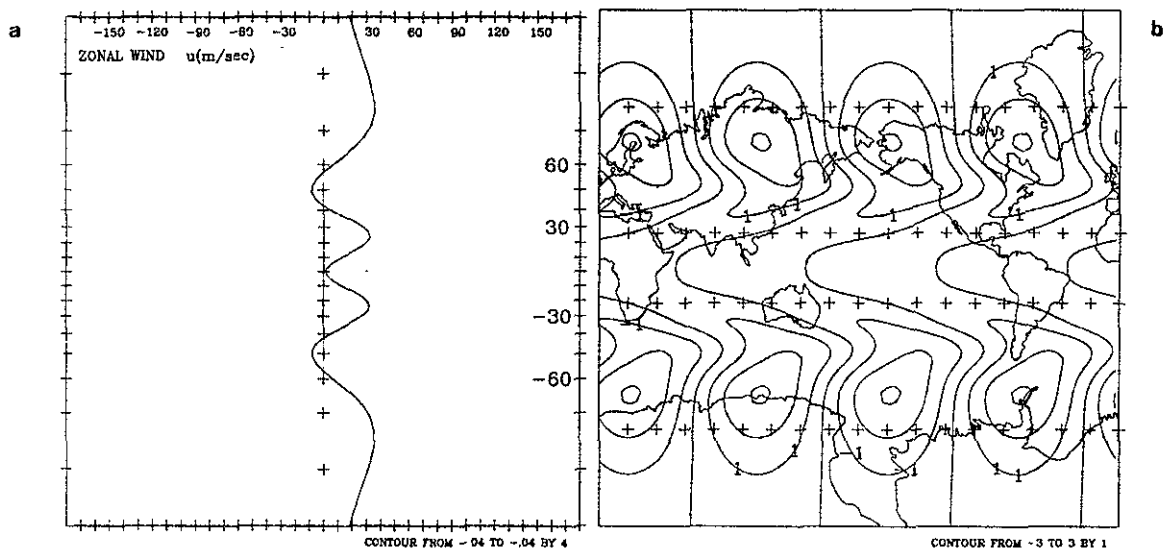


Fig. 5.5. El perfil de velocidad $\tilde{u}(\mu)$ de la onda Rossby-Haurwitz zonal (5.38) con $n=7$, $a=-0.004$ (a) y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_R(\lambda, \mu, t)$ del modo más inestable correspondiente a $\omega_R=0.0515$ (b).

Tabla 8. Los ocho modos más inestables del flujo zonal RH (5.38), $n = 7$, $a = -0.004$.

Modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	2	0.0515	0.0099	56.000	3.08	100.65
2	2	0.0501	-0.0067	56.000	3.17	148.80
3	3	0.0370	0.0044	56.000	4.29	223.45
4	3	0.0362	0.0035	56.000	4.39	279.75
5	4	0.0266	-0.0093	56.000	5.96	106.53
6	5	0.0157	-0.0554	56.000	10.12	18.03
7	1	0.0128	-0.0011	55.999	12.36	867.33
8	1	0.0081	0.0089	55.999	19.58	111.73

c) Flujo zonal en la forma de un modón monopolar (5.40).

Sea $\tilde{\Psi}(\mu)$ la función de corriente básica zonal para el modón monopolar caso especial de la ecuación (5.26) con vorticidad absoluta uniforme en la región interna:

$$\tilde{\Psi}(\mu) = \begin{cases} B_o S_o^\sigma(\theta) - \omega_o \mu + D_o & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ B_i T^0(\theta) - \omega_i \mu + D_i & \text{en } \varphi_i(S_i) \end{cases} \quad (5.40)$$

(Verkley, 1990). Este flujo zonal está definido de manera distinta sobre dos regiones de la esfera S^2 . En la región del modón interno $\varphi_i(S_i) = \{(\lambda, \mu) : \mu > \mu_a\}$ y en la región del modón externo $\varphi_i(S_o) = \{(\lambda, \mu) : \mu < \mu_a\}$, $0 < \mu_a < 1$. Aquí $\omega_o = 2/(\chi_\sigma - 2)$; $\omega_i = 2/(\chi_\alpha - 2)$; B_o , B_i , D_o y D_i son constantes; $\mu = \mu_a$ es la frontera entre las regiones S_i y S_o ; $S_o^\sigma(\theta) = P_\sigma^\sigma(-\cos\theta)$; θ es la colatitud; $T^0(\theta) = \ln \cos(\frac{\theta}{2})$.

El flujo zonal (5.40) tiene vorticidad absoluta uniforme en la región interna S_i (Verkley, 1990) el cual se localiza sobre el polo $N = N'$. Los parámetros principales del modón son $\sigma = 8.06$ y $\phi_a = 65.277$. El perfil de velocidad del modón \tilde{u} (Fig.5.6a) tiene tres corrientes de chorro sobre la región externa S_o del modón. El modo más inestable se obtuvo con tres distintas truncaciones: T_{21} , T_{31} y T_{42} . Los contornos de la parte real $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de este modo se presentan en las figuras 5.6b, 5.6c y 5.6d, respectivamente. Los parámetros básicos del modón se dan en la tabla 9. En la Fig. 5.6b-d, las perturbaciones se localizan en un cinturón latitudinal de la región S_o externa del modón, lo cual está de acuerdo con la proposición 6. En este cinturón, la inclinación del eje principal de los vórtices es opuesto al del perfil de velocidad del modón, este resultado está de acuerdo con la primera intergral de la fórmula (5.34). La segunda integral (5.34) contribuye menos al crecimiento de la energía que el primero, y principalmente en la vecindad de la corriente de chorro central que contiene perturbaciones importantes. En las regiones polares no hay perturbaciones, y por lo tanto no hay impacto en el comportamiento de la energía.

Puede notarse que todavía no hay una concordancia total en los resultados teóricos y numéricos con la truncación T_{42} . En la tabla 9 se demuestra una convergencia de los resultados numéricos conforme el número de truncación M y N de la serie de Fourier aumenta (5.8), esta convergencia es muy lenta. Por ejemplo para el modo más inestable puede verse que hay todavía una diferencia entre el valor teórico $\chi_\sigma = \sigma(\sigma + 1) = 73.02$ del número espectral $\chi_{\hat{\Psi}}$ según la proposición 6 (el corolario) y el valor numérico el cual

es igual a 80.72 en la resolución T_{21} , 70.56 en la resolución T_{31} , y 74.60 en la resolución T_{42} . Para el segundo modo más inestable el correspondiente valor numérico se acerca más al valor teórico que es igual a 78.81 en T_{21} , 73.95 en T_{31} , y 73.11 en T_{42} . Más sin embargo como se nota en la figura 5.6b-d, el modo más inestable es de la misma estructura en las dos resoluciones T_{21} y T_{42} , pero su estructura se cambia en la resolución T_{31} . Esta situación ocurre cuando el modón tiene pocos modos inestables (por lo menos dos) con parte real ω_r , aproximadamente iguales. Dikii, (1976) demostró que los modos más inestables de un flujo zonal siempre corresponden a los eigenvalores aislados. Por otro lado si la distancia entre dos eigenvalores aislados con partes reales máximos ω_r es muy pequeño, entonces se requiere una mayor resolución para aproximarse bien a un eigenvalor concreto y al correspondiente modo normal. Por lo tanto, el cambio de la estructura del modo más inestable se debe a una insuficiente resolución en los cálculos y errores de truncación muy grandes (Simmons *et al.* 1983, Skiba, 1998). A pesar de que el número espectral $\chi_{\hat{\psi}}$ para los primeros dos modos más inestables calculados convergen al valor teórico $\chi_{\sigma} = 73.02$, conforme los números de truncación M y N de la serie de Fourier (5.8) aumenta, la convergencia es lenta y por lo tanto, se requiere una mayor resolución para obtener resultados precisos. Este fenómeno se explica por el hecho de que la derivada μ del modón es discontinuo en la frontera $\mu = \mu_a$, que separa las regiones S_i y S_o sobre la esfera (Verkley, 1990; Neven, 1992), o sea que el modón no es tan suave como el flujo PL o la onda RH. Como un resultado, la serie de armónicos esféricos para el modón y su perturbación convergen más lentamente (en la norma Sobolev's) que los correspondientes a los flujos PL y ondas RH (Topuria, 1987; Skiba, 1989, 1994, 1997). Más sin embargo, debido al fenómeno de Gibbs (Davis, 1963), la convergencia de la serie de Fourier es más rápida dentro de las regiones S_i y S_o que en la vecindad de la frontera $\mu = \mu_a$, así que no importa qué tan grandes sean M y N , en algún punto de la esfera S^2 las sumas finitas (5.8) son muy cercanas a las mismas funciones $\tilde{\Psi}, \Psi'$ y ξ' , pero en otros puntos estas sumas difieren mucho de $\tilde{\Psi}, \Psi'$ y ξ' . Por lo tanto las truncaciones M y N mayores que 42, deben de usarse en (5.8) para reducir los errores numéricos. La importancia de usar grandes resoluciones para la solución del problema espectral (5.15) en teoría lo ha demostrado recientemente Skiba (1998) y numéricamente Neven (2001) que ha usado la resolución T_{341} y el método de potencia en el estudio de estabilidad de modos normales, de modones sobre la esfera.

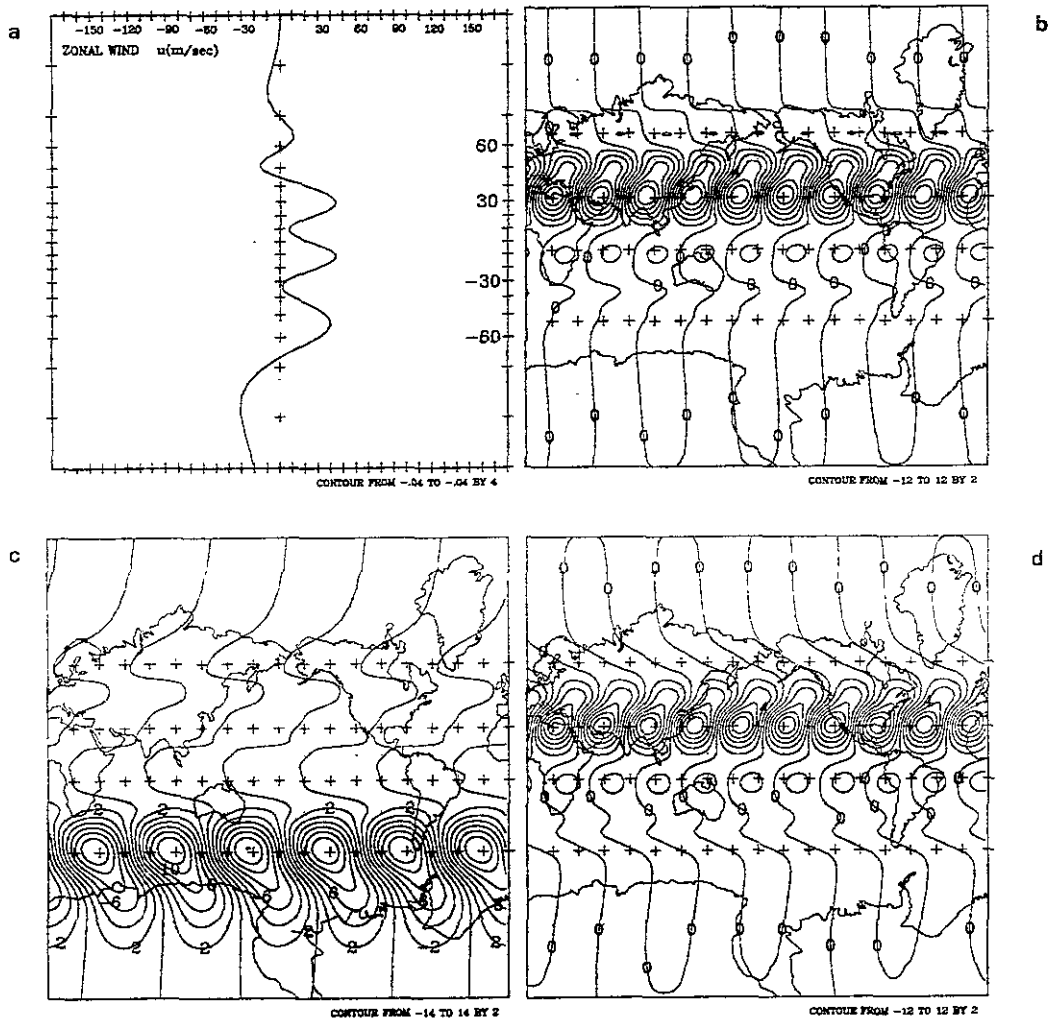


Fig.5.6. El perfil de velocidad $\tilde{u}(\mu)$ del modón monopolar (5.40) con $\sigma=8.06$ y $\phi_a=65.27^\circ$ (a), y contornos de la amplitud $\hat{\Psi}_T(\lambda, \mu)$ del modo más inestable en la truncación T_{21} (b), T_{31} (c) y T_{42} (d).

Tabla 9. Los modos más inestables del modón zonal uniforme (5.40) en T_{21} , T_{31} y T_{42} ,

$$\sigma = 8.06, \phi_a = 65.277.$$

Truncación	Modo	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
T_{21}	1	5	0.0524	0.0177	80.72	3.03	56.34
T_{31}	1	3	0.0627	0.0373	70.56	2.53	26.74
T_{42}	1	5	0.0569	0.0457	74.60	2.79	21.87

d) **Flujo zonal observado y flujo zonal como una combinación lineal de $b_j P_n^0(\mu)$.**

A pesar de que hemos considerado varios flujos zonales, estos todavía son muy idealizados. La corriente de chorro subtropical de HN en DEF es muy fuerte y de acuerdo a observaciones, ésta se evidencia en los niveles altos entre 200-300mb. En la Fig. 3.5a. se muestra un perfil de flujo zonal de enero en 200mb, donde observamos corrientes de chorro en ambos hemisferios y una región de los estes alrededor del ecuador. De los criterios de estabilidad expuestos, el que se aplica más directamente es la de Rayleigh-Kuo y el algoritmo numérico.

En este sentido se calculó la derivada $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mu}$ de la vorticidad absoluta $\tilde{\eta} = \Delta \tilde{\Psi} + 2\mu$ del flujo zonal observado, de polo a polo y se encontró que $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mu}$ cambia de signo en aproximadamente 140° de colatitud (fig. 5.7a). Lo cual de acuerdo con el criterio Rayleigh-Kuo hay modos normales inestables para este flujo, y al usar el algoritmo numérico de estabilidad, se obtuvieron los primeros dos modos inestables (tabla 10a) con número de onda zonal, $m = 5$ y $m = 7$ respectivamente (fig.5.7b-c). Estos se localizaron a un lado del Jet, lo cual está de acuerdo con la ecuación (5.34). Aproximadamente este flujo $\tilde{u}(\mu)$ zonal observado es simétrico con respecto al ecuador, en este sentido podemos concluir que cuando se consideran campos de viento promediados zonalmente, fue difícil encontrar grandes gradientes de vorticidad absoluta negativos promediados zonalmente, y por lo tanto aparecieron pocos modos normales inestables. Por lo cual, el proceso de inestabilidad barotrópico parece no ser importante, por lo tanto, la inestabilidad baroclínica es la que podría dominar.

Tabla 10a. Los dos modos más inestables para el flujo zonal observado de enero 200mb.

modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	5	0.02315	0.5353	188.48	6.87	1.86
2	7	0.01843	-0.7659	193.55	8.63	1.30

Por otro lado como se vio en el capítulo 3, un flujo zonal $\tilde{\Psi}(\mu)$ básico parecido al observado, se puede construir como una combinación lineal de polinomios de Legendre normalizado:

$$\tilde{\Psi}(\mu) = \sum_{j=0}^N b_j P_{2j+1}^0(\mu) \quad (5.41)$$

donde los coeficientes se eligen de tal forma, que la suma representa el flujo zonal observado. Con $N = 7$ y usando los valores $b_0 = 0.2677$, $b_1 = 8.20 \times 10^{-2}$, $b_2 =$

-5.95×10^{-2} , $b_3 = 1.067 \times 10^{-2}$, $b_4 = 2.1981 \times 10^{-3}$, $b_5 = -3.71 \times 10^{-3}$, $b_6 = 2.57 \times 10^{-3}$ y $b_7 = -6.475 \times 10^{-4}$, lo cual al escalarlos mostramos en la Fig. 3.5b el perfil de flujo zonal muy realista, parecido a los campos observados climatológicos de la Fig. 3.5a. El perfil de velocidad de este flujo zonal, tiene también un jet en latitudes medias y también un flujo del este en los trópicos. Al resolverse el problema espectral (5.15) con este flujo zonal (ecuación 5.41), se obtuvo para los primeros dos modos más inestables (ver tabla 10b) con número de onda zonal $m = 7$ y $m = 5$ respectivamente (fig. 5.8a-b). Las perturbaciones inestables se localizan en latitudes medias por la lateral del lado polar de los jets y esto está de acuerdo con la fórmula (5.34).

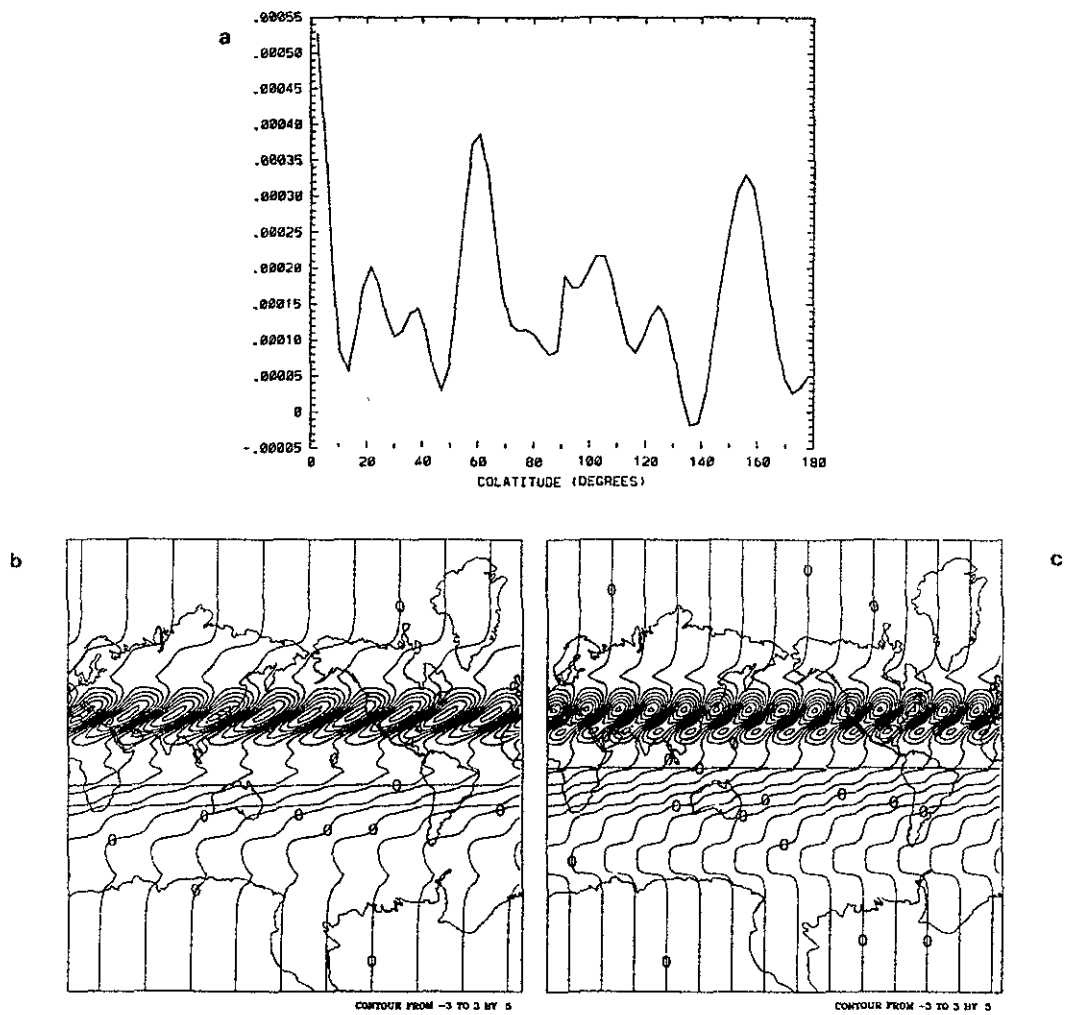


Fig. 5.7. El perfil del gradiente de vorticidad absoluta meridional del flujo zonal de 200mb de enero (a) y contornos de la parte real $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los dos modos más inestables $\omega_r = 0.02315$ (b) y $\omega_r = 0.01843$ (c).

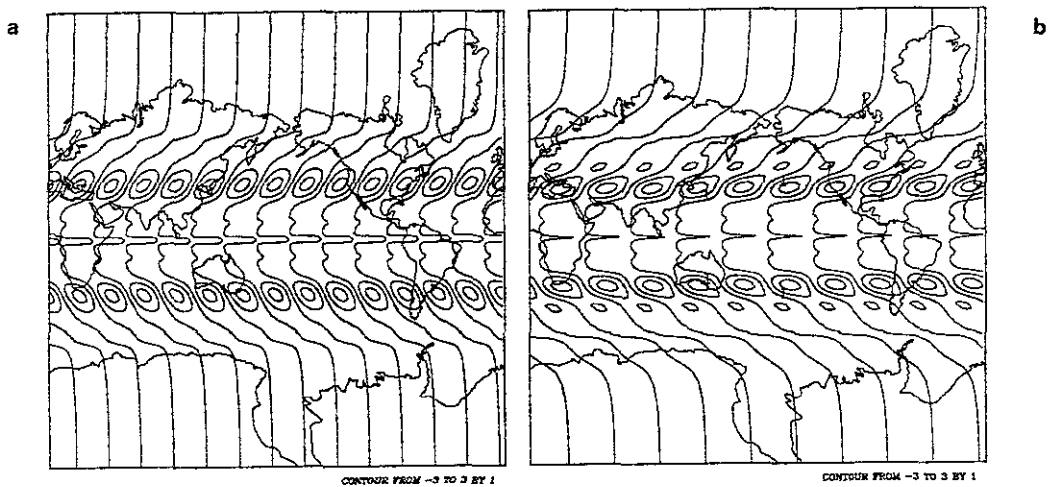


Fig. 5.8. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los dos modos más inestables $\omega_r = 0.02315$ (a), y $\omega_r = 0.01843$ (b) correspondiente al flujo zonal combinación lineal de polinomios de Legendre.

Tabla 10b. Los dos modos más inestables para el flujo zonal combinación lineal de polinomios de Legendre $b_j P_n^0(\mu)$.

modos	m	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	7	0.00773	-0.41318	202.77	20.77	2.42
2	5	0.00523	0.28568	223.61	30.39	3.50

5.4.2 Estabilidad lineal de ondas Rossby-Haurwitz

Sea la onda básica Rossby-Haurwitz (RH) estacionaria

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) &= -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &= -\omega\mu + \tilde{\Psi}_n^m P_n^m(\mu) \cos m\lambda\end{aligned}\quad (5.42)$$

o bien, especificado por la vorticidad relativa básica

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(\lambda, \mu) &= 2\omega\mu - \chi_n \sum_{m=-n}^n \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\ &= 2\omega\mu - \chi_n \tilde{\Psi}_n^m P_n^m(\mu) \cos m\lambda\end{aligned}\quad (5.43)$$

donde $n \geq 2$, $\omega = \frac{2}{\chi_n - 2}$ y $\chi_n = n(n+1)$. Una onda RH está representada por (m, n) , donde m es el número de onda zonal y n es el número de onda total. La estabilidad de estas ondas RH fue considerada por Hoskins (1973), Baines (1976), Harsma y Opsteg (1988) y Zang (1988). La existencia de una amplitud crítica para las ondas RH fue indicada por Hoskins (1973), Baines (1976) y Zang (1988). La parte real de la perturbación (13) obtenida por el método de modos normales, puede escribirse como

$$\Psi_r'(\lambda, \mu, t) = e^{\omega_r t} \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \left| \hat{\Psi}_n^m \right| P_n^m(\mu) \cos \left(m\lambda + \text{Arg} \hat{\Psi}_n^m + \omega_i t \right) \right\} \quad (5.44)$$

e) Inestabilidad de la onda RH (2,3)

Esta onda como un caso particular de (5.19 ó 5.42) es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_3^2 P_3^2(\mu) \cos 2\lambda$$

con $\omega = \frac{2}{\chi_3 - 2}$. Para ver la existencia en nuestros cálculos de una amplitud crítica, consideremos las siguientes amplitudes $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.0133333351, 0.014, 0.0153333351,$

0.0233333351, y se muestra en la figura 5.9a-d el correspondiente flujo básico $\tilde{\Psi}$ y en la tabla 11, se presentan los parámetros obtenidos por el algoritmo de estabilidad.

Para esta onda RH (2,3), Haarsma y Opsteegh (1988) encontraron que la interacción triada está formada por la onda primaria (2,3) y dos perturbaciones (1,2) y (1,4), lo cual está de acuerdo con nuestros cálculos numéricos, por ejemplo para el modo más inestable (tabla 11b-d).

Tabla 11a. *Los modos más inestables de la onda RH (2,3) en T_{21} .* En la amplitud $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.0133333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-2, 3), (2, 3)	1	$3.36 \cdot 10^{-7}$	$-2.65 \cdot 10^{-7}$	12.07	473393.3	3761041.
(-2, 3), (2, 3)	2	$2.29 \cdot 10^{-7}$	$-1.75 \cdot 10^{-7}$	12.44	693758.6	5687705.
(2, 3), (-2, 3)	3
(-2, 3), (2, 3), (1, 3),	4

Tabla 11b. *Los modos más inestables de la onda RH (2,3) para T_{21} .* En la amplitud $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.14$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(1, 2), (-1, 4), (-3, 4)	1	0.000782	.176274	11.99	203.5	5.6
(2, 3), (-2, 3)	2	$8.99 \cdot 10^{-6}$	$1.40 \cdot 10^{-6}$	12.0	17695.2	710567.
(-2, 3), (2, 3)	3	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$-1.98 \cdot 10^{-7}$
(2, 3), (-2, 3), (1, 3),	4

Tabla 11c. *Los modos más inestables de la onda RH (2,3) para T_{21} .* En la amplitud $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.0153333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 2), (1, 4), (3, 4)	1	0.004282	-0.1729	12.00	37.17	5.78
(2, 3), (-2, 3)	2	$3.28 \cdot 10^{-5}$	$-1.52 \cdot 10^{-6}$	11.99	4839.4	655292.3
(-2, 3), (2, 3)	3	$5.46 \cdot 10^{-7}$	$-1.80 \cdot 10^{-7}$
(2, 3), (-2, 3)	4

Tabla 11d. *Los modos más inestables de la onda RH (2,3) para T_{21} .* En la amplitud $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.2333333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(1, 2), (-1, 4), (-3, 4)	1	0.0307	0.1589	11.99	5.18	6.28
(2, 3), (-2, 3)	2	$7.11 \cdot 10^{-6}$	$2.11 \cdot 10^{-6}$	11.99	22362.2	472878.6
(-2, 3), (2, 3)	3	$5.64 \cdot 10^{-7}$	$-1.47 \cdot 10^{-6}$	12.00
(2, 3), (-2, 3)	4

En estos experimentos se encontró que sólo hay un modo normal inestable (fig. 5.10b-d), excepto para el primer caso con amplitud $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.0133333351$, en el que no encontramos ningún modo inestable y como podemos notar el valor de ω_r en las tablas 11a-d hay una amplitud crítica cerca de $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.14$. La componente de mayor amplitud

$|\widehat{\Psi}_n^m|$ de la parte real $\widehat{\Psi}_r$ que más predominaron son $|\widehat{\Psi}_2^1|$ y $|\widehat{\Psi}_4^{-1}|$. En la fig. 5.10b-d notamos una situación interesante de la trayectoria que siguen las perturbaciones a lo largo del flujo básico: Perturbaciones alargadas zonalmente ($u' > v'$) se mueven sobre la lateral del jet tropical (figs. 5.9b y 5.10b). En la fig. 5.10c se observa que las perturbaciones se localizan sobre la zona de difluencia del jet tropical (fig. 5.9c) y para el caso de un flujo básico con mayor amplitud (fig. 5.9d), las perturbaciones se localizan sobre la zona de confluencia (figs. 5.9d y 5.10d). La estimación numérica del número espectral $\chi_{\widehat{\Psi}}$ para las distintas amplitudes casi coincide con el valor teórico que es 12 y está de acuerdo con la proposición 5.

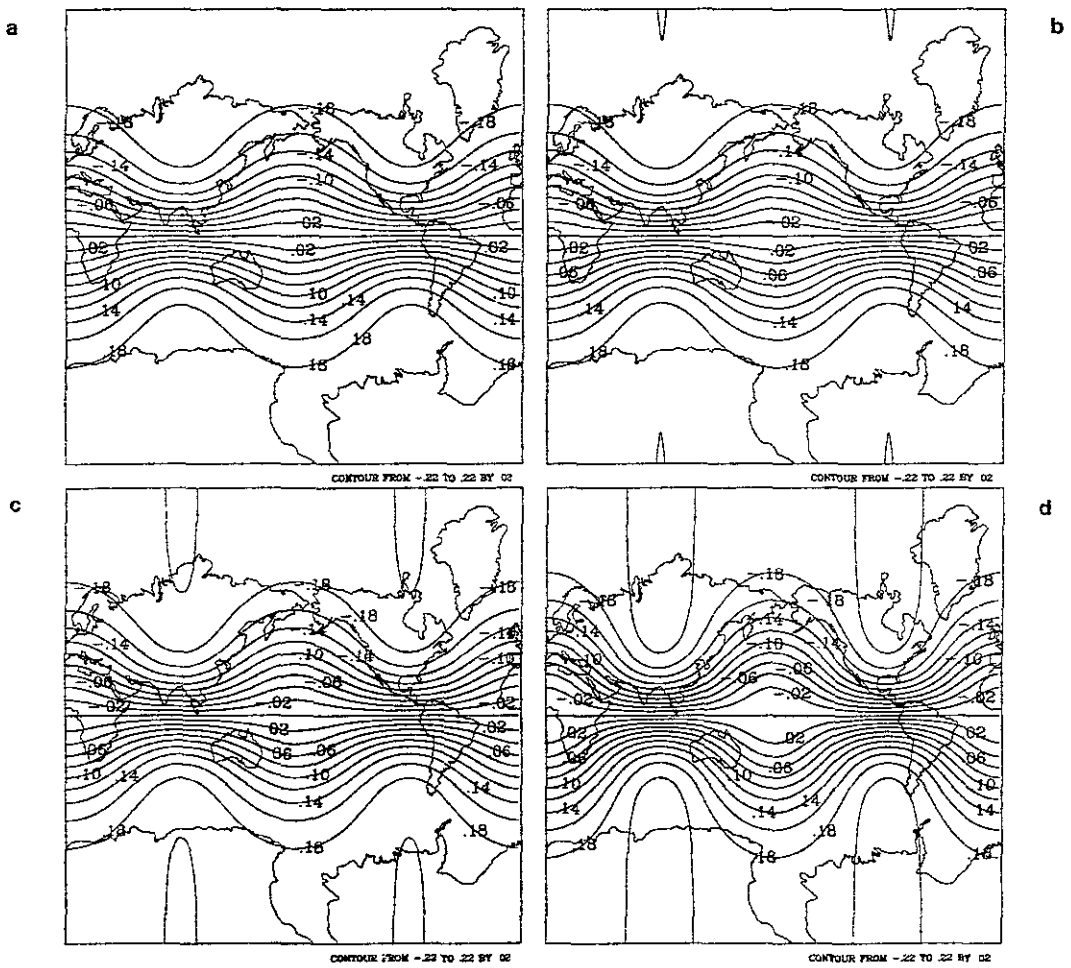


Fig. 5.9 Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_3^2 P_3^2(\mu) \cos 2\lambda$, en las amplitudes $\tilde{\Psi}_3^2 = 0.0133333351$ a), 0.014 b), 0.0153333351 c) y 0.0233333351 d).

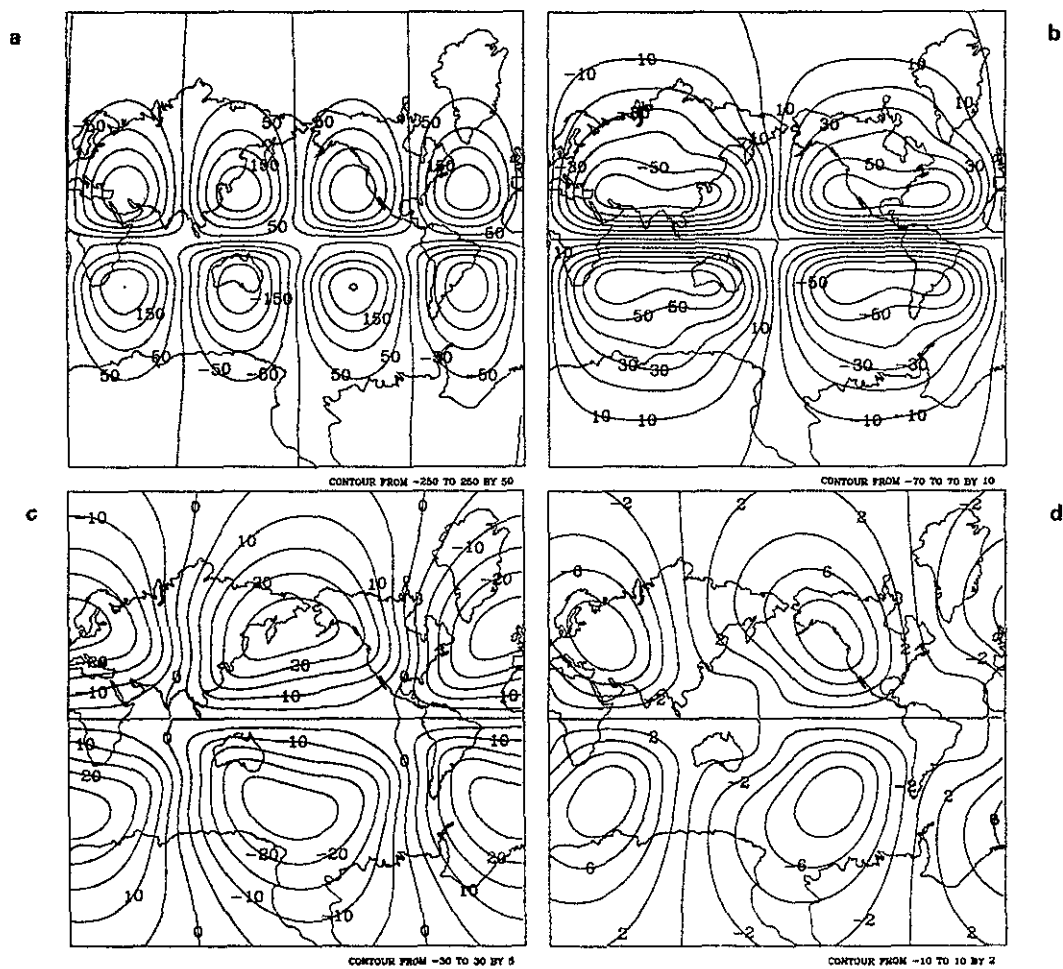


Fig. 5.10 Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ del primer modo normal, estable $\omega_r=3.36 \times 10^{-7}$ a); y el más inestable $\omega_r=0.000782$ b), $\omega_r=0.00428$ c) $\omega_r=0.0307$ d). Correspondientes a cada amplitud de la onda RH (2,3) de la fig.5.9a-d respectivamente.

f) Inestabilidad de la onda RH (2,5)

Ahora esta onda es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_5^2 P_5^2(\mu) \cos 2\lambda$$

con $\omega = \frac{2}{\chi_5 - 2}$. Consideramos las amplitudes $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.0011333351, 0.002, 0.003, 0.004$, y se muestra en la figura 5.11a-d los correspondientes campos de función de corriente básicos y como podemos notar son muy parecidos al climatológico de algún (100-300mb) nivel superior de la atmósfera. Incluso esta onda RH (2,5) en su configuración se parece a la onda Wu-Verkley. En las tablas 12a-d se presentan los parámetros obtenidos por el algoritmo de estabilidad y hay modos inestables por mucho que le bajemos a la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2$.

Tabla 12a. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.0011333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	1	0.007589	-0.037485	29.99	20.97	26.67
(5, 5), (2, 4)	2	0.001230	0.1045434	30.00	129.3	9.5
(3, 4), (0, 3)	3	$2.18 \cdot 10^{-6}$	$2.43 \cdot 10^{-7}$	30.0	72931.	4109942.
(4, 5), (-5, 6), (1, 4),	4

Tabla 12b. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) para T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.14$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	1	0.01045	0.03543	29.99	15.22	28.21
(5, 5), (2, 4), (-4, 6)	2	0.0005	0.2151	30.01	317.5	4.64
(3, 4), (0, 3)	3	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$-2.65 \cdot 10^{-7}$	30.00
(4, 5), (-5, 6), (1, 4),	4

Tabla 12c. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.0153333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	1	0.01235	-0.03442	30.00	12.88	29.05
(5, 5), (2, 4), (-4, 6)	2	0.00134	-0.09647	30.00	118.1	10.36
(3, 4), (0, 3)	3	0.00013	-0.14398	29.99	1175.3	6.94
(4, 5), (-5, 6)	4	$1.83 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$	30.00	8687.	10525824.

Tabla 12d. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.2333333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	1	0.01469	-0.02965	30.00	10.82	33.72
(5, 5), (2, 4), (-4, 6)	2	0.012831	0.0784	30.00	12.40	12.74
(3, 4), (0, 3), (0, 7)	3	0.00455	0.0891	29.99	34.94	11.21
(4, 5), (-5, 6), (1, 4),	4	0.00053	-0.1425	30.00	298.5	7.01

El número de onda zonal m que más predomina (tabla 12a-d) para el primer modo más inestable (figs. 5.12a-d) es $m = -3$ y $m = 5$ para el segundo modo más inestable (fig. 5.13a-d). En las figs. 5.12a,c-d se nota que es casi el mismo modo más inestable, localizándose las perturbaciones sobre la zona de confluencia (fig. 5.12a-b) y después sobre la zona de difluencia del flujo básico (ver fig. 5.11c y fig. 5.12c) respectivamente. En el caso de menor amplitud (fig 5.11a), y para el segundo modo más inestable (fig 5.13a) las perturbaciones básicamente se mueven sobre la zona de difluencia de los jets de latitudes medias. En el siguiente flujo básico (fig 5.11b) para el segundo modo inestable las perturbaciones se extienden sobre la zona de los jets y en las figs. 5.13a, c-d se muestra básicamente el mismo patrón de perturbaciones de gran escala. La estimación numérica del número espectral $\chi_{\hat{q}}$ para las distintas amplitudes casi coincide con el valor teórico que es 30 y está de acuerdo con la proposición 5.

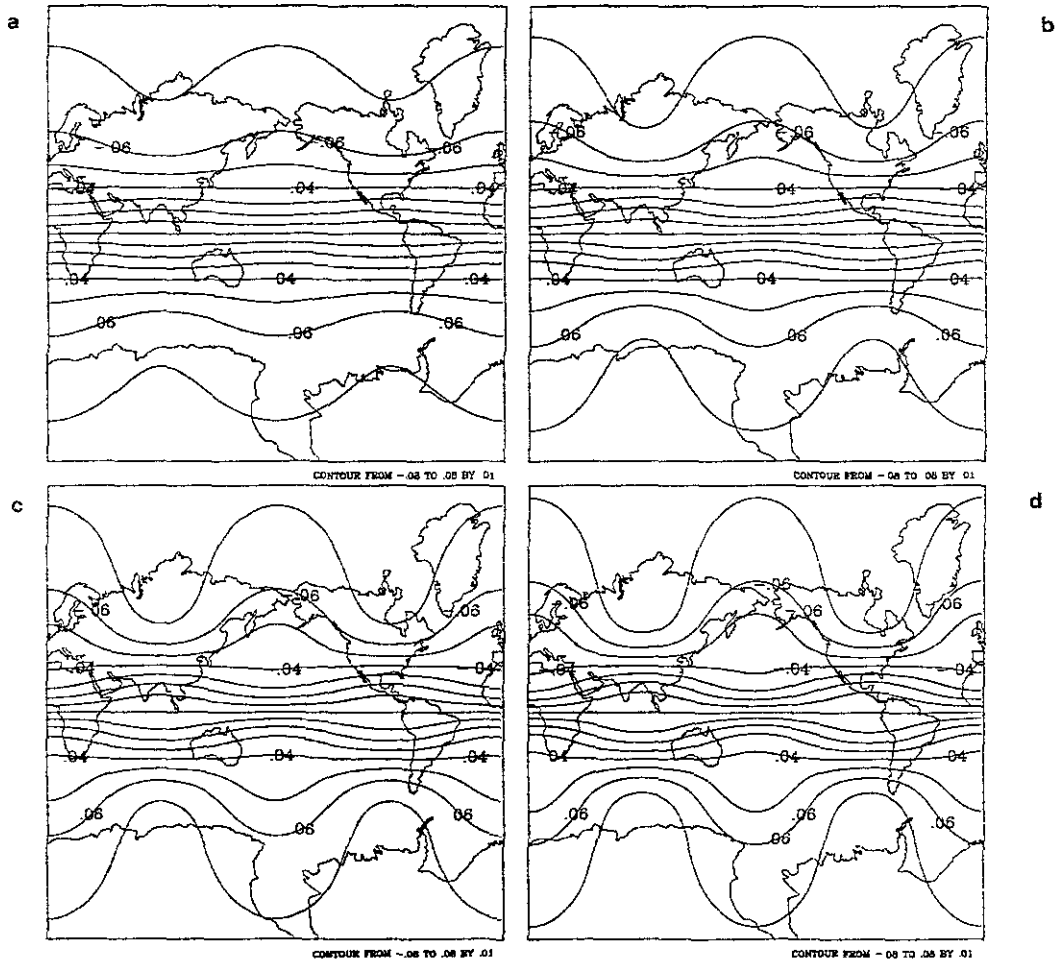


Fig. 5.11. Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_5^2 P_5^2(\mu) \cos 2\lambda$, en las amplitudes $\tilde{\Psi}_5^2$, 0.0011333351 a), 0.002 b), 0.0003 c) y 0.004 d).

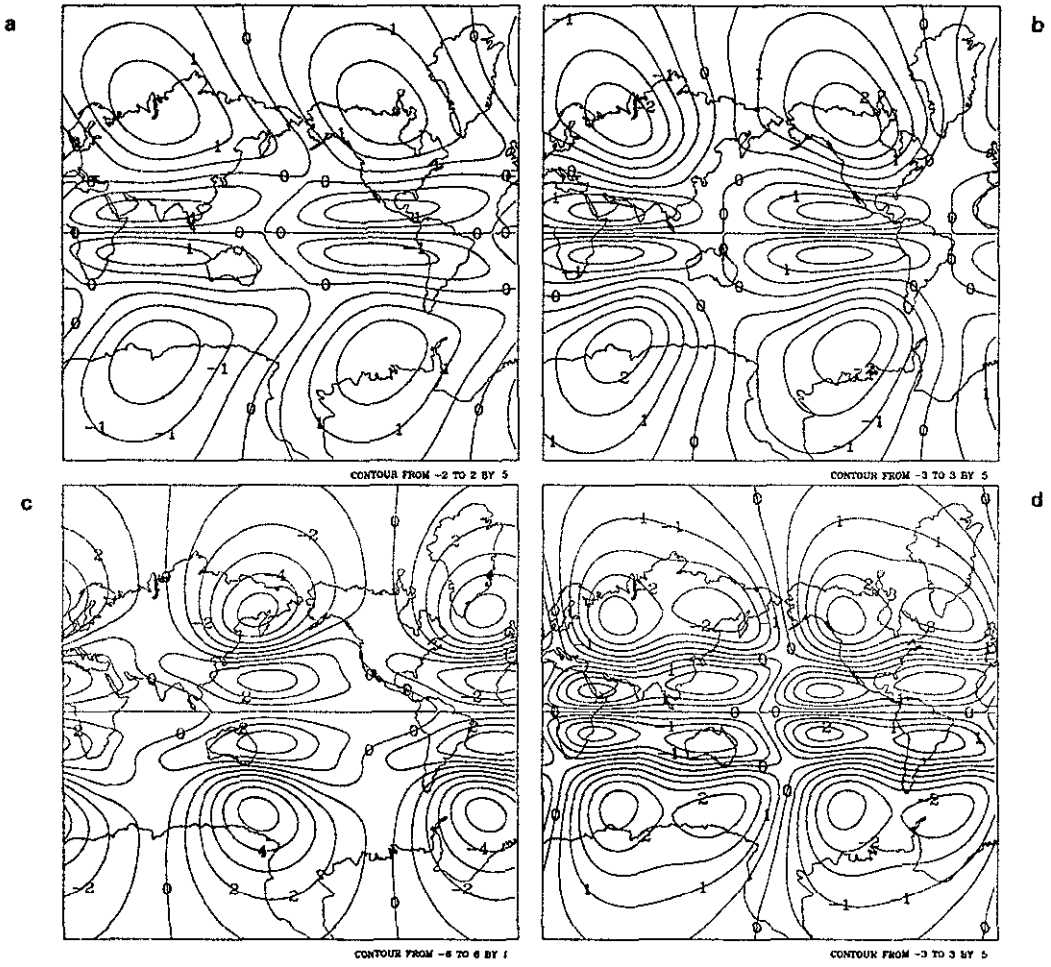


Fig. 5.12. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del primer modo normal más inestable de la onda básica RH (2,5), $\omega_r=0.007589$ a), $\omega_r=0.01045$ b), $\omega_r=0.01235$ c) $\omega_r=0.01469$ d) correspondiente a cada amplitud de fig. 5.11a-d.

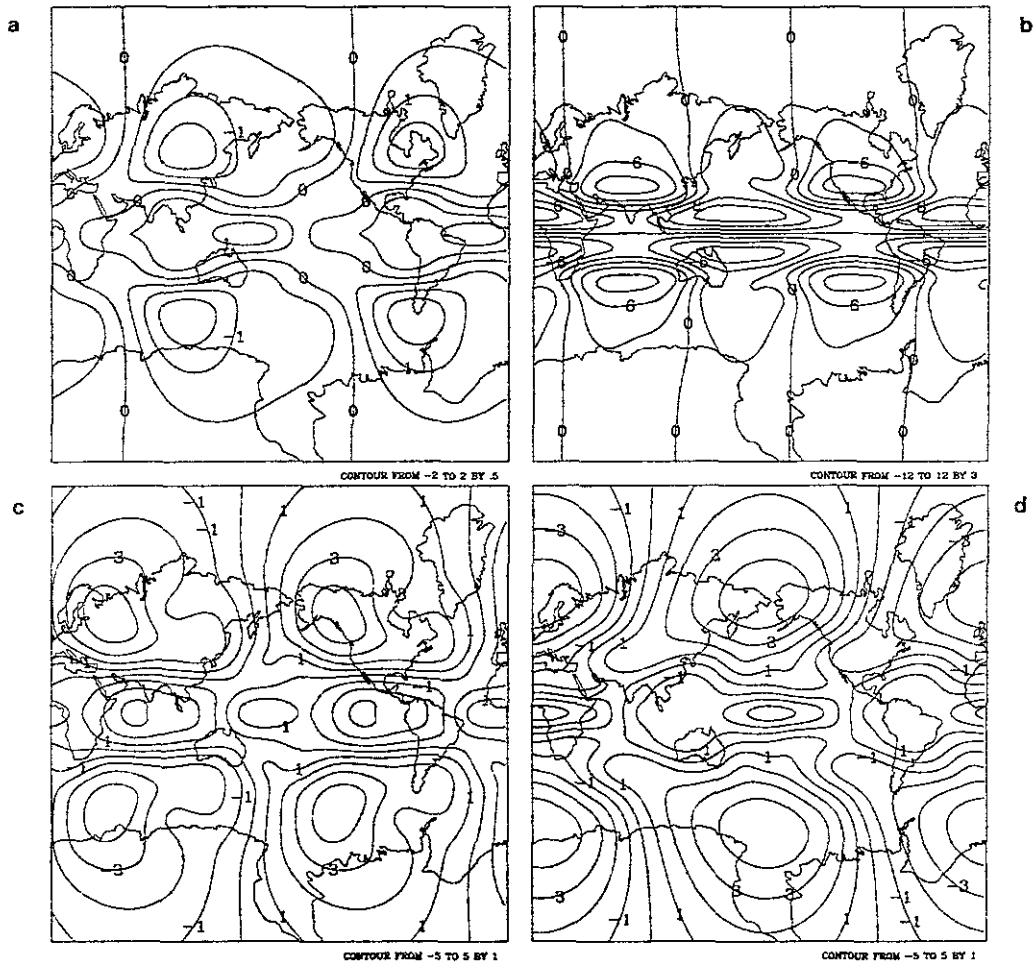


Fig. 5.13. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del segundo modo normal más inestable de la onda básica RH (2,5), $\omega_r=0.001230$ a), $\omega_r=0.0005$ b), $\omega_r=0.001347$ c) $\omega_r=0.012831$ d) correspondiente a cada amplitud de fig. 5.11a-d.

g) Inestabilidad de la onda RH (3,6)

Ahora esta onda es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_6^3 P_6^3(\mu) \cos 3\lambda$$

con $\omega = \frac{2}{\chi_6 - 2}$, para distintas amplitudes $\tilde{\Psi}_6^3 = 0.0013333351, 0.0023333351, 0.003, 0.005$, y se muestran en la figura 5.14a-d y su configuración es parecida a algun nivel superior (100-300mb) de la atmósfera. En las tablas 13a-d se presentan los parámetros obtenidos por el algoritmo de estabilidad. Aunque hemos bajado los valores de la amplitud $\tilde{\Psi}_6^3$, hasta casi un flujo zonal la onda básica demuestra ser inestable. En la fig. 5.15a-d se muestra el primer modo más inestable, correspondiente a cada flujo básico RH (fig. 5.14a-d). Los armónicos de mayor amplitud $|\hat{\Psi}_n^m|$ del modo normal inestable, que más se imponen en los campos de $\Psi_r'(\lambda, \mu)$, figs. 5.15a-d, son (1, 4) y (4, 5). A menor amplitud $\tilde{\Psi}_6^3$ hay perturbaciones de gran escala que se localizan en altas latitudes (fig. 5.15a-b). Para ondas RH (3,6) de mayor amplitud $\tilde{\Psi}_6^3$ sus perturbaciones del primer modo más inestable se localizan sobre los trópicos y latitudes medias (fig. 5.15c-d)

Tabla 13a. Los modos más inestables de la onda RH (3,6) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_6^3 = 0.0013333351$

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(1, 4), (4, 5), (-2, 9)	1	0.01411	0.05301	42.00	11.27	18.86
(-2, 5), (4, 7)	2	0.00697	-0.03394	41.99	22.80	29.46
(3, 6), (-3, 6)	3	$2.35 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	42.00	67657.3	75936.
(3, 6), (-3, 6), (6, 6),	4

Tabla 13b. Los modos más inestables de la onda RH (3,6) para T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_6^3 = 0.0023333351$

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 4), (-4, 5), (5, 6)	1	0.0178	-0.0488	41.99	8.91	20.4
(2, 5), (-4, 7), (-1, 8)	2	0.0120	0.0341	41.99	13.1	29.2
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	3	0.0088	-0.0654	41.99	17.96	15.2
(-1, 3), (-4, 4), (2, 8)	4	0.0018	-0.1094	42.00	87.31	9.14

Tabla 13c. Los modos más inestables de la onda RH (3,6) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_6^3 = 0.003$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(3, 5), (0, 2), (-3, 7)	1	0.0203	0.0655	41.99	7.82	15.2
(4, 5), (1, 4), (-5, 6)	2	0.0181	0.0446	42.00	8.79	22.4
(-1, 3), (2, 8)	3	0.0146	-0.1003	41.99	10.8	9.96
(-2, 5), (4, 7)	4	0.0134	-0.0350	42.00	11.8	28.5

Tabla 13d. *Los modos más inestables de la onda RH (3,6) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_6^3 = 0.005$.*

(m, n) de mayor ampl. $ \tilde{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(3, 5), (0, 2), (-3, 7)	1	0.0547	0.1331	29.99	2.90	7.51
(4, 5), (1, 4), (-5, 6)	2	0.0527	0.1963	30.00	3.01	5.09
(-1, 3), (2, 8), (-4, 4)	3	0.0473	0.0520	30.00	3.35	19.22
(-2, 5), (4, 7), (1, 8)	4	0.0328	0.0614	30.00	4.85	16.2

Para el segundo modo normal más inestable (fig. 5.16a-d) correspondiente a cada campo básico RH (3,6) (fig. 5.14a-d) notamos que las perturbaciones en fig. 5.16a, se localizan sobre las zonas de confluencia y difluencia de los jets de latitudes medias. En la fig. 5.16b, estas perturbaciones demuestran mayor amplitud. En los segundos modos normales son más inestables (fig. 5.4c-d) demuestran un alargamiento más meridional, lo cual está de acuerdo con las ondas básicas que también son de gran amplitud mostrada en la fig. 5.14c-d. El número espectral $\chi_{\tilde{\Psi}}$ para las distintas amplitudes casi coincide con el valor teórico que es 42 y está de acuerdo con la proposición 5.

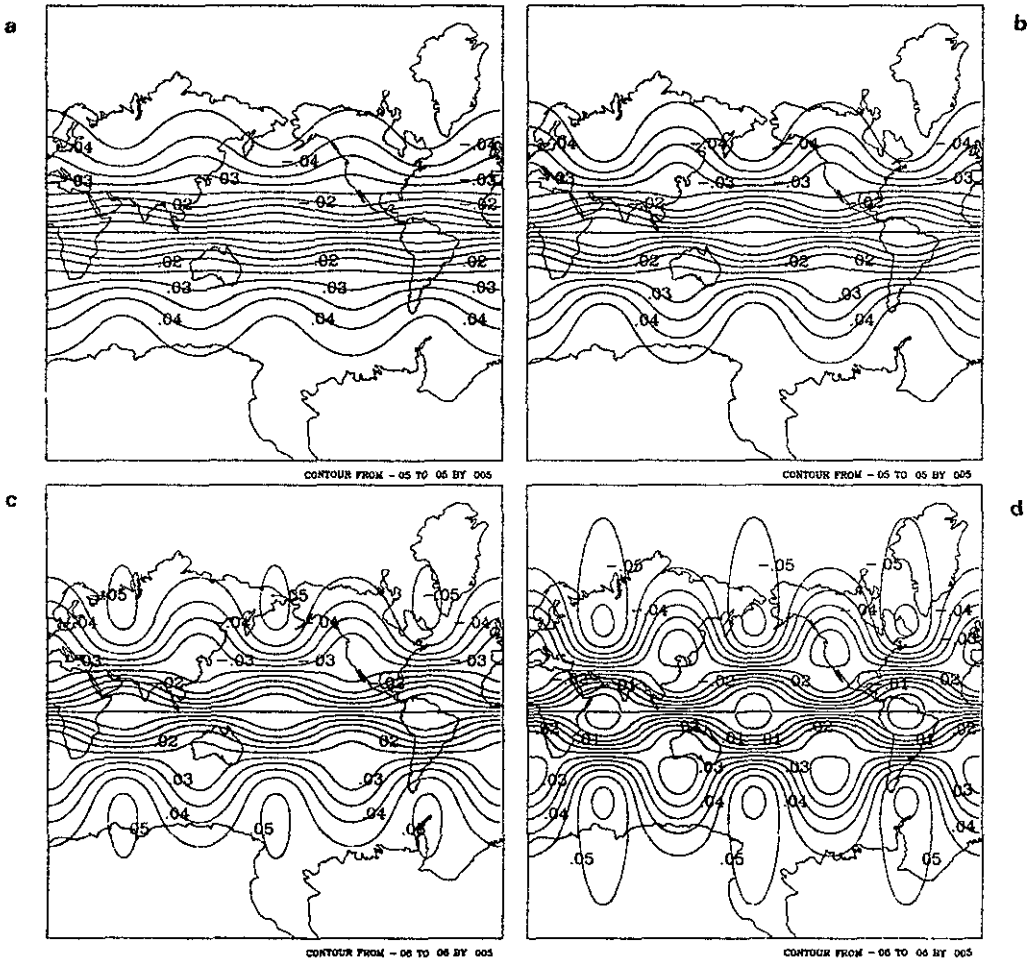


Fig. 5.14. Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_6^3 P_6^3(\mu) \cos 3\lambda$, en las amplitudes $\tilde{\Psi}_6^3$, 0.0013333351 a), 0.0023333351 b), 0.003 c) y 0.005 d).

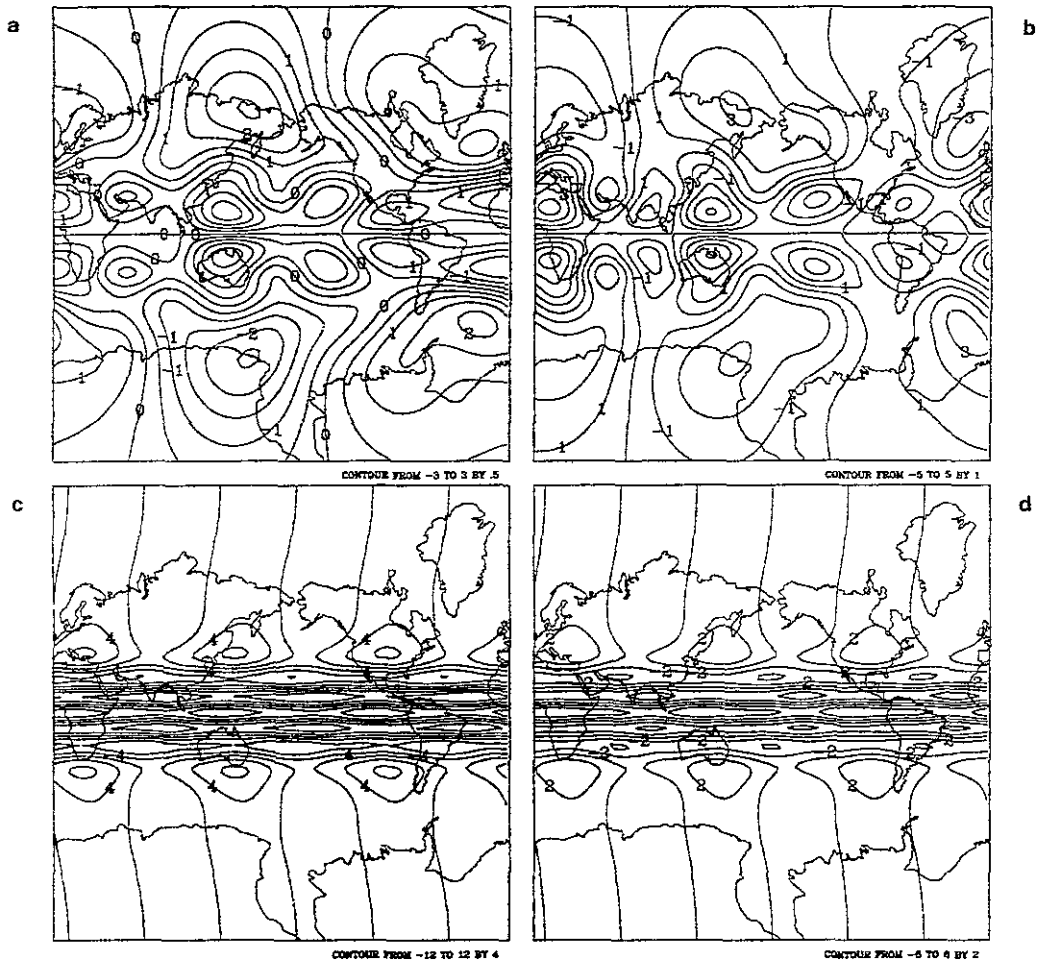


Fig. 5.15. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del primer modo normal más inestable $\omega_r=0.01411$ a), $\omega_r=0.0178$ b), $\omega_r=0.0203$ c) y $\omega_r=0.0547$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (3,6) de fig. 5.14a-d.

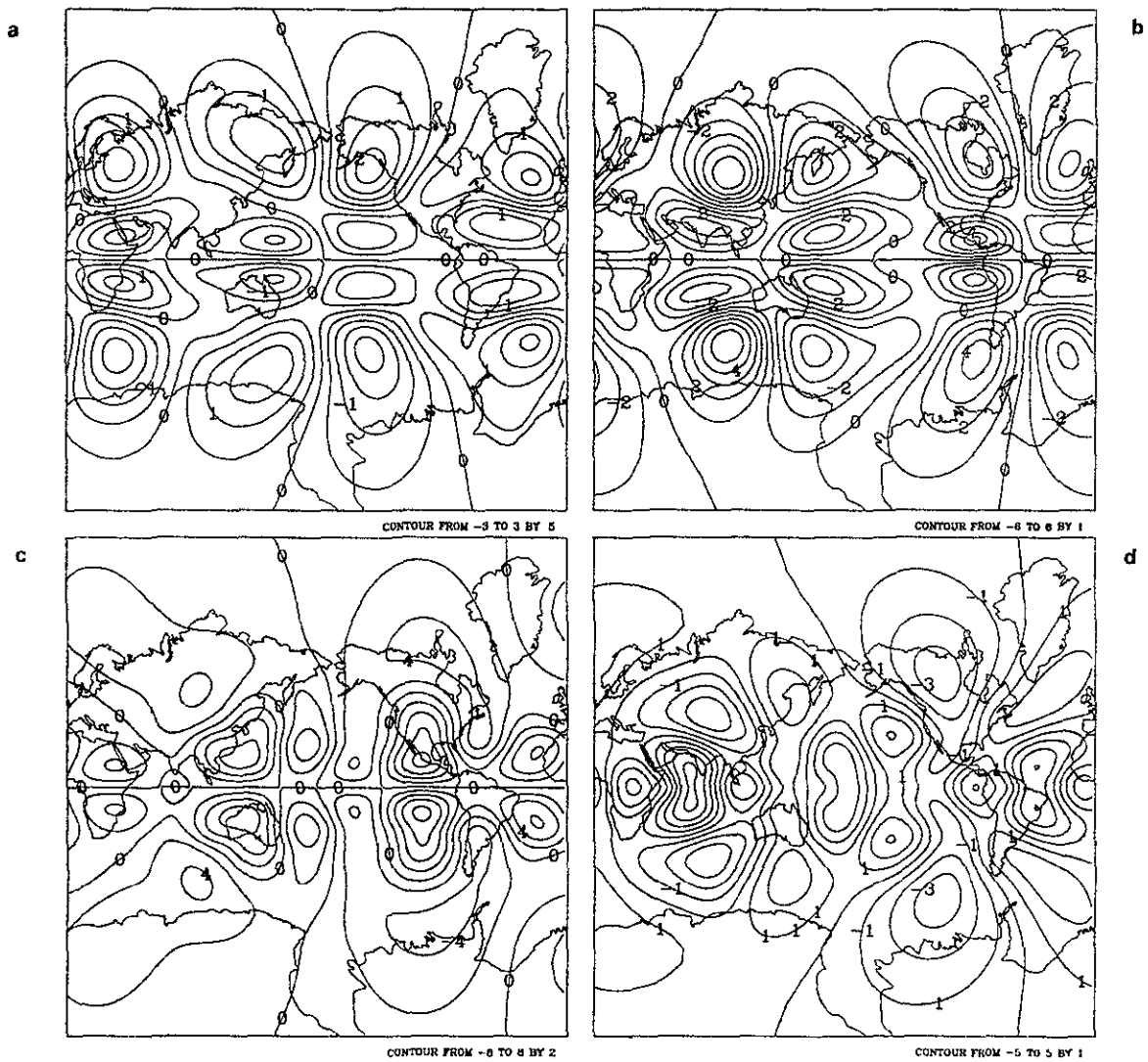


Fig. 5.16. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud del segundo modo normal inestable, $\omega_r=0.00697$ a), $\omega_r=0.0120$ b), $\omega_r=0.0181$ y c) $\omega_r=0.0527$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (3,6) de fig. 5.14a-d.

h) Inestabilidad de la onda RH (4,7)

Ahora esta onda básica RH es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_7^4 P_7^4(\mu) \cos 4\lambda$$

donde $\omega = \frac{2}{\chi_{7-2}}$, y la estudiaremos para distintas amplitudes $\tilde{\Psi}_7^4 = 0.0013333351, 0.0023333351, 0.003, 0.005$. En la figura 5.17a-d se muestra el patrón de función de corriente básica correspondiente a cada amplitud $\tilde{\Psi}_7^4$ y en la tabla 14a-d se presentan los parámetros principales obtenidos por el algoritmo numérico de estabilidad. Esta onda RH (4,7) es muy inestable. Para casi todos los modos inestables el valor numérico de $\chi_{\tilde{\Psi}}$ para las distintas amplitudes casi coincide con el valor teórico que es 56 y está de acuerdo con la proposición 5.

Tabla 14a. Los modos más inestables de la onda RH (4,7) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_7^4 = 0.0013333351$

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 4), (-5, 6), (7, 8)	1	0.01298	-0.07131	55.99	12.2	14.0
(2, 5), (-2, 9)	2	0.01108	0.05291	56.00	14.3	18.8
(2, 6), (-2, 8)	3	0.00735	0.02472	55.99	21.6	40.4
(5, 6), (-7, 8), (1, 4)	4	0.00532	0.04759	56.00	29.8	21.0

Tabla 14b. Los modos más inestables de la onda RH (4,7) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_7^4 = 0.0023333351$

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 4), (-5, 6), (3, 8)	1	0.02536	-0.0799	55.99	6.2	12.5
(4, 6), (0, 2), (-4, 8)	2	0.02362	0.05782	56.00	6.7	17.2
(-2, 5), (2, 9), (-6, 7)	3	0.02083	-0.05626	56.00	7.6	17.7
(3, 5), (-1, 5), (7, 7)	4	0.01570	0.09109	56.00	10.1	10.9

Tabla 14c. Los modos más inestables de la onda RH (4,7) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_7^4 = 0.003$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(0, 2), (4, 6), (-4, 8)	1	0.03521	0.06439	56.00	4.5	15.5
(-1, 4), (-5, 6), (3, 6)	2	0.03229	-0.09155	56.00	4.9	10.9
(-3, 5), (-7, 7)	3	0.02103	-0.09411	56.00	7.5	10.6
(4, 5), (0, 3)	4	0.01891	0.13074	56.00	8.4	7.6

Tabla 14d. Los modos más inestables de la onda RH (4,7) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_7^4 = 0.005$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 4), (-5, 6), (-1, 2)	1	0.0583	0.1326	55.99	2.72	7.5
(0, 2), (4, 6), (-4, 6)	2	0.0581	0.1220	55.99	2.73	8.19
(-4, 5), (0, 3), (4, 5)	3	0.0555	-0.1836	55.99	2.86	5.44
(-4, 4), (0, 4), (0, 6)	4	0.0502	-0.2749	56.00	3.16	3.63

Para cada flujo básico, los armónicos de mayor amplitud $|\widehat{\Psi}_n^m|$ que más se imponen en los primeros dos modos normales más inestables son $(-1,4)$ y $(-5,6)$. Perturbaciones de mayor amplitud se localizan sobre los jets subtropicales del atlántico, lado oeste del Pacífico (fig. 5.18a). En la fig. 5.18b se observa que las perturbaciones siguen las ramificaciones de la onda básica (fig. 5.17b). Para el segundo modo normal, de cada amplitud $\widetilde{\Psi}_7^4$ (fig. 5.19a-d) se observa que las perturbaciones se extienden a lo largo de las zonas de confluencia (fig. 5.19a) y a lo largo de los jets (fig. 5.19b,d) y por otro lado la configuración de perturbaciones de la fig. 5.19c es similar al de la fig. 5.18b.

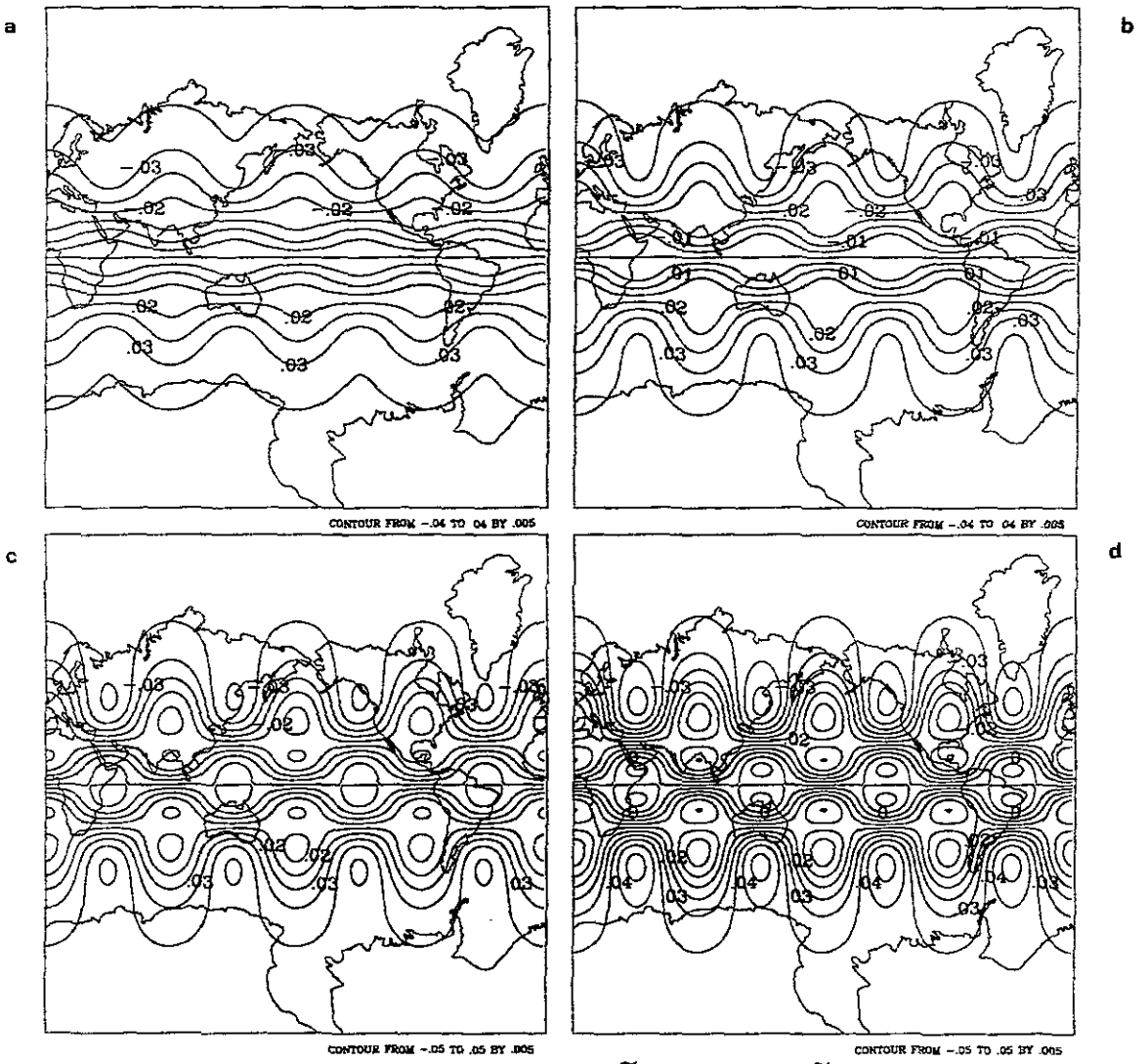


Fig. 5.17. Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_7^4 P_7^4(\mu) \cos 4\lambda$, en las amplitudes $\tilde{\Psi}_7^4$, 0.0013333351 a), 0.0023333351 b), 0.003 c) y 0.005 d).

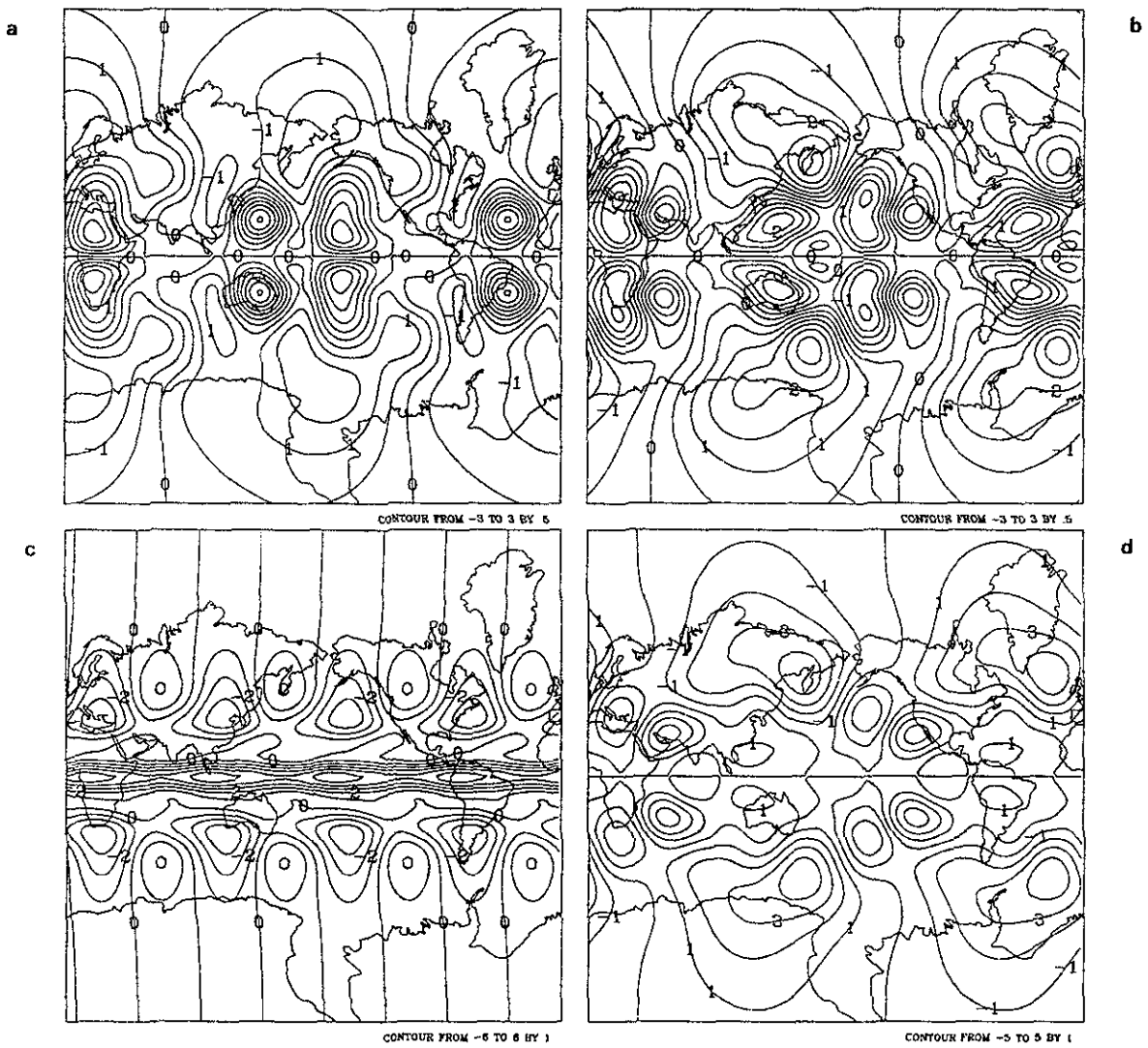


Fig. 5.18. Los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del primer modo normal inestable, $\omega_r=0.01298$ a), $\omega_r=0.02536$ b), $\omega_r=0.03521$ y c) $\omega_r=0.0583$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (4,7) de fig. 5.17a-d.

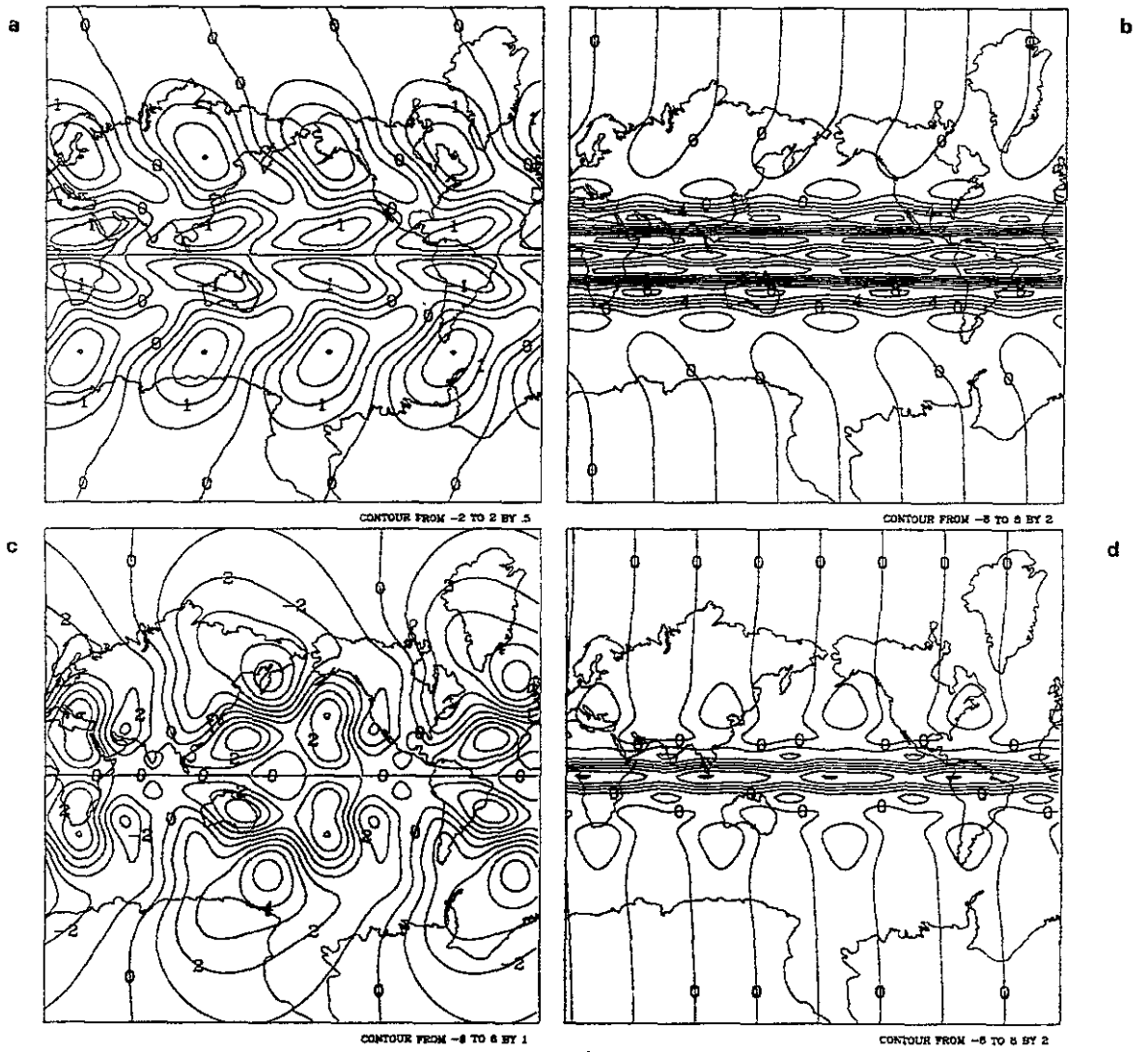


Fig. 5.19. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del segundo modo normal inestable, $\omega_r=0.01108$ a), $\omega_r=0.02362$ b), $\omega_r=0.03229$ y c) $\omega_r=0.0581$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (4,7) de fig. 5.17a-d.

i) Inestabilidad de la onda RH (4,5)

Ahora esta onda es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_5^4 P_5^4(\mu) \cos 4\lambda$$

con $\omega = \frac{2}{\chi_5^{-2}}$, y sean las amplitudes $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0033333351, 0.0083333351, 0.0105, 0.0109$, y así que el flujo básico correspondiente se muestra en la figura 5.20a-d y en la tabla 15 se presentan los parámetros obtenidos por el algoritmo de estabilidad. Los campos de la fig. 5.20c-d son más inestables.

Tabla 15a. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0033333351$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 3), (3, 7), (-5, 5)	1	0.02320	-0.103442	29.99	6.85	9.66
(-2, 4), (2, 6)	2	0.00316	0.060515	30.00	50.35	16.52
(4, 5), (-4, 5)	3	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$2.37 \cdot 10^{-6}$	30.0	613558.8	420574.
(4, 5), (-4, 5), (0, 2),	4

Tabla 15b. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0083333351$

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-1, 3), (-5, 5), (3, 3)	1	0.0507	-0.1167	29.99	3.13	8.56
(-2, 4), (2, 6), (6, 6)	2	0.0369	-0.0614	30.00	4.3	16.28
(-4, 4), (0, 2), (0, 4)	3	0.0327	-0.16942	29.99	4.86	5.90
(1, 4), (-3, 6), (-3, 4),	4	0.0285	0.05918	29.99	5.57	16.89

Tabla 15c. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0105$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(-3, 5), (0, 2), (3, 7)	1	0.0549	0.1277	29.99	2.89	7.82
(5, 5), (2, 4), (-4, 6)	2	0.0511	-0.1893	29.99	3.11	5.28
(3, 4), (0, 3)	3	0.0463	-0.0533	30.00	3.43	18.73
(4, 5), (-5, 6)	4	0.0315	-0.0610	30.00	5.04	16.36

Tabla 15d. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0109$.

(m, n) de mayor ampl. $ \hat{\Psi}_n^m $ en orden decre.	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
(1, 3), (5, 5), (-3, 3)	1	0.0547	0.1331	29.99	2.90	7.51
(4, 4), (0, 2), (0, 4)	2	0.0527	0.1963	30.00	3.01	5.09
(2, 4), (-2, 6), (-2, 6)	3	0.0473	0.0520	30.00	3.35	19.2
(1, 4), (-3, 4), (-3, 6)	4	0.0328	0.0614	30.00	4.85	16.2

Las componentes de mayor amplitud $|\hat{\Psi}_n^m|$ que se manifiestan en el modo más inestable (ec. 5.44) para la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.0033333351$ de la onda RH (4,5) básica, son

(-1,3) y (3,7) (ver tabla 15a y fig. 5.21a). La componente (-1,3) se propaga hacia el oeste mientras que la (3,7) se propaga hacia el este. Según Zang (1988) estos modos inestables forman una tríada con la onda primaria (4,5). Las perturbaciones mostradas en la fig. 5.21a-b muestran casi la misma configuración y se asocian más al carácter ondulatorio del flujo básico (fig. 5.20a-b). Las perturbaciones de la fig. 5.21c-d son similares y se relacionan más bien con la presencia de los jets tropicales en las zonas de confluencia y difluencia. Para el segundo modo normal más inestable (fig. 5.22a-d) correspondiente a cada flujo básico de fig. 5.20a-d, las perturbaciones de latitudes medias están adelante (fig. 5.22a), y atrás (fig. 5.22b) de la vaguada y por esto es que se nota que son ortogonales dichos contornos. Para casi todos los modos inestables el valor numérico de $\chi_{\hat{\psi}}$ para las distintas amplitudes casi coincide con el valor teórico que es 30 y está de acuerdo con la proposición 5.

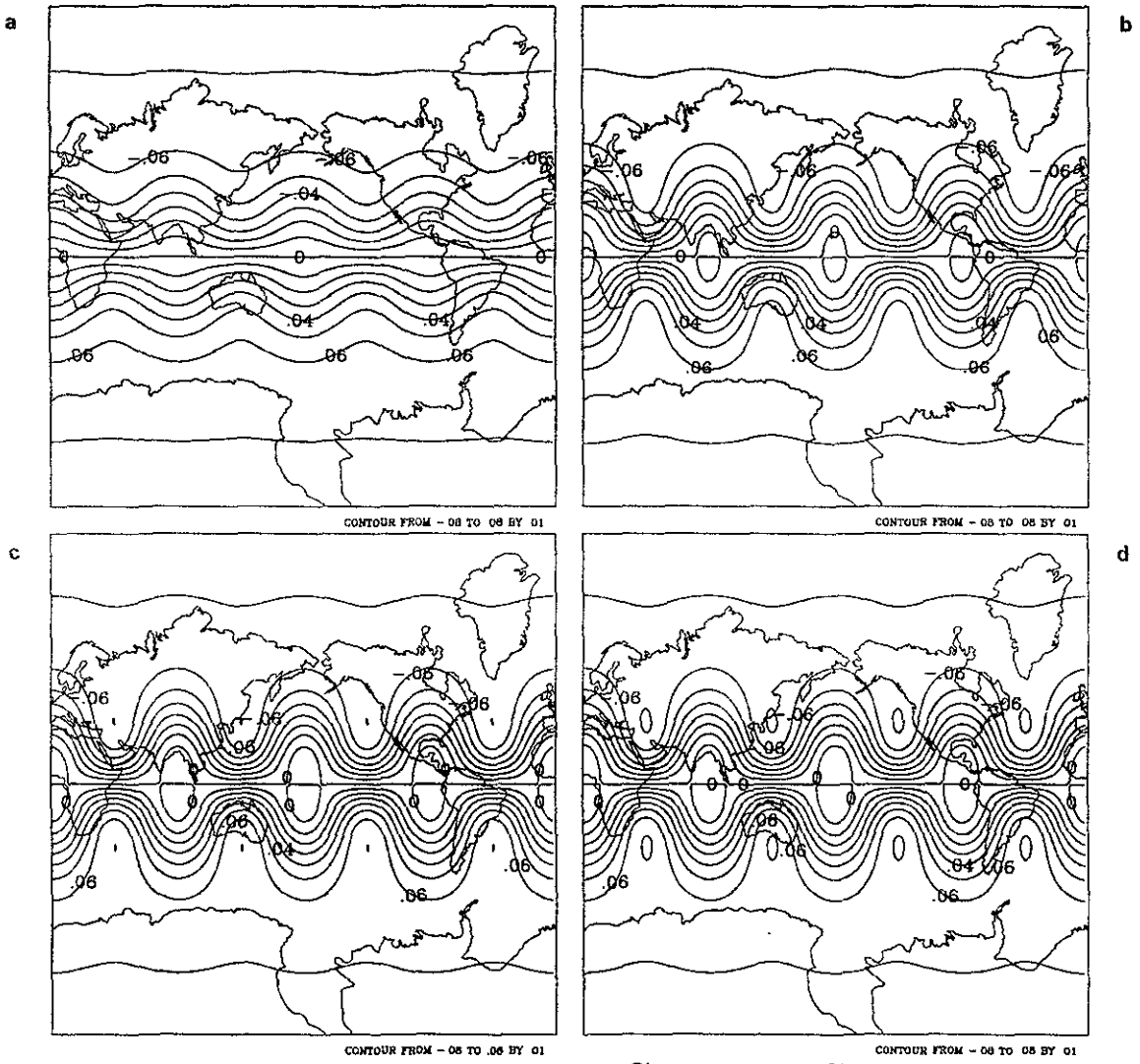


Fig. 5.20. Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_5^4 P_5^4(\mu) \cos 4\lambda$, en las amplitudes $\tilde{\Psi}_5^4$, 0.0033333351 a), 0.0083333351 b), 0.0105 c) y 0.0109 d).

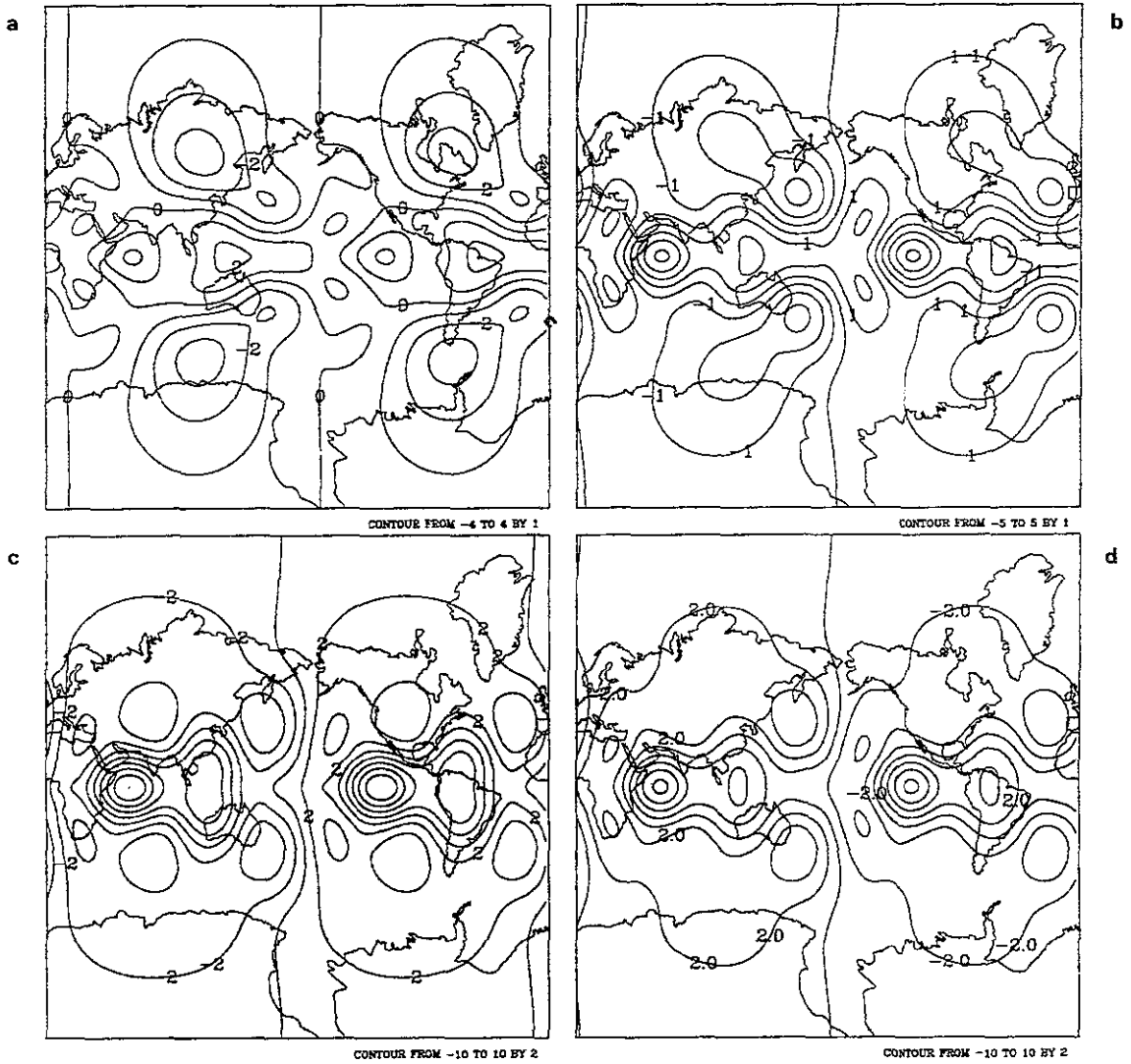


Fig. 5.21. Contornos de la parte real $\hat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del primer modo normal inestable, $\omega_r=0.0560$ a), $\omega_r=0.0557$ b), $\omega_r=0.0549$ y c) $\omega_r=0.0547$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (4,5) de fig. 5.20a-d.

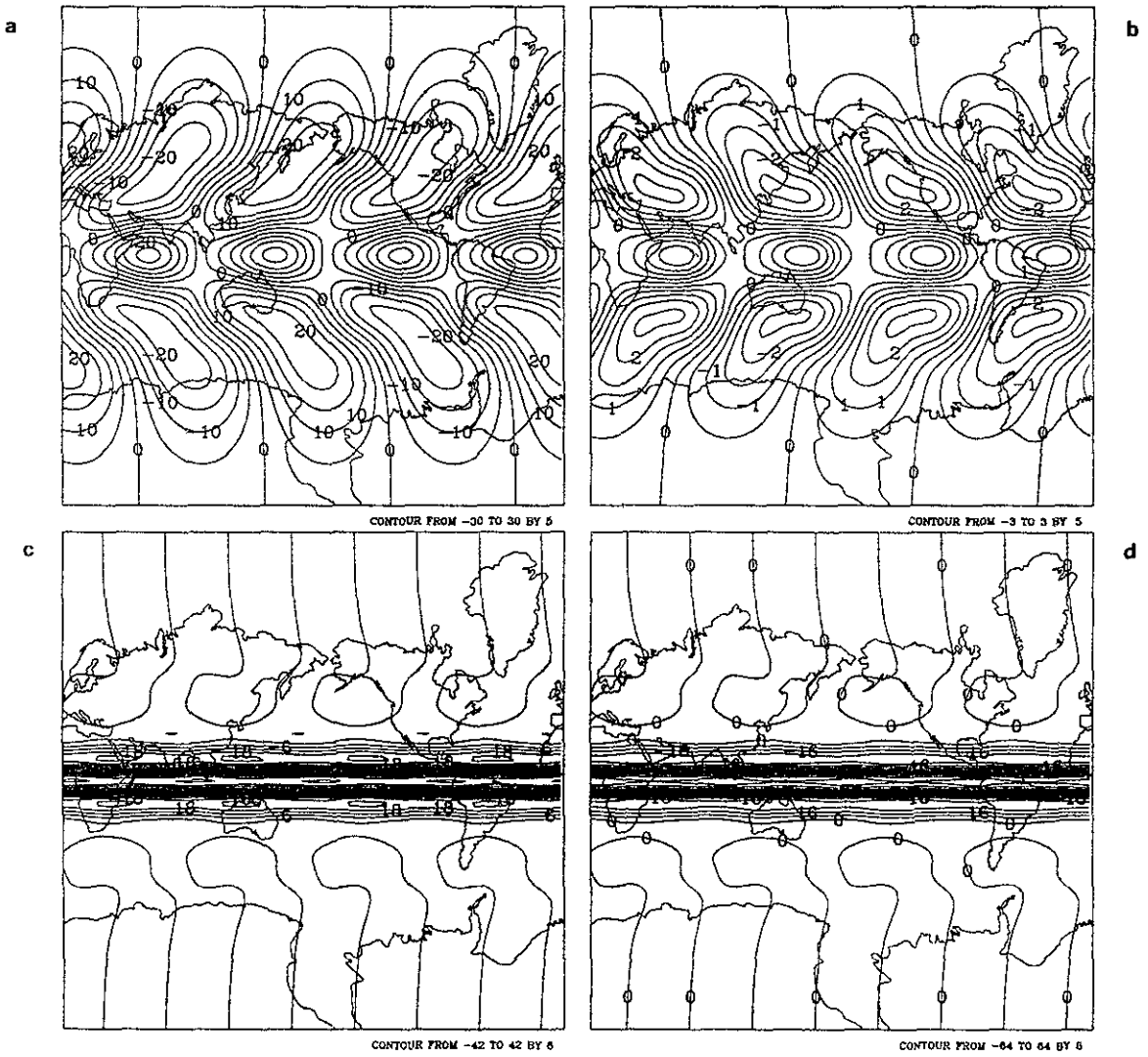


Fig. 5.22. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud del segundo modo normal inestable, $\omega_r=0.00316$ a), $\omega_r=0.0369$ b), $\omega_r=0.0511$ y c) $\omega_r=0.0527$ d) correspondiente a cada amplitud de la onda RH (4,5) de fig. 5.20a-d.

Veamos ahora cuál es el efecto de la fricción lineal, viscosidad y rotación de la esfera en la estabilidad exponencial de flujos incomprensibles sobre la esfera.

Sea la ecuación de vorticidad sobre la esfera S^2 con forzamiento y disipación sin dimensiones

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + 2\Omega\mu) = -\sigma \Delta \psi - \nu(s) (-\Delta)^{s+1} \psi + f_s$$

donde $\sigma \approx 1.65 \times 10^{-6} s^{-1}$, es el drag lineal o término de amortiguamiento lineal, con dimensiones T^{-1} , $\nu(s)$ es el coeficiente de difusión turbulento que tiene dimensiones de $L^{2s} T^{-1}$ y s es un número real, si $s = 1$, entonces tenemos el término de difusión fickiana o de viscosidad molecular de aire $\nu(1) \approx 1.4 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$; si $s = 2$, entonces, tenemos el coeficiente de difusión biarmónica y es del orden (Hoskins y Ambrizi 1993) de $\nu(2) \approx 2.338 \times 10^{16} \frac{m^4}{s}$.

El problema espectral discreto de ecuación linealizada es ahora de la forma

$$L_K \vec{v}(K, \lambda, \mu) = \omega(K) \vec{v}(K, \lambda, \mu)$$

en el subespacio \mathcal{P}^N donde $\vec{v} = \{V_\gamma\} = \{-\chi_\gamma \Psi_\gamma\} = \{-\chi_n^m \Psi_n^m\}$ es eigenvector cuyas componentes son los coeficientes de Fourier V_γ de la eigenfunción V con $n_\gamma \leq N$. Donde $K=M+N-1$ y el operador $L_K : P_o^K \rightarrow P_o^K$, actúa sobre los espacios de polinomios esféricos P_o^K y tal que

$$L_K \zeta' = J(T_M \bar{\eta}, \Delta^{-1} T_N \zeta') - J(T_M \bar{\psi}, T_N \zeta') - T_N [\sigma + \nu(s) (-\Delta)^s] \zeta'$$

y la matriz $L_K = \{L_{\alpha\gamma}\} \in C^{(N+1)^2} \times C^{(N+1)^2}$. Donde los elementos de la matriz

$$L_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta(1)}^M B_{\beta\alpha\gamma} \bar{\xi} + D_{\alpha\gamma} - \sigma \delta_{\alpha\gamma} \quad (5.45)$$

siendo los coeficientes de interacción triada:

$$B_{\beta\alpha\gamma} = \frac{4\pi}{2} i (\chi_\beta^{-1} - \chi_\gamma^{-1}) \int_{-1}^1 P_\alpha \left(m_\beta P_\beta \frac{\partial P_\gamma}{\partial \mu} - m_\gamma P_\gamma \frac{\partial P_\beta}{\partial \mu} \right) d\mu$$

y la matriz diagonal

$$D_{\alpha\gamma} = \{-\nu \chi_\gamma^s + 2im_\gamma^{-1}\} \delta_{\alpha\gamma} \quad (5.46)$$

La fricción lineal $(-\sigma \delta_{\alpha\gamma})$ resulta sólo en desplazar todos los eigenvalores de la matriz $R+D$ a la izquierda del eje real por un valor de σ . Lo cual implica que la estabilidad de

todos los modos aumenta con σ . Este efecto también se observó con nuestro algoritmo numérico al incorporar sólo el término de fricción lineal.

j) Inestabilidad de la onda RH (4,5) y RH (2,5) con disipación

Por ejemplo para la onda RH estacionaria, especificado por el flujo básico $\bar{\Psi}$ que tiene forma de una onda Rossby-Haurwitz de grado $n=5$ y número de onda zonal $m=4$:

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + 0.019P_5^4(\mu) \cos 4\lambda$$

donde $\omega = \frac{2}{\chi_5^{-2}}$, $\chi_5 = 30$. Los parámetros que se obtienen para los dos modos más inestables son:

Tabla 16a. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.019$

modo	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	0.1695	-0.2327	29.999	0.9398	4.2966
2	0.1442	0.3418	30.000	1.1032	2.9252

Sin fricción lineal tenemos que para el modo más inestable $\omega = 0.169515 - i0.232737$ y con fricción lineal ($\sigma = 5.78 \times 10^{-8}$), $\omega = 0.169457 - i0.232737$.

Consideramos ahora en nuestro algoritmo numérico de estabilidad, el término de difusión turbulenta $\nu\chi_\gamma^s$, y rotación $2m_\gamma\chi_\gamma^{-1}$ de la esfera con $s=1$ y $\nu(1) = 5.78 \times 10^{-4}$. En este caso obtuvimos los parámetros, para los primeros dos modos más inestables de la onda RH

Tabla 16b. Los modos más inestables de la onda RH (4,5) en T_{21} y con disipación. En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^4 = 0.019$.

modo	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	Periodo T (días)
1	0.1485	-0.2324	28.42	1.071	4.30
2	0.1340	+0.3434	27.89	1.187	2.91

Para la onda RH (2,3):

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + \tilde{\Psi}_5^2 P_5^2(\mu) \cos 2\lambda$$

donde $\omega = \frac{2}{\chi_5^{-2}}$, y como función de su amplitud, para $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.0011333351, 0.002$, se muestra en la tabla 16c-d, los parámetros obtenidos por el algoritmo de estabilidad al incluir disipación.

Tabla 16c. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.0011333351$.

proceso físico	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
$\sigma = \nu = 0.$.00758918	-.037485	29.9	20.97	26.6
$\sigma = 5.78 \times 10^{-8}$	1	.00758928	+.037485	30.0	20.97	26.6
$\nu(1) = 1.4 \times 10^{-5}$.00690658	+.037381	29.1	23.04	26.7
$\sigma = \nu = 0.$.00123000	+.104543	30.0	129.3	9.5
$\sigma = 5.78 \times 10^{-8}$	2	.00122991	+.104543	30.0	129.4	9.5
$\nu(1) = 1.4 \times 10^{-5}$.00078205	+.104700	24.5	203.5	9.5

Tabla 16d. Los modos más inestables de la onda RH (2,5) en T_{21} . En la amplitud $\tilde{\Psi}_5^2 = 0.002$.

proceso físico	modos	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
$\sigma = \nu = 0.$.01045032	+.0354388	29.99	15.22	28.21
$\sigma = 5.78 \times 10^{-8}$	1	.01045031	+.0354389	30.00	15.22	28.21
$\nu(1) = 1.4 \times 10^{-5}$.01003589	-.0356648	29.99	15.23	28.21
$\sigma = \nu = 0.$.00050122	+.2151383	30.01	317.5	4.64
$\sigma = 5.78 \times 10^{-8}$	2	.00050107	+.2151379	30.00	317.6	4.64
$\nu(1) = 1.4 \times 10^{-5}$.00018180	-.0732656	23.05	875.4	13.64

Al observar la estructura de la amplitud $\hat{\Psi}_r$ de estos dos modos más inestables (tabla 16b), se notó que son de menor amplitud que los de la tabla 16a. Este mismo efecto se observó con la onda RH (2,5). El término turbulento $\nu(s)\chi_\gamma^s$ y el término rotación $2im_\gamma^{-1}$ contribuyen en los elementos diagonal de la matriz estabilidad $L_{\alpha\gamma}$ e influyen sobre la distancia entre sus eigenvalores. Los elementos de la diagonal aumentan con n_γ ya que $\chi_\gamma = n_\gamma(n_\gamma + 1)$.

5.4.3 Inestabilidad de soluciones generalizadas

k) Estabilidad lineal del modón de Verkley 1984

Sea una solución generalizada (aislada) básica estacionaria de la ecuación de vorticidad sobre la esfera:

$$\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = \begin{cases} X_o(\lambda', \mu') - \omega_o\mu + D_o & \text{en } \varphi_i(S_o) \\ X_i(\lambda', \mu') - \omega_i\mu + D_i & \text{en } \varphi_i(S_i) \end{cases} \quad (5.47)$$

donde (para el caso del modón de Verkley, 1984):

$$X_i(\lambda', \mu') = A_i P_\alpha^1(\mu') \cos \lambda' + B_i P_\alpha^0(\mu')$$

$$X_o(\lambda', \mu') = A_o P_{-\frac{1}{2}+ik}^1(-\mu') \cos \lambda' + B_i P_{-\frac{1}{2}+ik}^0(-\mu')$$

son los momentos multipolares (Verkley, 1984) y eigenfunciones del operador Laplace sobre la esfera, tal que $\Delta X_i = -\chi_\alpha X_i$ y $\Delta X_o = -\chi_\sigma X_o$. En la región del modón

interno $\varphi_\kappa(S_i) = \{(\lambda', \mu') \in \varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_\iota) : \mu' > \mu_a\}$ y en la región del modón externo $\varphi_\kappa(S_o) = \{(\lambda', \mu') \in \varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_\iota) : \mu' < \mu_a\}$, μ_a es la interface entre la región interna y externa del modón, tal que $0 < \mu_a < 1$. Aquí para el caso estacionario $\omega_o = 2/(\chi_\sigma - 2)$ y $\omega_i = 2/(\chi_\alpha - 2)$; la vorticidad absoluta

$$\Delta \tilde{\Psi}(\lambda, \mu) + 2\mu = \begin{cases} -\chi_\sigma(\tilde{\Psi} - D_o) & \text{en } \varphi_\iota(S_o) \\ -\chi_\alpha(\tilde{\Psi} - D_i) & \text{en } \varphi_\iota(S_i) \end{cases} \quad (5.48)$$

Esta solución básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ de la EVB, se muestra en la fig. 3.3a la cual se obtuvo de la ecuación 3.13, y es un vórtice bipolar estacionario ecuatorial al sur de la República Mexicana. Se aplicó el algoritmo de estabilidad en la truncación T_{21} y T_{31} . Los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$, de la amplitud $\widehat{\Psi}$ para los primeros cuatro modos más inestables en la truncación T_{21} y T_{31} se presentan en la fig. 5.23a-d, y en la fig. 5.24a-d respectivamente. En la truncación T_{31} las perturbaciones tienden a ser más coherentes que los de T_{21} (fig. 5.23a-d) y se localizan básicamente en la vecindad del modón (N') y a lo largo de la franja tropical. Estos resultados son consistentes con los campos de las simulaciones numéricas de la EVB vista como un problema de valores iniciales (figs. 4.4a-d) donde se muestra que las perturbaciones se generaron en la vecindad del modón. Los parámetros principales (en la truncación T_{21} y T_{31}) de estos cuatro modos más inestables se dan en la tabla 17a. El número espectral Fojrtof $\chi_{\tilde{\Psi}}$ se ve que no tiene una tendencia hacia un valor fijo.

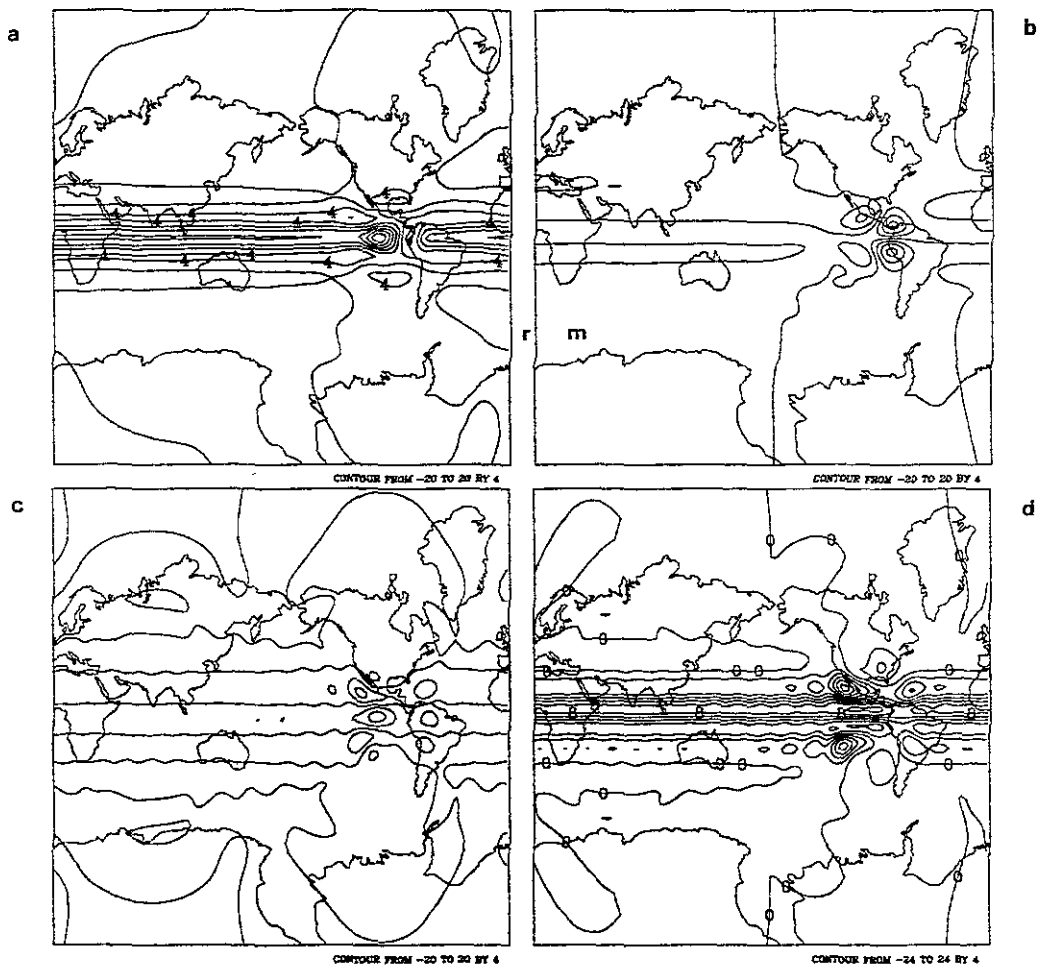


Fig. 5.23. Contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los primeros cuatro modos normal inestables, $\omega_r=0.00316$ a), $\omega_r=0.0369$ b), $\omega_r=0.0511$ y c) $\omega_r=0.0527$ d) correspondiente al modón de Verkley (1984), de fig. 3.3a ó fig. 5.25 y en la truncación T_{21} .

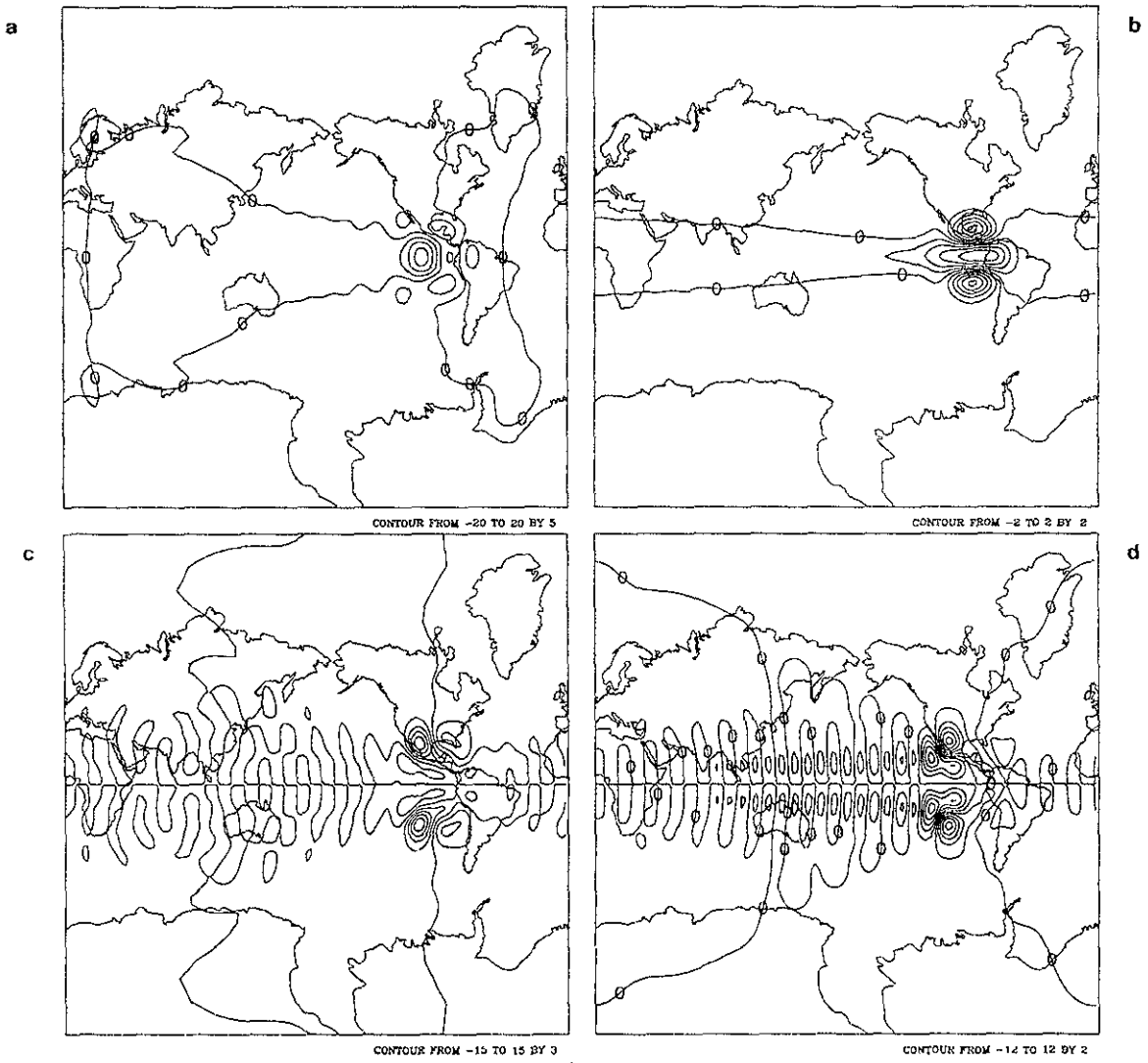
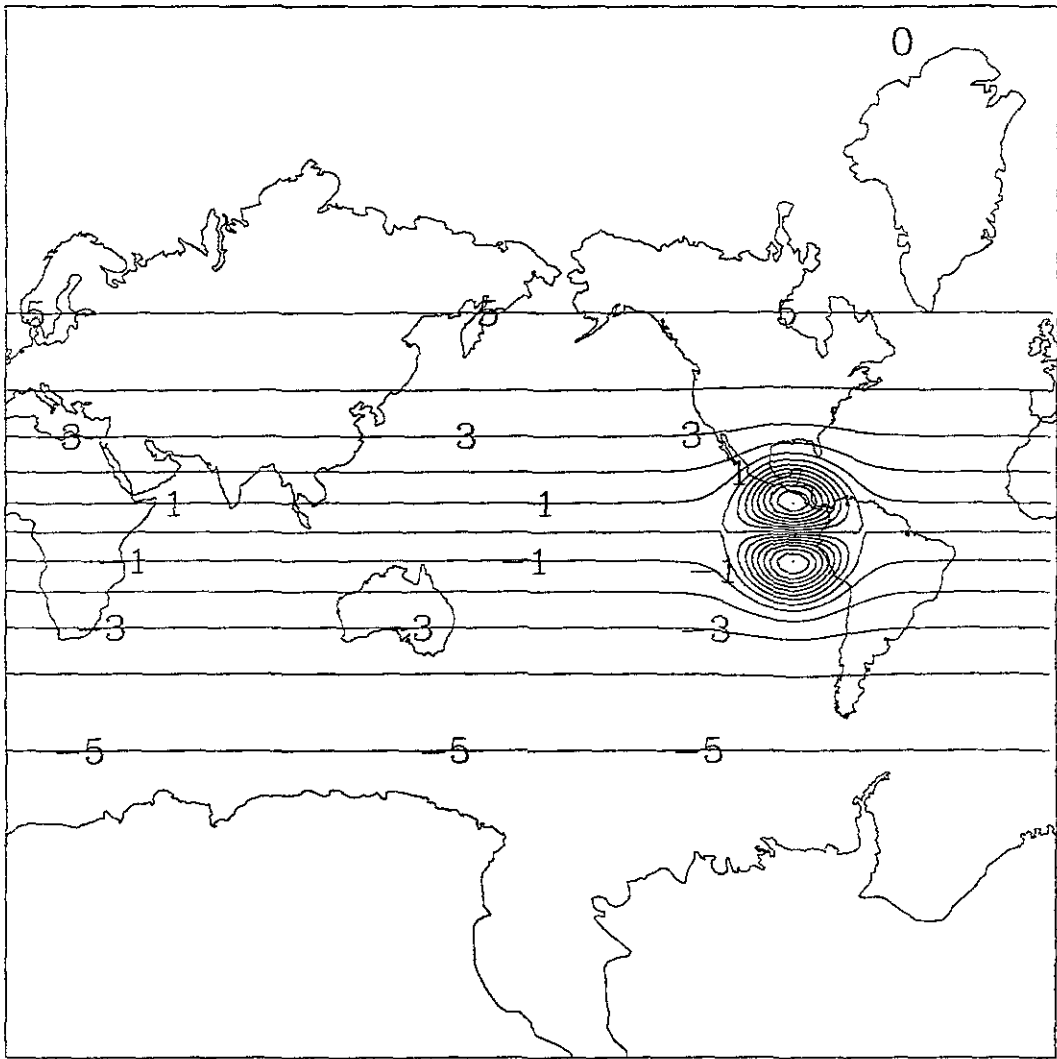


Fig. 5.24. Contornos de la parte real $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los primeros cuatro modos normal inestables, $\omega_r=0.1891$ a), $\omega_r=-0.0450$ b), $\omega_r=-0.0123$ y c) $\omega_r=-0.0105$ d) correspondiente al modón de Verkley (1984), de fig. 3.3a y en la truncación T_{31} .



CONTOUR FROM -9 TO 9 BY 1

Fig. 5.25. Función de corriente básica del modón de Verkey, 1984 utilizado en los análisis de estabilidad.

Tabla 17a. Los modos más inestables del modón Verkley (1984) en T_{21} y T_{31} ,

Truncación	modo	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	τ_e (días)	T (días)
T_{21}	1	0.2174	-0.5626	124.7	0.73	1.7
T_{21}	2	0.1287	0.2932	118.18	1.23	3.4
T_{21}	3	0.0669	-0.9010	248.54	2.3	1.1
T_{21}	4	0.0585	0.9086	234.3	2.7	1.1
T_{31}	1	0.1891	0.6181	120.7	0.84	1.61
T_{31}	2	0.0450	6.34×10^{-7}	114.8	3.5	1576598.3
T_{31}	3	0.0123	0.9839	523.93	12.9	1.0
T_{31}	5	0.0105	0.8320	422.4	15.0	1.2

Si los modones son muy robustos a perturbaciones pequeñas, entonces estas soluciones tienen implicaciones importantes sobre las anomalías persistentes, que se observan en la atmósfera. Un modón como se indicó en el capítulo 3, con un contorno cerrado en la frontera de la región interior, actúa como un abastáculo y podría excitar un tren de ondas RH estacionarias en su delantera. Bajo ciertas circunstancias este tren de ondas RH que están en la delantera pueden alcanzar al modón por atrás, esto por la ciclicidad en la dirección zonal y después extraer energía de la región interior y después radiarlos al exterior (figs. 4.4b-d, figs. 5.23a-d y figs. 5.24a-d).

Estabilidad lineal del modón de Verkley 1990.

Sea la solución básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ modón uniforme de Verkley (1990), el cual se obtuvo de la ecuación 3.13:

$$\tilde{\Psi}(\lambda', \mu') = \begin{cases} Y_o(\lambda', \mu') - \omega_o \mu + D_o \text{ en } \varphi_{\kappa}(S_o) \\ Y_i(\lambda', \mu') - \omega_i \mu + D_i \text{ en } \varphi_{\kappa}(S_i) \end{cases}$$

donde $S_i, S_o \subset S^2$ son las regiones interna y externa del modón, tal que

$$Y_o(\lambda', \mu') = A_o S_{\sigma}^1(\theta') \cos \lambda' + B_o S_{\sigma}^0(\theta')$$

$$Y_i(\lambda', \mu') = A_i T^1(\theta') \cos \lambda' + B_i T^0(\theta')$$

donde

$$\Delta' Y_o = -\chi^o Y_o ; \Delta' Y_i = e_i$$

siendo A_s, B_s, χ^o y e_i constantes. Las funciones especiales en este caso (Verkley, 1990) son:

$$S_{\sigma}^m(\theta') = P_{\sigma}^m(-\cos \theta'), \text{ si } m \geq 0, \sigma \geq -\frac{1}{2}$$

y

$$T^m(\theta') = \begin{cases} Ln \cos \left(\frac{\theta'}{2}\right), \text{ si } m = 0 \\ - \left[\frac{(m-1)!}{2}\right] \left[\tan \left(\frac{\theta'}{2}\right)\right]^m & \text{ si } m > 0 \end{cases}$$

donde P_σ^m es la función asociada de Legendre de orden m y grado real σ , siendo m el número de onda zonal, $\theta' = \frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1} \mu$, y las constantes A_s y B_s se determinan de las condiciones de continuidad. La función $S_\sigma^m(\theta')$ es regular en $\theta' = \pi$ y singular en $\theta' = 0$. La función $T^m(\theta')$ es regular en $\theta' = 0$ y singular en $\theta' = \pi$.

La vorticidad absoluta adquiere la forma:

$$q(\lambda', \mu') = \begin{cases} -\chi^o Y_o(\lambda', \mu') + (2 + 2\omega_o)\mu & \text{en } \varphi_\kappa(S_o) \\ e_i + (2 + 2\omega_i)\mu & \text{en } \varphi_\kappa(S_i) \end{cases}$$

Para hallar una expresión más explícita del modón, se debe dar la forma funcional de las constantes en Y_e y Y_i . Condiciones de continuidad deben satisfacerse al generar estas funciones ($\tilde{\Psi} = \Psi_\kappa(\lambda', \mu')$, $\frac{\partial \tilde{\Psi}_\kappa}{\partial \mu'}$, $\Delta' \Psi_\kappa$) en el borde de la región interior. Para el caso estacionario entonces, se tomó $c_\nu = 0$ en la ecuación 3.10, y como una consecuencia se obtiene aproximadamente (Verkley, 1990) que $\sigma = 8.06$.

Se generó numéricamente el modón Verkley uniforme ψ (con los parámetros $\phi_u = \frac{5\pi}{12}$, $\sigma = 8.06$, $\omega_o = 0.028$, $\lambda_o = 180^\circ$, $\varphi_o = \frac{\pi}{4}$) sobre el sistema de coordenado local $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$, i. e. $\tilde{\Psi}_\kappa = \psi \circ \varphi_\kappa^{-1} : U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2 \rightarrow \mathcal{R}$, tomando una retícula en $U_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa^2$ de $5^\circ \times 5^\circ$, donde se considera la región interna $\varphi_\kappa(S_i)$ y externa $\varphi_\kappa(S_o)$. Sobre la malla de (128, 64) puntos Gaussianos del sistema no primado ya en U_κ se interpolaron los valores de Ψ_κ . La función resultante (modón de Verkley uniforme) ya vista en el sistema de coordenado local $U_i \subset \mathcal{R}_i^2$ se muestra en la Fig. 3.3b y es un vórtice bipolar uniforme localizado sobre el golfo de Alaska.

Para verificar el algoritmo numérico de estabilidad los resultados numéricos también se compararán con la estimación teórica que da la siguiente proposición:

Proposición 8 (Verkley, 1990). Sea la solución básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu)$ modón uniforme de Verkley (1990) de la EVB con vorticidad uniforme sobre la región interna $\varphi_\kappa(S_i) = \{(\lambda', \mu') \in \varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_\nu) : \mu' > \mu_a\}$. Entonces los campos de \tilde{V}_r para los modos estables o inestables son cero sobre la región interna S_i' .

Dem. Ver Verkley, 1990.

También se comparará los resultados de nuestro algoritmo numérico con la estimación de la proposición 6 obtenida por Skiba y Strelkov (2000). En este caso la enstrofia de la perturbación se descompone como

$$\begin{aligned} E(\Psi') &= \frac{1}{2} \|\Delta \Psi'\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Delta \Psi' \Delta \Psi' d\lambda d\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{S_o \cup S_i} \Delta \Psi' \Delta \Psi' d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_o} |\Delta \Psi'|^2 d\lambda d\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} |\Delta \Psi'|^2 d\lambda d\mu \\ &= E^o(\Psi') + E^i(\Psi') \end{aligned}$$

lo cual implica que si $E \neq 0$

$$1 = \frac{E^o}{E} + \frac{E^i}{E} = \delta + \frac{E^i}{E}$$

donde $\delta = \frac{E^o}{E}$, y de la ecuación 5.13 $E^o(\hat{\Psi}) = E(\hat{\Psi})\delta$ y

$$\chi_F(\widehat{\Psi}) = \chi_{\widehat{\Psi}} = [\chi_\sigma^{-1}\delta + (1 - \delta)\chi_\alpha^{-1}]^{-1}$$

es el número Fjorrtof pesado (número Skiba) según la proposición 6, siendo $\chi_\sigma = \sigma(\sigma+1)$ y $\chi_\alpha = \alpha(\alpha+1)$. Sea la función $\psi : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$, para determinar las integrales de la forma

$$\int_{S_i} \psi ds(x)$$

se considera el atlas (Ω_l, φ_l) , $l = \iota, \kappa$, el cual cubre completamente a la esfera y la región interna del modón $S_i \subset S^n$, $S_i \subset \Omega_\iota \cap \Omega_\kappa$ contenida en el dominio coordenado Ω_ι de la carta $(\Omega_\iota, \varphi_\iota)$ con coordenadas $(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n) = (\lambda, \mu)$ si $n = 2$. Sea ψ una función continua y acotada definida sobre S^2 . Entonces intentamos definir la integral de ψ en el sistema no primado sobre S_i por la fórmula

$$\int_{S_i} \psi ds(x) = \int_{\varphi_\iota(S_i)} \Psi_\iota(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n) dx_\iota^1 \cdots dx_\iota^n = \int_{\varphi_\iota(S_i)} \psi \circ \varphi_\iota^{-1}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

donde $\Psi_\iota(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n) = \psi \circ \varphi_\iota^{-1}(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n)$ es la expresión en coordenadas de ψ . Sea S_i también contenida en Ω_κ el cual es el dominio coordenado de la carta $(\Omega_\kappa, \varphi_\kappa)$, con coordenadas $(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) = (\lambda', \mu')$ si $n = 2$. Entonces por definición tenemos que la integral de ψ en el sistema primado sobre S_i se calcula como

$$\int_{S_i} \psi ds(x) = \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \Psi_\kappa(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) dx_\kappa^1 \cdots dx_\kappa^n = \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \psi \circ \varphi_\kappa^{-1}(\lambda', \mu') d\lambda' d\mu'$$

Por otro lado existe la regla de transformación entre coordenadas locales $\varphi_{\iota\kappa} = \varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1} : U_{\iota\kappa} \rightarrow U_{\kappa\iota}$ tal que $\varphi_{\iota\kappa}(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n) = (x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n)$, donde $U_{\iota\kappa} = \varphi_\iota(\Omega_\iota \cap \Omega_\kappa)$ y $U_{\kappa\iota} = \varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_\iota)$. Sea $Jac \varphi_{\iota\kappa}$ la matriz Jacobiana de la transformación $\varphi_{\iota\kappa}$ y su determinante definido como

$$\det Jac \varphi_{\iota\kappa} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{\iota\kappa}^1}{\partial x_\iota^1} & \frac{\partial \varphi_{\iota\kappa}^1}{\partial x_\iota^n} \\ \frac{\partial \varphi_{\iota\kappa}^n}{\partial x_\iota^1} & \frac{\partial \varphi_{\iota\kappa}^n}{\partial x_\iota^n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi_{\iota\kappa}^1, \varphi_{\iota\kappa}^n)}{\partial(x_\iota^1, x_\iota^n)} = \frac{\partial(x_\kappa^1, x_\kappa^n)}{\partial(x_\iota^1, x_\iota^n)},$$

para $s \in S^2$ tenemos que $\det Jac \varphi_{\iota\kappa}(\varphi_\iota(s)) = \det Jac \varphi_{\iota\kappa}(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n) = \frac{\partial(x_\kappa^1, x_\kappa^n)}{\partial(x_\iota^1, x_\iota^n)}(x_\iota^1, \dots, x_\iota^n)$ y por lo que para una función $\psi : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$, y $\varphi_{\iota\kappa} = \varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1} : U_{\iota\kappa} \rightarrow U_{\kappa\iota}$ tenemos la regla

$$\Psi_\iota(\varphi_\iota(s)) = \Psi_\kappa(\varphi_{\iota\kappa}(\varphi_\iota(s))) \det Jac \varphi_{\iota\kappa}(\varphi_\iota(s)).$$

Por otro lado, para la transformación inversa $\varphi_{\kappa\iota} = \varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : U_{\kappa\iota} \rightarrow U_{\iota\kappa}$, donde $\varphi_{\kappa\iota}(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) = (x_\iota^1, \dots, x_\iota^n)$, la regla es

$$\Psi_\kappa(\varphi_\kappa(s)) = \Psi_\iota(\varphi_{\kappa\iota}(\varphi_\kappa(s))) \det Jac \varphi_{\kappa\iota}(\varphi_\kappa(s))$$

Así que por la fórmula de cambio de variable en las integrales múltiples anteriores pueden escribirse al usar la transformación

$$\begin{aligned}\Psi_l(x_l^1, \dots, x_l^n) &= \Psi_\kappa \circ \varphi_{l\kappa}(x_l^1, \dots, x_l^n) \det \text{Jac } \varphi_{l\kappa}(x_l^1, \dots, x_l^n) \\ &= \Psi_\kappa(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) \frac{\partial(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n)}{\partial(x_l^1, \dots, x_l^n)}(x_l^1, \dots, x_l^n)\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_l(S_i)} \Psi_l(x_l^1, \dots, x_l^n) dx_l^1 \cdot \dots \cdot dx_l^n &= \int_{U_{l\kappa}} \Psi_\kappa \circ \varphi_{l\kappa}(x_l^1, \dots, x_l^n) | \det \text{Jac } \varphi_{l\kappa}(x_l^1, \dots, x_l^n) | dx_l^1 \cdot \dots \cdot dx_l^n \\ &= \int_{\varphi_{l\kappa}} \Psi_\kappa(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) dx_\kappa^1 \cdot \dots \cdot dx_\kappa^n \\ &= \int_{\varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_l)} \Psi_\kappa(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) dx_\kappa^1 \cdot \dots \cdot dx_\kappa^n\end{aligned}$$

donde se ha usado que $dx_l^1 \cdot \dots \cdot dx_l^n = \frac{\partial(x_l^1, \dots, x_l^n)}{\partial(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n)} dx_\kappa^1 \cdot \dots \cdot dx_\kappa^n$, siendo $\frac{\partial(x_l^1, \dots, x_l^n)}{\partial(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n)}$ el determinante Jacobiano del difeomorfismo $\varphi_\kappa \circ \varphi_l^{-1}$ de $\varphi_l(\Omega_l \cap \Omega_\kappa)$ a $\varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_l)$. Lo cual demuestra que ambas integrales son iguales, ya que $\text{Jac } \varphi_{l\kappa} \text{Jac } \varphi_{l\kappa} = \text{Jac } \varphi_{l\kappa} \text{Jac } \varphi_{l\kappa} = I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, y por otro lado no es difícil demostrar que $\det \text{Jac } \varphi_{l\kappa} = 1$.

El centro de la región interna S_i del modón es el polo norte primado N' y $\varphi_\kappa(S_i) = \{(\lambda', \mu') \in \varphi_\kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_l) : \mu' > \mu_a\}$. En los cálculos numéricos las integrales en el sistema primado:

$$\int_{S_i} \psi ds(x) = \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \Psi_\kappa(x_\kappa^1, \dots, x_\kappa^n) dx_\kappa^1 \cdot \dots \cdot dx_\kappa^n = \int_{\varphi_\kappa(S_i)} \psi \circ \varphi_\kappa^{-1}(\lambda', \mu') d\lambda' d\mu'$$

lo resolvemos numéricamente de la forma

$$\int_{\varphi_\kappa(S_i)} \psi \circ \varphi_\kappa^{-1}(\lambda', \mu') d\lambda' d\mu' = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\mu_a}^{+1} \Psi_\kappa(\lambda', \mu') d\mu' d\lambda' = \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{\Psi}(\lambda') d\lambda'$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(\lambda') &= \int_{\mu_a}^{+1} \Psi_\kappa(\lambda', \mu') d\mu' = \sum_{j=1}^J \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \Psi_\kappa(\lambda', \mu') d\mu' \\ &\approx \sum_{j=1}^J \bar{\Psi}_\kappa(\lambda', \mu'_j(\lambda)) (\mu_{j+1} - \mu_j) = \sum_{j=1}^J \left[\frac{\Psi_\kappa(\lambda', \mu'_j) + \Psi_\kappa(\lambda', \mu'_{j+1})}{2} \right] (\mu_{j+1} - \mu_j)\end{aligned}$$

siendo $\mu_a = \mu'_1 < \mu'_2 < \dots < \mu'_n = 1$, una partición del intervalo $[\mu_a, 1]$. Por otro lado la integral de $\bar{\Psi}(\lambda')$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se determina, eligiendo la partición $-\pi = \lambda'_1 < \lambda'_2 < \dots < \lambda'_n = \pi$, como

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{\Psi}(\lambda') d\lambda' \approx \sum_{i=1}^I \left[\frac{\bar{\Psi}(\lambda'_i) + \bar{\Psi}(\lambda'_{i+1})}{2} \right] (\lambda'_{i+1} - \lambda'_i)$$

Ahora como

$$\bar{\Psi}(\lambda'_i) = \sum_{j=1}^J \widetilde{\Psi}_\kappa(\lambda'_i, \mu'_j(\lambda))(\mu_{j+1} - \mu_j) ; \bar{\Psi}(\lambda'_{i+1}) = \sum_{j=1}^J \widetilde{\Psi}_\kappa(\lambda'_{i+1}, \mu'_j(\lambda_{i+1}))(\mu_{j+1} - \mu_j)$$

obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{\Psi}(\lambda') d\lambda' \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [\Psi_\kappa(\lambda'_i, \mu'_j) + \Psi_\kappa(\lambda'_i, \mu'_{j+1}) + \Psi_\kappa(\lambda'_{i+1}, \mu'_j) + \Psi_\kappa(\lambda'_{i+1}, \mu'_{j+1})] (\mu_{j+1} - \mu_j)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$$

pero como $(\lambda_{i+1} - \lambda_i) = \frac{2\pi}{I-1}$ para todo $i = 1, \dots, I-1$, y así que obtenemos que la integral en la región interna se determina aproximadamente como

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \psi ds(x) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\mu_a}^{+1} \Psi_\kappa(\lambda', \mu') d\lambda' d\mu' \\ &= \frac{2\pi}{4(I-1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [\Psi_\kappa(\lambda'_i, \mu'_j) + \Psi_\kappa(\lambda'_i, \mu'_{j+1}) + \Psi_\kappa(\lambda'_{i+1}, \mu'_j) + \Psi_\kappa(\lambda'_{i+1}, \mu'_{j+1})] \\ &\quad (\mu_{j+1} - \mu_j)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \end{aligned}$$

Similarmente se calcula la integral numérica de una función sobre el sistema no primado.

Se aplicó el algoritmo de estabilidad y los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ y $\widehat{V}_r = \Delta \widehat{\Psi}_r$, de la amplitud para el modo más inestable se presenta en la fig. 5.27a-d, y fig. 5.27c-d, en la truncación T_{21} y T_{31} respectivamente, y donde ahora se presenta el valor numérico del número espectral Skiba $\chi_{\widehat{\Psi}_s}$. En las dos truncaciones la configuración de $\widehat{\Psi}_r$ para el modo normal más inestable es el mismo. Los parámetros principales en la truncación T_{21} y T_{31} de los cuatro primeros modos más inestables se da en la tabla 17b. En la truncación T_{31} las perturbaciones tienden a ser más coherentes y se localizan básicamente sobre el Pacífico sur. En los campos de \widehat{V}_r (ver fig. 5.27b,c) sobre la región interna del modón pasan los contornos ceros, y por lo tanto está de acuerdo con la estimación de la proposición 8 anterior.

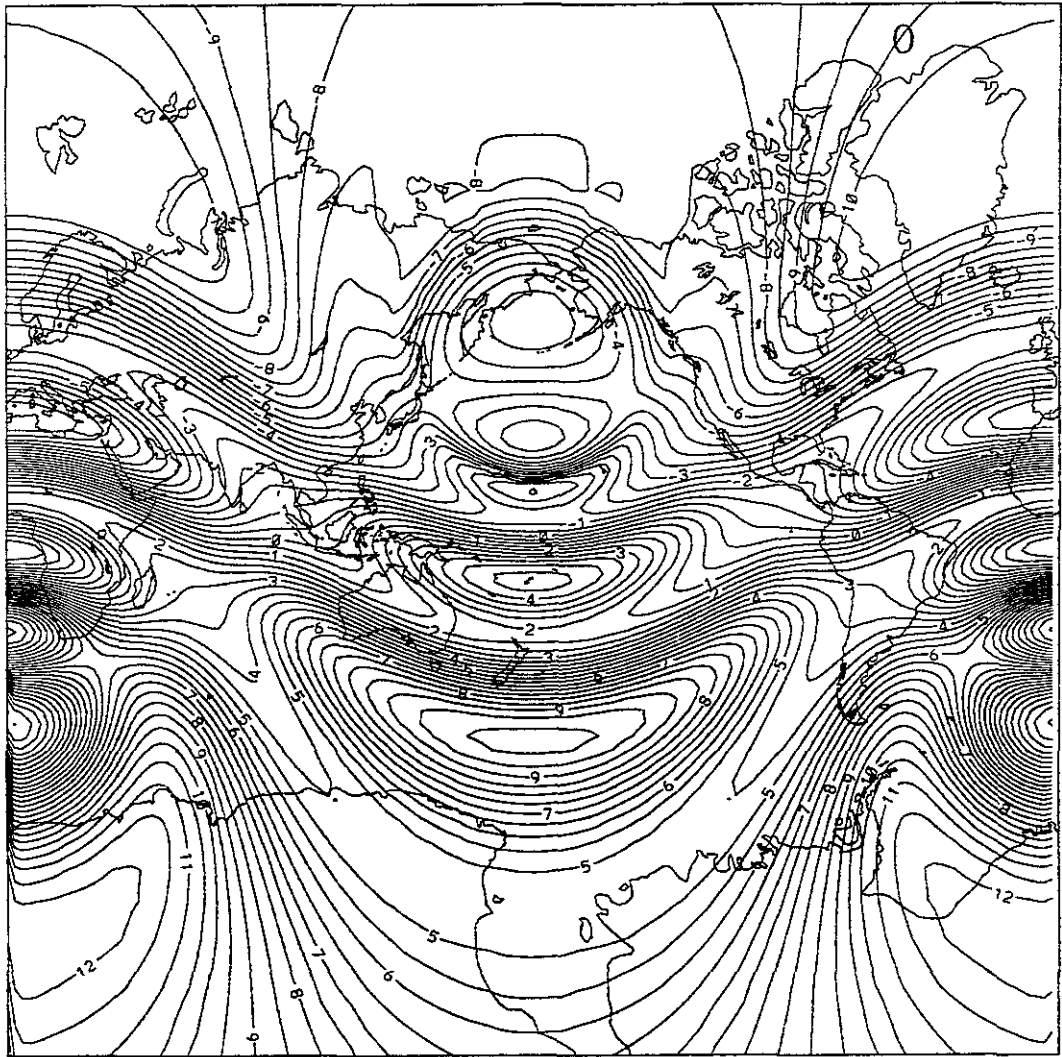


Fig. 5.26. Función de corriente básica del modón de Verkleij, 1990 utilizado en los análisis de estabilidad.

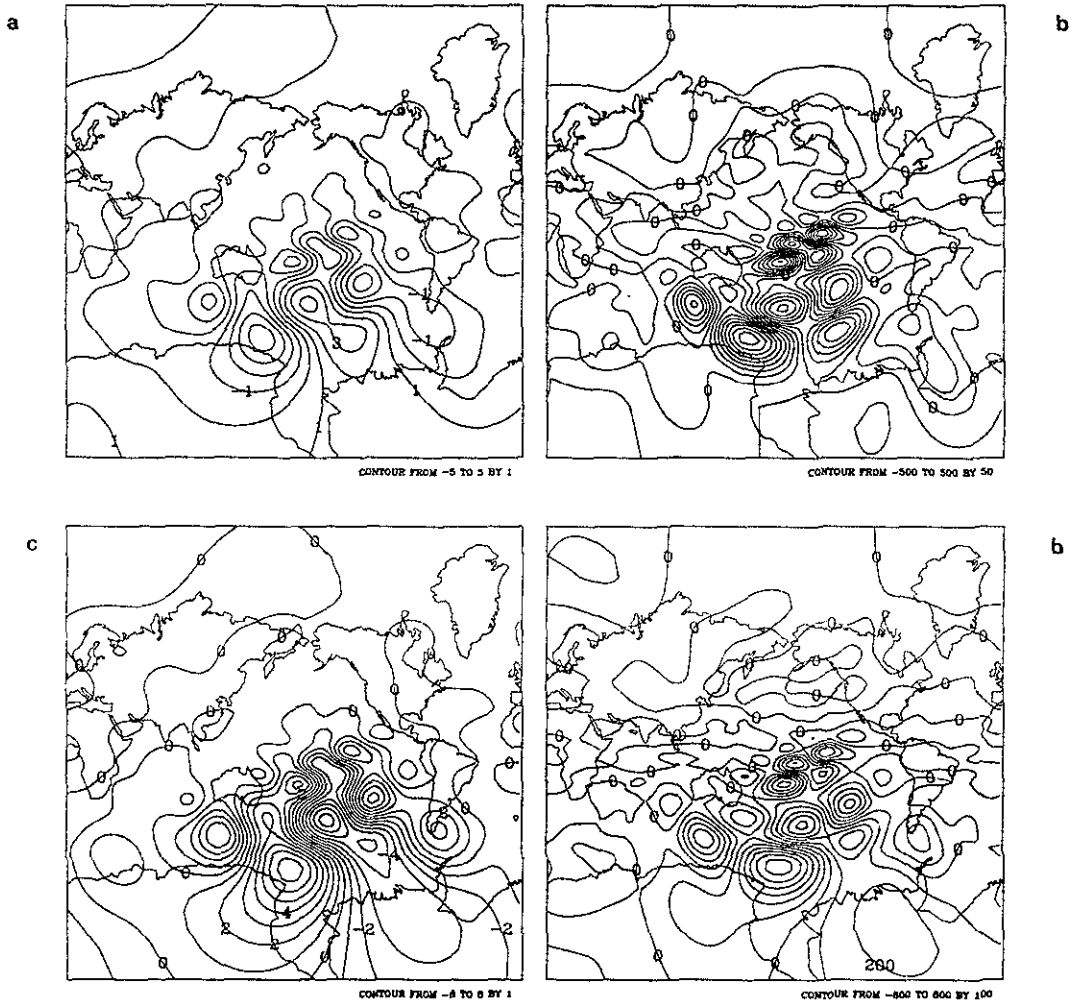


Fig. 5.27. Contornos de la parte real de $\hat{\Psi}_T(\lambda, \mu)$ y $\hat{V}_T = \Delta \hat{\Psi}_T$ del primer modo normal más inestable del modón de Verkey (1990), con $\omega_T = 0.2630$ en la truncación T_{31} , a) y b); y con $\omega_T = 0.2629$ en T_{31} , c) y d) respectivamente.

Tabla 17b. Los modos más inestables del modón verkley (1990) en T_{21} y T_{31} ,

Truncación	Modo	ω_r	ω_i	$\chi_{\tilde{\Psi}_s}$	$\chi_{\tilde{\Psi}}$	$\tau_e(\text{días})$	$T(\text{días})$
T_{21}	1	0.2630	5.51×10^{-7}	73.04	86.36	0.6	793992.
T_{21}	2	0.2179	0.039	73.56	90.82	0.73	25.37
T_{21}	3	0.2070	-0.0918	73.44	102.41	0.76	10.89
T_{21}	4	0.2004	-0.2933	73.44	72.86	0.79	3.4
T_{31}	1	0.2629	-0.0180	73.0386	84.03	0.60	52.5
T_{31}	2	0.2455	0.0540	73.1628	93.83	0.64	18.50
T_{31}	3	0.1928	0.2739	73.2115	73.43	0.82	3.65
T_{31}	4	0.1790	0.1243	73.20	102.29	0.88	8.04

Como puede observarse en la tabla 17b, todavía no hay una concordancia total en los resultados teóricos y numéricos con la truncaciones T_{21} y T_{31} . En la columna 5 se demuestra una convergencia de los resultados numéricos conforme el número de truncación M y N de la serie de Fourier (8) aumenta. Por ejemplo para el modo más inestable puede verse que todavía hay una diferencia entre el valor teórico $\chi_\sigma = \sigma(\sigma + 1) = 73.02$ del número espectral $\chi_{\tilde{\Psi}_s}$, según la proposición 6 y el valor numérico el cual es igual a 73.04 en la resolución T_{21} , y 73.03 en la resolución T_{31} . Para el segundo modo más inestable el correspondiente valor numérico se aleja más al valor teórico que es igual a 73.56 en T_{21} , y 73.16 en T_{31} . Más sin embargo, como se nota en la figura 5.27a y 5.27c, el modo más inestable es casi de la misma estructura en las dos resoluciones T_{21} y T_{31} .

Como se indicó arriba, la serie de armónicos esféricos para el modón y sus perturbaciones convergen más lentamente que los correspondientes flujos PL y ondas RH (Topuria, 1987; Skiba, 1989, 1994, 1997). Más sin embargo, debido al fenómeno de Gibbs (Davis, 1963), la convergencia de la serie de Fourier es más rápida dentro de las regiones S_i y S_o que en la vecindad de la frontera $\mu = \mu_a$, así que no importa qué tan grandes sean M y N , en algún punto de la esfera S^2 las sumas finitas (5.8) son muy cercanas a las mismas funciones $\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}'$ y ξ' , pero en otros puntos estas sumas difieren mucho de $\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}'$ y ξ' . Por lo tanto mayores truncaciones M y N que 31 deben de usarse en (5.8) para reducir los errores numéricos. La importancia de usar grandes resoluciones para la solución del problema espectral (5.15) lo ha demostrado teóricamente Skiba (1998) y numéricamente Neven (2001) que ha usado la resolución T_{341} y el método de potencia en el estudio de estabilidad de modos normales de modones sobre la esfera.

m) Estabilidad lineal de la solución global Wu-Verkley

Sea la solución básica *Wu-Verkley* (Wu,1993) construida en la ecuación 3.18 de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\lambda, \mu) &= \begin{cases} Y_1(\lambda - ct, \mu) - \omega_1\mu + D_1 \text{ en } S_1 \\ Y_0(\lambda - ct, \mu) - \omega_0\mu + D_0 \text{ en } S_0 \\ Y_2(\lambda - ct, \mu) - \omega_2\mu + D_2 \text{ en } S_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} X_o(\lambda', \mu') - \omega_o\mu + D_o \text{ en } \varphi_i(S_o) \\ X_i(\lambda', \mu') - \omega_i\mu + D_i \text{ en } \varphi_i(S_i) \end{cases} \end{aligned}$$

el cual es una solución exacta de la ecuación de vorticidad sobre la esfera, $S_i, S_o \subset S^2$, donde $S_1 = [-\pi, \pi] \times [-\mu_0, \mu_0]$, $S_0 = [-\pi, \pi] \times [-\mu_0, 1]$, $S_2 = [-\pi, \pi] \times [-1, -\mu_0]$. Siendo $\varphi_i(S_i) = S_0 = \{(\lambda, \mu) \in \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_\kappa) : \mu \in (-\mu_0, \mu_0)\}$, $\varphi_i(S_o) = S_1 \cup S_2 = \{(\lambda, \mu) \in \varphi_i(\Omega_i \cap \Omega_\kappa) : \mu \in (\mu_0, 1] \cup [-1, \mu_0), 0 < \mu_0 < 1\}$

Las velocidades de fase, en $S_1 \cup S_2$ es $c = c_\alpha = \omega_1 - \frac{2(\omega_1+1)}{\chi_\alpha}$ y en $S_1 \cup S_2$ y en S_0 $c_\sigma = \omega_0 - \frac{2(\omega_0+1)}{\chi_\sigma}$. Así que para el caso de una solución estacionaria ($c_\alpha = c_\sigma = c = 0$) obtenemos que

$$\omega_0 = \frac{2}{(\chi_\sigma - 2)}, \omega_1 = \frac{2}{(\chi_\alpha - 2)}$$

Las eigenfunciones Y_i , adquieren la forma

$$Y_1(\lambda - ct, \mu) = A_1 P_\alpha^0(\mu) + B_1 P_\alpha^m(\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

$$Y_0(\lambda - ct, \mu) = A_0 T_\sigma^0(\mu) + B_0 T_\sigma^m(\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

$$Y_2(\lambda - ct, \mu) = -A_1 P_\alpha^0(-\mu) - B_1 P_\alpha^m(-\mu) \cos m(\lambda - ct),$$

siendo α o σ números reales, tal que

$$T_\sigma^m(\mu) = P_\sigma^m(\mu) - P_\sigma^m(-\mu)$$

Con los parámetros $\mu_0 = \text{sen}\phi_0$, $\phi_0 = 29.99^\circ$, $m = 2$, $\alpha = 4.5419$, $\sigma = 5.7701$, $\chi_\alpha = \alpha(\alpha + 1) = 25.1717$, $\chi_\sigma = \sigma(\sigma + 1) = 39.0679$ se obtiene esta onda Wu-Verkley básica. En la fig. 3.4 se muestra para distintas amplitudes, la estructura de esta solución básica y en la fig. 5.28a se presenta la solución básica que se aplicará al algoritmo de estabilidad.

Se aplicó el algoritmo de estabilidad y los contornos de la parte real $\widehat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud para los primeros cuatro modos más inestables se presentan en la fig. 5.28b-c, y fig. 5.29a-d, en la truncación T_{21} y T_{31} respectivamente. Los parámetros principales en la truncación T_{21} y T_{31} de los cuatro primeros modos más inestables se da en la tabla 18. En la truncaciones T_{21} y T_{31} las perturbaciones básicamente son las mismas y son más coherentes los de T_{31} . La $\widehat{\Psi}_r$ para el primer modo más inestable (fig. 5.28b ó 5.59a) las perturbaciones se localizan sobre la zona de difluencia de los jets subtropicales, lo cual se nota mejor en la T_{31} . Para el segundo modo normal más inestable (fig. 5.29b) hay perturbaciones en la zona de difluencia del jet ecuatorial del campo básico por otro lado en las latitudes más altas estas perturbaciones se extienden sobre las zonas de confluencia de los jets subtropicales.

Tabla 18. Los modos más inestables la onda Wu-Verkley en T_{21} y T_{31} ,

T_N	modo	ω_r	ω_i	$\chi_{\hat{\Psi}}$	$\chi_{\hat{\Psi}_s}$	τ_e (días)	T (días)
T_{21}	1	0.073024	-0.109390	34.49	32.07	2.17	9.14
T_{21}	2	0.058004	-0.118794	32.02	33.93	2.74	8.41
T_{21}	3	0.039895	-0.200079	38.42	36.30	3.90	4.90
T_{21}	4	0.029342	-0.167168	34.24	33.86	5.42	5.98
T_{31}	1	0.070869	-0.112484	34.70	32.50	2.24	8.80
T_{31}	2	0.056491	+0.131531	31.66	35.14	2.80	7.60
T_{31}	3	0.049520	+0.208081	37.50	34.48	3.20	4.80
T_{31}	4	0.038106	-0.191328	34.00	32.96	4.10	5.22

Para el caso de la solución global Wu-Verkley la expresión de la enstrofia de la perturbación se expresa en la forma

$$\begin{aligned}
 E(\Psi') &= E^o(\Psi') + E^i(\Psi') = \frac{1}{4\pi} \int_{(\mu_o, 1) \cup [-1, -\mu_o]} |\Delta \Psi'|^2 ds + \\
 &\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\mu_o}^{+\mu_o} |\Delta \Psi'|^2 ds = \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mu_o}^{+1} |\Delta \Psi'|^2 ds + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-\mu_o} |\Delta \Psi'|^2 ds \right] \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\mu_o}^{+\mu_o} |\Delta \Psi'|^2 ds
 \end{aligned}$$

Como puede observarse hay una buena concordancia total en los resultados teóricos y numéricos con la truncaciones T_{21} y T_{31} . En la tabla 18 (columnas 5 y 6) se demuestra una convergencia de los resultados numéricos conforme los números de truncación M and N de la serie de Fourier aumenta (5.8), esta convergencia es muy lenta. Por ejemplo para los cuatro modos inestables puede verse que hay todavía una diferencia entre los valores numéricos del número espectral Fojtorf $\chi_{\hat{\Psi}}$ y el número espectral Skiba $\chi_{\hat{\Psi}_s}$, según la proposición 6.

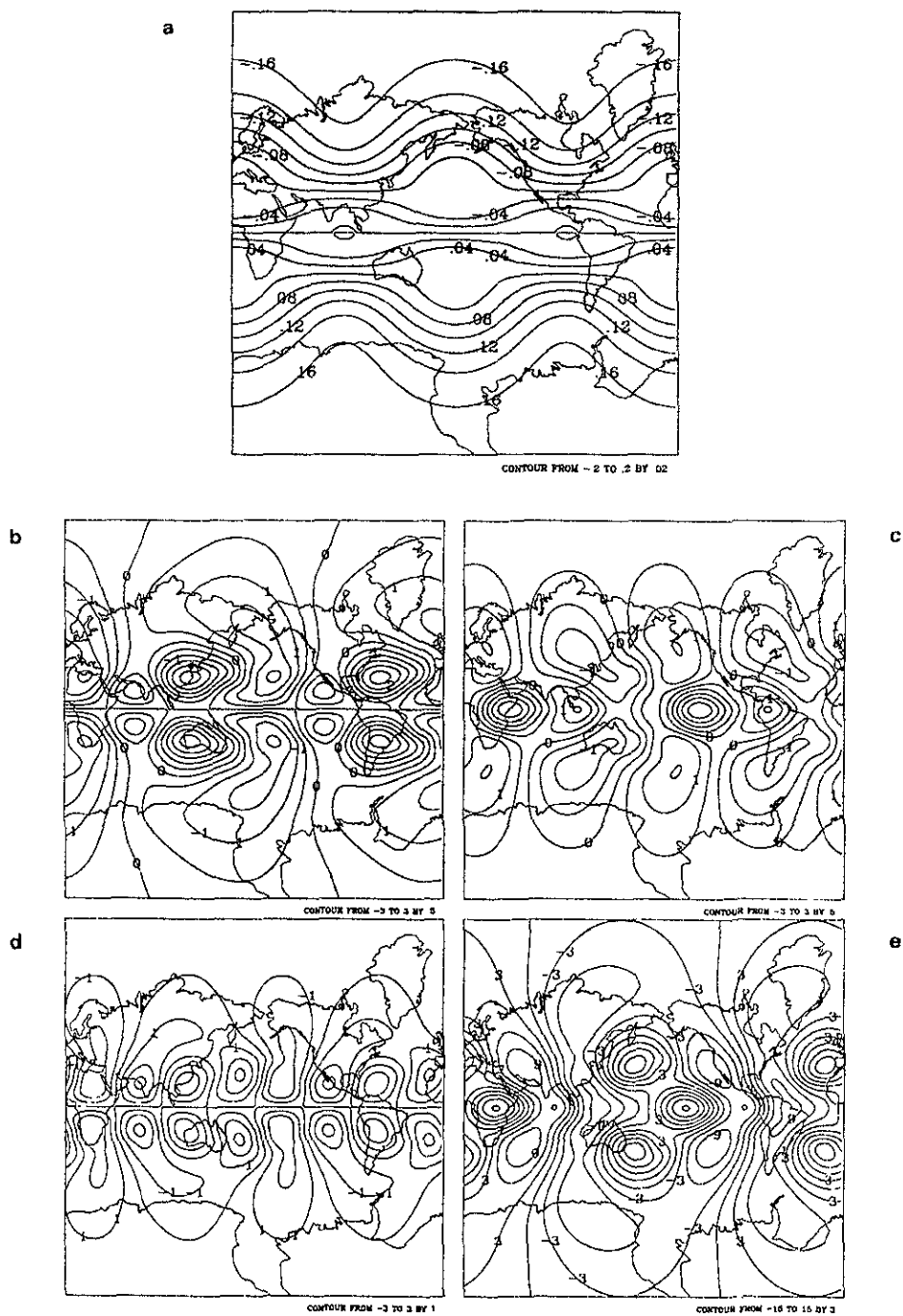


Fig. 5.28. Onda Wu-Verkley básica que se utiliza en los cálculos de estabilidad a), y contornos de la parte real $\hat{\Psi}_r(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los primeros cuatro modos normal más inestables, $\omega_r=0.083541$ b), $\omega_r=0.059525$ c), $\omega_r=0.04118$ d) y $\omega_r=-0.03922$ e) en la truncación T_{21} .

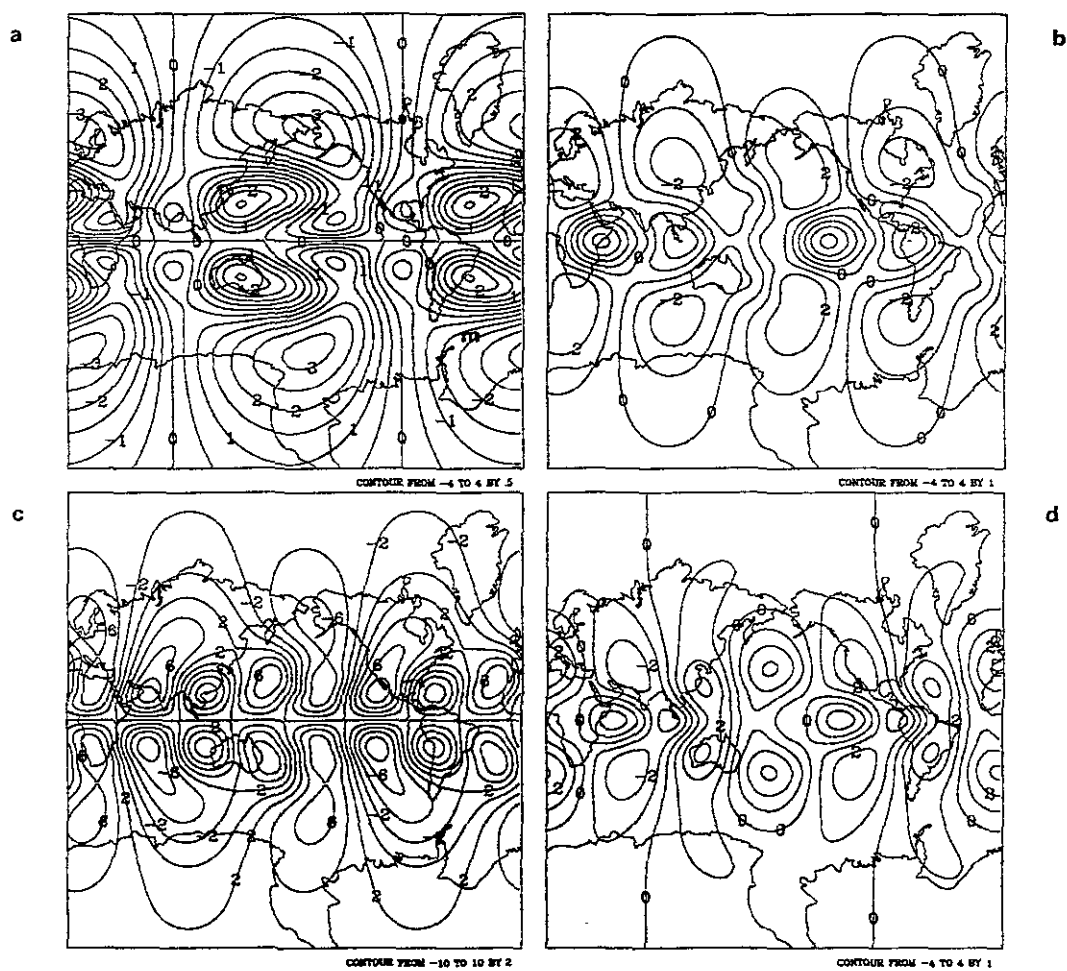


Fig. 5.29. Contornos de la parte real $\hat{\Psi}_R(\lambda, \mu)$ de la amplitud de los primeros cuatro modos normal más inestables de la Onda Wu-Verkley básica, $\omega_r=0.0758$ a), $\omega_r=0.06499$ b), $\omega_r=0.04332$ c) y $\omega_r=0.03566$ d) en la truncación T_{31} .

Capítulo 6

CONCLUSIONES

La ecuación de vorticidad barotrópica no divergente se ha usado con éxito durante varias décadas para describir la dinámica de procesos atmosféricos barotrópicos de gran escala y de bajas frecuencias. A pesar de ser un modelo muy simplificado de las ecuaciones de la dinámica atmosférica contiene los ingredientes principales que pueden describir el comportamiento complejo de la atmósfera, incluyendo el comportamiento caótico (Ilyin, 1993, Skiba, 1997).

En este estudio, desde varias perspectivas y usando el método espectral se ha analizado la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente sobre la esfera. El objetivo principal fue analizar el modelo analítico, el modelo espectral numérico (de valores iniciales y el de estabilidad), y realizar pruebas del modelo espectral con flujos analíticos (PL, RH, Wu-Verkley, modones).

Se examinó la clase de soluciones exactas de la EVB, como son los flujos zonales, ondas Rossby Haurwitz (RH), las soluciones aisladas (modones), y las soluciones globales llamadas ondas Wu-Verkley formadas por varias ondas RH. Donde se hizo el intento de conectar métodos modernos de la teoría de funciones definidas sobre la esfera, con la representación de funciones en términos de armónicos esféricos, se trató de dar una formulación matemática rigurosa de los distintos aspectos conectados con la construcción de estas soluciones exactas de la EVB.

Después en el capítulo 4 se resolvió la EVB sobre la esfera usando el método numérico de transformada espectral y se probó con la clase de soluciones exactas de la EVB. Se enfatizó en estudiar el comportamiento del error relativo entre la solución exacta y la solución numérica, y en preservar la energía cinética total, la enstrofia integral y la estructura geométrica de las soluciones (flujos zonales, ondas de Rossby-Haurwitz, soluciones de Wu-Verkley, y modones bipolares de Verkley). Las integraciones realizadas con el modelo en un intervalo de 10 días, mostraron que las soluciones exactas clásicas se reproducen con una buena precisión. Sin embargo, la estabilidad de las soluciones exactas generalizadas respecto a los errores iniciales y los errores asociados al forzamiento numérico puede ser un serio obstáculo en simular el comportamiento de dichas soluciones a largo plazo. Si éste es el caso entonces el modelo espectral con alta truncación y con un paso de tiempo muy pequeño falla en resolver el problema.

Esto por el error que se comete al integrar por el esquema leapfrog. Comparando, las trayectorias de las soluciones numéricas con las soluciones exactas, éstas divergen de una a otra en el tiempo. Por otra parte, la energía total y la enstrofia integral de todas las soluciones calculadas numéricamente se conservan con un alto grado de precisión por lo menos durante los primeros diez días. Analizando éste problema se propusieron algunas alternativas de cómo resolverlas más eficientemente que fué el de incorporar un filtro numérico en el tiempo en el esquema de integración leapfrog y el de proponer un método implícito (el cual no se probó) en la forma espectral para integrar la EVB.

Incorporando el filtro numérico, y los términos de forzamiento y disipación se realizaron integraciones a más largo plazo hasta por 100 días o más. Las pruebas se realizaron con la solución Wu-Verkley y la solución similar a la de Wu-Verkley construida en base a observaciones en el cap. 3. Wu, (1993) al usar un modelo espectral dependiente del tiempo, con forzamiento y disipación, demostró que las soluciones libres Wu-Verkeley (1993) un poco degeneradas pueden por resonancia exitarse a una amplitud finita, y que los procesos de inestabilidad barotrópica y resonancia no lineal de ondas planetarias es el mecanismo que dispara regímenes de flujos diferentes en ambos hemisferios. Según Wu esto es una regla que podría producir la variabilidad de baja frecuencia que se observa en la atmósfera. Estos experimentos los repetimos con la nueva solución construida en el cap. 3, la cual es menos idealizada. La estabilidad de esta solución se probó con integraciones en el tiempo usando el modelo espectral y para esta nueva solución, ésta demostró oscilaciones entre dos tipos de regímenes parecidos a los encontrados por Wu, 1993. También al realizar integraciones a largo plazo (150 días) con forzamiento, y disipación y al calcular la anomalía de flujo promedio de los resultados de los primeros 100 días observamos (fig. 4.9c) la existencia de ciertos patrones de variabilidad de baja frecuencia, los cuales podrían estar conectados con el proceso de inestabilidad barotrópica.

Se probó el algoritmo numérico de estabilidad barotrópica, desarrollado para estudiar la inestabilidad de flujos ideales arbitrarios sobre la esfera en rotación. Se probó con la clase de soluciones exactas de la EVB que fueron flujo zonal especificado por polinomios de Legendre, ondas Rossby-Haurwitz zonales, modones zonales, ondas Rossby-Haurwitz, modones y las ondas Wu-Verkley. Los resultados de los experimentos numéricos de estabilidad se checaron con algunas estimaciones teóricas desarrolladas hasta ahora. Para los flujos zonales los resultados numéricos de estabilidad fueron de buena precisión satisfaciéndose todos los requerimientos teóricos (a-j). En particular, todas las figuras representando la función de corriente del modo normal más inestable Ψ' , la inclinación de los contornos de Ψ' fue opuesto al de el perfil de velocidad básica. El cual está de acuerdo con la primera integral de la ecuación (5.34) de energía de perturbaciones (el corolario). Para flujos zonales en más de el 50 % de los experimentos que se realizaron, el número de onda zonal para el modo más inestable fue $m = 2$. Los siguientes fueron $m = 3$ y $m = 1$. Lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos por Baines (1976).

Los resultados numéricos sobre la inestabilidad del modón monopolar zonal fueron también satisfactorios. La mayor parte de los requerimientos a)-j) se cumplieron. Por

otro lado como el modón no es tan suave como los flujos PL o ondas RH (ya que la derivada de la vorticidad del modón es discontinua sobre la esfera), entonces las series de armónicos esféricos para el modón $\tilde{\Psi}$ y sus perturbaciones converge muy lentamente conforme la truncación M y N aumenta. Hemos (Pérez y Skiba 2000) encontrado dos manifestaciones de porqué se presenta la convergencia lenta: 1) la estructura del modo más inestable se cambió en la resolución T_{31} el cual fue el mismo en la truncaciones T_{21} y T_{42} ; y 2) al comparar con los flujos zonales PL y las ondas RH, el número espectral $\chi_{\hat{\Psi}} = \eta(\hat{\Psi})/K(\hat{\Psi})$ de la amplitud del modo normal más inestable del modón zonal y del modón (aislado y uniforme) se calculó con mayor error. Por lo tanto para obtener mejores resultados para el modón se requiere trabajarlo con una mayor resolución que la de T_{42} .

También tomamos un estado básico zonal observado que fue el patrón medio climatológico de enero en 200 mb, obtuvimos pocos modos inestables, con el algoritmo numérico de estabilidad y en T21. También este mismo efecto se notó con el flujo zonal de una combinación lineal de polinomios de Legendre, lo cual sugiere que lo que domina es el proceso de inestabilidad baroclínica.

Se usaron estados básicos analíticos más complicados entre los que se incluyen a las ondas RH y estructuras no lineales tales como modones y ondas Wu-Verkley. El patrón de perturbaciones de los modos inestables de las ondas RH y ondas Wu-Verkley, fue que básicamente se extendieron sobre las zonas de confluencia, la lateral y difluencia de los jets, tal como se mostró en la fig. 5.9 y fig. 5.10. En las ondas RH básicas de gran amplitud, adelante de las vaguadas las perturbaciones tienden a dirigirse hacia los polos y adelante de las crestas la ruta de las perturbaciones se dirigen hacia el ecuador. Ondas RH (m,n) con n-m pequeño tienden a ser menos inestables, por ejemplo las RH (2,3) y RH (4,5). Pero las ondas RH (2,5), RH (3,6), RH (4,5) y RH (4,7) son más inestables. No se encontraron perturbaciones en la zona de destrenzamiento del jet, sólo cuando las ondas RH eran de gran amplitud o sea un transporte meridional. Se generan perturbaciones sobre el jet ecuatorial (ducto de los oestes según Webster y Holton, 1982), cuando el jet es de cierta intensidad y casi no se manifiesta cuando éste es muy débil, por lo que ésto puede atribuirse a un proceso de inestabilidad barotrópica. En los estudios climatológicos del flujo troposférico superior algunos autores indican que los máximos relativos de los transitorios de gran escala sobre el ducto ecuatorial se mantienen por perturbaciones de latitudes medias que se propagan hasta el ecuador. La estimación numérica del número espectral $\chi_{\hat{\Psi}} = \eta(\hat{\Psi})/K(\hat{\Psi})$, para las distintas amplitudes de las ondas RH (m,n), coincidió muy bien, con el valor teórico $\chi_{\hat{\Psi}} = \eta(\hat{\Psi})/K(\hat{\Psi}) = \chi_n = n(n+1)$ de la amplitud del modo normal inestable. La estructura espectral de estos modos observados o analíticos puede contribuir a una mejor comprensión de las anomalías persistentes del flujo atmosférico y por lo tanto la variabilidad de baja frecuencia. Los planes futuros es el uso de los modelos numéricos para estudiar flujos reales.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., and I.A. Stegun, 1965: *Handbok of mathematical functions*, Dover, 1046pp.
- Adem, J., 1956. A series solution of the barotropic vorticity equation and its application in the study of atmospheric vortices. *Tellus*, 8, 364-372.
- Anderson, J. L., 1991: The robustness of barotropic unstable modes in a zonally varying atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 48, 2393-2410
- Andrews, D. G., 1984: On the stability of forced non-zonal flows. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 110, 657-662.
- Arnol'd. V. I., 1965: Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSr*, 162, 975-978. (English translation 1965: *Sov. Math. Dokl.*, 6, 773-777.)
- Asselin, R. A., 1972: Frecuency filter for time integration. *Mon. Wea. Re.*, 100, 487-490.
- Baer, F. and G. W. Platzman, 1961: A procedure for numerical integration of the spectral vorticity equation. *J. Meteorology*, 18, 393-401.
- Baer, F., 1964: Integration with the spectral vorticity equation. *J. Atmos. Sci.*, 21, 260-286
- Baer, F., 1968: Studies in low-order spectral systems. Tech. Rep GA-761, Fort. Collin, Col. No. 129.
- Baines, P. G., 1976: The stability of planetary waves on a sphere. *J. Fluid Mech.*, 73, 193-213.
- Blender, R., 1992: Approximate calculation of solitons and modons. *Beitr. Phys. Atmosph.*, 65 (4), 251-257.
- Blinova, E. M., 1943: A hydrodynamical theory of pressure and temperature waves and of centres of atmosphere action. *Comptes Rendus*, 7.
- Blinova, E. M., 1946: On the determination of the velocity of motion of lows from nonlinear vorticity equation. *Appl. Math. Mechanics*, 10, 5-6 (in Russian).
- Blinova, E. M., 1956: Method of solving a nonlinear problem on atmospheric movements on a planetary scale. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 110 (5).
- Borges, M. D. and P. D. Sardeshmukh, 1995: Barotropic Rossby wave dynamics of varying Upper-Level flows during Northern winter. *Jour. Atmos. Sci.*, Vol. 52. No. 26, 3779-3798.
- Borges, M. D. and P. D. Sardeshmukh, 1997: Application of perturbation theory to the stability analysis of relistic atmospheric flows. *Tellus* 49A, 321-336.
- Bourke, W., 1972: An efficient, one-level, primitive-equation spectral model. *Mon.*

Wea. Rev., 100, 683-689.

Branstator, G. 1982: Horizontal energy propagation and barotropic instability in quasi-linear model of the atmosphere. PHD thesis, Univ. Washington, 123 pp.

Butchart, N., K. Haines and J. C. Marshall, 1989: A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmos. Sci., 46, 2063-2078.

Charney, J. G., R., Fjortoft, and J. von Neumann, 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2, 237 - 254.

Charney, J. G. and J. G. DeVore, 1979: Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. *J. Atmos. Sci.*, 36, 1205 - 1216.

Charney, J. G. and M. E. Stern, 1962: On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 19, 159-172.

Chen, P., 1993 : The barotropic normal modes in certain shear flows and the traveling waves in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 50, 2054-2064.

Craig, R. A., 1945: A solution of the nonlinear vorticity equation for atmospheric motion. *J. Meteorology*, 2, 173-178.

Crum, F. X. and D. E. Stevens, 1988: A case study of atmospheric blocking using isentropic analysis. *Mon. Wea. Rev.*, 116, 223-241.

Dikii, L. A., 1976: Hydrodynamic Stability and Atmosphere Dynamics. Gidrometeorizdat, Leningrad.

Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1981: Hydrodynamic Stability. - Cambridge: Cambridge University Press.

Duffy, D.G., 1975: The Barotropic Instability of Rossby Wave Motion: a Re-examination. *J. Atm. Sci.*, Vol.32, P. 1271- 1277. 17.

Dymnikov, V. P. and Yu.N. Skiba, 1986: Barotropic Instability of Zonally Asymmetric Atmospheric Flows. Computational Processes and Systems. Issue 4, 63-104, Editorial Nauka.

Dymnikov, V. P., and Yu. N. Skiba, 1987: Spectral Criteria of Stability of Barotropic Atmospheric Flows. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* , 23 (12): 943-951 (English, AGU, Washington, U.S.A.).

Dymnikov, V. P. and Skiba, Yu. N., 1987: Barotropic Instability of Zonally Asymmetric Atmospheric Flows Over Topography. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, Vol.2, No. 2, P. 83-98.

Eliassen, E., B. Machenhauer and E. Rasmussen, 1970: On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Rep. No. 2, Institut for Teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet, Denmark.

Ellsaesser, H. W., 1966: Evaluation of spectral versus grid methods of hemispheric numerical weather prediction. *J. Appl. Meteorology*, 5, 246-262.

Ertel, H., 1943: "U ber statin" are oszillatorische luftströmungen auf der rotierenden erde. *Meteor. Zeits.*, 60, 332-334.

Fjortoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional nondivergent flow. *Tellus*, 5 (3), 225-230.

Flierl, G. R., V. D. Larichev, J.C. McWilliams and G.M. Reznik, 1980: The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies. *Dyn. Atmos. Oceans*, 5,1-41.

Flierl, G. R. Isolated Eddy, 1987: Models in Geophysics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol.19, P. 493-530.

Flierl, G. R., Stern, M. E., and J. A. Whitehead, Jr., 1983: The Physical Significance of Modons: Laboratory Experiments and General Integral Constraints. *Dyn. Atmos. Oceans*, Vol.7, P. 233 -264.

Frederiksen, J. S., 1982: A unified three-dimensional instability theory of onset of blocking and cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, 39, 969-987.

Lorenz, E. N., 1972: Barotropic Instability of Rossby Wave Motion. *J. Atmos. Sci.*, Vol.29, P. 258-264.

Gadzhiev, A. D. 1981: On differential properties of the symbol of multi-dimensional singular operator. *Mat. Sbornik*, Vol. 114 (156). No. 4, 483-510.

Gill, A. E., 1974: The Stability of Planetary Waves on an Infinite Beta Plane. *Geof. Fluid Dyn.*, Vol. 6, P. 29 - 47.

Haines, K., and P. Malanotte-Rizzoli, 1991: Isolated anomalies in westerly jet streams: a unified approach. *J. Atmos. Sci.*, 48, 510 -526.

Haines, K., and J. Marshall, 1987: Eddy-forced coherent structures as a prototype of atmospheric blocking. *Quart. J. Meteor. Soc.*, 113, 681-704.

Haltiner, G. J., and R. T. Williams, 1980: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*, John Niley, and Sons. 477 pp.

Haurwitz, B., 1940: The motion of atmospheric disturbances on a spherical earth. *J. Marine Res.*, 3, 254 -267.

Haarsma, R. J. and Opsteegh, J. D., 1988: Barotropic Instability of Planetary-Scale Flows. *J. Atmos. Sci.*, Vol.45, No. 20, P. , 2789-2810. 192.

Hollingsworth, A., U. Cubasch, S. Tibaldi, C. Brankovic, T. N. Palmer and L. Campbell, 1987: Mid-latitude atmospheric prediction on time scales of 10-30 days. *Atmospheric and Variability*. Royal Met. Soc., 182pp. Ed. Cattle.

Hoskins, B. J., 1973: Stability of the Rossby-Haurwitz Wave . *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 99, P. 723-745.

Hoskins, B. J. and Hollingsworth, A., 1973: On the Simplest Example of the Barotropic Instability of Rossby Wave Motion. *J. Atmos. Sci.*, Vol.30, 150 P.

Hoskins, B. J. and Karoly, D.J., 1981: The Steady Linear Response of a Spherical Atmosphere to Thermal and Orographic Forcing. *J. Atmos. Sci.*, Vol.38, P. 1179-1196.

Hoskins, B. J., James, I.N. and White, G.H., 1983: The Shape, Propagation and Mean-Flow Interaction of Large-Scale Weather Systems. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 40, 7, P. 1595-1612.

Hoskins, B. J., Simmons, A.J. and Andrews, D.G., 1977: Energy Dispersion in a Barotropic Atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol.103, P. 553-567.

Hoskins, B. J., 1973: Stability of the Rossby-Haurwitz wave. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 99, 723-745.

Hoskins, B. J. and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, 50, 1661-1671.

Hough, S. S., 1898: On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides. Part II. On the general integration of Laplace's dynamical equations. *Phil Trans. Roy. Soc. London, Series A*, 191, 139 - 185.

Illari, L., and J. C. Marshall, 1983: On the interpretation of eddy fluxes during a blocking episode. *J. Atmos. Sci.*, 40, 2232-2242.

Illari, L., 1984: A diagnostic study of the potential vorticity in a warm blocking anticyclone. *J Atmos. Sci.*, 41, 3518-3526.

Ivanov, V. A. Bernstein-Nikolski and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1. (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk* 38 (1983), no. 3(231), 179-180.

Ilyin, A. A., 1994: Navier-Stokes equations on the rotating sphere. A simple proof of the attractor dimension estimate. *Nonlinearity*, 7, 31-39.

Jakob, R., J. J. Hack and D. L. Williamson, 1993: Solutions to the shallow water test set using the spectral transform method. NCAR Tech. Note. 388.

Kamzolov, A. I., 1981: Favard's inequality on the sphere. (Russian) *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 6, 51-57,

Kubota, S., Hirose, M., Kikuchi, Y., 1961: Barotropic forecasting with the use of surface spherical harmonic representations. *Papers in Meteorology and Geophysics*, Vol. XII, No. 3 - 4.

Kuo, H. L., 1949: Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteorology*, 6, 105-122.

Larichev, V. D., and G. M. Reznik, 1976: Two-dimensional Rossby soliton: An exact solution. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 231 (5), 1077-1079.

Legras, B., and M. Ghil, 1985: Persistent anomalies, blocking and variations in atmosphere predictability. *J. Atmos. Sci.*, 42, 433-471.

Loomis, L., and S. Sterberg, 1990: *Advanced Calculus*, Adisson Wesley, 580pp.

Longuet-Higgins, M.S., 1964: Planetary waves on a rotating sphere. I. *Proc. Roy. Soc. London A*, 279, 446 - 473.

Longuet-Higgins, M. S., and A. E. Gill, 1967: Resonant interactions between planetary waves. *Proc. R. Soc., A* 299, 120-140.

Lorenz, E. N., 1972: Barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.*, 29, 258-264.

Machenhauer, B., 1979: Spectral methods. In: *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, Chapter 3, GARP Publication Series, WMO, No. 17, Vol.2, 124-275.

Machenhauer, B., and E. Rasmussen, 1972: On the integration of the spectral hydrodynamical equations by a transform method. Rep. No. 3, Institut for Teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet, Denmark.

Malguzzi, P., and P. Malanotte-Rizzoli, 1984: Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part I: The analytical theory. *J. Atmos. Sci.*, 41, 2620 - 2628.

Margules, Max, 1893: *Luftbewegungen in einer rotierenden Spharoidschale* (II. Teil). *Silzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, 102, 11 - 56.

Matsushima, Y. 1972: *Differentiable manifolds*. Pure and applied Math., Dekker, traducido por Kobayashi, 303pp.

McIntyre, M. E., and T. G. Shepherd, 1987: An exact local conservation theorem for finite amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems. *J. Fluid Mech.*, 191, 527 - 565.

McWilliams, J. C., 1980: An application of equivalent modons to atmospheric blocking. *Dyn. Atmos. Oceans.*, 5, 43 - 66.

McWilliams, J. C., 1983: Interactions of isolated vortices. II: Modon generation by monopole collision. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 24, 1 - 22.

McWilliams, J. C., G. R. Flierl, V. D. Larichev and G. M. Reznik, 1981: Numerical studies of barotropic modons. *Dyn. Atmos. Oceans*, 5, 219 -238.

McWilliams, J. C and Zabusky, 1982: Interactions of isolated vortices. I: Modons colliding with modons. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 19, 207 - 227.

Merilees, Ph. E., 1968: The equations of motion in spectral form. *J. Atmos. Sci.*, 25, 736-743.

Neamtan, S. M., 1946: The motion of harmonic waves in the atmosphere. *J. Meteorology*, 3, 53-56.

Neven, E. C., 1992: Quadrupole modons on a sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 65 , 105-126.

Neven, E. C., 1993: Modons on a sphere. PH.D. thesis, Rijksuniversiteit Utrecht,, Utrecht, 175 pp.

Neven, E. C., 2001: Linear stability of modons on a sphere. To be published to *J. Atmos. Sci.*.

Orzag, S. A., 1970: Transform method for calculation of vector coupled sums: Application to the spectral form of the vorticity equation. *J. Atmos. Sci.*, 27, 890-895.

Orzag, S. A., 1971: Numerical simulations of incompressible flows within simple boundaries: Accuracy. *J. Fluid Mech.*, 49, 75-112.

Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd ed., Springer - Verlag, New York, 710pp.

Pérez, G. I., R. Murillo Loza y D. Castelán 1986 : El método de reducción cíclica a la ecuación de vorticidad. *Geofísica Internacional*. 25, 2, 327-345.

Pérez, G. I., 1992: Estudios sobre los factores meteorológicos sinópticos y de mesoescala asociados con las intensas lluvias ocurridas a finales de diciembre 1990, en el noroeste de la República Mexicana. Rep. SGAA-91-030, SMN/CCA-UNAM, 229pp.

Pérez, G. I., 1995: Forma espectral de la ecuación de vorticidad. VII Congreso Nacional de Meteorología, OMMAC, Chapingo. Estado de México, 24-27 oct., 1995.

Pérez, G. I., 1996: Major cold air outbreaks affecting coffee and citrus plantations in the eastern and northeastern Mexico. *Atmósfera*. 9, 47-68.

Pérez, G. I., 1997: Ondas planetarias y la ecuación de vorticidad no divergente. Reunión anual de la UGM, 3-7 de Nov. 1997, Puerto Vallarta, Jal., México.

Pérez, G. I., 1998: Análisis del modelo atmosférico por medio del método espectral. Memorias del primer Simposio del Posgrado en Ciencias de la Tierra 27-29 abril 1998, UNAM, PP109-110.

Pérez, G. I., and Yu.N. Skiba, 1999: Simulation of Exact Barotropic Vorticity Equation Solutions Using a Spectral Model. *Atmósfera* , 12 (4), 223- 243.

Pérez, G. I., and Yu.N. Skiba, 1999: Estabilidad lineal de unas soluciones exactas de la ecuación de vorticidad sobre la esfera. IX Congreso Nacional de Meteorología de la OMMAC, 25-26 de Nov. de 1999. Guadalajara, Jal., México.

Pérez, G. I., and Yu.N. Skiba, 2000: Sobre una clase de soluciones de la ecuación de vorticidad sobre la esfera. Congreso de la OMMAC; Manzanillo, Col. 23-25 nov.

Pérez, G. I., and Yu.N. Skiba, 2001: Tests of a Numerical Algorithm for the Linear Instability Study of Flows on a Sphere. *Atmósfera*, 14 (2), 95-112.

Pierrehumbert, R. T., and P. Malguzzi, 1984: Forced coherent structures and local multiple equilibria in a barotropic atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 41, 246-257.

Platzman, G. W., 1960: The spectral form of the vorticity equation. *J. Meteorology*, 17, 635-644.

Platzman, G. W., 1962: The analytical dynamics of the spectral vorticity equation. *J. Atmos. Sci.*, 19, 313-328.

Rex, D. F., 1950a: Blocking action in the middle troposphere and its effects on regional climate. I. An aerological study of blocking. *Tellus*, 2, 196-211.

Rex, D. F., 1950b: Blocking action in the middle troposphere and its effects on regional climate. II. The climatology of blocking action. *Tellus*, 2, 275-301.

Rayleigh, Lord, 1880: On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, 11, 57-70. (Also in: *Scientific Papers*, Vol. 1, pp 474-487, Cambridge University Press, Cambridge, 1889).

Richtmyer, R. D., 1981: *Principles of Advanced Mathematical Physics*. Springer-Verlag, Vol. 1-2.

Robert, A. J., 1966: The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, 237-244.

Rochas, M., 1986: A new class of exact time-dependent solutions of the vorticity equation. *Mon. Wea. Rev.*, 114, 961-966.

Rossby, C. G., and Collaborators, 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action. *J. Mar. Res.*, 2, 38-55.

Tung, K. K., 1981: Barotropic instability of zonal flows. *J. Atmos. Sci.*, 38, 308-321.

Silberman, I., 1954: Planetary waves in the atmosphere. *J. of Meteorology*, 11, 27-34.

Simmons, A. J., J. M. Wallace and G. W. Branstator, 1983: Barotropic wave propagation and instability, and atmospheric teleconnection patterns. *J. Atmos. Sci.*, 40, 1363-1392.

Skiba, Yu. N., 1989: *Mathematical Problems of the Dynamics of Viscous Barotropic Fluid on a Rotating Sphere*. Dept. Comput. Mathematics, The USSR Academy of Sciences, Moscow, 178 pp. (English transl.: Indian Institute of Tropical Meteorology, Pune, India, 1990, 211 pp).

Skiba, Yu. N., 1991: Lyapunov instability of the Rossby-Haurwitz waves and dipole modons. *Sov. J. Numer. Analysis*.

Skiba, Yu. N., 1992a: On stability of Rossby-Haurwitz waves. *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, 28 (5), 388-394.

Skiba, Yu. N., 1992b: On Stability of barotropic modons on a sphere. *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, 28 (10-11), 765-773.

Skiba, Yu. N., 1993: Dynamics of perturbations of the Rossby-Haurwitz wave and the Verklej modon. *Atmósfera*, 6, 87-125.

Skiba, Yu. N., 1994: On the long-time behavior of solutions to the barotropic atmosphere model. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 78, 143-167.

Skiba, Yu. N., 1996: On asymptotic regimes of the barotropic vorticity equation on a sphere. *Russian Meteorology and Hydrology*, 3, 37-45.

Skiba, Yu. N., 1997: On dimensions of attractive sets of viscous fluids on a sphere under quasi-periodic forcing. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 85 (3-4), 233-242.

Skiba, Yu. N., 1998: Spectral approximation in the numerical stability study of non-divergent viscous flows on a sphere. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14, 143-157.

Skiba, Yu. N., and J. Adem, 1998: On the linear stability study of zonal incompressible flows on a sphere. *Textit Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14, 649-665.

Skiba, Yu. N., and I. Pérez 1998: Test with a numerical spectral model of the barotropic atmospheric. VIII Congreso Nacional de Meteorología de la OMMAC. Veracruz, Ver. 28-30 octubre 1998, pp 278-280.

Skiba, Yu. N., 2000: On the normal mode instability of harmonic waves on a sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 92, 115-127.

Skiba, Yu. N., and I. Pérez, 2000: On the role of fluid viscosity and basic flow smoothness in the normal mode stability study. X Congreso de la OMMAC; Manzanillo, Col. 23-25 nov.

Skiba, Yu. N., and A. Y. Strelkov, 2001: On the normal mode instability of modons and Wu-Verkley waves, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 93, 39-54.

Stern, M. E., 1975: Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res.*, 33, 1-13.

Szeptycki, P., 1973: Equations of hydrodynamics on manifold diffeomorphic to the sphere. *Bull. L'acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 21 (4), 341-344.

Szeptycki, P., 1973: Equations of Hydrodynamics on Compact Riemannian Manifolds. *Bull. L'acad. Pol. Sci., Seria: Sci. Math., Astr., Phys.*, , Vol.21, (4) , P. 335-339.

Teman, R., 1998: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, NY.

Thompson, P. D., 1982: A generalized class of exact time-dependent solutions of the vorticity equation for nondivergent barotropic flow. *Mon. Wea. Rev.*, 110, 1321-1324.

Topuriya, S. B., 1987: *Fourier-Laplace Series on a Sphere*. Tbilisi University Press, Tbilisi, USSR (in Russian).

Tribbia, J. J., 1984: Modons in spherical geometry, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 30, 131-168.

Triedl, R. A., E.c. Birch and P. Sajecki, 1981: Blocking action in the Northern Hemisphere: A climatological study. *Atmos-Ocean*, 19, 1-23.

Verkley, W. T. M., 1984: The construction of barotropic modons on a sphere. *J. Atmos. Sci.*, 41 (16), 2492-2504.

Verkley, W. T. M., 1987: Stationary barotropic modons in westerly background flows. *J. Atmos. Sci.*, 44, 2383-2398.

Verkley, W. T. M., 1989: *On Atmospheric Blocking and the Theory of Modons*. K.N.M.I., Vrije Universiteit te Amsterdam, Utrecht, Nederlands, 171 pp.

Verkley, W. T. M., 1990: Modons with uniform absolute vorticity. *J. Atmos. Sci.*, 47, 727-745.

Wallace, J. M., and D. S. Gutzler, 1981: Teleconnections in the geopotential height field during the Northern Hemisphere winter. *Mon. Wea. Rev.*, 109, 784-812.

Webster, P. J., 1981: Mechanisms determining the response to sea surface temperature anomalies. *J. Atmos. Sci.*, 38, 554-571.

Webster, P.J., and J. R. Holton, 1982: Cross-equatorial response to middle-latitude forcing in a zonally varying basic state. *J. Atmos. Sci.*, 39, 722-733.

Wu, P., and W. T. M. Verkley, 1993: Non-linear structures with multivalued (q, ψ) relationships - exact solutions of the barotropic vorticity equation on a sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 69, 77-94.

Wu, P., 1993: Nonlinear resonance and instability of planetary waves and low-frequency variability in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 50 (21), 3590-3607.

Yhe, T., 1949: On energy dispersion in the atmosphere. *J. Meteor.*, 6, 1-16.

Zhang, Z., 1988: The linear study of zonally asymmetric barotropic flows. Ph. D. thesis, University of Reading, 178pp.

SIMBOLOS

a radio de la tierra

S^2 la esfera unitaria de radio 1

$C_c^\infty(S^2)$ espacio de funciones valuadas en los complejos que son continuas sobre S^2 conjuntamente con todas sus ∞ -derivadas

$C^r(S^2)$ espacio de funciones continuas sobre S^2 conjuntamente con todas sus r -derivadas

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto escalar

L_0^2 espacio de funciones integrables finitas que son ortogonales a la constantes || \cdot || = $\langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ = || \cdot || $_{L_0^2}^2$ norma en el espacio L_0^2

λ es la longitud

μ seno de la latitud ϕ

H_r subespacios de polinomios esféricos homogéneos

Δ Laplaciano sobre la superficie de la esfera S^2

$Y_\alpha \equiv P_{n_\alpha}^{m_\alpha}(\mu)e^{im_\alpha\lambda} = Y_{n_\alpha}^{m_\alpha}$ armónicos esféricos

P_n^m polinomios asociados de Legendre normalizados de grado n y número de onda zonal m

FFT transformada de Fourier rápida

H_0^α espacios de Hilbert o de Sobolev.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ producto escalar en los espacios H_0^α

$\| \cdot \|_\alpha^2 = \| \cdot \|_{H_0^\alpha(S^2)}^2 = \| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \|_{L_0^2}^2$ norma en los espacios Sobolev H_0^α

\mathcal{R}^3 espacio Euclidean en tres dimensiones

- $(\Omega_\ell, \varphi_\ell)$ carta local o sistemas de coordenada local
 Ω_ℓ dominio de la carta
 $f \circ \varphi$ composición de dos funciones
 \cup unión de conjuntos
 \subset subconjunto de
 Γ_ℓ meridiano internacional del tiempo en el sistema de coordenada local $(\Omega_\ell, \varphi_\ell)$
 $\varphi_{\nu\kappa} = \varphi_\kappa \circ \varphi_\nu^{-1}$
 $J(\cdot, \cdot)$ Jacobiano,
 \mathbf{k} un vector unitario normal a la superficie de la esfera
 $F_\ell = f \circ \varphi_\ell^{-1}$ es la expresión en coordenadas de f .
 Ω velocidad angular de rotación de la tierra
 t tiempo
 Ψ_n^m coeficiente espectral
 Y eigenfunción de el operador Laplace
 N polo norte
 N' polo norte en el sistema primado
 ϕ_a latitud de la frontera circular de la región interna del modón
 $\tilde{\Psi}$ flujo básico
 $(\cdot)'$ denota la perturbación infinitesimal
 q es la vorticidad absoluta
 g^* es el conjugado complejo de g
 $\chi_\alpha \equiv n_\alpha(n_\alpha + 1)$

$$\sum_\alpha^N \equiv \sum_{n_\alpha=1}^N \sum_{m_\alpha=-n_\alpha}^{n_\alpha}$$

 $H_\alpha(\mu) = (1 - \mu^2) \frac{dP_\alpha}{d\mu}$ derivada de los polinomios asociados normalizados de Legendre
 $\hat{\Psi}$ la amplitud de la perturbación Ψ'

\widehat{V} el Laplaciano de $\widehat{\Psi}$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$ es el eigenvalor para el operador \mathcal{L} en el problema espectral $\mathcal{L}\widehat{V} = \omega\widehat{V}$

τ_e umbral temporal (folding -time)

T el periodo

$|\cdot|$ el conjugado o valor absoluto

σ es el drag lineal o término de amortiguamiento lineal

ν coeficiente de difusión turbulento

\emptyset Conjunto vacío

R^2 espacio Euclideo en dos dimensiones

\forall Para todo

∞ Infinito