



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“TRIODOS Y LIMITES INVERSOS”

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A
LEOPOLDO MORALES LOPEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MA. ISABEL PUGA ESPINOSA



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION L. POLAR

295449



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Triodos y Límites inversos"

realizado por Leopoldo Morales López

con número de cuenta 8805695-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Ma. Isabel Puga Esninos

Propietario

Dr. Héctor Méndez Lango

Propietario

Dr. Guillermo Francisco Javier Sierra Loera

Suplente

M. en C. Félix Capulín Pérez

Suplente

M. en C. Fernando Orozco Zitli

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

A mis padres:
“La letra con sangre entra”

Isabel:
Gracias por tu ¡¡paciencia!!

Cesar:
Creo que crees que Libertad no solo es una palabra de 8 letras

A mis sinodales:
Gracias por sus observaciones y consejos

Al PRI:
Después de todo no era lo peor

A quien corresponda:
Después de todo nunca encontré “rojos” en la UNAM

“Y me volví para ver la voz que hablaba conmigo; y vuelto, vi siete candeleros de oro, y en medio de los siete candeleros, a uno semejante al Hijo del Hombre, vestido de una ropa que llegaba hasta los pies, y ceñido por el pecho con un cinto de oro. Su cabeza y sus cabellos eran blancos como blanca lana, como nieve; sus ojos como llama de fuego; y sus pies semejantes al bronce bruñido, refulgente como en un horno; y su voz como estruendo de muchas aguas. Tenía en su diestra siete estrellas; de su boca salía una espada aguda de dos filos; y su rostro era como el sol cuando resplandece en su fuerza.”

Apocalipsis 1: 12-16

CONTENIDO

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1 Límites inversos	4
1.2 Span	7
1.3 Triodos	10
2. El continuo de Ingram	13
2.1 Definición	13
2.2 Es indescomponible	15
2.3 <i>Es atriódico</i>	16
2.4 Tiene span distinto de cero	18
3. El supertriodo	27
3.1 Definición	27
3.2 Primera restricción, curva topológica	29
3.3 Segunda restricción, curva topológica y rayos	35
3.4 Análisis total, el supertriodo	38
3.5 Generalizaciones, curva topológica, rayos y super n -odo	46
Bibliografía	51

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es presentar algunos ejemplos de triodos y límites inversos, con el fin de motivar la intuición en problemas en los que se ven involucrados ambos. Los límites inversos son útiles entre otras cosas como herramienta para construir continuos con propiedades interesantes.

En un primer acercamiento a los límites inversos, la teoría y los resultados tal vez parezcan artificiales, si no es que complicados, sin embargo cuando llegamos a familiarizarnos con este tipo de herramientas obtenemos construcciones interesantes, de hecho poco triviales.

La mayor parte de la bibliografía presenta teoría de límites inversos en general y usando arcos en particular, ambos son muy importantes, pero especialmente los últimos son muy interesantes, de hecho aún es un campo fértil en la investigación matemática. Además de estar relacionados con otras áreas distintas de la topología de continuos, sus resultados son por sí mismos interesantes y atractivos, sin embargo la bibliografía que involucre triodos y límites inversos es muy escasa, y sobre todo es un poco árida en su lectura si no se tiene mucha experiencia con los mismos.

Esta situación es la que nos motivo a desarrollar el presente trabajo, creemos que los ejemplos contenidos en el mismo serán de utilidad para desarrollar un poco la intuición del lector, y sobre todo esperamos que pueda visualizar algunos casos, a nuestro juicio interesantes.

Iniciamos la presentación (capítulo 1) con algunos resultados de la teoría de continuos en general, omitimos la demostración de ellos por no ser la prioridad del trabajo.

Así pues mencionamos resultados tales como: el límite inverso de continuos es un continuo, hecho que afortunadamente nos restringe a continuos, y nos remite solamente a preguntarnos que clase de continuos obtenemos, en caso de no tener esta restricción, las primeras preguntas serían entre otras: ¿que tipo de espacio es el límite inverso?, ¿compacto?, ¿conexo?, estas preguntas son de gran importancia, pero las vemos resueltas por este resultado.

También podemos estudiar continuos encadenables a través de los límites inversos, de manera informal podemos decir que un continuo es encadenable si lo podemos “meter” en una cadena compuesta por eslabones de diámetro pequeño, por una cadena entenderemos una colección finita de abiertos ordenados en “línea recta”.

El primer ejemplo que estudiamos es el continuo de Ingram [1], sin duda alguna una de las construcciones más interesantes de límites inversos con triodos, fue realizado como una aproximación al problema planteado por A. Lelek en [3] (la cual continua sin respuesta) la pregunta dice así: "Si un continuo M tiene span cero ($\sigma(M) = 0$), entonces ¿es M encadenable?". Se sabe que si M es encadenable entonces $\sigma(M) = 0$, una demostración de este hecho se encuentra en la tesis de Maestría de Fernando Macías [4], esta tesis contiene una selección de tópicos muy interesantes en el estudio del "span".

Se sabe también que los continuos encadenables son atriódicos, Ingram construyó [1] un continuo atriódico M cuyo margen $\sigma(M)$ es mayor que cero, lo cual nos da como consecuencia que que no es encadenable, la construcción no es nada trivial, el primer problema con el que nos enfrentamos fue interpretar los conjuntos que utilizó para construir una sucesión de subcontinuos del triodo cruz el triodo $(T \times T)$, este último continuo no lo podemos representar en \mathbb{R}^3 , sin embargo logramos construir una representación del mismo en \mathbb{R}^2 , esta representación nos facilitó la comprensión y visualización del mismo, nos allanó también la comprensión de los subcontinuos que forman la sucesión, una vez visualizados los pudimos encajar en el plano.

El segundo ejemplo que estudiamos es el que llamamos "supertriodo", lo nombramos así por no haber encontrado bibliografía en la cual este continuo se estudie o presente, las funciones que usamos son muy particulares, de hecho las podríamos considerar muy elementales, de este ejemplo específico nos llamó la atención el que fuera indescomponible, es decir que no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios.

La manera en que lo analizamos es haciendo restricciones a la función que estamos aplicando, de esta forma obtuvimos continuos encadenables que son límites inversos de triodos, cosa en un principio desconcertante, pues pareciera que contradice el teorema que establece: "Todo continuo encadenable es límite inverso de arcos", sin embargo el resultado anterior no nos impide que un encadenable se pueda expresar como límite inverso de triodos, 4-odos, ..., etc.; además de todo lo anterior existe un teorema (notas de clase, Sergio Macías) que dice: "Todo continuo tipo arco es tipo triodo", es decir existirá un límite inverso de triodos cuyo límite inverso sea tipo arco, es decir límite inverso de arcos. Este análisis nos ayudó para generalizar este comportamiento a n -odos, y así obtuvimos continuos encadenables tipo n -odos.

La función aplicada sin restricciones, como lo hemos mencionado anteriormente, nos genera en el límite inverso un continuo indescomponible que contiene triodos, exhibimos uno de ellos, de hecho hemos conjeturado que los únicos subcontinuos que contiene son: arcos, triodos y el total, es decir el continuo sería tres equivalente (un continuo es n -equivalente si contiene solamente n subcontinuos propios distintos, salvo homeomorfismo), al aplicar una función del mismo tipo a n -odos, generalizando las mismas ideas tenemos que se generan en el

límite inverso continuos indescomponibles, que contienen n -odos, en consecuencia $(n - 1)$ -odos, ..., 4 -odos, triodos y arcos, también hemos conjeturado que estos continuos son n -equivalentes.

Creemos que estos últimos ejemplos son interesantes, sobre todo procuramos presentar el análisis de la manera más intuitiva posible, cosa un poco complicada pero procuramos dar una visión gráfica de los ejemplos, razón por la cual incluimos un número considerable de gráficas con las cuales esperamos haber conseguido este propósito.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 LÍMITES INVERSOS

En esta sección daremos los resultados que emplearemos en este trabajo, los teoremas mencionados no incluyen demostración, todos ellos se relacionan con límites inversos, su lectura se puede omitir si se tienen las bases de este campo de la teoría de continuos. Para tener una idea más amplia de lo referente a la presente sección, recomendamos el libro de Ingram editado por la Sociedad Matemática Mexicana [2] y las notas de clase de Sergio Macías, creemos que la lectura de ambos sería muy provechosa, puesto que consideramos que son en cierto modo complementarios, además claro está del libro de continuos de Nadler [5].

Por un *continuo* entenderemos un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* de un espacio métrico, será un continuo contenido en dicho espacio.

Notación: Cuando digamos función querremos decir una función continua y todos nuestros espacios serán continuos a menos de que se indique lo contrario. Pero siempre serán espacios métricos.

Definición: Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ una función de X_{n+1} en X_n . La sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios y funciones es llamada una *sucesión inversa*. Las funciones $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ son llamadas *funciones de ligadura*.

Notación: Si $n > m$ entonces $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \dots \circ f_{n-1}^n$ y $f_n^n = 1_{X_n}$.

Definición: El *límite inverso* de la sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es el subespacio del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$X_{\infty} = \lim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \{ \{x_n\} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \}$$

Notación: $\forall n, f_n = \pi_n |_{X_{\infty}} \rightarrow X_n$ es decir, f_n es la proyección natural restringida al límite inverso.

Siempre supondremos que la métrica d_n de X_n está, acotada por 1. Así $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$ es una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, en consecuencia X_{∞} es un espacio métrico.

Proposición 1.1 Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa y X_∞ su límite inverso. Si Y es un subconjunto propio y cerrado de X_∞ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $f_n(Y) \neq X_n$.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in X_\infty \setminus Y$, entonces existe un abierto $U_n \subset X_n$ el cual cumple: $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in f_n^{-1}(U_n) \subset X_\infty \setminus Y$, de lo anterior se tiene $x_n \in U_n \subset X_n \setminus f_n^{-1}(Y)$, ahora bien, si $m > n \Rightarrow f_m(Y) \subset X_m \setminus (f_n^m)^{-1}(U_n)$, de donde $f_m(Y) \neq X_m, \forall m > n$.

Teorema 1.1 Si cada X_n es un continuo, entonces X_∞ es un continuo.

Teorema 1.2 Supongamos que $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^\infty$ y se cumple: $X_1 \approx X_i, \forall i$, y las f_n^m son todas homeomorfismos, entonces $X_1 \approx X_\infty$.

Teorema 1.3 Supongamos $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^\infty, Y_\infty = \varprojlim \{Y_n, g_n^{n+1}\}_{n=1}^\infty$, y todos los rectángulos en el diagrama de abajo son conmutativos (es decir $\varphi_i \circ f_i^{i+1} = g_i^{i+1} \circ \varphi_{i+1}$ para cada i):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X_1 & \xleftarrow{f_1^2} & X_2 & \xleftarrow{f_2^3} & \cdots & X_i & \xleftarrow{f_i^{i+1}} & X_{i+1} & \cdots & X_\infty \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \cdots & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} & & \downarrow \varphi_\infty \\
 Y_1 & \xleftarrow{g_1^2} & Y_2 & \xleftarrow{g_2^3} & \cdots & Y_i & \xleftarrow{g_i^{i+1}} & Y_{i+1} & \cdots & Y_\infty
 \end{array}$$

Definamos φ_∞ en X_∞ por $\varphi_\infty((x_i)_{i=1}^\infty) = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^\infty$, para toda $(x_i)_{i=1}^\infty \in X_\infty$ entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- 1) $\varphi_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$
- 2) Si todas las φ_i son continuas, entonces φ_∞ también lo es.
- 3) Si todas las φ_i son biyectivas, entonces φ_∞ también lo es.

Teorema 1.4 Supongamos que $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un sistema inverso con límite inverso X_∞ , $\{Y_k, g_k^{k+1}\}$ un sistema inverso con límite inverso Y_∞ y que cumple: $Y_k = X_{\alpha_k}, g_k^{k+1} = f_{\alpha_k}^{\alpha(k+1)}$, con α_k es una sucesión de números naturales, entonces X_∞ es homeomorfo a Y_∞ .

Definición: Un continuo X es descomponible si se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios. X es indescomponible si no es descomponible.

Teorema 1.5 Supongamos que $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un sistema inverso donde cada X_n es un continuo; si para toda $i \in N$ tenemos que cualesquiera dos subcontinuos A_{i+1} y B_{i+1} de X_{i+1} que cumplan $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$ y $f_i^{i+1}[A_{i+1}] = X_i$ o $f_i^{i+1}[B_{i+1}] = X_i$ entonces $\text{lm}\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es indescomponible.

1.2 SPAN

En esta sección presentamos algunos resultados de la teoría de continuos relacionados con lo más básico del span, no pretendemos dar un estudio exhaustivo del mismo, pues no tenemos la intención de dar una exposición amplia, solamente deseamos dar una idea del concepto. Si se desea ampliar la comprensión de este capítulo recomendamos la lectura de la Tesis de Maestría de Fernando Macías [4], además del libro de Nadler [5].

Definición: Sean $\epsilon > 0$ y $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios métricos. Diremos que f es una ϵ -función si para cada $y \in Y$, $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \epsilon$.

Definición: Se dice que un continuo X es *Tipo arco* si para toda $\epsilon > 0$ $\exists f_\epsilon : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\text{diam}(f_\epsilon(t)) < \epsilon \forall t \in [0, 1]$.

Definición: Una *cadena* C es una sucesión finita L_1, L_2, \dots, L_n de conjuntos abiertos de un espacio X tal que $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Cada L_i es llamado *eslabón*. Si $\epsilon > 0$ y el diámetro de cada eslabón es menor que ϵ , entonces la cadena es llamada una ϵ -cadena.

Definición: Un continuo X es encadenable si para cada $\epsilon > 0$ puede ser cubierto por una ϵ -cadena de abiertos de X .

Teorema 1.6 Si X es tipo arco entonces X es encadenable.[5, teo,]

Definición: Sea M un continuo, el *span* de M , denotado por $\sigma(M)$, es el supremo del conjunto de todos los números $\epsilon \geq 0$ para los cuales existe un subcontinuo $Z_\epsilon \subset M \times M$ tal que: $\pi_1(Z_\epsilon) = \pi_2(Z_\epsilon)$ y $d(x, y) \geq \epsilon$ para todo $(x, y) \in Z_\epsilon$.

Teorema 1.7 Si $N \subseteq M$, entonces $\sigma(N) \leq \sigma(M)$ [4, obs 1.1b), p3]

Para tener una idea más clara de lo que significa el *span* a continuación damos algunos ejemplos sencillos del span de algunos continuos.

Ejemplo 1: El span del intervalo $[0, 1]$ es cero.

Supóngase que Z es un subcontinuo del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ tal que $\pi_1(Z) = \pi_2(Z)$. Nótese que $\pi_1(Z) = \pi_2(Z)$ es un subcontinuo de $[0, 1]$, entonces $\pi_1(Z) =$

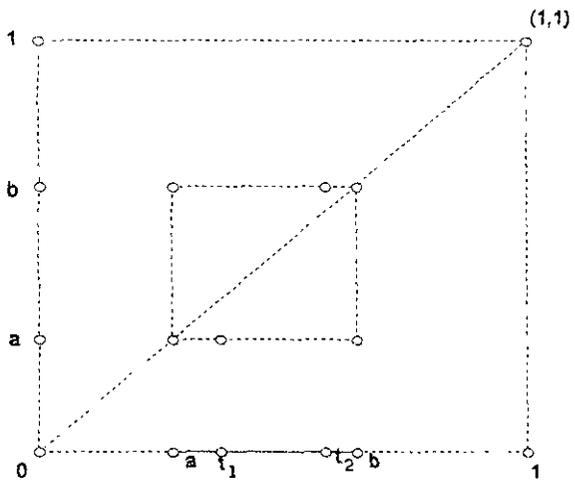


Figure 1:

$\pi_2(Z) = [a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$. dado que los puntos a y $b \in \pi_2(Z)$, existen $t_1, t_2 \in [0, 1]$ (fig 1) tales que $(t_1, a) \in Z$ y $(t_2, b) \in Z$.

Ahora bien, como Z es conexo se cumple que $Z \cap \Delta_{[0,1]} \neq \emptyset$. así, $\sigma([0, 1]) = 0$. El mismo argumento sirve para demostrar que cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} . es cero.

Ejemplo 2: El span del círculo unitario en el plano (S^1) es el diámetro de él mismo.

Consideremos a $S^1 = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| = 1\}$

Sea $g : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ definida por $g(z) = (z, -z)$. Notemos que g es continua, por que lo son cada una de sus funciones coordenadas. Sea $Z = g(S^1)$, entonces Z es un subcontinuo de $S^1 \times S^1$.

Si $(z, -z) \in Z$ entonces $d(z, -z) = 2$. Además $\pi_1(Z) = \pi_2(Z)$, por que si $(z_1, z_2) \in Z$, entonces $(z_2, z_1) \in Z$. Con esto $2 \leq \sigma(S^1)$ y también tenemos $\sigma(S^1) \leq \text{diam}(S^1) = 2$, así $\sigma(S^1) = 2$.

Se demuestra de manera analoga que si un círculo tiene radio r entonces su span es $2r$.

Teorema 1.8 Sea M un continuo encadenable, entonces $\sigma(M) = 0$. [4, teo 1.4, 14]

1.3 TRIODOS

A lo largo del presente trabajo haré uso de los triodos simples, así pues un triodo simple escrito en coordenadas polares será el siguiente conjunto:

$$T = \{(\varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ y } \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ o } \theta = \pi\}$$

Usaremos la notación siguiente para facilitar la descripción de funciones entre triodos:

O será el punto $(0, 0) = (0, \frac{\pi}{2}) = (0, \pi)$

$A = (1, \frac{\pi}{2})$

$B = (1, \pi)$

$C = (1, 0)$,

\overline{OA} será el arco $\{(\varphi, \theta) \in T : \theta = \frac{\pi}{2}\}$

\overline{OB} será el arco $\{(\varphi, \theta) \in T : \theta = \pi\}$

\overline{OC} será el arco $\{(\varphi, \theta) \in T : \theta = 0\}$

$\forall p, q \in \mathbb{N}$ y $p < q$ denotaremos por $\frac{pA}{q}$ el punto $(\frac{p}{q}, \frac{\pi}{2})$, por $\frac{pB}{q}$ el punto $(\frac{p}{q}, \pi)$ y $\frac{pC}{q}$ al punto $(\frac{p}{q}, 0)$.

A continuación discuto una manera de analizar las funciones entre triodos (T) .

En primer lugar recordemos que las gráficas de funciones entre arcos las ilustramos en $I \times I$, en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

De lo anterior podemos deducir que las gráficas de funciones de triodos en triodos las representaremos en $T \times T$. ¿Quién es $T \times T$? necesitamos "pegar" en cada punto del triodo un triodo, esto lo representamos en la figura 2.

En este diagrama el triodo vertical corresponde al primer elemento del producto cartesiano, y la segunda entrada de este producto será el triodo ubicado horizontalmente.

Dado que ya tenemos donde representar nuestras funciones ahora procedo a "graficar" la identidad en T .

- 1) $f(t) = t, \forall t \in T$ es decir la identidad en T , figura 3

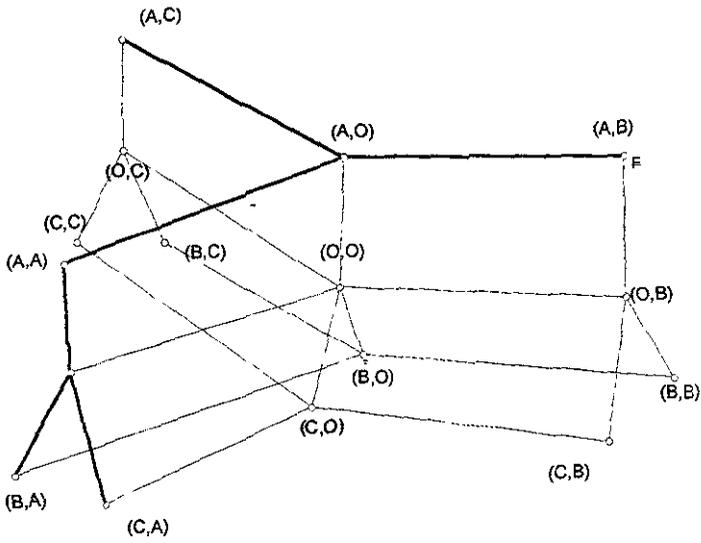


Figure 2:

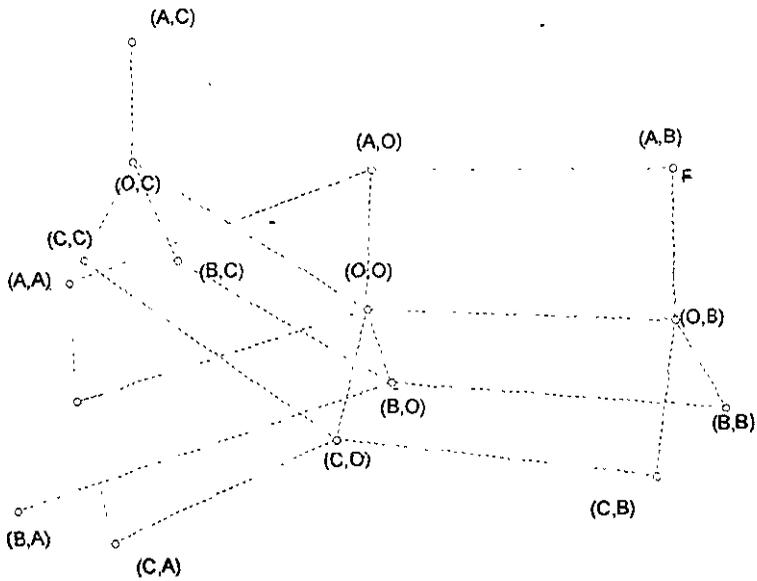


Figure 3:

Notemos que la gráfica en cuestión está contenida solamente en tres cuadrados contenidos en $T \times T$, los cuales son: $\overline{OA} \times \overline{OA} \cup \overline{OB} \times \overline{OB} \cup \overline{OC} \times \overline{OC}$, si tomamos la sección de la gráfica que cada uno de ellos contiene tendremos la gráfica de la identidad en cada uno de los mismos. Otro aspecto singular es que la unión de dichas gráficas es también un triodo simple.

CAPÍTULO 2

EL CONTINUO DE INGRAM

En este capítulo expondremos un ejemplo de un continuo M con las siguientes propiedades: Es límite inverso de triodos, indescomponible, atriódico y tiene span distinto de cero, la definición, construcción paso por paso y demostración de las afirmaciones anteriores se encuentran en [4], pretendemos esbozar y dar una idea clara de todos los aspectos que trata el artículo en cuestión.

2.1 DEFINICIÓN

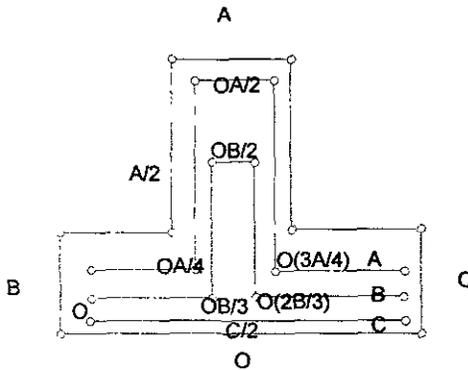
Sea T el triodo simple definamos $f : T \rightarrow T$ como sigue:

$$f(x, \frac{\pi}{2}) = \left\{ \begin{array}{l} (1 - 4x, \pi) \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ (4x - 1, \frac{\pi}{2}) \text{ si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ (3 - 4x, \frac{\pi}{2}) \text{ si } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ (4x - 3, 0) \text{ si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$f(x, \pi) = \left\{ \begin{array}{l} (1 - 3x, \pi) \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ (3x - 1, \frac{\pi}{2}) \text{ si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ (2 - 3x, \frac{\pi}{2}) \text{ si } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ (3x - 2, 0) \text{ si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

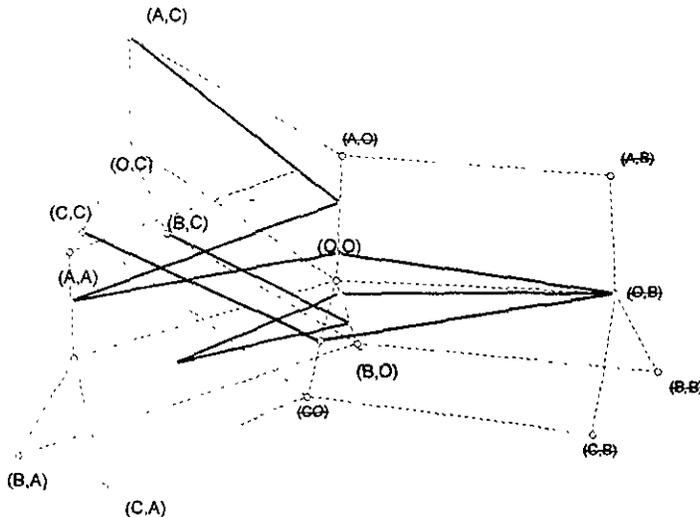
$$f(x, 0) = \left\{ \begin{array}{l} (1 - 2x, \pi) \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2x - 1, 0) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

Para toda n , sea $T_n = T$ y $f_n = f$. Denotaremos por M al límite inverso del sistema inverso $\{T_n, f_n\}$, es decir $M = \varprojlim \{T_n, f_n\}$



Este sería un diagrama acorde con la función, en esta figura el triodo "más grueso" denota el triodo imagen, los tres arcos dentro del mismo serían el triodo dominio de la función, de tal forma que los segmentos aparecen deformados de acuerdo con las condiciones de la función aplicada a cada uno de los arcos. Así pues: el arco OA del dominio cubre todo el triodo de la siguiente forma: OA/4 cubre a OB, A/4, 3A/4 cubre dos veces al OA, finalmente 3A/4, A cubre a OC, los arcos restantes se explican de manera análoga.

Figure 4:



Esta sería una gráfica de la función de acuerdo con el procedimiento detallado en la sección 1

Figure 5:

2.2 Es Indescomponible

Teorema 2.1 El continuo de Ingram es indescomponible

Demostración: Sea $T = H \cup K$, donde H y K son subcontinuos propios de T , entonces uno de ellos, digamos H , contiene dos puntos extremos lo cual nos remite a tres casos, estos y las implicaciones de los mismos lo detallamos en los incisos siguientes

a) $A, B \subset H \Rightarrow \overline{AB} \subset H \Rightarrow f(\overline{AB}) \subset f(H)$ y $f(\overline{AB}) = T$

b) $A, C \subset H \Rightarrow \overline{AC} \subset H \Rightarrow f(\overline{AC}) \subset f(H)$ y $f(\overline{AC}) = T$

c) $B, C \subset H \Rightarrow \overline{BC} \subset H \Rightarrow f(\overline{BC}) \subset f(H)$ y $f(\overline{BC}) = \overline{BC} \cup \overline{O\frac{A}{2}}$;

$$f\left(\overline{BC} \cup \overline{O\frac{A}{2}}\right) = f^2(\overline{BC}) \subset f^2(H) \text{ y } f\left(\overline{BC} \cup \overline{O\frac{A}{2}}\right) = T$$

En los dos primeros incisos aplicamos directamente el teorema 1.5, para el tercero se cumple que $\{T_n, g_n\}$ donde $(T_n = T, g_n = f^2 \forall n \in \mathbb{N})$ es indescomponible por el teorema 1.5, y por el teorema 1.4 es homeomorfo al continuo de Ingram, de ahí éste es indescomponible.

2.3 ES ATRIÓDICO

Teorema 2.1 El continuo M es atriódico.

Demostración: (teorema 2.1) En primer lugar necesitamos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 Si K es un continuo y todo subcontinuo propio de K es encadenable, entonces K es atriódico.

Demostración (del teorema 2.2) Si K no es atriódico y como todo subcontinuo es encadenable entonces la única posibilidad es que K sea un triodo. Supongamos que $K = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ donde las M_i cumplen: $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 \cap M_3$, es un subcontinuo propio de todos los $M_i, i = 1, 2, 3$.

Sea $H = M_1 \cap M_2$ por ser T un triodo y las propiedades de los triodos podemos suponer que existe $p \in M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$ entonces $p \notin H$, por lo tanto existe un abierto V , tal que $p \in V$ y $\bar{V} \cap H = \emptyset$.

Sea N la componente de $M_1 \setminus V$ que contiene a H , se cumple que $N \cup \bar{V} \neq \emptyset$ y por el teorema de golpes en la frontera existe $q \in N$ tal que $N \setminus H \neq \emptyset$ por lo tanto $N \cup M_2 \cup M_3$ es un triodo el cual es un subcontinuo propio de K , fin de la demostración.

Por el teorema 2.2 bastará demostrar que todo subcontinuo propio de M es encadenable y en consecuencia M será atriódico.

Supongamos que H es un subcontinuo propio de M , entonces existe $N_H \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N_H$ entonces $f_n(H) \neq T_n$, consideraremos dos casos:

a) Para toda $i \in \mathbb{N} \exists j \geq i$ tal que $O \notin f_j(H)$.

Sea $\varepsilon > 0$, demostraremos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que f_j es una ε -función de M sobre un intervalo. Para que f_j sea una ε -función, necesitamos: $\text{diam}(f_j^{-1}(s)) < \varepsilon, s \in T$.

Sea k suficientemente grande de tal forma que $\sum 2^{-i} < \varepsilon, i > k$, (esta k existe puesto que la suma es convergente). Sea $t \in T_k$, si $x, y \in f_k^{-1}(t)$, entonces $d(x, y) = \sum 2^{-i} d_i(x_i, y_i) < \sum 2^{-i} (i < k) < \varepsilon$ pues $x_k = y_k, x_{k-1} = y_{k-1}, \dots, x_1 = y_1$ y d_i la consideramos acotada por 1, por lo tanto f_k es una ε -función.

De ahí, existe un entero $j > t$ tal que $O \notin f_j(H)$ por lo tanto $f_j(H)$ es un arco; por lo tanto dada $\varepsilon > 0$ existe una ε -función de H hacia un arco, por el teorema (1.5) de la introducción H es encadenable.

b) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq k$, $O \in f_j(H)$

Supongamos $j \geq k$ y $j \geq N_H$. Entonces $O \in f_{j+3}(H)$, y $O, B = f(O)$ están en $f_{j+2}(H)$, por lo tanto $[OB] \subseteq f_{j+2}(H)$. Como $f([OB]) = [OB] \cup [OC] \cup [O\frac{A}{2}]$ y $[OA] \subset f([O\frac{A}{2}])$, $f^2([OB]) = T$ por lo tanto $f_j(H) = T_j$, pero $j \geq N_H$, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto todo subcontinuo propio de M es encadenable. El teorema anterior nos garantiza que M es atriódico, dado lo anterior podemos preguntarnos si M es encadenable, la respuesta es negativa, la siguiente sección da una demostración de la misma.

2.4 SPAN DISTINTO DE CERO

Antes de demostrar este teorema construiremos de manera inductiva una sucesión de subespacios de $T \times T$, la cual nos inducirá un subcontinuo de M que tenga span positivo, y por el teorema (1.7) de la introducción tendremos que M tendrá span positivo.

Esta sucesión Z_1, Z_2, \dots de subcontinuos de $T \times T$ será tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_1(Z_n) = \pi_2(Z_n)$; $f \times f(Z_{n+1}) = Z_n$, $Z_n = Z_{n+1}^{-1}$, es decir $\pi_1(Z_n) = \pi_2(Z_{n+1})$, $\pi_2(Z_n) = \pi_1(Z_{n+1})$, y dado $(p, q) \in Z_1$, $d(p, q) \geq \frac{1}{2}$, en particular $\sigma T \geq \frac{1}{2}$.

Construcción

Sea:

$$\begin{aligned} Z_1 = & (([OB] \times \{C\}) \cup (\{B\} \times [OC])) \cup ((([OC] \times \{B\}) \cup \\ & \cup (\{C\} \times [OB])) \cup ((([OA] \times \{C\}) \cup (\{A\} \times [OC])) \cup ((([OC] \times \{A\}) \cup \\ & \cup (\{C\} \times [OA])) \cup ((([OA] \times \{B\}) \cup (\{A\} \times [OB])) \cup ((([OB] \times \{A\}) \cup \\ & \cup (\{B\} \times [OA])) \cup ((([O\frac{A}{2}] \times \{C\}) \cup (\{\frac{A}{2}\} \times [OC])) \cup \\ & \cup ((([OC] \times \{\frac{A}{2}\}) \cup (\{C\} \times [O\frac{A}{2}])) \cup ((([O\frac{A}{2}] \times \{B\}) \cup \\ & \cup (\{\frac{A}{2}\} \times [OB])) \cup ((([OB] \times \{\frac{A}{2}\}) \cup (\{B\} \times [O\frac{A}{2}])) \cup \\ & \cup ((([O\frac{A}{2}] \times \{A\}) \cup (\{O\} \times [\frac{3A}{4}])) \cup ((([\frac{3A}{4}A] \times \{O\}) \cup \\ & \cup (\{A\} \times [O\frac{A}{2}])). \end{aligned}$$

Si $(p, q) \in Z_1 \Rightarrow d(p, q) \geq 2$.

Hipótesis de inducción

Supongamos que Z_n es un subcontinuo de $T \times T$ tal que:

a) $\pi_1(Z_n) = \pi_2(Z_n) = T$

b) Z_n es la union de 12 continuos denotados por: $\langle OB, OC \rangle$,
 $\langle OC, OB \rangle$, $\langle OA, OC \rangle$, $\langle OC, OA \rangle$, $\langle OA, OB \rangle$, $\langle OB, OA \rangle$,
 $\langle O\frac{A}{2}, OC \rangle$, $\langle OC, O\frac{A}{2} \rangle$, $\langle O\frac{A}{2}, OB \rangle$, $\langle OB, O\frac{A}{2} \rangle$,
 $\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4} \rangle$, $\langle \frac{3A}{4}A, O\frac{A}{2} \rangle$, donde $\langle t, u \rangle$ denota un continuo K tal que
 $\pi_1(K) = t$ y $\pi_2(K) = u$

c) $\langle t, u \rangle^{-1} = \langle u, t \rangle$

d) Existen cuatro puntos x_1, x_2, x_3, x_4 tales que:

$$x_1 \in [\frac{3A}{4}A], x_2 \in [\frac{2B}{3}B], x_3 \in [\frac{C}{2}C], x_4 \in [\frac{A}{4}\frac{A}{2}]$$

Este es el digrama de $Z/1$ representado en TXT

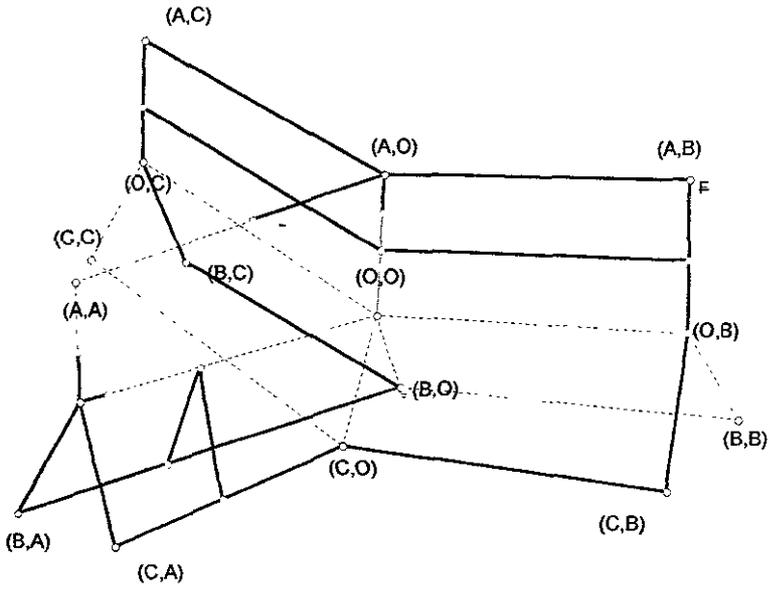


Figure 6:

Esta figura es homeomorfa al anterior, solamente la represento plana

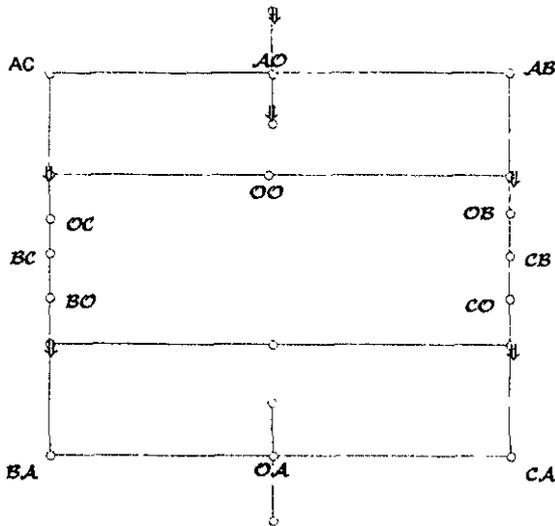


Figure 7:

1) $\langle OA, OB \rangle, \langle OA, OC \rangle$ y $\langle \frac{3A}{4}, O\frac{A}{2} \rangle$ contienen a (x_1, O) y $\langle OB, OA \rangle, \langle OC, OA \rangle$ y $\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4} \rangle$ contienen a (O, x_1) .

2) $\langle OB, OA \rangle, \langle OB, OC \rangle$ y $\langle OB, O\frac{A}{2} \rangle$ contienen a (x_2, O) y $\langle OA, OB \rangle, \langle OC, OB \rangle, \langle O\frac{A}{2}, OB \rangle$ contienen a (O, x_2) .

3) $\langle OC, OA \rangle, \langle OC, OB \rangle, \langle OC, O\frac{A}{2} \rangle$ contienen a (x_3, O) y $\langle OA, OC \rangle, \langle OB, OC \rangle$ y $\langle O\frac{A}{2}, OC \rangle$, contienen a (O, x_3) .

4) $\langle O\frac{A}{2}, OB \rangle$ y $\langle O\frac{A}{2}, OC \rangle$ contienen a (x_4, O) y $\langle OB, O\frac{A}{2} \rangle$ y $\langle OC, O\frac{A}{2} \rangle$ contienen a (O, x_4) .

e) Existen dos puntos z_1 y z_2 tales que $z_1 \in OC, z_2 \in OA$ y

1) $(B, z_1) \in \langle OB, OC \rangle$ y $(z_1, B) \in \langle OC, OB \rangle$

2) $(B, z_2) \in \langle OB, OA \rangle$ y $(z_2, B) \in \langle OA, OB \rangle$.

Finalmente supongamos que si $n > 1, (f \times f)(Z_n) = Z_{n-1}$.

Z_1 cumple con todas las condiciones anteriores.

a) $\pi_1(Z_1) = \pi_2(Z_1) = T$, por construcción.

b) Por construcción, Z_1 es la unión de 12 continuos (los doce que usamos en la construcción) con las proyecciones adecuadas.

c) Se cumple con esta condición por construcción.

d) Los puntos $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 = A, x_2 = B, x_3 = C, x_4 = \frac{A}{2}$, cumplen con todos los requerimientos.

e) Los puntos $z_1 = C, z_2 = A$, son los puntos que cumplen con los requerimientos, es decir: $(B, z_1) \in \langle OB, OC \rangle, (z_1, B) \in \langle OC, OB \rangle; (B, z_2) \in \langle OB, OA \rangle, (z_2, B) \in \langle OA, OB \rangle$.

Construcción de Z_{n+1}

Primamente estableceré la notación:

Sea $\langle t, u \rangle$ un subcontinuo de Z_n, v y w arcos en T tales que $f|_v$ es un homeomorfismo entre v y t y $f|_w$ es un homeomorfismo entre w y u .

Ahora bien $L = (f \times f)|_{v,w}^{-1}(\langle t, u \rangle)$ es un continuo llamado el "levantamiento" de $\langle t, u \rangle$ con respecto a v y w . Vease que: $\pi_1(L) = v, \pi_2(L) = w$,

denotado por: $L(\langle t, u \rangle, v, w)$, si no causa confusión se denotará simplemente por L .

Definamos:

$$a_1 = L_1^1(\langle OB, OC \rangle, O\frac{B}{3}, \frac{C}{2}C) \cup L_2^1(\langle O\frac{A}{2}, OC \rangle, \frac{B}{3}\frac{B}{2}, \frac{C}{2}C) \cup \\ \cup L_3^1(\langle O\frac{A}{2}, OB \rangle, \frac{B}{3}\frac{B}{2}, O\frac{C}{2}) \cup L_4^1(\langle O\frac{A}{2}, OB \rangle, \frac{B}{2}\frac{2B}{3}, O\frac{C}{2}) \cup \\ \cup L_5^1(\langle OC, OB \rangle, \frac{2B}{3}B, O\frac{C}{2})$$

$$a_2 = a_1^{-1}$$

$$a_3 = L_1^3(\langle OB, OC \rangle, O\frac{C}{2}, \frac{3A}{4}A) \cup L_2^3(\langle OB, OA \rangle, O\frac{C}{2}, \frac{A}{2}\frac{3A}{4}) \cup \\ \cup L_3^3(\langle OB, OA \rangle, O\frac{C}{2}, \frac{A}{4}\frac{A}{2}) \cup L_4^3(\langle OC, OA \rangle, \frac{C}{2}C, \frac{A}{4}\frac{A}{2}) \cup \\ \cup L_5^3(\langle OC, OB \rangle, \frac{C}{2}C, O\frac{A}{4}).$$

$$a_4 = a_3^{-1}$$

$$a_5 = L_1^5(\langle OB, OC \rangle, O\frac{B}{3}, \frac{3A}{4}A) \cup L_2^5(\langle OB, OA \rangle, O\frac{B}{3}, \frac{A}{2}\frac{3A}{4}) \cup \\ \cup L_3^5(\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4}A \rangle, \frac{B}{3}\frac{B}{2}, \frac{A}{2}\frac{9A}{16}) \cup L_4^5(\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4}A \rangle, \frac{B}{3}\frac{B}{2}, \frac{7A}{16}\frac{A}{2}) \cup \\ \cup L_5^5(\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4}A \rangle, \frac{B}{2}\frac{2B}{3}, \frac{7A}{16}\frac{A}{2}) \cup L_6^5(\langle OC, OA \rangle, \frac{2B}{3}B, \frac{A}{4}\frac{A}{2}) \cup \\ \cup L_7^5(\langle OC, OB \rangle, \frac{2B}{3}B, O\frac{A}{4}).$$

$$a_6 = a_5^{-1}$$

$$a_7 = L_1^7(\langle OB, OC \rangle, O\frac{A}{4}, \frac{2B}{3}B) \cup L_2^7(\langle OA, OC \rangle, \frac{A}{4}\frac{A}{2}, \frac{2B}{3}B) \cup \\ \cup L_3^7(\langle \frac{3A}{4}A, O\frac{A}{2} \rangle, \frac{7A}{16}\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\frac{2B}{3}) \cup L_4^7(\langle \frac{3A}{4}A, O\frac{A}{2} \rangle, \frac{7A}{16}\frac{A}{2}, \frac{B}{3}\frac{B}{2}) \cup \\ \cup L_5^7(\langle OA, OB \rangle, \frac{A}{4}\frac{A}{2}, O\frac{B}{3}).$$

$$a_8 = a_7^{-1}$$

$$a_9 = L_1^9(\langle OB, OC \rangle, O\frac{A}{4}, \frac{C}{2}C) \cup L_2^9(\langle OA, OC \rangle, \frac{A}{4}\frac{A}{2}, \frac{C}{2}C) \cup \\ \cup L_3^9(\langle OA, OB \rangle, \frac{A}{4}\frac{A}{2}, O\frac{C}{2}).$$

$$a_{10} = a_9^{-1}$$

$$a_{11} = L_1^{11} (\langle OB, OC \rangle, O \frac{A}{4}, \frac{3A}{4} A) \cup L_2^{11} (\langle OA, OC \rangle, \frac{A}{4} \frac{A}{2}, \frac{3A}{4} A)$$

$$a_{12} = a_{11}^{-1}$$

Afirmación 2.1 a_1 es un continuo

Demostración Puesto que: $\left(\frac{B}{3}, (f|_{\frac{C}{2}O})^{-1}(x_3)\right) \in L_1^1 \cap L_2^1, \left(\left(f|_{\frac{B}{3}\frac{B}{2}}\right)^{-1}(x_4), \frac{C}{2}\right) \in L_2^1 \cap L_3^1$. Existe un punto y_1 de OB tal que $(\frac{A}{2}, y_1) \in \langle O \frac{A}{2}, OB \rangle$, por lo tanto $\left(\frac{B}{2}, (f|_{O\frac{C}{2}})^{-1}(y_1)\right) \in L_3^1 \cap L_4^1$ y $\left(\frac{2B}{3}, (f|_{O\frac{C}{2}})^{-1}(x_2)\right) \in L_4^1 \cap L_5^1$, también $\pi_1(a_1) = OB, \pi_2(a_1) = OC$ y $(f \times f)(a_1) \subset Z_n$.

Los otros once a_i son también continuos, la demostración de este hecho la omito por ser analoga a la demostración anterior.

Definimos $Z_{n+1} = \cup_{i=1}^{12} a_i$. entonces Z_{n+1} es la unión de 12 continuos tales que:

$$\begin{aligned} \langle OB, OC \rangle &= a_1, \langle OC, OB \rangle = a_2, \langle OA, OC \rangle = a_4, \\ \langle OC, OA \rangle &= a_3, \langle OA, OB \rangle = a_6, \langle OB, OA \rangle = a_5 \\ \langle O \frac{A}{2}, OC \rangle &= a_9, \langle OC, O \frac{A}{2} \rangle = a_{10}, \langle O \frac{A}{2}, OB \rangle = a_7 \\ \langle OB, O \frac{A}{2} \rangle &= a_8, \langle O \frac{A}{2}, \frac{3A}{4} A \rangle = a_{11}, \langle \frac{3A}{4} A, O \frac{A}{2} \rangle = a_{12}. \end{aligned}$$

Es claro que los subcontinuos anteriores cumplen que si $K = \langle t, u \rangle$, entonces $\pi_1(K) = t$ y $\pi_2(K) = u$, por construcción $\langle t, u \rangle^{-1} = \langle u, t \rangle$, por lo que la condiciones (b) y (c) de la hipótesis de inducción es satisfecha por Z_{n+1} .

Sea $x'_1 = (f|_{\frac{3A}{4}A})^{-1}(z_1), x'_2 = (f|_{\frac{2B}{3}B})^{-1}(z_1), x'_3 = (f|_{\frac{C}{2}C})(z_1), x'_4 = (f|_{\frac{A}{4}\frac{A}{2}})^{-1}(z_2)$, claramente $x'_1 \in [\frac{3A}{4}A], x'_2 \in [\frac{2B}{3}B], x'_3 \in [\frac{C}{2}C]$, y $x'_4 \in [\frac{A}{4}\frac{A}{2}]$. entonces (x'_1, O) es un punto de a_5, a_4 y a_{12} mientras que (O, x'_1) es un punto de a_5, a_3 y a_{11} . El punto (x'_2, O) es un punto de a_5, a_1 y a_8 , mientras que (O, x'_2) es un punto de a_6, a_2 , y a_7 . El punto (x'_3, O) es un punto de a_3, a_2 , y a_{10} , mientras que (O, x'_3) es un punto de a_4, a_1 y a_9 . El punto (x'_4, O) es un punto de a_7 y a_9 mientras que (O, x'_4) es un punto de a_8 y a_{10} . por lo tanto (d) es satisfecha.

Existe también un punto $z'_1 \in OC$, tal que $(B, z'_1) \in a_1$ y $(z'_1, B) \in a_2$, y existe un punto $z'_2 \in OA$, tal que $(B, z'_2) \in a_5$ y $(z'_2, B) \in a_6$, por lo tanto (e) es satisfecha.

De lo anterior cada uno de los conjuntos de la siguiente sucesión finita es un continuo, $(a_4 \cup a_6 \cup a_{12}), (a_1 \cup a_4 \cup a_9), (a_5 \cup a_1 \cup a_8), (a_5 \cup a_3 \cup a_{11}), (a_2 \cup a_3 \cup a_{10}), (a_6 \cup a_2 \cup a_7)$.

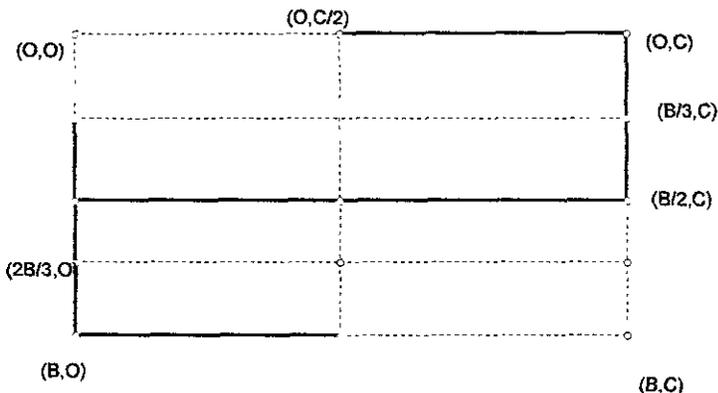


Figure 8:

Por otro lado todo término de la sucesión (salvo el último) intersecta al que le sigue, y la unión de todos los términos de la sucesión es Z_{n+1} , por lo tanto Z_{n+1} es un continuo, Del hecho de que $\pi_i(a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup a_4) = T$, para $i = 1, 2$; $\pi_1(Z_{n+1}) = \pi_2(Z_{n+2}) = T$, (a) es satisfecha y Z_{n+1} es un subcontinuo de $T \times T$.

Finalmente haremos ver que $(f \times f)(Z_{n+1}) = Z_n$, el continuo $\langle OB, OC \rangle$, $\langle OA, OC \rangle$, $\langle OA, OB \rangle$, $\langle O\frac{A}{2}, OC \rangle$, $\langle O\frac{A}{2}, OB \rangle$,

$\langle O\frac{A}{2}, \frac{3A}{4} \rangle$, son todos los subconjuntos de $f \times f(a_1 \cup a_5 \cup a_7 \cup a_9)$, tambien $\langle OC, OB \rangle$, $\langle OC, OA \rangle$, $\langle OB, OA \rangle$

$\langle OC, O\frac{A}{2} \rangle$, $\langle OB, O\frac{A}{2} \rangle$, $\langle \frac{3A}{4}A, O\frac{A}{2} \rangle$, son todos los subconjuntos de $f \times f(a_2 \cup a_6 \cup a_8 \cup a_{10})$ por lo tanto Z_n es un subconjunto de $f \times f(Z_{n+1})$, como para toda i , $f \times f(a_i) \subset Z_n$, $f \times f(Z_{n+1}) = Z_n$.

Para tener una idea más clara de la inducción, construiré Z_2 , siguiendo las instrucciones construyo en primer lugar (a_1) la cual observamos en la figura 8

Ahora, después de hacer la construcción de cada una de las partes requeridas obtengo una de las "vistas" obsérvese la figura 9

Esta es la parte de "abajo", hay que pegar una cara más, la cual añade 2 "crestas", estas se observan en la figura 10

NOTA: Una observación interesante es que todos los elementos de la sucesión que se construyó, estan contenidos en la unión de las figuras 11 y 12, otra nota interesante es que estos subconjuntos de $T \times T$ los podemos encajar en \mathbb{R}^3 .

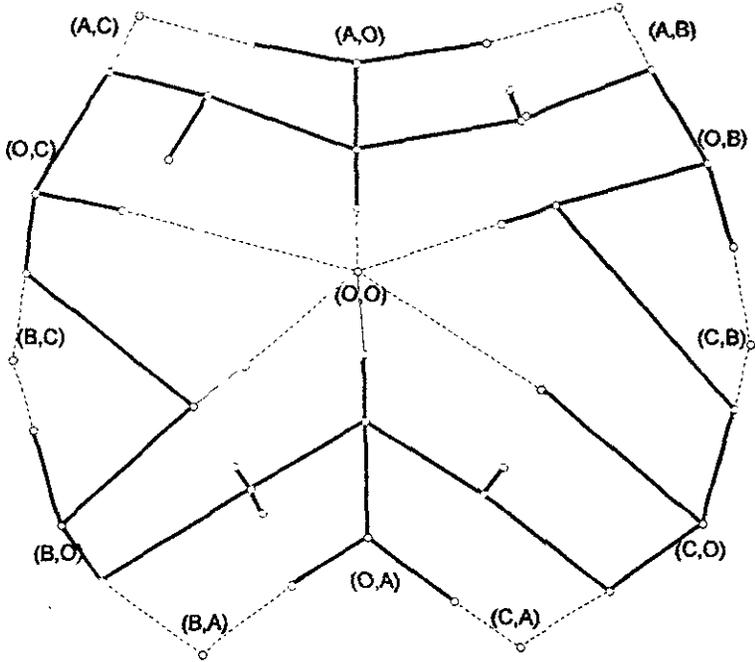


Figure 9:

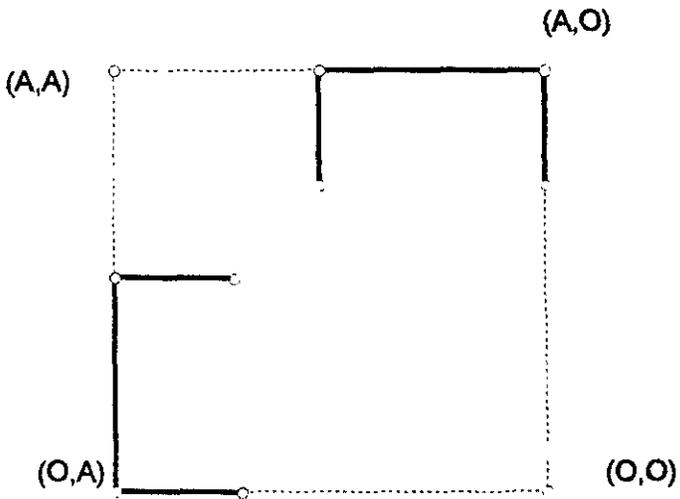


Figure 10:

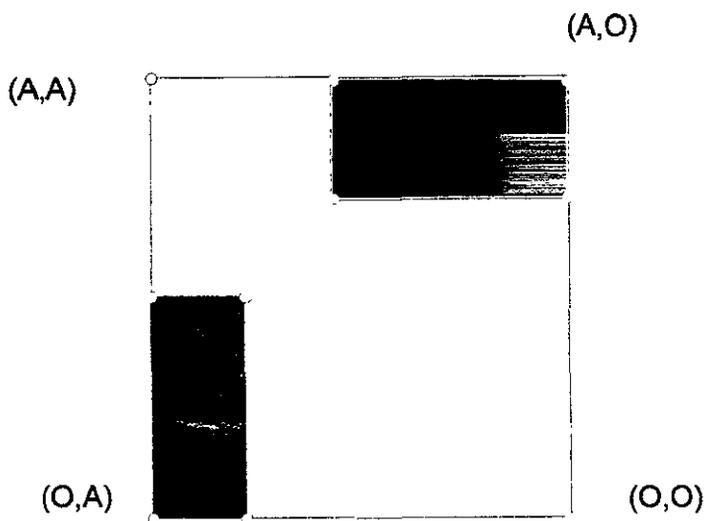


Figure 11:

Teorema 2.3 El continuo M tiene span positivo, y en consecuencia es no-encadenable.

El teorema anterior es una consecuencia directa del teorema (1.8) del capítulo 1, puesto que si M fuera encadenable entonces tendría span cero, al no tenerlo se cumple el teorema anterior

Demostración: Suponga que k es un entero positivo y seleccione Z_1, Z_2, Z_3, \dots , que satisfagan la construcción anterior, para toda n sea $T_n = T$, y sea $g_n = f$ si $n \leq k - 1$, donde g_n es la identidad en T si $n \geq k$.

Si $Y_k = \text{lim} \{T_i, g_i\}$, sea $h : T_k \rightarrow Y_k$ es definida por $h(x) = (f^{k-1}(x), \dots, f(x), x, x, \dots)$, entonces h es un homeomorfismo de T_k sobre Y_k . El conjunto $W = (h \times h)(Z_k)$ es un subconjunto conexo de $Y_k \times Y_k$ con todas sus proyecciones sobre Y_k . Si (p, q) es un punto de W , $d(p, q) \geq \frac{1}{2}d(f^{k-1}(p_k), f^{k-1}(q_k)) \geq \frac{1}{4}$, como $(f^{k-1}(p_k), f^{k-1}(q_k)) \in Z_1$, por lo tanto $\sigma Y_k \geq \frac{1}{4}$.

Como M es el límite de la sucesión de los conjuntos Y_1, Y_2, \dots , $\sigma(M) \geq \limsup \sigma(Y_k) \geq \frac{1}{4}$, por el teorema (1.7) de la introducción tenemos $\sigma(M) > 0$, y en consecuencia M es no encadenable.

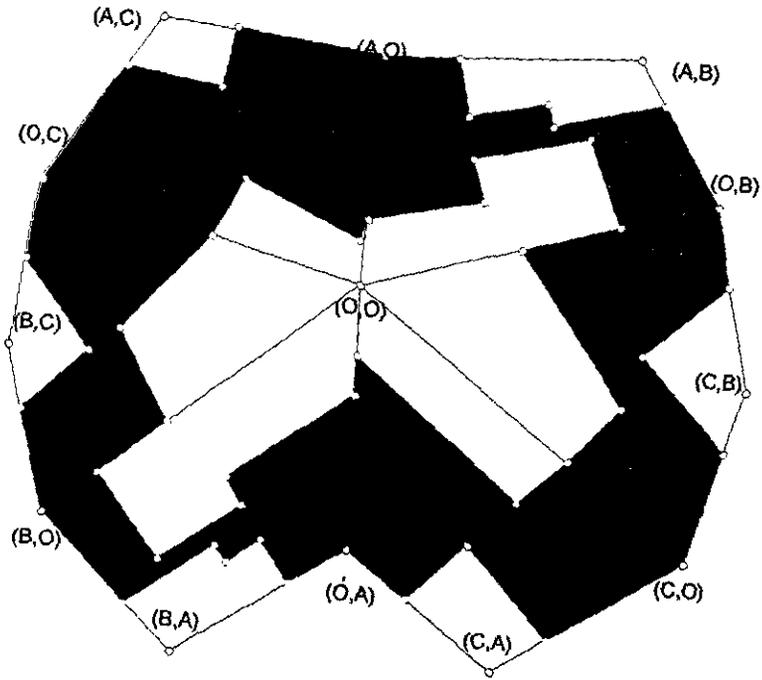


Figure 12:

CAPÍTULO 3

EL SUPERTRIEDO

El propósito de esta sección será describir un continuo que cumple: Es indecomponible, límite inverso de triodos y contiene triodos. Este análisis se divide en tres partes con el propósito de motivar la intuición con que contamos con respecto a la función que nos genera este límite inverso.

3.1 DEFINICIÓN

Sea T un triodo simple, definamos la función $F : T \rightarrow T$ como sigue:

$$F(\overline{OA}) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{2}, 4x - 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1, \right] \\ \left(0, -4x + 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \right] \\ \left(0, 2x \right), \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OC}) = \left\{ \begin{array}{l} \left(0, 4x - 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right] \\ \left(\pi, -4x + 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \\ \left(\pi, 2x \right), \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OB}) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\pi, 4x - 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right] \\ \left(\frac{\pi}{2}, -4x + 3 \right), \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \\ \left(\frac{\pi}{2}, 2x \right), \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\}$$

En la figura 13 tenemos la gráfica correspondiente a esta función

Tendremos más precisión al observar la figura 14:

El sistema inverso (del cual M es su límite inverso) será: $\{T_n, F_n^{n+1}\}$, donde cada T_n es un triodo y cada F_n^{n+1} es la función definida anteriormente.

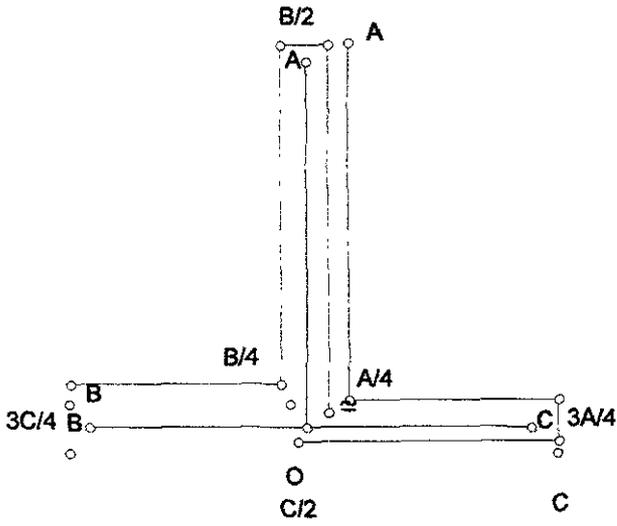


Figure 13:

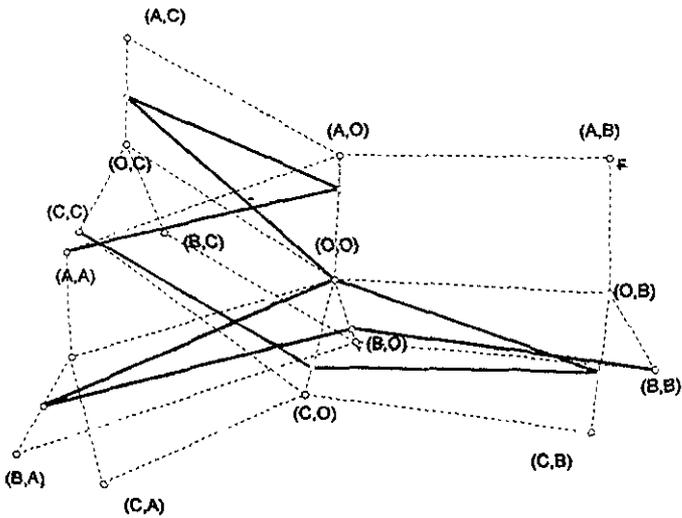


Figure 14:

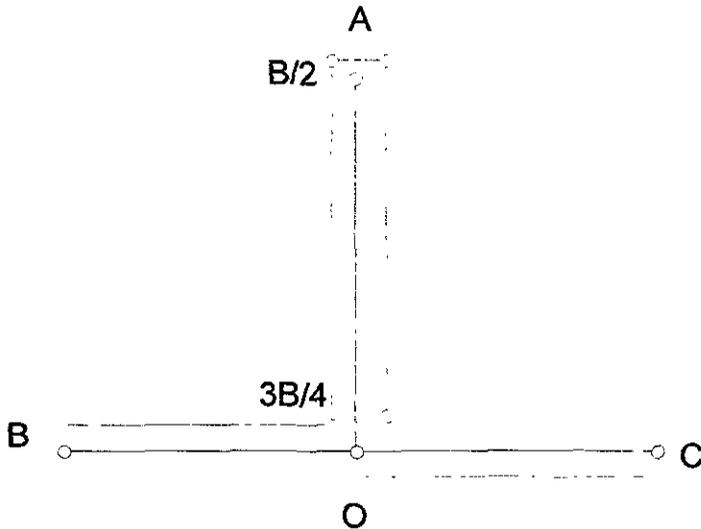


Figure 15:

3.2 PRIMERA RESTRICCIÓN, CURVA TOPOLÓGICA

Para evitar confusiones llamaremos f_1 a la función que definimos a continuación.

$f_1(\overline{OA}) = I_{\overline{OA}}$, es decir la identidad en \overline{OA}

$f_1(\overline{OC}) = I_{\overline{OC}}$, es decir la identidad en \overline{OC}

Finalmente f_1 aplicada al intervalo \overline{OB} será la función F aplicada al intervalo en cuestión, es decir:

$$f_1(\overline{OB}) = F((\pi, x)) = \left\{ \begin{array}{l} (\pi, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\frac{\pi}{2}, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\frac{\pi}{2}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

La gráfica correspondiente se ve en la figura 15

La figura 16 nos muestra su gráfica en $T \times T$.

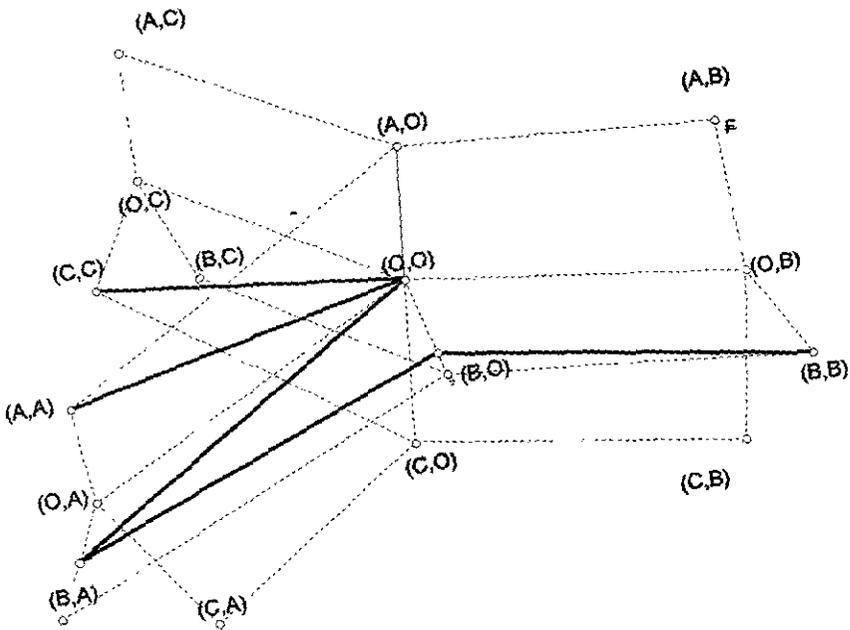


Figure 16:

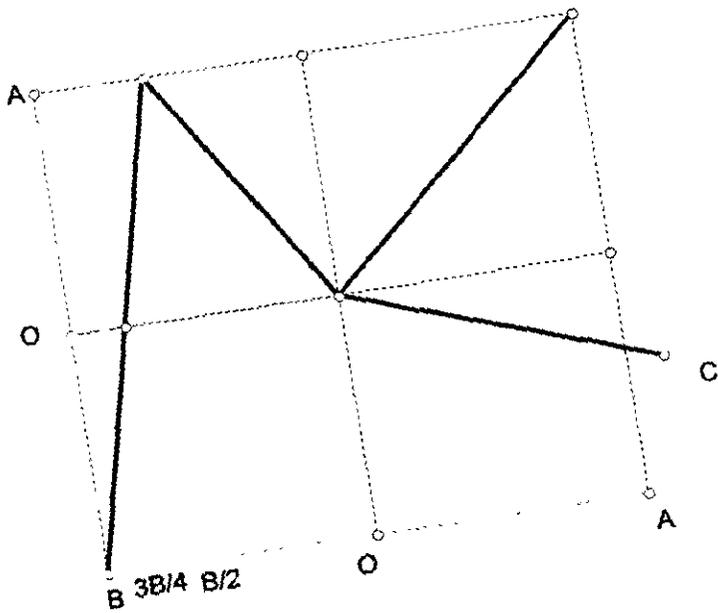


Figure 17:

Si "desdoblamos" de manera adecuada tendremos la siguiente gráfica (fig17):

Afirmación 3.1 El $\lim \{T, f_1\}$ es homeomorfo a la curva: $\overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -2 \leq y \leq -1\}$. es decir la curva topológica unida con un arco (a partir de aquí la llamaré C_T por comodidad).

Demostración: Dividiré este análisis en dos partes, primero identificaré cuales son los subcontinuos de T a partir de los cuales obtengo el arco que contiene el residuo de C_T y su prolongación sobre el eje Y , en segundo lugar distinguiré los subcontinuos de T a partir de los cuales obtengo la curva topológica.

1) La función f_1 restringida a $\overline{OA} \cup \overline{OC}$ es la identidad, por lo tanto el límite inverso restringido a estos segmentos es un arco. Este arco es homeomorfo a: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -2 \leq y \leq 1\}$.

2) Para encontrar los subcontinuos a partir de los cuales obtengo la curva topológica primeramente recordaré algunos conceptos.

Por [2] puedo ver la curva topológica como sigue:

$$\lim \{I, g\} \text{ donde } I = [0, 1] \text{ y } g(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2x, \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -x + \frac{3}{2}, \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right\}$$

también recordemos por el teorema (1.4) del primer capítulo que obtengo el mismo límite inverso si uso g^2 , es decir: $g^2(x) = \left\{ \begin{array}{l} 4x, \text{ si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -2x + \frac{3}{2}, \text{ si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ x, \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right\}$ sus gráficas las vemos en la figura 18.

Usaré g^2 y f , definidas anteriormente para demostrar mi afirmación, mostraré que el siguiente diagrama cumple las condiciones del teorema (1.2) y así tenemos un homeomorfismo entre los límites inversos.

$$\begin{array}{ccccc} L & & h & & L \\ \downarrow \varphi & & & & \downarrow \varphi \\ I & & \xrightarrow{g^2} & & I \end{array} \text{ donde: } \overline{OA} \cup \overline{OB} = L, f|_L = h, \text{ y también se cumple:}$$

$$\varphi((\theta, x)) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ si } x \in [0, 1], \theta = \pi \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ si } x \in [0, 1], \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

de manera gráfica tenemos fig. 19:

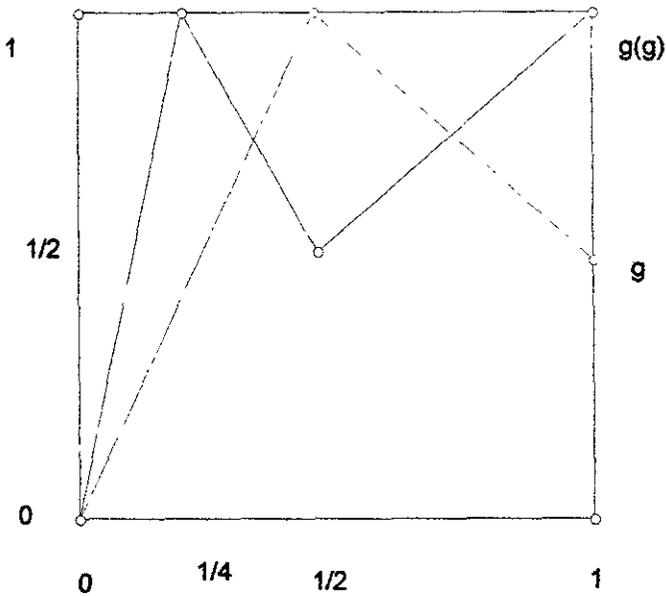


Figure 18:

Por el teorema 1.2 la igualdad que se debe cumplir es la siguiente: $g^2 \circ \varphi = \varphi \circ f$, En los renglones siguientes probaré esta igualdad.

-Si $\theta = \pi$

$$\varphi((\theta, x)) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$g^2(\varphi(\pi, x)) = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -2x + 2, \text{ si } \varphi((\pi, x)) \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ (1)} \\ -2\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2}, \text{ si } \varphi((\pi, x)) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ (2)} \end{array} \right\}$$

-Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\varphi\left(\left(\frac{\pi}{2}, x\right)\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$g^2\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}, x\right)\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ (3)}$$

-Si $\theta = \pi$

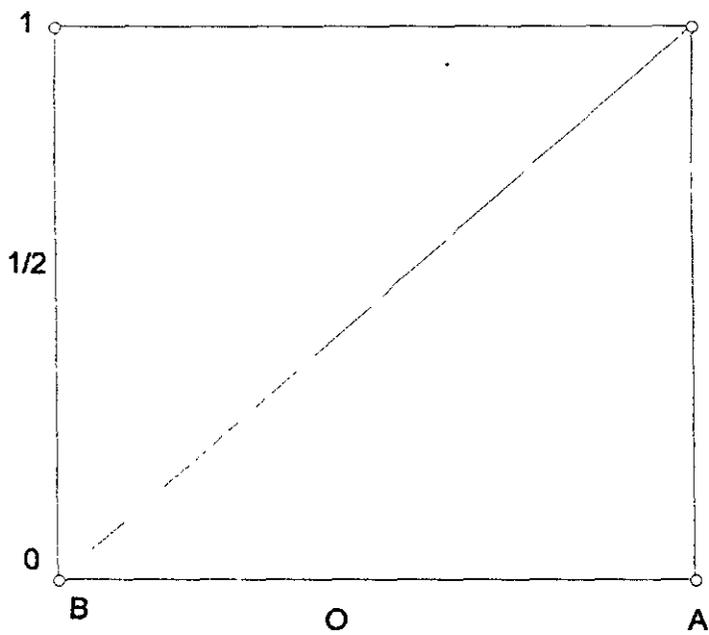


Figure 19:

$$f((\pi, x)) = \left\{ \begin{array}{l} (\pi, 4x), \text{ si } x \in [1, \frac{3}{4}] \\ (\frac{\pi}{2}, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] \\ (\frac{\pi}{2}, 2x), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 0] \end{array} \right\}$$

$$\varphi(f(\pi, x)) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(4x - 3) + \frac{1}{2} = -2x + 2, \text{ si } f(\pi, x) \in (\pi, x) (1') \\ \frac{1}{2}(-4x + 3) + \frac{1}{2} = -2x + 2, \text{ si } f(\pi, x) \in (\frac{\pi}{2}, x) (1') \\ \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}, \text{ si } f(\pi, x) \in (\frac{\pi}{2}, x) (2') \end{array} \right\}$$

-Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{2}, x) = (\frac{\pi}{2}, x)$$

$$\varphi(f(\frac{\pi}{2}, x)) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} (3')$$

Comparando 1 y 1', 2 y 2', 3 y 3', tendremos: $g^2 \circ \varphi = \varphi \circ f$, por lo tanto los límites inversos son homeomorfos, y en consecuencia el $\text{lm} \{OAOB, f_1\}$ es homeomorfo a la curva topológica (C_T) .

Por último hemos de notar que comparando (1) y (2), obtenemos lo que deseábamos demostrar.

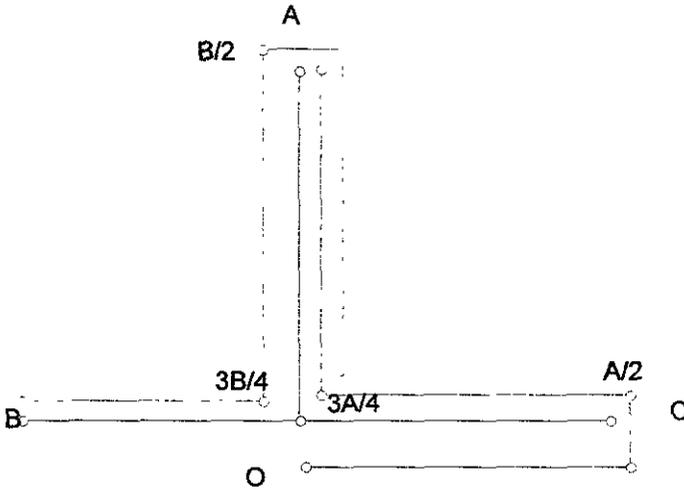


Figure 20:

3.3 SEGUNDA RESTRICCIÓN, CURVA TOPOLÓGICA Y RAYO

Ahora restringiré F a 2 de los arcos, \overline{OB} , y \overline{OA} , en \overline{OC} será la identidad, de tal forma que tendremos una nueva función $f_2 : T \rightarrow T$ definida como sigue:

$f_2(\overline{OC}) = I_{\overline{OC}}$ es decir la identidad en el segmento \overline{OC} .

$$f_2(\overline{OA}) = F\left(\left(\frac{\pi}{2}, x\right)\right) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}, 4x - 3\right), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ (0, -4x + 3), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ (0, 2x), & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

$$f_2(\overline{OB}) = F\left((\pi, x)\right) = \begin{cases} (\pi, 4x - 3), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ \left(\frac{\pi}{2}, -4x + 3\right), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \left(\frac{\pi}{2}, 2x\right), & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

gráficamente tengo la fig 20

Afirmación 3.2 El $\text{lim}\{T, f_2\}$ es homeomorfo a: $N = C_T \cup K$, donde K es un rayo que cumple: $N = \overline{K}$, $\overline{K} - K = C_T$.

Cabe mencionar que esta demostración está inspirada en un grado muy alto en una demostración de Ingram [2, ejemplo 0.2, p 4 – 5], acerca del límite inverso a partir del cual obtengo la curva topológica.

Demostración:

1) Si considero la función f_2 , la imagen del arco \overline{OC} es él mismo bajo la identidad en \overline{OC} , el cual es homeomorfo a un arco S , que cumple que es homeomorfo a la barra límite de la curva topológica (C_T) . Nótese que $S = \{x \in N : x_n \in \overline{OC}, \forall n\}$

2) Defino ahora los conjuntos:

$$\beta_n = \{x \in N : x_n \in \overline{OB}\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha_n = \{x \in N : x_n \in \overline{OA}, \text{ y } x_i \in \overline{OA}, \forall i \geq n\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Ahora bien, } N = (\cup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}) \cup (\cup_{j=1}^{\infty} \{\beta_j\}) \cup S$$

Esto se cumple, puesto que si $x \in N$, entonces se cumple uno y solo uno de los siguientes incisos:

a) $x_n \in \overline{OB}, \Rightarrow x \in \beta_n$

b) $x_n \in \overline{OA}$, y en este caso hay solamente dos posibilidades:

1) $x_j \in \overline{OA}, \forall j \geq n \Rightarrow x \in \alpha_n$.

2) $x_r \in \overline{OB}$, para alguna $r > n \Rightarrow x \in \beta_r$.

c) $x_n \in \overline{OC}, \forall n; \Rightarrow x \in S$.

Notemos también que de los incisos anteriores podemos concluir que los tres conjuntos que aparecen en la descomposición de N son ajenos dos a dos.

A continuación demostraré que todos los puntos de S son puntos límite de $\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, donde $\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ es un rayo

1) Sea $x \in S$ y $\varepsilon > 0$ entonces, existe un entero positivo E , tal que $\sum_{i \geq E} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$,

2) Por otro lado, existe $y_E \in \overline{OA}$, tal que $f_2(y_E) = x_{E-1}$, donde x_{E-1} es la $(E-1)$ coordenada de x .

Ahora:

Sea $y = (x_1, x_2, \dots, x_{E-1}, y_E, y_{E+1}, \dots)$, donde cada $y_k \in \overline{OA}$, en consecuencia $y \in \cup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}$.

Por (1) se cumple $d(x, y) < \varepsilon$, luego entonces todos los puntos de S son puntos límite de elementos de $\cup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}$ es un rayo pues cada uno de los α_i lo es y se cumple la contención: $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \dots \subset \alpha_k \subset \alpha_{k+1} \subset \dots$,

De lo anterior podemos concluir: $\overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\})} - \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\} = S$, y $(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}) \cup S \approx C_T$

Por otro lado:

Observemos que si $x \in S \cup \{\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i\}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

1) Existe un entero positivo b , tal que $\sum_{i \geq b} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$,

2) Existe un punto $y_b \in \overline{OB}$, que cumple: $f_2(y_b) = x_{b-1}$, donde x_{b-1} es la $(b-1)$ coordenada de x , esto se cumple puesto que \overline{OA} se cubre "directamente" por \overline{OB} , y \overline{OC} es cubierto por \overline{OB} despues de aplicar f_2 dos veces ($f_2 \circ f_2$).

Ahora:

Sea $y = (x_1, x_2, \dots, x_{b-1}, y_b, \dots)$, notemos que las únicas imagenes inversas de y_b son elementos de \overline{OC} por lo tanto se cumple: $y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\beta_i\}$.

Entonces por (1) se cumple $d(x, y) < \varepsilon$, por lo tanto tenemos que cada punto de $S \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\})$ es punto límite de puntos en $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\beta_i\}$, por lo tanto tenemos: $\overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\beta_i\})} - (\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\beta_i\}) = S \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\alpha_i\}) \approx C_T$.

Concluyendo:

Se cumple $\text{lim } \{T, f_2\}$ es homeomorfo a la curva topológica unida con un rayo el cual tiene como puntos límite la misma.

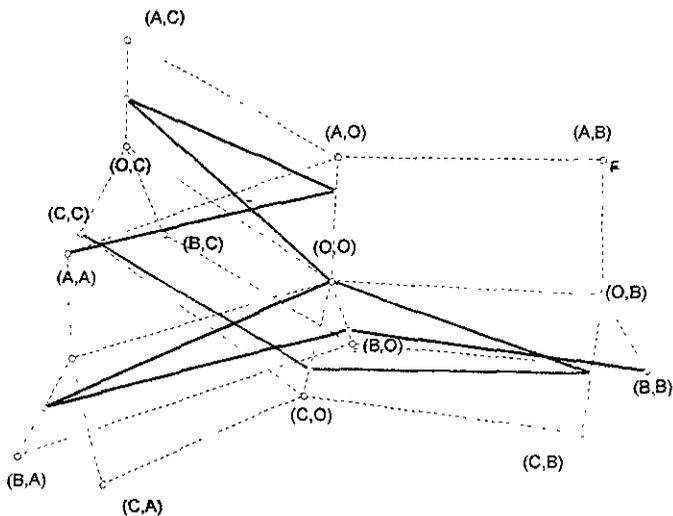


Figure 21:

3.4 ANÁLISIS TOTAL, EL SUPERTRIODO

El último paso consiste en describir el límite inverso que obtenemos si aplicamos F sin restricciones, es decir fig 21:

$$F : T \rightarrow T$$

$$F(\overline{OA}) = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2}, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (0, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (0, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OC}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\pi, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\pi, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OB}) = \left\{ \begin{array}{l} (\pi, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\frac{\pi}{2}, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\frac{\pi}{2}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

Afirmación 3.3: El continuo M es indescomponible

Demostración: Sean N y \tilde{N} dos subcontinuos propios de T , entonces uno de ellos contiene dos puntos extremos de T , sin pérdida de generalidad

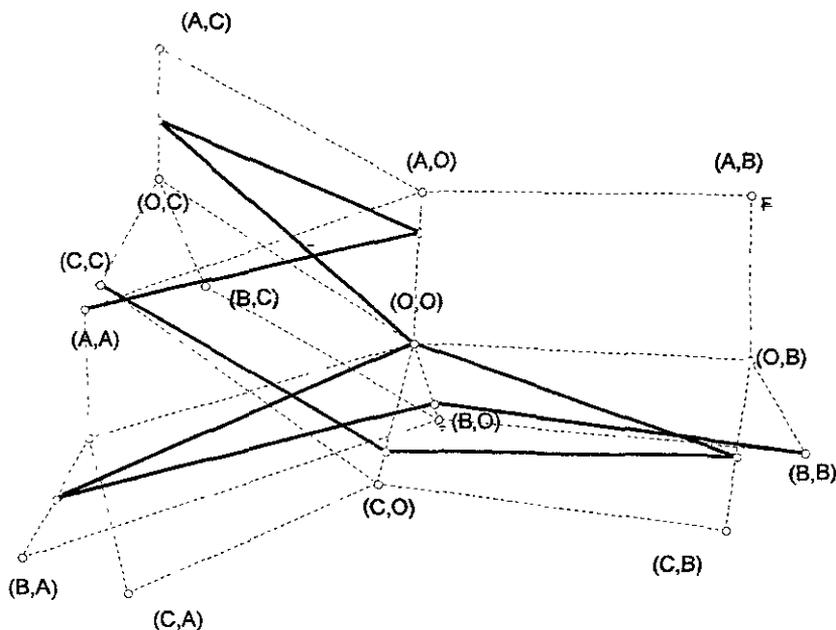


Figure 22:

puedo suponer que el continuo es N y que los puntos extremos son A y B , en consecuencia: $(\overline{AO} \cup \overline{OB}) \subset N$, lo que nos implica $F(N) \supset F(\overline{AO} \cup \overline{OB}) = T$, por lo tanto $F(N) = T$, esto quiere decir que se cumplen las condiciones del teorema (1.5) de la introducción, en consecuencia M es indescomponible.

Afirmación 3.4: El continuo M contiene un triodo.

Demostración: Procedo como sigue:

Observemos la gráfica de F (fig 22), notemos que T es la imagen de un triodo $T'_1 = \overline{O\frac{B}{2}} \cup \overline{O\frac{C}{2}} \cup \overline{O\frac{A}{2}}$ y la función $F|_{T'_1}$ es un homeomorfismo.

También notemos que T'_1 es la imagen de un triodo $T'_2 = \overline{O\frac{C}{4}} \cup \overline{O\frac{A}{4}} \cup \overline{O\frac{B}{4}}$ y la función $F|_{T'_2}$ es un homeomorfismo.

Para fijar ideas observese la gráfica de F^2 (fig 23):

Aplicando este mismo criterio para T'_2 , obtenemos que él es la imagen de $T'_3 = \overline{O\frac{A}{8}} \cup \overline{O\frac{B}{8}} \cup \overline{O\frac{C}{8}}$.

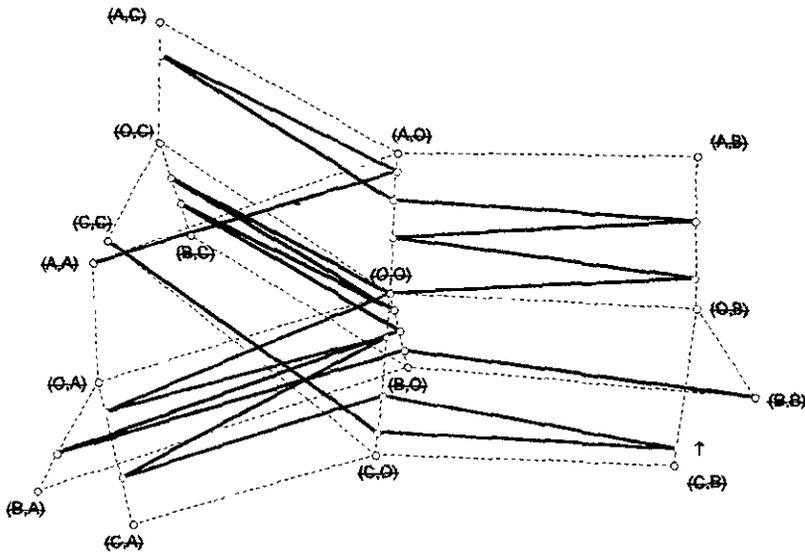


Figure 23:

Ahora estamos listos para generalizar:

Consideremos los conjuntos:

$$T'_h = \left\{ \begin{array}{l} \overline{O_{2^{3k}}^A} \cup \overline{O_{2^{3k}}^B} \cup \overline{O_{2^{3k}}^C} \text{ si se cumple que } h = 3k, k \in \mathbb{N} \\ \overline{O_{2^{3k+1}}^B} \cup \overline{O_{2^{3k+1}}^C} \cup \overline{O_{2^{3k+1}}^A} \text{ si se cumple que } h = 3k + 1, k \in \mathbb{N} \\ \overline{O_{2^{3k+2}}^C} \cup \overline{O_{2^{3k+2}}^A} \cup \overline{O_{2^{3k+2}}^B} \text{ si se cumple que } h = 3k + 2, k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Cada una de las T'_h es un triodo, $F|_{T'_h}: T'_h \rightarrow T'_{h-1}$ es un homeomorfismo entre T'_h y T'_{h-1} , por lo tanto podemos construir el siguiente sistema inverso: $\{T'_h, F|_{T'_h}\}$, el cual es homeomorfo a un triodo por ser homeomorfismos entre espacios por el teorema (1.2) en la introducción, además: $\varprojlim \{T'_h, F|_{T'_h}\} \subset \varprojlim \{T, F\}$, lo cual nos indica que M contiene un triodo.

Teorema 3.1: Sea $\{T_n, f_n\}$ un sistema inverso ($T_\infty = \varprojlim \{T_n, f_n\}$), donde cada uno de los espacios factores es un triodo, y cada una de las funciones de ligadura es sobre, supongamos que para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, $\exists T'_n \subset T_n$, con T'_n un triodo para toda n , que cumple: $f'_{n-1}: T'_n \rightarrow T'_{n-1}$ es un homeomorfismo entonces T_∞ contiene triodos.

Demostración: Para demostrar esto procedemos así: $\varprojlim \{T'_n, f_n\} \subset T_\infty$

y ese límite de subtríodos es un tríodo, pues tenemos homeomorfismos entre tríodos, y el teorema 1.2 en la introducción nos garantiza este resultado.

El recíproco del teorema 3.1 diría lo siguiente:

Sea $\{T_n, f_n\}$ un sistema inverso $(T_\infty = \varprojlim \{T_n, f_n\})$, donde cada uno de los espacios factores es un tríodo, y cada una de las funciones de ligadura es sobre, supongamos que T_∞ contiene tríodos, entonces para cada $n = 1, 2, 3, \dots, \exists T'_n \subset T_n$ que cumple: $f_{n-1}^n : T'_n \rightarrow T'_{n-1}$ es un homeomorfismo,

Esta afirmación es falsa, existen funciones de ligadura entre tríodos en las que no podemos encontrar una restricción de ella que resulte un homeomorfismo entre tríodos y sin embargo el límite inverso contiene tríodos, a continuación daremos un ejemplo.

Sea T el tríodo simple (descrito al inicio de esta sección) y $F : T \rightarrow T$ definida como sigue:

$$F(\overline{OB}) = \left\{ \begin{array}{l} (\pi, x), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ (\pi, 4x - \frac{3}{2}), \text{ si } x \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}] \\ (\frac{\pi}{2}, -4x + \frac{3}{2}), \text{ si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] \\ (\frac{\pi}{2}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{4}] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OA}) = I_{\overline{OA}} \text{ es decir la identidad en } \overline{OA}$$

$$F(\overline{OC}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, x), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ (0, 4x - \frac{3}{2}), \text{ si } x \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}] \\ (\frac{\pi}{2}, -4x + \frac{3}{2}), \text{ si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] \\ (\frac{\pi}{2}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{4}] \end{array} \right\}$$

En las figuras 24 y 25 tenemos dos "gráficas" de F .

Proposición 3.1. El continuo $T_\infty = \varprojlim \{T, F\}$ contiene tríodos.

Demostración: Al considerar el sistema inverso $\{T', F\}$ (utilizaremos F para denotar $F|_{T'}$ o $F|_S, S \subseteq T'$) donde $T' = \overline{O\frac{A}{2}} \cup \overline{O\frac{B}{2}} \cup \overline{O\frac{C}{2}}$, y F es la misma función del sistema inverso original restringida a T' , obtenemos la gráfica de la figura 26.

Lo analizaremos por secciones: La función aplicada solamente en los arcos: $\overline{O\frac{C}{2}} \cup \overline{O\frac{A}{2}}$ esta primera sección esta representada en la figura 27

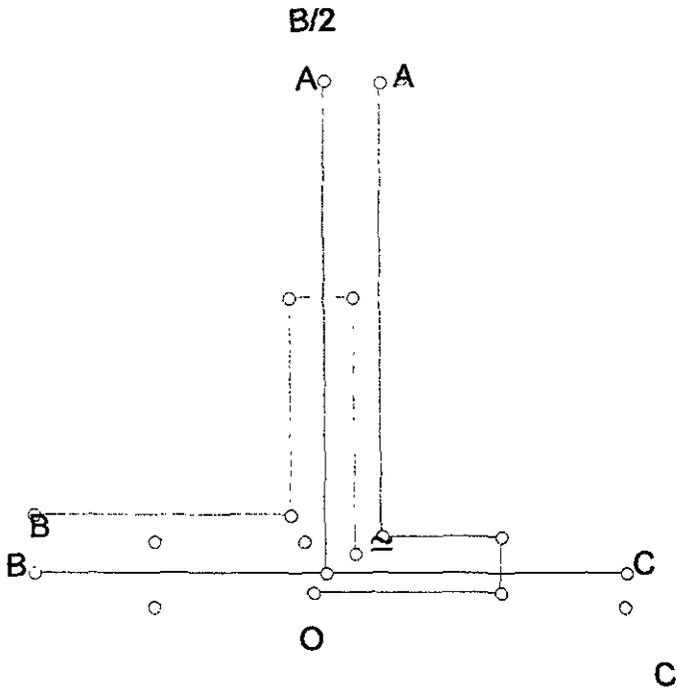


Figure 24:

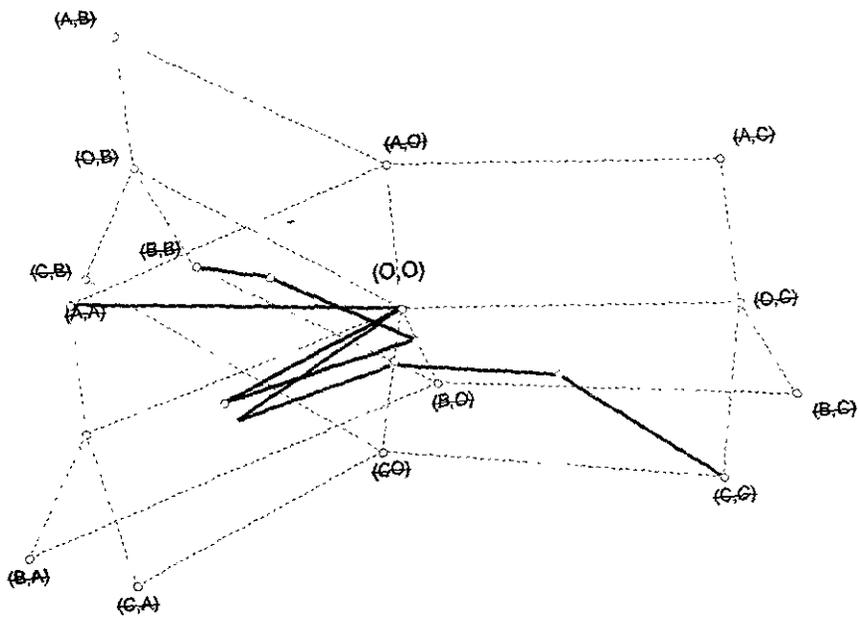


Figure 25:

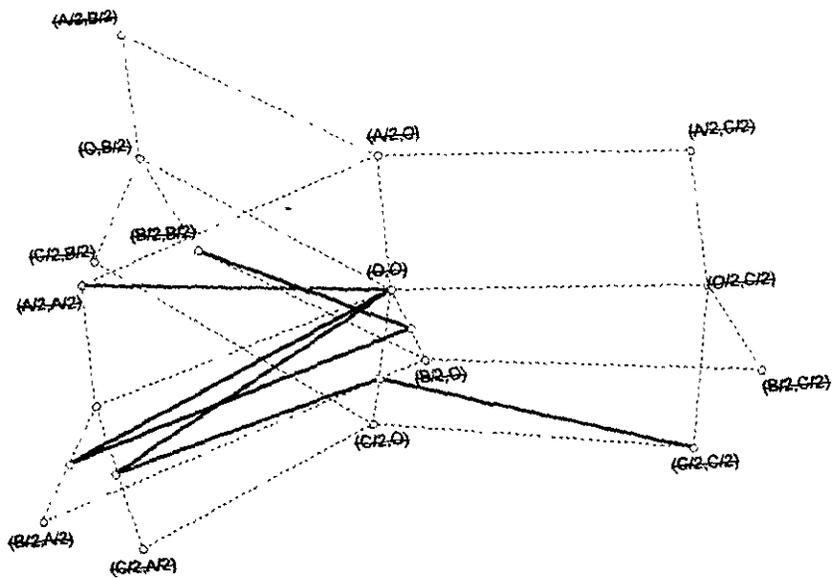


Figure 26:

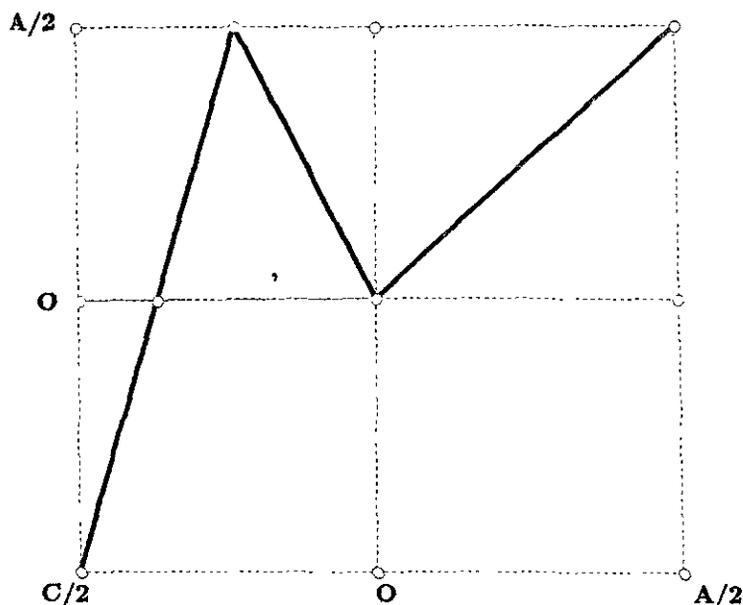
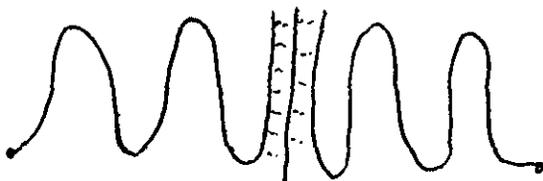


Figure 27:

Al inicio de la presente sección demostré que el límite inverso de esta restricción corresponde a la curva topológica.

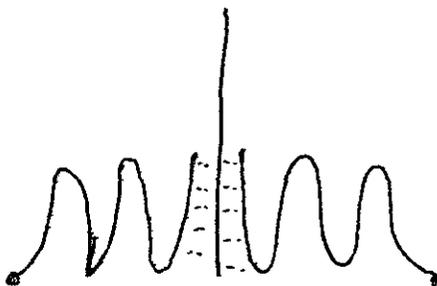
De manera análoga si en la segunda sección de este subtrido (la función restringida a $\overline{O\frac{B}{2}} \cup \overline{O\frac{A}{2}}$) consideramos el límite inverso correspondiente, éste resulta ser la curva topológica.

De ahí que el total del límite inverso (K') corresponde a la unión de dos curvas topológicas cuya barra límite es común a ambas por lo tanto tengo que el límite inverso es homeomorfo a la siguiente figura:



El límite inverso del arco \overline{OA} es un arco, puesto que tengo la función identidad en él, la mitad de este arco es el arco límite de las curvas topológicas de K' , de donde tengo que su gráfica es la que vemos en la página siguiente.

Las secciones que falta pegar del límite inverso total: $\lim \{ \overline{C^C}, F \}$ y $\lim \{ \overline{B^B}, F \}$ son arcos pues son límites inversos de arcos con la función identidad aplicada a cada uno de ellos, por lo tanto si pegamos de manera adecuada tendremos que el límite inverso que estábamos buscando es claramente un triodo puesto que existe un subcontinuo que al retirarlo del límite inverso obtengo tres componentes ajenas.



3.5 GENERALIZACIONES, CURVA TOPOLÓGICA Y RAYOS, SUPER N-ODO

Concluiré describiendo los límites inversos de dos sistemas inversos donde la sucesión de espacios son todos n-odos y las funciones son del mismo tipo que F .

Primero denotaré por A al n-odo que es la unión de $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$, donde $\overline{OA_i}$ es un arco para cada i , además existen ángulos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in (0, 2\pi)$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$

$$\overline{OA_n} = \{(\theta_n, x) : x \in [0, 1]\}$$

$$\overline{OA_{n-1}} = \{(\theta_{n-1}, x) : x \in [0, 1]\}$$

.....

$$\overline{OA_2} = \{(\theta_2, x) : x \in [0, 1]\}$$

$$\overline{OA_1} = \{(0, x) : x \in [0, 1]\}$$

Defino la función $F : A \rightarrow A$ como sigue:

$$F(\overline{OA_n}) = \begin{cases} (\theta_n, 4x - 3), & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\theta_{n-1}, -4x + 3), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\theta_{n-1}, 2x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$F(\overline{OA_{n-1}}) = \begin{cases} (\theta_{n-1}, 4x - 3), & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\theta_{n-2}, -4x + 3), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\theta_{n-2}, 2x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

.....

$$F(\overline{OA_2}) = \begin{cases} (\theta_2, 4x - 3), & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (0, -4x + 3), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (0, 2x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$F(\overline{OA_1}) = I_{\overline{OA_1}}, \text{ es decir la identidad en } \overline{OA_1}.$$

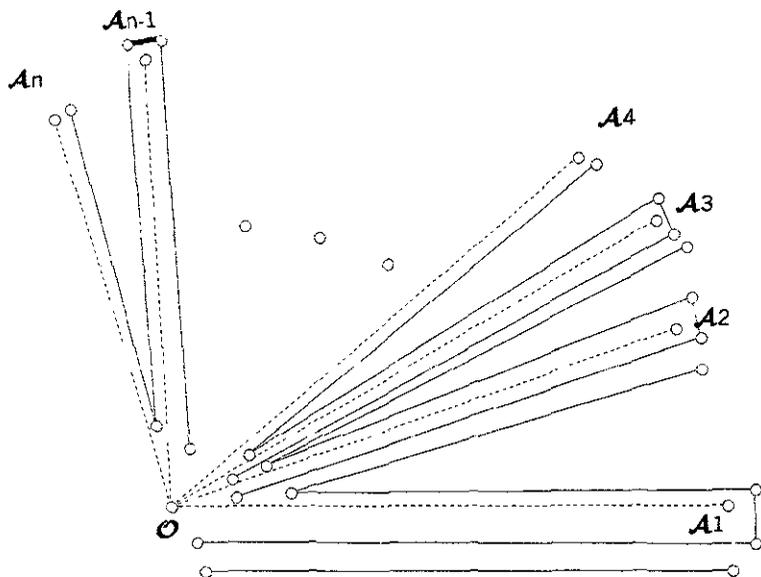


Figure 28:

Ahora tengo un sistema inverso donde la sucesión de espacios son n -odos (A) , y las funciones de ligadura son las F . es decir: $\{A_n, F_n\}$.

Demostraré que el límite inverso $(\varprojlim \{A_n, F_n\})$ es K , donde K es un continuo con las siguientes características: K esta formado por: un arco y $(n - 1)$ rayos ajenos, ordenados de tal forma que se cumple:

$$K = C_T \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) \text{ donde cada una de las } \alpha_i \text{ es un rayo, } \alpha_i \cap \alpha_j = \phi \text{ si } i \neq j, \overline{\alpha_1} \supset C_T, \overline{\alpha_1} - \alpha_1 = C_T; \overline{\alpha_2} \supset C_T \cup \alpha_1, \overline{\alpha_2} - \alpha_2 = C_T \cup \alpha_1, \dots, \overline{\alpha_{n-2}} \supset C_T \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right), \\ \overline{\alpha_{n-2}} - \alpha_{n-2} = C_T \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-3} \alpha_i \right).$$

Demostración:

1) $\varprojlim \{\overline{OA_1}, F|_{\overline{OA_1}}\} = S$, donde S es un arco, puesto que $F|_{\overline{OA_1}} = I_{\overline{OA_1}}$ tambien podemos afirmar: $\varprojlim \{\overline{A_2OA_1}, F|_{\overline{A_2OA_1}}\} \approx C_T$ (por lo demostrado en el inicio de esta sección)

2) Ahora defino los siguientes conjuntos:

$$\alpha_n^{n-2} = \{x \in K : x_n \in \overline{OA_n}\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha_n^{n-3} = \{x \in K : x_n \in \overline{OA_{n-1}} \text{ y } x_i \in \overline{OA_{n-1}}, \forall i \geq n\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

⋮

$$\alpha_n^1 = \{x \in K : x_n \in A_3, \text{ y } x_i \in \overline{OA_3}, \forall i \geq n\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\beta_n = \{x \in K : x_n \in A_2, \text{ y } x_i \in \overline{OA_2}, \forall i \geq n\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\textbf{Afirmación: } K = (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{n-2}) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{n-1}) \cup \dots \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^1) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \beta_i) \cup S$$

Demostración:

⊃) Esta contención es inmediata, pues cada uno de los conjuntos anteriores esta contenido en K .

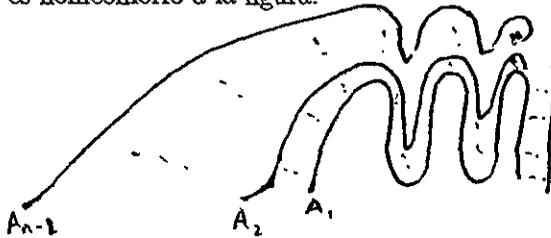
⊂) Sea $x \in K \Rightarrow$ (por la definición de F) $\exists j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ tal que $\forall h \geq j, x_h \in \overline{OA_r}, r \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, por lo tanto se cumple lo que deseabamos probar.

Ahora solo me resta "pegar" adecuadamente los subconjuntos anteriores del límite inverso, lo demostraré por inducción de la siguiente manera:

$$(\cup_{i=1}^{\infty} \beta_i) \cup S \simeq C_T \text{ por la demostración de (1).}$$

$(\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^1) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \beta_i) \cup S \simeq C_T \cup \alpha_1$ donde α_1 es un rayo que tiene como límite C_T y por lo demostrado en el segundo paso del problema inicial de esta sección $\overline{\alpha_1} \supset C_T, \overline{\alpha_1} - \alpha_1 = C_T$.

De manera similar pego los siguientes $(n-3)$ arcos $(\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{n-2}) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{n-1}) \cup \dots \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2)$, de esta forma obtengo lo que deseaba demostrar, de ahí que el límite inverso es homeomorfo a la figura:



A continuación modificaré un poco el límite inverso para obtener un super-n-odo. A será también un n-odo, A_i será cada uno de los arcos que forman el n-odo, procedo pues como sigue:

Defino la función $F : A \rightarrow A$ como sigue:

$$F(\overline{OA_n}) = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_n, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\theta_{n-1}, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\theta_{n-1}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OA_{n-1}}) = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_{n-1}, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\theta_{n-2}, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\theta_{n-2}, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

.....

$$F(\overline{OA_2}) = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_2, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (0, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (0, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

$$F(\overline{OA_1}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 4x - 3), \text{ si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \\ (\theta_n, -4x + 3), \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (\theta_n, 2x), \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}.$$

El sistema inverso será: $\{X_n, F_n\}$ donde $X_i = A$, $F_n = F \forall i = 1, 2, \dots, n$, y $A_\infty = \varprojlim \{X_n, F_n\}$, el cual cumple que es indescomponible y contiene n-odos.

A_∞ es indescomponible.

Para la demostración de este hecho, notemos que dados C, D cualquier par de subcontinuos propios de A , tales que $C \cup D = A$ entonces alguno de ellos contiene un arco A_i , al cual despues de aplicarle n-veces la función F llena a todo A , es decir $A \subset F^n(A_i)$, de ahí que construyendo el límite inverso con las F^n y las A , así pues, si uso los teoremas (1.5) y (1.4) de la introducción tengo la indescomponibilidad de A_∞ .

A_∞ contiene n-odos.

La demostración es similar al caso en que A es un triodo, por lo tanto solamente mencionaré los cambios en cuanto a conjuntos, consideraremos la preimagen de A que se mapea homeomorfamente con A , bajo la función F ; así pues defino los n-odos descritos anteriormente.

$$B_1 = A$$

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

$$B_2 = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_n, x) : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (\theta_{n-1}, x) : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \dots\dots\dots \\ (\theta_2, x) : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (0, x) : x \in [0, \frac{1}{2}] \end{array} \right\}$$

.....

$$B_k = \left\{ \begin{array}{l} (\theta_n, x) : x \in [0, \frac{1}{2^k}] \\ (\theta_{n-1}, x) : x \in [0, \frac{1}{2^k}] \\ \dots\dots\dots \\ (\theta_2, x) : x \in [0, \frac{1}{2^k}] \\ (0, x) : x \in [0, \frac{1}{2^k}] \end{array} \right\}$$

.....

Ahora bien, cada uno de los B_i es un n -odo, y que al aplicar la función F está es un homeomorfismo entre los n -odos B_i , por lo tanto, su límite inverso (contenido en A_∞) es homeomorfo a un n -odo, por lo tanto el límite inverso contiene un n -odo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] W. T. Ingram, *An atriodic tree – like continuum with positive span*, Fund. Math, 77 (1972), 99-107

[2] W. T. Ingram, *Inverse limits*, Sociedad Matemática Mexicana, investigación 15, 2000.

[3] A. Lelek, *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fund. Math. 55 (1964), 199-214.

[4] Macías Sergio, *Notas de clase (límites inversos)*

[5] Macías Fernando, *El margen de los continuos*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 1997.

[6] Sam B. Nadler, Jr, *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, inc, New York, Basel, Hong kong, 1992.