



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

*De la mecánica clásica a la mecánica cuántica.  
Una perspectiva variacional.*

2001-03-25

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C O**

P R E S E N T A :

**MAURICIO SANTILLANA GUZMAN**



DIRECTOR DE TESIS: DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2001



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN



CONSEJO NACIONAL  
DE EDUCACIÓN SUPERIOR  
DE GUATEMALA

DR. C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA  
de la División de Estudios Profesionales de la  
Escuela de Ciencias  
Física

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "De la mecánica clásica a la mecánica cuántica. Una perspectiva variacional".

Elaborado por Mauricio Santillana Guzmán

Número de cuenta 9232247-1, pasante de la carrera de Física

Este trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Presidente del Consejo de Tesis

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

DR. DARIO MORENO OSORIO

DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ

*Pablo Padilla L.*  
*Carlos Villarreal*  
*Jose David Vergara Oliver*  
*Dario Moreno Osorio*  
*Arturo Olvera Chavez*

Consejo Departamental de Física



*Patricia Goldstein Menache*

DR. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura de Física

**De la mecánica clásica a la  
mecánica cuántica**  
Una perspectiva variacional

*Mauricio Santillana Guzmán*

13 de julio de 2001

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1 Líneas más cortas . . . . .	7
1.2 Un poco de geometría . . . . .	12
1.3 Acerca del tiempo . . . . .	14
1.4 Acerca de los principios de minimización en la naturaleza . . .	15
1.4.1 Superficies mínimas . . . . .	16
1.4.2 Problema isoperimétrico . . . . .	17
1.5 La luz . . . . .	18
<b>Algo de Cálculo de Variaciones</b>	<b>23</b>
2.1 Geodésicas en $\mathbf{R}^n$ . . . . .	23
2.1.1 Geodésicas en una esfera . . . . .	25
2.2 La Braquistócrona . . . . .	27
2.2.1 Solución de J. Bernoulli . . . . .	30
2.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	34
2.4 Método Variacional . . . . .	36
2.5 Principio de Hamilton . . . . .	49
2.5.1 Transformaciones Canónicas . . . . .	57
2.5.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi y la función generatriz .	58
<b>Hacia la mecánica cuántica</b>	<b>65</b>
3.1 Óptica Geométrica . . . . .	65
3.2 Ecuaciones de Maxwell . . . . .	68
3.2.1 Ecuación de onda . . . . .	71
3.2.2 Ondas electromagnéticas . . . . .	73
3.2.3 Principio de Huygens . . . . .	76
3.2.4 Propiedades de las ondas . . . . .	77
3.2.5 Experimento de Young . . . . .	81

3.3	Hacia la Mecánica Cuántica . . . . .	83
3.4	Ondas Mecánicas . . . . .	83
3.5	Ecuación de Schrödinger . . . . .	91
3.6	La función de onda $\psi$ . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Las integrales de camino</b>	<b>99</b>
4.1	Descripción de la función de onda . . . . .	99
4.2	Principio de superposición . . . . .	100
4.3	Propuesta de Feynman . . . . .	100
4.4	Conclusiones . . . . .	100
<b>A</b>	<b>Método de la fase estacionaria</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliografía.</b>	<b>121</b>

# Agradecimientos

Deseo iniciar este trabajo agradeciendo a todos aquellos que estuvieron y han estado a mi lado.

Primero, quiero agradecer al Dr. Pablo Padilla por ser quien me inició en el estudio del cálculo de variaciones, por su invitación entusiasta para realizar el presente trabajo bajo su dirección, por sus consejos, por su amistad y por sus enriquecedoras y motivantes pláticas. Gracias Pablo.

Quiero agradecer el esfuerzo que dedicó mi jurado para revisar la tesis, y la confianza que depositaron en mi al hacerlo. Al Dr. José David Vergara por sus valiosos comentarios acerca de la formulación de las integrales de Feynman, al Dr. Dario Moreno por sus motivantes palabras con respecto al presente trabajo, al Dr. Carlos Villarreal por sus observaciones y disponibilidad y al Dr. Arturo Olvera por sus acertadas correcciones.

Deseo agradecer al departamento de Matemáticas y Mecánica por haberme motivado en el estudio de las matemáticas aplicadas. Especialmente, quiero agradecer al Dr. Jorge Ize por sus consejos, por sus interesantes pláticas, por su apoyo y amistad durante los cinco semestres en los que colaboramos en los cursos de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales en la facultad y por sus acertadas observaciones. Gracias Jorge. Dentro del departamento, agradezco al Dr. Gilberto Flores por su gran capacidad de transmitirme el interés por la modelación matemática y por ser quien inicialmente me hizo considerar la posibilidad de continuar estudiando dicha área. A la Dra. Clara Garza por sus enseñanzas y opiniones acerca de este trabajo, al Dr. Antonmaria Minzoni por sus oportunos comentarios y a todos los miembros que en este departamento laboran. A Ana P. por su ayuda en la realización e impresión de la tesis.

Agradezco a todos en mi familia por su comprensión y cariño. A mi madre y a mi padre por estar a mi lado y por haberme motivado a ser quien soy, a mis hermanos y hermana, Beto, Sebastián y Maru por crecer conmigo. A Maru y a Erik por su amistad, apoyo y por su fraternal compañía.

Agradezco a toda mi gente por el apoyo y cariño que me han dado. A Rodrigo por todo lo que hemos vivido juntos, a Alejandro P. por lo que



somos, a Javier por ser quien es, a Ivciél por no desaparecer.

A Laura, por su amor y repentina aparición en mi vida y especialmente por su paciencia.

A Luisgarza por las grandes pláticas y momentos que hemos compartido. A Breno por su ausencia acompañada, a Jorge Humberto por su amistad incondicionada. A Pablito por sus preguntas y su cariño.

A todos mis amigos de la facultad. A Amanda por compartir su valiosa manera de ser conmigo, a Alejandro R. por su manera transparente de dar, a Barbara por su amistad, a Ayari, Rafael, Damián, Mané, Ramón, y a todos los que he olvidado en estas líneas pero que han compartido conmigo todo lo que soy. A todos a quienes sabré agradecer siempre con una sonrisa y un abrazo.

Agrdezco al proyecto G25427-E de CONACYT, *Matemáticas No lineales en la Física y la Ingeniería* por la beca que recibí para realizar el presente trabajo.

# Capítulo 1

## Introducción

En este Capítulo mencionaremos algunos de los problemas que motivaron el estudio de métodos matemáticos para optimizar. Iniciaremos con algunas nociones intuitivas acerca de las líneas más cortas que unen a dos puntos en superficies simples, después hablaremos del camino de mínimo tiempo y de los principios fundamentales de la mecánica clásica. Concluiremos con una breve descripción histórica de las teorías que han explicado la naturaleza y comportamiento de la luz.

### 1.1 Líneas más cortas

durante gran parte de nuestra vida buscamos la manera de llegar de un lugar a otro en el menor tiempo posible. Por ejemplo, cuando viajamos de

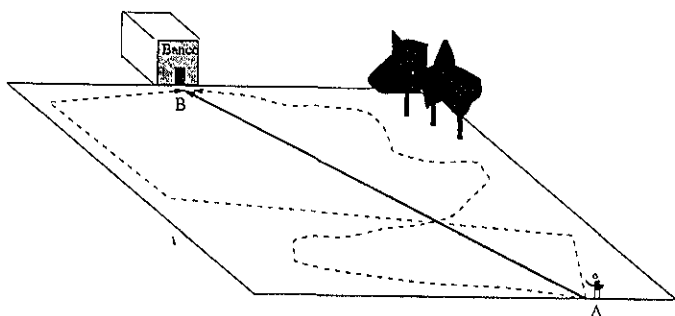


Figura 1.1: Camino más corto

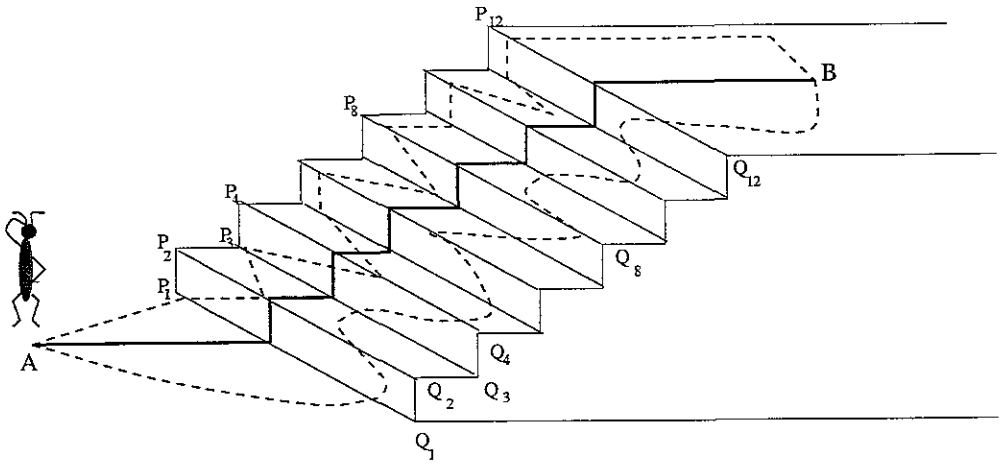


Figura 1.2: ¿Qué camino tomar?

una ciudad a otra generalmente buscamos la carretera más directa. Pero, ¿cómo escogemos el camino más directo? Analicemos las situaciones más sencillas. Si deseáramos cruzar una plaza, caminando a una velocidad constante, para llegar a una sucursal de un banco a punto de cerrar, buscaríamos tomar el menor tiempo y por tanto la trayectoria más corta. Intuitivamente trazariamos una línea recta imaginaria entre la puerta del banco y nosotros y trataríamos de seguir ese camino. Sabemos que podríamos tomar cualquier otro camino como se muestra en la figura 1.1 pero de alguna manera intuimos que la línea recta será el mejor.

Más adelante daremos un argumento geométrico de por qué efectivamente la recta cumple con la propiedad de ser la curva que une a dos puntos (en una superficie plana) con la menor longitud. La propiedad anterior asegura que dicha curva nos hará llegar más rápido a nuestro destino si suponemos que nos movemos con la misma velocidad sobre cualquier posible trayectoria en el plano que une a ambos puntos. Es interesante preguntarnos cuál será la trayectoria de menor longitud que una a dos puntos en cualquier superficie. Como vimos, parece ser cierto que la recta es dicha trayectoria en un plano. Supongamos ahora que una hormiga desea llegar al segundo piso de una casa a través de las escaleras para alcanzar un trozo de comida. Sin mucho pensar, la hormiga exploradora toma la trayectoria marcada con la línea gruesa en la figura 1.2. De esta manera sus compañeras llegarán a su destino con el menor esfuerzo.

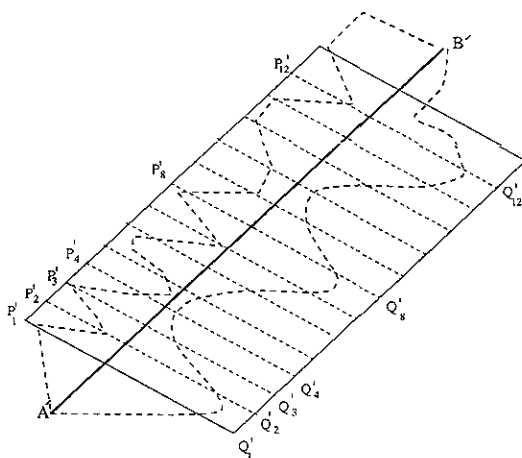


Figura 1.3: Escalera Estirada

La manera geométrica de trazar esa trayectoria es muy sencilla, primero desdoblamos la escalera estirándola en un plano como se muestra en la figura 1.3). En esta nueva superficie, podemos trazar una línea recta que una a los puntos  $A'$ ,  $B'$ . Si ahora volvemos a doblar la superficie estirada y ponemos especial atención en la curva que unía a  $A'$ ,  $B'$ , notamos que se convierte en la curva  $AB$  sobre los escalones que tomó la hormiga.

Podríamos plantearle a nuestra amiga, el problema de llegar de una esquina de una caja de cartón a la esquina opuesta. A primera vista no es clara la trayectoria más corta, sin embargo, si procedemos de igual manera que con la escalera, podemos rápidamente deducir que el camino que debe tomar es el trazado en la figura 1.4.

Ahora, si la hormiga deseara alcanzar un trozo de azúcar sobre el borde de un vaso (cilíndrico), ¿qué trayectoria debería tomar para recorrer la menor distancia?

Veamos con cuidado la figura 1.5, parece claro que si el punto  $H$  fuera su destino, trazaríamos una recta (a lo largo del eje del cilindro) sin dificultad, pero si buscara llegar a  $G$ , ¿cómo trazar una recta que una a  $F$  con  $G$  sobre el vaso? La respuesta no es muy difícil. Así como desdoblamos la escalera, podemos cortar el cilindro a lo largo de  $AB$  y desenvolverlo en un plano. Una vez hecho esto, trazamos nuevamente una línea recta que una a  $F$  con  $G$  y listo.

Al volver a enrollar, encontraremos la curva de menor longitud que lleva

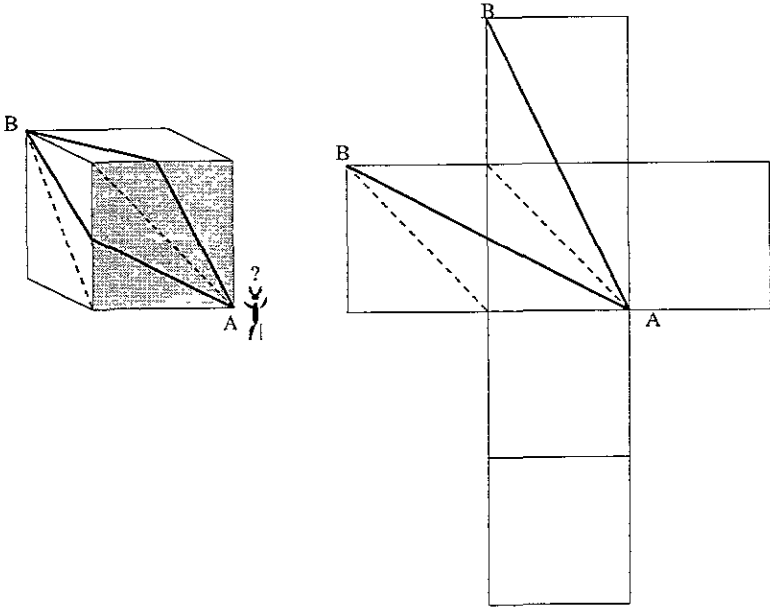


Figura 1.4: Caja

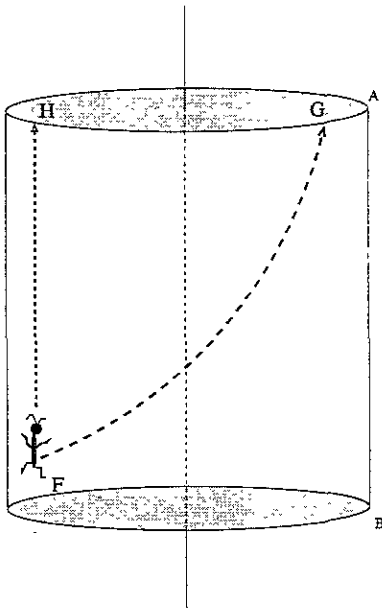


Figura 1.5: Azúcar en el vaso

la hormiga a su destino. Este tipo de curvas sobre cilindros son llamadas hélices o helicoides.

Nótese que este procedimiento se puede utilizar en prismas, pirámides, conos y en general en superficies que se pueden *desdoblar* en planos.

Ahora ¿qué sucede si nos encontramos con una superficie que no podamos desdoblar o desenrollar? Imaginemos una esfera, es decir una pelota. ¿qué pasa si cortamos una sección de la misma y tratamos de *aplanarla*? Si hacemos el intento de convertir dicha sección en un plano nos damos cuenta, que tendríamos que cortarla en secciones cada vez más pequeñas, de hecho, los estudiosos de la geometría han demostrado matemáticamente que la esfera es una de esas superficies que no se pueden transformar en un plano sin perder propiedades esenciales de la misma, como por ejemplo la distancia entre dos puntos cualesquiera. Para trazar la curva de menor longitud sobre una superficie de este estilo, es necesario definir el concepto de distancia de tal forma que pueda aplicarse de manera más general (véase explicación geométrica en siguiente sección). Este problema es conocido en la literatura matemática como la búsqueda de una línea *geodésica*. Notemos que de manera natural, el proceso intuitivo que aplicamos para hallar el camino más corto implica el desarrollo de un método para “minimizar”.

## 1.2 Un poco de geometría

Para convencernos de que una línea recta es efectivamente el segmento de curva que une a dos puntos en el plano con la propiedad de tener la mínima longitud, recurramos a nuestros conocimientos básicos de geometría.

Si tomamos un lado de un triángulo, podemos notar que su longitud es menor que la longitud de la suma de los otros dos lados, véase la figura (1.6). De hecho su longitud es igual cuando el triángulo degenera en una recta es decir, cuando los dos lados restantes se encuentran *sobre* el primer lado (i.e. cuando el triángulo no es triángulo). En matemáticas dicho resultado es conocido como la *desigualdad del triángulo*. Con ese argumento se puede ver fácilmente que si quisiéramos ir de  $A$  a  $B$ , sería mejor tomar el lado del triángulo que los une. Ahora, supóngase que queremos ir de  $C$  a  $D$ , a través de la curva dibujada en la Fig 1.4b; notemos que podemos aplicar un razonamiento similar: si llamamos  $A_i$  ( $A_0 = C, A_1, A_2, \dots, A_n = D$ ) a los vértices (puntos donde se unen dos rectas de la curva) de la línea *quebrada* entonces, para llegar de  $C = A_0$  a  $A_2$ , es más corto tomar el segmento de recta que une a  $A_0$  con  $A_2$  ( $\overline{A_0A_2}$ ) que los lados  $\overline{A_0A_1}$  y  $\overline{A_1A_2}$  por la desigualdad del triángulo. Reemplazando el pedazo de curva  $A_0A_1A_2$  por el segmento  $\overline{A_0A_2}$  podemos de nuevo asegurar que en lugar de tomar el camino determinado por las rectas  $\overline{A_0A_2}$  y  $\overline{A_2A_3}$  es más conveniente reemplazar dicho trecho por el segmento  $\overline{A_0A_3}$ . Si continuamos con este procedimiento de *reemplazar* cada camino determinado por los lados  $\overline{A_0A_{i-1}}$  y  $\overline{A_{i-1}A_i}$  (del triángulo  $A_0\widehat{A_{i-1}A_i}$ ) por el segmento  $\overline{A_0A_i}$  obtendremos que cuando  $i = n$  el camino óptimo será la recta  $\overline{CD}$ .

Ahora, para probar que una curva cualquiera, diferente de la recta, es forzosamente más *larga*, tenemos que recurrir al concepto de longitud de una curva. Geométricamente se define la longitud de una curva, como el límite de las longitudes de los lados de una poligonal que aproxima a dicha curva cuando el número de lados de la poligonal tiende a infinito y simultáneamente la longitud de los mismos tiende a cero. Esto significa que podemos aproximar a toda curva por medio de una serie de líneas quebradas cuyos vértices se hallan sobre la curva misma. Entre más pequeña sea la separación entre los puntos (es decir, mayor sea el número de lados), la longitud de dicha quebrada se aproxima más a la longitud de la curva. De lo anterior, observamos que toda quebrada que une a dos puntos en el plano es más larga que la recta así, si cualquier curva es el límite de una quebrada, entonces la recta es más corta que cualquier curva.

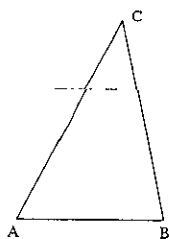


Fig 1.4 a

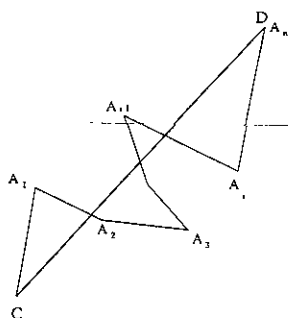


Fig 1.4 b

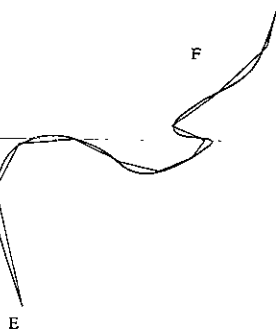


Fig 1.4 c

Figura 1.6: Triángulos

En el caso de la esfera las cosas no son tan sencillas, pero aún así podemos proceder de manera similar. Necesitamos determinar la curva que juega el mismo papel que la recta en el plano, pero sobre la superficie de la bola. Para eso visualicemos una esfera. Si tenemos dos puntos  $A, B$  sobre la misma (que no están ubicados en extremos opuestos de un diámetro) se puede trazar un único *círculo máximo* de la bola que pasa por ambos puntos. Por círculo máximo entenderemos un trazo circular con radio igual al de la esfera y con el mismo centro. Dicho círculo mayor es dividido en dos arcos desiguales por los puntos  $A, B$ . Llamaremos  $\overset{\frown}{AB}$  al más corto de estos arcos. Consideremos ahora tres puntos  $\overset{\frown}{ABC}$  sobre la superficie esférica unidos con los arcos de los círculos mayores  $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ ; estos tres arcos forman el llamado triángulo esférico  $\overset{\frown}{ABC}$  y cada arco corresponde a un lado de éste. No es difícil probar que *todo lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los dos lados restantes*. La demostración se basa en que la longitud de todo arco de circunferencia es proporcional al ángulo que subtiende y en el hecho de que en una pirámide triangular, el ángulo correspondiente a una cara, es siempre menor que la suma de los dos ángulos restantes (en el caso de la igualdad, la pirámide degenera en un triángulo).

Sabiendo entonces que la desigualdad del triángulo es válida sobre la esfera, podemos reproducir la argumentación hecha para el plano, para concluir que la curva más corta que une a dos puntos  $AB$  sobre la esfera es el arco  $\overset{\frown}{AB}$  definido anteriormente, ya que toda curva arbitraria sobre la superficie en cuestión puede ser aproximada por una quebrada esférica, que a su vez es



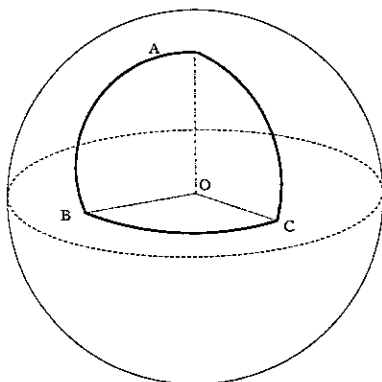


Figura 1.7: Geodésicas en una esfera

más larga que la llamada *línea geodésica*  $\overset{\sim}{AB}$ .<sup>1</sup>

Este problema es de suma importancia para encontrar las rutas de navegación aéreas en las que se requiere que el avión utilice el mínimo de combustible (y por consecuencia la trayectoria más corta) para llegar a su destino. Recordemos que en una primera aproximación, la Tierra es una esfera.

Para estudiar las trayectorias más cortas o líneas geodésicas entre un punto y otro en una superficie cualquiera, es necesario un estudio matemático más profundo, sin embargo, una manera intuitiva de hallarlas es fijando los extremos de una liga a los puntos en cuestión y permitiendo que ésta llegue a un punto equilibrio o relajación.

### 1.3 Acerca del tiempo

Otro problema que se presenta cotidianamente es aquel de realizar una acción en el menor tiempo posible. Notemos que si viajamos a una velocidad constante de un punto  $a$  a un punto  $b$ , las geodésicas representan a su vez la trayectoria que nos lleva a nuestro destino en el mínimo tiempo. Pero ¿qué sucedería si la velocidad a la que viajamos depende del camino que tomamos?. Supongamos que en una situación de emergencia, un salvavidista en el punto  $m$ , tuviera que llegar al sitio donde un nadador se encuentra en problemas, punto  $n$  (véase la figura 1.8).

<sup>1</sup>En el caso en que los puntos  $AB$  se encuentren sobre los extremos opuestos de diámetro, existen una infinidad de trayectorias que los unen con longitud mínima.

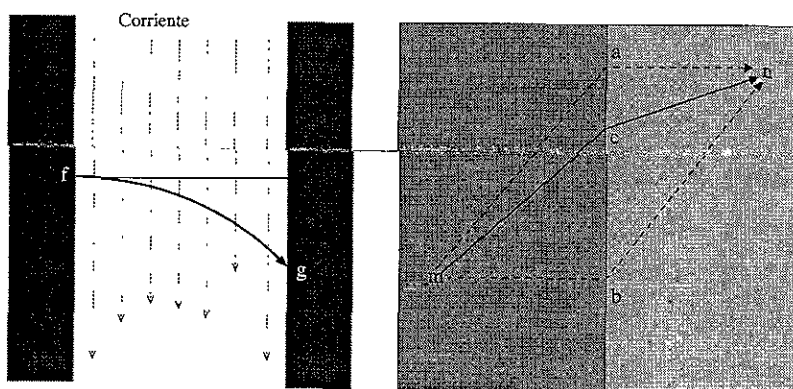


Figura 1.8: Problemas de optimización de tiempo

El salvavidas evidentemente buscaría llegar en el mínimo tiempo. Parece claro que es más rápido correr sobre la playa que nadar dentro del mar, por lo que el camino que pasa por  $b$ , no sería el mejor. De hecho el camino óptimo debe pasar entre las trayectorias que pasan por  $a$  y por  $b$ , por un punto  $c$ .

Un problema similar sucede si deseamos llegar de un punto fijo  $f$  de un extremo de un río a otro punto fijo  $g$  del otro lado. Imaginemos que a lo ancho del río hay una corriente que varía dependiendo de qué tan cerca nos encontremos de las orillas (véase la figura 1.8); en este caso es claro que si deseamos llegar de un extremo al otro en los puntos mencionados, en el mínimo tiempo, la trayectoria *no* sería la línea recta, ya que de escoger dicho camino, la corriente nos arrastraría de tal forma que antes de llegar al otro lado, tendríamos que nadar venciendo la corriente de alguna manera, para alcanzar el punto  $g$ . Notemos que en este caso la velocidad de viaje depende fuertemente de la trayectoria que tomemos.

En el tipo de problemas antes descritos buscamos minimizar el tiempo de recorrido, definiendo así una trayectoria que puede o no ser la de longitud menor.

## 1.4 Acerca de los principios de minimización en la naturaleza

En Física es de gran importancia estudiar las formas en la que la energía se manifiesta. Sin ahondar en una discusión para definir dicho concepto,

cito las palabras de Pierre Fermat "La Naturaleza tiene comportamientos oscuros y ocultos en los que de ninguna manera he buscado penetrar. Dichos comportamientos son siempre los más fáciles y más rápidos, es decir, siempre toma el camino más corto". Por otro lado, Hamilton, en su formulación de la mecánica, sostenía que la naturaleza se comportaba de tal manera que en cada fenómeno se cumplía un principio de mínima acción. El estudio más profundo de la aplicación de las ideas de ambos pensadores, llevó a la creación de una nueva herramienta matemática conocida como el cálculo de las variaciones.

Un problema que motivó de manera crucial el desarrollo del Cálculo de Variaciones, fue el propuesto por Johann Bernoulli a los matemáticos más destacados de su época, en junio de 1696. El problema consiste en hallar la curva sobre la cual, una cuenta se desliza para llegar de un punto  $A$  a un punto  $B$ , impulsada por su peso, en el menor tiempo. La condición es que dichos puntos no se encuentren en la misma vertical. Dicha curva es llamada *braquistócrona*. La palabra Braquistócrona viene del Griego  $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$  "más corto",  $\chi\rho\omicron\nu\omicron\varsigma \equiv$  "tiempo". El problema fue resuelto por Leibniz según datos históricos, en una semana. Poco después, fueron publicadas las soluciones recibidas por Johann Bernoulli en una revista alemana. En el número se incluyeron las soluciones dadas por el autor del reto, que era muy similar a la propuesta por Leibniz, y la de Jacques Bernoulli, hermano de Johann. En la revista se dieron créditos a una solución de carácter anónimo. Tal solución mostraba una manera arrogante de resolver el problema, firme evidencia de una personalidad inconfundible de su época: Isaac Newton. Curiosamente la solución más ingeniosa y sugerente fue la propuesta por Jacques Bernoulli, quien resolvió el problema haciendo una analogía con un sistema óptico. Analizaremos con más detalle el problema en el siguiente capítulo.

### 1.4.1 Superficies mínimas

En el siglo XV Leonardo Da Vinci estudió la manera en la que algunos líquidos suben a través de un tubo muy delgado (capilaridad). Este fenómeno fue observado también por Isaac Newton y Robert Hooke (1700's). La búsqueda de una explicación a dicho hecho llevó a varios pensadores como el Marqués de Laplace y Thomas Young (1750's), a plantear el problema en términos de un exceso de presión a lo largo de una superficie que separa dos fluidos, obteniendo analíticamente las curvas que formaban los fluidos. Leonhard Euler, discípulo de John Bernoulli, planteó en 1744 un método para

hallar la superficie de menor área limitada por una curva en el espacio. Carl Frederick Gauss y Siméon Denis Poisson (1830's) plantearon el problema en términos de la energía y de la tensión de la superficie de un fluido. Tal estudio explicaba, de manera razonable, la forma que adopta una película de agua con jabón y glicerina, al producir una burbuja o pompa jabonosa sostenida por un alambre doblado en una curva. Más tarde, Joseph Plateau (1840's) mostró que las formas que tomaban las superficies de películas jabonosas sobre un alambre, eran tales que minimizaban la energía libre asociada a la película. También afirmó que el problema era equivalente a calcular la superficie de menor área, donde la frontera estaba dada por la curva que poseía el alambre. Plantearemos las ecuaciones asociadas a este tipo de problemas en el siguiente capítulo.

Es importante notar que la esencia de todos estos planteamientos es el de optimizar una cierta cantidad.

### 1.4.2 Problema isoperimétrico

El problema de hallar una curva que contenga la mayor área posible con un perímetro fijo es uno de los problemas más antiguos de optimización. Una solución a este planteamiento fue dada por la reina Dido de Cartago en el año de 850 a.C. La reina convenció a un Rey del norte de África de darle la cantidad de tierra que ella pudiera rodear con la piel de un toro para fundar el estado de Cartago. Para obtener el terreno de mayor área posible la reina hizo cortar la piel del animal en tiras muy delgadas y las colocó unidas para formar un arco de circunferencia. Utilizando la costa del Mediterráneo como frontera auxiliar, logró, de manera intuitiva, obtener el área máxima posible para sus fines.

El mismo tipo de problema surge en los vuelos de patrullaje, en los que se busca maximizar el área vigilada con una cantidad de combustible fija. Al limitar el volumen de combustible, y simplificando las condiciones de vuelo, se está fijando, de manera implícita, el perímetro o distancia de vuelo.

## 1.5 La luz

Iniciemos esta sección recordando las concepciones que, a lo largo de la historia, se han tenido acerca de la luz. Alrededor de 500 a. C. en Grecia existían básicamente dos teorías acerca de la luz. Originalmente el concepto de luz estaba intrínsecamente asociado al efecto que producía, es decir, con la visión u observación. Se buscaba interpretar la manera en que nuestro cerebro percibía los efectos de la luz para producir un pensamiento acerca de lo observado. Esta teoría asociaba al sentido de la vista una capacidad de tocar objetos que estaban fuera del alcance de nuestras extremidades, y por esa razón es llamada *táctil*.

La otra teoría sostenía que *algo* era emitido por los objetos brillantes, y que al entrar a nuestros ojos, producía un efecto que nos daba la sensación de *ver*. Una de las dificultades de la teoría táctil es explicar el hecho de que podemos tocar cosas aún sin verlas, por ejemplo en la oscuridad (nótese que el sustento principal de dicha concepción de la luz involucra explicar lo desconocido, *ver*, a través de lo conocido, *tocar*.) La dificultad anterior es superada por la segunda teoría, al asociar la propiedad de *emitir* a ciertos cuerpos, y la propiedad de *reflejar* a ciertos otros. La teoría de *emisión* describió de manera convincente el proceso de *ver*. La luz al ser radiación visible (o emisión), entra de alguna manera a nuestro ojo y es enfocada por los lentes internos del mismo, en una superficie (retina). Las terminales nerviosas halladas en dicha superficie producen un proceso físico-químico que da lugar a una reacción dentro del cerebro, lo que nos da la sensación de ver.

A pesar de que el estudio de la luz tuvo un origen en el estudio de la vista nuestra preocupación comienza con los aspectos físicos asociados a dicho estudio. Notemos que a través del desarrollo tecnológico, la ciencia fue capaz de percibir *luz* más allá de la vista. Por ejemplo, al percibir el calentamiento de una fotocelda expuesta a los rayos solares o al observar el efecto que ésta produce en una placa fotográfica. De hecho concebimos a la luz como una forma de energía que viaja de un lugar a otro. Esta última manera de pensar llevó a los científicos del siglo XVII y XVIII a percibir la luz como *partícula* que se movían.

Otra corriente la concebía como ondas que se propagaban a través de un medio. Ambas teorías comparten el concepto de transporte de energía, si embargo son cualitativamente diferentes en el sentido de que, en la primera la energía se encuentra confinada a una región específica del espacio y en la segunda, la energía se propaga y se disemina al viajar, (recordemos que

energía en una onda, por ejemplo, aquella generada al lanzar una piedra en un lago, viaja a través del medio dispersándose en todas direcciones y sobre todo el espacio).

Basándose en el concepto de transporte de energía, el estudio de la luz desarrollado en el siglo XVII, se fundamentó en el estudio de rayos, a través de los cuales la luz viajaba. Tal estudio nació del hecho de que la luz producida por una fuente pequeña, digamos el filamento de un foco, al ser interrumpida por algún cuerpo opaco, produce una sombra bien definida (véase la figura 1.9). Al tratarse de una fuente de luz, como el sol, no tan pequeña, podemos observar que el borde de la sombra no está tan definido, de hecho hay una parte más oscura de la sombra (que llamaban *umbra*) y otra un tanto débil, (que llamaban *penumbra*). Este hecho, entre muchos otros, puede explicarse fácilmente en términos de que la luz viaja de un punto a otro a través de rayos. (En la figura puede verse que la región de la penumbra, recibe tan sólo una porción de la luz producida por la fuente.)

Esta concepción, con ayuda del principio de Fermat, que establece que *Un rayo de luz viaja de un punto a otro en el espacio, en un medio dado, siguiendo la trayectoria que le tome el mínimo tiempo*, daba solución a muchos problemas ópticos de la época. De hecho motivó a Jacques Bernoulli a resolver el problema de la Braquistócrona con argumentos puramente ópticos. Veremos con detalle la solución de Jacques en el siguiente capítulo.

Un detalle curioso que se deriva del principio de Fermat, es el hecho de que en medios donde la densidad no cambia de un punto a otro, las trayectorias que toma la luz para viajar son líneas rectas, sin embargo, en medios donde la temperatura o algunos otros factores, provocan cambios en la densidad del medio, la trayectoria de mínimo tiempo puede convertirse en una curva. (recuérdese el problema del salvavidas en el mar.) De hecho en estos términos podemos explicar por qué observamos espejismos. En las regiones muy calurosas, donde la superficie del piso calienta por contacto (conducción) el aire cercano al mismo, sucede que las capas de aire poseen una diferente temperatura dependiendo de la distancia a la que se encuentran del piso. Entre más cerca, mayor temperatura. Esta diferencia de temperaturas, provoca que la luz viaje en trayectorias curvas de tal forma que minimiza el tiempo de viaje. La figura 1.10 muestra gráficamente el fenómeno. Es claro que en esta concepción, la idea de línea "geodésica" es muy importante para el estudio de la propagación de la luz.

Sin embargo, surgieron dificultades al tratar de explicar algunos fenómenos

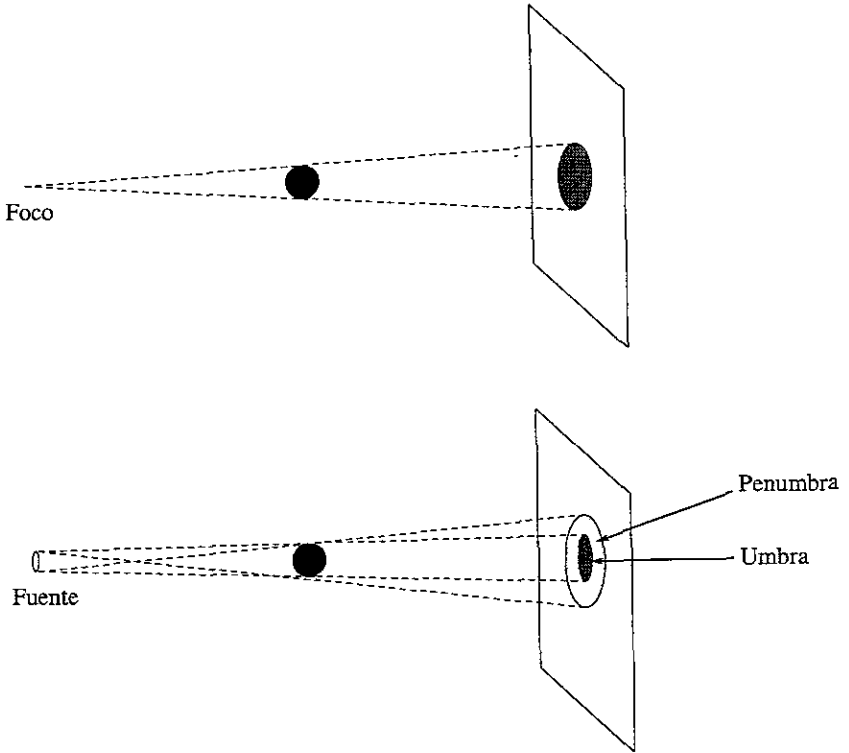
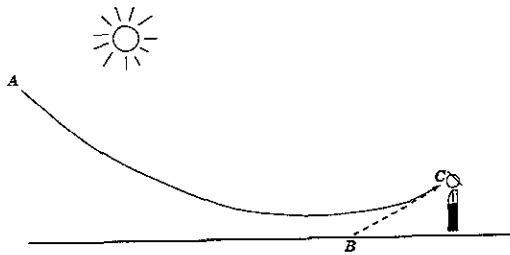


Figura 1.9: Rayos de Luz



*Cuando la luz viaja en un medio de densidad variable, el camino que sigue es una curva. El observador C piensa que la luz del cielo proviene del punto B. Este fenómeno es llamado espejismo, ya que el cielo aparentemente se refleja en el camino, dando la sensación de observar "charcos" de agua sobre el la superficie del mismo.*

Figura 1.10: Espejismos

en términos de rayos de luz. Grimaldi, contemporáneo de Newton, observó que el borde de las sombras producidas por fuentes pequeñas de luz, no estaba delimitado perfectamente como suponía la teoría. De hecho notó, con ayuda de instrumentos para magnificar la imagen, que el borde consistía de una serie de bandas brillantes y oscuras que disminuían en intensidad al alejarse del borde de la sombra. Newton a su vez, hizo estudios de fenómenos llamados de *interferencia* en los que observaba que la luz interfería como una onda al propagarse. Newton propuso que la luz consistía de corpúsculos que poseían una propiedad de vibración periódica controlada de alguna manera por el medio en el que se propagaban.

Estudios posteriores revelaron que los rayos de luz podían servir únicamente como aproximación para estudiar las trayectorias macroscópicas de la luz. El avance tecnológico permitió, por otro lado, hallar evidencia de que la luz se comportaba como una onda viajera. Huygens (1690) desarrolló una teoría ondulatoria de la luz que fue sustentada hasta el siglo XIX (Fresnel 1821). Más tarde Maxwell desarrolló una teoría electromagnética de la luz, en la que se le concebía como una onda transversal, que básicamente se relacionaba con una perturbación de los campos eléctrico y magnético de un medio, que formaba parte de un *espectro*, es decir de una colección de ondas electromagnéticas que poseían la característica común de ser variaciones periódicas de los campos del medio, y donde la diferencia entre unas y otras era la longitud de onda.

Después de la unificación ondulatoria de la óptica y el electromagnetismo sugerida por Maxwell, observaciones de fenómenos fotoeléctricos y de radiación de cuerpo negro, efectuadas a principios del siglo XX, no parecían obedecer la naturaleza ondulatoria antes propuesta. Max Planck (1900) explicó el espectro de emisión de un cuerpo a una temperatura dada, en términos de una teoría que suponía que los átomos emitían luz en paquetes discretos de energía, es decir, que la luz consistía de cuantos o concentraciones de energía. Cinco años más tarde, Einstein descubrió que la incidencia de luz en una superficie de metal, provocaba que se emitieran electrones, es decir, que los cuantos de luz incidentes sobre los átomos del metal podían provocar que éstos radiaran electrones. La explicación de dicho fenómeno la fundamentó en términos de concentraciones de energía que llamó *fotones* y estableció que se propagaban como partículas. Estas observaciones dieron origen a la *Mecánica Cuántica*. En 1913 Niels Bohr incorporó el modelo de los cuantos de luz en su modelo atómico y explicó el espectro de emisión del Hidrógeno. Luis de Broglie (1924) propuso que las características ondula-



torias no eran atributos exclusivos de los fotones, sino que en general, eran características de las partículas subatómicas. Thomson (1928) realizó experimentos que únicamente podían ser interpretados como patrones de interferencia de rayos de electrones. Hasta este punto, la dualidad onda-partícula de la luz parecía observarse en diversos fenómenos. Más aun, los electrones parecían comportarse de igual manera, hecho que a primera vista parecía una terrible contradicción.

Einstein (1915) publicó su *Teoría de la Relatividad* en la que incluyó predicciones relacionadas con la interacción de la luz con la materia. La teoría sostiene que la luz, al viajar en lugares donde el campo gravitatorio es grande, modifica sus propiedades de propagación (atributo de interacción que originalmente era exclusivo de la materia) Esta interacción se verificó por medio de observaciones astronómicas.

La visión moderna unifica las propiedades de la luz y de la materia en una teoría llamada *electrodinámica cuántica*, la cual abandona la idea de que el comportamiento onda-partícula da lugar a una contradicción, y por el contrario, concibe ambas manifestaciones como complementarias entre sí.

Richard Feynman, a mediados del siglo XX, trató de conciliar las ideas de mínima acción que propuso Hamilton para la mecánica clásica, con las ideas ondulatorias que dan lugar a la mecánica cuántica para explicar los fenómenos de la Electrodinámica Cuántica. El estudio de esta idea fue motivado por trabajos previos llevados a cabo por Dirac, quien logró incorporar los conceptos de la teoría de la relatividad de Einstein a la mecánica cuántica. Esta nueva concepción proporciona una visión totalmente diferente acerca de la propagación de la luz. En cierto sentido explica el principio de Fermat en términos probabilísticos, pero fundamenta tal deducción en una base conceptualmente diferente. Básicamente desecha la idea de que la luz *inteligentemente* calcula la trayectoria que le tomaría el mínimo tiempo para llegar de un lugar a otro y en su lugar postula que ésta, en realidad, viaja sobre todas las trayectorias posibles que unen a ambos puntos, sin embargo, en términos probabilísticos justifica el hecho de que la trayectoria observada, en los fenómenos de la óptica geométrica, sea la sugerida por Fermat.

# Capítulo 2

## Algo de Cálculo de Variaciones

Comenzaremos esta sección planteando algunos de los problemas sugeridos en el Capítulo anterior con recursos del Cálculo Elemental. El problema de la Braquistócrona lo desarrollaremos de manera histórica para motivar el surgimiento del Cálculo de Variaciones. Luego sugeriremos un método intuitivo para minimizar cantidades que dependen de la integral de una función. Plantearemos algunos de los problemas del primer Capítulo en términos de esta nueva formulación y concluiremos mostrando la manera en que la mecánica clásica puede ser formulada en términos de esta herramienta matemática.

### 2.1 Geodésicas en $\mathbb{R}^n$

El primer problema que abordaremos es el de determinar el camino más corto entre dos puntos en el espacio.

Considérese una curva en el espacio que une a los puntos  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  como la imagen de una función vectorial  $\vec{Y} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  cuyas componentes son funciones continuas en  $[0, 1]$  y tal que  $\vec{Y}(0) = \vec{A}$  y  $\vec{Y}(1) = \vec{B}$ . (Nota: En el caso de  $n = 2$  o  $3$  podemos pensar a  $\vec{Y}(t)$  como la posición de la partícula en el tiempo  $t$ , y confirmar que el hecho de que  $y_i(t)$  sea continua implica que la curva no tiene saltos).

La curva antes descrita es tan general que puede tener una longitud infinita. Pidamos que las componentes  $y_i(t)$  tengan primera derivada continua en  $(0, 1)$  de tal forma que  $\vec{Y}' = (y'_1(t), y'_2(t), \dots, y'_n(t))$  represente el vector velocidad y por consiguiente la longitud de la curva esté determinada por

$$L(\vec{Y}) = \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt.$$

donde  $|\vec{v}|$  define la norma usual de  $\mathbf{R}^n$ , i.e.  $|\vec{v}| = (\sum_{j=1}^n (v_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Podemos lograr entonces que la longitud sea finita pidiendo que cada componente de  $\vec{Y}'(t)$  sea integrable, o de manera más fácil, pidiendo que cada componente sea continuamente diferenciable en  $[0, 1]$ . Nuestro problema es *mínimizar* la función  $L(\vec{Y})$  sobre todas las posibles trayectorias que satisfacen las condiciones anteriores. Notemos que el segmento de línea recta que une a  $\vec{A}$  con  $\vec{B}$  está descrito por  $\vec{Y}_0(t) = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$ , es claro que  $\vec{Y}_0$  pertenece al conjunto de curvas admisibles. Sabemos que

$$L_{min} \leq \int_0^1 |\vec{Y}_0'(t)| dt = |\vec{B} - \vec{A}|,$$

ya que  $|\vec{Y}_0'| = |\vec{B} - \vec{A}|$  y  $t \in [0, 1]$ . Para probar que  $L_{min} = |\vec{B} - \vec{A}|$  notemos que por el teorema fundamental del cálculo

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{Y}(1) - \vec{Y}(0) = \int_0^1 \vec{Y}'(t) dt,$$

es decir,  $y_i(1) - y_i(0) = \int_0^1 y_i'(t) dt$ ;  $i = 1, \dots, n$  de donde

$$\begin{aligned} |\vec{B} - \vec{A}|^2 &= (\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = (\vec{B} - \vec{A}) \cdot \int_0^1 \vec{Y}'(t) dt, \\ &= \int_0^1 [(\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{Y}'(t)] dt \leq \int_0^1 |\vec{B} - \vec{A}| |\vec{Y}'(t)| dt. \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz  $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ . Finalmente

$$|\vec{B} - \vec{A}|^2 \leq |\vec{B} - \vec{A}| \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt,$$

de donde claramente

$$|\vec{B} - \vec{A}| \leq L(\vec{Y}) = \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt.$$

Lo anterior nos lleva a concluir que  $L_{min} = |\vec{B} - \vec{A}|$ , es decir, la curva de menor longitud que une a los puntos  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es precisamente el segmento de línea recta.

### 2.1.1 Geodésicas en una esfera

Para abordar este problema, recordemos que un punto  $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  sobre la superficie de una esfera de radio  $R$ , lo podemos caracterizar de manera única<sup>1</sup>, en coordenadas polares por

$$\vec{Y} = (R \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, R \cos \varphi).$$

donde  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\varphi \in (0, \pi)$ . Escojamos por simplicidad dos puntos distintos  $A$  y  $B$  de tal manera que  $A$  se encuentre en el polo norte y  $B$  esté definido por  $(R, 0, \varphi_1)$  con  $\varphi_1 \geq 0$ . Una curva que une a ambos puntos en la superficie de la esfera está dada por

$$\vec{Y} = (R \cos \theta(t) \operatorname{sen} \varphi(t), R \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \varphi(t), R \cos \varphi(t)).$$

donde  $\theta(t), \varphi(t)$  funciones continuas, con  $t \in [0, 1]$  y tales que  $\varphi(0) = 0$ ;  $\theta(1) = 0$ ;  $\varphi(1) = \varphi_1$ .

Necesitamos que  $\theta(t), \varphi(t)$  tengan derivada continua en  $t \in [0, 1]$  de tal manera que para cada  $t \in (0, 1)$

$$\vec{Y}' = R \begin{pmatrix} \varphi' \cos \theta \cos \varphi - \theta' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ \theta' \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \varphi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ -\varphi' \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}^T.$$

por lo tanto la longitud de la curva está dada por

$$\begin{aligned} L(\vec{Y}) &= \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt = R \int_0^1 \sqrt{\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)^2} dt \\ &\geq R \int_0^1 \varphi'(t) dt \\ &= R \varphi(t) \Big|_0^1 \\ &= R \varphi_1 \end{aligned}$$

donde  $L(\vec{Y}) \geq R \varphi_1$ . Si existiera una curva tal que  $L(\vec{Y}) = R \varphi_1$ , entonces ésta poseería la cualidad de ser la más corta. Veamos ahora que  $\sqrt{\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)^2} \geq \varphi'(t) \quad \forall t \in (0, 1)$ , entonces

<sup>1</sup> A excepción del polo norte y sur de la esfera, donde  $\varphi = 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\varphi = \pi$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  respectivamente.

$$\int_0^1 \sqrt{\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)^2} dt = \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

si y sólo si

$$\sqrt{\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)^2} = \varphi'(t) \quad \forall t \in (0, 1)$$

es decir,  $\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) = 0$  y  $\varphi'(t) \geq 0$  es decir, para  $\varphi \in (0, \pi)$  cuando  $\theta'(t) \equiv 0$  lo que implica que  $\theta(t) = \text{constante} = \theta(1) = 0$ , hecho que sucede a lo largo del círculo mayor (más corto) que une a  $A$  y  $B$ , tal como se afirmó en la primera sección del Capítulo anterior.

## 2.2 La Braquistócrona

Recordemos el problema planteado en el capítulo anterior. Buscamos hallar la curva tal que una cuenta que se desliza sobre ella, llegue en el mínimo tiempo de un punto  $A$  a un punto  $B$  (no en la misma vertical) sometida únicamente a la acción de la gravedad. Veamos al figura 2.1.

En trabajos anteriores a Bernoulli, Galileo suponía que dicha curva no era la línea recta, de hecho él propuso que se trataba de un arco de círculo que tocaba ambos puntos. Las nociones de Galileo eran parcialmente correctas desde el punto de vista de que una cuenta que se desliza sobre un arco de círculo, efectivamente llega en menos tiempo a su destino que sobre una recta. Sin embargo la braquistócrona *no* es un arco de círculo.

Analicemos el problema con más cuidado. Sea  $A$  el punto cuyas coordenadas son  $(0, 0)$  y  $B(x_1, y_1)$ . Pensemos en una curva que une a dichos puntos como la gráfica de una función suave y tomemos el eje de las ordenadas como positivo hacia abajo. Podemos representar a dicha curva como una función  $y = y(x)$  definida para  $x \in [0, x_1]$  tal que  $y(0) = 0$  y  $y(x_1) = y_1$ . Hemos sugerido tales características para simplificar el planteamiento. Supóngase ahora que  $v = \frac{ds}{dt}$  es la velocidad a la que viaja la cuenta sobre la curva y que la longitud de dicha curva es  $l$ . Naturalmente se sigue que el tiempo que tardará en caer estará dado por

$$T = T(y) = \int_0^l \frac{ds}{v},$$

recordemos por otro lado que la longitud de la curva está dada por

$$s = s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi,$$

con  $x \in [0, x_1]$ . Si consideramos que  $v = v(x)$ , entonces el tiempo puede calcularse, para cada trayectoria  $y(x)$  como

$$T = T(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v(x)} dx.$$

Ahora expresaremos a  $v(x)$  en función de  $y(x)$ . A partir de la segunda ley de Newton, sabemos que  $F = m\ddot{y}$ , donde  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ , es la aceleración de *a cuenta* debido a la gravedad de la Tierra. Dado que dicha cantidad,  $g$ , es constante durante la caída, entonces, sobre la curva,  $\ddot{y} = \dot{v} = g \cos \alpha$  y

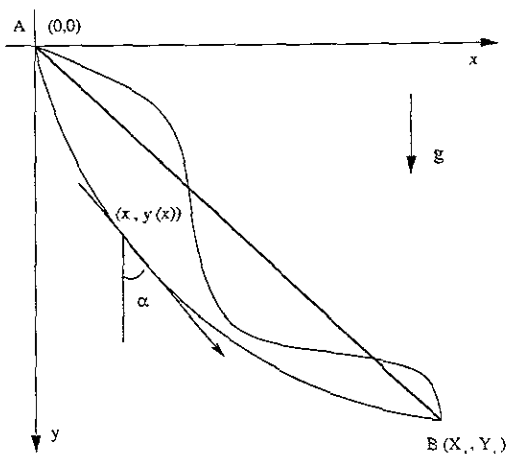


Figura 2.1: La Braquistócrona

$\dot{y} = v \cos \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo formado por la tangente a la curva y el eje  $y$ . Si  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , entonces se cumple que  $v\dot{v} = g\dot{y}$ , de donde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = g \frac{d}{dt} (y) \implies v^2 = 2gy + \text{const},$$

la integración la efectuamos de 0 a  $t$ , por lo que  $v(0) = y(0) = 0$  y

$$v(x) = \sqrt{2gy(x)}.$$

Concluimos entonces que

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx. \quad (2.1)$$

El problema de la Braquistócrona consiste en encontrar la función  $y(x)$  para la cual el tiempo es mínimo.

Calculemos el tiempo que tardaría en llegar la *cuenta* al punto B, a un largo de una recta. Supongamos por simplicidad que  $x_1 = y_1 = 1$ , entonces la línea recta que los une tiene la forma  $y_1(x) = x$  de donde  $y_1'(x) = 1$ . Reemplazando en la ecuación (2.1) tenemos

$$T = T(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{x}} dx, \quad (2.2)$$

$$T(y_1) = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{g}}. \quad (2.3)$$

Ahora calculemos el tiempo sobre un arco de círculo  $y_2(x)$  que una a  $A$  con  $B$ . La ecuación de  $y_2$  está dada por

$$y_2^2(x) + (x-1)^2 = 1 \implies y_2(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2},$$

$$y_2'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.1), obtenemos

$$T = T(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \left( \frac{1 + \frac{(1-x)^2}{1-(x-1)^2}}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$T = T(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \left( \frac{1}{(1 - (x-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (2.4)$$

Para resolver la integral, tomemos el cambio de variable  $1-x = \cos \theta$  y  $\frac{dx}{d\theta} = \sin(\theta)$ , entonces tenemos que:

$$T = T(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)}{(\sin^2(\theta))^{\frac{3}{4}}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)}} d\theta. \quad (2.5)$$

Evaluando la integral obtenemos que

$$T(y_2) = \frac{2.6221}{\sqrt{2g}} = \frac{1.3111\sqrt{2}}{\sqrt{g}} < \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{g}} = \frac{2}{\sqrt{g}}.$$

De la última desigualdad es claro que la conjetura de Galileo apuntaba en una dirección correcta.

Es importante tener en cuenta los resultados anteriores para poderlos comparar con los cálculos respectivos a la solución del problema en el *ejemplo 5* de la sección 2.4.



### 2.2.1 Solución de J. Bernoulli

Herón de Alejandría fue el primero en describir la trayectoria de la luz reflejada en un espejo en términos de un principio de minimización. Fermat en el siglo XVII, explicó el proceso de refracción de la luz, proponiendo que ésta tomaba el camino de mínimo tiempo para viajar de un punto a otro en el espacio, y en consecuencia, explicó que los rayos de luz se doblaban al pasar de un medio homogéneo a otro. El razonamiento de Fermat es muy sencillo, pensemos que la luz debe viajar del punto  $A$  al punto  $B$  en la figura 2.2. Supongamos que la velocidad en el medio homogéneo superior ( $y \geq 0$ ) es  $v$  y en el medio homogéneo inferior es  $w$ . Por simplicidad elegimos las coordenadas de  $A = (0, 1)$  y  $B = (1, -1)$ . Buscamos el punto  $x$  tal que el tiempo de tránsito de la luz sea mínimo. Dado que  $t = d/v$ , entonces de la figura 2.2 es claro que

$$T(x) = \frac{a}{v} + \frac{b}{w} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{w},$$

de donde un extremo  $x_0$  del tiempo está dado por

$$\left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x_0} = \frac{x_0}{v\sqrt{1+x_0^2}} - \frac{1-x_0}{w\sqrt{1+(1-x_0)^2}} = 0.$$

Como  $\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  y  $\sin(\alpha') = \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}$  entonces se debe cumplir que

$$\frac{\sin(\alpha)}{v} = \frac{\sin(\alpha')}{w}.$$

La prueba de que es un mínimo se obtiene del hecho de que

$$\left. \frac{d^2T(x)}{dx^2} \right|_{x_0} > 0.$$

Con esta condición, y sabiendo que la velocidad de la luz es proporcional al inverso del índice de refracción  $n$  de un medio en cada punto, Bernoulli concluyó que resolver el problema de la Braquistócrona, era equivalente encontrar la curva sobre la cual viajaría la luz, en un medio en el que la velocidad de la luz fuera constante en bandas paralelas a la horizontal que  $n$  tuviera la forma  $n \sim \frac{1}{\sqrt{y}}$ . Como  $v \sim \frac{1}{n} \sim \sqrt{y}$ , entonces para un constante  $c$ ,  $v_{luz} = c\sqrt{y}$  para cada altura  $y = id$  con  $i = 1, \dots, n$  tal que

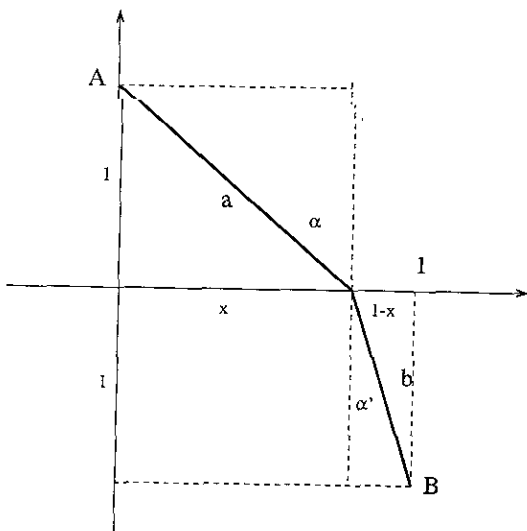


Figura 2.2: Ley de Snell

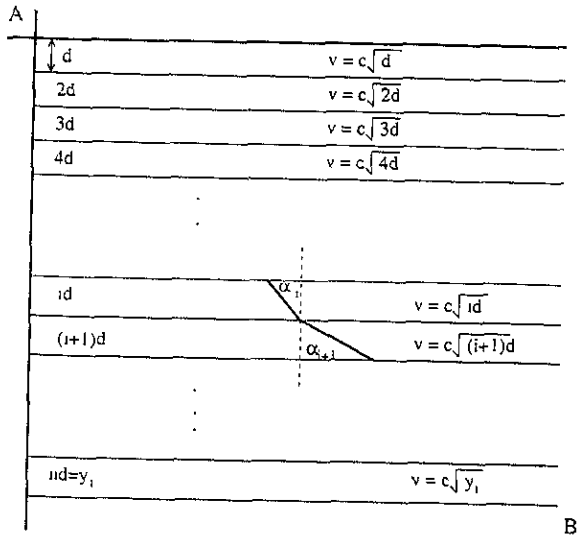


Figura 2.3: Medio Estratificado

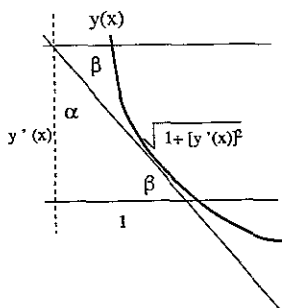


Figura 2.4: Condición sobre  $y'(x)$

$nd = y_1$ . Obsérvese la figura 2.3 Es claro que por el principio de Fermat debe cumplirse que

$$\frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\sqrt{d}} = \frac{\text{sen}(\alpha_2)}{\sqrt{2d}} = \dots = \frac{\text{sen}(\alpha_i)}{\sqrt{id}} = \frac{\text{sen}(\alpha_{i+1})}{\sqrt{(i+1)d}} = \dots = \frac{\text{sen}(\alpha_n)}{\sqrt{y_1}}$$

de donde al tomar el límite cuando  $d$  tiende a cero (y por consiguiente  $i$  tiende a infinito), debe cumplirse que  $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\sqrt{y}} = k$  con  $k = \text{constante}$  para todo punto. De tal razonamiento, necesitamos hallar la curva que satisfaga  $k^2 \text{sen}^2(\alpha) = y(x)$ , ahora veamos la figura 2.4

Notemos que  $\text{sen}(\alpha(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$  de donde

$$y(1+y'^2) = k^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{k^2-y}} \frac{dy}{dt} = dt \quad (2)$$

con el cambio de variable  $y = k^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$  donde  $\theta = \theta(x)$  podemos re-escribir la ecuación como

$$\frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} dt$$

integrando

$$\frac{k^2}{2}(\theta - \text{sen}(\theta)) = x + c$$

dado que  $y = \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta)$  con  $0 < \theta \leq 2\pi$  y  $k^2 - y = k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$  de donde claro que las curvas paramétricas

$$y = \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) \quad (2.7)$$

$$x = \frac{k^2}{2}(\theta - \operatorname{sen} \theta) - c \quad (2.8)$$

atisfacen la ecuación 2.6 y por tanto, minimizan la ecuación 2.1.

## 2.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

En las páginas anteriores hemos observado que para resolver algunos de los problemas planteados en el primer capítulo, ha sido necesario hallar una función  $y(x)$  que minimice el valor de una integral.

En esta sección encontraremos de manera heurística, las ecuaciones que debe satisfacer una función  $y(x)$  para ser un extremo del funcional  $J[y]$  definido por

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx ,$$

$$\text{con } y(a) = A \text{ y } y(b) = B .$$

Sea  $x_i$  una partición del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\Delta x = \frac{b-a}{N+1}$  para  $N \in \mathbb{N}$  y

$$x_k = a + k\Delta x \Rightarrow x_0 = a \quad \text{y} \quad x_{N+1} = a + \frac{N+1}{N+1}(b-a) = b .$$

Sea

$$J[y] = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \quad \text{con} \quad S_N = \sum_{n=0}^N F(x_n, y_n, y'_n) \Delta x ,$$

donde  $y_n = y(x_n)$  y  $y'_n = y'(x_n)$ , además  $y_0 = A$  y  $y_{N+1} = B$ , consideremos

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$$

entonces podemos aproximar

$$J[y] \approx \sum_{n=0}^N F\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}\right) \Delta x = j(y) ,$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix}$$

para simplificar la notación, sea

$$F_n = F\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}\right) .$$

la condición para hallar un extremo  $\hat{y}$  está dada por

$$\nabla_y j(y) \Big|_{y=\hat{y}} = 0$$

es decir

$$\frac{dj}{dy_i} \Big|_{y=\hat{y}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

es decir

$$\frac{dj}{dy_i} = 0 = \frac{d}{dy_i} \sum_{n=0}^N F_n \Delta x = \frac{d}{dy_i} (F_i + F_{i-1}),$$

debido a que  $y_i$  aparece únicamente en los términos  $i, i-1$ . Calculemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_i} (F_i + F_{i-1}) &= \frac{d}{dy_i} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) + \frac{d}{dy_i} F(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y'_i} \frac{1}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}} \frac{1}{\Delta x} \end{aligned}$$

mo

$$\frac{dj}{dy_i} = 0 = \frac{d}{dy_i} (F_i + F_{i-1})$$

tonces

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y'_{i-1}} \right) = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

tomamos el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

es la ecuación de Euler-Lagrange que debe satisfacer  $\hat{y}$ . También se escribe como

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y.$$

Anteriormente hemos supuesto que podemos intercambiar de alguna manera el proceso de optimización con el proceso límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y en consecuencia  $N \rightarrow \infty$ , sin embargo una manera más formal de solucionar el problema la expondremos en la sección siguiente. La idea anterior de discretizar el problema es cualitativamente similar a la solución que Bernoulli dio a la Braquistócrona, y nos será útil más adelante.

## 2.4 Método Variacional

Como en la sección anterior, busquemos determinar la función  $\hat{y}(x)$  tal que la integral

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

alcanza un extremo. Es claro que, de hallar un mínimo en  $J[y]$ , cualquier función *vecina*, sin importar la cercanía que ésta tenga con  $\hat{y}(x)$ , provocará que el valor de  $J$  sea mayor. Consideraremos una función *vecina* a una función  $y = y(\varepsilon, x)$  tal que  $y(0, x) = \hat{y}$  y

$$y(\varepsilon, x) = \hat{y}(x) + \varepsilon h(x),$$

con  $h(x)$  una función con derivada continua y  $h(a) = h(b) = 0$ , hecho que asegura que  $y(\varepsilon, x) = \hat{y}$  en  $x = a$  y  $x = b$ , de aquí que  $J \equiv J(\varepsilon)$  (véase la figura 2.5.)

$$J[y] = \int_a^b F(x, \hat{y} + \varepsilon h, \hat{y}' + \varepsilon h') dx \equiv J(\varepsilon).$$

Para que la integral tenga un valor estacionario, necesitamos que

$$\left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\hat{y}} = \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Esto puede ser justificado del hecho de que podemos hacer una expansión en serie de Taylor de  $J[y]$  alrededor de  $\hat{y}$ , en términos de  $\varepsilon$ , de tal forma que, como en el cálculo elemental, para hallar puntos críticos necesitamos que la primera derivada, en el punto en cuestión valga cero.

Ahora

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\varepsilon} \right) \Bigg|_{(x, \hat{y} + \varepsilon h, \hat{y}' + \varepsilon h')} dx \\ &= \int_a^b (0 + F_y h + F_{y'} h') \Bigg|_{(x, \hat{y} + \varepsilon h, \hat{y}' + \varepsilon h')} dx \\ &= \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') \Bigg|_{(x, \hat{y} + \varepsilon h, \hat{y}' + \varepsilon h')} dx. \end{aligned}$$

La derivada con respecto a  $\varepsilon$ , entra al símbolo de integral, debido a que supondremos que  $F$  y todas sus derivadas parciales son continuas en  $[a, b]$

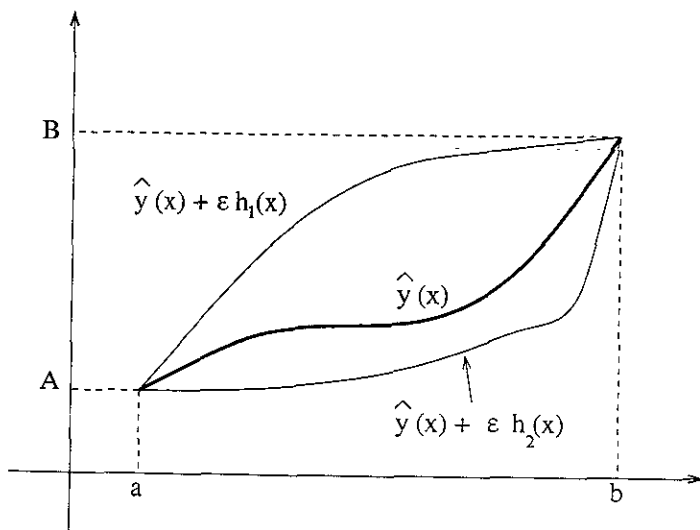


Figura 2.5: Funciones vecinas.

Integrando por partes el segundo término de la ecuación, evaluando en  $\varepsilon = 0$  y recordando que  $h(a) = h(b) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= F_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')h \Big|_a^b + \int_a^b \left( F_y h - \frac{dF_{y'}}{dx} h \right) \Big|_{(x, \hat{y}, \hat{y}')} dx \\ 0 &= \int_a^b \left( F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) h \Big|_{(x, \hat{y}, \hat{y}')} dx \end{aligned}$$

de donde se sigue que al ser válido para toda  $h$ , entonces  $\hat{y}$  debe satisfacer la ecuación de *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y \quad (2.9)$$

Hemos hallado una condición necesaria que debe satisfacer una función  $\hat{y}$  para ser, en particular un mínimo. Al tomar la derivada de  $J$  con respecto

<sup>2</sup>ver Frederick Y.M. Wan, *Introduction to the Calculus of Variations*.



a un parámetro  $\varepsilon$ , hemos desarrollado tomando la primera variación del funcional  $J$  y se denota como  $\delta J[y]$ . Bajo ese esquema, para minimizar  $J[y]$  es necesario que  $\delta J[y] = 0$ . La función  $y$  se expresa en esta notación como  $y = \hat{y} + \delta y$ , es decir la función extremo más una variación. El nombre de *cálculo de variaciones* nace de esta forma de expresar el problema.

Este resultado puede ser generalizado a  $n$  dimensiones, es decir, cuando la descripción de un sistema depende de  $n$  coordenadas. En este caso,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , por lo que el Lagrangiano depende ahora de  $2n + 1$  variables, es decir,

$$L = L(t, y, y') = L(t, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n).$$

La generalización puede consultarse en alguna de las referencias citadas al final del capítulo. La idea básicamente, consiste en proponer a  $y(t)$  en términos del extremo del funcional  $J[y]$ , como

$$y = \hat{y} + \varepsilon h = (\hat{y}_1 + \varepsilon_1 h_1, \hat{y}_2 + \varepsilon_2 h_2, \dots, \hat{y}_n + \varepsilon_n h_n)$$

y por lo tanto  $J[y] \equiv J(\varepsilon) = J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ , la condición de extremo se cumple cuando

$$\left. \frac{dJ(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = 0,$$

lo cual sucede si

$$\frac{d}{dt} F_{y'_i} = F_{y_i}. \quad (2.10)$$

Las  $n$  ecuaciones anteriores son llamadas *las* ecuaciones de **Euler-Lagrange** *E-L* asociadas al sistema.

Sería natural ahora desarrollar una manera sistemática para determinar si tal función es un máximo, mínimo, o algún tipo de función que presente un cambio de concavidad en el funcional. Del cálculo de varias variables, sabemos que en la expansión de Taylor, determinar si la matriz Hessiana, o matriz de las segundas derivadas, es positiva definida o negativa definida, para un punto cuyo gradiente es cero, determina si el punto en cuestión es un mínimo o un máximo respectivamente. El análisis análogo de la segunda derivada de  $J$  con respecto a  $\varepsilon$  o segunda variación, conduce a problemas en ecuaciones diferenciales que rebasan el objetivo de esta tesis<sup>3</sup>. Para un análisis

<sup>3</sup>Para el caso especial en que  $F = F(y')$  la condición de Legendre,  $F_{y'_i y'_i}(v) \geq 0$ ,  $\forall v$  ofrece un análogo a la segunda derivada en Cálculo, es decir, si  $\hat{y}$  es solución de la Ecuación de *E-L* y satisface la condición anterior, entonces,  $\hat{y}$  es un mínimo.

relacionado con esto puede consultarse alguna de las referencias propuestas en la bibliografía. Debemos agregar que, con técnicas como la presentada al inicio del capítulo para las geodésicas, así como los argumentos presentados en el caso de la Braquistócrona, es posible argumentar el carácter del punto crítico que se ha encontrado con la ecuación (2.9).

En general no es sencillo hallar soluciones para la ecuación (2.9), sin embargo, cuando alguna de las variables de  $F$  no está presente explícitamente, podemos hallar una primera integral de la ecuación diferencial (2.9).

Analicemos los siguientes casos,

1.  $F = F(x)$

En este caso  $J[y]$  no puede ser minimizado, ya que no depende de la trayectoria  $y(x)$  ni de sus derivadas.

2.  $F = F(y)$

Aquí, la ecuación (2.9) se convierte en  $F_y = 0$ , lo cual implica que  $y(x) = cte$ . Claramente no hay suficientes parámetros libres para satisfacer las condiciones  $y(a) = A$  y  $y(b) = B$ .

3.  $F = F(y')$

En este caso  $F_y \equiv 0$  y entonces

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{y'}(x) = \text{const.}$$

Este es el primer caso interesante.

*Ejemplo 1* : Recordemos que al inicio de este capítulo tratamos de hallar la curva geodésica en un plano. Para tal objetivo necesitábamos minimizar el valor de la integral

$$L(\vec{Y}) = \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt. = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2(t)} dt \quad (2.11)$$

donde hemos reemplazado la variable  $x$  por  $t$ . La curva geodésica debe satisfacer la ecuación (2.9), que en este caso, dado que

$$F = F(y') = \sqrt{1 + y'^2(t)},$$

entonces

$$F_{y'}(x) = \text{const} = k = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

lo cual implica que

$$y'(t) = \sqrt{\frac{k^2}{1 - k^2}},$$

es decir,

$$y'(t) = c.$$

Integrando tal condición obtenemos que

$$y(t) = ct + b.$$

Ahora, para que  $y(t)$  satisfaga las condiciones en los extremos  $a = 0$  y  $b = 1$ , tal que  $y(0) = A$  y  $y(1) = B$  necesitamos que  $c = B - A$  y  $b = A$ , de donde

$$y(t) = (B - A)t + A.$$

De esta manera verificamos que la línea recta es la curva suave de menor longitud que une a los puntos  $A$  y  $B$  en el plano.

*Ejemplo 2:* De manera similar, el problema de hallar la geodésica sobre una superficie cilíndrica, que une a los puntos  $P_1 = (\theta_1, z_1)$  y  $P_2 = (\theta_2, z_2)$  con  $\theta_1 \neq \theta_2$ , puede plantarse naturalmente en coordenadas cilíndricas  $(\theta, z(\theta))$ , donde la integral a minimizar es justamente la ecuación (2.11)<sup>4</sup>. La única diferencia es que las rectas

$$z(\theta) = m(\theta - \theta_1) + z_1 \quad \text{con} \quad m = \frac{z_1 - z_2}{\theta_1 - \theta_2},$$

que constituyen las ecuaciones de  $E-L$  en estas coordenadas, representan las hélices circulares propuestas como las geodésicas en el primer capítulo.

*De manera general podemos decir que si  $F$  solo depende de  $y'$ , los extremos son líneas rectas.*

<sup>4</sup>ver Troutman, *Variational Calculus with Elementary Convexity*.

4.  $F = F(x, y')$ 

Es claro que  $F_y = 0$ , por lo que

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{y'}(x, y'(x)) = c_1. \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) podemos despejar a  $y'$  de tal forma que

$$y'(x) = f(x; c_1).$$

Integrando tal relación podemos encontrar que

$$y(x) = A + \int_a^x f(s; c_1) ds,$$

con  $c_1$  determinado de tal manera que se cumpla que al evaluar  $y(b) = B$

$$B = A + \int_a^b f(s; c_1) ds.$$

*Ejemplo 3:* Al inicio del capítulo mostramos que la geodésica en la esfera estaba dada al minimizar la integral

$$L(\vec{Y}) = \int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt = R \int_0^1 \sqrt{\theta'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)^2} dt.$$

Si suponemos que podemos parametrizar a  $\theta$  en términos de  $\varphi$ , es decir  $\theta = \theta(\varphi)$  la integral se reescribe como

$$\int_0^1 |\vec{Y}'(t)| dt = R \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 + (y'(\varphi) \operatorname{sen} \varphi)^2} d\varphi,$$

considerando que  $' = d/d\varphi$ , de donde

$$F = F(\varphi, y') = R \sqrt{1 + (y'(\varphi) \operatorname{sen} \varphi)^2}.$$

Es claro que

$$F_{y'}(\varphi, y'(\varphi)) = c_1 = \frac{R y' \operatorname{sen}^2 \varphi}{R \sqrt{1 + (y'(\varphi) \operatorname{sen} \varphi)^2}}.$$

Entonces el valor de  $c_1$  está determinado al evaluar en  $\varphi = 0$ , lo que significa que  $c_1 = 0$ , es decir,

$$F_{y'}(\varphi, y'(\varphi)) = 0,$$

que implica a su vez que

$$\frac{dy}{d\varphi} = 0.$$

Esto corresponde a la representación del círculo mayor que une a  $y(0)$  con  $y(\varphi_1)$ .

### 5. $F = F(y, y')$

Aquí podemos simplificar la ecuación (2.9) de la siguiente manera,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}F(y(x), y'(x)) = F_y(x)y'(x) + F_{y'}(x)y''(x).$$

Ahora

$$\frac{d}{dx}(y'F_{y'}(x)) = y''F_{y'}(x) + y'\frac{d}{dx}F_{y'}(x).$$

Sumando ambas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F(x) - y'(x)F_{y'}(x)) &= F_y(x)y'(x) + y''(x)F_{y'}(x) - y''(x)F_{y'}(x) + \\ &= (F_y(x) + \frac{d}{dx}F_{y'}(x))y'(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

en donde utilizamos el hecho de que  $y(x)$  satisface la ecuación de  $E-L$  (2.9). De aquí podemos ver que

$$F(x) - y'F_{y'}(x)$$

es una constante al variar  $x$ .

*Ejemplo 4:* El problema de Dido, planteado en el primer capítulo, consistía en hallar la curva  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  de longitud fija  $l$ , tal que encerrara el área máxima. Podemos plantear el problema suponiendo que podemos parametrizar a  $x(s), y(s)$  en términos de la longitud de arco

$$s = \int_0^t \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\xi)^2} d\xi = \int_0^l ds,$$

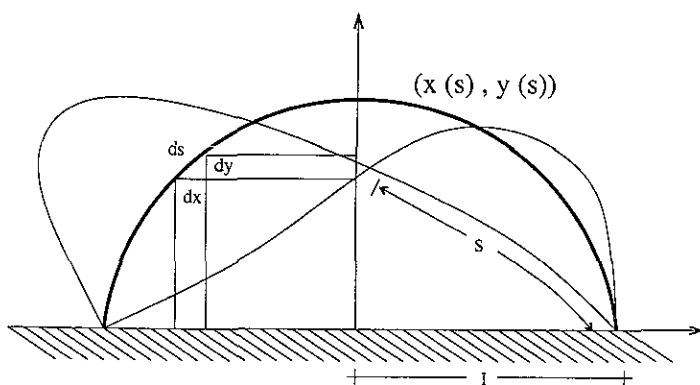


Figura 2.6: Problema de Dido

debido a que la norma del vector velocidad con respecto a la longitud de curva  $|(x'(s), y'(s))| = 1$ . Supongamos por simplicidad que la longitud de la curva es  $l = \pi$ . Supondremos a la curva  $\Gamma(s)$  como en la figura (2.6), por lo que necesitamos que  $y(0) = y(\pi) = 0$  y  $x(0) = k$  y  $x(\pi) = -k$ , donde  $k$  es una constante positiva. Supongamos ahora que  $k = 1$ . Sabemos por el teorema de Green, que el área de una región en el plano está dada por

$$A(\Gamma) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx,$$

donde  $\Gamma = \partial D$  está parametrizada positivamente. Queremos entonces, encontrar  $\Gamma(s)$  tal que  $A(\Gamma(s))$  sea máxima.

$$A(\Gamma) = - \int_{\partial D} y dx = - \int_0^\pi y(s) \frac{dx}{ds} ds \quad (2.13)$$

Antes de encontrar las ecuaciones de  $E-L$  del problema, notemos que

$$\left( \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \right)^2 = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - 2 \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) \geq 0, ,$$

de donde

$$\left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) \leq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right],$$

como

$$A(\Gamma(s)) = \int \int_{D(s)} \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) ds = - \int_0^\pi y(s) \frac{dx}{ds} ds,$$

entonces

$$A(\Gamma(s)) = - \int_0^\pi y(s) \frac{dx}{ds} ds \leq \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right] ds. \quad (2.14)$$

Ahora, resolvamos el problema recordando que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Rightarrow s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2,$$

de donde

$$x'(t) = \sqrt{s'(t)^2 - y'(t)^2},$$

que al sustituir en (2.13),

$$A(\Gamma) = - \int_{\partial D} y \frac{dx}{ds} ds = - \int_0^\pi y(s) \sqrt{\left( \frac{ds}{ds} \right)^2 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} ds = - \int_0^\pi y(s) \sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} ds$$

En este caso

$$F = y(s) \sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2},$$

es decir,  $F = F(y, y')$  por lo que

$$F(x) - y' F_{y'}(x) = y \sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} + y \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2}} = k,$$

simplificando,

$$y = k \sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} \Rightarrow ky' = \pm \sqrt{k^2 - y^2}.$$

Eligiendo el signo positivo

$$k \int_0^y \frac{d\zeta}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} ds = \int_0^s d\zeta$$

que nos conduce a

$$k \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{k}\right) = s \Rightarrow y(s) = k \operatorname{sen}\left(\frac{s}{k}\right).$$

Evaluando en  $y(\pi) = 0$ , *i.e.* cuando  $s = \pi$  obtenemos que  $\frac{\pi}{k} = \pi \Rightarrow k = 1$  y la función solución tiene la forma

$$y(s) = \operatorname{sen}(s). \quad (2.15)$$

Para obtener  $x(s)$  simplemente derivamos (2.15)

$$\frac{dy}{ds} = \cos(s),$$

y sustituimos en

$$x'(t) = \sqrt{s'(t)^2 - y'(t)^2},$$

de donde al tomar  $s$  como parámetro

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \operatorname{sen}^2(s)$$

y finalmente integrando

$$x(s) = \cos(s) \quad (2.16)$$

Lo que nos muestra que la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(s) = 1$$

definida por  $\Gamma_0(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s))$  es un extremo de (2.13) y por la observación (2.14)

$$A(\Gamma_0(s)) = \frac{\pi}{2}$$

Hemos hallado que es un máximo.

*Ejemplo 5* Notemos que el problema de la Braquistócrona consiste en minimizar la integral

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx.$$



Es claro que, en este caso,

$$F = F(y, y'),$$

entonces, para el extremo de la integral debe cumplirse que

$$F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} - \frac{y'(x)^2}{\sqrt{y(x)}\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{y(x)}\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c.$$

de donde, suponiendo que  $y' \geq 0$ , obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - c^2y}{c^2y}}.$$

Si llamamos  $k = \frac{1}{c}$  podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}}.$$

y recuperamos la ecuación (2.6) que da solución al problema óptico planteado por Bernoulli

$$\sqrt{\frac{y}{k^2 - y}} \frac{dy}{dx} dx = dx$$

La solución al problema fue expuesta en la sección 2.2.1 en términos de un parámetro  $\theta$ . La curva descrita por las ecuaciones paramétricas antes mencionadas es una cicloide. Puede probarse que existe una única cicloide que une a los puntos  $A$ ,  $B$ , proporcionando *la curva* de mínimo tiempo de descenso.<sup>5</sup> Es interesante calcular el tiempo que le toma a la cuenta llegar de  $A$  a  $B$  tal como se hizo con algunas trayectorias en la sección 2.2. Sabemos que la solución está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= \frac{k^2}{2}(1 - \cos \theta) \\ x &= \frac{k^2}{2}(\theta - \text{sen } \theta) - c \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Véase J.L. Troutman *Variational Calculus with Elementary Convexity*

Buscamos que  $A = (0, 0)$  y  $B = (x_1, y_1) = (1, 1)$ . Consideramos la cicloide tal que  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$  y  $(x(\theta_1), y(\theta_1)) = (x_1, y_1)$  por lo que  $c = 0$ . Sea  $k^2/2 = \beta$ . Para que se cumpla  $x(\theta_1) = 1$  y  $y(\theta_1) = 1$ , necesitamos que

$$y(\theta_1) = \beta(1 - \cos(\theta_1)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{1 - \cos(\theta_1)}$$

y

$$x(\theta_1) = \beta(\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)) = 1$$

es decir,

$$\theta_1 - \text{sen}(\theta_1) = 1 - \cos(\theta_1). \quad (2.17)$$

resolviendo numéricamente

$$\theta_1 = 2.412 \simeq \frac{10}{13}\pi,$$

Para calcular el tiempo total de viaje necesitamos conocer a  $dy/dx$  en términos del parámetro  $\theta$ . Por la regla de la cadena, sabemos que

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta},$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\beta \text{sen}(\theta)}{\beta(1 - \cos(\theta))},$$

calculemos ahora

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2}} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos(\theta)}},$$

entonces podemos calcular la integral

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} dx$$

en términos de  $\theta$ , recordando que

$$\frac{dx}{d\theta} = \beta(1 - \cos(\theta)).$$

$$\begin{aligned}
 T(y_{\theta_1}) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_1} \left[ \sqrt{\frac{2}{\beta(1 - \cos(\theta))^2}} \right] \beta(1 - \cos(\theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_1} \sqrt{2\beta} d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{\beta}{g}} \theta_1
 \end{aligned}$$

dado que

$$\beta = \frac{1}{1 - \cos(\theta_1)} = 0.573 \Rightarrow \sqrt{\beta} \theta_1 = (0.757)(2.412) = 1.826 ,$$

de donde podemos concluir que

$$T(y_{\theta_1}) = \frac{1.826}{\sqrt{g}} ,$$

que podemos comparar con los cálculos obtenidos en la sección 2.2 para el tiempo de tránsito asociado a la recta  $y_1 = x$ , en la ecuación (2.3), y para el arco de círculo

$$y_2'(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} ,$$

en la ecuación (2.5).

$$T(y_{\theta_1}) = \frac{1.826}{\sqrt{g}} < T(y_2) = \frac{2.6221}{\sqrt{2g}} = \frac{1.854}{\sqrt{g}} < T(y_1) = \frac{2}{\sqrt{g}} ,$$

La curva que resuelve en este caso nuestro problema esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}
 y &= \beta(1 - \cos \theta) , \\
 x &= \beta(\theta - \text{sen } \theta) ,
 \end{aligned}$$

con  $\beta = 0.573$ .

## 2.5 Principio de Hamilton

En el siglo XVIII, los matemáticos, Leibniz, Euler y en especial Lagrange, buscaban una integral tal que al minimizarla se recuperaran las ecuaciones de Newton. Hallando tal cantidad buscaban proponer una descripción de la Naturaleza que obedeciera a un principio de minimización. Poisson, en 1809, concibió la estructura de lo que, en 1835 Hamilton enunció como el "principio de la acción estacionaria". La formulación completa fue revisada por Jacobi en 1848, dando lugar a una formulación física de la naturaleza que ha sobrevivido la descripción relativista y la concebida por la mecánica cuántica.

En la sección anterior propusimos una ecuación diferencial de segundo orden (ecuación (2.9)) que debe satisfacer la función que minimiza una integral. Recordemos que las ecuaciones de Newton están dadas por

$$\vec{F} = m\vec{a} = my'' = m \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(my')}{dt} = \frac{d(p)}{dt}, \quad (2.18)$$

donde  $y = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$  describe la posición de una partícula de masa  $m$  al tiempo  $t$ .

Buscamos hallar una función  $L$ <sup>6</sup> tal que al calcular un valor extremo de

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, y, y') dt$$

obtenemos las ecuaciones (2.18), *i.e.*,  $F = my''$ . Si reescribimos la ecuación  $E-L(2.9)$  para la función  $L$  con la variable independiente  $t$  tenemos que

$$L_{y_i} = \frac{d(L_{y'_i})}{dt},$$

donde debe suceder, por analogía a (2.18), que

$$p_i = my'_i = L_{y'_i} = \frac{\partial L}{\partial y'_i}, \quad (2.19)$$

de modo que podemos integrar directamente con respecto a  $y'_i$  para obtener que

$$L = \frac{1}{2}m|y'|^2 - U(t, y)$$

<sup>6</sup>Hemos intercambiado la variable independiente  $x$  por el tiempo  $t$  para recuperar el significado físico de nuestro problema

para alguna función  $U$ . Por otro lado debe satisfacerse que el otro miembro de la igualdad en (2.18), sea

$$F_i = L_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i},$$

lo que significa que la fuerza  $\vec{F}$  debe ser derivable de un potencial escalar  $-U$ . Notemos entonces que la cantidad buscada es

$$A(y) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, y, y') dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m |y'|^2 - U(t, y) dt, \quad (2.20)$$

llamada la integral de acción. El primer término  $T(y') = \frac{1}{2} m |y'|^2$  es llamado, gracias a Leibniz, la energía cinética. La función  $L(t, y, y') = T(y') - U(y)$  es llamada el lagrangiano del sistema.

Hasta este punto hemos hallado, en una dimensión, que la segunda ley de Newton es una condición necesaria para obtener un extremo en una cantidad física llamada integral de acción. De hecho es posible probar que el extremo en cuestión es un mínimo para intervalos de tiempo en los cuales no existan puntos conjugados<sup>7</sup>. El **principio de Hamilton** establece, a partir de lo anterior, que "*La evolución de un sistema dinámico*<sup>8</sup> *de un tiempo*  $t = t_1$  *a un otro posterior*  $t = t_2$  *es siempre tal, que la integral de la diferencia entre la energía cinética y la potencial del sistema, sobre el intervalo de tiempo*  $[t_1, t_2]$  *toma un valor estacionario*", es decir, en el caso del movimiento de una partícula, que la trayectoria a través de la cual se moverá, será un extremo de la integral de la acción (4.4).

Hamilton aportó una manera diferente de abordar el problema de minimizar la integral de la acción (ecuación (4.4)). Propuso plantear las ecuaciones (2.10) en términos de la cantidad  $p$  que aparece en la ecuación (2.18), llamada, debido a la mecánica newtoniana, el *momento* de una partícula. En la ecuación (3.35) la cantidad  $p$  es llamada el *momento generalizado* en la formulación Hamiltoniana. La propuesta se reduce a proponer su principio de mínima acción en términos de nuevas variables que proporcionan, además de una forma más sencilla de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden planteado por la ecuaciones (2.10), una estructura

<sup>7</sup>ver Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*

<sup>8</sup>Un sistema dinámico es un sistema que cambia a través del tiempo

presenta una riqueza que da soporte sólido a gran parte de la formulación de la Física Moderna.

Supongamos que en  $n$  dimensiones  $L = L(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ , es decir, que el Lagrangiano *no* depende del tiempo explícitamente. Entonces la derivada total de  $L$  con respecto a dicha variable estará dada por

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} y'_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} y''_i .$$

stituyendo en la ecuación anterior la condición de extremo dada por las ecuaciones (2.10), *i.e.*

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) ,$$

tenemos que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i y'_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} y''_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_i y'_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} \right) ,$$

donde podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i y'_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} - L \right) = 0 . \quad (2.21)$$

definimos al hamiltoniano como

$$H = \sum_i y'_i \frac{\partial L}{\partial y'_i} - L = \sum_i y'_i p_i - L(y_i, y'_i) , \quad (2.22)$$

donde hemos utilizado la relación

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial y'_i} .$$

(2.21) la derivada total del hamiltoniano será cero

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{constante} ,$$

lo cual nos dice que el hamiltoniano es una constante de movimiento. Si recordamos que  $L(t, y, y') = T(y') - U(y)$  entonces

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial y'_i} = \frac{\partial T_i}{\partial y'_i},$$

pero la energía cinética  $T_i(y') = \frac{1}{2}m y'_i{}^2$  por lo que  $p_i = m y'_i$  de donde

$$H = \sum_i y'_i p_i - L(y_i, y'_i) = \sum_i m y'_i y'_i - (T(y') - U(y)) = 2T - T + U = T + U$$

es decir, el hamiltoniano es la energía del sistema. En otras palabras en un sistema conservativo (en el que se conserva la energía) el hamiltoniano es constante.

En general,  $L = L(t, y, y')$ , de lo cual  $H = H(t, y, y')$ . Notemos ahora que la relación

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial y'_i},$$

en muchos casos puede resolverse para

$$y'_i = \nu_i(t, y_i, p_i),$$

de tal forma que podemos describir al lagrangiano del sistema como

$$L(t, y_i, y'_i) = L(t, y_i, \nu(t, y_i, p_i)) = L(t, y_i, p_i),$$

y por lo tanto

$$H = H(t, y_i, p_i).$$

Por simplicidad en la notación, omitiremos los índices, y probaremos una propiedad importante del hamiltoniano que será válida para toda pareja  $(y_i, p_i)$ .

Calculemos las derivadas parciales del hamiltoniano con respecto a las variables  $y$  y  $p$ , considerando que

$$\begin{aligned} H(t, y, p) &\equiv p y' - L(t, y, y') = p \nu(t, y, p) - L(y, y, \nu(t, y, p)), \\ \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} &= \nu + p \frac{\partial \nu}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial p}. \end{aligned}$$

Pero  $\nu = y'$ , entonces sustituyendo el valor  $p$  dado por la ecuación (3.35) obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \nu = y'.$$

hora,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = p \frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right),$$

donde usamos el hecho de que  $y$  satisface las ecuaciones de E-L,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -p'.$$

ahora podemos finalmente concluir que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} y' + \frac{\partial H}{\partial p} p' = \frac{\partial H}{\partial t},$$

ya que  $y'$ ,  $p'$  satisfacen las ecuaciones previas. Las ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial p} = y', \quad (2.23)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = p', \quad (2.24)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.25)$$

son llamadas las *Ecuaciones de Hamilton* y las variables  $p$  y  $y$  son las *variables conjugadas*. Notemos que las variables conjugadas satisfacen la condición

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial y} = \frac{\partial p'}{\partial p},$$

de donde

$$\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial p} = 0.$$

Probaremos ahora que las ecuaciones (2.23) y (2.24) son las ecuaciones de *Euler-Lagrange* asociadas a la integral de la acción en términos del hamiltoniano. Notemos que al representar a  $L = L(t, y, p)$  tenemos que tratar a las variables  $p$  y  $y$  de manera independiente para calcular las ecuaciones de *E-L* asociadas.

$$A(y) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, y, p) dt = \int_{t_1}^{t_2} p y' - H(t, y, p) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t, y, p, y', p') dt$$



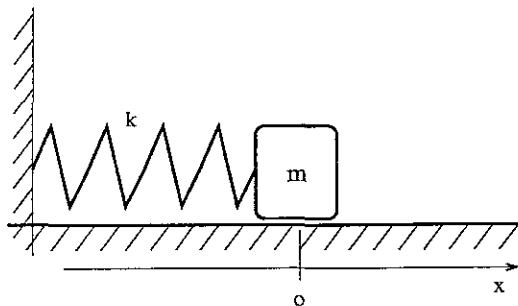


Figura 2.7: Oscilador armónico

aunque  $\bar{F}$  realmente no depende de  $p'$ . Entonces tenemos un extremo si

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} \right) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} \right) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}.$$

Notemos que

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = p \quad y \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

por otro lado

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p'} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial p} = y' - \frac{\partial H}{\partial p},$$

de donde

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad 0 = y' - \frac{\partial H}{\partial p}$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) definen directamente un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, que al ser resuelto, define la trayectoria  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  que minimiza la integral de la acción. Debe notarse que las  $2n$  ecuaciones determinan  $2n$  constantes de movimiento correspondientes a las constantes de cada integración y que son determinadas por las condiciones iniciales del problema.

Consideremos el ejemplo de un oscilador armónico. Supongamos que queremos describir el movimiento unidimensional de una masa  $m$  sobre una superficie sin fricción, atada a un resorte cuya constante de restitución es  $k$ . De acuerdo a Newton, la aceleración que sufriría la masa en cuestión estará dada por la fuerza externa que actúa sobre ella

$$F = ma = -ky$$

donde

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0.$$

La ecuación diferencial anterior puede ser directamente integrada de tal forma que la solución general estará dada por

$$y(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \quad (2.26)$$

con  $A = y(0)$  y  $B = y'(0)$ . Ahora plantearemos el problema en la formulación lagrangiana. Queremos construir la función  $L(t, y, y')$  tal que al minimizar el integral de  $\tau = 0$  a  $\tau = t$  obtengamos las ecuaciones de movimiento del sistema. Sabemos de antemano que  $T = \frac{1}{2} m y'^2$ . Para determinar  $U$  necesitamos que

$$F = -\frac{dU}{dy} \Rightarrow U = -\int_0^y -k \xi d\xi = \frac{1}{2} k y^2$$

por lo que la integral de la acción estará dada por

$$A(y) = \int_0^t (T - U) dt = \int_0^t \frac{1}{2} (m y'^2 - k y^2) dt$$

La ecuación de  $E-L$  asociada está dada por

$$\frac{d}{dt} F_{y'} - F_y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m y') + k y = 0 \Rightarrow F = \frac{d}{dt} (m y') = -k y \quad (2.27)$$

tal como lo esperábamos. Ahora calculemos el hamiltoniano del sistema  $H = F_{y'} = m y'$ , es decir  $y' \equiv \nu(t, y, p) = \frac{p}{m}$  por lo que

$$H = p \nu - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} - k y^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + k y^2 \right)$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton establecen que la trayectoria  $y(t)$  que minimiza la acción satisface

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = k y \quad (2.28)$$

Derivando la primera ecuación, claramente recuperamos la ecuación de  $E-L$  (2.27).

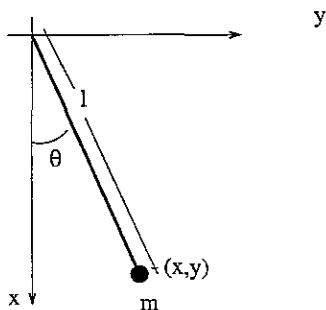


Figura 2.8: Péndulo simple

Hasta ahora, puede parecer que hemos simplemente recurrido a cambios de variables adecuados para replantear nuestros problemas, sin embargo, la estructura hamiltoniana, define una estructura especial de abordar una gran cantidad de problemas. Profundizaremos en esto en las secciones siguientes.

Generalmente se enuncia el principio de Hamilton de la siguiente manera, *Un sistema físico evoluciona a través del tiempo sobre las trayectorias tales que la integral de acción, en términos de las coordenadas generalizadas  $q_i$ , alcanza un valor estacionario.* Si pensamos que un sistema dinámico puede estar constituido por un número  $N$  grande de partículas de masa  $m_i$ , con posición  $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$  a través del tiempo, podemos, en muchas ocasiones, simplificar su descripción considerando en lugar de las coordenadas espaciales, algún otro conjunto de coordenadas adecuadas que contenga información intrínseca del sistema. Si pensamos, por ejemplo, en un péndulo simple, en el cual se encuentra una masa  $m$ , sostenida por una varilla rígida de masa  $m_v$ , de tal forma que  $m_v \ll m$ , sabemos que podemos describir al sistema completo, en términos de un ángulo  $\theta$  y una longitud  $l$ . De esta forma hemos aprovechado las propiedades de rigidez de la varilla y en consecuencia, hemos reducido el número de variables.

En general, si podemos representar el estado del sistema *restringido* al tiempo  $t$  por un conjunto de  $n$  variables independientes  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  mediante alguna transformación  $q_i = g(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N)$  para  $i = 1, \dots, n$ , entonces al conjunto de variables  $q_i$  se les llama coordenadas generalizadas

### 5.5.1 Transformaciones Canónicas

Si consideramos a las variables  $y$  y  $p$ , y proponemos un nuevo conjunto de coordenadas  $Y = f(t, y, p)$  y  $P = g(t, y, p)$  de tal forma que exista una función  $H^*(t, Y, P)$  que satisfice

$$\frac{\partial H^*}{\partial P} = Y' \quad - \frac{\partial H^*}{\partial Y} = P'$$

entonces la transformación  $Y, P$ , es llamada *transformación canónica* y  $H^*(t, Y, P)$  toma el papel de hamiltoniano en términos de las nuevas variables canónicamente conjugadas. Lo anterior puede enunciarse de la manera siguiente, *una transformación canónica preserva la estructura hamiltoniana de un sistema*. Dado que la trayectoria definida por el extremo de la acción, satisface las ecuaciones de Hamilton, entonces el enunciado anterior implica que el principio de mínima acción, puede ser escrito simultáneamente para las variables  $p$  y  $y$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, y, p) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} py' - H(t, y, p) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t, y, p, y', p') dt = 0 \quad ,$$

para las variables  $P$  y  $Y$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(t, Y, P) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} PY' - H^*(t, Y, P) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{G}(t, Y, P, Y', P') dt = 0 \quad .$$

No es necesario que  $\bar{F}$  y  $\bar{G}$  sean idénticos, sino que tengan los mismos extremos  $\hat{y}(t)$  y  $\hat{Y}(t, y, p)$  bajo la transformación canónica. Notemos, de hecho, que ambos funcionales tendrán los mismo extremos si

$$\bar{F} = \bar{G} + \frac{d\Phi}{dt} \quad , \quad (2.29)$$

de modo que

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \bar{G} + \frac{d\Phi}{dt} \right) dt = \Phi \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \bar{G} dt = K + \int_{t_1}^{t_2} \bar{G} dt$$

es decir, minimizar la integral del lado izquierdo, es equivalente a minimizar la integral del lado derecho. Por lo anterior, se dice que  $\bar{F}$  y  $\bar{G}$  son *variacionalmente equivalentes*.

Nótese que no incluimos explícitamente las variables de las cuales depende la función  $\Phi$ , únicamente pedimos que el término extra en la ecuación (2.29) sea una derivada exacta con respecto al tiempo.

## 2.5.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi y la función generatriz

Supóngase que la función  $\Phi$  de la ecuación (2.29), tiene la siguiente dependencia

$$\Phi = \Phi(t, y, Y),$$

entonces la derivada de  $\Phi$  con respecto al tiempo, puede calcularse de tal forma que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}Y'.$$

Por otro lado, podemos despejar de (2.29)  $d\Phi/dt$ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = py' - H(t, y, p) - PY' + H^*(t, Y, P).$$

Si comparamos término a término ambas expresiones, obtenemos que se debe cumplir

$$p = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (2.30)$$

$$P = -\frac{\partial\Phi}{\partial Y}, \quad (2.31)$$

$$H^* = H + \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (2.32)$$

Dado  $\Phi$ , la ecuación (2.30) usualmente puede resolverse para  $Y$  en términos de  $t, y$  y  $p$ , por el teorema de la función implícita

$$Y = f(t, y, p). \quad (2.33)$$

Utilizando la relación anterior, puede eliminarse  $Y$  de (2.31) para obtener a  $P$  en términos  $t, y$  y  $p$ ,

$$P = g(t, y, p), \quad (2.34)$$

las cuales definen la transformación canónica planteada al principio de la sección anterior. Por tal motivo,  $\Phi$  es conocida como la *función generadora* de la transformación. Obsérvese que de poder invertir (2.33) y (2.34),

$$y = \bar{f}(t, Y, P) \quad p = \bar{g}(t, y, p),$$

demostremos obtener  $H$  y a su vez, de (2.32), obtener

$$H^* = H^*(t, Y, P).$$

Como (2.33) y (2.34) definen una transformación canónica, entonces  $H$  y  $H^*$  tienen los mismos extremos por ser variacionalmente equivalentes.

Nótese que si se escoge la función generadora  $\Phi$ , dependiente de dos variables<sup>9</sup> de  $y, p, Y$  o  $P$ , se obtendrá que las dos variables restantes estarán relacionadas con las derivadas parciales de  $\Phi$ , y en general

$$H^* = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Una elección conveniente de la transformación canónica inducida por  $\Phi$ , sería aquella para la cual el nuevo hamiltoniano  $H^*$  fuera independiente de las variables transformadas  $Y$  y  $P$ , más aún, sería muy cómodo que  $H^* = 0$ , se transformaría a (2.35) en

$$H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.36)$$

Para el caso que analizamos anteriormente, en que  $\Phi = \Phi(t, y, Y)$  se tendría

$$H(t, y, p(t, y, Y)) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y, Y) = H\left(t, y, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y, Y)\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y, Y) = 0. \quad (2.37)$$

Debe notarse que en la ecuación anterior  $Y$  no aparece explícitamente, por lo que la ecuación diferencial parcial puede ser resuelta para  $\Phi$  en términos de  $t$  y de  $y$ .

En general, para un hamiltoniano dado  $H(t, y, p)$  la ecuación

$$H\left(t, y, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.38)$$

se llama *ecuación de Hamilton-Jacobi* asociada al sistema.

Es importante notar que, de hallar una solución a la ecuación (2.38),  $\Phi$  nos proporciona la transformación adecuada, para la cual el nuevo hamiltoniano

<sup>9</sup>de las cuales debe escogerse una de la representación original y otra transformada

$H^*$  es idénticamente cero, de donde las ecuaciones de Hamilton, en las nuevas variables  $Y, P$  están dadas por

$$\frac{\partial H^*}{\partial P} = \frac{dY}{dt} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial Y} = -\frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.40)$$

de donde

$$Y = \text{constante}, \quad (2.41)$$

$$P = \text{constante}. \quad (2.42)$$

En conclusión, la ecuación de Hamilton-Jacobi nos proporciona la transformación donde las ecuaciones de Hamilton tienen una solución constante.

El significado físico de  $\Phi$  puede hallarse al calcular  $d\Phi/dt$ . Del análisis de la ecuación (2.37) tenemos que  $\Phi = \Phi(t, y)$  por lo que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = py' - H = L$$

donde utilizamos (2.30) y (2.36). Podemos integrar con respecto al tiempo directamente y concluir que

$$\Phi = S_0 + \int L dt = S_0 + S \quad (2.43)$$

es decir, la función generadora  $\Phi$  es igual a la acción de Hamilton  $S$ , salvo una constante  $S_0$ .

Claramente, si  $\Phi$  es solución de (2.38),  $S$  también lo es, entonces, podemos finalmente escribir la *ecuación de Hamilton-Jacobi* en términos de la integral de la acción  $S$  como

$$H\left(t, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.44)$$

que es la forma usual de hallar dicha ecuación.

Podemos resumir que la ecuación anterior es una ecuación diferencial parcial con  $1 + 1$  variables  $y$  y  $t$  en el caso unidimensional, o con  $n + 1$  variables si  $y$  es considerado como un vector  $n$ -dimensional. Una solución de dicha ecuación requiere, en general, de  $n + 1$  constantes de integración.

,  $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ . Claramente si  $S(t, y)$  es una solución de (2.38), entonces  $S(t, y, Y) = S(t, y) + \alpha_{n+1}$ , con  $\alpha_{n+1}$  una de las  $n + 1$  constantes, también es. Entonces, una solución completa de nuestra ecuación puede ser escrita como

$$S = S(y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

en  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Dado que en el sistema transformado, las variables  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  y  $P = (P_1, \dots, P_n)$  son constantes, podemos escoger que

$$\alpha_i = Y_i$$

a partir de (2.31), obtener que

$$P_i = -\frac{\partial S(y_i, Y_i, t)}{\partial Y_i} = -\frac{\partial S(y_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (2.45)$$

onde  $\beta_i$  son constantes que, al igual que  $\alpha_i$  pueden ser determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema.

Con la ecuación (2.45) es posible obtener a  $y_i$  en términos de las constantes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,

$$y_i = y_i(\alpha_i, \beta_i, t)$$

que representa justamente la ecuación de movimiento de nuestro problema.

Para concluir el capítulo haremos el cálculo de la función generadora para el oscilador armónico analizado en la sección 2.5.

Dado que en nuestro problema se conserva la energía, analicemos primero la forma de la ecuación (3.50) para el caso en que el hamiltoniano es constante  $H = H_0 = E$ . Si separamos variables de tal forma que

$$S(y, \alpha_i, t) = W(y, \alpha_i) - Et,$$

entonces podemos obtener que la ecuación (3.50) se transforma en

$$H\left(t, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = E.$$

Cabe mencionar que como la variable transformada  $Y$  (constante) no aparece explícitamente en la ecuación, puede suceder que  $E = E(Y)$ .

Recordemos que el hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional está dado por

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + ky^2 \right) = E = E(Y),$$



fijemos de manera conveniente  $E = Y$ , por lo que

$$mky^2 + p^2 = mky^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 2mY$$

donde utilizamos el hecho de que

$$p = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

correspondiente a (2.30). Podemos despejar  $\partial W/\partial y$  de tal forma que

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2mY - mky^2}$$

que es equivalente a

$$W = \int^y \sqrt{2mY - mky^2} \, dy$$

por lo que

$$S(t, y, Y) = W - Et = \int^y \sqrt{2mY - mky^2} \, dy - Yt.$$

de las ecuaciones (2.30), (2.31) y (2.32), se sigue que

$$p = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2mY - mky^2}, \quad (2.46)$$

$$P = -\frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{\partial}{\partial Y} \left( \int^y \sqrt{2mY - mky^2} \, dy - Yt \right), \quad (2.47)$$

$$= -m \int^y \frac{dy}{\sqrt{2mY - mky^2}} + t \quad (2.48)$$

$$= t - \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen \left( \sqrt{\frac{k}{2Y}} y \right) \quad (2.49)$$

$$(2.50)$$

$$H^* = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - Y = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + ky^2 \right) - Y = 0, \quad (2.51)$$

de la ecuación (2.51) es la primera integral del problema, mencionada en la sección 2.4 en el caso 5.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + ky^2 \right) = Y = E \quad (2.52)$$

onde  $E$  toma el papel de  $\beta_1$  descrito en los párrafos anteriores.

Por construcción, se satisface que

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$$

Las ecuaciones (2.52) y (2.49) definen la transformación canónica buscada. Dado que  $Y = E$  y  $P$  es una constante arbitraria (recuérdese  $\alpha_1$ ), podemos despejar de (2.49) a  $y$  y obtener

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} [t - P] \right) \quad (2.53)$$

que se convierte en la solución (2.26) ya obtenida en las secciones anteriores, donde que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

Esto implica que

$$y(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + B \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$



# Capítulo 3

## Hacia la mecánica cuántica

### Introducción

En este capítulo, analizaremos la equivalencia entre el *principio de Fermat*, asociado a la óptica geométrica, y el *principio de la acción estacionaria* de Hamilton, relacionado con la mecánica clásica. Consideraremos la formulación ondulatoria de la luz de acuerdo a la teoría electro-magnética de Maxwell, mostraremos algunas de las propiedades más importantes de las ondas y hallaremos la similitud que aparece entre dicha formulación y la ecuación de Hamilton-Jacobi a partir de la ecuación eikonal. Por último se reconoce la existencia de una formulación ondulatoria de la materia.

### 3.1 Óptica Geométrica

Al como fue mencionado en el primer capítulo, las interpretaciones acerca del comportamiento de la luz cambiaron a través de la historia. En el segundo capítulo, presentamos una manera de obtener la Braquistócrona en términos ópticos, basándonos en el *Principio de Fermat*, el cual establece que la luz viaja sobre la trayectoria o *rayo* que minimiza el tiempo de viaje entre dos puntos  $A$  y  $B$  en el espacio.

En términos variacionales, lo podemos escribir de la siguiente manera

$$\min [T] = \min \left[ \int_A^B \frac{dl}{v} \right] \quad (3.1)$$

donde  $v$  es la velocidad de la luz en el medio y  $dl$  es el elemento de longitud de la trayectoria. En óptica se define el índice de refracción de un medio  $n$  en

términos de la velocidad de la luz  $v$  en el mismo, de tal forma que  $n = c/v$ , con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. De esta manera podemos reescribir la ecuación (3.1) con la notación variacional <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_A^B \frac{dl}{v} \right) &= \delta \left( \int_A^B n dl \right) = 0 \\ &= \delta \left( \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds \right) \end{aligned}$$

donde el elemento de longitud sobre la trayectoria está dado por

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds$$

con el parámetro  $s$  correspondiente a la longitud de curva. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al sistema son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial y'} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial z'} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) \right) \end{aligned}$$

que toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( n \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( n \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right) &= \frac{d}{ds} \left( n \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>se omite la constante  $c$  en la integral, ya que minimizar  $c \int n dl$  es equivalente a mi  
c . n

cordemos que la norma del vector velocidad

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 1$$

vido a que utilizamos como parámetro la longitud de arco, por lo que demos escribir de manera vectorial las ecuaciones anteriores como

$$\text{grad } n = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) es conocida como la **ecuación de los rayos de luz**. Nótese que para un medio homogéneo ( $n = \text{constante}$ ), el  $\text{grad } n = 0$ , por lo que la ecuación (3.2) se transforma en

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = 0$$

Las soluciones son

$$\vec{r} = \vec{A} + s(\vec{B} - \vec{A}) \quad (3.3)$$

que representan la forma paramétrica de una recta que pasa por el punto  $\vec{A}$  cuya dirección está determinada por el vector que une a  $\vec{A}$  con  $\vec{B}$ , hecho que confirma las teorías de que la luz se mueve en líneas rectas.

Esta caracterización de la luz es muy útil en el estudio de lentes y diseño de instrumentación, es decir, para las trayectorias macroscópicas, sin embargo, era capaz de dar explicación a los fenómenos observados por Grimaldi y Newton en el siglo XVI. Los experimentos de Thomas Young, en 1801-1802, sugerían fuertemente un comportamiento ondulatorio de la luz.

El experimento de Young consiste en hacer pasar luz a través de una pequeña rendija  $s$  para simular una fuente puntual de emisión. La luz proveniente de la nueva fuente  $s$ , se hace incidir sobre una pantalla con dos rendijas  $s_1$  y  $s_2$  separadas por una distancia  $a$  entre sí y finalmente inciden en una pantalla final  $P$ . Al activar el dispositivo experimental, se observa que se producen franjas luminosas y franjas oscuras sobre  $P$ . Tales resultados eran inconcebibles desde el punto de vista anterior, en donde la luz al viajar a través de rayos, produciría una iluminación más, o menos intensa sobre la pantalla  $P$ , pero de ninguna manera produciría franjas oscuras.

Este experimento anterior, es un ejemplo de un fenómeno de interferencia ondulatoria que ya había sido estudiado, por ejemplo en ondas sobre un estanque de agua. Fresnel, en 1819, retomó las ideas de Huygens y logró describir

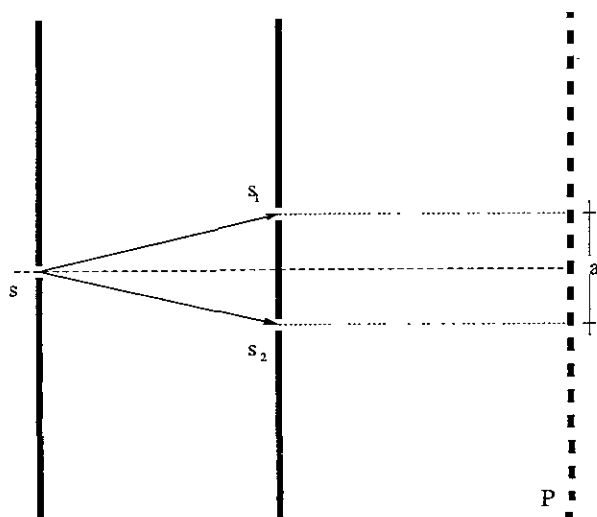


Figura 3.1: Experimento de Young

fenómenos de interferencia y difracción de este tipo. Maxwell, de 1831-1879, trabajó en sus ecuaciones del electromagnetismo y su interpretación ondulatoria de la luz. En la siguiente sección abordaremos algunos de los resultados más importantes.

## 3.2 Ecuaciones de Maxwell

En esta sección describiremos cómo, a través de la teoría electromagnética de Maxwell, es posible caracterizar la existencia de perturbaciones (ondas eléctricas, que a su vez inducen perturbaciones magnéticas en un medio <sup>2</sup>, que producen en conjunto, una onda viajera de carácter *electromagnético*. Dichas ondas están caracterizadas en términos de su longitud de onda <sup>3</sup>. Maxwell postuló que la luz forma parte de este conjunto de ondas viajeras.

Las ecuaciones de Maxwell están dadas, en el Sistema Internacional, por

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

<sup>2</sup>Puede tratarse del vacío

<sup>3</sup>o en términos de su frecuencia

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} , \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho . \quad (3.7)$$

on

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}.$$

onde  $\rho$  es la carga eléctrica,  $\vec{j}$  es la densidad de corriente, y  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica en el vacío, respectivamente. La ecuación (3.4) es llamada la *ley de inducción de Faraday* y describe la manera en la que al cambiar el campo magnético a través del tiempo, se induce un campo eléctrico perpendicular. De manera simétrica, (3.5) muestra la inducción de un campo magnético perpendicular ante el cambio temporal del campo eléctrico, y es llamada la *Ley de Ampère*. La ecuación (3.6) establece la inexistencia de monopolos magnéticos, y (3.7) es la llamada *Ley de Coulomb*. Dichas ecuaciones fueron originalmente postuladas por Maxwell, sin embargo, es posible obtenerlas a partir de un principio variacional, si el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2) - \rho \Phi + (\vec{j} \cdot \vec{A}),$$

nde

$$\vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \quad \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

donde  $\vec{A}$  es el potencial vectorial electromagnético y  $\Phi$  el potencial escalar. La inducción puede hallarse de manera detallada en el libro *Elements of Hamiltonian Mechanics* de Ter Haar, sin embargo para nuestros propósitos, las pondremos conocidas, y partiremos del caso particular en que  $\rho = 0$ , (ausencia de cargas) y  $\vec{j} = 0$ , (ausencia de corriente), para medios continuos,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 , \quad (3.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (3.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 , \quad (3.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 . \quad (3.11)$$



donde las permitividades eléctrica  $\epsilon$  y magnética  $\mu$  del material, relacionan a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  con los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$  mediante

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} .$$

Si tomamos la derivada parcial de (3.10) con respecto al tiempo, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 ,$$

como  $\vec{\nabla}$  es un operador espacial, entonces

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 , \quad (3.12)$$

de la ecuación (3.8) sabemos que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

por lo que al susituir en (3.12) obtenemos que

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ,$$

recordemos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} ,$$

pero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

y por la ecuación (3.11) obtenemos que

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ,$$

donde hemos utilizado la notación del operador *laplaciano*  $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ .

Si identificamos al producto de las permitividades con el índice de refracción y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío de la siguiente manera

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} ,$$

ecuación de propagación del campo eléctrico la podemos escribir como

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Para el campo magnético, puede hallarse una ecuación idéntica, de manera que, en general podemos escribir la ecuación de propagación del campo electromagnético como

$$\Delta \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.13)$$

donde  $\varphi = \vec{E}_i$  o  $\vec{H}_i$ . La ecuación anterior es conocida como la **ecuación de onda**.

## 2.1 Ecuación de onda

Analicemos brevemente la forma de las soluciones de la ecuación (3.13).

Por simplicidad reduzcamos nuestro estudio a una dimensión.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.14)$$

En el caso en que la velocidad de la luz en el medio  $v$  es constante, notemos que  $\varphi$  es una función

$$\varphi = \varphi_0 e^{i[k(x-vt)]} = \varphi_0 e^{i\phi} \quad (3.15)$$

que satisface la ecuación de onda. En general, una función

$$F = F(x - vt)$$

satisfará dicha ecuación. En el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, la ecuación (3.15) puede resolverse de manera completa con el método de las características. En nuestro caso, las características están dadas por

$$\xi = x - vt$$

$$\eta = x + vt,$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  representan las curvas sobre las cuales se propaga la información contenida en la función  $F$ . Para ver de manera más clara lo anterior, simplemente puede calcularse que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right),$$

hecho que transforma la ecuación (3.14) en

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Considerando que  $\Phi(\xi(x, t), \eta(x, t)) = \varphi(x, t)$ , podemos ver que sus soluciones claramente son

$$F(\xi) + G(\eta) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

que representan ondas que viajan en la dirección positiva y negativa del eje  $x$ .

Es importante recalcar que la familia de curvas  $\xi$  y  $\eta$  antes mencionada son precisamente las ecuaciones de los rayos de luz descritos en la sección anterior. Más adelante se deducirá la ecuación de los rayos a partir de la solución ondulatoria  $\varphi$ .

Por el momento analizaremos con más cuidado la forma de la solución propuesta  $\varphi$ . Dado que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

entonces

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\phi} = \varphi_0 [\cos [k(x - vt)] + i \sin [k(x - vt)]]$$

por lo que  $\varphi$  representa una combinación lineal de ondas periódicas viajeras. A  $\varphi_0$  se le llama la *amplitud* de la onda, es decir la magnitud de la perturbación o variación del campo  $\varphi$ .

Dado que matemáticamente las funciones  $\sin [k(x - vt)]$  y  $\cos [k(x - vt)]$  tienen periodo  $\tau = 2\pi$ , en ambas variables  $t$  y  $x$ , podemos establecer que,

$$\sin [k[(x + \lambda) - vt]] = \sin [k(x - vt) + k\lambda]$$

de lo cual

$$\sin [k(x - vt) + k\lambda] = \sin [k(x - vt) + 2\pi]$$

que implica que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

nde  $\lambda$  representa la longitud de onda (es decir la unidad de longitud, después de la cual, el valor de  $\varphi$  se repite).  $k$  es llamada la constante de propagación en el medio o *número de onda*. Un análisis similar en la variable temporal nos hace llegar a la relación

$$kvT = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow v = \nu\lambda,$$

nde utilizamos la relación  $T = 1/\nu$ .  $T$  es el periodo temporal real de la onda. Si introducimos la frecuencia angular  $\omega = 2\pi\nu$  podemos reescribir a  $(\varphi(x, t))$  como

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)} = \varphi_0 e^{i\phi} \quad (3.16)$$

es la representación en forma compleja de una onda *plana* unidimensional. La variable en el exponente de  $e$ ,  $\phi$  es llamada *fase*.

El resultado anterior puede generalizarse a tres dimensiones, donde podemos caracterizar a una onda plana de la siguiente manera

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.17)$$

nde ahora  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  representa el vector de propagación de la onda. Normalmente  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  representan las constantes de propagación o números de onda en las direcciones  $x, y$  y  $z$  respectivamente. El nombre de onda *plana* viene del hecho de que las superficies generadas al hacer la fase  $\phi = \text{constante}$  son **planos** perpendiculares al vector constante de propagación  $\vec{k}$ .

Las superficies sobre las cuales se cumple  $\phi = \text{constante}$  son llamadas *superficies de onda*.

## 2.2 Ondas electromagnéticas

Para el caso electromagnético, se satisface que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad y \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

nde ambas componentes de la oscilación electromagnética, viajan juntas en el mismo vector  $\vec{k}$  de propagación e igual frecuencia  $\omega$ . Debe también mencionarse que, como consecuencia de las ecuaciones (3.4) y (3.5), los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  asociados a la oscilación de los campos eléctrico y magnético son

siempre perpendiculares entre sí y debido a que las ondas electromagnéticas son transversales a la dirección de propagación de la onda, el vector de propagación  $\vec{k}$  es proporcional al llamado vector de *Poynting* dado por la expresión

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Considérese nuevamente el caso unidimensional. Sea  $k_0$  el número de onda en el vacío definido por la relación

$$k = k_0 n = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}.$$

entonces podemos escribir (3.15)

$$\varphi = \varphi_0 e^{ik_0(n x - ct)}.$$

Debe notarse que  $n x$  define la trayectoria de propagación de la luz, es decir, el *camino óptico* o rayo de luz.

Ahora supongamos que el índice de refracción del medio varía poco de un punto a otro, sobre una distancia del orden de  $\lambda$ , es decir,  $n \gg \lambda$ . Tal condición implica que  $k_0 \rightarrow \infty$ .

Busquemos una solución a (3.13) similar a (3.15)

$$\varphi = e^{A(r) + ik_0(L(r) - ct)}, \quad (3.18)$$

donde  $A(r)$  representa implícitamente la amplitud real de la onda, y  $L(r)$  el camino óptico propuesto al inicio del capítulo, consecuencia del principio de Fermat. Al sustituir la solución propuesta en la ecuación (3.13) obtenemos lo siguiente

$$\nabla\varphi = \nabla\left(e^{A+ik_0(L-ct)}\right) = (\nabla A + ik_0\nabla L)\varphi,$$

de donde

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \nabla(A + ik_0\nabla L)\nabla\varphi + \varphi(\Delta A + ik_0\Delta L) \\ &= (\nabla A + ik_0\nabla L)^2\varphi + \varphi(\Delta A + ik_0\Delta L) \\ &= [(\nabla A(r))^2 + 2ik_0\nabla A\nabla L - k_0^2(\nabla L)^2]\varphi + \varphi(\Delta A + ik_0\Delta L) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial t^2} = -\frac{n^2}{c^2} (k_0 c)^2 \varphi = -(k_0 n)^2 \varphi$$

lo que la ecuación (3.13) se escribe

$$ik_0[2\nabla A \nabla L + \Delta L]\varphi + [(\nabla A(r))^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + \Delta A + k_0^2 n^2]\varphi = 0$$

separando parte real y parte imaginaria obtenemos

$$[2\nabla A \nabla L + \Delta L] = 0 \quad (3.19)$$

$$[(\nabla A(r))^2 + \Delta A + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2)] = 0 \quad (3.20)$$

El límite de la óptica geométrica se alcanza con la aproximación obtenida a partir del método de WKB, propuesta en el párrafo anterior, es decir cuando el término en  $k_0^2$  es el dominante en (3.20) y por lo tanto se cumple que

$$n^2 - (\nabla L)^2 = 0. \quad (3.21)$$

La ecuación anterior es la llamada *ecuación eikonal*. Ahora verifiquemos que a partir de dicha ecuación podemos obtener que  $L(r)$  efectivamente es el camino óptico propuesto por el principio de Fermat.

Recordemos que definimos a los frentes de onda como  $L(r) = \text{constante}$  para un  $t$  fijo, es decir, las superficies tales que la fase  $\phi = k_0(L(r) - ct)$  de onda de propagación es constante. Es natural definir a los rayos como las líneas perpendiculares a las superficies  $L$  y paralelas al vector de onda  $\vec{k}$  que en su vez es paralelo a  $\nabla L$ . Si  $s$  es la longitud del rayo medida desde un punto sobre él, y  $\vec{r}$  es el vector de posición de un punto sobre el rayo, entonces se cumple que

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \text{grad } L = \nabla L,$$

entonces podemos derivar con respecto al parámetro de longitud  $s$  y obtener por regla de la cadena

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla L = \nabla(\nabla L) \frac{d\vec{r}}{ds},$$

entonces, sustituyendo

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{n} \nabla L,$$

en la ecuación anterior tenemos que

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} (\nabla L) \nabla(\nabla L),$$

como

$$\frac{1}{2} \nabla (\nabla L)^2 = (\nabla L) \nabla (\nabla L)$$

entonces utilizando la ecuación eikonal

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{2n} \nabla (\nabla L)^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2,$$

concluimos que

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \frac{2n}{2n} \nabla n = \text{grad } n \quad (3.22)$$

que es la ecuación del rayo hallada anteriormente en la ecuación (3.2).

Hemos probado que la ecuación eikonal, deducida a partir de un límite (macroscópico,  $k_0 \rightarrow \infty$ ) en la formulación ondulatoria de la luz, nos conduce a un resultado equivalente al propuesto por el principio de Fermat.

Debe notarse que la solución de la ecuación (3.2) para  $n = \text{const.}$  fue obtenida en (3.3). Es importante notar que el vector  $\vec{B} - \vec{A}$  de dicha solución coincide con el vector de onda  $\vec{k}$  que define la dirección de propagación de la onda. A partir de la información anterior es natural observar que las características de la ecuación de onda son las trayectorias de los rayos obtenidas en la sección anterior.

### 3.2.3 Principio de Huygens

Considerar que la luz es una onda, es una idea que el físico danés Christiaan Huygens concibió en 1690, cuando gran parte de los físicos de la época inclinaban a apoyar la concepción corpuscular de la luz propuesta por Newton. Tal como se ha mencionado en las páginas anteriores, experimentos en los que se presentaban patrones de interferencia ondulatorios en la luz, llevaron a considerar seriamente la teoría de Huygens.

Huygens concebía a la luz, como una serie de pulsos emitidos desde cada punto de un cuerpo luminoso y propagados por las partículas de éter que según su concepción, era un medio elástico que llenaba todo el espacio. Bajo su concepción, Huygens sostenía que cada punto sobre la propagación

---

<sup>4</sup>La inexistencia del éter fue probada tiempo más tarde por el experimento de Michelson y Morley a principios del siglo XX

de la perturbación, era capaz de originar nuevos pulsos que contribuían, a su vez, con la propagación de la perturbación en tiempos posteriores.

Tal razonamiento, es resumido en el conocido "Principio de Huygens", que puede ser enunciado de la siguiente manera: *Cada punto-sobre-un-frente-de-onda, puede ser concebido como una fuente secundaria de ondas esféricas,<sup>5</sup> las cuales, a su vez, viajan a la velocidad de la luz en el medio, y cuya envolvente en tiempos posteriores define un nuevo frente de onda.*

Es importante destacar que las leyes de la reflexión y refracción, obtenidas a partir del principio de Fermat en la óptica geométrica, pueden ser obtenidas a partir del principio de Huygens satisfactoriamente. Puede consultarse por ejemplo *Introduction to Optics* de Pedrotti y Pedrotti.

## 2.4 Propiedades de las ondas

El hecho de ver a la luz como una onda revolucionó de manera radical la concepción de los fenómenos físicos, es por eso que mencionaremos de manera cualitativa algunas propiedades importantes en el estudio de las ondas.

Los primeros experimentos que requirieron de una explicación ondulatoria de la luz, son aquellos en los que se hacen interactuar dos emisiones de luz monocromática en una pantalla. Es natural preguntarse entonces, qué sucede cuando dos ondas de luz, coexisten en un medio simultáneamente. Sucede que la respuesta a tal cuestionamiento puede ser dada a partir del *Principio de superposición* que establece que el desplazamiento o perturbación total, producido por la onda  $\phi$ , se obtiene de sumar las perturbaciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  correspondientes a la primera y segunda ondas que interactúan en el medio<sup>6</sup>

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Debe notarse que dicho principio debe ser aplicado cuidadosamente, ya que en el caso de la luz, las perturbaciones de las ondas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son de carácter vectorial, para ambos campos eléctrico y magnético, y pueden en principio, no estar orientados de manera tal que puedan sumarse escalarmente, es decir, las perturbaciones electromagnéticas asociadas a  $\varphi_1$  pueden formar un ángulo con respecto a las asociadas a  $\varphi_2$ . Por esta razón debe considerarse la orientación (polarización) de dichas perturbaciones.

<sup>5</sup>Hasta ahora habíamos definido únicamente las ondas planas, sin embargo, es natural concluir que las ondas esféricas son aquellas para las cuales, las superficies de los frentes de onda ( $\phi = \text{constante}$ ), son esferas cuyo centro es la fuente de emisión de luz

<sup>6</sup>El principio puede generalizarse, para describir la interacción de más de dos ondas.



Por el momento es suficiente considerar el caso en que los desplazamientos asociados a los campos eléctrico y magnético, para cada una de las ondas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , son paralelos.

Notemos que si dos ondas electromagnéticas de la misma frecuencia,

$$\varphi_1 = \varphi_{10} e^{i(k_1 x + \omega t + \phi_{10})}, \quad (3.23)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{20} e^{i(k_2 x + \omega t + \phi_{20})} \quad (3.24)$$

*interfieren* o coexisten, provocarán una perturbación total, igual a la suma de ambas. Puede probarse que para tal caso, la onda resultante  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  es una onda de la misma frecuencia, sin embargo, el hecho más interesante, es aquel en el que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  están *en fase*. Si denotamos a  $\alpha_1 = k_1 x + \phi_{10}$  y  $\alpha_2 = k_2 x + \phi_{20}$ , entonces, para que las ondas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  estén en fase, es necesario que la diferencia de fases, para alguna  $x$ ,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \phi_0 = n\lambda$$

con  $\lambda$  la longitud de onda y  $n$  un número entero<sup>7</sup>, entonces la onda resultante será

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (3.25)$$

donde  $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$  en dicho punto. Se dice que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  interfirieron constructivamente, es decir, la onda final, además de tener la misma frecuencia, tiene un amplitud igual a la suma de las amplitudes de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

Por otro lado, si las dos ondas cumplen que para alguna  $x$ ,  $\phi_0 = \left(m + \frac{n}{2}\right)\lambda$  con  $n$  y  $m$  enteros, se cumple que

$$\varphi_0 = (\varphi_{10} - \varphi_{20}), \quad (3.26)$$

caso que es interesante si

$$\varphi_{10} = \varphi_{20}$$

dado que para esta situación se da una interferencia destructiva, lo que significa que la segunda perturbación cancela a la primera, provocando que el efecto neto sobre el medio, sea una perturbación nula, es decir

$$\varphi = 0.$$

<sup>7</sup>en tal caso, la diferencia en la fase entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  será un múltiplo de  $2\pi$ .

análisis unidimensional anterior, puede generalizarse a más dimensiones.

Los efectos de la luz sobre nuestro ojo o cualquier detector de luz, dependen en realidad, de la energía que transmite la onda, es decir de la *Intensidad*<sup>8</sup> de la radiación electromagnética. Dicha cantidad  $I$  se define en general como cantidad de energía emitida por unidad de área.

De la teoría electromagnética, sabemos que la energía asociada al campo eléctrico en el vacío<sup>9</sup>, está dada por la expresión

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2,$$

la energía asociada al campo magnético por

$$U_H = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{H}|^2,$$

donde  $|E| = c|H|$  y que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

cumple que  $U_E = U_H$  y por lo tanto, se satisface que la energía total que transporta la onda estará dada por

$$U = U_E + U_H = 2U_E = 2U_H = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\vec{H}|^2.$$

De acuerdo con lo anterior, puede notarse que la intensidad de la luz será proporcional al cuadrado de la norma del vector eléctrico. De hecho se satisface

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 |\vec{E}| |\vec{H}|,$$

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\vec{E}|^2,$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} |\vec{H}|^2.$$

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

<sup>8</sup>También llamada intensidad radiante.

<sup>9</sup>La energía asociada a los campos en un medio continuo se obtiene al intercambiar  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  por  $\epsilon$  y  $\mu$

Si consideramos las ondas unidimensionales propuestas en (3.23) y (3.24) como campos eléctricos<sup>10</sup> notamos que la intensidad asociada a la onda resultante  $\varphi$  estará dada por la expresión

$$I = I(\varphi) = I(\varphi_1 + \varphi_2).$$

que puede desarrollarse para obtener

$$I = \epsilon_0 c \varphi^2 = \epsilon_0 c (\varphi_1 + \varphi_2)^2 = \epsilon_0 c (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_1 \varphi_2). \quad (3.27)$$

Nótese que en el caso vectorial se debe considerar

$$|(\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2)|^2 = (\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2) \cdot (\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2) = |\vec{\varphi}_1|^2 + |\vec{\varphi}_2|^2 + 2\vec{\varphi}_1 \cdot \vec{\varphi}_2,$$

en lugar de

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^2.$$

Es importante observar también, que debido a que las perturbaciones  $\varphi_j$  son cantidades complejas, debemos dejar claro, que si  $\varphi_j = a_j + i b_j$  entonces

$$(\varphi_j)^2 = (a_j)^2 + (b_j)^2 = \varphi_j \varphi_j^*$$

donde  $\varphi_j^* = a_j - i b_j$  es el complejo conjugado de  $\varphi_j$ .

Dado que  $I_j = \epsilon_0 c \varphi_j^2$  entonces podemos escribir la expresión (3.27) como

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (3.28)$$

donde  $I_{12} = 2\epsilon_0 c \varphi_1 \varphi_2$ .

Desde el punto de vista corpuscular, la intensidad de la superposición de dos rayos de luz, estaría dada por la expresión

$$I = I_1 + I_2,$$

sin embargo el hecho de considerar a la luz como ondas nos lleva a incluir un término de *interferencia*  $I_{12}$  en la expresión anterior, para obtener la ecuación (3.28): Puede hallarse la expresión matemática de  $I_{12}$  en términos de la diferencia de fases  $\phi_0$  entre las ondas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ,

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_0).$$

<sup>10</sup>Pueden considerarse de igual manera como campos magnéticos y se deducen las mismas conclusiones.

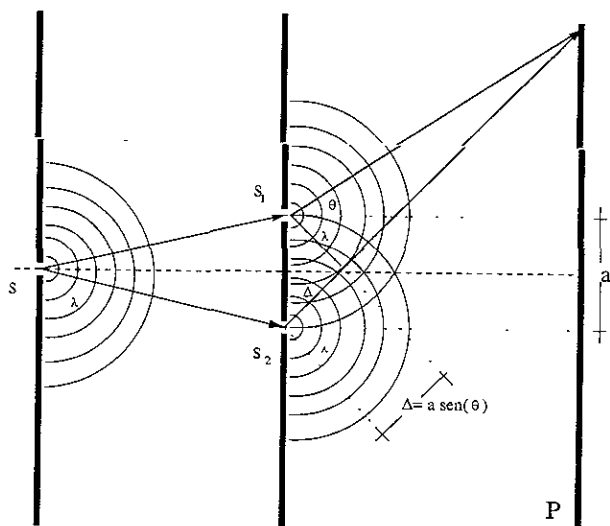


Figura 3.2: Experimento de Young

En el caso particular en que  $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ , se cumple que  $I_1 = I_2 = I_0$ , y dado que  $-1 \leq \cos(\phi_0) \leq 1$  sucede que

$$I_{max} = I_1 + I_2 + I_{12} = 2I_0 + 2I_0 = 4I_0 \quad (3.29)$$

$$I_{min} = 2I_0 - 2I_0 = 0. \quad (3.30)$$

Es decir, existen puntos en los cuales la intensidad de la luz observada es máxima y puntos en donde es totalmente nula. Las conclusiones anteriores pueden generalizarse a más dimensiones y en particular a ondas esféricas.

## 2.5 Experimento de Young

Con la ayuda de las relaciones anteriores, podemos abordar el experimento de Young en términos ondulatorios. De la figura (3.2), la luz emitida desde una fuente monocromática<sup>11</sup> atraviesa las dos rendijas, y por el principio de Huygens, podemos pensar que cada punto  $s_1$ ,  $s_2$  se comporta como una fuente. Dado que la distancia de  $s$  a  $s_1$ ,  $d(s, s_1)$ , es la misma que de  $s$  a  $s_2$ ,  $d(s, s_2)$ , los nuevos puntos de emisión, al igual que la fuente real, emitirán luz

<sup>11</sup>En este experimento es necesario que además la fuente emita luz coherente, es decir que las ondas de luz estén en fase una con otra al ser emitidas por la fuente.

coherente. Obsérvese que si las rendijas de  $s_1$  y  $s_2$ , son del mismo tamaño, las ondas provenientes de  $s_1$  y  $s_2$  tendrán aproximadamente la misma amplitud, e interferirán en la región que se encuentra limitada por la pantalla  $P$  y la superficie en donde se hallan las rendijas. Si deseamos saber de qué manera interfieren las ondas, digamos sobre la pantalla  $P$ , es necesario conocer la diferencia de fases entre ellas al llegar a la misma. Dadas las condiciones del experimento, la diferencia de fase estará dada por la diferencia en el camino óptico  $\Delta$ , es decir, la diferencia de las distancias recorridas por cada una de las ondas para llegar a un punto  $p$  sobre la pantalla

$$d(s_1, p) - d(s_2, p).$$

Dicha diferencia está dada por

$$\Delta = a \operatorname{sen}(\theta),$$

donde  $\theta$  representa el ángulo que forma la línea que une al punto  $p$  en cuestión, sobre la pantalla, con la horizontal sobre la que está la fuente. De las observaciones hechas en la sección anterior puede notarse que

$$\Delta = \phi_0 = a \operatorname{sen}(\theta),$$

por lo que, para los puntos  $p$  sobre la pantalla donde se satisfaga que

$$\phi_0 = a \operatorname{sen}(\theta) = n\lambda$$

se presentará interferencia constructiva, recuérdese la relación (3.25), y la intensidad de la luz en estos puntos estará dada por la relación (3.29)

$$I_{max} = 4I_0.$$

Por otro lado, para los puntos  $p$  sobre la pantalla en los que se cumpla que

$$a \operatorname{sen}(\theta) = \left(m + \frac{n}{2}\right)\lambda$$

ocurrirá interferencia destructiva, en cuyo caso, por (3.30) la intensidad de la luz será

$$I_{min} = 0.$$

En estos términos, la aparición del patrón de interferencia, *i.e.* franjas luminosas y oscuras, es natural. Cabe mencionar que para observar dicho

trón, el tamaño de las rendijas debe ser menor a la longitud de onda de la utilizada. También debe destacarse que la separación  $a$  entre las rendijas, no ser comparable con la longitud de onda de la luz en cuestión.

Para concluir es importante recordar el hecho de que la intensidad de una onda de la forma (3.23), se expresa como

$$I = \varphi^2 = \varphi\varphi^*$$

en el caso vectorial

$$I = \sum_j \varphi_j \varphi_j^*,$$

onde  $\varphi_j$  son las componentes del vector  $\vec{\varphi}$ . Esta última observación será muy importante en las siguientes secciones.

### 3 Hacia la Mecánica Cuántica

El movimiento de un objeto, tal como fue descrito en el capítulo anterior, puede ser caracterizado por las ecuaciones de Hamilton, las cuales, mediante una transformación dada por la ecuación de Hamilton-Jacobi, determinan una trayectoria en la que se moverá. Dicha manera de caracterizar el estado de un objeto, supone que los objetos, sin importar sus dimensiones, están compuestos de partículas corpusculares.

Al final del siglo XIX y principios del siglo XX, diversos experimentos hicieron en duda el hecho de que la materia tuviera un comportamiento típicamente corpuscular, y sugerían, tal como en el caso de la luz, una naturaleza ondulatoria de la materia. En el siguiente párrafo mencionaremos algunos de los hechos históricos que dieron lugar a nuevas teorías acerca de la materia, sin embargo, una reseña detallada puede encontrarse en muchos textos de *mecánica cuántica*<sup>12</sup>.

Uno de los fenómenos que la óptica física u ondulatoria y la mecánica clásica no fueron capaces de explicar, es el de absorción y emisión de radiación atómica. Estudios de espectroscopía revelaban que el hidrógeno, al ser excitado, digamos por una corriente eléctrica en una lámpara, emitía luz de determinadas frecuencias únicamente, es decir el espectro de emisión consistía en líneas discretas bien definidas. El hecho anterior, no podía ser explicado

<sup>12</sup>Véase por ejemplo, Max Born *Atomic Physics*.

en términos de electrodinámica clásica, la cual sugería que la emisión debía presentarse en un espectro continuo. Por otro lado, a partir de un estudio teórico acerca de la emisión de calor de un cuerpo, Planck en 1900, concluyó que la única manera en la que era posible solucionar los problemas de convergencia en la integral de energía, era postulando que la emisión o absorción de energía radiante en la materia no se daba de manera continua, sino en *cuantos de energía*<sup>13</sup>  $E = h\nu$  es decir, la luz (hasta ahora una onda) de cierta frecuencia, era emitida o absorbida en paquetes.

En 1905, Einstein, para explicar el efecto fotoeléctrico<sup>14</sup>, retomó la idea de Planck acerca de la cuantización de la luz, sin embargo, él fue más lejos aún, postuló que la luz consistía de **corpúsculos** de energía  $h\nu$  llamados *fotones*, que interactuaban con la materia de manera mecánica.

Ambas hipótesis parecían atentarse contra las leyes de la física de ese entonces, sin embargo, Niels Bohr en 1913, fue capaz de dar explicación a las líneas de emisión del hidrógeno sustentando sus ideas en el hecho de que la energía estaba cuantizada.

Hasta ahora, hemos mencionado brevemente los hechos que llevaron a los físicos de principios del siglo XX, a concebir que el intercambio de energía entre la luz y los átomos se daba en *cuantos*, sin embargo, la propuesta de Einstein de concebir a la luz como partículas corpusculares que llamamos *fotones*, retomó mucha fuerza con los experimentos de Compton en 1922. Compton hizo incidir radiación electromagnética sobre parafina y descubrió que los fotones incidentes chocaban con los electrones de ésta, y que el ángulo de deflexión de los mismos, podía ser explicado con las ecuaciones de colisiones elásticas entre dos partículas, es decir, en este experimento, quedaba claro que la luz se comportaba como un corpúsculo.

El dilema de la dualidad de la naturaleza de la luz, fue intensificado en 1925, cuando de Broglie impulsó la idea de que aquella dualidad *onda-partícula* presente en la luz, podía observarse de igual manera en la materia. Proponía que una partícula de materia tendría una onda asociada, al igual que un *cuanto* de luz tiene una onda de luz asociada. La relación entre ambas concepciones estaría dada por  $E = h\nu$ . De Broglie propuso que el momento asociado a una partícula estaría dado por la relación  $p = h/\lambda$ . Las relaciones anteriores serán justificadas en la siguiente sección.

<sup>13</sup> $h$  = la constante de Planck  $6.62 \times 10^{27} \text{ erg seg}$  y  $\nu$  = la frecuencia

<sup>14</sup>El efecto fotoeléctrico se da al detectar electrones emitidos de la superficie de un metal alcalino, al hacer incidir luz de cierta frecuencia sobre el mismo.

Cabe mencionar que asociar el valor de la energía  $E$  y el del momento  $p$ , que corresponden a propiedades de una masa *puntual*, con las cantidades  $\nu$  y  $\lambda$  respectivamente, que se asocian a una onda cuyas dimensiones se extienden todo el espacio, representaba una contradicción muy fuerte. Al final de capítulo trataremos de mostrar la solución sugerida por la electrodinámica cuántica.

Las ideas de De Broglie fueron confirmadas por experimentos realizados por Davisson y Germer en 1927, los cuales obtuvieron patrones de difracción y de interferencia con rayos de electrones. Muchos más se dieron a la búsqueda de experimentos que dieran evidencia de la naturaleza ondulatoria de la materia. Thomson y Rupp, entre otros, propusieron una gama de experimentos para el estudio de la estructura de algunos cristales y confirmaron que la hipótesis de De Broglie, con respecto al valor de la longitud de onda asociada al haz de electrones, coincidía con los resultados en los patrones de interferencia obtenidos.

El estudio de la difracción e interferencia electrónica, avanzó tecnológicamente de manera decisiva después de ser confirmada su existencia. De hecho, puede probarse que la longitud de onda de un haz de electrones, producido en un tubo de rayos catódicos, es fácilmente controlable en términos del potencial eléctrico utilizado en el cátodo. Más aún, olvidando correcciones relativistas, la expresión de  $\lambda_e$  en términos del potencial eléctrico  $V$ , es  $\lambda_e = (\sqrt{150}/V)\text{Å}^{15}$ . Con tal expresión, es posible construir lentes y microscopios electrónicos con longitudes de onda tales, que superan el poder de resolución de los aparatos ópticos equivalentes. Algunos resultados interesantes son, por ejemplo, el hecho de que haces moleculares de hidrógeno  $H_2$  y Helio  $He$  presentan fenómenos de difracción al ser reflejados por superficies de cristales. Las hipótesis de De Broglie se han confirmado en este tipo de experimentos también.

En los párrafos anteriores hemos finalmente introducido acontecimientos históricos que, de manera experimental, dieron lugar al estudio de la mecánica ondulatoria o mecánica cuántica. En la siguiente sección mostraremos la manera de relacionar entonces, la formulación clásica de la mecánica con sus propiedades ondulatorias de la luz a través del estudio de la óptica que desarrollamos al inicio del capítulo presente.

<sup>15</sup>Si  $\lambda = h/p = h/mv$ , clásicamente, entonces si la velocidad del electrón bajo la acción de un potencial eléctrico  $V$  es tal que  $1/2(mu^2) = eV$  puede concluirse que  $\lambda = (\sqrt{150}/V)\text{Å}$ .



### 3.4 Ondas Mecánicas

Consideremos la Ecuación de *Hamilton-Jacobi* para el caso en el que el hamiltoniano  $H = H_0$  es independiente del tiempo, es decir, consideremos un sistema en el que la energía se conserva.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0,$$

podemos separar variables e integrar directamente con respecto a  $t$  y obtener que

$$S = -H_0 t + W(y, S_y) = W(y, S_y) - Et$$

donde  $H_0 = E$  es la energía del sistema.

Si ahora consideramos el caso de un sistema de una partícula, en el espacio donde

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V = E$$

con

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial y_i} = \frac{\partial W}{\partial y_i}$$

entonces

$$|\vec{p}|^2 = |\text{grad}W|^2 = |\nabla W|^2$$

por lo tanto

$$\frac{|\nabla W|^2}{2m} + V = E,$$

si recordamos la definición de energía cinética  $T = E - V$ , entonces obtenemos que

$$|\nabla W|^2 = 2m(E - V) = 2mT \quad (3.31)$$

tal resultado es similar a la ecuación eikonal obtenida en la sección anterior,

$$|\nabla L|^2 = n^2.$$

Recordemos que la ecuación eikonal era equivalente al principio de Fermat, que consistía en minimizar la integral del índice de refracción del medio

$$\delta \left( \int n dl \right) = 0$$

buscamos una onda mecánica asociada a la función  $W$ , entonces el papel  $n$  en la integral, lo tomaría  $\sqrt{2mT}$ . Es decir, la ecuación (3.31) sería equivalente a un principio de minimización dado por la expresión

$$\delta \left( \int \sqrt{2mT} ds \right) = 0. \quad (3.32)$$

alicemos con cuidado qué significa minimizar la integral anterior.

Una manera alternativa de formular el principio de la acción estacionaria Hamilton, para sistemas conservativos, es el llamado *Principio de Maupertuis*.

Es claro que, como en un sistema conservativo, el Hamiltoniano  $H_0 = E$  una constante de movimiento, minimizar la integral del Lagrangiano,

$$\left( \int L(t, y, p) dt \right) = \delta \left( \int (py' - H_0) dt \right) = \delta \left( \int py' dt \right) - Et = 0 \quad (3.33)$$

equivalente a minimizar

$$\delta \left( \int py' dt \right) = 0$$

que el término constante  $E$  puede ser directamente integrado. En la sección 2.5 se mostró que

$$\frac{\partial L}{\partial y'} y' = py' = 2T$$

de  $T$  es la energía cinética del sistema. El principio de Hamilton toma la forma

$$\delta \left( \int 2T dt \right) = 0$$

es equivalente a

$$\delta \left( \int T dt \right) = 0. \quad (3.34)$$

es el llamado *principio de Maupertuis*. Dicho principio establece que entre todas las trayectorias que unen a dos puntos, el sistema se moverá sobre aquella que minimice el tiempo, de tal manera que la energía se conserve.

Notemos que

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv \frac{ds}{dt},$$

por otro lado

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{m^2v^2}{2m}$$

de donde

$$p = mv = \sqrt{2mT}, \quad (3.33)$$

por lo que podemos escribir (3.34) en términos de

$$T = \frac{1}{2}mv \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{2mT} \frac{ds}{dt}$$

como

$$\delta \left( \int \frac{1}{2}\sqrt{2mT} \frac{ds}{dt} dt \right) = 0$$

que es equivalente al problema de minimizar la integral (3.32).

A partir de lo anterior, puede pensarse en la analogía entre la óptica y formulación variacional de Hamilton de la siguiente manera.

El principio de Fermat, tiene su contraparte dada por el principio de Hamilton para sistemas conservativos <sup>16</sup>, en donde el índice de refracción corresponde al equivalente de la energía cinética del sistema.

Dado que la ecuación eikonal nos proporcionó el vínculo anterior, es natural preguntarse si existe una onda, para la cual, podamos identificar los elementos estudiados para la óptica ondulatoria, con los elementos mecánicos. Si avanzamos en dicha dirección, podemos suponer que el camino óptico  $L$  es relacionado con la función  $W$  de tal forma que la fase de la onda óptica,

$$k_0(L - ct)$$

sea proporcional a la acción clásica

$$S = W - Et.$$

Si relacionamos término a término, podemos establecer que

$$W \sim L,$$

---

<sup>16</sup>Principio de Maupertuis

$$E \sim c.$$

recordamos el valor de  $k_0$  podemos establecer una relación más precisa de la forma que

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow k_0 c = 2\pi\nu$$

de donde

$$E = h\nu, \quad (3.36)$$

que establece que la energía del sistema debe ser proporcional <sup>17</sup> a la frecuencia de la onda.

De existir una onda asociada a la ecuación eikonal mecánica, por analogía (3.18), tendría la forma

$$\psi = e^{A(r)} e^{\frac{i}{\hbar}(W-Et)} = e^{A(r)} e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad (3.37)$$

donde hemos introducido el parámetro  $\hbar$  que coincide con el valor de la constante de Planck  $h$  salvo un factor de  $2\pi$ ,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

La existencia de esta onda mecánica, y su análisis fue desarrollado por Richard Feynman a mediados del siglo XX y será el eje del capítulo siguiente.

Con la relación anterior entre la óptica y la mecánica, podemos ahora ir más lejos. Dado que  $S$  es la fase asociada a la onda mecánica propuesta, los frentes de onda están definidos como  $S = \text{constante}$  a partir de los cuales podemos calcular su velocidad de propagación. Por la regla de la cadena, la derivada total de  $S$  con respecto al tiempo, está dada por

$$\frac{dS}{dt} = \vec{\nabla}S \cdot \frac{d\vec{y}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (3.38)$$

se cumple justamente que nos movemos sobre un frente de onda, se cumple que  $\frac{dS}{dt} = 0$ . Si recordamos que el vector normal unitario a las superficies de nivel está dado por

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}S}{|\vec{\nabla}S|},$$

<sup>17</sup>Más adelante se justificará el hecho de que la constante  $h$ , es la constante de Planck

la velocidad en la dirección normal de un frente de onda  $u(t)$  estará dada por

$$\frac{ds}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt},$$

de donde (3.38) toma la forma

$$|\vec{\nabla}S| \frac{ds}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

y por lo tanto

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial t}}{|\vec{\nabla}S|},$$

dado que  $S(y, \alpha_i, t) = W(y, \alpha_i) - Et$ , entonces

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\vec{\nabla}W|}. \quad (3.39)$$

Si recordamos las relaciones (3.35) y (3.31), podemos concluir que la velocidad de propagación de los frentes de onda mecánicos es

$$u(t) = \frac{E}{p} = \frac{E}{\sqrt{2mT}}, \quad (3.40)$$

que por la relación (3.36) nos conduce a

$$u(t) = \frac{h\nu}{p}.$$

Observemos que la longitud de onda de dicha perturbación estará relacionada con la velocidad de propagación de tal forma que

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h\nu}{p} \frac{1}{\nu} = \frac{h}{p}. \quad (3.41)$$

La relación anterior, fue la propuesta de De Broglie en 1925.

Obsérvese que, tal como fue expuesto en la sección anterior, el hecho de que exista una onda mecánica, implica directamente la posibilidad de observar fenómenos de interferencia en rayos de materia, para los cuales las condiciones experimentales, tal como lo sugiere el experimento de Young, deben satisfacer que la longitud de onda de la oscilación mecánica, sea comparable con las dimensiones del experimento. Concluiremos ésta sección haciendo

una observación interesante. Al principio del capítulo se estudiaron, a partir del principio de Fermat, los rayos a través de los cuales se observa que viaja la luz. Más tarde, con base en la formulación ondulatoria de la óptica, mostramos que los rayos de luz son precisamente las curvas características asociadas a la ecuación de onda. En el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, es posible mostrar que las curvas características asociadas a la ecuación de Hamilton-Jacobi son precisamente las trayectorias que dan solución a las ecuaciones de Hamilton<sup>18</sup>, es decir, las trayectorias clásicas, equivalentes a las ecuaciones de Newton, representan el equivalente de los rayos de luz, si pensamos a la ecuación de Hamilton-Jacobi como la ecuación que describe la evolución en el tiempo de la superficie (o frente de onda) de Hamilton-Jacobi.

En los términos anteriores, podemos comenzar la siguiente sección estudiando las implicaciones matemáticas que surgen al aceptar la naturaleza ondulatoria de la luz.

## 5 Ecuación de Schrödinger

De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell mostradas en este capítulo, la luz obedece la ecuación de onda

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.42)$$

Consideremos soluciones de la forma

$$\varphi = e^{A(r) + ik_0(L(r) - ct)},$$

donde  $L(r)$  es el camino óptico, y tomamos el límite **WKB** obtuvimos la ecuación diferencial. Sin embargo, si procedemos directamente a derivar la solución con respecto al tiempo, obtenemos que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (-ik_0 c)^2 \varphi = -k_0^2 c^2 \varphi,$$

ahora recordemos que el número de onda

$$k = k_0 n = k_0 \frac{c}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

<sup>18</sup>Véase por ejemplo, Evans. *Partial Differential Equations*

de donde

$$k_0 = \frac{2\pi\nu}{c\lambda},$$

y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2\nu^2}{\lambda^2} \varphi$$

que nos conduce a reescribir (3.42) como una ecuación diferencial independiente del tiempo

$$\nabla^2 \varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \varphi = 0 \quad (3.43)$$

donde  $\varphi$  representa la amplitud de la onda óptica.

Dada la equivalencia entre las ondas ópticas y mecánicas descrita en el mismo capítulo, debe existir una cantidad mecánica, que llamaremos la función de onda

$$\psi = \varphi_{mec},$$

que satisfara una ecuación análoga

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0 \quad (3.44)$$

que al considerar el valor de la longitud de onda mecánica (DeBroglie)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

y el valor del momento<sup>19</sup>

$$p = mv = \sqrt{2mT} = \sqrt{2m(E - V)}$$

obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2} = \frac{2m(E - V)}{h^2}$$

que convierte la ecuación (3.44) en

$$\nabla^2 \psi + \frac{8m\pi^2}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (3.45)$$

<sup>19</sup>Principio de Maupertuis.

ahora consideramos  $\hbar = h/2\pi$  entonces podemos concluir que la función de onda, satisfara la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \quad (3.46)$$

esta es la llamada ecuación de Schrödinger. Esta ecuación es la base de la mecánica ondulatoria.

Tal como fue obtenida la ecuación anterior, la función de onda  $\psi$  representa la propagación *espacial* de la superficie de Hamilton-Jacobi. Lo que quiere que la mecánica clásica es a la mecánica ondulatoria de Schrödinger, que la óptica geométrica es a la óptica ondulatoria de Huygens. Tales relaciones dependen directamente de las dimensiones la longitud<sup>20</sup> de onda con respecto a los posibles cambios en el medio.

Para obtener la ecuación de evolución de la función de onda  $\psi$  a través del tiempo, recurriremos a un paso que se justifica en la dinámica cuántica y que consiste en reemplazar la energía  $E$  del sistema por el operador  $i\hbar \partial/\partial t$  en la ecuación (3.46), de tal forma que,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi. \quad (3.47)$$

Ahora verifiquemos la hipótesis de que la ecuación anterior, efectivamente nos conduce a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el límite en que  $h \rightarrow 0$ . Tal como lo hicimos en el capítulo tercero, buscaremos soluciones del tipo<sup>21</sup>

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S(y_i,t)}$$

Calcularemos las derivadas necesarias para sustituir sus valores en la ecuación (3.47),

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right]e^{\frac{i}{\hbar}S(y_i,t)},$$

<sup>20</sup>en el caso mecánico  $\lambda = h/p$ .

<sup>21</sup>En el caso cartesiano,  $y_i = x, y, z$



$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} = \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial y_i} \right] e^{\frac{i}{\hbar} S(y_i, t)},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_i^2} = \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial y_i^2} - \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 \right] e^{\frac{i}{\hbar} S(y_i, t)}.$$

Dado que

$$\nabla^2 \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_i^2} = \Delta \psi,$$

podemos sustituir en (3.47), para obtener

$$-\frac{\partial S}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} S(y_i, t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S - \frac{1}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \right] e^{\frac{i}{\hbar} S(y_i, t)} + V e^{\frac{i}{\hbar} S(y_i, t)},$$

donde

$$(\nabla S)^2 = \sum_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right)^2,$$

de lo anterior

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S - \frac{1}{\hbar^2} (\nabla S)^2 \right] + V$$

y por lo tanto

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S. \quad (3.48)$$

Si ahora tomamos el límite cuando  $\hbar \rightarrow 0$  que es equivalente a  $h \rightarrow 0$ , el tercer término de (3.48) tiende a cero, y por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V = 0,$$

que es precisamente la ecuación de Hamilton-Jacobi. El hecho anterior, implica que la ecuación de Schrödinger, contiene a la ecuación Hamilton-Jacobi, que describe el movimiento de las partículas desde el punto de vista de la mecánica clásica, en el límite en que  $\hbar$  es despreciable, es decir, para sistemas macroscópicos.

De hecho puede establecerse un principio de correspondencia entre la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de Schrödinger de la siguiente manera. Pensemos en una partícula puntual bajo la acción de un potencial

$x, y, z, t$ ) en coordenadas Cartesianas, entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada, tal como fue definida al final del capítulo segundo, estará dada por la expresión

$$H\left(t, y_i, \frac{\partial S}{\partial y_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.49)$$

podemos escribir como

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.50)$$

do que

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z},$$

un sistema conservativo.

Ahora pensemos en la ecuación de Schrödinger,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (3.51)$$

claro que si consideramos la posibilidad de escribir al momento  $\vec{p}$  de tal ma que

$$(p_x)^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

podemos ir de la ecuación de Schrödinger a la de Hamilton-Jacobi estableciendo que

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t},$$

$$p_i \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Las relaciones anteriores definen el llamado principio de correspondencia entre la mecánica clásica y la mecánica ondulatoria <sup>22</sup>.

---

La concepción original de dicho principio se debe a Niels Bohr. 1923.

### 3.6 La función de onda $\psi$

Concluiremos este capítulo mencionando la manera en que Max Born, concilió la dualidad *onda-partícula* de la materia y la luz, y el significado, que hasta estos días, se le ha dado a la función de onda.

A lo largo de este capítulo se han presentado argumentos, bajo los cuales se ha dado evidencia de que la luz y la materia, se comportan, en algunas situaciones, como ondas y en algunas otras como partículas. De lo anterior surge una contradicción natural al tratar de concebir a un ente físico como algo localizado en una región muy definida en el espacio (partícula), o algo cuyas dimensiones ocupan todo el espacio (onda). Schrödinger intentó reconciliar tal contradicción, interpretando una masa puntual como un paquete de ondas. Sin embargo, desde el punto de vista conceptual, modelar una colisión entre dos electrones, en términos de paquetes de onda, parece no ser algo natural. Born, por otro lado, partió del hecho de que la manera en que se desarrolla un evento está determinada por las leyes de la probabilidad, y asignó entonces a la función de onda, un carácter probabilístico. De acuerdo con su teoría, un proceso mecánico tiene asociado un proceso ondulatorio que obedece la ecuación de Schrödinger, cuyo significado, define la probabilidad con la que evolucionará el proceso mecánico en una dirección u otra. Tal concepción surgió originalmente de los experimentos de dispersión, en los cuales dicha interpretación predijo muchos de los resultados obtenidos en la práctica.

Unir el concepto corpuscular y ondulatorio en un formalismo teórico parece, a primera vista imposible. De hecho sugiere olvidar de alguna manera el sentido común. La manera en que se unificaron ambas concepciones fue a través de la probabilidad, tal como lo sugieren las ideas de Born. Efectivamente, concebir que un ente físico es simultáneamente un cuerpo y una onda resulta difícil debido a que nuestra concepción de un fenómeno se restringe a nuestras capacidades de observación cotidianas. La mecánica clásica, está básicamente fundada sobre observaciones de este tipo, y por lo mismo, no permite una concepción simultánea de un evento en términos ondulatorios o corpusculares. A partir de lo dicho, interpretamos un fenómeno en términos de alguna de ambas concepciones, a pesar de que a nivel atómico, la mecánica clásica falla de manera rotunda en la descripción de un sistema. Es por eso que, aunque intuitivamente ambas formas de interpretar un fenómeno sean

dependientes, deben entenderse como dos descripciones complementarias de un mismo proceso. De hecho debe pensarse que las limitaciones en las condiciones de un proceso, definen la frontera entre una concepción y la otra.

Una consecuencia inmediata de suponer tal simultaneidad, implica que no podemos distinguir de manera clara, si nos referimos a un corpúsculo o a una onda en un proceso dado. De hecho, en estos términos, puede mostrarse que es posible determinar simultáneamente, de manera exacta, el valor de dos variables conjugadas como el momento y la posición. Dicho acontecimiento es llamado el *principio de incertidumbre de Heisenberg* y es resumido en las igualdades siguientes,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2},$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2},$$

donde el símbolo  $\Delta$  quiere decir la incertidumbre en la medición de la variable en cuestión.

Resumiendo lo anterior, la interpretación de la función de onda  $\psi$  más aceptada, es la formulada por la escuela de Copenhage, a la que pertenecen Max Born, Niels Bohr y Heisenberg. En dicho esquema,  $|\psi^2|$  representa la densidad de probabilidad de que una partícula o conjunto de ellas, se encuentre en una región del espacio durante una medición.



# Capítulo 4

## Las integrales de camino

En este capítulo discutiremos los conceptos expuestos en el libro de Richard Feynman, *Q.E.D*, Electrodinámica Cuántica, acerca del comportamiento de las partículas. Con ayuda de los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores, trataremos de poner en perspectiva la formulación de Feynman de las integrales de camino y su equivalencia con la ecuación de Schrödinger.

### 1 Descripción de la función de onda

Como fue señalado en el capítulo anterior, la existencia de una dualidad *onda-partícula* en la materia y en la luz, provocó problemas serios en la concepción de la física, sin embargo, la electrodinámica cuántica fue formulada para conciliar dicho hecho. Con la premisa anterior, el análisis siguiente debe ser interpretado de manera equivalente para ambas, luz y materia<sup>1</sup>.

Comencemos nuestro análisis recordando que, a partir de los hechos experimentales, asociamos al valor del cuadrado de la función o *amplitud* de probabilidad,  $|\psi|^2$ , la probabilidad de que un evento suceda. Si pensamos por ejemplo en el evento de que una partícula *libre* llegue de un punto  $x_a$  a un punto  $x_b$  en el espacio, y en efecto, observamos que ésta llega a su destino, entonces la probabilidad de que el evento suceda sea 1, es decir

$$|\psi_{ab}|^2 = \psi_{ab}\psi_{ab}^* = 1.$$

---

<sup>1</sup>Fotones y electrones, por ejemplo.

Veamos lo que esto significa<sup>2</sup>. Recordemos que podemos concebir a un fotón o a un electrón, como una perturbación de la forma

$$\phi = e^{A(\tau)} e^{ik_0(L-ct)} = \phi_0 e^{ik_0(L-ct)} \quad (4.1)$$

o

$$\psi = e^{A(\tau)} e^{\frac{i}{\hbar}(W-Et)} = e^{A(\tau)} e^{\frac{i}{\hbar}S} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}S}. \quad (4.2)$$

Para el siguiente análisis, utilizaremos la segunda expresión ondulatoria, y supondremos que los resultados pueden también, interpretarse en términos ópticos.

Entonces,  $\psi$  tendrá la forma

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}S}. \quad (4.3)$$

donde  $\psi_0$  es la amplitud de la onda, y la integral de la acción clásica  $S$  la fase. En el caso de una partícula libre, la fase estará dada como la integral del lagrangiano, que a su vez puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

por lo que podemos integrar a la acción, por partes, para obtener

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) dt, \\ &= \frac{1}{2}m x \left(\frac{dx}{dt}\right) \Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{1}{2}m \int_{t_a}^{t_b} x \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

dado que se trata de una partícula libre, su aceleración  $d^2x/dt^2$  es igual a cero, por lo que el segundo término de la última ecuación es igual a cero. Si denotamos a  $x(t_a) = x_a$  y  $x(t_b) = x_b$ , entonces, dado que  $d^2x/dt^2 = 0$ , la velocidad de la partícula en cuestión es constante, es decir, en particular

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a},$$

<sup>2</sup>El hecho de que la información física la contenga el cuadrado de la amplitud de onda  $|\psi|^2$ , y no  $\psi$ , está directamente relacionado con su equivalente óptico, en el cual la intensidad y la energía de la onda son proporcionales al cuadrado de  $\phi$ ,  $|\phi|^2$ .

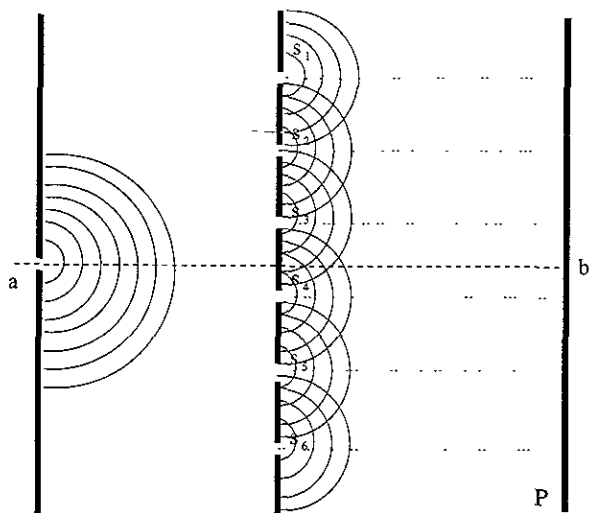


Figura 4.1: Experimento con 6 rendijas

por lo que

$$S = \frac{1}{2} m \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}, \quad (4.4)$$

de la ecuación anterior, la función  $\psi$  asociada a la partícula libre estará dada por

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}}. \quad (4.5)$$

Veamos ahora la manera de utilizar esta función en nuestro marco probabilístico, recurriendo a los conceptos ópticos del capítulo anterior.

## 4.2 Principio de superposición

Comenzaremos por retomar los conceptos que se desarrollaron en el capítulo tercero acerca de la superposición de ondas.

Recordamos, en el experimento de Young, que para entender el patrón de interferencia sobre la pantalla receptora, es necesario superponer las dos ondas que, por el principio de Huygens, son emitidas desde cada una de las rendijas  $s_1$  y  $s_2$ . El término de interferencia, resultaba de elevar al cuadrado la amplitud resultante.



Supongamos ahora que realizamos el mismo experimento con más de dos rendijas, digamos con 6. Es claro que si quisieramos saber la amplitud de la perturbación resultante en cualquier punto de la pantalla, tendríamos que sumar las aportaciones hechas por cada una de las ondas ( $\phi_i$  con  $i = 1, \dots, 6$ ), emitidas desde cada una de las rendijas  $s_i$ . Notamos en el capítulo anterior que la perturbación en el punto  $x$ , depende fundamentalmente de la *fase* con que llegan las ondas  $\phi_i$  al punto en cuestión sobre  $P$ . Del mismo análisis concluimos que la fase, en el caso óptico, dependía del camino óptico recorrido para llegar desde el punto de emisión hasta  $x$  sobre la pantalla. De igual manera, la fase en el caso mecánico, depende de la acción.

Si ponemos especial atención a un punto  $x_b$  sobre  $P$ , y recordamos el significado probabilístico de la función de onda  $\psi$  en (4.2), podemos afirmar que la *amplitud* de probabilidad para que una partícula llegue desde el punto  $x_a$  hasta  $x_b$  estará dada por

$$\psi = \sum_{i=1}^6 \phi_i,$$

y por lo tanto si la partícula llega a su destino, debe cumplirse que

$$\psi^2 = \psi\psi^* = \left( \sum_{i=1}^6 \phi_i \right) \left( \sum_{i=1}^6 \phi_i^* \right) = 1.$$

Nótese que implícitamente, hemos asignado una función de onda  $\phi_i$  a cada posible camino, sobre el cual la partícula puede viajar desde  $x_a$  hasta  $x_b$ . Al sumar las amplitudes de onda, hemos calculado la amplitud de onda resultante, a partir de la cual podemos obtener información experimental. Entonces, la probabilidad de que la partícula complete su viaje se obtiene calculando el valor de su módulo al cuadrado.

### 4.3 Propuesta de Feynman

Si repetimos el experimento anterior (figura 4.1), pero ahora agregamos una pantalla intermedia  $P'$ , antes de la pantalla receptora, con un número  $n$  de rendijas, el cálculo de la amplitud de onda  $\psi_{ba}$  se realizaría sumando las contribuciones de cada una de las posibles trayectorias (es decir, sumando las funciones de onda asociadas a cada una de ellas). Para tal efecto, (véase la figura 4.2)

$$\psi_{ba} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^6 \psi_{ji}.$$

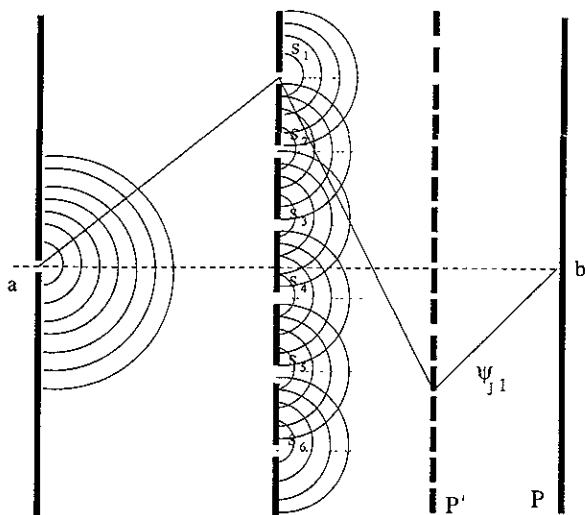


Figura 4.2: Experimento con dos pantallas intermedias y  $6n$  rendijas

En su formulación de la mecánica cuántica, Richard Feynman propone que la manera en la que debe calcularse la amplitud de onda (probabilística) de que un evento tenga lugar, por ejemplo, que una partícula libre llegue de un punto a otro en el espacio, es sumando las contribuciones de todas las posibles trayectorias. A cada una de éstas, como se vio antes, se le asigna una función de onda de la forma<sup>3</sup>

$$\psi = \kappa e^{\frac{i}{\hbar} S(x(t))},$$

donde  $\psi$  representa la amplitud de probabilidad de que la partícula se mueva a través de  $x(t)$ .

Feynman, en base a los resultados mostrados en los capítulos anteriores, asigna a todos los caminos, una amplitud constante de normalización  $\kappa(x(t))$ , tal como se mostró en los experimentos ópticos, afirma que la contribución de cada función de onda depende totalmente de la fase (la acción clásica  $S(x(t))$ ) asociada a cada una de ellas. Si llamamos a la amplitud de onda  $\psi(b, a)$ , entonces la probabilidad de ir de un punto  $a$  a un punto  $b$  estará

<sup>3</sup> $\kappa$  es una constante que se escoge de manera adecuada para que el valor de  $|\psi|^2$  esté normalizado desde el punto de vista probabilístico

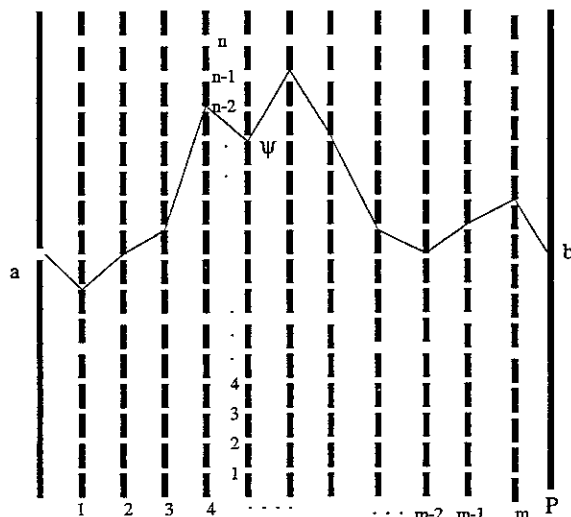


Figura 4.3: Experimento con  $m \times n$  rendijas

dada por  $P(b, a) = |K(b, a)|^2$  con

$$K(b, a) = \sum_{(b, a)} \psi[x(t)]$$

donde  $\sum_{(b, a)}$  significa suma sobre todas las posibles trayectorias que unen  $a$  con  $b$ .

En tal concepción, definir qué significa *sumar* las contribuciones de todas las posibles trayectorias, podría hacerse de la siguiente manera. Si repitiéramos el experimento de Young, con un número grande  $m$  de pantallas intermedias (como en la figura 4.3), y cada una de ellas tuviera a su vez rendijas, podríamos aproximar el valor de  $K(b, a)$  con la expresión

$$K(b, a) \sim \sum_{i_1}^n \sum_{i_2}^n \sum_{i_3}^n \cdots \sum_{i_m}^n \psi_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_m}.$$

Ciertamente, para mejorar nuestra aproximación, sería necesario hacer tender a cero la distancia entre las pantallas intermedias (lo cual implica naturalmente que  $m \rightarrow \infty$ ) e incrementar el número de rendijas en cada una de ellas.

Para hacer una deducción consistente con las ideas de Feynman, recurriremos a la construcción que éste propone. Obsérvese la figura 4.4.

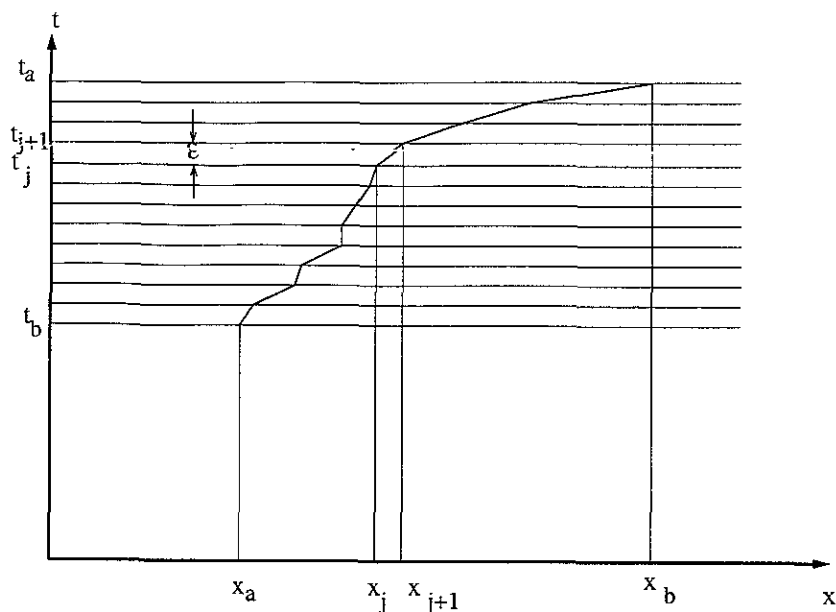


Figura 4.4: Suma sobre todas las trayectorias

Primero procedemos a realizar una partición del intervalo  $[t_a, t_b]$  en subintervalos de igual longitud  $\epsilon$ , es decir, para todo  $t_i, t_{i+1}$  con  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ , cumple que  $t_{i+1} - t_i = \epsilon$ . Fijando los extremos de la partición  $t_0 = t_a$  y  $t_N = t_b$ . A cada  $t_i$  corresponde un valor  $x_i$ , donde en los extremos se satisface que  $x_0 = x_a$  y  $x_N = x_b$ . Si tomamos por ejemplo, para cada tiempo  $t_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , un punto especial  $x_i$ , entonces podemos generar una trayectoria si unimos todos los puntos que seleccionamos de la forma  $(t_i, x_i)$  por medio de líneas rectas.

Dado que buscamos sumar las aportaciones de todas las posibles trayectorias, podemos construir una integral múltiple que sume sobre todos los valores de  $x_i$  para toda  $i$ . Del proceso anterior, podemos aproximar el valor de la amplitud como,

$$K(b, a) \sim \int \int \int \cdots \int \psi[x(t)] dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{N-1}$$

Notese que no se integra sobre  $x_0$  ni sobre  $x_N$  debido a que los puntos  $x_a$  y  $x_b$  son fijos. Es importante recalcar que si queremos incluir las contribuciones de todos los caminos, debemos integrar desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ . Para generar

cualquier trayectoria  $x(t)$  y aproximar de manera más precisa el valor de  $K(b, a)$ , tendríamos que refinar la partición, es decir, hacer que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Tal como lo mencionamos anteriormente

$$\psi[x(t)] = \kappa e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$$

donde  $\kappa$  es un factor de normalización. Por lo que podemos escribir de manera intuitiva que

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \int \cdots \int \kappa e^{\frac{i}{\hbar} S} dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{N-1} \quad (4.6)$$

Es importante notar que este tipo de integrales pueden implicar complicaciones matemáticas serias, sin embargo, si suponemos válida la manera de construir nuestra amplitud de probabilidad, podemos observar algunos resultados interesantes. Antes de abordarlos, es importante mencionar que la notación que se utiliza para escribir las *Integrales de Feynman* o *Integrales de Camino*, es

$$K(b, a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S} \mathcal{D} x(t) \quad (4.7)$$

donde

$$\mathcal{D} x(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \kappa \prod_{i=1}^{N-1} dx_i$$

define la *medida* sobre todas las trayectorias.

Construyamos ahora la integral de Feynman para la partícula libre.

Si recordamos la expresión de la acción que calculamos al inicio de capítulo

$$S = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a}$$

y la forma en que expresamos la amplitud de onda de cada trayectoria

$$\psi = \psi_0 \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right]$$

podemos notar que la integral (4.6) toma la forma

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \int \cdots \int \kappa \exp \left[ \frac{im}{2\hbar \epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{N-1} \quad (4.8)$$

do que  $t_i - t_{i-1} = \epsilon$ . Observemos que la integral

$$K(x_1, x_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1 e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon} x_1^2} dx_1 = \kappa_1 \left( \frac{2 i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

do que experimentalmente observamos que al desplazarse la partícula de  $x_b$ , ésta tuvo que pasar por algún punto sobre  $x_1$ , entonces deseamos que la amplitud de probabilidad asociada  $K(x_1, x_a)$  tenga el valor de 1. Por tanto debemos escoger un factor de normalización

$$\kappa_1 = \left( \frac{2 i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sucede que dicho parámetro puede utilizarse a lo largo de todas las interacciones sobre cada  $x_i$ , por lo que el factor  $\kappa$  en (4.8) resulta ser

$$\kappa = \prod_{i=1}^{N-1} \left( \frac{2 i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{2 i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-\frac{N-2}{2}}$$

ora pongamos especial atención a las funciones que buscamos integrar en (4.8). Dado que la integral de una gaussiana, corresponde a una gaussiana nuevamente, podemos intentar dar una expresión para  $K(b, a)$ . Nótese que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1^2 \exp \left[ \frac{m}{2\hbar i \epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right] dx_1 = \left( \frac{2 i\pi\hbar 2\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar (2\epsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right] \quad (4.9)$$

multiplicamos dicho resultado por

$$\left( \frac{2 i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar \epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right]$$

integrando sobre  $x_2$ , obtenemos una expresión igual a (4.9) excepto porque  $(x_2 - x_0)$  es sustituido por  $(x_3 - x_0)$  y el valor  $2\epsilon$  por  $3\epsilon$ . Por tanto obtenemos

$$\left( \frac{2 i\pi\hbar 3\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar (3\epsilon)} (x_3 - x_0)^2 \right].$$

Repitiendo el procedimiento anterior  $N - 1$  veces obtenemos

$$\left(\frac{2i\pi\hbar N\epsilon}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(N\epsilon)}(x_N - x_0)^2\right] \quad (4.1)$$

y como  $t_N - t_0 = N\epsilon$  Podemos concluir que (4.6) tomará la forma

$$K(b, a) = \left(\frac{2i\pi\hbar 2\epsilon}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[i\frac{m}{2\hbar}(x_2 - x_0)^2\right] \quad (4.1)$$

dado que  $t_N - t_0 = N\epsilon$ . De la ecuación anterior,  $P(b, a) = K(b, a)K^*(b, a)$ , por lo que la probabilidad de que la partícula se mueva en una cierta trayectoria, para llegar a  $b$ , estaría dada por

$$P(b)dx = \frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)}dx. \quad (4.1)$$

Si integramos (4.12) sobre todas las posibles  $x$ , claramente la integral diverge. Entonces, ¿de qué manera podemos obtener información útil de las integrales de Feynman?

Comenzaremos intentando interpretar el significado físico de (4.6)

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \int \cdots \int \kappa e^{\frac{i}{\hbar}S} dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{N-1}.$$

El tipo de integrales que involucra dicha ecuación coincide con las sugeridas en el apéndice A. En él, se aborda un método asintótico de aproximar el valor de las integrales de la forma

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda g(t)} dt, \quad (4.1)$$

Si observamos con cuidado, podemos directamente relacionar el parámetro  $\lambda$  con el parámetro  $1/\hbar$ , la función  $g(t)$  con la acción clásica  $S$ , y los límites de integración  $a$  y  $b$ , con  $-\infty$  y  $+\infty$  respectivamente. Tal como se explica en el apéndice, es notable el hecho de que el valor de la integral cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , puede ser aproximado de manera asintótica por el método de la fase estacionaria. En nuestro caso, tomar el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , implica que  $\hbar \rightarrow 0$ , que físicamente, equivale a obtener el límite clásico en la formulación ondulatoria. En el método de la fase estacionaria, resulta que las contribuciones más importantes a la integral son aquellas que se encuentran cerca del mínimo (

ximo) de la función  $g(t)$ , que en nuestro caso corresponde con el mínimo  $S$ . Tal como se explicó en el capítulo segundo, la trayectoria de mínima acción, es la trayectoria sobre la cual se mueve un sistema físico según la formulación de Hamilton.

La aproximación asintótica clásica, correspondiente a la integral de Feynman, puede escribirse entonces, de manera conceptual, como

$$K(b, a) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(b,a)}$$

onde  $S_{cl}$  representa el valor de la acción evaluada en la trayectoria clásica, es decir, en el extremo de  $S(x(t))$ .

Para concluir esta introducción a las integrales de camino, es importante mencionar que por medio de un método perturbativo temporal y espacial, es posible proponer una expansión del valor de la función de onda  $\psi(x, t) = K(x_f, t_f; x_i, t_i)$  en términos de un parámetro temporal  $\epsilon$  y uno espacial alrededor de la trayectoria clásica  $x_{cl}(t)$ ,  $\eta$ , pequeños, de tal forma que

$$\psi(x, t + \epsilon) = \psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \exp\left[\frac{\epsilon i}{\hbar} L(\eta)\right] \psi(\eta, t) d\eta \quad (4.14)$$

puede ser desarrollado en potencias de  $\epsilon$  y  $\eta$ , para obtener, a orden  $\epsilon$ , la condición de que  $\psi(x, t)$  debe satisfacer la ecuación

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right) \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi.$$

que corresponde a la ecuación de Schrödinger expuesta en el capítulo anterior.

## 4 Conclusiones

El resultado obtenido a partir de (4.14), sugiere directamente que la formulación de Feynman contiene a la mecánica ondulatoria de Schrödinger. Por otro lado, a partir del método de la fase estacionaria, mostramos cualitativamente que contiene a la mecánica clásica. De hecho probamos en el capítulo

---

<sup>4</sup>En realidad, el método de fase estacionaria sostiene que las aportaciones a la integral son proporcionadas por las vecindades cercanas a los puntos críticos de la función  $g(t)$ , es decir, en los máximos o mínimos



tercero que la ecuación de Schrödinger, en el límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ), toma la forma de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Notemos entonces que esta concepción ondulatoria de sumar las aportaciones de todas las posibles trayectorias, comprende básicamente las formulaciones anteriores. Es interesante notar que la manera en que se contruye la integral de Feynman, coincide de manera cualitativa con la manera en que J. Bernoulli resolvió el problema de la Braquistócrona. Es decir el hecho de buscar las trayectorias, a lo largo de las cuales, se mueve un cuerpo, ha llevado a los grandes pensadores a constuir la herramienta que hoy en día da sustento a la Física moderna. Una observación interesante es el hecho de que aquella propiedad *inteligente* que Fermat asociaba a la luz, para decidir que, entre todos los caminos posibles, ella tomaría el que le tomara menos tiempo, es reemplazada por el hecho de que realmente la trayectoria de mínimo tiempo, es la que aportará probabilísticamente hablando, la mayor contribución a la función de onda y por tanto, es la que observamos a nivel macroscópico donde  $\hbar$  es muy pequeña con respecto a las dimensiones del evento.

Para un estudio detallado de esta formulación véase, Richard P. Feynman, Quantum Mechanics and Path Integrals.

# Apéndice A

## Método de la fase estacionaria

En este apéndice analizaremos un método asintótico para calcular integrales de la forma

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda g(t)} dt, \quad (\text{A.1})$$

donde  $a, b, g(t), t$  y  $\lambda$  son reales y  $g(t)$  suave. El caso que analizaremos es el en el que  $\lambda \rightarrow \infty$ . Dado que

$$e^{i\lambda g(t)} = \cos(\lambda g(t)) + i \operatorname{sen}(\lambda g(t)),$$

el integrando de (A.1) es puramente oscilatorio. Nótese que si el parámetro  $\lambda$  es muy grande, las funciones  $\cos(\lambda g(t))$  y  $\operatorname{sen}(\lambda g(t))$  oscilarán muy rápido, es decir, para intervalos pequeños de  $t$ , hallaremos muchas oscilaciones. Del comportamiento anterior, para una  $\lambda$  suficientemente grande, podemos aprovechar el hecho de que las aportaciones positivas y negativas a la integral de la función  $e^{i\lambda g(t)}$  se cancelarán en casi todos lados. Para mostrar lo anterior, observemos el comportamiento de la parte real del integrando, es decir, cuando nos interesa el valor de

$$f(\lambda) = \int_a^b \cos(\lambda g(t)) dt. \quad (\text{A.2})$$

Observemos la figura A.1. Notemos que para la función  $g(t) = t^2$  y  $\lambda = 1$ , el integrando  $\cos(t^2)$  oscila normalmente, sin embargo, nótese que alrededor del mínimo de  $g$ ,  $t = 0$ , se presenta una situación particular.

Si ahora se procede a observar la figura A.2 y A.3, con  $\lambda = 10$  y  $\lambda = 50$ , respectivamente puede observarse con más claridad que, alrededor de  $t = 0$ ,

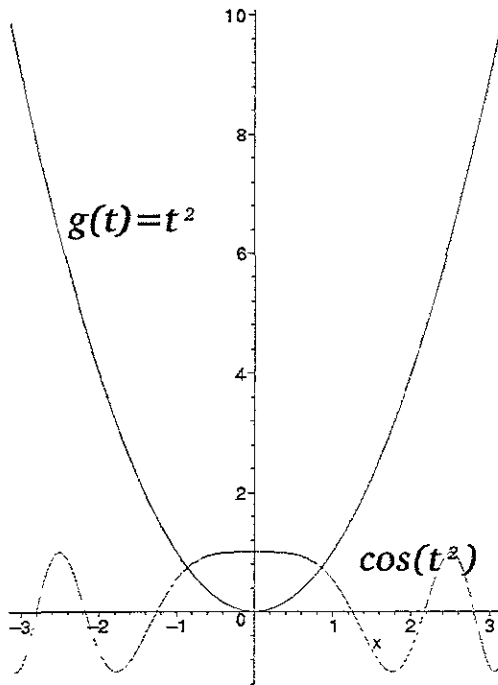


Figura A.1: Oscilaciones para  $\lambda = 1$

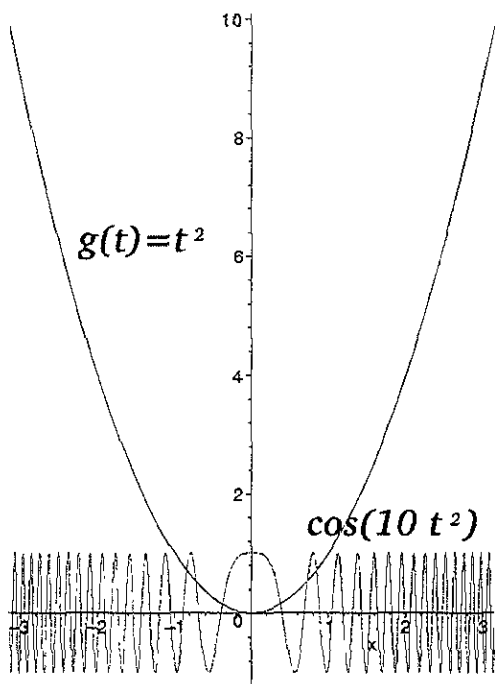


Figura A.2: Oscilaciones para  $\lambda = 10$

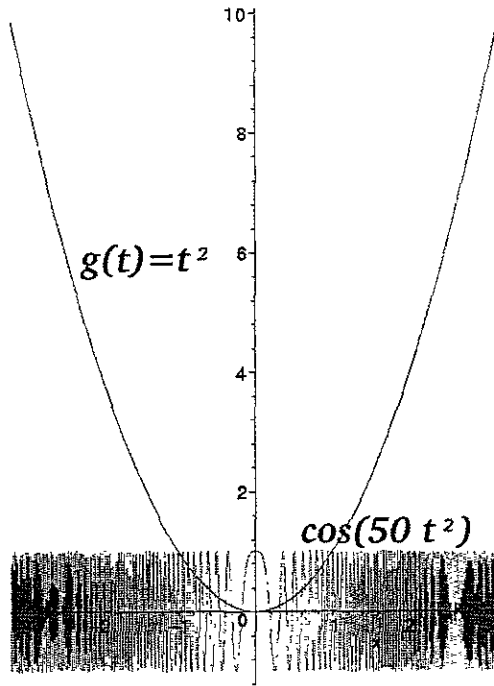


Figura A.3: Oscilaciones para  $\lambda = 50$

$\cos(t^2)$  presenta una cresta significativamente más prolongada que las demás. El hecho que sugiere que la aportación más importante a la integral será el área bajo la curva de una vecindad cercana a  $t_0 = 0$ .

En general si se piensa en una función  $g(t)$ , tal que en  $t = t_0$ , tiene un máximo o mínimo, con  $t_0 \in (a, b)$ , y

$$g'(t_0) = 0, \quad g''(t_0) < 0,$$

sucede que para valores grandes de  $\lambda$ , *i.e.*, cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , las oscilaciones son tales que al integrar  $\cos(\lambda g(t))$ , las regiones positivas y negativas de la integral se cancelan, excepto en una vecindad de  $t = t_0$ , donde  $g'(t_0) = 0$ ; y posiblemente en una vecindad alrededor de los extremos  $t = a$ , y  $t = b$ . Por el momento analicemos lo que sucede en puntos cercanos a  $t = t_0$ , nótese que para éstos, la fase  $\lambda g(t)$  del integrando, es aproximadamente constante y estacionaria, ya que, por el teorema de Taylor, para  $t - t_0$  pequeños, se cumple que

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}g''(t_0)(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3), \quad (\text{A.3})$$

como  $g'(t_0) = 0$ , podemos escribir<sup>1</sup>,

$$g(t) - g(t_0) = O((t - t_0)^2).$$

En cambio para puntos  $\tau$  diferentes<sup>2</sup> a  $t_0$ , dentro del intervalo  $(a, b)$

$$g(t) - g(t_0) = O((t - t_0)).$$

El hecho anterior sostiene la hipótesis de que alrededor de  $t_0$  las oscilaciones no se cancelarán. Podemos entonces afirmar que la integral definida por (A.2)

<sup>1</sup>Brevemente recordemos que si  $f(z)$  y  $g(z)$  son funciones definidas en, digamos los números complejos, y existen los límites de  $f$  y  $g$  cuando  $z \rightarrow z_0$ , entonces se dice que  $f(z) = O(g(z))$  cuando  $z \rightarrow z_0$ , si existen dos constantes positivas  $K$  y  $\delta$  tales que cuando

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f| \leq K|g|.$$

<sup>2</sup>Si existiera más de un máximo o mínimo en  $(a, b)$  simplemente dividimos el intervalo en subintervalos hasta que en cada uno exista sólo uno de estos

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  es *asintóticamente* igual a la integral de  $\cos(\lambda g(t))$  evaluada únicamente en una vecindad de radio  $\delta$  alrededor de  $t_0$ , es decir

$$f(\lambda) = \operatorname{Re} \int_a^b e^{i\lambda g(t)} dt \sim \operatorname{Re} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{i\lambda g(t)} dt. \quad (\text{A.4})$$

Buscamos ahora calcular una valor que nos proporcione información más precisa sobre la integral. Para esto recurriremos a un cambio de variable que es sugerido por el teorema del valor medio y por (A.3), que sostiene que en un intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  existe  $\xi$  tal que

$$g(t) - g(t_0) = \frac{1}{2}g''(\xi),$$

por lo que si escogemos la variable

$$\pm s^2 = g(t) - g(t_0),$$

donde el signo negativo o positivo estará determinado por el carácter de máximo o mínimo de  $t_0$  respectivamente<sup>3</sup>, entonces podemos notar que de (A.3)

$$\pm s^2 = g(t) - g(t_0) = \frac{1}{2!}g''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

obtenemos que

$$t - t_0 = \left[ \frac{2}{|g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} s + O(s^2),$$

y en términos de  $s$ , ( $dt = (2/|g''(t_0)|)^{\frac{1}{2}} ds$ ) podemos escribir la aproximación asintótica definida en (A.4) considerando que

$$g(t) = g(t_0) + (g(t) - g(t_0)) = g(t_0) \pm s^2,$$

como

$$f(\lambda) \sim \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{|g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda g(t_0)} \int_{-s_1}^{s_1} e^{\pm i\lambda s^2} \{1 + O(s)\} ds, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$s_1 = \delta \left[ \frac{2}{|g''(t_0)|} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ya que} \quad t - t_0 = \pm \delta$$

<sup>3</sup>Recordemos que si  $t_0$  es máximo, entonces  $g''(t_0) < 0$  y si es mínimo,  $g''(t_0) > 0$

en la vecindad que nos interesa.

Para calcular el valor de la integral, nuevamente hacemos un cambio de variable apropiado, de tal forma que  $\eta = s\sqrt{\lambda}$  ( $ds = d\eta/\sqrt{\lambda}$ ), lo cual transforma a (A.5) al tomar el límite cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ), en

$$f(\lambda) \sim \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{\lambda |g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{2\lambda g(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\eta^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} O(\eta) \right\} d\eta, \quad (\text{A.6})$$

Para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\eta^2} d\eta,$$

considerémos la integral de la función analítica  $e^{-z^2}$  sobre un contorno cerrado

$$\int_C e^{-z^2} dz.$$

por el teorema de Cauchy,

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0,$$

por otro lado, si consideramos el contorno  $C$  como en la figura A.4. podemos parametrizarlo como  $C = C_1 + C_2 + C_3$  con

$$C_1 = r \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$C_2 = R e^{i\theta} \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

$$C_3 = r e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq R,$$

escribir entonces que

$$0 = \int_{C_1} e^{-z^2} dz + \int_{C_2} e^{-z^2} dz + \int_{C_3} e^{-z^2} dz, \quad (\text{A.7})$$

$$= \int_0^R e^{-r^2} dr + iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta + e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 e^{-r^2} dr. \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_0^R e^{-r^2} dr + iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta - e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R e^{-r^2} dr. \quad (\text{A.9})$$



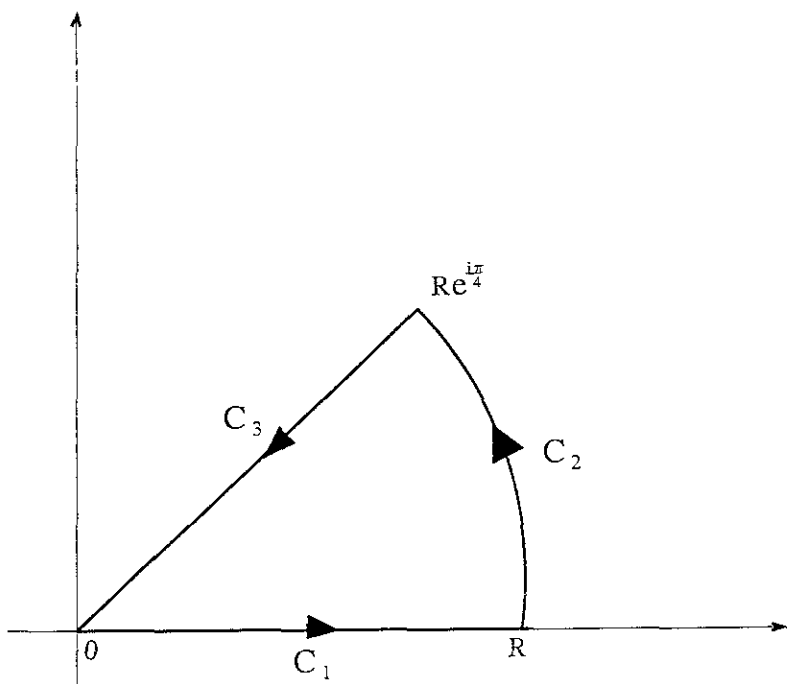


Figura A.4: Contorno  $C = C_1 + C_2 + C_3$

Nótese que cuando  $R \rightarrow \infty$  la segunda integral de (A.9) tiende a cero, por lo que

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr - e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-ir^2} dr = 0$$

donde

$$\int_0^{\infty} e^{-ir^2} dr = e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \quad (\text{A.10})$$

de modo que el integrando de ambas integrales es par,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir^2} dr = e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr. \quad (\text{A.11})$$

Entonces podemos que

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr$$

puede calcularse en coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  de la siguiente manera

$$L^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

de modo que  $\rho^2 = x^2 + y^2$  y que el jacobiano de la transformación a coordenadas polares es  $\rho$ , podemos escribir que

$$L^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho d\theta,$$

donde  $L^2 = \pi$  y por lo tanto,

$$L = \sqrt{\pi}.$$

Entonces podemos afirmar en general que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ir^2} dr = \sqrt{\pi} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \quad (\text{A.12})$$

Recapitulando, podemos ahora mostrar un valor aproximado de la integral (A.2) a partir de (A.6) de tal forma que

$$f(\lambda) \sim \operatorname{Re} \left[ \frac{2\pi}{\lambda |g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda g(t_0)} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}, \quad (\text{A.13})$$

$$\sim \left[ \frac{2\pi}{\lambda |g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left( \lambda g(t_0) \pm \frac{i\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (\text{A.14})$$

cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Para completar los resultados, daremos la expresión asintótica para calcular la integral planteada originalmente en (A.1) cuando  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_a^b e^{i\lambda g(t)} dt \sim \left[ \frac{2\pi}{\lambda |g''(t_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\{\lambda g(t_0) \pm \frac{\pi}{4}\}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (\text{A.1})$$

Concluiremos mencionando dos puntos finos del método anterior.

Se afirmó al inicio del apéndice, que era posible hallar que las contribuciones a la integral, en vecindades alrededor de los extremos  $t = a$  y  $t = b$ , fueran considerables con respecto a aquellas alrededor de  $t = t_0$ , sin embargo, es posible probar<sup>4</sup> que si los puntos  $t = a$  y  $t = b$  **no** son máximos o mínimos, las contribuciones alrededor de los mismos son de orden  $O(1/\lambda)$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , a diferencia de aquellas alrededor de  $t = t_0$ , que a partir de (A.15), son de orden  $O(1/\lambda^{\frac{1}{2}})$ .

Para efectos de esta tesis, es importante recalcar que el tipo de integral que analizamos en el capítulo cuarto, son tales que  $t = a = -\infty$  y  $t = b = \infty$  hecho que implica directamente que el valor de las integrales que estudiamos, está determinado, principalmente, por las aportaciones hechas por la(s) vecindad(es) del(los) punto(s) máximo(s) o mínimo(s) de la función  $g(t)$ .

---

<sup>4</sup>Véase J. D. Murray, *Asymptotic Analysis*.

# Bibliografía

## Capítulo 1

1. L.A.Liustérnik, *Líneas más cortas, Problemas de variaciones*, MIR, Moscú 1979.
2. R.Courant and Herbert Robbins *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1996.
3. Herman H. Goldstine *A history of the Calculus of Variations*
4. Cyril Isenberg *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Dover 1992.

## Capítulo 2

1. John L. Troutman *Variational Calculus with elementary Convexity* (Springer-Verlag)
2. Wan, Frederick Y.M. *Introduction to the calculus of variations and its applications*, Chapman & Hall.
3. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, Pergamon Press 1985.
4. Marion, R. y Thornton, M. ,*Cassical Dynamics of Particles and Systems*, HBJ College Publishers, 1988.

## Capítulo 3

1. J. Petykiewicz *Wave Optics* Kluwer Academic Publishers, Poland 1992.
2. Pedrotti and Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice Hall 1995.

3. H.Haken, *Light* Volume 1; Waves, Photons and Atoms. North Holland Physics Publishing, 1986.
4. E. Elbaz, *The Quantum Theory of Particles, Fields and Cosmology*, Springer 1998.
5. Max Born, *Atomic Physics*, Dover 1989.
6. Eutiquio C. Young, *Partial Diferential Equations*.
7. Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1989.

#### Capítulo 4

1. Richard P. Feynman, *The strange theory of light and matter*, Princeton Science Library 1988.
2. Richard P. Feynman, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, 1965.

#### Apéndice A

1. J. D. Murray *Asimptotic Analysis*, Springer-Verlag 1984.