



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**QUINTAESENCIA: UN MODELO PARA EXPLICAR  
LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**F Í S I C O**  
**P R E S E N T A :**  
**CHRISTIAN STEPHAN-OTTO ATTOLINI**

808462  
29/04/09

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSÓN.**



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



**FACULTAD DE CIENCIAS 2001**  
**SECCION ESCOLAR**

---

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Quintaesencia: un modelo para explicar la expansión acelerada del universo"

realizado por STEPHAN-OTTO ATTOLINI CHRISTIAN

con número de cuenta 9550440-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSON

Propietario

DR. DEBORAH DULTZIN KESSLER

Propietario

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Suplente

DR. GABRIEL GERMAN VELARDE

Suplente

DR. MANUEL TORRES LABANSAT

*Macorra*  
*Deborah Dultzin*  
*Hernando*  
*Gabriel German Velarde*  
*Manuel Torres*

Consejo Departamental de Física



*Patricia Goldstein Menache*

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Quintaesencia: un Modelo para Explicar la  
Expansión Acelerada del Universo.

Christian Stephan-Otto Attolini

22 de Junio de 2001

# Dedicatoria

A mi hermana Camille y mis papás Amalia y Erwin, por hacerme sentir tan querido.

A mis abuelas Nani y Oma, por su cariño.

A Diego, Nacho y Santiago. Por su ternura, su comprensión y su compañía.

A los amigos de la facultad: Enrico, Juan, Julio, Javi, Pablo, Luis, Laurita, Maite, Raúl, Itzam, Iván, Oliva, Benjamín, Horacio, Nettel, Adolfo, Pepe, Tathali, Bárbara, Daniel, Lorenza, Liliana, Alexis, Gustavo, Isabel, Carlos y Gabo; por todo lo que no tiene que ver con la ciencia.

A Diego Durazo, Roberto Moreno, Susana Salinas, Clyde Sánchez, Pável Ramírez, Antia Halpert, Yossi Maaravi, Nieves Ehrenberg y Gustavo Rugeles.

A los grupos Burbusodas, Liquit's e Iguazú, por hacerme parte.

A Erika, Ivonne, Beatriz y José Alejandro Attolini.

A mi padrino Enrique Fernández.

A Francisco Hernández Acevedo, por las clases que me hicieron dedicarme a la física.

A Mayra.

# Agradecimientos

Agradezco especialmente al doctor Axel de la Macorra, por sus enseñanzas y apoyo.

A los doctores Deborah Dultzin, Hernando Quevedo, Gabriel Germán y Manuel Torres. Por la atención prestada y las valiosas contribuciones que hicieron de ésta una mejor tesis.

Este trabajo se llevó a cabo dentro del proyecto 3275P-E del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al cual agradezco por haberme becado como tesista dentro de dicho proyecto.

# Índice General

|   |           |
|---|-----------|
| Dedicatoria   | i         |
| Agradecimientos   | ii        |
| Índice General  | v         |
| Índice de Figuras   | vii       |
| Índice de Tablas  | viii      |
| Introducción  | 1         |
| <b>1 Observables Cosmológicas</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2 Relatividad General</b>  | <b>15</b> |
| 2.1 Ecuación de Einstein . . . . .  | 15        |
| 2.2 Ecuaciones de Movimiento . . . . .                                      | 16        |
| 2.3 Ecuación de Estado . . . . .  | 17        |
| 2.4 Soluciones . . . . .  | 18        |
| <b>3 Constante Cosmológica</b>  | <b>19</b> |
| 3.1 Propiedades de un Universo con $\Lambda$ . . . . .                      | 20        |
| 3.2 Universo con un Término de Constante Cosmológica no Constante . . . . . | 21        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4 Campos Escalares</b>  | <b>24</b> |
| 4.1 Ecuación de Campo . . . . .  | 24        |
| 4.2 Tensor de Energía-Momento . . . . .                                    | 25        |
| <b>5 Quintaesencia</b>   | <b>27</b> |
| 5.1 Ecuaciones para Quintaesencia . . . . .                                | 27        |
| 5.2 Fenomenología . . . . .  | 28        |
| <b>6 Modelos con <math>V \propto \frac{1}{\varphi^n}</math></b>            | <b>33</b> |
| 6.1 Motivación para un potencial $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$ . . . . . | 34        |
| 6.2 Análisis cualitativo del sistema . . . . .                             | 35        |
| 6.2.1 El Análisis . . . . .  | 35        |
| 6.2.2 Redefinición de algunos parámetros . . . . .                         | 38        |
| 6.3 Restricciones físicas sobre los potenciales . . . . .                  | 39        |
| 6.4 Ejemplos numéricos de algunos potenciales con $n > 0$ . . . . .        | 42        |
| 6.4.1 Comportamiento con $n = 1$ . . . . .                                 | 42        |
| 6.4.2 Comportamiento con $n = \frac{18}{7}$ . . . . .                      | 51        |
| 6.4.3 Comportamiento con $n = \frac{2}{3}$ . . . . .                       | 52        |
| <b>7 Conclusiones</b>  | <b>57</b> |
| 7.1 Panorama Cosmológico . . . . .   | 57        |
| 7.2 Un Modelo de Quintaesencia . . . . .                                   | 58        |
| <b>A Apéndice A</b>  | <b>60</b> |
| A.1 Ecuaciones de Rodamiento Lento . . . . .                               | 60        |
| A.2 Obtención de las Condiciones de Inflación . . . . .                    | 61        |
| A.3 Inflación a Partir del Rodamiento Lento . . . . .                      | 61        |
| A.4 Obtención de $N(t)$ . . . . .  | 62        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>B Apéndice B</b>                                   | <b>63</b> |
| B.1 Obtención de la Ecuación de Campo . . . . .       | 63        |
| B.2 Obtención del Tensor de Energía-Momento . . . . . | 64        |
| <b>C Apéndice C</b>                                   | <b>65</b> |
| C.1 Período I . . . . .                               | 66        |
| C.2 Período II . . . . .                              | 67        |
| C.3 Período III . . . . .                             | 69        |
| C.4 Período IV . . . . .                              | 69        |
| <b>D Apéndice D</b>                                   | <b>71</b> |

# Índice de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Datos de BOOMERANG que apuntan hacia un universo plano. . . . .   | 9  |
| 1.2  | Los datos de BOOMERANG y MAXIMA junto con las simulaciones para un universo cerrado, plano o abierto. . . . . | 10 |
| 1.3  | Restricciones sobre $\Omega_m$ y $\Omega_\Lambda$ de supernovas. . . . .                                      | 11 |
| 1.4  | Triángulo de valores $\Omega_m$ , $\Omega_k$ y $\Omega_\Lambda$ . . . . .                                     | 13 |
| 6.1  | Períodos caracterizados por el desarrollo de $\Omega_\varphi$ . . . . .                                       | 36 |
| 6.2  | Rango de aceleración del universo. . . . .  | 39 |
| 6.3  | Plano fase $x - y$ para $n = 1$ . . . . .   | 43 |
| 6.4  | $\Omega_\varphi$ vs. $N$ con $n = 1$ . . . . .  | 44 |
| 6.5  | Evolución de $x$ para $n = 1$ . . . . .   | 45 |
| 6.6  | Evolución de $\ln x$ para $n = 1$ . . . . .   | 45 |
| 6.7  | Evolución de $y$ para $n = 1$ . . . . .   | 46 |
| 6.8  | Evolución de $\ln y$ para $n = 1$ . . . . .   | 46 |
| 6.9  | Evolución de $H/H_i$ para $n = 1$ . . . . .   | 47 |
| 6.10 | Evolución de $\ln(H/H_i)$ para $n = 1$ . . . . .  | 47 |
| 6.11 | Evolución de $\alpha$ para $n = 1$ . . . . .  | 48 |
| 6.12 | Evolución de $\gamma_\varphi$ para $n = 1$ . . . . .  | 49 |
| 6.13 | Evolución de $\lambda$ para $n = 1$ . . . . .   | 49 |
| 6.14 | Evolución de $1/\lambda$ para $n = 1$ . . . . .   | 50 |

6.15 Evolución del sistema con  $n = 1$  para distintas condiciones iniciales. . . . . 51

6.16  $\omega_{ef}$  vs.  $n$ . . . . . 54

6.17  $\omega_\varphi$  vs.  $n$ . . . . . 54

6.18  $\omega_\varphi$  vs.  $\Omega_\varphi$ . . . . . 55

6.19 Evolución de las constantes de acoplamiento. . . . . 56

# Índice de Tablas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Valores experimentales para $\Omega_m$ y $\Omega_\Lambda$ . . . . .   | 8  |
| 6.1 | Soluciones numéricas para distintas $n$ . . . . .   | 41 |
| 6.2 | Soluciones permitidas por $H_0$ y $\Omega_{\varphi_0}$ con $x_i$ fija y $y_i$ variable para $n=1$ . . . . .   | 51 |
| 6.3 | Solución numérica con $n = 18/7$ . . . . .  | 52 |
| 6.4 | Solución numérica con $n = 2/3$ . . . . .   | 53 |
| 6.5 | Soluciones permitidas por $H_0$ y $\Omega_{\varphi_0}$ con $x_i$ fija y $y_i$ variable para $n=2/3$ . . . . . | 53 |
| D.1 | $n$ en términos de $N_c$ , $N_f$ y $\nu$ . . . . .  | 72 |

# Introducción

Nuestro universo cambia constantemente, a todas las escalas y en una gran variedad de formas. Es por medio de la ciencia que la humanidad ha aprendido sobre esta gama de cambios, satisfaciendo una curiosidad natural y a la vez generando conocimiento. El saber más sobre su entorno ha ayudado al hombre a mejorar su existencia y a entenderse de manera más completa, sin embargo, su curiosidad parece no tener límites, al abordar temas como la naturaleza de los constituyentes de la materia o el nacimiento y la vida del universo. Aunque involucran preguntas antiguas, los temas anteriores son totalmente vigentes en la actualidad y, por lo visto, lo serán por mucho tiempo. Los griegos supusieron que la materia se componía de cuatro elementos: agua, tierra, fuego y aire; lo cual muestra que ya se preguntaban sobre la primera de las cuestiones anteriores. Recordemos también que algunas cosmogonías, como la maya o la hindú, son ejemplo de cómo el hombre se ha contestado preguntas sobre el origen y la evolución del universo.

Vivimos una época en la que la ciencia avanza velozmente en todas sus ramas. La tecnología le proporciona continuamente datos junto con nuevas formas de análisis y maneras de comunicar los resultados de una investigación. Así que el nuestro es un momento importante, pues las condiciones favorecen la solución de problemas en la frontera del conocimiento. El caso de la cosmología es un ejemplo claro, pues recibe constantemente información proveniente de las observaciones astronómicas y con ésta desarrolla nuevas teorías, a la vez que verifica las existentes. Esta información experimental puede ser, por ejemplo, la dada en forma de mapeos en diferentes longitudes de onda. Desde el mapeo en microondas del fondo de radiación cósmico hasta las observaciones de radiación  $\gamma$ , que hablan de eventos extremadamente energéticos.

La cosmología tiene como pilar el modelo del big bang (gran explosión), también llamado modelo estándar de la cosmología. El cual propone que el universo se encuentra

en expansión y, por extrapolación sobre esta característica, que tuvo comienzo en una singularidad en donde se concentraba toda la energía que lo constituye. El astrónomo Edwin P. Hubble fue el primero en cuantificar la razón entre la velocidad a la que se alejan los objetos celestes y su distancia a la tierra, la cual resultó ser una constante (ley de Hubble). Esto dio la pista del universo en expansión ya que, como en un pastel en el que se alejan las pasas unas de otras al inflarse en el horno, los objetos celestes ubicados en todas direcciones con respecto a la tierra, presentan un corrimiento al rojo que indica su alejamiento. Además, al tener una ley válida en todas las direcciones, tenemos una razón para pensar en la isotropía y homogeneidad del universo. Evidencias de otros tipos son también indicios de que esta conclusión es correcta. Por ejemplo, las fluctuaciones, con respecto a la posición, del fondo de radiación cósmico en microondas, que son menores a una parte en  $10^5$ . Por lo anterior podemos decir que nuestro universo es adecuadamente descrito por un modelo que tome en cuenta la expansión, la homogeneidad a gran escala y la isotropía.

El modelo cosmológico estándar presenta, además de importantes logros, ciertos problemas. Entre ellos se encuentran el de la curvatura y los del horizonte, la homogeneidad y la sobreproducción de monopolos, entre otros. La problemática antes descrita ha propiciado la formulación de modelos complementarios al estándar. Tenemos como ejemplo a los modelos que incorporan distintos agentes que modifican la densidad total de energía de una manera tal que la dinámica del universo se ve afectada. Uno de éstos es el modelo inflacionario, cuyas propiedades se describen en la sección 3.2. Este modelo tiene, como principal característica, el propiciar un crecimiento exponencial del factor de escala durante una etapa temprana del universo gracias a la presencia de un campo escalar, el modelo estándar no es desechado sino tomado como base por lo que ambos son equivalentes en etapas posteriores. Gracias a la inflación se logran resolver algunos de los problemas del modelo estándar como el de la curvatura o el del horizonte.

Otro ejemplo es el modelo que considera un término asociado al vacío de carácter constante llamado *constante cosmológica*. Este término propiciará un cambio en las ecuaciones que rigen el comportamiento del universo, de tal forma que el factor de escala presentará un desarrollo distinto al que tiene en el modelo estándar, ya sea sufriendo una aceleración positiva o un cambio nulo. Este comportamiento no es posible al considerar únicamente los campos de radiación y materia tomados en cuenta por el modelo estándar.

La constante cosmológica surgió del requerimiento de un universo estático (capítulo 3). Sin embargo, las observaciones de objetos celestes con corrimiento al rojo descartan esta posibilidad. Existen evidencias recientes de que el término asociado al vacío podría contribuir de forma significativa a la densidad total del universo siendo la contribución de dicho término de aproximadamente  $7/10$  del total [1, 2]. No obstante, los mecanismos que suponemos se dieron en la etapa de nucleosíntesis restringen la densidad asociada al vacío a un valor muy por debajo de la densidad asociada a la materia en esa época, de hecho se tiene como límite  $1/10$  [3, 4]. Entonces nos encontramos con una incongruencia, ya que aun cuando la constante cosmológica tuviera la magnitud de la densidad crítica, este valor es 120 órdenes de magnitud menor que la masa de Planck, la cual podría suponerse da la escala “natural” que esperaríamos para una constante fundamental. Queda abierta la opción de que la energía asociada al vacío provenga de un término dependiente del tiempo, el cual podría ser originalmente del orden de la masa de Planck, despreciable en la etapa de nucleosíntesis y de magnitud considerable actualmente.

Como ejemplo de lo anterior contamos con ciertos modelos que incluyen, además de los campos considerados en el modelo estándar, un campo escalar  $\varphi$  distribuido de forma homogénea en el universo. Este campo se desarrolla según un potencial de autointeracción y está acoplado solamente de forma gravitacional a los otros campos presentes. Los anteriores son los llamados *modelos de quintaesencia* y tendrán como consecuencia el afectar la dinámica del universo. Tomaremos en cuenta que un campo puede adquirir propiedades de autointeracción como efecto de una transición de fase. Así es posible que el campo escalar que nos interesa aparezca en cualquier momento de la vida del universo. Este proceso tendrá una escala de energía característica de la transición de fase que lo provocó.

En este trabajo se presenta un modelo de quintaesencia con las características necesarias para cumplir con las restricciones dadas por observaciones recientes que implican que el universo es dominado por energía tipo vacío y que se expande aceleradamente. En un principio el campo escalar tendrá una densidad de energía considerable comparada con la crítica, luego entrará a una etapa en donde dicha densidad es despreciable, la cual llamaremos *etapa de escalamiento* y que incluirá el proceso de nucleosíntesis cumpliendo con su restricción. Finalmente la densidad crecerá hasta el valor  $7/10$  sugerido por las observaciones, generando una aceleración positiva del universo.

El presente texto se encuentra organizado de la siguiente manera: después de la Introducción tenemos el capítulo 1, en donde se habla de las observables cosmológicas que describen el estado del universo, el cual resulta ser muy parecido a uno plano que se expande aceleradamente y es homogéneo e isotrópico. En dicho capítulo también se mencionan los problemas del modelo estándar de la cosmología.

En el capítulo 2 se establecen las ecuaciones de movimiento que relacionan la geometría del espacio-tiempo con el el tensor de energía-momento correspondiente a los campos presentes en el universo. También se introduce la ecuación de estado que da la relación entre la presión y la densidad de un fluido perfecto que supondremos llena el universo. Después se muestran algunas soluciones del sistema de ecuaciones, ejemplificando las distintas evoluciones del universo que se dan al cambiar su composición.

En el capítulo 3 se habla de la motivación para incluir un término tipo constante cosmológica así como de las propiedades de un universo en el que éste está presente. También se muestra la dinámica dada por un término similar pero dependiente del tiempo, el cual estaría asociado a un campo escalar con potencial de autointeracción. Se determinan las condiciones para que éste genere una expansión acelerada del universo, dando las características de los modelos inflacionarios.

La ecuación de campo de uno escalar es presentada en el capítulo 4, también se muestra el tensor de energía-momento y la ecuación de estado que describen el desarrollo cosmológico de un campo escalar.

En el capítulo 5 se describen los distintos modelos de quintaesencia según su comportamiento, dado por las ecuaciones diferenciales que los rigen, que son a la vez establecidas en dicho capítulo. El parámetro variable  $\lambda$  será de utilidad en la clasificación de los modelos y nos dará una pista para la selección del modelo específico con el que trabajaremos.

De los modelos de quintaesencia se elige el correspondiente a un potencial de autointeracción  $V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2\varphi^{-n}$  con  $n > 0$ , las constantes  $\Lambda_c^{4+n}$  y  $\nu$  serán explicadas en la sección 6.4.2. Este modelo tiene la cualidad de actuar como la energía asociada al vacío requerida para tiempos grandes, además de ser casi imperceptible en etapas previas, lo cual lo hará compatible con nucleosíntesis. En el capítulo 6 presentamos las motivaciones para estos modelos, luego se describen sus propiedades al hacer un análisis cualitativo de las ecuaciones de quintaesencia para este caso particular. Después se enumeran las res-

tricciones de carácter físico sobre los potenciales de esta forma, por último presentamos ejemplos numéricos con distintas  $n$ .

En el capítulo 7 se encuentran las conclusiones generales acompañadas de un breve resumen sobre la situación actual de la cosmología.

Los apéndices muestran procedimientos que por claridad no son incluidos en el texto.

# Capítulo 1

## Observables Cosmológicas

Existen diferentes tipos de observables que nos dan información sobre la historia y estructura del universo. Éstas son las llamadas observables cosmológicas y en base a ellas es que las implicaciones teóricas son comprobadas. Hemos mencionado ya el fondo de radiación en microondas, que es el remanente de una etapa del universo en la cual sus constituyentes se encontraban en equilibrio térmico debido a la alta tasa de interacción predominante. También tenemos información sobre fondos de otras naturalezas como el fondo en infrarrojo, de rayos X y de radiación  $\gamma$ , entre otros. La expansión del universo es otra de ellas. Las densidades relativas entre materia, radiación, materia oscura, etc. son también cuantificadas. Otros datos con importancia para la cosmología son la abundancia de elementos ligeros ( $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ , etc.); la proporción entre bariones y fotones ( $\eta$ , el número bariónico) y la distribución de la materia a diferentes escalas (galaxias, cúmulos, supercúmulos, etc.).

En el modelo del big bang es posible caracterizar la evolución del universo según la energía promedio. En un principio existe una situación extremadamente energética, por lo que la materia es inestable y entonces es la radiación la que predomina como constituyente del universo. Al expandirse éste la densidad de energía de sus componentes se diluye, la radiación lo hace de la forma:  $\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}$  mientras que para la materia tenemos:  $\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$  (esto se explicará en el capítulo 2). Al diluirse la materia más lentamente que la radiación llega un momento en que la primera domina la densidad total de energía, esto después del punto en el cual las dos densidades de energía se igualan y

que denominaremos con el subíndice  $r = m$  (por ejemplo, la densidad de energía queda definida por  $\rho_{r=m}$  para dicho punto).

Podemos definir varios parámetros para describir el estado del universo. Éstos son los llamados parámetros cosmológicos, que contarán con el subíndice 0 al representar su valor actual y entre los cuales están:

- *Parámetro de Hubble:* definido por  $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  en donde  $a(t)$  es el factor de escala que se presenta en la ecuación (2.2). Hubble encontró una constante al estudiar este parámetro, sin embargo, el análisis de las observaciones actuales conlleva a dudar del carácter constante de éste, lo cual debe ser tomado en cuenta en los modelos teóricos. El valor obtenido de las últimas observaciones es  $H_0 = 100h_0 \frac{km}{seg Mpc}$  con  $h_0 = 0.71 \pm 0.07$  según [5].
- *Parámetro de desaceleración:* está definido por  $q \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}$  y es positivo si el universo tiene una aceleración negativa y negativo si la aceleración es positiva.
- *Parámetro de densidad:* denominado  $\Omega$  es el valor que surge al comparar la densidad total a la correspondiente a un universo plano, llamada crítica. Está dado por la expresión  $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ , en donde  $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$  es exactamente la densidad crítica. Si  $\Omega > 1$  el universo es cerrado ( $k = 1$ ), si  $\Omega < 1$  el universo es abierto ( $k = -1$ ) y si  $\Omega = 1$  el universo es plano ( $k = 0$ ). Existen indicaciones teóricas que nos hacen pensar en que no es solamente la materia (asociada a una  $\Omega_m$ ) quien contribuye, sino que hay diversas posibilidades como una aportación debida a la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ , esto para explicar la preferencia por una  $\Omega = 1$  señalada por razonamientos teóricos y, últimamente, por evidencias arrojadas por los experimentos BOOMERANG y MAXIMA-1 [5].

Si los parámetros mencionados son conocidos entonces podemos calcular cantidades como la edad del universo o características como si éste es plano, cerrado o abierto. Entonces la fenomenología que surge de la relatividad general estará determinada. Sin embargo la precisión de los experimentos actuales es insuficiente para descartar a alguno de los modelos existentes, por ejemplo: en el caso de  $\Omega$  se tiene un rango amplio de valores al haber varios métodos para calcular el valor actual de dicho parámetro. De [6] podemos extraer algunos de los rangos obtenidos para presentar la siguiente tabla:

| Método                               | $\Omega_m$                                    | $\Omega_\Lambda$                  |
|--------------------------------------|---|-----------------------------------|
| $H_0$ vs. $z$                        | $< 0.7$                                       |                                   |
| diagrama de Hubble con SNe Ia        | $\leq 0.3$                                    | $\approx 0.7$                     |
| densidad de luminosidad $\times M/L$ | 0.1-0.4                                       |                                   |
| fracción bariónica                   | 0.15-0.35                                     |                                   |
| evolución de cúmulos                 | $\approx 0.3$                                 |                                   |
| pico acústico CBR                    | $\approx (1 \pm 0.12) - \Omega_\Lambda$       | $\approx (1 \pm 0.12) - \Omega_m$ |
| lentes gravitacionales               |   | $< 0.8$                           |
| recuento                             | 0.15-0.45 ( $k = -1$ )<br>0.2-0.4 ( $k = 0$ ) | 0.6-0.8                           |

Tabla 1.1: Valores experimentales para  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$

de aquí podemos ver que los experimentos favorecen una  $\Omega$  formada por  $\Omega_m = 0.2 - 0.4$  y  $\Omega_\Lambda = 0.6 - 0.8$  para un universo plano. Esto nos lleva a pensar en la posible existencia de una densidad de energía asociada al vacío cuya aportación a la densidad total es distinta de cero, lo cual tendrá importantes consecuencias sobre la dinámica del universo.

Hablemos ahora de los resultados de experimentos que han sido desarrollados con el fin de esclarecer las interrogativas sobre  $\Omega$ .

La radiación de fondo en microondas puede ser analizada mediante su espectro angular de intensidad, así es posible determinar de qué manera se encuentra distribuida la materia en el espacio y comparar con las predicciones provenientes de los diferentes modelos existentes. Un universo abierto propiciará estructuras aparentes más pequeñas que uno plano, puesto que las geodésicas en este caso son divergentes. En cambio el universo cerrado tendría como huella estructuras aparentes de mayor magnitud por la convergencia de sus geodésicas. Esto es mostrado en la figura 1.1 que toma en cuenta los datos experimentales de BOOMERANG y los compara con simulaciones, de ella se infiere que el universo es muy parecido a uno plano.

El análisis de la anisotropía del espectro de intensidad puede hacerse mediante la expansión del mismo en armónicos esféricos [8]. Si consideramos a  $e$  como el vector que

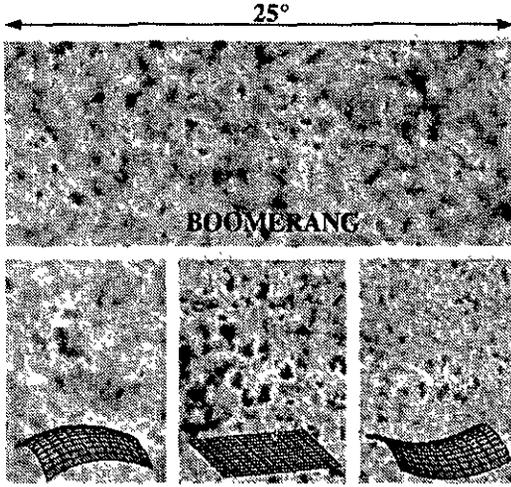


Figura 1.1: Aquí se comparan los datos de BOOMERANG con las simulaciones para un universo cerrado, plano o abierto (caracterizados por superficies correspondientes a cada geometría). Las distancias entre las estructuras aparentes en la observación experimental son del orden de  $1^\circ$  y se asemejan más al simulación del universo plano ubicado en la parte central inferior. La imagen fue extraída de [7].

define la dirección de observación llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\delta T(\mathbf{e})}{T} = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{e}). \quad (1.1)$$

La relación entre el orden  $\ell$  de un multipolo y la escala angular es aproximadamente  $\theta \approx 1/\ell$  (con  $\theta$  en radianes). Los modelos teóricos indican la presencia del pico acústico principal en  $\ell_{pico} \sim 380$  para un universo abierto ( $\Omega_m = 0.35$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ),  $\ell_{pico} \sim 220$  para uno plano ( $\Omega_m = 0.35$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.65$ ) y  $\ell_{pico} \sim 130$  para uno cerrado ( $\Omega_m = 0.35$ ,  $\Omega_\Lambda = 95$ ), esto es consecuencia de la expresión aproximada  $\ell_{pico} \sim \frac{\ell_{pico}^{plano}}{\sqrt{\Omega_m + \Omega_\Lambda}}$  en donde  $\ell_{pico}^{plano}$  corresponde al pico acústico principal para universo plano [9]. En la figura 1.2 identificamos entonces al valor experimental  $\ell_{pico}$  obtenido de BOOMERANG y MAXIMA como uno que implica un universo plano [10]. Un análisis reciente de los datos de BOOMERANG apunta hacia el valor  $\ell_{pico} 213^{+10}_{-13}$  [11], quedando incluido el valor  $\ell_{pico} \sim 220$  asociado al universo plano. Es importante remarcar que el modelo plano es consistente con el modelo

inflacionario [12], del cual hablaremos posteriormente y que propone soluciones exitosas a los problemas del horizonte y de la curvatura que en breve presentaremos.

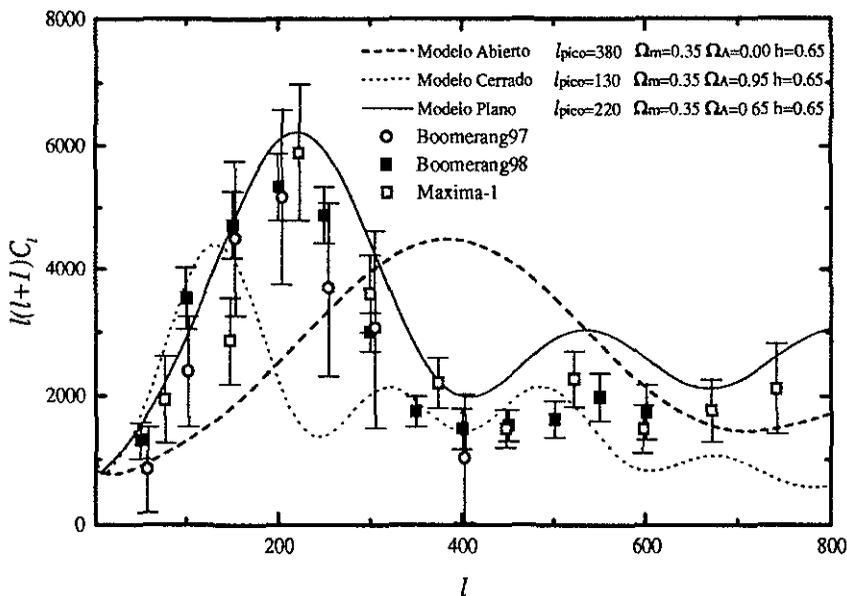


Figura 1.2: Los datos de BOOMERANG y MAXIMA junto con las simulaciones para un universo cerrado, plano o abierto. La imagen fue extraída de [10].

Las observaciones de supernovas con alto corrimiento al rojo proporcionan un método para determinar si el universo se expande aceleradamente [1, 2]. Éste consiste en comparar la relación entre la distancia (calculada a partir del inverso de la magnitud aparente) con el corrimiento al rojo, para supernovas lejanas, frente a la misma relación para supernovas cercanas. Esto se hace mediante un parámetro  $\frac{d}{z}$  con  $d = \text{distancia}$  y  $z = \text{corrimiento al rojo}$ . Si una estrella lejana presenta un valor mayor para este cociente que el encontrado en las cercanas, quiere decir que ha habido una aceleración positiva, puesto que el universo se expandió con menor velocidad en tiempos pasados. Lo anterior es debido a que la luz proveniente de una supernova con  $z$  mayor partió de la fuente en un pasado más lejano. Las distancias  $d$  encontradas por uno de los grupos que se han dedicado a recopilar este tipo de datos son 10 a 15% más grandes que lo esperado en un universo con densidad de materia correspondiente a  $\Omega_m = 0.2$  sin presencia de la energía del vacío [1]. Los

resultados encontrados por otro grupo restringen los valores tanto de  $\Omega_m$  como de  $\Omega_\Lambda$ , lo cual se ve en la figura 1.3.

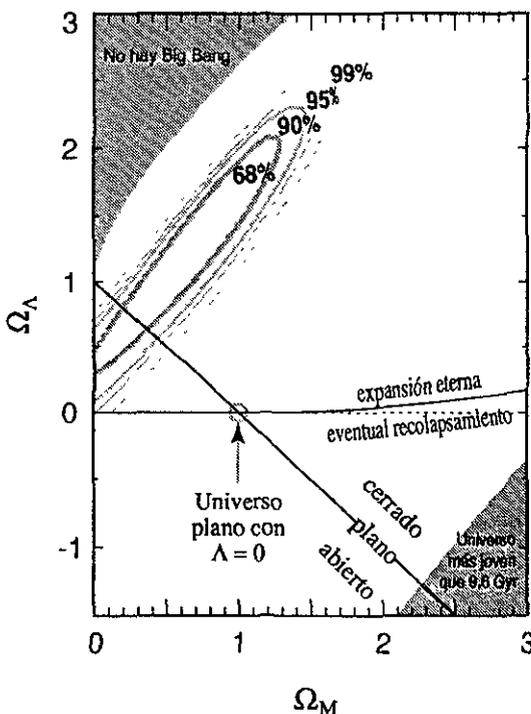


Figura 1.3: La restricción generada por las observaciones de supernovas, con corrimiento al rojo entre 0.35 y 0.85, sobre el plano  $\Omega_m - \Omega_\Lambda$  es ilustrada en esta gráfica. Al tomar en cuenta la condición de un universo plano encontramos una línea de confianza en que  $\Omega_\Lambda \approx 0.3$  y  $\Omega_m \approx 0.3$ . También es importante notar que el universo plano sin contribución del vacío  $\Omega_\Lambda = 0$  queda descartado para este método. La imagen fue extraída de [2].

Observación de cúmulos de galaxias: existen tres tipos de observaciones de este tipo que ayudan a determinar la densidad de materia [9], en el primero se mide la razón entre

masa y luminosidad de la muestra más grande posible (cúmulos de galaxias hasta ahora) para luego multiplicar por la luminosidad total del universo. El tamaño de los cúmulos considerados ha sido de 1 – 2 Mpc de radio con masas del orden de  $2 - 10 \times 10^{14}$  masas solares. El segundo es el de la razón entre la densidad de bariones y la densidad total de masa. Lo que se hace es comparar el total de cantidad de materia interestelar (emisora de rayos X) y materia estelar (lumínica) con el total de la masa presente en un cúmulo. Después se toma en cuenta la cota sobre el parámetro de densidad de bariones dada por el modelo estándar del big bang ( $\Omega_B \approx 0.045$ ) para que al obtener la observación de  $\frac{\Omega_B}{\Omega_m}$  se tenga el parámetro de densidad para materia. Un tercer tipo es el que compara la cantidad de cúmulos observada a distancias grandes (corrimientos al rojo de  $z \approx 1$ ) con la observada a distancias pequeñas. Si el universo es dominado por masa ( $\Omega_m \approx 1$ ) presentará mayor rapidez en la evolución de la densidad de cúmulos. Sin embargo, los resultados experimentales muestran poca diferencia entre la densidad de cúmulos en  $z \approx 0$  y en  $z \approx 1$ , lo cual implica que el universo tiene una densidad de masa menor a la correspondiente a  $\Omega_m = 1$ . De los resultados obtenidos tras utilizar las tres técnicas anteriores se infiere  $\Omega_m \approx \frac{1}{3}$ , la tabla 1.1, muestra dichos resultados.

Para resumir lo anterior es posible referirnos al llamado *triángulo cósmico* que correlaciona en la misma gráfica a tres de los posibles componentes de  $\Omega$ : un término geométrico ( $\Omega_k \equiv \frac{-k}{(a(t)H)^2}$ ), un término correspondiente a la densidad de materia ( $\Omega_m \equiv \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}$ ) y un término que representa a la energía del vacío ( $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}$ ), esto considerando  $\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$  que es consecuencia de la llamada ecuación de Friedmann (2.4) que se presentará en el capítulo 2. En la Figura 1.4 se muestra lo obtenido al reunir resultados de la radiación de fondo en microondas, cúmulos y supernovas lejanas.

Del análisis de tales observaciones se induce que el nuestro es un universo con geometría plana  $\Omega_k = 0$ , a la vez que se ve la consistencia con los resultados de la tabla para  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$  (tabla 1.1).

Las observables cosmológicas determinan el estado del universo para distintas etapas, sin embargo, no todas las observaciones encuentran explicación en el modelo estándar de la cosmología. Éste tiene en su haber importantes logros, ya que explica de manera elegante varias de las características de nuestro universo, pero fracasa en la explicación de ciertas cuestiones, mencionaremos algunas de éstas [13, 14]:

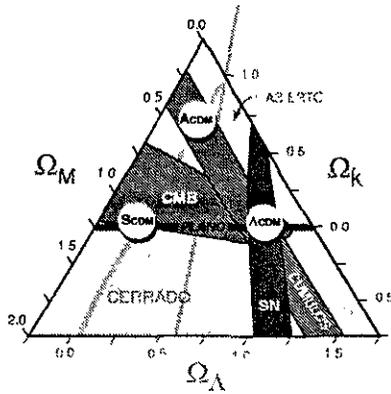


Figura 1.4: Aquí se muestran las regiones permitidas para  $1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda$  tras el análisis de tres diferentes tipos de observaciones: CMB corresponde a la radiación de fondo en microondas, SN a las supernovas lejanas y también se incluye el resultado para cúmulos. La imagen fue extraída de [9].

- Problema de la curvatura:** la curvatura del universo depende de  $\Omega$  de la siguiente forma:  $k \propto |\Omega - 1|$ . Las evidencias experimentales muestran que el valor actual de  $\Omega$  se encuentra entre 0.8 y 1.2 [6]. Este rango implica que para etapas iniciales del universo del orden del tiempo de Planck ( $t_p \sim \frac{1}{M_p}$ ) se debió haber cumplido  $|\Omega - 1| < 10^{-59}$ . El modelo estándar no cuenta con una explicación adecuada para esta gran similitud entre la densidad inicial y la densidad crítica, que obliga a tomar  $k = 0$  y restringe nuestro universo a uno plano.
- Problema del horizonte:** el estudio del fondo de radiación en microondas muestra que el universo era homogéneo e isotrópico con fluctuaciones menores a una parte en  $10^5$  cuando su edad era de aproximadamente  $10^5$  años. Las regiones observables que en  $t \sim 10^5$  estaban causalmente desconectadas son unas  $10^6$ , por lo que es difícil de explicar la similitud entre regiones que no pudieron haber interactuado. Las regiones desconectadas causalmente se encuentran separadas por una distancia llamada *horizonte causal* que puede tomarse burdamente como proporcional a  $t$ , de ahí el nombre de este problema.

- *Problema de la homogeneidad:* por las observaciones astronómicas sabemos que a gran escala nuestro universo es sumamente homogéneo, sin embargo en otras escalas nos encontramos con inhomogeneidades como las estrellas, las galaxias o los cúmulos de galaxias. El modelo estándar de la cosmología no nos da ninguna pista sobre el origen de estas inhomogeneidades.
- *Problema de la asimetría bariónica:* al existir materia y antimateria en el universo podríamos pensar que éstas se encontrarían en equilibrio en términos de la densidad. El modelo estándar no presenta una justificación para que la materia sea la que constituye casi completamente el total de la densidad bariónica. También entra en este apartado la dificultad para explicar la desproporción entre el número de bariones y el número de fotones  $\frac{n_b}{n_\gamma} \sim 10^{-9}$ .

Hemos caracterizado entonces al universo por medio de los parámetros cosmológicos. Por otro lado, tenemos que el modelo estándar es exitoso hasta cierto límite impuesto por los problemas recientemente descritos. Uno de los objetivos actuales de la cosmología es dar solución a los problemas del modelo estándar y generar un modelo que se adecúe a los valores de los parámetros cosmológicos de origen experimental.

# Capítulo 2

## Relatividad General

### 2.1 Ecuación de Einstein

Para describir la evolución del universo es necesario entender la dinámica que rige a sus componentes. Para esto la relatividad general ofrece una *ecuación de campo* que puede ser vista como un análogo tensorial a la ecuación de Poisson, ya que relaciona un término construido con a lo más las segundas derivadas de un tensor de campo con otro asociado a las fuentes. Para cumplir con los principios de covariancia general y de equivalencia, la ecuación debe de poder ser deducida a partir del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y sus derivadas. Esta ecuación, llamada *ecuación de Einstein*, determinará la geometría del espacio-tiempo al relacionarla con el tensor de energía-momento generado por los campos presentes en el universo y tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R}g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Aquí hemos adoptado la convención de que los índices en letras griegas corren de 0 a 3 y los índices latinos van de 1 a 3. Estos últimos se usarán para referirse a las coordenadas espaciales mientras que el índice 0 se refiere a la coordenada temporal. Una manera de obtener la ecuación anterior es suponer un principio variacional en donde la acción  $S = S_{grav} + S_{campos}$ <sup>§</sup> es constante bajo pequeños cambios del tensor métrico. Mencionemos ahora sus componentes:  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, compuesto por el tensor de curvatura

<sup>§</sup>La acción gravitacional está dada por  $S_{grav} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{R} + 2\Lambda)$  mientras que la dada por los campos presentes en el universo es  $S_{campos} = \sum_{campos} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{campos}$

de Ricci, que es la contracción del tensor de Riemann<sup>§</sup> ( $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ ) y por el término  $-\frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}$  en donde aparecen  $g_{\mu\nu}$ , el tensor métrico, y  $\mathcal{R}$  que es el escalar de Ricci, obtenido al contraer el tensor de Ricci ( $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\mu}_{\mu}$ ). Encontramos también al tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  multiplicado por  $8\pi$  veces la constante de Newton  $G$  y al término constante  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , el cual explicaremos posteriormente.

La dinámica generada al tomar la ecuación de Einstein quedará determinada al utilizar para ésta una métrica de máxima simetría que represente un espacio con secciones isotrópicas homogéneas. La métrica Robertson-Walker cumple con estas condiciones, el intervalo asociado se escribe de la siguiente manera:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.2)$$

en donde  $t$  es la coordenada temporal, mientras que  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas espaciales.  $a(t)$  es el factor de escala y  $k$  la constante de curvatura del espacio, que puede ser  $-1$ ,  $0$  ó  $1$ , correspondiendo a un espacio abierto, plano o cerrado, respectivamente.

Al tensor de energía-momento total lo componen los tensores de energía-momento de los campos fundamentales presentes como son, por ejemplo, el de radiación o el de materia. Sin embargo podemos hacer una simplificación en donde se usará el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, el cual cumple con las restricciones que pedimos para el universo pues presenta las mismas simetrías que la métrica y es isotrópico en las coordenadas espaciales. Este tensor estará definido por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} - g_{\mu\nu}p \quad (2.3)$$

en donde  $U_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  es la cuadrivelocidad,  $\rho$  la densidad y  $p$  la presión asociadas al fluido perfecto que supusimos llena el universo.

## 2.2 Ecuaciones de Movimiento

De la ecuación de Einstein se pueden deducir dos ecuaciones independientes provenientes de las componentes  $0-0$  e  $i-i$  y una dependiente que se deriva de las dos anteriores. Al

<sup>§</sup>El tensor de Riemann está dado por  $\mathcal{R}^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}$  en donde el símbolo de Christoffel tiene la forma  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = (1/2)g^{\mu\nu}(\partial_{\beta}g_{\nu\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\nu\beta} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta})$ .

sustituir los valores del tensor métrico para un espacio homogéneo e isotrópico (métrica Robertson-Walker) y formular un tensor de energía-momento del tipo del de un fluido perfecto encontramos las ecuaciones de movimiento. En cada una de ellas se muestra de qué manera depende este parámetro de la abundancia y naturaleza de los elementos que constituyen al universo y son las siguientes:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2.4)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (2.5)$$

$$\frac{d(\rho a^3)}{da} = -p \frac{d(a^3)}{da} \quad (2.6)$$

en donde  $\rho = \sum \rho_i$  y  $p = \sum p_i$  con  $i =$  materia, radiación, vacío, etc. La primera de las anteriores es la llamada ecuación de Friedmann para la cual, a partir de este momento, tomaremos  $k = 0$  al considerar las evidencias experimentales de que nuestro universo es muy parecido a uno plano como se vio en el capítulo 1. Es importante hacer notar que estas tres ecuaciones no son independientes, sólo dos de ellas lo son.

## 2.3 Ecuación de Estado

Hemos supuesto que un fluido perfecto llena el universo, sin embargo es necesario decir de qué manera cambia. Entonces, la densidad de éste dependerá del tiempo ( $\rho(t)$ ), al igual que su presión ( $p(t)$ ) y será necesario determinar de qué forma se relacionan estas dos variables. La manera en que se logra esto es mediante el parámetro de proporcionalidad  $\omega$  que nos lleva a la ecuación de estado:

$$p = \omega \rho \quad (2.7)$$

sin olvidar que  $\rho$  y  $p$  son dependientes del tiempo. El valor de  $\omega$  nos dirá cómo se comporta tal fluido, estando definido por la microfísica de los constituyentes de éste. Así se puede probar que  $\omega = \frac{1}{3}$  representa un comportamiento tipo radiación,  $\omega = 0$  será el correspondiente a la materia tipo polvo y  $\omega = -1$  a la energía del vacío, de la cual hablaremos más adelante. Es importante aclarar que  $\omega$  puede también depender del tiempo, ya que es probable que el universo sea dominado por distintos tipos de materia, con  $\omega \neq 0, \frac{1}{3}$  en diferentes etapas o que alguno de éstos presente una  $\omega$  cambiante.

## 2.4 Soluciones

Ahora mencionaremos las soluciones para la edad del universo, la aceleración y el factor de escala según el parámetro de la ecuación de estado  $\omega$ . Encontrando distintas propiedades dinámicas del universo cuando es dominado únicamente por materia o únicamente por radiación.

De las ecuaciones (2.4) y (2.5) en conjunto con la ecuación de estado (2.7) se puede obtener una relación entre el signo de  $\ddot{a}$  y  $\omega$  de la expresión:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3\omega)a \quad (2.8)$$

resultando que un universo con aceleración negativa corresponde a una ecuación de estado en donde  $\omega > -\frac{1}{3}$ . Para el caso en que la aceleración es positiva tenemos  $\omega < -\frac{1}{3}$  y con  $\omega = -\frac{1}{3}$  el universo no presenta aceleración.

De la ecuación (2.6) y la ecuación de estado se puede obtener

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)} \quad (2.9)$$

la cual nos da, junto con la definición de densidad crítica  $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$  definida por la ecuación de Friedmann al tomar  $k = 0$ :

$$a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (2.10)$$

la cual se reduce a  $a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}$  para el universo dominado por materia y a  $a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}$  para el dominado por radiación, así mismo encontramos una relación entre el parámetro  $\omega$  y la edad del universo en términos del parámetro de hubble:

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1} \quad (2.11)$$

de donde vemos que para un universo dominado por materia:  $t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}$ ; para uno dominado por radiación:  $t_0 = \frac{1}{2}H_0^{-1}$  y en el caso del dominado por la energía del vacío:  $t_0 = \infty$ .

# Capítulo 3

## Constante Cosmológica

El desarrollo de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein tuvo un gran impacto al ser utilizada para resolver el problema de la geometrodinámica de nuestro universo, esto debido a que los primeros resultados de esta aplicación contradecían la idea del universo estático, aceptada tradicionalmente en occidente. Esta incongruencia ideológica dio lugar a que Einstein buscara introducir un término capaz de generar una dinámica de tipo estacionario, el cual tendría que ser consistente con las simetrías e hipótesis de la relatividad general, por lo que sería un múltiplo del tensor métrico, el cual podría ser sumado al tensor de Einstein, generando un nuevo tensor que cumpliría con las mismas restricciones.

En la ecuación de Einstein (2.1) nos encontramos con el término de constante cosmológica ( $\Lambda g_{\mu\nu}$ ), éste puede ser visto como una contribución de energía “inherente” al espacio si está en el lado izquierdo de dicha ecuación o como la aportación debida a un campo cuyo tensor de energía-momento, de forma  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , si se encuentra en el lado derecho. en este caso se se sumaría tensor de energía momento orginal generando un nuevo tensor:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

sin importar la interpretación que se de a la constante cosmológica encontramos el mismo comportamiento del universo.

### 3.1 Propiedades de un Universo con $\Lambda$

Ahora revisemos algunas propiedades de un universo en el que existe un término de constante cosmológica distinto de cero. Por ejemplo, si pensamos en el caso extremo en que el universo está dominado por la energía del vacío, tenemos el tensor de energía-momento:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

que implica la relación  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  en donde podemos ver que se cumple  $\omega = -1$ , lo cual habíamos identificado con un universo dominado por la energía del vacío al presentar la ecuación de estado. El modelo del universo que cumple con que el término de constante cosmológica es el único presente es el llamado modelo de de Sitter o anti de Sitter con  $\Lambda > 0$  ó  $\Lambda < 0$ , respectivamente. Sabemos que nuestro universo no es de este tipo ya que contamos con todo tipo de evidencias de la existencia de materia, desde los mapeos en rayos  $X$  hasta el tomar en cuenta al mismo planeta Tierra.

Podemos también considerar un universo en el que además de radiación y materia aparece la contribución a la densidad de energía asociada al vacío. Una nueva densidad, formada por la original y la del vacío quedará definida por:  $\tilde{\rho} = \rho_{r,m} + \rho_\Lambda = \rho_{r,m} + \frac{\Lambda}{8\pi G}$ , en donde  $\rho_{r,m}$  está dada por  $\rho_m$  si el universo es dominado por materia y por  $\rho_r$  si es la radiación la que domina, mientras que la presión será:  $\tilde{p} = p_{r,m} + p_\Lambda = p_{r,m} - \frac{\Lambda}{8\pi G}$  en la que  $p_{r,m}$  será  $p_m$  o  $p_r$  si domina la materia o la radiación, respectivamente. En ambas  $\Lambda$  es la constante cosmológica. Al sustituir  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{p}$  en las ecuaciones de campo (2.4) y (2.5) y restar la segunda a la primera encontramos la relación:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \rho_\Lambda - \frac{8\pi G}{3} \rho_{r,m} (3 \omega_{r,m} + 1) \quad (3.3)$$

de donde podemos inferir lo siguiente: si  $\rho_\Lambda = \rho_{r,m} (\frac{3}{2} \omega_{r,m} + \frac{1}{2})$  el universo presenta una aceleración nula del factor de escala, valores por debajo de éste para  $\rho_\Lambda$  conllevarán a una aceleración negativa y los superiores a una positiva. Así que la inclusión del término de constante cosmológica afecta la dinámica del universo de forma que un universo cerrado puede expandirse indefinidamente o uno abierto colapsarse, esto debido a que la relación entre  $\ddot{a}$  y  $\Lambda$  (3.3) no depende de la constante de curvatura  $k$  del espacio.

El valor que debe tener  $\rho_\Lambda$  para corresponder a la situación estática ( $\dot{a} = 0$ ) es, según

la ecuación 2.4, el siguiente:

$$\rho_\Lambda = \frac{k}{a^2} - \rho_{r,m} \frac{8\pi G}{3} \quad (3.4)$$

que en el caso del universo plano se reduce a:

$$\rho_\Lambda = -\rho_{r,m} \frac{8\pi G}{3} \quad (3.5)$$

Al considerar un universo plano en donde  $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ , se puede llegar, a partir de las ecuaciones de movimiento (2.4, 2.5 y 2.6), a la siguiente expresión para la edad del universo [15]:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{1 + \Omega_\Lambda^{1/2}}{(1 - \Omega_\Lambda)^{1/2}} \right) \quad (3.6)$$

de donde podemos ver que una contribución del vacío a la densidad de energía nos permite alcanzar edades del universo mayores a  $H_0^{-1}$ , lo cual era imposible, como vemos en la ecuación (2.11), con los modelos previos en donde sólo aparecían radiación y materia.

## 3.2 Universo con un Término de Constante Cosmológica no Constante

Hasta el momento hemos hablado solamente de las razones que dieron lugar a un término cosmológico constante, ahora mencionaremos un problema causado por la desproporción entre la magnitud que las observaciones permiten para la constante cosmológica y las escalas energéticas fundamentales. Si dicho término es de naturaleza intrínseca al universo, entonces podríamos esperar que la densidad de energía del vacío sea del orden de la masa de Planck a la cuarta potencia:  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \sim (8\pi)^2 M_{Pl}^4$ . Sin embargo, la densidad  $\rho_\Lambda$  está acotada por la evidencia experimental de forma que no excede la densidad crítica actual  $\rho_{c0} \sim 10^{-120} M_{Pl}^4$  lo cual genera una discrepancia de al menos 120 órdenes de magnitud. Otro problema es el que encontramos al comparar el valor actual del parámetro de densidad asociado a la constante cosmológica:  $\Omega_{\Lambda 0} = 0.7$  [2] con la cota sobre el mismo determinada por los mecanismos de nucleosíntesis:  $\Omega_\Lambda(NS) < 0.1$  [3]. Para evadir dichos obstáculos se considera la presencia de un término de constante cosmológica “no constante”, el cual podría evolucionar de manera que se cumplieran las condiciones mencionadas. Un candidato que puede presentar el comportamiento requerido es un campo escalar (de

espín 0), al cual nos referiremos como  $\varphi$  y que se desarrolla según un potencial de autointeracción  $V(\varphi)$ . La existencia de campos de este tipo es contemplada en el modelo estándar de las partículas elementales, tenemos por ejemplo al campo de Higgs, presuntamente responsable de asociar masa a las partículas masivas. Algunos de los problemas del modelo estándar, como el del horizonte y el de la curvatura, se verán resueltos al tomar en cuenta un campo escalar gracias al cual se dará un proceso llamado *inflación*. Éste se caracteriza por presentar una aceleración positiva del parámetro de escala  $a(t)$  en etapas iniciales del universo, lo cual genera que las regiones causalmente conectadas en la actualidad correspondan a regiones más pequeñas en épocas tempranas.

La dinámica de un universo en el cual existe un campo escalar está dada por las ecuaciones que se presentan en el capítulo 4. En particular:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (3.7)$$

que es la ecuación de movimiento del campo escalar y en donde  $V'(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}V(\varphi)$ , tiene propiedades interesantes como el permitir la mencionada etapa de *inflación*. Para verificar esto pensemos en un régimen en donde  $\ddot{\varphi}$  es despreciable en relación a los otros términos y llamémoslo *rodamiento lento*.

Las ecuaciones válidas en este régimen son las llamadas ecuaciones de rodamiento lento y son las siguientes, según el desarrollo de la sección A.1 del apéndice A:

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi). \quad (3.8)$$

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}V(\varphi) \quad (3.9)$$

que al tomar la definición de la masa de Planck reducida ( $M_{Pl}^2 \equiv 8\pi G$ ) quedan como:

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi) \quad (3.10)$$

$$H^2 = \frac{V(\varphi)}{3M_{Pl}^2}. \quad (3.11)$$

Para tener un estado inflacionario se deben cumplir las condiciones (apéndice A sección A.2):

$$\frac{M_{Pl}^2}{6} \left( \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2 \ll 1 \quad (3.12)$$

$$\frac{M_{Pl}^2}{3} \frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \ll 1 \quad (3.13)$$

las cuales son utilizadas en el apéndice A sección A.3 para llegar a la situación inflacionaria.

Ahora tomemos la siguiente definición para cuantificar el gran desdoblamiento exponencial que sufrirá  $a(t)$  en el período de inflación:

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{final})}{a(t)} \quad (3.14)$$

con  $t_{final}$  refiriéndose al momento en que cesa la inflación, o sea, en el cual las condiciones (3.12) y (3.13) no son satisfechas.

Un sencillo procedimiento (apéndice A sección A.4) nos lleva a:

$$N(\varphi) = \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_{final}}^{\varphi} \frac{V(\varphi)}{V'(\varphi)} d\varphi \quad (3.15)$$

que por la primera condición de rodamiento lento (3.12) implica  $N \gg \mathcal{O}(1)$ , lo cual nos habla de que durante el proceso de inflación, gobernado por las condiciones de rodamiento lento (3.12 y 3.13), el parámetro de escala crece en varios órdenes exponenciales. Esta propiedad del tratamiento bajo la aproximación de rodamiento lento es útil para resolver algunos de los ya mencionados problemas del modelo estándar (capítulo 1): el del horizonte es evitado al haber un período de inflación del universo pues tendríamos que el horizonte causal de etapas tempranas contendría las regiones del universo observable que parecen estar causalmente desconectadas [16]. El problema de la curvatura queda resuelto al considerar lo siguiente: veamos que para un universo plano la ecuación de Friedmann (2.4) se reduce a:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right) \quad (3.16)$$

en donde se ha tomado la expresión para  $\rho$  en términos de las energías potencial y cinética que será mostrada en (4.13). La suposición problemática de que el término de curvatura es idénticamente cero puede ser omitida al considerar que el término  $\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$  será el dominante en la ecuación de Friedmann (2.4) durante el período inflacionario puesto que será comparado con el término  $\frac{k}{a^2}$  con  $k$  constante y  $a$  creciendo rápidamente.

Así queda ejemplificada la ventaja que tiene el introducir campos escalares en las teorías cosmológicas, lo cual nos sugiere que un mayor desarrollo de estos métodos puede traer consigo consecuencias favorables en la resolución de algunos problemas de la cosmología como son la falta de una explicación para la aparente aceleración actual del universo o la discrepancia entre la densidad asociada al término de constante cosmológica y la escala de Planck, la cual es la escala natural para una constante fundamental.

# Capítulo 4

## Campos Escalares

### 4.1 Ecuación de Campo

El formalismo lagrangeano de la teoría de campos nos dice que para un campo escalar  $\varphi(t, \mathbf{x})$  real, con potencial de autointeracción  $V(\varphi)$  y que solamente está acoplado gravitacionalmente a los otros campos, se tiene la siguiente densidad lagrangeana (para un caso generalizado a cualquier sistema de coordenadas):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \quad (4.1)$$

La acción generalizada es :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (4.2)$$

Para describir la evolución de un sistema lagrangeano hacemos uso del principio de la acción estacionaria  $\delta S = 0$  en donde  $\delta S$  es el cambio de la acción al hacer una pequeña variación sobre  $\varphi$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \quad (4.3)$$

que se anulará en en la superficie  $\Gamma(\Omega)$  que delimita a una región  $\Omega$ :

$$\delta\varphi(x) = 0 \text{ en } \Gamma(\Omega). \quad (4.4)$$

Así que  $\delta S$  nos queda, según el procedimiento mostrado en la sección B.1 del apéndice B:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \delta(\partial_\alpha \varphi) \right\} \\ &= \int_\Omega d^4x \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

lo cual por el principio de la acción estacionaria implica:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \right) = 0 \quad (4.6)$$

que reconocemos como la *ecuación de campo*.

En especial para un campo escalar, con un lagrangeano de la forma (4.1), obtenemos la siguiente ecuación de campo cuando adoptamos la métrica de Robertson y Walker (2.2):

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (4.7)$$

en donde “ ’ ” significa diferenciación con respecto a  $\varphi$  y  $H$  es el parámetro de Hubble.

## 4.2 Tensor de Energía-Momento

Ahora veamos que el tensor de energía-momento esta dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right) \right\} \quad (4.8)$$

según el desarrollo llevado a cabo en la sección B.2 del apéndice B en donde se reconoce a  $T_{\mu\nu}$  según su definición después de haber visto los efectos sobre la variación de la acción al hacer una variación en el tensor métrico.

Para el caso específico en que el lagrangeano es el de un campo escalar, como el que se muestra en (4.1), tenemos:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right\} \quad (4.9)$$

que en un espacio descrito por la métrica de Robertson y Walker y en donde el campo escalar está distribuido de manera homogénea e isotrópica ( $\partial_i\varphi = 0$ ) se reduce a:

$$T_{00} = \dot{\varphi}^2 - \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \quad (4.10)$$

$$T_{ii} = -g_{ii} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \quad (4.11)$$

Tenemos también una expresión en coordenadas generales para el tensor de energía-momento de un fluido perfecto con densidad de energía  $\rho$ , presión  $p$  y cuadrivelocidad  $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$  [17]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p \quad (4.12)$$

lo cual por el principio de la acción estacionaria implica:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \right) = 0 \quad (4.6)$$

que reconocemos como la *ecuación de campo*.

En especial para un campo escalar, con un lagrangeano de la forma (4.1), obtenemos la siguiente ecuación de campo cuando adoptamos la métrica de Robertson y Walker (2.2):

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (4.7)$$

en donde “ ’ ” significa diferenciación con respecto a  $\varphi$  y  $H$  es el parámetro de Hubble.

## 4.2 Tensor de Energía-Momento

Ahora veamos que el tensor de energía-momento esta dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right) \right\} \quad (4.8)$$

según el desarrollo llevado a cabo en la sección B.2 del apéndice B en donde se reconoce a  $T_{\mu\nu}$  según su definición después de haber visto los efectos sobre la variación de la acción al hacer una variación en el tensor métrico.

Para el caso específico en que el lagrangeano es el de un campo escalar, como el que se muestra en (4.1), tenemos:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right\} \quad (4.9)$$

que en un espacio descrito por la métrica de Robertson y Walker y en donde el campo escalar está distribuído de manera homogénea e isotrópica ( $\partial_i\varphi = 0$ ) se reduce a:

$$T_{00} = \dot{\varphi}^2 - \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \quad (4.10)$$

$$T_{ii} = -g_{ii} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \quad (4.11)$$

Tenemos también una expresión en coordenadas generales para el tensor de energía-momento de un fluido perfecto con densidad de energía  $\rho$ , presión  $p$  y cuadrivelocidad  $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$  [17]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p \quad (4.12)$$

de donde, al asociar el término  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$  con la energía cinética y considerar a la vez las ecuaciones 4.10 y 4.11, encontramos que:

$$\rho_\varphi = E_c + V(\varphi) \quad (4.13)$$

$$p_\varphi = E_c - V(\varphi) \quad (4.14)$$

Por lo anterior se pueden establecer las relaciones:

$$E_c = \frac{1}{2}(\rho_\varphi + p_\varphi) \quad (4.15)$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}(\rho_\varphi - p_\varphi) \quad (4.16)$$

y también la ecuación de estado  $p_\varphi = \omega_\varphi \rho_\varphi$  de donde:

$$\omega_\varphi = \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{E_c - V(\varphi)}{E_c + V(\varphi)} \quad (4.17)$$

Para el caso en que  $V(\varphi) = \text{constante}$  la energía cinética es cero y recuperamos la ecuación de estado  $p_\varphi = -\rho_\varphi$  correspondiente a un universo cuyo tensor de energía-momento es puramente del tipo del asociado a la energía del vacío (modelo de de Sitter).

# Capítulo 5

## Quintaesencia

En la Introducción revisamos los valores experimentales actuales de la densidad de materia y de la asociada al vacío. Es sumamente interesante el que sea  $\Omega_\Lambda$  quien aparentemente domine, con un valor cercano a 0.7, sobre  $\Omega_m$  con valor aproximado 0.3. La razón que nos lleva a considerar al término asociado a la energía del vacío es la aparente aceleración actual del universo. Para que tal dinámica sea posible es necesaria la inclusión, en el modelo cosmológico, de un factor que presente presión negativa. Un campo de quintaesencia  $\varphi$  está definido como uno que tiene dependencia temporal, interactúa sólo de forma gravitacional con los demás campos presentes en el universo y evoluciona según el potencial  $V(\varphi)$ . Además deberá presentar una presión negativa (o sea, un parámetro  $\omega_\varphi < 0$ ).

Un candidato para dar identidad a la quintaesencia es un campo escalar  $\varphi$ , que como vimos en el capítulo 3 puede contribuir de tal manera que se de la expansión acelerada del universo. En lo consiguiente nos referiremos a las cantidades ligadas a la quintaesencia con el subíndice  $\varphi$ . La densidad total, por ejemplo, estará conformada por  $\rho_{total} = \rho_m + \rho_{rad} + \rho_\varphi$  y el parámetro de densidad asociado a la quintaesencia será  $\Omega_\varphi$ .

### 5.1 Ecuaciones para Quintaesencia

Los modelos de quintaesencia obedecerán tanto las ecuaciones de movimiento (2.4, 2.5 y 2.6) como la ecuación de campo escalar (3.7). Como ya hemos mencionado, partiremos

de que la restricción de Friedmann de un universo plano se cumple. El sistema resultante regirá la dinámica del campo escalar en el contexto cosmológico.

Es útil transformar dicho sistema de ecuaciones, de tal forma que las soluciones sean fácilmente visualizadas mediante un plano fase. El cambio de variables que se hace es el siguiente:

$$x \equiv \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6}HM_{Pl}} \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\varphi)}}{\sqrt{3}HM_{Pl}} \quad (5.1)$$

y la restricción de Friedmann para un universo plano queda como:

$$\frac{\rho_\gamma}{3H^2M_{Pl}^2} + x^2 + y^2 = 1 \quad (5.2)$$

en donde  $\rho_\gamma = \rho_m + \rho_{rad}$  es la densidad de un fluido barotrópico que llena el universo, sea éste radiación o materia o una mezcla de las dos. Ahora, utilizando la definición de  $x$  y  $y$  y reconociendo a  $\rho_c \equiv 3H^2M_{Pl}^2$ , expresaremos a  $\Omega_\varphi$  en términos de estas dos variables:

$$\Omega_\varphi = x^2 + y^2 \quad (5.3)$$

que, como vemos de (5.2), debe cumplir:  $\Omega_\varphi \leq 1$ .

También es práctico tomar la dependencia del factor de escala mediante el cambio de variable  $N \equiv \ln a/a_0$  y dejar al sistema en términos de  $N$ . Las ecuaciones resultantes después de implementar los cambios mencionados son:

$$x_N = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + x\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (5.4)$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda xy + y\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (5.5)$$

$$H_N = -H\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (5.6)$$

en donde  $\lambda(N) \equiv -M_{Pl}\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}$ , mientras que  $\gamma_\gamma = 1 + \omega_\gamma$  da la ecuación de estado para  $\rho_\gamma$  y  $p_\gamma$ .

## 5.2 Fenomenología

Habíamos mencionado la condición para un universo con expansión acelerada  $\rho + 3p < 0$  proveniente de la ecuación (2.8). En este punto es necesario que definamos el parámetro

de aceleración:

$$\alpha \equiv \frac{\rho + 3p}{(3\gamma_\gamma - 2)\rho} = \frac{3\gamma - 2}{3\gamma_\gamma - 2} \quad (5.7)$$

cuya construcción muestra la comparación entre la cantidad  $\rho_\gamma + 3p_\gamma$  y la cantidad  $\rho + 3p$ , en donde  $\rho = \rho_\gamma + \rho_\varphi$ . Esto con el fin de saber si el universo sufre una aceleración positiva ( $\alpha < 0$ ), una negativa de menor magnitud que la del fluido barotrópico ( $0 < \alpha < 1$ ), una negativa con mayor magnitud ( $\alpha > 1$ ) o una aceleración idéntica a la del fluido barotrópico ( $\alpha = 1$ ). En términos de  $\Omega_\varphi$ ,  $\gamma_\gamma$  y  $\gamma_\varphi$  el parámetro  $\alpha$  queda como:

$$\alpha = 1 - 3\Omega_\varphi \frac{\gamma_\gamma - \gamma_\varphi}{3\gamma_\gamma - 2}. \quad (5.8)$$

Del sistema de ecuaciones diferenciales mencionado podemos decir que tendrá un comportamiento dependiente de  $\lambda$  y la constante  $\gamma_\gamma$  solamente. Si consideramos el caso particular de una  $\lambda$  constante, los puntos críticos serán los siguientes [18] ( para los cuales se anulan  $x_N$ ,  $y_N$  y  $H_N$  ):

$$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), \left( \frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \right) \text{ y } \left( \frac{\gamma_\gamma}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{3(2 - \gamma_\gamma)\gamma_\gamma}}{2\lambda^2} \right). \quad (5.9)$$

Para la situación general en que  $\lambda$  depende de  $N$ , los puntos anteriores serán importantes en el límite asintótico en que  $\lambda(N)$  se aproxima a un valor determinado. De hecho, será útil hablar del comportamiento del sistema dependiendo del valor asintótico de  $\lambda(N)$  para épocas tardías, quedándonos tres casos que explicaremos como se hace en [19]:

- $\lambda \rightarrow \text{constante} \neq 0$

Los potenciales que presentan  $\lambda = -M_{Pl} \frac{V'}{V} = c$  tienen la forma  $V = b e^{-c\varphi}$  ( $b$  y  $c$  constantes). Podemos entonces utilizar las soluciones críticas (5.9) en donde vemos que los primeros tres puntos críticos son inestables, mientras que los otros dos son estables bajo ciertas condiciones.

El cuarto requiere de  $\lambda^2 < 6$ . El comportamiento del sistema en esta situación es tal que  $\Omega_\varphi = 1$  para tiempos tardíos. Esto nos habla del dominio del campo escalar  $y$ , entonces, de una posible expansión acelerada, la cual dependerá del valor de  $\gamma_\varphi = \frac{\lambda^2}{3}$  según la relación (5.7).

El quinto punto crítico necesita  $\lambda^2 > 3\gamma_\gamma$ , resultando que en este caso  $\Omega_\varphi = \frac{3\gamma}{\lambda^2}$  y  $\gamma_\varphi = \gamma_\gamma$  en etapas tardías. Al tener una ecuación de estado equivalente a la del fluido barotrópico el campo escalar no puede ser causante de una expansión acelerada [18].

- $\lambda \rightarrow 0$

Los potenciales que cumplen con esta condición son del tipo  $V = a\varphi^{-n}$  con  $n > 0$ . Al analizar el sistema formado por las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6) en el límite en que  $\lambda$  es infinitamente pequeña, encontramos que los términos asociados a ésta son despreciables y por lo tanto:  $-3 < \frac{H_N}{H} < 0$  para todos los valores de  $x$ ,  $y$  y  $\gamma_\gamma$ , lo cual nos lleva a:

$$\frac{x_N}{x} = -(3 + \frac{H_N}{H}) < 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{y_N}{y} = -\frac{H_N}{H} > 0 \quad (5.11)$$

que implica una evolución de  $x$  hacia el mínimo  $x = 0$  y de  $y$  hacia su máximo  $y = 1$ . Entonces tenemos una  $\Omega_\varphi \rightarrow 1$ , por lo tanto, dicho término domina en este tipo de universo, para tiempos grandes. Así mismo encontramos que, bajo este régimen ( $\lambda \ll 1$ ), el parámetro de aceleración  $\alpha = -\frac{2}{3\gamma_\gamma - 2}$  es siempre negativo, lo cual conlleva a la expansión acelerada del universo.

- $\lambda \rightarrow \infty$

- $\lambda$  no oscilante

En este caso el sistema se reduce a uno en que sólo los términos proporcionales a  $\lambda$  están presentes. La dinámica estará regida por las ecuaciones:

$$x_N = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 \quad (5.12)$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda xy \quad (5.13)$$

en las que vemos que, para  $|x|$  y  $|y|$  no muy pequeños, el signo de  $\lambda$  determinará la dirección del cambio en  $x$  ( $\lambda > 0 \Rightarrow x_N > 0$  y  $\lambda < 0 \Rightarrow x_N < 0$ ). En ambos casos el signo de  $y_N$  es negativo, por lo que  $y \rightarrow 0$ , lo cual, en algún momento, causará que la simplificación que hicimos a las ecuaciones (5.4) y (5.5) deje de ser válida. Ahora veamos que con la condición obtenida  $|x| \geq |\lambda|y^2$  la variable

$x$  sigue la relación  $\frac{x_N}{x} = -(3 + \frac{H_N}{H}) < 0$  por lo que se aproximará de manera absoluta a cero, al igual que  $y$ . El quinto de los puntos críticos mencionados en (5.9) representará la solución asintótica, es importante recalcar que por su dependencia de  $\lambda$  no llegará a un valor constante. Entonces, el sistema terminará arrojando un valor para  $\gamma_\varphi$  cada vez más cercano al de  $\gamma_\gamma$ , lo cual generará una dinámica en la que el universo evoluciona sin aceleración positiva. Este tipo de potenciales (por ejemplo  $V = e^{-a\varphi^2}$  ó  $V = e^{-ae^\varphi}$ ) hacen que el parámetro de aceleración se aproxime, después de poco tiempo, a 1, indicando que el campo escalar dicta una evolución similar a la que se da cuando no está presente. Para obtener una expansión acelerada en tiempos recientes el campo deberá tener un origen tardío, lo cual nos hace desechar esta posibilidad [19].

–  $\lambda$  oscilante

Los potenciales que se encuentran dentro de esta categoría son tales que es posible hacer una expansión en series de potencias de  $\varphi$  alrededor del mínimo, al que tomaremos en  $\varphi = 0$  sin pérdida de generalidad. Al quedarnos con el término dominante (puesto que la oscilación es alrededor de cero) tenemos que  $V = V_i \varphi^n$  en donde  $n$  es la menor potencia de la serie y debe ser un número par positivo para que el potencial sea acotado por abajo y su derivada sea cero en el mínimo. Entonces  $\lambda = -M_{Pl} \frac{n}{\varphi}$  oscila entre  $\infty$  y  $-\infty$  debido a la oscilación de  $\varphi$  alrededor de cero. En el límite asintótico tenemos una evolución  $H \propto \frac{1}{t}$  por lo que, para contar con una  $\Omega_\varphi$  constante, los parámetros  $x = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6} H M_{Pl}}$  y  $y = \frac{\varphi^{n/2}}{\sqrt{3} H M_{Pl}}$  deben ser tales que  $\dot{\varphi}, \varphi^{n/2} \propto \frac{1}{t}$  para que  $x$  y  $y$  sean constantes u oscilen. Ahora escribamos  $y = B F_1^{n/2}[G(t)]$  y  $x = A F_2[G(t)]$  en donde  $F_1$  y  $F_2$  son funciones oscilatorias arbitrarias, que dependen del tiempo mediante un argumento desconocido  $G(t)$ ;  $A$  y  $B$  son constantes. Calculando las derivadas con respecto a  $N$  nos queda:

$$x_N = \frac{dF_2}{dG} \frac{G_N}{F_2} x, \quad (5.14)$$

$$y_N = \frac{n}{2} \frac{dF_1}{dG} \frac{G_N}{F_1} y \quad (5.15)$$

en donde el subíndice  $N$  significa diferenciación con respecto a  $N$ .

Debido a la naturaleza oscilatoria de  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) tenemos que  $\langle F_i^2 \rangle = \langle (\frac{dF_i}{dG})^2 \rangle$

y para  $x$  y  $y$ :

$$\langle y_N^2 \rangle = \frac{n^2}{4} \langle G_N^2 y^2 \rangle \quad (5.16)$$

$$\langle x_N^2 \rangle = \langle G_N^2 x^2 \rangle. \quad (5.17)$$

En el límite asintótico en que  $\lambda \rightarrow \infty$  podemos utilizar las ecuaciones (5.12) y (5.13), junto con el resultado anterior, para encontrar:

$$\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \frac{2}{n} \quad (5.18)$$

que nos lleva a:

$$\langle \gamma_\varphi \rangle = \frac{2}{1 + \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle}} = \frac{2n}{2 + n} \quad (5.19)$$

Ahora podremos ver que  $\Omega_\varphi$  tendrá el siguiente comportamiento asintótico: para  $\gamma_\varphi > \gamma_\gamma$  tenemos  $\Omega_\varphi \rightarrow 0$ , para  $\gamma_\varphi < \gamma_\gamma$  tenemos  $\Omega_\varphi \rightarrow 1$  y si  $\gamma_\varphi = \gamma_\gamma$  tenemos  $\Omega_\varphi \rightarrow \text{constante}$  (con  $0 < \text{constante} < 1$ ). También reconocemos que un campo cuyo potencial posee  $n = 2$  evolucionará como materia ( $\gamma_\varphi = 1$ ) y con uno en el que  $n = 4$  lo hará como radiación ( $\gamma_\varphi = \frac{4}{3}$ ).

La condición sobre  $\gamma_\varphi$  para una expansión acelerada según el parámetro  $\alpha$  en términos de  $\Omega_\varphi$ ,  $\gamma_\gamma$  y  $\gamma_\varphi$  (5.8) es la siguiente:

$$\gamma_\varphi < \gamma_\gamma - \frac{\gamma_\gamma - \frac{2}{3}}{\Omega_\varphi} \quad (5.20)$$

De donde vemos que para  $\Omega_\varphi = 1$  y  $\gamma_\gamma = \gamma_m$  se tendrá la restricción  $\gamma_\varphi < \frac{2}{3}$ .

Así concluimos que en el caso de una  $\lambda$  oscilante serán los parámetros  $\Omega_\varphi$ ,  $\gamma_\gamma$  y  $\gamma_\varphi$  quienes darán la posibilidad de un universo en expansión acelerada según la relación (5.20).

# Capítulo 6

## Modelos con $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$

En el capítulo 5 (sección 5.2) se mencionó la posibilidad de que un modelo con  $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$  presente una expansión acelerada del universo. En este capítulo trataremos este tipo de potenciales más a fondo para corroborar que dicho modelo puede generar un universo como el observado en la actualidad, el cual aparentemente tiene una aceleración positiva.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: comenzamos hablando de las motivaciones para los potenciales de la forma  $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$  (sección 6.1). Luego presentamos un análisis del comportamiento del sistema de ecuaciones diferenciales que nos permite identificar la dinámica de dichos modelos al dividir el proceso en cuatro períodos y obtener expresiones de algunos parámetros en forma analítica como, por ejemplo, el momento en que aparece el campo de quintaesencia (sección 6.2).

A continuación, en la sección 6.3, se consideran restricciones físicas como el límite  $\Omega_\varphi < 0.1$  de la etapa de nucleosíntesis, la necesidad de un parámetro de la ecuación de estado  $\omega_{\varphi 0} < -0.7$  y la necesidad de un parámetro de densidad  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7$ , las cuales, junto con el análisis cualitativo, sirven para determinar los valores de  $n$  posibles. Encontramos que para  $\Omega_{\varphi i} = 0.25$  tenemos  $n \notin 1.25 - 2.1$  y también  $n < 2.75$ .

La sección 6.4 tiene el objetivo de presentar las soluciones numéricas de tres casos particulares:  $n = 1$ ,  $18/7$  y  $2/3$ , de los cuales los primeros dos son producto de la selección de cierto juego de los números asociados al grupo de norma  $SU(N_c)$ :  $N_c$ ,  $N_f$  y  $\nu$  que, al igual que los del modelo estándar, no pueden ser determinados por primeros principios; el tercero muestra el caso en que el potencial  $V(\varphi)$  es obtenido como consecuencia de la

condensación de las partículas cargadas de un grupo de norma, el cual coincidirá tanto en la constante de acoplamiento como en la escala de energía con las de la gran unificación de los grupos de norma del modelo estándar. En este último caso encontramos que es posible explicar la expansión acelerada del universo mediante un potencial del tipo predicho por las teorías de gran unificación.

## 6.1 Motivación para un potencial $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$

Tenemos dos principales motivaciones que nos sugieren elegir a los modelos con potenciales de la forma  $V \propto \varphi^{-n}$  con  $n > 0$ . La primera es que su comportamiento es adecuado para coincidir con las observaciones actuales, las cuales muestran que el universo parece estar acelerándose. Como vimos en la sección 5.2 dichos modelos presentan una  $\lambda \rightarrow 0$  y tienen un desarrollo en que la situación final es la de un universo acelerado.

La segunda motivación proviene de las teorías de supergravedad en las que modelos de este tipo pueden aparecer de manera natural. Consideraremos el caso en el que el potencial es generado por los campos fundamentales de un grupo de norma no abeliano  $SU(N_c)$ . Dichos campos estarán desprovistos de masa en un principio, situación que cambiará al decrecer la escala de energía característica del universo y crecer la constante de acoplamiento del grupo de norma. Los campos fundamentales de dicho grupo se condensarán cuando se alcance la *escala de energía de condensación*  $\Lambda_c$ <sup>§</sup> en que las interacciones de norma entre sus partículas asociadas se vuelven fuertes. Por debajo de esta energía no quedan campos fundamentales libres. Parametrizamos a los condensados  $Q\bar{Q}$  en términos de un campo escalar  $\varphi$ , en donde  $Q$  y  $\bar{Q}$  son los campos fundamentales de  $SU(N_c)$ . El campo escalar  $\varphi$  está dado por  $\varphi^2 = \langle Q\bar{Q} \rangle$ , nótese que el campo  $\varphi$  tiene dimensiones de masa. Por análisis dimensional tomamos a la escala  $\Lambda_c$ , la única relevante para el fenómeno de condensación, como el valor natural para  $\varphi_i$ .

El potencial  $V(\varphi)$  tiene origen en el superpotencial de Affleck y Seiberg  $W(\varphi)$  asociado al grupo de norma [20] en el cual  $N_c$  es el número de colores,  $N_f$  el de fermiones y  $\nu$  el de los campos generados dinámicamente, o sea los que aparecen con la condensación de

<sup>§</sup>Es prudente aclarar que las  $\Lambda_x$  (con  $x = c, GU$ ) de las que hablaremos se refieren a escalas de energía y no tienen relación alguna con la constante cosmológica  $\Lambda$  que tiene unidades de densidad de energía.

las partículas cargadas [21]. La forma en que se obtiene  $V(\varphi)$  se muestra en el apéndice D. Tenemos entonces la expresión:

$$V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \varphi^{-n} \quad (6.1)$$

de donde observamos que los parámetros libres son  $\nu$ ,  $N_c$ , y  $N_f$ , los cuales determinan la potencia de  $\varphi$  a través de  $n = \frac{4\nu}{N_c - N_f} + 2$ .

Buscaremos también conectar lo anterior con la física de la gran unificación [21, 22]. Así estaremos relacionando los modelos de quintaesencia con teorías basadas en un origen común de las fuerzas fundamentales del universo. Una de las consecuencias de trabajar con dichas teorías es que la “constante” de acoplamiento depende de la evolución de la escala de energía típica del universo. Lo que haremos será relacionar la escala de energía  $\Lambda_c = \sqrt{\frac{M_U}{2\nu}} \rho_{\varphi i}^{1/4}$ , que tomamos como valor para  $\varphi_i$ , con la escala de energía de gran unificación  $\Lambda_{GU}$ , esto por medio de la expresión [21]:

$$\Lambda_c = \Lambda_{GU} e^{-\frac{1}{2b_0 g_{GU}^2}} \quad (6.2)$$

en donde  $b_0 \equiv \frac{b}{16\pi^2} = \frac{3N_c - N_f}{16\pi^2}$  es el coeficiente de la función  $\beta$  de Gell-Mann en primera aproximación (*one-loop*) [23]. Tomaremos  $\Lambda_{GU} = 10^{16} \text{GeV}$  y  $g_{GU}^{-2} = \frac{25.7}{4\pi}$  [24]. Para esbozar el desarrollo de la constante de acoplamiento  $g$  del grupo de norma asociado al campo escalar incluimos la figura 6.19 al final del capítulo, que muestra el desarrollo en términos de la energía de dicha constante y de las constantes de acoplamiento  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  del modelo estándar.

## 6.2 Análisis cualitativo del sistema

### 6.2.1 El Análisis

Para dilucidar la fenomenología de un universo en el que existe un campo escalar cuyo potencial de autointeracción es como los recientemente descritos, es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para los modelos de quintaesencia presentado en el

capítulo anterior:

$$x_N = -3x + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y^2 + x\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (6.3)$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda xy + y\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (6.4)$$

$$H_N = -H\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (6.5)$$

Éste no tendrá en general soluciones analíticas, por lo que para entender el comportamiento del sistema de ecuaciones diferenciales, dividiremos la evolución del mismo en periodos dados por los distintos términos dominantes en cada caso y que asociaremos al desarrollo del parámetro de densidad  $\Omega_\varphi$  (figura 6.2.1). En el Apéndice C se muestra el análisis de cada período. El comportamiento de las ecuaciones diferenciales estará fuertemente determinado por el parámetro  $\lambda$ , para el análisis de éstas se tomará la condición inicial  $\lambda_i \gg 1$ , lo cual corresponde a  $\varphi_i \ll M_{Pl}$  que es consecuencia de pensar que el campo no aparece en los inicios del universo en que la energía característica era la de Planck sino mucho después, cuando la energía típica del universo es mucho menor.

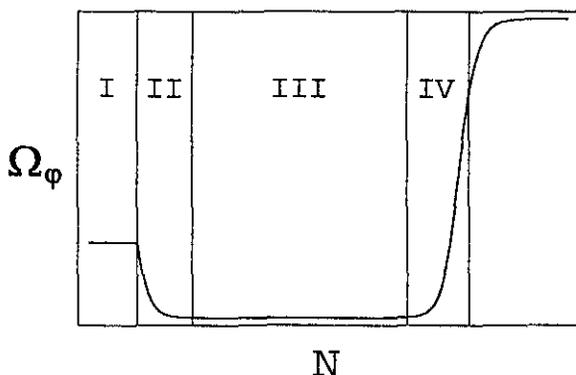


Figura 6.1: Desarrollo de  $\Omega_\varphi$  con respecto a  $N$  mostrando los cuatro períodos. El período I presenta una duración exagerada para facilitar la exposición. El final del período IV está dado por  $\Omega_\varphi = 0.7$  que es el valor actual sugerido por las observaciones para este parámetro. (En este caso se utilizó un potencial de la forma  $V(\varphi) \propto \varphi^{-1}$ ).

Durante el período I encontramos que se cumple la relación (ver sección C.1 del

apéndice C):

$$x^2 + y^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad (6.6)$$

por lo que  $\Omega_\varphi \equiv x^2 + y^2$  es constante para esta etapa. También vemos que  $y \rightarrow 0$  por lo que  $x_{II} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ , en donde el subíndice II indica el final del período I y el comienzo del II.

De considerar la ecuación 6.5, despreciando los términos cuadráticos, tenemos la solución para  $H$ :

$$H = H_i e^{-\frac{1}{2}\gamma_\gamma N} \quad (6.7)$$

Esta función será tomada como válida para los períodos I, II y III en los que transcurre prácticamente todo el proceso.

Es importante notar que este período termina cuando el primer término de la ecuación para  $y_N$  (ecuación 6.4) es comparable al segundo, lo cual sucede rápidamente en términos de  $N$  puesto que  $\lambda$  y  $y$  decrecen, en un principio, proporcionalmente a  $\lambda_i \gg 1$ .

El período II está caracterizado por llevar a la variable  $y$  a su mínimo valor, el cual será de importancia al calcular posteriormente la  $N$  total. Este valor mínimo es el siguiente (ecuación C.23 del apéndice C):

$$y_{min} = y_i^{\frac{4+n}{4}} \left( \frac{3^{3/4}}{2\sqrt{\nu}} \frac{\gamma_\gamma}{n\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \sqrt{\frac{H_i}{M_{Pl}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (6.8)$$

Podemos verificar que  $y_{min} \ll 1$  puesto que  $H_i \ll M_{Pl}$ . A partir de este momento la evolución de  $y$  estará dada por (ver sección C.2 del apéndice C):

$$y = y_{min} e^{\frac{1}{2}\gamma_\gamma N} \quad (6.9)$$

lo cual se cumple también para todo el período III.

Durante el período II se da un decrecimiento en  $\Omega_\varphi$  dado por:

$$\Omega_\varphi = \frac{\Omega_{\varphi i}}{\Omega_{\varphi i} + (1 - \Omega_{\varphi i})e^{2N}} \quad (6.10)$$

el cual nos dará información importante sobre la  $N$  para la cual  $\Omega_\varphi < 0.1$  ( $N_{III}$ ), condición que tiene implicaciones cosmológicas que serán revisadas más tarde.

El período III tiene relevancia puesto que presenta un *escalamiento* (encontrado en la literatura como *scaling*) en el cual se da un incremento de varios órdenes de magnitud

del factor de escala sin que las condiciones físicas, como la densidad de energía asociada al vacío, sean alteradas drásticamente. Para este período tenemos que el parámetro  $\lambda$  puede ser considerado constante ya que  $\lambda \propto (y H)^{2/n}$  cuando  $y H = \text{constante}$ , todo esto según la sección C.3 del apéndice C.

El período IV es el que presenta el crecimiento final que lleva a  $\Omega_\varphi$  al valor 0.7, consistente con las observaciones actuales. Durante este período  $\lambda$  deja de ser constante y la dinámica se hace más complicada (ver sección C.4 del apéndice C), sin embargo, el desarrollo de otros parámetros, como el de aceleración, ilustrarán la situación en los ejemplos numéricos.

## 6.2.2 Redefinición de algunos parámetros

Antes de comenzar la descripción de las propiedades para distintas  $n$  es preciso redefinir ciertos parámetros que fueron introducidos en la sección 5.2. Esto con el fin de expresarlos en términos de  $x$  y  $y$ , lo cual será de utilidad al analizar su evolución.

El parámetro  $\gamma_\varphi$ , definido por  $\gamma_\varphi \equiv \omega_\varphi + 1$  toma la forma:

$$\gamma_\varphi = \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} + 1 = \frac{p_\varphi + \rho_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{V(\varphi) + \dot{\varphi}^2/2} \quad (6.11)$$

y en términos de  $x$  y  $y$  es:

$$\gamma_\varphi = \frac{2x^2}{x^2 + y^2}. \quad (6.12)$$

El parámetro de aceleración  $\alpha$  se encuentra definido por la ecuación (5.8) en términos de  $\gamma_\gamma$ ,  $\gamma_\varphi$  y  $\Omega_\varphi = x^2 + y^2$  (5.3). Al sustituir la expresión para  $\gamma_\varphi$  presentada en el párrafo anterior nos queda:

$$\alpha = 1 - \frac{3\gamma_\gamma}{3\gamma_\gamma - 2} \left( y^2 - x^2 \frac{2 - \gamma_\gamma}{\gamma_\gamma} \right) \quad (6.13)$$

Como se vio en la sección 5.2, la aceleración del factor de escala  $a(t)$  depende del signo del parámetro  $\alpha$ . Es posible, según la expresión (6.13), determinar una región en el plano fase  $x - y$  para la cual el universo es acelerado. Ésta está dada por:

$$0 > 1 - \frac{3\gamma_\gamma}{3\gamma_\gamma - 2} \left( y^2 - x^2 \frac{2 - \gamma_\gamma}{\gamma_\gamma} \right) \quad (6.14)$$

y toma la forma sobre en el plano  $x - y$  que se muestra en la figura 6.2 cuando consideramos  $\gamma_\gamma = 1$  puesto que  $\gamma_{\gamma 0}$  es la correspondiente a la materia:

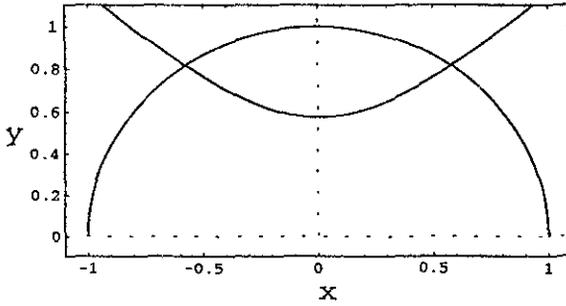


Figura 6.2: La zona para la cual el universo se acelera es la delimitada por abajo por la expresión  $0 = 1 - 3(y^2 - x^2)$  pues se ha tomado  $\gamma_\gamma = 1$ .

### 6.3 Restricciones físicas sobre los potenciales

En la sección 6.2 se mencionó una forma de calcular la duración total  $N_{total}$  en términos del valor mínimo  $y_{min}(x_i, y_i, n, M_{Pl}, \gamma_\gamma, \nu)$  mostrado en la ecuación 6.8. Esto es posible porque durante la mayor parte del proceso  $y$  crece de manera exponencial. Además será necesario tomar en cuenta que el universo es dominado por radiación antes del valor  $N_{r=m}$  para después ser dominado por materia, por lo tanto  $\gamma_\gamma = 4/3$  para  $N < N_{r=m}$  y  $\gamma_\gamma = 1$  para  $N > N_{r=m}$ . El valor que tomaremos para  $N_{r=m}$  será  $9.6^{\S}$  que corresponde a un parámetro de Hubble  $H_{r=m} = 2.6889 \times 10^{-36} \text{GeV}$  [8]. Así, la expresión en términos de  $y_{min}$  para  $N_{total}$  es:

$$N_{total} = \frac{2}{3} \left( \left( 1 - \frac{N_{r=m}}{2} \right) \ln y_0 - \frac{3}{4} \ln y_{min} \right) \quad (6.15)$$

con  $y_{min}(x_i, y_i, n, M_{Pl}, \gamma_\gamma, \nu)$ . Hemos de suponer también que el valor actual de  $y$  es uno que corresponde a una  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7$  y a una  $\gamma_{\varphi 0} < 1/3$ , lo cual en conjunto implica que de manera aproximada  $x_0 \leq 0.3$  y  $y_0 \geq 0.8$  que nos permite elegir  $x_0 = 0.3$  y  $y_0 = 0.8$ .

La discrepancia entre el valor numérico y el analítico obtenido de la expresión anterior es pequeña, como ejemplo tenemos que para  $n = 3$ :

$$N_{total}(\text{numérico}) = 33.050 \quad (6.16)$$

y

$$N_{total}(\text{analítico}) = 33.095 \quad (6.17)$$

Por otro lado, el valor  $y_{min}$  puede ser utilizado para determinar el valor inicial  $H_i$ . Esto gracias a que tanto  $y$  como  $h$  tienen un desarrollo exponencial, creciente y decreciente, respectivamente. Así que gracias a la relación  $\frac{y_0}{y_{min}} = \frac{H_i}{H_0}$  se obtiene:

$$H_i = \frac{\left(\frac{H_0}{M_{Pl}} y_0\right)^{\frac{4}{4+n}}}{y_i} \left(\frac{4}{3^{3/2}} \frac{\nu n^2}{\gamma^2} (x_i^2 + y_i^2)\right)^{\frac{n}{4+n}} M_{Pl} \quad (6.18)$$

que nos proporciona además una forma de calcular analíticamente cantidades que podemos poner en términos de  $H_i$  como son  $\varphi_i$  y  $\rho_{\varphi_i}^{1/4}$ .

Durante la etapa cosmológica de nucleosíntesis es necesario, según el modelo estándar, que la densidad de energía asociada al vacío no exceda cierto límite. Un término de éste tipo propiciaría una abundancia primordial de  ${}^4\text{He}$  menor a la observada, esto debido a que provoca un incremento de la duración de la nucleosíntesis que permite que más neutrones decaigan por decaimiento  $\beta$  [3]. Así se determina el límite  $\Omega_\varphi(N_{n_s}) < 0.1$  [25, 3, 4] que se traduce en una restricción sobre la  $N_{inicial}$  de nuestro modelo, puesto que consideraremos que  $\Omega_{\varphi_i}$  puede tomar valores mayores a 0.1. Ahora recordemos el resultado del período II, visto en la sección anterior, en donde se muestra una función  $\Omega_\varphi(N)$  que corresponde a la bajada inicial de este parámetro desde su valor inicial hasta un valor menor a 0.1 (véase la figura 6.2.1). Dicho lapso será sumado a la  $N$  que da inicio al período de nucleosíntesis para asegurar que, aunque el campo escalar aparezca antes de  $N_{n_s}$ , al llegar a dicha etapa su contribución a la densidad total de energía esté por debajo del límite mencionado.

Al tomar como el rango de energías característico de nucleosíntesis a  $E_{n_s} \sim 0.1 - 10\text{MeV}$  [15] tenemos que  $N_{n_s}$  estará entre 19.9 y 24.5. Si consideramos una  $\Omega_{\varphi_i}$  menor a 0.98 ésta sufrirá una bajada a 0.1 en  $N_{bajada} = 3$  por lo que 19.9 – 27.5 es el intervalo de valores no permitidos por la restricción sobre  $N$  dada por nucleosíntesis. Nótese que este es un caso conservador y que la condición sobre las  $N$  permitidas puede ser relajada al tomar valores menores de  $\Omega_{\varphi_i}$ . De hecho, si  $\Omega_{\varphi_i} < 0.1$ , no existe restricción alguna.

El parámetro  $\omega_\varphi$ , que da la ecuación de estado para el campo escalar (ver ecuación 4.17), es restringido por las observaciones de supernovas lejanas. El límite para este parámetro es  $\omega_{\varphi 0} < -2/3$ , sin embargo, es útil considerar en su lugar  $\omega_{ef} < -0.7$  [26], en donde  $\omega_{ef}$  es la constante que llevaría al universo a un desarrollo como el dado por una

<sup>5</sup>Los valores de  $N$  serán reportados en valor absoluto pues nos referimos solamente a etapas anteriores del universo que por la definición  $N = \ln(a/a_0)$  presentan valores de  $N$  siempre negativos.

$\omega_\varphi$  dependiente del tiempo. Veamos su definición:

$$\omega_{ef} \equiv \frac{\int da \Omega_\varphi(a) \omega_\varphi(a)}{\int da \Omega_\varphi(a)} = \frac{\int dN e^N \Omega_\varphi(N) \omega_\varphi(N)}{\int dN e^N \Omega_\varphi(N)} \quad (6.19)$$

recordando que  $N \equiv \ln \frac{a}{a_0}$ . La razón para esta nueva definición es que la restricción de origen experimental es dada en términos de una  $\omega_\varphi$  constante [12, 27, 26].

La solución numérica de diferentes ejemplos nos dará información sobre las  $n$  que son excluidas por las distintas restricciones. Se tendrá presente el cambio en  $\gamma_\gamma$  de 4/3 a 1 en  $N_{r=m}$ . Será necesario además, para todos los ejemplos, que ciertas condiciones físicas dadas por métodos observacionales sean respetadas, éstas son:  $H_0 = (1.4932 \pm 0.2137) \times 10^{-42} \text{GeV} = h 8.7564 \times 10^{-61} M_{Pl}$ , en donde  $h_0 = 0.7 \pm 0.1$  [5] y, considerando un universo plano:  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7 \pm 0.1$  (tabla 1.1).

Los resultados en parámetros relevantes para la determinación de  $n$  son presentados en la tabla 6.1. Éstos provienen de la solución numérica de las ecuaciones de quintaesencia cuando las condiciones iniciales son:  $x_i = 0$  y  $y_i = 0.5$  que implican  $\Omega_{\varphi i} = 0.25$ ,  $\nu = 1$  y el valor  $H_i$  (o  $H_i$ ), distinto para cada caso, causante de una situación final de  $H_0$  y  $\Omega_{\varphi 0}$  consistente con las observaciones.

| $n$   | $H_i$ (en GeV)         | $\rho_{\varphi i}^{\frac{1}{4}}$ (en GeV) | $\alpha_0$ | $\omega_{\varphi 0}$ | $\omega_{ef}$ | $N_{total}$ |
|-------|------------------------|---|------------|----------------------|---------------|-------------|
| 2/3   | $1.16 \times 10^{-33}$ | $7.00 \times 10^{-8}$                     | -1.02      | -0.9662              | -0.9781       | 12.96       |
| 1     | $3.43 \times 10^{-30}$ | $3.81 \times 10^{-6}$                     | -0.93      | -0.9310              | -0.9542       | 16.96       |
| 5/4   | $7.31 \times 10^{-28}$ | $5.55 \times 10^{-5}$                     | -0.87      | -0.8960              | -0.9295       | 19.63       |
| 13/10 | $1.95 \times 10^{-27}$ | $9.06 \times 10^{-5}$                     | -0.86      | -0.8879              | -0.9236       | 20.15       |
| 19/10 | $9.74 \times 10^{-23}$ | $2.03 \times 10^{-2}$                     | -0.64      | -0.7854              | -0.8456       | 25.52       |
| 2     | $4.63 \times 10^{-22}$ | $4.41 \times 10^{-2}$                     | -0.60      | -0.7666              | -0.8305       | 26.33       |
| 21/10 | $1.95 \times 10^{-21}$ | $9.06 \times 10^{-2}$                     | -0.57      | -0.7466              | -0.8135       | 27.16       |
| 18/7  | $1.70 \times 10^{-18}$ | 2.68                                      | -0.37      | -0.6555              | -0.7325       | 30.41       |
| 3     | $3.41 \times 10^{-16}$ | 37.92                                     | -0.20      | -0.5749              | -0.6513       | 33.05       |
| 31/10 | $1.10 \times 10^{-15}$ | 67.99                                     | -0.17      | -0.5577              | -0.6320       | 33.61       |

Tabla 6.1: Resultados de soluciones numéricas de modelos de quintaesencia con  $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$  para distintas  $n$ .

Finalmente, de la restricción dada por el límite sobre  $\Omega_\varphi$  durante nucleosíntesis

tenemos que  $n$  no puede estar en el intervalo  $1.25 - 2.1$  (ver tabla 6.1). De la restricción sobre  $\omega_{ef}$  tenemos que  $n < 2.75$ , como se ve en la figura 6.16 que se muestra al final del capítulo y en donde se grafican los valores de  $\omega_{ef}$  con respecto a  $n$ , la misma gráfica para  $\omega_{\varphi_0}$  nos da la restricción  $n < 2.5$  (figura 6.17). El que la restricción proveniente de  $\omega_{\varphi_0}$  sea más estricta que la impuesta por  $\omega_{ef}$  es debido a que la segunda toma en cuenta el desarrollo previo de  $\omega_{\varphi}$  que, como veremos en la figura 6.12, presenta valores más negativos de  $\omega_{\varphi}$ .

## 6.4 Ejemplos numéricos de algunos potenciales con $n > 0$

### 6.4.1 Comportamiento con $n = 1$

Como primer ejemplo de un potencial consistente en una potencia negativa de  $\varphi$  trataremos numéricamente el caso de  $V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \frac{1}{\varphi}$ , o sea:  $n = 1$ . En la sección 6.1 mencionamos que los potenciales que consideraríamos tendrían origen en la condensación de las partículas de un grupo de norma, en el caso particular de  $n = 1$  la combinación que produciría el potencial sería:  $N_c = 1$ ,  $N_f = 5$  y  $\nu = 1$  en donde  $N_c$  es el número de colores del grupo de norma,  $N_f$  el de fermiones y  $\nu$  el de los fermiones que se condensan para producir a las partículas escalares. Estos números no pueden ser determinados por primeros principios pero dicha elección queda al mismo nivel que la de la cantidad de campos en el modelo estándar de partículas elementales [21].

Recordemos que los rangos permitidos que determinamos en la sección 6.3 restringen a  $n$  a los intervalos  $0 - 1.25$  y  $2.1 - 2.75$ , por lo que  $n = 1$  es permitido.

Las condiciones iniciales que tomaremos en este caso son:  $x_i = 0$  y  $y_i = 0.5$  ( $\Omega_{\varphi i} = 0.25$ ), entonces tendremos que para coincidir con  $h_0 = 0.7$  y  $\Omega_{\varphi_0} = 0.7$  necesitamos  $H_i = 3.43 \times 10^{-30} \text{GeV}$ , el valor inicial del parámetro de Hubble será el que ajustaremos para que, ya definidas  $n$  y  $\Omega_{\varphi_0} = 0.7$ , el sistema evolucione congeniando con la situación física actual.

Este ejemplo muestra también:  $\rho_i^{\frac{1}{4}} = 3.81 \times 10^{-6} \text{GeV}$ ,  $\Lambda_c = 1.90 \times 10^{-6} \text{GeV}$ ,  $\alpha_0 = -0.93$ ,  $\omega_0 = -0.9310$ ,  $\omega_{ef} = -0.9542$  y  $N_{total} = 16.96$ .

Para las mismas condiciones iniciales ( $x_i = 0$ ,  $y_i = 0.5$  y  $H_i = 3.43 \times 10^{-30} \text{GeV}$ ), que hacen coincidir la solución numérica con  $h_0 = 0.7$  y  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7$  experimentales, la característica esperada de la aceleración final del universo es reconocida en el plano fase  $x - y$  (figura 6.3). En éste se observa que la región en que el universo es acelerado es alcanzada por la trayectoria antes de cruzar el círculo que define el estado actual  $\Omega_{\varphi 0} = x_0^2 + y_0^2 = 0.7$ , el cual aparece trazado en líneas cortas de la misma manera que el círculo  $\Omega_{\varphi 0} = 1$ .

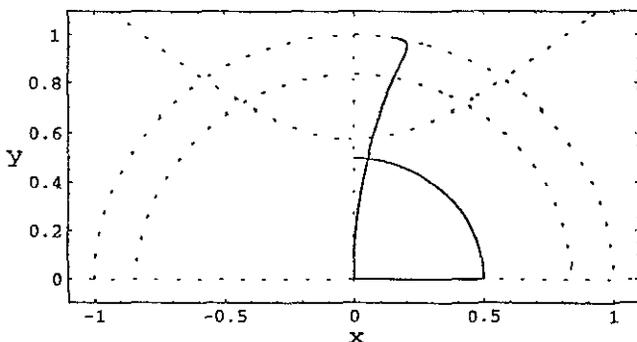


Figura 6.3: Plano fase  $x - y$  para  $n = 1$ . Los valores iniciales son  $x_i = 0$  y  $y_i = 0.5$ .

Aun cuando hemos hecho un análisis cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales (sección 6.2), no es sencillo determinar, basándonos en éste, el desarrollo en detalle de los distintos parámetros. El análisis es suficiente para esbozar el comportamiento general del sistema, sin embargo, algunas cantidades, como el parámetro de aceleración  $\alpha$ , son extremadamente sensibles a los cambios relativos entre  $x$  y  $y$ . Los resultados numéricos son entonces de gran utilidad, puesto que de éstos podemos obtener gráficos de cualquier parámetro que definirán con precisión la situación física en cada caso.

- $\Omega_{\varphi}$ : Ahora presentaremos la evolución de  $\Omega_{\varphi}$  (figura 6.4) lo cual nos ayudará a dar un mejor seguimiento al desarrollo del sistema en general ya que es posible interpretar a  $\Omega_{\varphi}$  como el cuadrado de la norma de los puntos  $(x, y)$  presentados en el plano fase. Podemos observar que la descripción analítica de la sección 6.2 es consistente con el desarrollo numérico. El llamado período I no aparece debido a su corta duración. El período II, la caída de  $\Omega_{\varphi}$ , ocurre en  $N \sim 0 - 2.5$ . Vemos que

la etapa de escalamiento o período III se da en  $N = 2.5 - 15$  aproximadamente. El cuarto y último período se da entre  $N \sim 15$  y  $N_{total} = 16.96$ . En el gráfico descrito observamos que los períodos I, II y IV son cortos en comparación con el III, de ahí concluimos que las trayectorias visibles en el plano fase  $x - y$  (figura 6.3) son seguidas con rapidez y el sistema permanece con  $(x, y)$  muy cercano a cero durante casi todo su desarrollo.

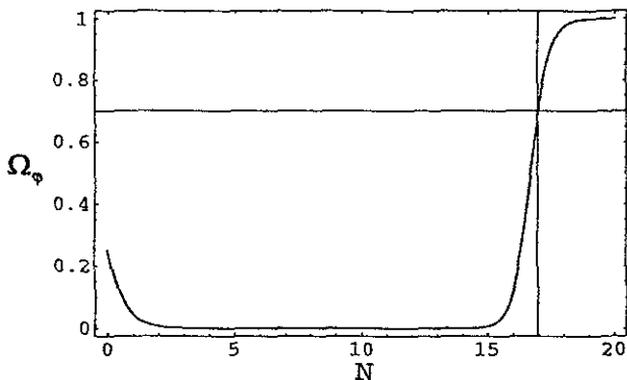


Figura 6.4: Desarrollo de  $\Omega_\phi$  con respecto a  $N$  para  $n = 1$ . La línea horizontal corresponde a  $\Omega_\phi = 0.7$  y la vertical nos da la  $N_{total} = 16.96$ .

- $x$ : De la definición  $x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6H M_{Pl}}}$  e identificando la raíz de  $\rho_c$  ( $\rho_c \equiv 3H^2 M_{Pl}^2$ ) en el denominador, podemos decir que la variable  $x$  nos da la contribución por parte de la raíz de la energía cinética asociada al campo escalar  $\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2}}$  en comparación con la raíz de la densidad crítica. En la etapa de escalamiento esta contribución es despreciable, como vemos en la figura 6.5, y no es sino en las fases inicial y final que percibimos dicha aportación.

Para entender más a fondo el desarrollo seguido por  $x$  es ilustrativo consultar un gráfico semi-log (figura 6.6). De ahí podemos reconocer el cambio en  $\gamma_\gamma$  al ser el universo primero dominado por radiación y luego por materia. Esto se traduce en un cambio de la pendiente en el gráfico semi-log pues la evolución de  $x$  en dicha etapa está dada por una exponencial cuyo exponente es proporcional a  $\gamma_\gamma$ , como se vio en la sección 6.2.

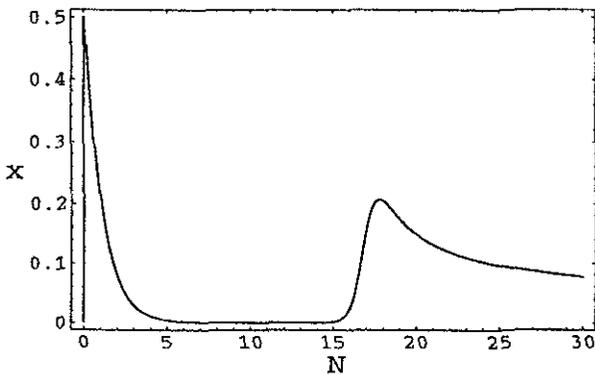


Figura 6.5: Evolución de  $x$  para  $n = 1$ .

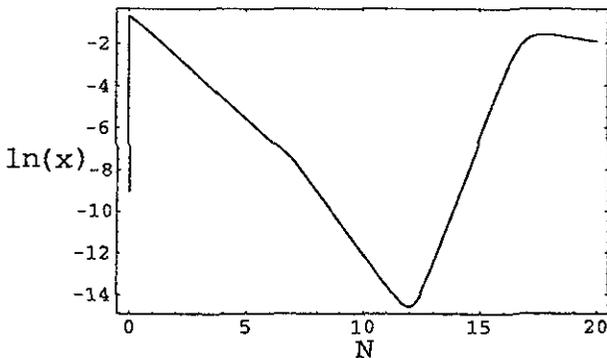


Figura 6.6: Evolución de  $\ln x$  para  $n = 1$ .

- $y$ : En contraposición con la variable  $x$  notamos que la variable  $y$  nos da información sobre la contribución del potencial del campo escalar comparada con la densidad crítica ( $y \equiv \frac{\sqrt{V(\varphi)}}{\sqrt{3H M_{Pl}}}$ ). Por esto es natural que el parámetro de densidad  $\Omega_\varphi$  tenga la forma  $x^2 + y^2$ , que da cuenta tanto de la contribución cinética como de la potencial a la energía asociada al vacío.

Durante la caída de  $\Omega_\varphi$  y la etapa de escalamiento (períodos II y III respectivamente), la variable  $y$  es prácticamente despreciable (6.7), lo mismo que la variable  $x$ , por lo que se podría decir que el universo no resiente la inclusión del campo escalar

durante esta etapa. Al igual que  $x$ , la variable  $y$  retoma importancia al final del proceso ( $N = 16.96$ ).

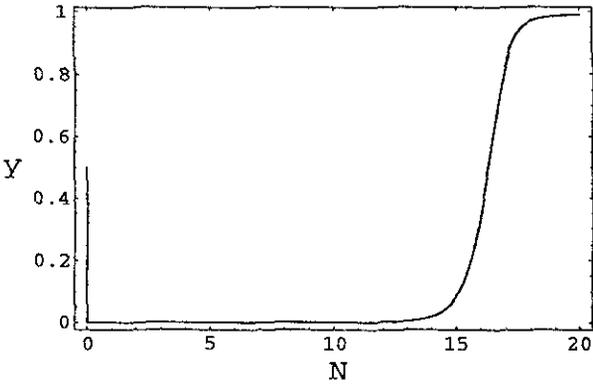


Figura 6.7: Evolución de  $y$  para  $n = 1$ .

El desarrollo de  $y$  es, como se dijo en la sección 6.2, exponencial para casi todo el proceso (ver figura 6.8). También se observa el cambio de pendiente debido a la dominación de radiación primero y materia después en el universo.

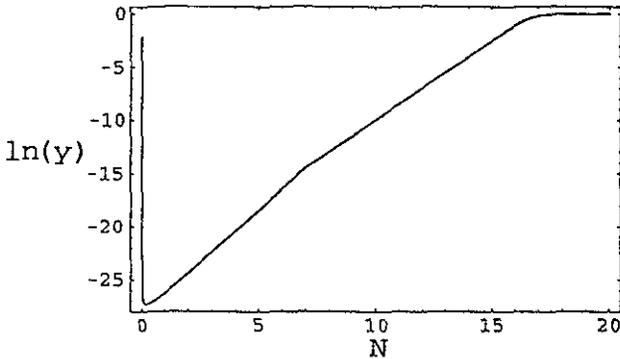


Figura 6.8: Evolución de  $\ln y$  para  $n = 1$ .

- $H$ : Ahora describiremos el desarrollo del parámetro de Hubble, el cual determina el valor de la densidad crítica mediante la relación  $\rho_c \equiv 3H^2 M_{pl}^2$ . En las gráficas

normalizamos  $H$  a 1 en  $N_{inicial}$  al presentar la evolución de  $H/H_i$ . Habíamos mencionado que  $H$  decrecía exponencialmente durante todo el proceso. Esto es evidente en la gráfica para  $\ln H/H_i$  (figura 6.10) y corrobora la aseveración hecha en la sección 6.2 que propone  $H = H_i e^{-\frac{3}{2}\gamma_r N}$ .

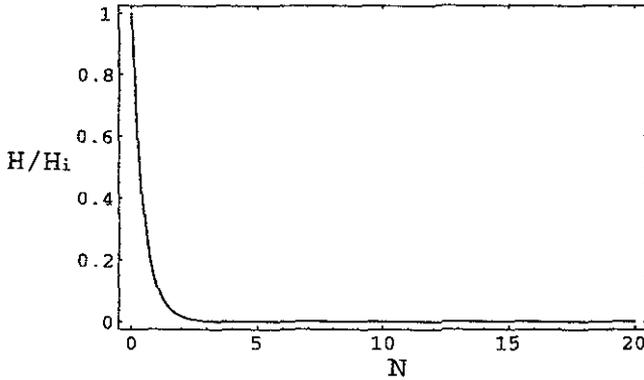


Figura 6.9: Evolución de  $H/H_i$  para  $n = 1$ .

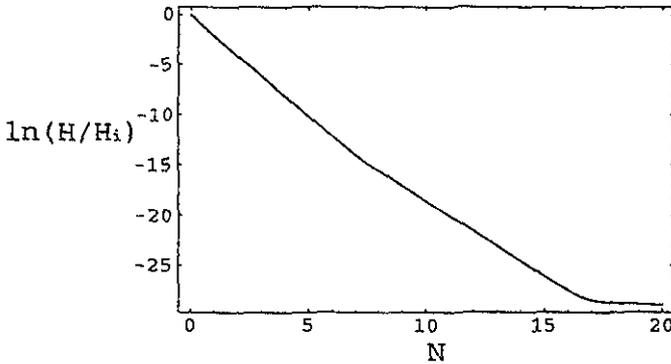


Figura 6.10: Evolución de  $\ln(H/H_i)$  para  $n = 1$ .

- $\alpha$ : Una de las motivaciones principales para investigar la inclusión de un término de quintaesencia es la aparente aceleración del universo vista experimentalmente en el alejamiento de supernovas distantes, lo cual fue mencionado en la Introducción. Así que consideraremos como una de las características necesarias de nuestros modelos

que el universo sufra una aceleración positiva en la actualidad, o lo que es lo mismo:  $\alpha_0 < 0$ . En la figura 6.11 se muestra el resultado numérico para  $\alpha$ , su progreso es tal que entra en el rango de aceleración positiva del universo en momentos apenas anteriores al actual.  $\alpha$  es 1 durante casi todo el proceso lo cual es muestra de que el universo se está desarrollando como uno dominado por materia o radiación a excepción de las breves etapas inicial y final.

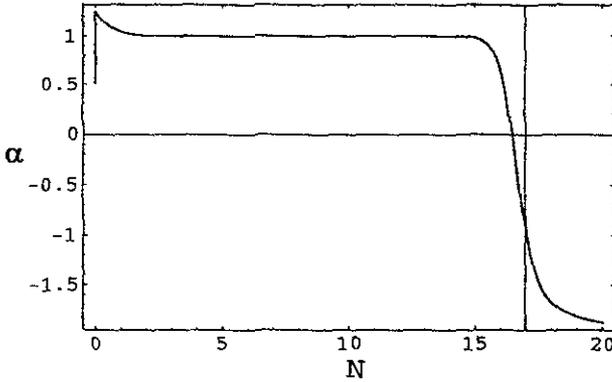


Figura 6.11: Evolución de  $\alpha$ . La línea vertical corresponde  $N_{total}$  y la horizontal a  $\alpha = 0$ , recordemos que el universo es acelerado positivamente cuando  $\alpha$  está por debajo de este valor.

- $\gamma_\varphi$ : La ecuación de estado para el campo escalar es  $p_\varphi = (\gamma_\varphi - 1)\rho_\varphi$ . Si  $\gamma_\varphi$  es menor a  $\frac{2}{3}$  y  $\rho_\varphi$  domina sobre las demás componentes de  $\rho$  el universo es positivamente acelerado (ver ecuación 2.8). En la figura 6.12 se encuentra marcada  $N_{total}$  con tal de evidenciar que el valor actual de  $\gamma_\varphi$  es menor a  $\frac{1}{3}$ , o sea que cumple la restricción observacional asociada a supernovas lejanas [26], el valor numérico actual es  $\gamma_{\varphi 0} = 0.0690$  según la tabla 6.1.
- $\lambda$ : Como ya hemos dicho, éste es un parámetro importante para el análisis del comportamiento de las ecuaciones diferenciales para quintaesencia. Es según la comparación de los términos en éstas que se dan distintas dinámicas. El punto importante aquí es que existe un período de escalamiento debido a que en esa etapa  $\lambda$  es de carácter prácticamente constante. En la figura 6.13 podemos observar dicho comportamiento, mediante lo cual verificamos que el análisis cualitativo de la sección

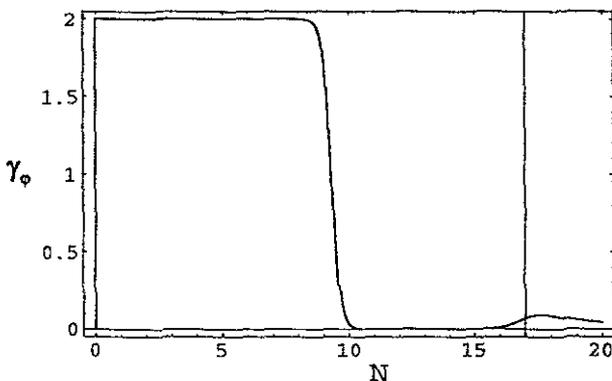


Figura 6.12: Evolución de  $\gamma_\varphi = \omega_\varphi + 1$ . Se muestra  $N_{total}$  con el fin de resaltar que la condición para la aceleración positiva del universo es satisfecha ( $\gamma_\varphi < \frac{2}{3}$ ) y, más aún, la restricción dada por supernovas lejanas ( $\gamma_\varphi < \frac{1}{3}$ ).

6.2 es correcto. También mostramos el gráfico para  $1/\lambda$  (figura 6.14) para dar cuenta de la etapa inicial en donde  $\lambda \gg 1$ .

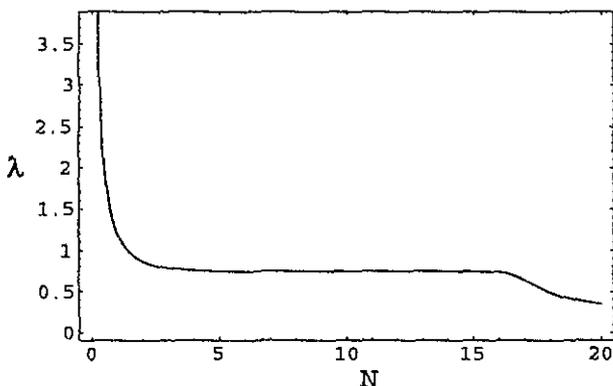


Figura 6.13: Evolución de  $\lambda$  para  $n = 1$ .

Ahora identificaremos el papel que juega el tomar distintas condiciones iniciales. En el análisis cualitativo, sección 6.2, se probó que la cantidad inicial  $x_i^2 + y_i^2 = \Omega_\varphi$  es relevante puesto que es el radio de la trayectoria circular seguida en un principio sobre el plano fase

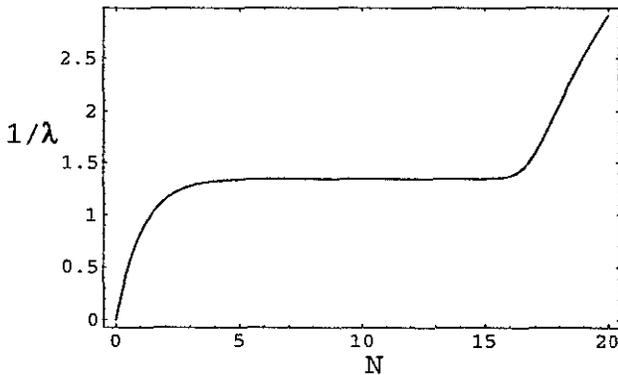


Figura 6.14: Evolución de  $1/\lambda$  para  $n = 1$ .

$x - y$ . Entonces, tomando distintos valores podemos inspeccionar el comportamiento general del sistema en términos de dicha variación de las condiciones iniciales. La figura 6.15 ilustra como las diferentes trayectorias siguen un desarrollo similar, esto en el sentido de que entran en la zona de expansión acelerada del universo cuando  $\sqrt{\Omega_{\varphi}}$ , la magnitud de los puntos  $(x,y)$ , es aproximadamente 0.6. Recordemos que la condición experimental que fijamos para el parámetro de densidad es  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7$  y que ésta es satisfecha para nuestros ejemplos. Todas las trayectorias de esta figura cumplen, además, con las demás condiciones, como coincidir con el valor actual del parámetro de Hubble y no comenzar dentro de la etapa de nucleosíntesis.

Ahora veamos que al fijar  $x_i = 0$  y variar  $y_i$  tenemos un rango no despreciable de valores iniciales en  $y$  que cumplen con los requerimientos mencionados, los demás parámetros quedarán fijos con el valor que lleva a sus valores actuales centrales para  $x_i = 0$  y  $y_i = 0.5$ . Ahora, para determinar la influencia de las distintas  $y_i$ , se extienden las condiciones dadas por los valores experimentales a las regiones determinadas por sus límites:  $H_0 = (1.4932 \pm 0.2137) \times 10^{-42} \text{ GeV}$  [5] y  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7 \pm 0.1$  (ver tabla 1.1) y no es sino cuando éstos son sobrepasados que se determina que un juego de valores iniciales no es satisfactorio. De la solución numérica concluimos que si  $y_i$  se encuentra en el intervalo 0.39 – 0.66 los resultados permanecen dentro de los rangos experimentales permitidos (ver tabla 6.2), en términos de  $\Omega_{\varphi i}$  el intervalo anterior puede ser expresado como una variación del 40 % sobre  $\Omega_{\varphi i} = 0.25$ . La figura 6.18 del final de este capítulo muestra

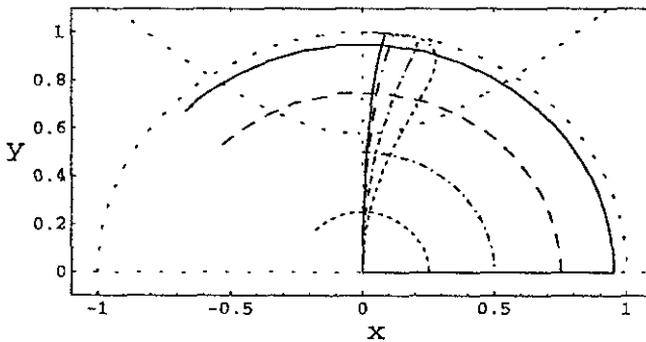


Figura 6.15: Evolución del sistema con  $n = 1$  para  $(x_i, y_i) = (-0.3536, 0.3536)$ ,  $(0, 0.5)$ ,  $(-0.6123, 0.6123)$  y  $(-0.6892, 0.6892)$  correspondientes a  $\Omega_{\varphi i} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.95$  respectivamente.

como al variar  $\Omega_{\varphi i}$  tenemos evoluciones diferentes de  $\omega_{\varphi}$  al final del proceso, de forma que valores mayores de  $\Omega_{\varphi i}$  implican valores menores de  $\omega_{\varphi 0}$ . Para los potenciales con  $n$  mayor que la permitida por los límites dados por las restricciones físicas, tenemos que una  $\Omega_{\varphi} > 0.25$  puede hacer que el resultado caiga dentro de los valores experimentales. Esto trae consigo la desventaja de que necesitamos valores de  $\Omega_{\varphi i}$  cada vez más grandes, o sea, que el campo escalar comience su evolución dominando a los otros campos presentes en el universo.

| $y_i$ | $H_0$ (en GeV)           | $\Omega_{\varphi 0}$ |
|-------|--------------------------|----------------------|
| 0.39  | $1.2982 \times 10^{-42}$ | 0.6119               |
| 0.66  | $1.7031 \times 10^{-42}$ | 0.7974               |

Tabla 6.2: Resultados de soluciones numéricas para distintas  $y_i$  con  $x_i = 0$  y con  $n = 1$ . Los valores experimentales permitidos son  $H_0 \sim 1.2795 - 1.7069 \times 10^{-42} \text{ GeV}$  y  $\Omega_{\varphi 0} \sim 0.6 - 0.8$ .

#### 6.4.2 Comportamiento con $n = \frac{18}{7}$

Ahora ejemplificaremos con caso particular en que  $N_c = 8$ ,  $N_f = 1$  y  $\nu = 1$ . La  $n$  que obtenemos es  $\frac{4\nu}{N_c - N_f} + 2 = \frac{18}{7}$ . Los resultados numéricos dan lo siguiente:

| $n$  | $H_i$ (en GeV)         | $\Lambda_c$ (en GeV) | $\alpha_0$ | $\omega_{\varphi 0}$ | $\omega_{ef}$ | $N_{total}$ |
|------|------------------------|----------------------|------------|----------------------|---------------|-------------|
| 18/7 | $1.70 \times 10^{-18}$ | 1.34                 | -0.37      | -0.6550              | -0.7325       | 30.41       |

Tabla 6.3: Resultados de la solución numérica para  $V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \frac{1}{\varphi^n}$  con  $n = 18/7$ .

El resultado es un modelo de quintaesencia que cumple con las restricciones  $n \notin 1.25 - 2.1$  y  $n < 2.75$  dadas por nucleosíntesis y el requerimiento de  $\omega_{ef} < -0.7$ . Al igual que en el caso de  $n = 1$  no nos es posible determinar por principios fundamentales a los parámetros  $N_c$ ,  $N_f$  y  $\nu$ .

### 6.4.3 Comportamiento con $n = \frac{2}{3}$

Aun después de haber restringido las posibles  $n$  para los modelos con  $V \propto \frac{1}{\varphi^n}$  nos quedamos con un amplio espacio de opciones. En los primeros dos ejemplos se escogió  $n$  según los parámetros libres  $\nu$ ,  $N_c$ , y  $N_f$ . Como mencionamos en la sección 6.1 relacionaremos al siguiente ejemplo con las teorías de gran unificación: será necesario considerar un modelo para el cual la energía con la que aparece el campo escalar de quintaesencia pueda ser asociada a la energía de gran unificación mediante la expresión  $\Lambda_c = \Lambda_{GU} e^{-\frac{1}{2b_0 g^2 G U}}$  (ecuación 6.2). Tenemos, del análisis presentado en la sección 6.2 y la expresión 6.18, una manera de calcular analíticamente y en términos de  $n$ , la escala de energía característica del modelo de quintaesencia:

$$\Lambda_c = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2\nu}} \left( y_0 \frac{H_0}{M_{Pl}} \right)^{\frac{2}{4+n}} \left( \frac{4}{3^{3/2}} \frac{\nu n^2}{\gamma_\gamma^2} (x_i^2 + y_i^2) \right)^{\frac{n/2}{4+n}} M_{Pl} \quad (6.20)$$

por lo que al igualar las expresiones 6.2 y 6.20 para  $\Lambda_c$  encontraremos una  $n$  particular que cumple con ambas relaciones. Con lo anterior hemos reducido en uno el número de parámetros libres.

Si tomamos  $N_c = 3$  y  $\nu = 1$  encontramos que la igualdad anterior se cumple cuando  $N_f = 6.0182$  y  $n = 0.6747$ , o sea que estamos en coincidencia con  $n = 2/3$  dado por  $n = \frac{4\nu}{N_c - N_f} + 2$  al tomar  $N_c = 3$ ,  $N_f = 6$  y  $\nu = 1$ . De la misma igualdad obtenemos la cantidad  $\Lambda_c = 3.02 \times 10^{-8} \text{GeV}$  como la escala de energía típica del universo en la que aparece el campo de quintaesencia.

Entonces tenemos un modelo de quintaesencia que concuerda con uno de los resultados de las teorías de gran unificación. Al resolver numéricamente el ejemplo con  $n = 2/3$  encontramos lo siguiente:

| $n$ | $H_i$ (en GeV)         | $\Lambda_c$ (en GeV)  | $\alpha_0$ | $\omega_{\varphi 0}$ | $\omega_{ef}$ | $N_{total}$ |
|-----|------------------------|-----------------------|------------|----------------------|---------------|-------------|
| 2/3 | $1.16 \times 10^{-33}$ | $3.50 \times 10^{-8}$ | -1.02      | -0.9662              | -0.9781       | 12.96       |

Tabla 6.4: Resultados de la solución numérica para  $V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \frac{1}{\varphi^n}$  con  $n = 2/3$ .

en donde podemos ver que la escala de energía  $\Lambda_c$  es muy parecida a la obtenida al igualar las expresiones 6.2 y 6.20.

Ahora veamos que una  $y_i$  en el intervalo 0.385 – 0.65, consistente con una  $\Omega_{\varphi i}$  dentro del intervalo 0.15–0.42, nos lleva a una situación compatible con los valores experimentales de  $H_0$  y  $\Omega_{\varphi 0}$  tomando en cuenta sus rangos de incertidumbre. Al igual que en el caso de  $n = 1$ ,  $\Omega_{\varphi i}$  permite variaciones de un 40% de su valor, o sea que no es necesario un fine tuning de las condiciones iniciales (ver tabla 6.5).

| $y_i$ | $H_0$ (en GeV)           | $\Omega_{\varphi 0}$ |
|-------|--------------------------|----------------------|
| 0.385 | $1.2791 \times 10^{-42}$ | 0.6073               |
| 0.650 | $1.7096 \times 10^{-42}$ | 0.8000               |

Tabla 6.5: Resultados de soluciones numéricas para distintas  $y_i$  con  $x_i = 0$  y con  $n = 3/2$ . Los valores experimentales permitidos son  $H_0 \sim 1.2795 - 1.7069 \times 10^{-42} \text{ GeV}$  y  $\Omega_{\varphi 0} \sim 0.6 - 0.8$ .

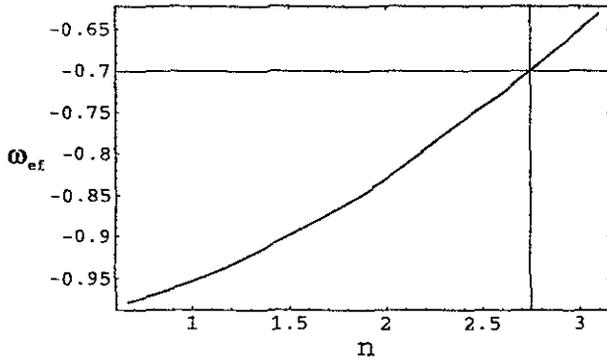


Figura 6.16:  $\omega_{ef}$  con respecto a  $n$ , la restricción  $\omega_{ef} < -0.7$  nos da  $n < 2.75$ .

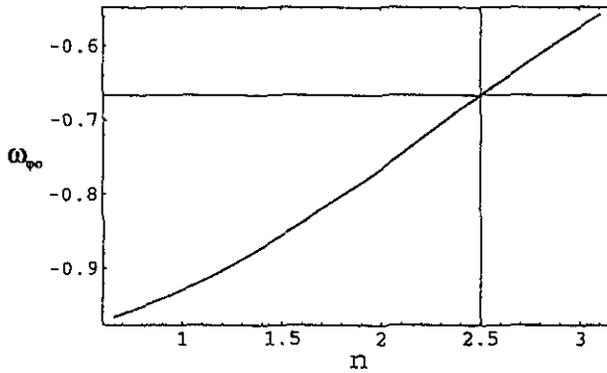


Figura 6.17:  $\omega_{\phi_0}$  con respecto a  $n$ , la restricción  $\omega_{\phi_0} < -2/3$  nos da  $n < 2.5$ .

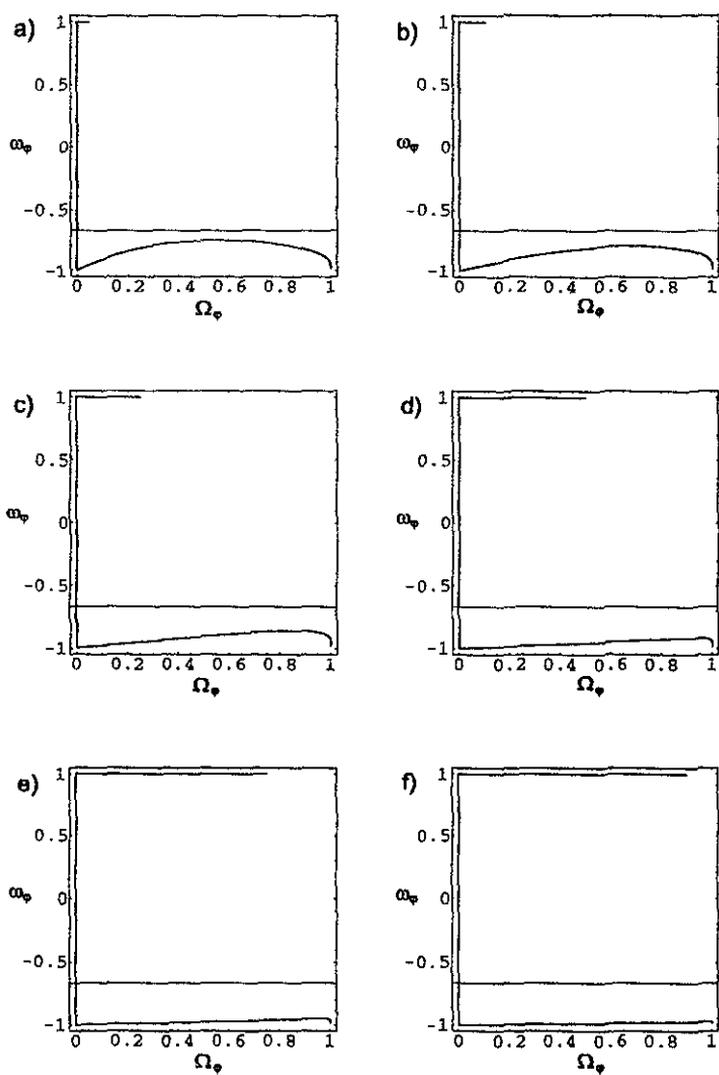


Figura 6.18: Desarrollo relativo de  $\omega_\varphi$  y  $\Omega_\varphi$  para  $n = 1$ , recordemos que la época actual es correspondiente a  $\Omega_{\varphi 0} = 0.7$ . Las gráficas a), b), c), d), e) y f) corresponden a  $\Omega_{\varphi i} = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.9$ , respectivamente.

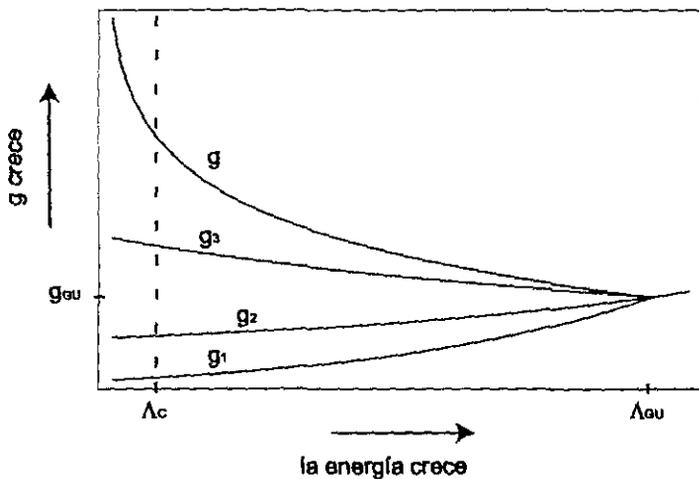


Figura 6.19: En esta gráfica se muestra una aproximación burda de la evolución en términos de la energía de las constantes de acoplamiento  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  del grupo  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  del modelo estándar de partículas elementales y  $g$  del grupo  $SU(N_c)$  asociado al campo de quintaesencia. En  $\Lambda_{GU}$  las constantes coinciden y  $\Lambda_c$  es la escala de energía de condensación.

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1 Panorama Cosmológico

Los logros del modelo estándar de la cosmología se ven limitados por ciertos descubrimientos experimentales como pueden ser la evidencia de que nuestro universo es muy parecido a uno plano [10] o las observaciones de supernovas lejanas que apuntan hacia la expansión acelerada del universo [1, 2]. La solución a estas discrepancias requiere de la inclusión de términos en la densidad de energía distintos a los considerados por el modelo cosmológico estándar. Como ejemplo tenemos a los modelos inflacionarios, en los que se da un crecimiento exponencial del factor de escala en una etapa temprana del universo, la cual es causada por la presencia de un campo escalar sujeto a un potencial de interacción. Gracias a esta inflación inicial se solucionan problemas como el del horizonte causal y el de la curvatura. Los modelos con una constante cosmológica son también ejemplo de la modificación de los componentes de la densidad total de energía. En éstos, la dinámica del factor de escala se ve afectada en todas las etapas del universo gracias a una aportación del vacío a la densidad de energía, entonces se puede lograr una expansión acelerada o un universo estático, lo cual es imposible si se consideran solamente los componentes del universo contemplados comúnmente. El problema que surge en este caso es que la magnitud de densidad de energía aportada por la constante cosmológica es restringida ser menor que la densidad crítica, lo cual genera una discrepancia de 120 órdenes de magnitud con la magnitud "natural" que esperaríamos que debiera ser del orden de la masa de Planck. Entonces surge la necesidad de incluir un término asociado al vacío no constante, un

campo escalar que evoluciona según un potencial de autointeracción de tal forma que el obstáculo mencionado pueda ser evadido. Los de este tipo son los denominados modelos de quintaesencia. El objetivo de esta tesis es presentar un modelo de quintaesencia consistente con las observaciones recientes de parámetros cosmológicos.

## 7.2 Un Modelo de Quintaesencia

El análisis del sistema de ecuaciones diferenciales que describe la evolución del universo fue llevado a cabo para el caso específico de un potencial consistente en una potencia negativa del campo escalar. Primero de manera cualitativa, de donde reconocimos un comportamiento tal que el desarrollo del universo no se ve afectado por el campo escalar sino hasta épocas muy posteriores a su aparición. El beneficio que obtenemos es que, durante la mayor parte del proceso, el sistema presenta un período de escalamiento en donde la densidad de energía asociada al campo es despreciable. En éste el factor de escala tiene un crecimiento de varios órdenes de magnitud como el que tendría sin la presencia del campo escalar, por lo tanto se puede considerar que dentro de dicho lapso se da la nucleosíntesis, satisfaciendo con esto la condición que ésta conlleva que no permite valores mayores a 0.1 para  $\Omega_\varphi$ . Al final del escalamiento el campo de quintaesencia se hace relevante, lo cual es consistente con la  $\Omega_\varphi = 0.7$  sugerida por las observaciones.

El siguiente paso fue trabajar con soluciones numéricas del sistema de ecuaciones diferenciales. Las diferentes potencias negativas  $n$  dan resultados distintos en la duración total del proceso y en la densidad de energía asociada al campo en el momento de su aparición, ya que se han fijado los valores actuales de ciertas cantidades físicas como el parámetro de densidad  $\Omega_{\varphi 0}$  en  $0.7 \pm 0.1$  y el valor del parámetro de Hubble con  $h_0 = 0.7 \pm 0.1$ , indicados por experimentos recientes [5]. Encontramos entonces que, para satisfacer todos los requerimientos y tomando el valor razonable  $\Omega_{\varphi i} = 0.25$ , la potencia negativa del campo de quintaesencia  $n$  queda restringida a los intervalos  $0 - 1.25$  y  $2.1 - 2.75$ . Asegurando con esto que el campo escalar no comienza su influencia en la etapa de nucleosíntesis y que su ecuación de estado es la que lleva a una expansión acelerada del universo como la que se induce de la observación de supernovas lejanas. Para valores mayores de  $n$  son requeridos valores mayores de  $\Omega_{\varphi i}$  si queremos concordar con la situación observacional, o sea que necesitamos que el campo escalar sea, para  $n$  mayor,

más dominante al momento de su aparición en el universo.

Como ejemplos particulares presentamos  $n = 1, 2/3$  y  $18/7$ . El primero es producto de considerar que el campo escalar puede ser originado por un grupo de norma con número de colores  $N_c = 1$ , número de fermiones  $N_f = 5$  y número de campos que se condensan  $\nu = 1$  y muestra el comportamiento sugerido por el análisis cualitativo. El segundo es dado por la selección del número de colores  $N_c = 8$  y el número de fermiones  $N_f = 1$  para el grupo de norma, el modelo obtenido también cumple con las restricciones físicas. El tercero es motivado por las teorías de la gran unificación, esto con el fin de ligar a la fuerza generada por el campo escalar con el posible origen común de las fuerzas fundamentales de la naturaleza propuesto las teorías de supercuerdas. En este caso se encuentra, gracias al análisis efectuado tanto numérica como analíticamente, que el desarrollo de la energía a partir de la época de gran unificación puede ser ligado al desarrollo del campo escalar cuya escala de energía inicial es justamente la de la gran unificación. Así que hemos presentado un conjunto de modelos que coinciden con la aceleración positiva del universo en donde la escala de aparición queda determinada en términos de  $N_c, N_f$  y  $\nu$ . En estos modelos no existe el problema del ajuste fino de las condiciones iniciales puesto que es posible variar  $\Omega_{\rho 0}$  en un 40% sin perder la coincidencia con los valores experimentales de los parámetros cosmológicos medidos hoy en día.

Finalmente, es importante notar que los tres modelos que presentamos cumplen con las condiciones dadas por métodos observacionales, de hecho es posible encontrar una infinidad de modelos con diferente  $n$  que son posibles según las restricciones experimentales. Los criterios para elegir una  $n$  específica deberán provenir de argumentos físicos de otra índole, como podría ser el análisis a detalle del comportamiento del grupo de norma que genera el campo.

# Apéndice A

En este apéndice se desarrollan los procedimientos que complementan lo dicho en el capítulo 3.

## A.1 Ecuaciones de Rodamiento Lento

Al tomar la ecuación de campo:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (\text{A.1})$$

y considerar que el término  $\ddot{\varphi}$  es despreciable con respecto a los demás llegamos a la ecuación:

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi). \quad (\text{A.2})$$

a la que nos referiremos como la *primera ecuación de inflación*.

Para un universo plano la ecuación de Friedmann ( ecuación 2.4 ) se reduce a:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right) \quad (\text{A.3})$$

en donde hemos tomado la expresión para  $\rho$  mostrada en la ecuación 4.13:  $\rho = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)$ .

Ahora consideremos que el término cinético, bajo la condición de expansión acelerada positivamente  $\rho + 3p < 0$  (ver ecuación 2.8), puede ser ignorado al compararlo con el término potencial pues dicha condición implica  $\dot{\varphi}^2 < V(\varphi)$ , quedándonos:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}V(\varphi) \quad (\text{A.4})$$

a la cual llamaremos *segunda ecuación de inflación*.

## A.2 Obtención de las Condiciones de Inflación

Hemos hecho una aproximación que consiste en despreciar ciertos términos de las ecuaciones (A.1) y (A.3). Esto es posible al hacer las comparaciones:

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \quad (\text{A.6})$$

que nos llevaron a las ecuaciones simplificadas:

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi) \quad (\text{A.7})$$

$$H^2 = \frac{V(\varphi)}{3M_{Pl}^2} \quad (\text{A.8})$$

Ahora podemos sustituir (A.7) y (A.8) en (A.6) para obtener:

$$\frac{1}{6}M_{Pl}^2 \left( \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2 \ll 1 \quad (\text{A.9})$$

que es la primera de las condiciones de inflación.

Luego podemos elevar (A.7) al cuadrado y derivarla, de tal forma que al sustituir con (A.8) nos quede:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} + \frac{\ddot{\varphi}}{V'(\varphi)} = M_{Pl}^2 \frac{V''(\varphi)}{3V(\varphi)} \quad (\text{A.10})$$

lo cual, al tomar en cuenta (A.5), (A.6) y (A.7) se puede reducir a:

$$\frac{1}{3}M_{Pl}^2 \frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \ll 1 \quad (\text{A.11})$$

o sea, a la segunda de las condiciones de inflación.

## A.3 Inflación a Partir del Rodamiento Lento

Un universo acelerado positivamente cumplirá con:

$$\frac{\ddot{a}}{a} > 0 \quad (\text{A.12})$$

Ahora hagamos que dicha restricción quede en términos de  $V(\varphi)$  y  $H$ . Tomemos en cuenta primero que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \quad (\text{A.13})$$

lo que nos lleva a:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (\text{A.14})$$

y utilizando la definición de  $H$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0. \quad (\text{A.15})$$

Entonces:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (\text{A.16})$$

Ahora, derivando con respecto a  $t$  la ecuación (3.11) y sustituyendo con la definición para  $\dot{\varphi}$  dada por (3.10), obtenemos:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left( \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2 \quad (\text{A.17})$$

Por lo que, al considerar la ecuación (A.15) junto con la condición (3.12) se da lo siguiente:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \quad (\text{A.18})$$

así que tenemos asegurado el carácter inflacionario.

## A.4 Obtención de $N(t)$

$$\begin{aligned} N(t) &\equiv \ln \frac{a(t_{final})}{a(t)} = \int_{a(t)}^{a(t_{final})} \frac{1}{a} dt = \int_t^{t_{final}} \frac{da}{dt} \frac{1}{a} dt \\ &= \int_t^{t_{final}} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_t^{t_{final}} H dt = \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi_{final}}^{\varphi} \frac{V(\varphi)}{V'(\varphi)} d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En donde se utilizó la aproximación de rodamiento lento (ecuaciones 3.10 y 3.11 ) para el último paso.

# Apéndice B

En este apéndice se muestran los procedimientos para encontrar las ecuaciones utilizadas en el capítulo 4, los cálculos se basan en [8] y [17].

## B.1 Obtención de la Ecuación de Campo

Comencemos viendo que:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta\varphi \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \right) \delta\varphi + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta\varphi \quad (\text{B.1})$$

ahora, utilizando  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta\varphi = \delta(\partial_\alpha\varphi)$  y sustituyendo en la ecuación

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta(\partial_\alpha\varphi) \right\} \quad (\text{B.2})$$

nos queda:

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \right) \right\} \delta\varphi + \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta\varphi \right\}. \quad (\text{B.3})$$

El segundo término es cero por el teorema de la divergencia de Gauss en cuatro dimensiones, que transforma la integral de la siguiente manera:

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta\varphi \right\} = \int_{\Gamma(\Omega)} d^3x \sqrt{-g} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha\varphi)} \delta\varphi \quad (\text{B.4})$$

ya que  $\delta\varphi = 0$  en  $\Gamma(\Omega)$ .

## B.2 Obtención del Tensor de Energía-Momento

Consideremos una pequeña variación del tensor métrico tal que sus primeras derivadas sean cero al evaluarlas en infinito. El cambio en la acción es entonces el siguiente:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}) \right\} \quad (\text{B.5})$$

Ahora veamos que:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{B.6})$$

lo cual, al considerar que  $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta g^{\mu\nu} = \delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})$  y sustituir en (B.5) nos lleva a:

$$dS = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} + \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}) \right\} \quad (\text{B.7})$$

El segundo término de la ecuación anterior puede ser simplificado, gracias al teorema de Gauss en cuatro dimensiones, a la integral de superficie:

$$\int_{\Gamma(\Omega)} d^3x \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}) \quad (\text{B.8})$$

que se hace cero puesto que las derivadas de  $g^{\mu\nu}$  son idénticamente cero si  $x^{\alpha} \rightarrow \infty$ .

La definición del tensor de energía-momento está dada por:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.9})$$

así que haciendo uso de (B.7) cuyo segundo término ya vimos que es cero, llegamos a la expresión:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \right) \right\} \quad (\text{B.10})$$

# Apéndice C

En este apéndice se presenta el análisis del sistema de ecuaciones diferenciales para quintaesencia en el caso del potencial  $V(\varphi) = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \varphi^{-n}$ .

$\lambda(N)$  es un parámetro que, como ya vimos, es crucial en la evolución del sistema, puesto que compara mediante un cociente a  $V'(\varphi)$  con  $V(\varphi)$  y es adimensional según la definición  $\lambda(N) \equiv -M_{Pl} \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}$ . Para el caso de cualquier potencial de la forma  $V(\varphi) \propto \varphi^{-n}$ , tenemos  $\lambda = n \frac{M_{Pl}}{\varphi}$ . Ahora veamos que  $\varphi(N)$  puede ser expresado en términos de variables directamente relacionadas con las ecuaciones diferenciales al considerar la definición de la variable  $y$  ( $y \equiv \frac{\sqrt{V(\varphi)}}{\sqrt{3HM_{Pl}}}$ ) y la expresión  $V(\varphi) = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \varphi^{-n}$ . Así, después de sustituir obtenemos:

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{y_i}{2\nu}} 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{H_i M_{Pl}} \quad (C.1)$$

también tenemos que:

$$\varphi = \left(\frac{y_i}{y}\right)^{2/n} \left(\frac{H_i}{H}\right)^{2/n} \varphi_i \quad (C.2)$$

Por lo anterior, el valor de  $\lambda$  estará dado en términos de  $y$  y  $h$  por:

$$\lambda = n \left(\frac{y}{y_i}\right)^{2/n} \left(\frac{H}{H_i}\right)^{2/n} \frac{M_{Pl}}{\varphi_i} \quad (C.3)$$

lo cual implica un valor inicial:

$$\lambda_i = n \frac{M_{Pl}}{\varphi_i} \quad (C.4)$$

Es mediante este parámetro que la influencia de  $\varphi_i$  sobre el sistema se hace presente, tomaremos como condición inicial  $\varphi_i \ll M_{Pl}$  lo cual nos dará, según la expresión C.4, una  $\lambda_i \gg 1$ .

Ahora podemos comenzar con el análisis del sistema de ecuaciones diferenciales:

## C.1 Período I

El primer segmento, o Período I, está caracterizado por el dominio de los términos proporcionales a  $\lambda$  ( $\lambda_i \gg 1$ ) en las ecuaciones diferenciales 6.3, 6.4 y 6.5, que al despreciar otros términos quedan como:

$$x_N = \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda y^2 \quad (\text{C.5})$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda x y \quad (\text{C.6})$$

$$H_N = -H \frac{3}{2} (\gamma_\gamma (1 - x^2 - y^2) + 2x^2) \quad (\text{C.7})$$

si dividimos la ecuación C.5 entre la C.6 obtenemos:

$$\frac{x_N}{y_N} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x_N x = -y_N y = \text{constante} \quad (\text{C.8})$$

ahora, de lo anterior tenemos:

$$x_N x + y_N y = 0 \quad (\text{C.9})$$

lo cual puede ser integrado para dar:

$$x^2 + y^2 = \text{constante}' \quad (\text{C.10})$$

que al tomar las condiciones iniciales  $x_i$  y  $y_i$  nos deja con:

$$x^2 + y^2 = x_i^2 + y_i^2. \quad (\text{C.11})$$

Entonces tenemos que los puntos  $(x, y)$  forman una trayectoria en el plano fase  $x - y$  que es un círculo de radio  $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  que se recorre en el sentido de las manecillas del reloj puesto que  $x_N$  es siempre positivo y  $y_N$  es de signo opuesto al de  $x$ , el cual va de negativo a positivo o es siempre positivo. Sin importar qué valores  $x_i$  y  $y_i$  tengamos, en algún momento de esta trayectoria  $y$  es pequeña, al igual que  $\lambda \propto (y/\hbar)^{2/n}$  y las condiciones para que los términos considerados dominen se rompen pues  $\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda y^2$  se hace comparable con  $-3x + x \frac{3}{2} (\gamma_\gamma (1 - x^2 - y^2) + 2x^2)$  (ver ecuación (6.3)). Llegamos así al final del Período I, los valores  $x_{II}$  y  $y_{II}$  serán los finales para este período e iniciales para el período II. Esta convención de nomenclatura será seguida para todos los períodos. Al ser  $y_{II} \ll 1$  tenemos, por la condición  $x^2 + y^2 = x_i^2 + y_i^2$ , que  $x_{II} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ .

Tenemos entonces que el período I termina con la condición aproximada

$$\lambda y_{II}^2 \sim x_{II} \left(3 - \frac{3}{2}\gamma_\gamma\right) \quad (\text{C.12})$$

en donde hemos despreciado los términos cuadráticos en  $x$  y  $y$ . Al darse exactamente esta condición obtenemos el valor aproximado de  $y_{II}$ :

$$y_{II} = \left(\frac{y_i}{H_{II}}\right)^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{1}{n} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right) \left(3 - \frac{3}{2}\gamma_\gamma\right) \frac{\varphi_i}{M_{Pl}} \frac{n}{4+4n}. \quad (\text{C.13})$$

En todo momento es posible hacer una simplificación en donde se desprecien los términos cuadráticos en  $x$  y  $y$ , acotados superiormente por 1 gracias a la restricción de Friedmann (5.2). Entonces, de la ecuación 6.5 tenemos que la solución aproximada para  $h(N)$  es la dada por la ecuación diferencial:

$$H_N = -H \frac{3}{2}\gamma_\gamma \quad (\text{C.14})$$

que es fácilmente reconocible como la exponencial decreciente:

$$H = H_i e^{-\frac{3}{2}\gamma_\gamma N}. \quad (\text{C.15})$$

En este período  $y$  decrece rápidamente pues  $y_N$  es del orden de  $|\lambda y x| \gg 1$ , lo cual implica que cuando la condición final del período 1 es alcanzada tenemos  $N \ll 1$  y podemos considerar  $H = H_i$  para todo el período, así que  $H_{II} = H_i$  y:

$$y_{II} = y_i^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{1}{n} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right) \left(3 - \frac{3}{2}\gamma_\gamma\right) \frac{\varphi_i}{M_{Pl}} \frac{n}{4+4n} \quad (\text{C.16})$$

que al sustituir con la expresión en términos de  $y_i$  y  $H_i$  para  $\varphi_i$  (C.1) queda como:

$$y_{II} = y_i^{\frac{4+n}{4+4n}} \left(\frac{(3 - \frac{3}{2}\gamma_\gamma)^2}{n^2} (x_i^2 + y_i^2) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{H_i}{M_{Pl}}\right)^{\frac{n}{4+4n}} \quad (\text{C.17})$$

## C.2 Período II

Ahora tenemos una situación en donde las ecuaciones a considerar son:

$$x_N = -x \left(3 - \frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1 - x^2 - y^2) + 2x^2)\right) \quad (\text{C.18})$$

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x y + y \frac{3}{2}\gamma_\gamma \quad (\text{C.19})$$

dado que para  $h$  ya hemos encontrado una expresión aproximada válida para todos los períodos (C.15).

La ecuación diferencial en  $x$  tiene, en este período, la siguiente solución:

$$x = \frac{x_{II}}{\sqrt{x_{II}^2 + (1 - x_{II}^2) e^{2N}}} \quad (\text{C.20})$$

en donde hemos considerado  $\gamma_\gamma = 4/3$ , correspondiente al universo dominado por radiación que es el que supondremos para el comienzo del proceso descrito.

Por lo anterior,  $\Omega_\varphi$  toma la forma:

$$\Omega_\varphi = \frac{\Omega_{\varphi i}}{\Omega_{\varphi i} + (1 - \Omega_{\varphi i}) e^{2N}} \quad (\text{C.21})$$

puesto que  $y_{II} \ll 1$  y  $\Omega_{\varphi II} = x_{II}^2 = \Omega_{\varphi i}$ .

Al inicio de éste período  $y$  es decreciente por lo que su mínimo se da cuando la ecuación diferencial C.19 es igualada a cero puesto que posteriormente será el segundo término, que es positivo, el que dominará en el cambio de  $y$ , causando su crecimiento. Tenemos entonces que  $y_{min}$  corresponde a la condición  $\lambda x_{II} \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_\gamma$ , en donde se toma  $x = x_{II}$  de la expresión C.20 y dado que la condición es alcanzada con  $N \ll 1$ .

Tenemos entonces:

$$y_{min} = y_i^{\frac{4+n}{4}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma_\gamma}{n \sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \frac{\varphi_i}{M_{Pl}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.22})$$

que en términos de  $y_i$  y  $H_i$  queda, sustituyendo con  $\varphi_i$  de (C.1):

$$y_{min} = y_i^{\frac{4+n}{4}} \left( \frac{3^{3/4}}{2\sqrt{\nu}} \frac{\gamma_\gamma}{n \sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \sqrt{\frac{H_i}{M_{Pl}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.23})$$

El mínimo  $y_{min}$  es alcanzado rápidamente y la ecuación C.19 es prácticamente:

$$y_N = \frac{3}{2} \gamma_\gamma \quad (\text{C.24})$$

que tiene como solución a la exponencial  $y = y_{min} e^{\frac{3}{2}\gamma_\gamma N}$ . Esta solución será válida por el resto del período II y para los posteriores. De hecho, será mediante la misma que daremos un valor analítico para  $N_{total}$  ya que el lapso en que  $y$  no tiene dicha solución es despreciable.

### C.3 Período III

Las ecuaciones que caracterizan esta etapa son:

$$x_N = -x \left( 3 - \frac{3}{2} \gamma_\gamma \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda y^2 \quad (\text{C.25})$$

$$y_N = y \frac{3}{2} \gamma_\gamma \quad (\text{C.26})$$

$$H_N = -H \frac{3}{2} \gamma_\gamma \quad (\text{C.27})$$

en donde el segundo término de la ecuación C.25 será ignorado en un principio.

Del sistema simplificado anterior podemos ver que  $\frac{y_N}{y} = -\frac{H_N}{H}$ , lo cual implica que  $yH = \text{constante}$  y, durante este período,  $\lambda \propto (yH)^{2/n}$  (ver ecuación C.3) puede ser tomado como una constante.

La soluciones al considerar que en un principio  $y \ll 1$  son:

$$x = x_{III} e^{-(3-\frac{3}{2} \gamma_\gamma)N} \quad (\text{C.28})$$

$$y = y_{III} e^{\frac{3}{2} \gamma_\gamma N} \quad (\text{C.29})$$

$$H = H_{III} e^{-\frac{3}{2} \gamma_\gamma N} \quad (\text{C.30})$$

En algún momento el segundo término de la ecuación C.25, proporcional a  $y^2$ , domina sobre los demás ya que  $y$  crece exponencialmente mientras que  $x$  decrece. En esta segunda parte del período III la función seguida por  $x$  es una exponencial creciente:

$$x = \text{constante} e^{3\gamma_\gamma N} \quad (\text{C.31})$$

ya que  $\lambda$  es considerada constante.

Al estar creciendo  $x$  y  $y$  llegaremos a la situación final del período III, que ésta está dada por el momento en que  $\Omega_\varphi = x^2 + y^2$  comienza crecer hacia su valor final (ver figura 6.2.1).

### C.4 Período IV

El período IV será simplemente el dado por el crecimiento final de  $\Omega_\varphi$ . La importancia de esta etapa reside en que  $\lambda$  dejará de ser constante puesto que  $y$  ya no crece como

una exponencial sino que lo hace más lentamente, esto debido al término negativo y proporcional a  $\lambda$  de la ecuación para  $y_N$ :

$$y_N = -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda xy + y\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (\text{C.32})$$

entonces  $\lambda \propto (y h)^{2/n}$  decrece y la situación al infinito es la regida por las ecuaciones:

$$x_N = -x \left( 3 - \frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \right) \quad (\text{C.33})$$

$$y_N = y\frac{3}{2}(\gamma_\gamma(1-x^2-y^2) + 2x^2) \quad (\text{C.34})$$

entonces, como  $y \rightarrow 1$  y  $x \rightarrow 0$  el sistema tiende asintóticamente a:  $x_f \sim 0$  y  $y_f \sim 1$ .

# Apéndice D

En este apéndice se deriva el potencial  $V(\varphi)$  a partir del superpotencial de Affleck y Seiberg  $W(\varphi)$ .

El superpotencial  $W(\varphi)$  está dado por [20]:

$$W = (N_c - N_f) \left( \frac{\Lambda_c^b}{\det \langle Q\tilde{Q} \rangle} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (\text{D.1})$$

en donde  $N_c$  y  $N_f$  son los números de colores y de fermiones del grupo de norma, respectivamente,  $\Lambda_c$  es la escala de energía en que los campos se condensan,  $b = (3N_c - N_f)$  es el coeficiente de la función  $\beta$  y  $Q$  y  $\tilde{Q}$  los campos fundamentales. Tomemos

$$\det \langle Q\tilde{Q} \rangle = \prod_{j=1}^{N_f} \varphi_j^2 \quad (\text{D.2})$$

$\nu$  es la fracción de los  $N_f$  campos que se condensará cuando la interacción se haga fuerte ( $1 < \nu < N_f$ ) y los  $N_f - \nu$  restantes son tales que  $\varphi_j = \Lambda_c$  así que nos queda:

$$W = (N_c - N_f) \left( \frac{\Lambda_c^{3 + \frac{2\nu}{N_c - N_f}}}{\varphi^{\frac{2\nu}{N_c - N_f}}} \right) \quad (\text{D.3})$$

Ahora calculemos  $W_\varphi = \partial W / \partial \varphi$  para sustituir en la expresión para el potencial escalar dado por supersimetría global  $V = |W_\varphi|^2$  [28]:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} W = (N_c - N_f) \Lambda_c^{3 + \frac{2\nu}{N_c - N_f}} \frac{2\nu}{N_c - N_f} \varphi^{\frac{2\nu}{N_c - N_f} - 1} \quad (\text{D.4})$$

$$= \Lambda_c^{3 + \frac{2\nu}{N_c - N_f}} \frac{2\nu}{2\nu} \varphi^{-\frac{2\nu}{N_c - N_f} - 1} \quad (\text{D.5})$$

que al elevar al cuadrado da:

$$|W_\varphi|^2 = \Lambda_c^{6 + \frac{4\nu}{N_c - N_f}} 4\nu^2 \varphi^{-\frac{4\nu}{N_c - N_f} - 2} \quad (\text{D.6})$$

lo cual al identificar  $V \simeq |W_\varphi|^2 = cte \varphi^{-n}$  nos da:

$$V = \Lambda_c^{4+n} 4\nu^2 \varphi^{-n} \quad (D.7)$$

con  $n = \frac{4\nu}{N_c - N_f} + 2$ . En el caso en que todos los campos se acoplan  $N_f = \nu$  nos queda:  
 $n = 2 \frac{N_c + N_f}{N_c - N_f}$ .

A continuación presentamos los valores de  $n$  para las combinaciones de  $N_c$ ,  $N_f$  y  $\nu$  que utilizaremos:

| $n$  | $N_c$ | $N_f$ | $\nu$ |
|------|-------|-------|-------|
| 1    | 1     | 5     | 1     |
| 18/7 | 8     | 1     | 1     |
| 2/3  | 3     | 6     | 1     |

Tabla D.1:  $n$  en términos de  $N_c$ ,  $N_f$  y  $\nu$

# Bibliografía

- [1] A. Riess et al., "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant", *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [2] S. Perlmutter, "Supernovae, Dark Energy and the Accelerating Universe: The Status of the Cosmological Parameters", *Int. J. Mod. Phys. A* **15S1**, 715 (2000).
- [3] K. Freese, F. C. Adams, J.A. Frieman y E. Mottola, "Cosmology With Decaying Vacuum Energy", *Nucl. Phys.* **B287**, 797 (1987).
- [4] M. Birkel y S. Sarkar, "Nucleosynthesis Bounds on a Time Varying Cosmological Constant", *Astropart. Phys.* **6**, 197 (1997).
- [5] D. E. Groom, "*Astrophysical Constants* en Review of Particle Physics (RPP 2000)", *Eur. Phys. J.* **C15**, 74 (2000).
- [6] M. Fukugita y C. J. Hogan, "*Global cosmological parameters:  $H_0$ ,  $\Omega_M$  and  $\Lambda$*  en Review of Particle Physics (RPP 2000)", *Eur. Phys. J.* **C15**, 136 (2000).
- [7] Página de BOOMERanG en internet, <http://www.physics.ucsb.edu/~boomerang>
- [8] A. Liddle y D. Lyth, "Cosmological Inflation and Large-Scale Structure", *Cambridge Univ. Pr.* (2000).
- [9] N. A. Bahcall, J. P. Ostriker, S. perlmutter y P.J. Steinhardt, "The Cosmic Triangle: Assessing the State of the Universe" *Science* **284**, 1481 (1999).
- [10] A. Melchiorri y L. M. Griffiths, "From Anisotropy to Omega", (2000), [astro-ph/0011147](mailto:astro-ph/0011147).

- [11] P. de Bernardis et al., "Multiple Peaks in the Angular Power Spectrum of the Cosmic Microwave Background: Significance and Consequences for Cosmology", (2001), [astro-ph/0105296](#).
- [12] L. Wang, R. R. Caldwell, J. P. Ostriker y P. J. Steinhardt, "Cosmic Concordance and Quintessence", *Astrophys. J.* **530**, 17 (2000).
- [13] A. Linde, Inflation and Quantum Cosmology, *Boston Academic Pr.* (1990).
- [14] A. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology, (Contemporary concepts in physics, 5), *Harwood Academic Pr.* (1990).
- [15] E. Kolb y M. Turner, The Early Universe, *Addison-Wesley* (1990). (Frontiers in physics, 69.)
- [16] A. H. Guth y P. J. Steinhardt, "The Inflationary Universe en Particle Physics in the Cosmos", *Freeman* (1989).
- [17] P. J. E. Peebles, Principles of Physical Cosmology, *Princeton Univ. Pr.* (1993).
- [18] E. J. Copeland, A. Liddle y D. Wands, "Exponential Potentials and Cosmological Scaling Solutions", *Phys. Rev. D* **57**, 4686 (1998).
- [19] A. de la Macorra y G. Piccinelli, "Cosmological Evolution of General Scalar Fields as Quintessence", *Phys. Rev. D* **61**, 123503 (2000).
- [20] I. Affleck, M. Dine y N. Seiberg, "Dynamical Supersymmetry Breaking in Four-Dimensions and its Phenomenological Implications", *Nucl. Phys. B* **256**, 557 (1985).
- [21] A. de la Macorra y C. Stephan-Otto, [astro-ph/0106316](#).
- [22] P. Binétruy, "Models of Dynamical Supersymmetry Breaking and Quintessence", *Phys. Rev. D* **60**, 063502 (1999), [hep-ph/9810553](#).
- [23] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein y V.I. Zakharov, "Exact Gell-Mann Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories From Instanton Calculus", *Nucl. Phys. B* **229**, 381 (1983).

- [24] U. Amaldi, W. de Boer y H. Fürstenau, "Comparision of Grand Unified Theories with Electroweak an Strong Coupling Constants measured at LEP" *Phys. Lett. B* **260**, 447 (1991).
- [25] P. Ferreira y M. Joyce, "Cosmology with a Primordial Scalar Field", *Phys. Rev. D* **58**, 023503 (1998).
- [26] S. Perlmutter, M. S. Turner y M. White, "Constraining Dark Energy with SNe Ia and Large-Scale Structure", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 670 (1999).
- [27] G. Huey, L. Wang, R. Dave, R. R. Caldwell y P. Steihardt, "Resolving the Cosmological Missing Energy Problem", *Phys. Rev. D* **59**, 063005 (1999).
- [28] M. E. Peskin, "Duality in Supersymmetric Yang-Mills Theory", (1997), hep-th/9702094.