



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

USO DE LA TÉCNICA DE SIMULACIÓN PARA
LA PREDICCIÓN DE LA RESERVA DE
SINIESTROS OCURRIDOS Y NO REPORTADOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
A C T U A R I O

P R E S E N T A:
JUAN MANUEL PAZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. GABRIEL VARGAS VILCHIS

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

295234



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Uso de la técnica de simulación para la predicción de la reserva
de siniestros ocurridos y no reportados"

realizado por Paz García Juan Manuel

con número de cuenta 9055832-2 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Actuario Gabriel Vargas Vilchis
Propietario

Propietario M. en C. Julio César Cedillo Sánchez

Propietario Act. Bárbara Ruth Trejo Becerril

Suplente M. en E. José Gonzalo Rangel López

Suplente Act. Eric Manuel Rodríguez Herrera

[Handwritten signatures]
Barbara Trejo
Rangel López
Eric Manuel Rodríguez Herrera

Consejo Departamental de Matemáticas

[Handwritten signature]

M. en C. José Antonio Flores Díaz

DE
CIENCIAS

DEDICATORIA

A la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mis padres, Rafael Paz y Catalina García por haberme inculcado buenos principios, por todo su amor y por todo el apoyo que siempre me han brindado.

Gracias a Jorge Alberto Paz, por compartir los buenos y malos momentos familiares.

Gracias a Javier Paz, que aunque viva lejos, siempre ha estado al pendiente de mi desarrollo.

Gracias a Daniel Paz, por su apoyo brindado.

Un agradecimiento muy especial a mi hermano, el Ing. Rafael Paz por todo el ejemplo de superación y profesionalismo que en mí ha inculcado a través de los años.

Gracias a mi sobrino Jorge Leonardo Paz, porque con sus sonrisas hace más alegre el proceso de educación mutua.

Gracias a Zashenka Salas, por todo su apoyo.

Gracias a Blanca Estela, por su cariño y apoyo que me han ayudado a salir adelante en momentos difíciles y por todos los momentos felices que hemos compartido.

Gracias a Ricardo Leyva, porque somos pocos en el mundo que tenemos la suerte de contar con un amigo como él.

Gracias a Lourdes Atilano, por ser mi única amiga de la facultad y fuera de ella.

Gracias a Marcos Durán, por su amistad y por haber compartido las injusticias del sector asegurador.

Gracias a mis compañeros y amigos de la facultad: Cesar Cedillo, Gabriel Vargas, Alfredo Velázquez, Josefina Andrade y Susana Méndez por haber compartido una etapa de mi vida.

Un agradecimiento a : Gonzalo Rangel, Eric Manuel y Bárbara Ruth por su apoyo en la presentación de éste trabajo.

A quien corresponda, y me falte mencionar, muchas gracias.

ÍNDICE

Introducción	7
Capítulo 1: Aspectos generales de la reserva S.O.N.R	8
Reservas de riesgos en curso	8
Reserva para obligaciones pendientes de cumplir	9
Reservas de provisión	11
Normas legales de la reserva S.O.N.R	11
Capítulo 2: Métodos mecánicos para la predicción de la reserva S.O.N.R	15
Método de la razón	16
Método de los porcentajes acumulados de siniestralidad	20
Método de crecimiento	23
Capítulo 3: La simulación	27
Aspectos históricos de la simulación	28
La técnica de simulación	28
Lenguajes de simulación	29
Métodos de simulación	30
Modelos de simulación	31
Modelos estocásticos	33
Modelos determinísticos	33
Modelos dinámicos	33
Modelos estáticos	34
Fases de simulación	34
Áreas de aplicación de la simulación	38
Áreas funcionales de la simulación	39
Ventajas de la simulación	41
Desventajas de la simulación	41
Capítulo 4. Predicción de la reserva S.O.N.R. por simulación	43
Definición del problema	43
Objetivos de la investigación	49
Recolección de datos	50
El modelo	54
Análisis de datos	65
Conclusiones	68
Bibliografía	70
Anexo 1: Formato oficial S.E.S.A. O.N.R. trimestral A1	72
Anexo 2: Formato oficial S.E.S.A. G.A.A.S. trimestral	73
Anexo 3: Formato oficial S.E.S.A. anual A3	74
Anexo 4: Resultados de las corridas de simulación	75
Anexo 5: Datos para la construcción del histograma	84

INTRODUCCIÓN

El modelaje en simulación ha llegado a ser en la actualidad un enfoque especialmente importante para el análisis de sistemas complejos. Igualmente en la última década, el número de académicos y estudiantes que usan la simulación como una herramienta para la solución de problemas empresariales, se ha incrementado en forma importante. Este hecho, aunado a la explosión comercial en el mercado de las microcomputadoras, ha inducido la proliferación de software de simulación y ha despertado el interés de diferentes profesionistas por esta técnica.

En este trabajo se hace un estudio sobre la estimación de la reserva de Siniestros Ocurredos y No Reportados mediante la técnica de simulación, aplicada a un modelo probabilístico. El objetivo es hacer notar las ventajas que ésta técnica y éste tipo de modelos tienen sobre los métodos y modelos determinísticos o mecánicos para la predicción de este pasivo.

En el capítulo 1 se mencionan los aspectos generales que deben tomar en cuenta todas las compañías del sector asegurador mexicano para la constitución de la reserva S.O.N.R. En el capítulo 2, se hace una descripción detallada de los modelos determinísticos, con la finalidad de comprender las características de su operación. En el capítulo 3, se desarrolla la teoría de la técnica de simulación de una manera sistemática, con el propósito de que pueda ser aplicada en el capítulo 5 a un problema real de estimación de la reserva S.O.N.R. de una compañía mexicana que actualmente se encuentra en operación y que ha presentado problemas en la constitución de la reserva desde que ésta se instituyó como obligatoria para todas las aseguradoras del país. Para finalizar, se presentan las conclusiones y las referencias bibliográficas. Adicionalmente en el anexo 1 se muestra el formato oficial para el registro de los Siniestros Ocurredos y No reportados. En el anexo 2 el formato oficial de los Gastos Asignados al Siniestros. En el anexo 3 el formato para el registro de Siniestros Ocurredos y No Reportados Anual. En el anexo 4 se presentan los resultados numéricos del total de corridas de la simulación aplicada al caso práctico y en el anexo 5 se presentan los datos para la generación del histograma y el intervalo de confianza.

En el presente trabajo se concluyó que con el uso de la técnica de simulación aplicada a modelos probabilísticos para el cálculo de la reserva S.O.N.R., dio como resultado una mejor estimación de la misma que los modelos determinísticos, ya que se contó con márgenes de seguridad, como son los intervalos de credibilidad generados con una función de densidad predictiva de la reserva completa, dando como resultado, un mejor manejo de las estimaciones y de los riesgos en general, y por lo tanto, esta podría ser una buena alternativa de uso sobre los otros modelos por parte de las compañías de seguros en México para la creación de este pasivo, y de esta manera, poder generar un mejor resultado técnico.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES DE LA RESERVA S.O.N.R.

El seguro tiene como finalidad lograr la estabilidad económica individual y colectiva de conjuntos de unidades económicas amenazadas por los peligros comunes; se les otorga una forma especial de garantía con medios financieros proporcionados por ellos mismos. Las instituciones de seguros condicionan esta prestación a cambio de una prima y de que ocurra el siniestro según el contrato realizado para cada tipo de seguro.

En nuestro país, las aseguradoras cierran un período contable cada año, entre otros informes que se presentan tanto a sus inversionistas como a las autoridades correspondientes, se presenta el estado de resultados técnico, en donde se reportan las reservas como pasivos. Este es el punto donde se nota la importancia de que cada compañía de seguros cuente con una estimación de las reservas que sea lo más correcta posible, para no cometer errores en la estimación de su resultado técnico, ya que si el fondo creado para prevenir las obligaciones futuras es excesivo, los recursos sobrantes podrían haberse empleado para otros fines de interés para la aseguradora. Por otra parte, si el fondo es insuficiente, afectaría la capacidad de la compañía para hacer frente a sus obligaciones en el tiempo al no tener una clara idea de la magnitud de sus pasivos y realizar gastos no previstos por ellos.

En la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros, se hace mención de varios tipos de reservas técnicas que deben ser constituidas para la protección tanto de la empresa, como de los clientes y los servicios que reciben. A continuación mencionaremos algunas de ellas:

RESERVAS DE RIESGOS EN CURSO

Reserva matemática. Para los seguros de vida, en los cuales, la prima sea constante y la probabilidad de siniestro creciente en el tiempo, se crea la reserva matemática de primas correspondientes a las pólizas en vigor en el momento de la valuación, calculada de acuerdo con los métodos actuariales que mediante reglas de carácter general autorice la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

Reserva para primas no devengadas. Para los seguros de vida temporales a un año, la parte de la prima neta no devengada a la fecha de valuación, dentro del período de cada año en vigor.

RESERVAS PARA OBLIGACIONES PENDIENTES DE CUMPLIR

Estas se constituyen por la cantidad requerida para hacer frente a los reclamos que no se han liquidado. Se tienen las siguientes:

Por pólizas vencidas, por siniestros ocurridos y por repartos periódicos de utilidades.

Estas reservas se constituyen por el importe total de las sumas que debe desembolsar la institución, al verificarse la eventualidad prevista en el contrato, la estimación se realiza conforme a las siguientes bases:

Para las operaciones de vida.

- Las sumas aseguradas en las pólizas respectivas, con los ajustes que procedan, de acuerdo a las condiciones del contrato.

Para las operaciones de daño.

- Se trata de siniestros en los que se ha llegado a un acuerdo por ambas partes, los valores convenidos.
- Si se trata de siniestros que han sido valuados en forma distinta por ambas partes, el promedio de estas valuaciones.
- Si se trata de siniestros respecto de los cuales los asegurados no han comunicado valuación alguna a las instituciones, la estimación que estas últimas hubieran hecho de los siniestros. La Comisión Nacional de Seguros y Fianzas queda facultada, en este caso, para rectificar la estimación hecha por las empresas.

Por los Siniestros Ocurridos y No Reportados:

Para poder dar mayor claridad a este punto, primero daremos algunas definiciones.

Siniestros Ocurridos y No Reportados. Son los siniestros cuyo período de origen (período en el que se realizó el siniestro) no coincide con su período de reclamación (período en el que la compañía aseguradora realiza el registro o el pago de la reclamación). Dentro de estos siniestros se conocen dos tipos y estos son los siguientes:

- Los Siniestros Ocurridos y No Totalmente Reportados. Se trata de siniestros que la compañía sabe que ocurrieron, pero ignora el monto total que debe pagar por ellos; este monto se conocerá en varios períodos, debido a la naturaleza de la reclamación.

Un ejemplo claro de estos siniestros, son los seguros de responsabilidad civil, cuyo monto final, lo conocerá la compañía al final de los procesos legales correspondientes.

- Los Siniestros Ocurridos y No Reportados. Son los siniestros de los que la compañía aseguradora ignora totalmente su ocurrencia, esto es debido a algún atraso en el reporte de la misma.

Las sumas que autorice anualmente la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, considerando la experiencia de siniestralidad de la institución y las estimaciones que ésta hubiere hecho, basadas en el método de cálculo que cada compañía tenga registrado, de siniestros que en el momento de establecer las reservas, han ocurrido, pero no han sido reportados a la compañía. Los pasivos de este tipo deben ser constituidos con las primas del periodo en el que ocurrieron, si no son tomados en cuenta para la constitución de las reservas en su periodo de ocurrencia, es probable que la compañía haga uso de otro tipo de reservas para pagarlos y tal vez enfrente problemas de solvencia.

Algunas compañías tienen el reporte de que ocurrió el siniestro, pero se desconoce el monto total de la reclamación que se debe pagar (Siniestros Ocurridos Pero No Totalmente Reportados) esto ocurre por lo general en seguros que incluyen la cobertura de Responsabilidad Civil con el principio de cobertura Ocurrid o por ocurrencia que cubre a los siniestros que se realizaron dentro de la vigencia del seguro, aunque la reclamación se haga posteriormente, a diferencia del otro principio de cobertura llamado Claims Made que cubre exclusivamente a aquellos siniestros cuya ocurrencia y reclamación sean dentro de la vigencia del seguro.

Las pólizas en México de seguros de responsabilidad Civil: Privada y familiar, industrial, comercial, de construcción, de hoteles, cuando no se implican riesgos en el extranjero, se encuentran basados en el principio de cobertura Ocurrid. La responsabilidad Civil Viajeros y Profesional se encuentran basados en el principio de Claims Made. La reserva para el pago de reclamaciones de los seguros de gastos médicos se calcula por los métodos del S.O.N.R debido a que presentan la reclamación en el periodo de vigencia del seguro y para la compañía de seguros implica el comienzo de los pagos que efectuará por los tratamientos médicos correspondientes, aunque haya terminado la vigencia del seguro, se cubren los gastos por dos años o hasta que se termine la suma asegurada.

El seguro de responsabilidad civil basados en el principio de Ocurrid, para la determinación del monto total que se pagará, se requieren periodos posteriores a la terminación de la vigencia, incluyendo largos procesos legales, por lo que éstos siniestros se llaman de cola larga. Es importante notar que la legislación sobre responsabilidad civil de cada país influye en que tan pesada es la cola de cada siniestro.

Dado que el manejo estadístico de ambos tipos de reservas es muy similar, pueden incluirse las reservas de los Siniestros Ocurridos Pero No Totalmente Reportados en las reservas de los Siniestros Ocurridos y No Reportados.

RESERVAS DE PREVISIÓN

La Reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro es necesaria, porque al pagar un siniestro se deben realizar gastos administrativos por reclamación. Para el caso de los Siniestros Ocurridos y No Reportados debe constituirse una reserva para hacer frente a los gastos derivados del pago de estos siniestros. Para obtener la reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro se pueden utilizar los mismos métodos que para predecir las reservas de Siniestros Ocurridos y No Reportados.

Las compañías de seguros deben constituir las reservas para Obligaciones Pendiente de Cumplir por Siniestros Ocurridos y No reportados y la reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro, registrar el método de cálculo ante la comisión Nacional de Seguros y Fianzas, la que evaluará la calidad de estimación del método de cálculo. Si el método no realiza correctamente la estimación de las reservas, la Comisión recomendará otro para ser utilizado.

NORMAS LEGALES DE LA RESERVA S.O.N.R.

En México, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, a través de las circulares que emite, reglamenta los aspectos relacionados con la reserva de Siniestros Ocurridos y No reportados. Lo anterior da lugar a la ampliación de la Ley General de las Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros. En la ley se exige la constitución de ésta reserva a las aseguradoras, pero es hasta 1994 cuando se reglamenta. Esta reserva se utiliza en los principales mercados de seguro en el mundo como parte importante del esquema de solvencia de la industria aseguradora.

En la circular S- 10.6 se especifican las reglas que conciernen a las reservas de S.O.N.R. La Secretaría de Hacienda y Crédito Público podrá modificar la forma y periodicidad de la constitución de las reservas. La Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, establece los términos en que las Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros deberán informarle y comprobar todo lo relacionado a la constitución de estas reservas. La reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir por Siniestros Ocurrido y No Reportados, es la suma que autoriza anualmente la C. N.S y F considerando la experiencia de la siniestralidad de la institución y las estimaciones que hubieren hecho de siniestros en los que tengan

evidencias y razonables posibilidades de responsabilidad para la misma. Esta reserva se reporta para las operaciones y ramos siguientes:

1. Operación de vida, distinguiendo entre individual, grupo y colectivo y tipo de moneda.
2. Accidentes y enfermedades de manera separada para accidentes personales y gastos médicos mayores.
3. Operación de daños de manera separada para cada uno de los ramos que la integran distinguiendo las diferentes coberturas que involucran responsabilidad civil en cada uno de ellos.

Cada institución de seguros debe constituir la reserva con base al método actuarial de cálculo que en su opinión sea el más acorde con las características de su cartera y experiencia siniestral, y éste se registra en la C.N.S. y F. La estimación debe realizarse cada tres meses. Las empresas deberán informar trimestralmente los siniestros pagados, con la identificación del periodo de su ocurrencia, para que la C.N.S y F. evalúe la calidad de estimación del método empleado. Se constituye también la reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro, lo que incluye gastos de ajuste tales como honorarios de abogados y de ajustadores externos contratados para la atención de ciertos siniestros, todos ellos referidos a siniestros ocurridos en el ejercicio contable o ejercicios anteriores, pero cuyo aviso se prevé que será presentado en fechas posteriores al cierre del ejercicio contable.

Formatos:

La circular S-10.6.1 explica como deben ser los formatos estadísticos en los que se reportan los datos que corresponden a los Siniestros Ocurridos y No Reportados. Se explica en forma gráfica, los procedimientos de llenado de los formatos necesarios para recabar esta información estadística (ver anexos 1 y 2). Los formatos utilizados son los siguientes:

S.E.S.A.O.N.R. trimestral, para reportar los Siniestros Ocurridos y No Reportados.

S.E.S.A.G.A.A.S., para los Gastos Asignados al Siniestro.

Envío de los formatos:

En la circular S-10.6.2 se explica como se debe enviar la información que es generada por periodos anuales. De forma similar a lo establecido para los formatos trimestrales, se presenta en forma gráfica los formatos anuales para recabar la información estadística (ver anexo 3).

La manera en que se capturan los datos en los formatos estadísticos presentados en los anexos respectivos no coincide con la forma en que se utilizan en el triángulo de desarrollo para la estimación de la reserva, se encuentran de manera inversa.

Bases para las que se fija el procedimiento para la constitución de la Reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir por los Siniestros Ocurredos y No Reportados y la Reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro.

- La circular S-10.6.4 hace mención de que las instituciones de seguros debieron registrar su método de cálculo para la reserva ante la C.N.S y F. a más tardar el 30 de octubre de 1995 y presentar al cierre del ejercicio la estimación anual de la reserva. Las reservas se constituyeron conforme al siguiente calendario:
Al 31 de diciembre de 1996 se habría constituido al menos el 50% del monto de la estimación a esa fecha.

Al 31 de diciembre de 1997 se debió constituir al 100%.

- Las reservas, sólo podrán comenzar a ser utilizadas por parte de las instituciones y sociedades mutualistas de seguros, una vez que se encuentren constituidas en su totalidad.

Registros contables:

La circular S-10.6.5 da a conocer el nombre de todas las cuentas contables que se utilizarán tanto de activo como de pasivo.

Entre otras cuentas que pueden consultarse directamente de la circular correspondiente, se tienen las siguientes disposiciones:

- Para el registro en el activo de la parte correspondiente al reasegurador en la Reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir por Siniestros Ocurredos y No reportados se utiliza la siguiente cuenta:

1706 Participación de reaseguradoras por siniestros pendientes.

- Para el registro del pasivo derivado de la determinación de la reserva para S.O.N.R se establece la cuenta:

2125 Reserva para Obligaciones Pendientes de Cumplir por Siniestros Ocurredos y No Reportados.

- Para el registro del pasivo que corresponde a la Reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro, se utilizará la siguiente cuenta:

2126 Reserva de Gastos de Ajuste Asignados a los Siniestros Ocurridos y No Reportados.

- Para la afectación de resultados por la parte correspondiente a la retención en la Reserva Para Obligaciones Pendientes de Cumplir por Siniestros Ocurridos y No Reportados y la Reserva de Gastos de Ajuste Asignados al Siniestro, se establecen las siguientes cuentas y subcuentas:

5209 Incremento de la Reserva Para Obligaciones Pendientes de Cumplir por Siniestros Ocurridos y No Reportados.

01 Del seguro Directo.

02 Del Reaseguro Tomado.

5710 Incremento a la Reserva de Gastos de Ajuste Asignados a los Siniestros Ocurridos y No Reportados.

01 Del seguro Directo.

02 Del reaseguro Tomado.

Nota: La circular S-10.6.5 entró en vigor a partir del 1° de enero de 1997.

3

CAPÍTULO 2

MÉTODOS MECÁNICOS PARA EL CÁLCULO DE LA RESERVA S.O.N.R.

Los métodos mecánicos o determinísticos se basan en el supuesto de que se mantiene constante la proporción de siniestros que se reportan de un período de desarrollo a otro, independiente del período de origen del siniestro; no utilizan explícitamente supuestos probabilísticos para la obtención de la reserva, es decir, que no presentan un patrón de variabilidad, suponen una mecánica exacta del proceso. A continuación se mencionarán los métodos más utilizados en Europa, Estados Unidos, Canadá y México y se presentará un ejemplo para cada uno de ellos para que se pueda ver con más claridad su funcionamiento. Cabe mencionar que los datos utilizados para estos ejemplos son reales y corresponden a una compañía de seguros que opera en México y que servirán como base para el estudio del cálculo de la reserva de Siniestros Ocurredos y No Reportados a través del presente trabajo. Para mostrar el funcionamiento de los métodos mecánicos sólo se utilizará una parte de la información total que abarcará únicamente nueve períodos de origen y desarrollo, aunque en el capítulo cuatro se utilizará el total de la información para hacer las comparaciones correspondientes, en este momento nos será de mucha utilidad.

Los modelos utilizados son:

- a) Método de la razón.
- b) Método de porcentajes acumulados de siniestralidad.
- c) Método de crecimiento.

En primer lugar, daremos la explicación de como se registran los datos en el triángulo de desarrollo (ver cuadro 2.1).

Por renglones se registran los períodos de origen de los siniestros y por columnas se indica hasta cuál período se enteró la compañía de la existencia del siniestro y pagó o registró la obligación correspondiente. De manera formal queda de la siguiente manera.

Cuadro.2.1 Triángulo de desarrollo

	1	2	3	4	.	J	.	k-2	k-1	k
1	X _{1,1}	X _{1,2}	X _{1,3}	X _{1,4}	.	X _{1,j}	.	X _{1,k-2}	X _{1,k-1}	X _{1,k}
2	X _{2,1}	X _{2,2}	X _{2,3}	X _{2,k-2}	X _{2,k-1}	.
3	X _{3,1}	X _{3,2}	X _{3,k-2}	.	.
4	X _{4,1}	X _{4,k-3}	.	.	.
.
i	X _{i,1}
.
s-2	X _{s-2,1}	.	X _{s-2,3}
s-1	X _{s-1,1}
S	X _{s,1}

Donde:

$X_{i,j}$ = Monto de las reclamaciones pagadas en el periodo de desarrollo j , para los siniestros cuyo periodo de origen es i .

$Y_{i,j} = \sum_{b=1}^j X_{i,b}$ = Valor acumulado de las reclamaciones hasta el periodo de desarrollo j correspondiente a los siniestros cuyo periodo de origen es i .

Las dimensiones $k=s$ quedan determinadas según la disponibilidad de información sobre los periodos de origen de los siniestros y los respectivos periodos de desarrollo en el tiempo, hasta la fecha que se cuente para la estimación de la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados.

MÉTODO DE LA RAZÓN

Del triángulo de desarrollo con los siniestros acumulados se obtienen los porcentajes de crecimiento de un periodo de desarrollo a otro, para un periodo de origen dado, es decir

$D_{i,j} = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}}$, se calcula después el promedio aritmético de las tasas de crecimiento

correspondientes a cada período de desarrollo $\bar{D}_{j,j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{k-(j+1)-1} D_{i,j}}{k-(j+1)-1}$, para $j=1, \dots, k-1$.

El método hace el supuesto de que se conoce o se puede estimar la proporción γ de siniestros que faltan por reportar. Esto puede estimarse tomando en cuenta el comportamiento de los S.O.N.R a través del tiempo para cada compañía de seguros. Se ajusta el último promedio con el factor correspondiente $\bar{D}_{k-1,k} = D_{k-1,k} * (1+\gamma)$. Luego se deben acumular (acumulación inversa) a estos promedios aritméticos incluyendo el factor de ajuste $\bar{D}'_{j-1,j} = \bar{D}_{j-1,j} * \bar{D}'_{j,j+1}$. Se utilizan estos factores para estimar el pago final acumulado que se realizará para cada período de origen y la reserva se obtiene de la siguiente manera. Los siniestros acumulados totales son los siguientes: $\bar{Y}_i = Y_{i,k-i+1} * \bar{D}'_{k-i,k-i+1}$, la reserva para cada período de origen se obtiene restando al monto del siniestro total, el último monto conocido en el triángulo de desarrollo. La reserva total se obtiene al sumar las reservas para cada período de origen, para $i=1, \dots, s$.

A continuación presentaremos una serie de tablas donde se explica de manera detallada cada uno de los pasos a seguir con el método de la razón para obtener la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados. Los mismos pasos se seguirán para cada uno de los métodos presentados en este capítulo, con los detalles propios de cada uno de ellos.

En el cuadro 2.2 está representada la forma en que la C.N.S. y F exige que se registre la información

Cuadro 2.2 Registro de los siniestros de acuerdo a su periodo de origen u ocurrencia y a su periodo de desarrollo¹

		METODO DE LA RAZON								
		VIDA INDIVIDUAL M/N								
TRIMESTRE DE OCURRENCIA		TRIMESTRE DE DESARROLLO								
		TRIM. 0	TRIM. 1	TRIM. 2	TRIM. 3	TRIM. 4	TRIM. 5	TRIM. 6	TRIM. 7	TRIM. 8
Mar-94		32	266	0	5	0	0	0	0	0
Jun-94			50	285	0	0	0	0	0	0
Sep-94				396	0	0	0	0	0	0
Dic-94					55	0	0	0	0	0
Mar-95						0	2	0	0	0
Jun-95							31	200	110	0
Sep-95								263	234	0
Dic-95									220	105
Mar-96										50

Cuadro 2.3 Datos en el triángulo de desarrollo, del cual se parte para realizar los cálculos

		METODO DE LA RAZON								
		VIDA INDIVIDUAL M/N								
TRIMESTRE DE OCURRENCIA		TRIMESTRE DE DESARROLLO								
		TRIM. 0	TRIM. 1	TRIM. 2	TRIM. 3	TRIM. 4	TRIM. 5	TRIM. 6	TRIM. 7	TRIM. 8
Mar-94		32	266	0	5	0	0	0	0	0
Jun-94		50	285	0	0	0	0	0	0	0
Sep-94		396	0	0	0	0	0	0	0	0
Dic-94		55	0	0	0	0	0	0	0	0
Mar-95		0	2	0	0	0	0	0	0	0
Jun-95		31	200	110	0	0	0	0	0	0
Sep-95		263	234	0	0	0	0	0	0	0
Dic-95		220	105	0	0	0	0	0	0	0
Mar-96		50	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 2.4 Siniestros pagados acumulados.

		ACUMULADO								
TRIMESTRE DE OCURRENCIA		TRIMESTRE DE DESARROLLO								
		TRIM. 0	TRIM. 1	TRIM. 2	TRIM. 3	TRIM. 4	TRIM. 5	TRIM. 6	TRIM. 7	TRIM. 8
Mar-94		32	298	298	303	303	303	303	303	303
Jun-94		50	335	335	335	335	335	335	335	335
Sep-94		396	396	396	396	396	396	396	396	396
Dic-94		55	55	55	55	55	55	55	55	55
Mar-95		0	2	2	2	2	2	2	2	2
Jun-95		31	231	341	341	341	341	341	341	341
Sep-95		263	497	497	497	497	497	497	497	497
Dic-95		220	325	325	325	325	325	325	325	325
Mar-96		50	50	50	50	50	50	50	50	50

¹ Las cantidades que están registradas en el triángulo, son en miles como lo ordenan las disposiciones de la C.N.S y F.

Cuadro 2.5 Estimación de los factores de siniestralidad. cálculo de su promedio aritmético y el proceso de acumulación inversa.

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	FACTORES DE SINISTRALIDAD								
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8
Mar-94	9.3125	1	1.01677852	1	1	1	1	1	1
Jun-94	6.7	1	1	1	1	1	1	1	1
Sep-94	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dic-94	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Mar-95	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Jun-95	7.451613	1.47819048	1	1	1	1	1	1	1
Sep-95	1.839734	1	1	1	1	1	1	1	1
Dic-95	1.477273	1	1	1	1	1	1	1	1
Mar-96									
	28.83112	7.47619048	6.01677852	5	4	3	2	1	
	7	7	6	5	4	3	2	1	
PRC. ANT.	4.118731	1.06802721	1.00279642	1	1	1	1	1	1
PRC. ACUM.	4.411218382	1.07101388	1.00279642	1	1	1	1	1	1

Cuadro 2.6 Estimación de la reserva

%	PAGO DE LA PERDIDA	ESTI.FINAL	RESPO.DE LA PERDIDA
1	303	303	0
1	335	335	0
1	396	396	0
1	55	55	0
1	2	2	0
1	341	341	0
1.002796421	498	497	1
1.071013864	348	325	23
4.411218382	221	50	171
	2499.030246	2304	195

MÉTODO DE LOS PORCENTAJES ACUMULADOS DE SINIESTRALIDAD

Sea:

$$S_{i,j} = \frac{\sum_{b=1}^j X_{i,b}}{p_i}$$

Donde:

$S_{i,j}$ = Valor acumulado de las siniestralidades hasta el período de desarrollo j para el año de origen i .

p_i = La prima emitida en el período de ocurrencia i .

$X_{i,j}$ = El monto de los S.O.N.R que corresponden al período de origen i , $1 \leq i \leq s$, pagados en período de desarrollo j , $1 \leq j \leq k$. Los valores de $X_{i,j}$ para $i+j \leq k-1$ son valores conocidos en el triángulo de desarrollo.

Entonces a partir de la información conocida en el triángulo de desarrollo sobre las diferencias de los porcentajes acumulados de siniestralidad $X_{i,j+1}$'s se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\sum_{t=1}^s D_{i,j+1}}{k-j+2} = \text{Promedio aritmético } j+1.$$

Donde:

$D_{i,j+1} = S_{i,j+1} - S_{i,j}$, es la diferencia de los porcentajes acumulados de siniestralidad con relación al período inmediato anterior.

Los promedios aritméticos se obtienen para todas las columnas o períodos de ocurrencia, $2 \leq j+1 \leq k$. Con un proceso de suma inversa se obtienen los promedios acumulados correspondientes a cada período de origen. Se comienza por $j+1=k$, el último período de desarrollo conocido, hasta llegar al primer período de desarrollo.

Promedio acumulado $j \cdot t =$ Promedio aritmético $j \cdot t +$ promedio acumulado j .

Por recursividad se obtienen los promedios acumulados. Para el último periodo de origen u ocurrencia del siniestro, le corresponde el promedio acumulado de los promedios aritméticos de los periodos de desarrollo que se encuentran en la parte desconocida del triángulo de desarrollo para ese periodo de origen, es decir, dado un periodo de origen i , le corresponde el promedio acumulado de los periodos de desarrollo j que cumplen con $k - i + 1 \leq j \leq k$.

La reserva para el periodo de ocurrencia i es $R_i = p_i * \sum_{j=k-i+1}^k$ promedio acumulado j .

A continuación se presenta el ejemplo que detalla cada uno de los pasos del método.

Cuadro 2.7. Forma de registro ante la C.N.S y F

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	PORCENTAJES ACUMULADOS								
	VIDA INDIVIDUAL MN								
	TRIMESTRE DE DESARROLLO								
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8
Mar-94	32	266	0	5	0	0	0	0	0
Jun-94		50	266	0	0	0	0	0	0
Sep-94			396	0	0	0	0	0	0
Dic-94				55	0	0	0	0	0
Mar-95					0	2	0	0	0
Jun-95						31	200	110	0
Sep-95							263	234	0
Dic-95								720	105
Mar-96									50

Cuadro 2.8. Triángulo de desarrollo para iniciar los cálculos

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	PORCENTAJES ACUMULADOS								
	VIDA INDIVIDUAL MN								
	TRIMESTRE DE DESARROLLO								
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8
Mar-94	32	266	0	5	0	0	0	0	0
Jun-94	50	266	0	0	0	0	0	0	0
Sep-94	396	0	0	0	0	0	0	0	0
Dic-94	55	0	0	0	0	0	0	0	0
Mar-95	0	2	0	0	0	0	0	0	0
Jun-95	31	200	110	0	0	0	0	0	0
Sep-95	263	234	0	0	0	0	0	0	0
Dic-95	220	105	0	0	0	0	0	0	0
Mar-96	50	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 2.9. Siniestros acumulados pagados

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	ACUMULADO										
	TRIMESTRE DE DESARROLLO										
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8	TRIM 9	
Mar-94	32	298	298	303	303	303	303	303	303	303	303
Jun-94	50	335	335	336	336	336	336	336	336	336	336
Sep-94	366	366	368	368	368	368	368	368	368	368	368
Dic-94	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55
Mar-95	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Jun-95	31	231	341	341	341	341	341	341	341	341	341
Sep-95	263	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497
Dic-95	220	325	325	325	325	325	325	325	325	325	325
Mar-96	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Cuadro 2.10. Diferencia de los porcentajes acumulados de siniestralidad

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	FACTORES DE SINISTRALIDAD										
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8	TRIM 9	
	Mar-94	266	0	5	0	0	0	0	0	0	0
Jun-94	285	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Sep-94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Dic-94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Mar-95	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Jun-95	200	110	0	0	0	0	0	0	0	0	
Sep-95	234	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Dic-95	105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Mar-96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Promedio Aritm	182	1:0	5	0	0	0	0	0	0	0	
Promedio Acumt	297	115	5	0	0	0	0	0	0	0	

Cuadro 2.11 Estimación de la reserva²

Año de Ocurrencia	Promedio Acumulado	Primas	Reserva
Mar-94	0	100	0
Jun-94	0	100	0
Sep-94	0	150	0
Dic-94	0	300	0
Mar-95	0	200	0
Jun-95	0	300	0
Sep-95	0	200	0
Dic-95	0.05	150	7.5
Mar-96	1.15	300	345
		Reserva	353

² El monto de las primas son estimadas, ya que no se contaba en ese momento con un registro exacto de las mismas. Este problema fue generalizado en todas las compañías del sector asegurador mexicano.

MÉTODO DE CRECIMIENTO

Sea:

$X_{i,j}$ = monto de los S.O.N.R. que corresponden al periodo de origen i , $1 \leq i \leq s$, pagados en el periodo de desarrollo j , $1 \leq j \leq k$.

Obtenemos la proporción acumulada de siniestros para cada periodo de desarrollo con respecto al total reportado.

$$C_{i,j} = \frac{Y_{i,j}}{Y_{i,k-i+1}} \quad \text{para } i+j \leq k+1.$$

Donde:

$Y_{i,j} = \sum_{b=1}^j X_{i,b}$ = Valor acumulado de los siniestros pagados hasta el periodo de desarrollo j , que corresponden al periodo de origen i .

En este método también hacemos el supuesto de que de alguna manera se conoce la proporción de siniestros que se han reportado hasta el momento, esta proporción puede estimarse con la experiencia previa de la compañía sobre el comportamiento de sus S.O.N.R.

Posteriormente se multiplica el primer renglón del triángulo por el factor de ajuste, es decir, $C'_{1,j} = C_{1,j} * r C'$; para los siguientes periodos se deben ajustar los porcentajes calculados con el promedio obtenido en la columna correspondiente al periodo de desarrollo, es decir:

$$C'_{i,j} = \frac{\sum_{b=1}^{k-i} C'_{b,j}}{k-i}$$

Para encontrar la estimación final de los siniestros se divide la diagonal inferior del triángulo original por los factores resultantes $\hat{Y}_{i,j} = \frac{Y_{i,j}}{C'_{i,j}}$ con $i+j \leq k+1$.

La reserva correspondiente se obtiene al restar estos montos a los últimos acumulados y conocidos para cada período de origen. La reserva total se obtiene al sumar los valores anteriores para todos los períodos de origen. A continuación se ejemplifica el método.

Cuadro 2.12 Forma de registro ante la C.N.S. y F

		CALCULO DE LA RESERVA PARA SONR MODELO DE CRECIMIENTO Vida Individual M.N.									
TRIMESTRE DE OCURRENCIA	TRIMESTRE DE DESARROLLO										
	TRIM. 0	TRIM. 1	TRIM. 2	TRIM. 3	TRIM. 4	TRIM. 5	TRIM. 6	TRIM. 7	TRIM. 8		
Mar-94	32	266	0	5	0	0	0	0	0	0	0
Jun-94		50	265	0	0	0	0	0	0	0	0
Sep-94			396	0	0	0	0	0	0	0	0
Dic-94				55	0	0	0	0	0	0	0
Mar-95					0	2				0	0
Jun-95							31	200	110		0
Sep-95								263	234		0
Dic-95									220		105
Mar-96											50

Cuadro 2.13 Triángulo de desarrollo para iniciar los cálculos

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	TRIMESTRE DE DESARROLLO								
	TRIM. 0	TRIM. 1	TRIM. 2	TRIM. 3	TRIM. 4	TRIM. 5	TRIM. 6	TRIM. 7	TRIM. 8
Mar-94	32	266	0	5	0	0	0	0	0
Jun-94	50	265	0	0	0	0	0	0	0
Sep-94	396	0	0	0	0	0	0	0	0
Dic-94	55	0	0	0	0	0	0		
Mar-95	0	2	0	0	0				
Jun-95	31	200	110	0					
Sep-95	263	234	0						
Dic-95	220	105							
Mar-96	50								

Cuadro 2.14 Siniestros acumulados pagados

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	TRIMESTRE DE OCURRENCIA									
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8	TRIM 8
Mar-94	32	298	298	303	303	303	303	303	303	303
Jun-94	50	336	336	336	336	336	336	336	336	336
Sep-94	398	398	398	398	398	398	398	398	398	398
Dic-94	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55
Mar-95	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Jun-95	31	231	341	341	341	341	341	341	341	341
Sep-95	263	497	497	497	497	497	497	497	497	497
Dic-95	220	325	325	325	325	325	325	325	325	325
Mar-96	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Cuadro 2.15 Porcentajes acumulados de siniestros pagados

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	TRIMESTRE DE DESARROLLO									
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8	TRIM 8
Mar-94	10.56%	98.35%	98.35%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Jun-94	14.93%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Sep-94	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Dic-94	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Mar-95	0.00%	1.00 00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Jun-95	9.09%	67.74%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Sep-95	52.92%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Dic-95	67.69%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Mar-96	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Cuadro 2.16 Estimación del porcentaje de siniestros pagados para cada período de origen.

TRIMESTRE DE OCURRENCIA	TRIMESTRE DE DESARROLLO									
	TRIM 0	TRIM 1	TRIM 2	TRIM 3	TRIM 4	TRIM 5	TRIM 6	TRIM 7	TRIM 8	TRIM 8
Mar-94	8.61%	80.20%	80.20%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Jun-94	12.17%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Sep-94	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Dic-94	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Mar-95	0.00%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Jun-95	7.41%	55.24%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%	81.54%
Sep-95	43.03%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%	81.32%
Dic-95	37.09%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%
Mar-96	33.93%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%	77.56%

Cuadro 2.17 Estimación de la reserva

%	PAGO DE LA PERDIDA	ESTI.FINAL	RESPO.DE LA PERDIDA
81.54%	303	372	69
81.54%	335	411	76
81.54%	396	486	90
81.54%	55	67	12
81.54%	2	2	0
81.54%	341	418	77
81.32%	497	611	114
77.56%	325	419	94
33.93%	50	147	97
	2304	2934	630

Con la presentación de estos métodos pienso que queda claro el funcionamiento de los mismos hasta el mínimo detalle. Existen otros métodos mecánicos como el de separación en el que el desarrollo es similar a los descritos en este capítulo, por tal motivo no considero necesario su presentación

CAPÍTULO 3

LA SIMULACIÓN

¿Qué hace un administrador en cualquier empresa? Toma de decisiones. Pero ¿qué es la toma de decisiones?

La toma de decisiones es un proceso que podemos descomponer en dos fases: el análisis y la decisión.

La fase de análisis requiere de un proceso ordenado, que se compone de las siguientes etapas¹:

1. Definir el problema.
2. Analizar el problema.
3. Evaluar las alternativas.

La segunda fase es la más difícil, ya que dentro de cualquier formación profesional, se nos enseñan muchas técnicas de análisis pero no a decidir, es decir, a realizar la elección de un curso de acción entre varias alternativas; esta fase se compone de las siguientes etapas:

1. Elegir entre alternativas.
2. Aplicar la decisión.

Una de las técnicas cuantitativas más importantes para la toma de decisiones es la **simulación**.

Antes de dar una definición de simulación, comenzaremos con unos aspectos históricos de la misma.

¹ Minch, G. Lourdes. *Fundamentos de Administración*. México, 5ª Ed. Trillas, 1990.

ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA SIMULACIÓN

Aunque la capacidad de las computadoras que emulan sistemas muy complejos, como el clima global y el vuelo de aviones de guerra altamente sofisticados, es bastante impresionante, esto se puede considerar de reciente desarrollo. De tiempos Platónicos, los inventores de esa época, buscaron aplicar tecnologías disponibles para recrear ambientes físicos e incluso los procesos mentales. Antes de las computadoras, se aplicaron técnicas mecánicas para lograr éstos objetivos. Archytas de Terentim, Grecia (400 – 350 a.C.) fabricó una paloma cuyos movimientos fueron controlados por un motor de reacción de vapor o aire comprimido. Los inventores de esa época no sólo empezaron el desarrollo de esas máquinas como curiosidad, sino que el propósito principal era facilitar el comercio y la industria. Las máquinas calculadoras como los Huesos de Napier, Los Pascaline, y el artefacto analítico de Charles Babbage fueron esfuerzos tempranos para simular y extender las habilidades humanas.

Los descendientes de estos dispositivos fueron los que realizaron las preparaciones para la Segunda Guerra Mundial, simulando trayectorias complejas de los proyectiles, diseñando la bomba atómica, entre otras cosas. Estas actividades fueron los que hicieron necesario el desarrollo de las primeras computadoras electrónicas y, en Estados Unidos, Gran Bretaña y Alemania, se desarrollaron aproximadamente en la misma época a través de programas vigilados por sus ejércitos respectivos. Estas computadoras eran embarazosas, difíciles de programar y mantener y no se contaba con el personal calificado para operarlas.

Cuando terminó la Segunda Guerra Mundial, estos avances tecnológicos fueron utilizados para las diferentes industrias, principalmente para la aeroespacial y con el tiempo se utilizaron para otras áreas, como son la minería, industria de la construcción, finanzas, mercadotecnia, etc. Sin embargo, hay que remarcar un punto muy importante, y es que se limita la fiabilidad global de cualquier simulación a la exactitud de sus variables

LA TÉCNICA DE SIMULACIÓN

Esta sección la comenzaremos con la siguiente pregunta; ¿Qué es simulación? C. West Churchman; la expreso:

“ X simula Y, si y sólo si”:

- a) X y Y son sistemas formales.
- b) Y se considera como el sistema real.

c) X se toma como una aproximación del sistema real.

d) Las reglas de validez no están exentas de error².

Dando una interpretación de la definición anterior, se puede decir, que la simulación busca “duplicar sistemáticamente lo que sucede en la realidad construyendo un modelo y sujetándolo a los mismos pasos e influencias que lo afectan en la vida real³”.

El principal estimulante para la utilización de la simulación, consiste en su capacidad para ocuparse de fenómenos complicados, dinámicos y que interactúan. Si los procesos o fenómenos permiten una descripción adecuada, pueden modelarse y pueden simularse los experimentos. A diferencia de las soluciones de optimización analítica, los modelos de simulación tienden a presentar mejores descripciones de la realidad. La disponibilidad de sistemas de computadoras más potentes y menos costosos, acelerará todavía más el rápido desarrollo de la simulación en sus múltiples aplicaciones.

LENGUAJES DE SIMULACIÓN

Como lo acabamos de mencionar, uno de los aspectos más importantes de un estudio de simulación es la programación de computadoras. A menudo es difícil escribir el programa para un modelo complejo de simulación; por tal motivo se han creado algunos lenguajes de simulación en computadora con fines específicos, con el fin de simplificar la programación. Durante los últimos años, varios productos han dejado el mercado y nuevos e interesantes han llegado. En general, los idiomas de simulación se han vuelto más fáciles de usar y los simuladores ahora tienen una clase más amplia de aplicaciones en las diferentes áreas; estos productos, en algunos casos, han mejorados sus capacidades estadísticas.

Se debe tener presente que quizás sólo el 30 o 40 por ciento del trabajo total en un estudio legítimo de simulación es realmente el modelo codificado⁴. Aún, cuando un producto de la simulación pudiera desarrollarse con flexibilidad ilimitada y esencialmente con cero tiempo de programación, habría todavía varios problemas metodológicos significantes que el analista de la simulación tendría que enfrentar. Estos problemas incluirían formulación del problema, la recolección de la información apropiada y datos, aprobación ejemplar, seleccionar las distribuciones de probabilidad de entrada y el diseño y análisis de las corridas de simulación.

² Rodríguez, T. Federico, *Técnicas y Modelos de Simulación de Sistemas*. México, I.P.N., 1991.

³ Terry R. George, *Principios de Administración*. México. Compañía Editorial Continental. 3ª Edición, 1980.

⁴ McComas G. Michael, *How to Select Simulation Software*. Simulation, 1992.

Los rasgos deseables del software de simulación son:

- La flexibilidad para modelar. Es uno de los rasgos importantes para el software de simulación, partiendo de que ningún problema es el mismo. Si el paquete de la simulación no tiene las capacidades requeridas para una aplicación particular, entonces el sistema que produce un modelo tiene una validez desconocida que debe aproximarse.
- La factibilidad de desarrollo del modelo es otro rasgo muy importante para el software de la simulación, debido al horario corto para muchos análisis de las diferentes áreas. Las interfaces del usuario deben facilitar la entrada de parámetros ejemplares. Se aumentará la exactitud y velocidad del proceso a modelar si el paquete tiene buenas ayudas para la depuración.
- La velocidad de la ejecución del modelo es importante cuando un modelo de simulación grande será corrido en una P.C.
- Capacidades estadísticas. Desde que el generador de números aleatorios se usa para generar muestras de las distribuciones de probabilidad de entrada y se maneja el modelo de la simulación a través del tiempo, los datos de rendimiento de simulación también son al azar y se destinan para que las técnicas estadísticas las usen para diseñar e interpretar las corridas de la simulación. Debe haber un mecanismo fácil para hacer repeticiones independientes del modelo automáticamente, con cada repetición que usa diferentes números al azar, empezando en el mismo estado inicial y restableciendo los contadores estadísticos para poner en cero. El usuario debe poder especificar un juego de medidas de la actuación de interés y que el software de simulación pueda estimar el punto y el intervalo de confianza para cada medida de la actuación de los datos del rendimiento producidos por las repeticiones independientes.

MÉTODOS DE SIMULACIÓN

El método para llevar a cabo un estudio de simulación, se desenvuelve alrededor del enfoque planeado. El paso más crítico en ese estudio es la construcción de un modelo que sea suficientemente sencillo para permitir la experimentación y al mismo tiempo suficientemente completo para presentar los aspectos pertinentes de la situación de negocios que se simula. La prueba de un modelo de simulación consiste en su capacidad de presentar la esencia de la realidad con un mínimo de detalles. Un requisito previo de la construcción del modelo, es una clara definición del objetivo de estudio. Una fase cada vez más importante de cualquier modelo de simulación es el empleo de números aleatorios o generadores de números aleatorios, para simular los procesos del mundo real, causados por la naturaleza dinámica de los negocios.

La técnica Monte Carlo es tan sólo una de las muchas técnicas de simulación que se ha utilizado en el mundo de los negocios. Se ha aplicado a un gran número de problemas y prácticamente en todas las industrias, como lo hace evidente la gran cantidad de material que se ha publicado. Hay que reconocer que el enfoque de Monte Carlo no es una panacea, ya que hay muchos problemas demasiado complicados que no permiten su aplicación. Los problemas que no pueden manejarse con ese enfoque podrán resolverse con el de simulación de sistemas. Este último método emplea modelos complicados y datos históricos.

MODELOS DE SIMULACIÓN

¿ Qué modelos utiliza la simulación? Existen diversas clasificaciones de los modelos de acuerdo a ciertas características implícitas de ellos:

1.- De acuerdo a su función.

a) Descriptivos.

b) Predictivos.

c) Normativos.

2.- De acuerdo a su estructura.

a) Icónicos.

b) Analógicos.

c) Simbólicos.

3.- Respecto al tiempo:

a) Estáticos.

b) Dinámicos.

4.- En función a la incertidumbre.

a) Determinísticos.

b) Probabilísticos.

Cabe mencionar que cada modelo esta compuesto por cuatro elementos bien definidos⁵:

1. Componentes: Dependen del sistema que se analiza.
2. Variables: Empleadas para relacionar un componente con otro, tales como:
 - a) Variables exógenas; son independientes porque actúan sobre el sistema, pero no reciben acción alguna de parte de él. Las variables exógenas son las independientes o de entrada del modelo y se supone que han sido predeterminadas y proporcionadas independientemente del sistema que modela. Suponemos que la dirección causa-efecto fluye en un sólo sentido. Es posible clasificar a las variables exógenas en controlables y no controlables. Las primeras son aquellas variables o parámetros susceptibles de manipulación o control por quienes toman decisiones o crean políticas para el sistema. El medio ambiente en el cual el sistema modelado existe y no el sistema en sí o los encargados de tomar decisiones, genera las variables no controlables.
 - b) Variables de estado; describen el estado de un sistema o uno de sus componentes, ya sea al comienzo, al final o durante un período (de tiempo). Estas variables interaccionan con las variables exógenas del sistema y con las endógenas, de acuerdo a las relaciones funcionales supuestas para el sistema. El valor de una variable de estado, durante un período particular de tiempo, puede depender no solamente de los valores de una o más variables exógenas en algún período precedente, sino también del valor de ciertas variables de salida en períodos anteriores.
 - c) Variables endógenas; son las dependientes o de salida del sistema y son generadas por la interacción de las variables exógenas con las de estado de acuerdo con las características de operación del último.
3. Parámetros.
- 4.- Relaciones funcionales. Describen la interrelación de las variables y los componentes; hay dos clases:
 - a) Las identidades. Esta relación funcional toma la forma de definiciones o declaraciones tautológicas, relativas a los componentes del modelo.
 - b) Las características de operación. Esta relación es una hipótesis, generalmente una ecuación matemática, que relaciona las variables endógenas y de estado del sistema, con sus variables exógenas

⁵ Naylor H. Tomas. *Técnicas de Simulación en Computadoras*. Mexico, Limusa, 3ª Ed, 1991.

Generalmente en simulación encontramos a los modelos clasificados respecto al tiempo y en función a la incertidumbre y por tal motivo daremos una explicación más detallada de estos últimos dos modelos.

MODELOS ESTOCÁSTICOS

Los modelos estocásticos son aquellos modelos en los que por lo menos una de las características de operación está dada por una función de probabilidad. La suficiencia de las técnicas analíticas para solucionar modelos estocásticos, se encuentra bastante restringida debido a que estos modelos son considerablemente más complejos que los modelos determinísticos. Por esta razón, la simulación es un método mucho más atractivo para analizar y resolver los modelos estocásticos y no los determinísticos. Los modelos estocásticos también tienen interés desde el punto de vista de la generación de muestras de datos al azar, que se emplean en las etapas de observación o prueba de la investigación que se este realizando.

MODELOS DETERMINÍSTICOS

En los modelos determinísticos, ni las variables exógenas ni las endógenas, se les permite ser variables al azar, en tanto que se suponen relaciones exactas para las características de operación en lugar de funciones de densidad de probabilidad. Los modelos determinísticos requieren menos procesamiento en computadoras que los métodos estocásticos y con frecuencia es posible resolverlos analíticamente, por medio de la utilización de técnicas como el cálculo de máximos y mínimos, entre otros.

Aunque es posible utilizar la simulación, y en particular en análisis Monte Carlo para resolver modelos estrictamente determinísticos, no es muy recomendable, ya que en la mayoría de los casos las técnicas analíticas, desde el punto de vista computacional, tienen una mayor eficiencia que los métodos de simulación aplicados a la solución de los modelos determinísticos.

MODELOS DINÁMICOS

Los modelos matemáticos que tratan de las interacciones que varían con el tiempo, se denominan modelos dinámicos. Baumol⁶ ha definido el término dinámica económica, para relacionar los modelos dinámicos a la economía, como: " el estudio de los

⁶ Baumol, William J., *Economic Dynamics*. Nueva York, The Macmillan Co., 1959.

fenómenos económicos en relación con los eventos pasados y futuros". La simulación ha sido utilizada ampliamente en el campo de la dinámica económica. Entre las aplicaciones más conocidas se encuentran:

- a) La simulación del ciclo de negocios y los modelos de crecimiento macroeconómico.
- b) Los modelos para simulación de la empresa.
- c) Los modelos de fenómenos de espera, planeación, inventarios y del problema de las tareas en el taller.

MODELOS ESTÁTICOS

Son aquellos modelos que no toman en cuenta, explícitamente, a la variable tiempo. En Investigación de Operaciones, con raras excepciones, la mayoría del trabajo en las áreas de programación lineal, no lineal y teoría de juegos, se ha concretado a modelos estáticos. Sin embargo hay una razón para no enfatizar con el uso de la simulación como un método de análisis para los modelos estáticos y ésta es, que la mayoría de ellos son completamente determinísticos y por lo común se pueden obtener soluciones para problemas de ese tipo, empleando casi siempre técnicas analíticas directas, como el cálculo de optimalidad y programación matemática.

FASES DE LA SIMULACIÓN

Ya definida la simulación y modelo, ahora se presentan las fases de la técnica de simulación:

- 1.- Definición del problema.
- 2.- Conceptualización del sistema.
- 3.- Formulación de un modelo matemático.
- 4.- Estimación de parámetros.
- 5.- Evaluación del modelo.
- 6.- Formulación del programa en computadora.
- 7.- Validación.

8.- Diseño experimental.

9.- Análisis de datos.

En el diagrama 3.1 presentamos un método sistemático para llevar a cabo una simulación.

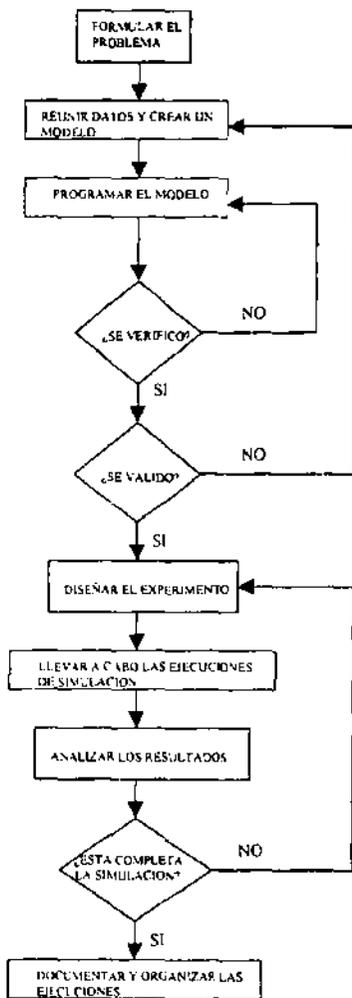


Diagrama 3.1 Etapas de un estudio de la técnica de simulación.

Sin embargo, no todos los estudios de simulación consisten en todas las etapas, ni siguen el orden que aquí se menciona. Por otro lado, puede haber sobreposiciones en algunas de las etapas.

A continuación daremos una explicación generalizada de las etapas de la simulación.

La etapa inicial de cualquier proyecto de simulación requiere de un enunciado explícito del objetivo o de los objetivos que se persiguen. Esto debe incluir las preguntas que se han de contestar y las posibilidades a considerar. Si no se comprende claramente el problema, disminuyen mucho las probabilidades de terminarlo y completarlo con resultados satisfactorios. Es muy probable que la formulación inicial sufra muchas modificaciones a medida que avance el estudio y a medida que se aprenda más acerca de la situación que se estudia.

El siguiente paso es la creación del modelo y la reunión de datos. La creación del modelo es posiblemente la parte más difícil y crítica de un estudio de simulación. En el modelo tratamos de representar las propiedades esenciales del sistema que estudiamos mediante relaciones matemáticas o lógicas. Es muy importante aclarar que hay muy pocas reglas definidas para guiar el manejo de este proceso, aquí en muchas ocasiones depende de la creatividad del que realiza el proyecto.

Habiendo especificado el modelo, lo ponemos en una forma en la que se pueda analizar en la computadora. Esto normalmente significa elaborar un programa de computadora para el modelo. Una de las decisiones clave en este caso es la selección del lenguaje en que se va a programar. Este lenguaje puede ser desde Excel, hasta lenguajes para fines especiales. En cualquier caso, la parte de programación del estudio será probablemente un proceso tardado. Una vez elaborado y depurado el programa, se debe determinar si trabaja bien, en otras palabras ¿hace el programa lo que se desea que haga?

Si quedamos satisfechos con el programa, pasamos ahora a la etapa de validación. Esta es otra parte crítica de un estudio de simulación. En ella validamos el modelo para ver si representa realmente al sistema que analiza y para ver si los resultados son confiables, ya que no debemos olvidar que cada modelo representa un reto distinto.

Si nos satisface la eficacia del modelo en esta etapa, lo podemos usar para llevar a cabo los experimentos y responder a las preguntas que se tengan. Los datos generados por la simulación se deben reunir, procesar y analizar. Los resultados no sólo se analizan como soluciones al modelo, sino también en términos de validez y confiabilidad estadística (en modelos probabilísticos).

Este último punto es muy importante porque los datos obtenidos de la simulación siempre presentan variabilidad aleatoria, ya que se alimentan de variables aleatorias.

Con objeto de analizar los resultados, en general clasificamos las simulaciones en dos tipos: simulaciones de terminación y simulaciones de estado estable. Una simulación de terminación es aquella que se ejecuta durante un tiempo TE , donde E es un evento o eventos especificados que detienen la simulación. Una simulación de estado estable es aquella que se ejecuta durante un tiempo largo, esto es, la duración de la simulación tiende a infinito. Con frecuencia el tipo de modelo determina qué tipo de análisis de resultados es el adecuado para determinada simulación.

Para el análisis estadístico asociado con simulaciones de terminación, hacemos lo siguiente:

Supongamos que hacemos n réplicas independientes con un método de simulación de terminación. Si cada una de las n simulaciones se inicia con las mismas condiciones iniciales y se ejecutan con una frecuencia distinta de números aleatorios, entonces cada simulación se puede tratar como una réplica independiente. Por simplicidad, suponemos que sólo hay una medida de desempeño, representada por la variable X . Así, X_j es el estimador de la medida de desempeño de la j -ésima réplica. Entonces dada las condiciones de las réplicas o simulaciones, la sucesión X_1, X_2, \dots, X_n serán variables aleatorias. Con estas podemos usar el análisis estadístico clásico para formar un intervalo de confianza $100(1 - \alpha) \%$ como sigue:

$$\bar{X}(n) \pm t_{(\alpha/2, n-1)} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

Donde:

$$\bar{X}(n) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$$

$$S^2(n) = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}(n))^2}{n-1}$$

Como cada problema de simulación tiene sus propias características de operación, los métodos estadísticos para hacer inferencias a partir de los datos obtenidos mediante la técnica, pueden sufrir modificaciones para obtener mejores resultados y que estos estén más apegados a la realidad que se busca.

ÁREAS DE APLICACIÓN DE LA SIMULACIÓN

La simulación como técnica se ha extendido a muchas áreas de la empresa; a continuación presentamos algunas aplicaciones actuales, sin considerar que son todas las aplicaciones posibles, sino como simples ejemplos⁷:

- 1.- Aplicaciones en mercadotecnia (simuladores de mercado) a los nuevos productos.
 - a) Para pronosticar la reacción de los consumidores a los nuevos productos.
 - b) Modelos de flujo de consumidores, para pronosticar las participaciones del modelo que se esperan para los productos.
 - c) Para definir el nivel, mezcla, asignación y oportunidad más apropiados a los diversos esfuerzos de mercadotecnia para sus productos.
 - d) Util para buscar una nueva estrategia de mercadotecnia que se ajuste mejor al segmento del mercado.
- 2.- Distribución física, para ofrecer información relativa a:
 - a) Localización de los mercados.
 - b) Localización de los clientes.
 - c) Tamaño de los pedidos.
 - d) Forma de pedir.
 - e) Tipos de embarque.
 - f) Mezcla de productos.
- 3.- Manufactura.
 - a) Para poner a prueba ciertas ideas de programación de producción.
 - b) Simulación de una línea de producción.
 - c) En la determinación del tamaño de un grupo de mantenimiento.

⁷ Thierauf, J. Robert, *Toma de decisiones*. México, Limusa, 1ª Ed, 1972.

4.- Inventarios

- a) Para obtener una política óptima de existencias de seguridad que redujera al mínimos los costos.
- b) Establecimiento de puntos de renovación de pedidos.
- c) Un modelo general de decisión para pronosticar la demanda.
- d) Tasas calculadas de producción de acuerdo con alguna regla de decisión.

5.- Finanzas y contabilidad.

- a) Para conocer los efectos de un gran número de factores en inversiones de grandes sumas de capital.
- b) Simular inversiones alternativas.
- c) Elaboración de presupuestos.
- d) Reducir los costos de producción.
- e) Incremento de la capacidad instalada.

Actualmente sólo ha habido un uso limitado de la simulación administrativa en la industria de los seguros, pero será de gran importancia para analizar carteras de inversiones, estimación de pasivos y el control de operaciones de la administración de las compañías.

ÁREAS FUNCIONALES DE LA SIMULACIÓN

Actualmente las empresas que utilizan la técnica de simulación para obtener cierta ventaja sobre sus competidores y dependiendo de sus propias necesidades, han dividido el uso de su aplicación en varios niveles. Esto es muy importante, ya que antes de hacer cualquier proceso relacionado con ésta técnica, se debe hacer un análisis previo para identificar en que área funcional se debe desarrollar el estudio, para evitar traslaparlo con otras áreas y de esta manera evitar ambigüedades. Estas divisiones las podemos ver en el cuadro 3.1.

Cuadro 3.1. áreas funcionales de la simulación.

USO DE LA SIMULACIÓN EN LOS TRES NIVELES, EN LAS TRES ÁREAS FUNCIONALES.

ÁREAS DE USO DE LA SIMULACIÓN

FORMAS EN QUE SE USA LA SIMULACIÓN

CANTIDAD DE USO DE LA SIMULACIÓN	DISEÑO	PLANEACIÓN	OPERACIONES
EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS	ALTO	ALTO	PROMEDIO
DESARROLLO DE ALTERNATIVAS	PROMEDIO	PROMEDIO-BAJO	PROMEDIO-ALTO
SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS	BAJO	BAJO	PROMEDIO-BAJO

VENTAJAS DE LA SIMULACIÓN

La principal motivación para utilizar la simulación, consiste en su capacidad para estudiar fenómenos complicados, dinámicos y que interactúan. El desarrollo de la informática y de los lenguajes especiales de programación para simulación, extenderá su aceptación y aplicaciones a otras áreas de la empresa.

Sin embargo, se debe acentuar que aunque existen varias razones para su utilización, la simulación no es siempre la mejor alternativa. El administrador debe en principio, valorar de acuerdo a sus objetivos y ponderar la conveniencia y/o desventajas de aplicar esta técnica. Si el contexto del problema es el adecuado para la aplicación de técnicas distintas, deben éstas considerarse como prioritarias. Diversos autores han analizado las posibles ventajas de su utilización, algunas de las razones que más se han mencionado son:

- a) La simulación permite estudiar y/o experimentar con sistemas, cuyo grado de complejidad es muy variado.
- b) Es posible y/o deseable utilizar la simulación para comprobar o verificar las soluciones analíticas.
- c) En instituciones de enseñanza, la simulación es un valioso auxiliar pedagógico que permite que los estudiantes ejerciten y desarrollen habilidades básicas de análisis y toma de decisiones.
- d) La simulación permite visualizar en los sistemas, los efectos inducidos por alteraciones estructurales y/o funcionales, sin afectar el sistema real.
- e) La aplicación de esta técnica y el análisis cuidadoso de los resultados, permite normar criterios para la toma de decisiones, así como, instrumentar acciones específicas permitiendo evaluarlas en periodos cortos o largos de tiempo.
- f) La simulación es un auxiliar muy valioso para el proceso de planeación de cualquier organización.

DESVENTAJAS DE LA SIMULACIÓN

Por otra parte, también pueden mencionarse algunas desventajas de la simulación:

- a) Generalmente, para su uso se requieren más recursos económicos y tiempo.

- b) No existe una certeza absoluta sobre los resultados obtenidos.
- c) El desconocimiento de la técnica, hace difícil que se acepten los resultados y conclusiones por los niveles directivos de las organizaciones.
- d) Es necesario dar un mantenimiento continuo al modelo, para que no se vuelva obsoleto ante un medio ambiente muy dinámico o poco estable.
- e) Una deficiente aplicación de la técnica puede ser más perjudicial.

CAPÍTULO 4

PREDICCIÓN DE LA RESERVA S.O.N.R. POR SIMULACIÓN

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El producto que una aseguradora vende a sus clientes es una promesa de pago de siniestros. Por lo tanto, una tarea básica para el asegurador es la de estimar el costo en pesos (en el caso de México) en que incurrirá al cumplir esa promesa.

La necesidad de estimaciones precisas es evidente por tres razones:

Primero, el asegurador vende una promesa de que pagará por las pérdidas sufridas por el asegurado y sólo puede cumplir su promesa si el día de hoy tiene una posición financiera sólida, y la continúa teniendo. Un asegurador debe tener estimaciones certeras de sus pasivos porque sin ellas, el balance no representaría una situación justa de su posición financiera.

Una segunda razón por la cual se necesitan estimaciones certeras es para tarificar sus productos en forma adecuada. El seguro depende de la ley de los grandes números y de los resultados obtenidos en el pasado por grandes grupos de asegurados para predecir resultados futuros. Estos resultados futuros incluyen siniestros pagados y pendientes. Sin estimaciones precisas de las obligaciones pendientes, las predicciones futuras del asegurador pueden tener fallas.

Una tercera razón por la que estimar las pérdidas es importante, es que el asegurador necesita estimaciones precisas para monitorear la rentabilidad de la empresa. Una cartera de asegurados pueden tener pérdidas predecibles dentro de un rango razonable, pero las pérdidas no pueden conocerse con exactitud. Para proveer por la incertidumbre de las pérdidas de la cartera, el asegurador debe tener suficiente capital para absorber las fluctuaciones en los resultados. Como con cualquier negocio, los dueños del dinero deben ser capaces de monitorear la rentabilidad sobre su capital. Ellos sólo pueden hacerlo si los pasivos están certeramente estimados.

La precisión en las estimaciones de las pérdidas, incluidos los gastos de ajuste, tiene por lo tanto, un impacto significativo en la fortaleza y estabilidad financieras de una compañía de seguros.

El principal componente de las estimaciones de las pérdidas lo constituyen indudablemente los siniestros ocurridos y reportados; pero existe también una cantidad de

reclamaciones que al momento de la valuación de las pérdidas ya existen, y representan por consiguiente una obligación para la compañía, las cuales no son conocidas por la aseguradora y que pueden llegar a ser un porcentaje importante de la pérdida total. Esta obligación es generalmente el menos entendido de los pasivos y es a menudo el más difícil de estimar.

Pero cuales son las causas de que los siniestros no sean reportados a la compañía en los periodos que éstos suceden; las razones más importantes son las siguientes:

- La mala administración por parte de la compañía de seguros. Esto quiere decir que no lleven un registro adecuado de los estados de cuenta de cada uno de los asegurados, con la finalidad de poder determinar de esta manera si se han pagado las primas correspondientes y si la póliza aun se encuentra en vigor.
- Que el beneficiario no supiera de la existencia de la póliza. La ley marca que una vez que sucedió el siniestro, el beneficiario tiene como plazo máximo dos años para poder cobrar la suma asegurada a partir del momento en que se entere de la existencia de la póliza, no de que ocurra el siniestro. Normalmente, las personas que son beneficiarias de alguna póliza de seguros, inmediatamente cobran la suma asegurada correspondiente, por lo tanto, es muy difícil por parte de la compañía de seguros comprobar que una persona está mintiendo al decir que desconocía la existencia de la póliza, si después de dos años hace la reclamación como beneficiario de ésta y por lo tanto la compañía tiene que pagar ese reclamo y esto sin lugar a duda repercute en el cálculo de la reserva S.O.N.R.
- Que la compañía de seguros haga uso de los treinta días que marca la ley para realizar el pago del siniestro. En México, como lo explicamos en el capítulo uno, el cálculo de la reserva por siniestros pendientes es trimestral, y al hacer uso de esos treinta días, aunque se tenga la certeza de que el siniestro procede al pago, puede provocar algún período de desfase en el triángulo de desarrollo y causar efectos directos sobre el mismo y en consecuencia sobre el monto total de la reserva de siniestros no reportados.

Ahora bien, cuando preguntamos ¿Cuál es el propósito de la reserva de siniestros ocurridos no reportados? la mayor parte de las personas del sector asegurador responde únicamente que la reserva se necesita para que, si la compañía tuviera que cerrar mañana, los asegurados tengan todavía la garantía de que podrán recibir el pago de las reclamaciones correspondientes.

En pocas palabras, la reserva sirve para reflejar mejor la situación financiera de la empresa en un momento dado y la idea de que en realidad puede y debe usarse para conocer la siniestralidad real de la cartera y poder tarificar mejor los productos nunca, o casi nunca, se menciona.

Por otra parte, casi nadie piensa que su empresa va a cerrar mañana y por lo tanto, prefieren considerar la siniestralidad como un flujo donde los siniestros pagaderos el año entrante se cubrirán con las primas que se generen también en ese año, independientemente de cuando se haya originado la pérdida.

Dentro de este contexto la reserva para obligaciones pendientes de cumplir es meramente otro requisito legal más y una de las grandes preocupaciones es mantenerla lo más baja posible y en segundo lugar que sea representativa de nuestra siniestralidad.

El principal problema de que esta reserva no este siendo considerada en su justa dimensión como un instrumento para determinar la siniestralidad real de una cartera, es que, siendo una reserva relativamente nueva, todavía se tienen muchas dudas sobre los métodos para su constitución, los elementos que intervienen en su cálculo y, por encima de todo esto, demasiado nueva para que se haya podido desarrollar el criterio necesario para juzgar sus resultados; criterio que, en muchos de los casos, sólo la experiencia podrá dar.

Discutamos un poco sobre algunos de estos factores.

1. Modelos de Cálculo.

Los métodos comunes para estimar las reservas pueden variar desde procedimientos matemáticos simples hasta métodos estadísticos sumamente complejos.

En todos los casos los métodos asumen que la historia y las operaciones de la compañía de seguros son estables. Si las operaciones de la compañía permanecen sin cambio, el patrón de los triángulos de desarrollo serán estadísticamente estables. También cuando las operaciones de la compañía cambian en forma significativa, los patrones de desarrollo cambiarán en forma cuantificable.

Dado que a menudo la estabilidad no es precisamente el caso, y esto debe ser reconocido así, se deben ajustar los cálculos a las características únicas de cada organización, tomando en cuenta la mezcla de negocios, entendiendo el proceso de pago de siniestros y los sistemas de procesamiento de información.

Es necesario probar con diferentes métodos, y comparar contra los resultados reales que vamos obteniendo por su aplicación, para poder ir ajustando los resultados.

En el sector asegurador mexicano, los datos históricos con los que se contaba al iniciar la creación de esta reserva no siempre existieron de la forma en que se requerían, y esto fue un problema común.

La fuente de los datos usados para el proceso de reservas son los sistemas de transacciones de la compañía. El principal propósito de estos sistemas es procesar las renovaciones de pólizas, la facturación y la cobranza, las transacciones requeridas para el pago de siniestros, etc. Por otra parte, el principal propósito de los datos usados en la reserva, es el rastreo histórico de los patrones de pago y ajuste de los siniestros. Esta diferencia de propósitos puede crear conflictos en el diseño y operación del sistema de procesamiento de la información.

También, el supuesto de que la historia se repite puede ser contrariado por un cambio en la definición de coberturas, las normas de suscripción, cambios legales, etc. Es muy importante entender las condiciones de operación de la compañía para ir las incorporando al modelo aplicado.

2. Siniestros Pagados vs. Siniestros Ocurridos.

Otro punto en el que parece haber controversia de compañía a compañía, y aún de un ramo a otro dentro de la misma empresa, es si la reserva debe constituirse con los datos de los siniestros pagados, restando después la reserva de siniestros pendientes, o si debemos calcularla con los siniestros ocurridos.

Como era de esperarse hay pros y contras en cada método:

Si se utilizan los siniestros pagados, la reserva reflejará mejor el flujo de dinero del pago de los siniestros, pero se obtienen fluctuaciones mucho mayores sobre todo en aquellos ramos donde el reaseguro juega un papel importante. Además, en algunos casos los pagos de los reaseguradores corresponden a un volumen general de recuperaciones y el pago no es fácilmente asignable a siniestros específicos, haciéndose casi imposible considerarlos en un triángulo de desarrollo. Esto es lo que las aseguradoras y reaseguradoras llaman administración simplificada, pero realmente aunque es un poco más tedioso llevar un registro individual por cada póliza que se encuentra en reaseguro, donde se lleven al corriente las primas pagadas y en caso de siniestro tenerlo perfectamente registrado de manera individualizada, esto permitirá que se registren de manera adecuada en el triángulo de desarrollo de la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados.

Utilizando los siniestros reportados se tiene una reserva con menos fluctuaciones y el registro de las sumas recuperadas por reaseguro suele hacerse simultáneamente con la creación de la reserva de siniestros, por lo que no hay un desfase entre estos conceptos.

3. Siniestros en Curso Normal de Pago vs. Siniestros en Litigio.

Una de las razones para que los datos históricos no arrojen resultados estables es el volumen reducido de siniestros que podemos tener en algunas operaciones, en virtud del cual a veces no es recomendable el partir la información en demasiados subgrupos.

Sin embargo, cuando la reserva se calcula sobre la base de siniestros pagados, una división interesante de la información podría ser la de manejar por separado los siniestros normales y los siniestros en litigio.

Generalmente, los siniestros en litigio tienen una “cola” mucho más larga que los normales; pero también es de esperarse que tengan un índice mayor de liberación de la reserva: en principio, la aseguradora no hubiera rechazado el pago de la reclamación si no estuviera totalmente convencida de la improcedencia de la misma, y de la posibilidad de ganar el litigio.

Por lo tanto, el patrón de comportamiento de ambos grupos de siniestros debe ser muy diferente y el impacto en la reserva debe tomarse en cuenta.

4. Estacionalidad.

El peso que tiene el último trimestre en el triángulo de desarrollo, aunado a una concentración no muy explicable pero real de siniestros al final de cada año, hace que la reserva tenga una estacionalidad muy peculiar: es común que las compañías liberen reserva durante los primeros trimestres de cada año y en el tercero y cuarto trimestres presenten incrementos considerables.

Lo anterior provoca constantes sobresaltos dentro de las direcciones de las empresas y realmente deberíamos buscar métodos que nos permitieran suavizar el comportamiento de la reserva durante el año.

Tal vez ya está llegando el tiempo en que debemos cuestionar si el tiempo de desarrollo debemos medirlo en trimestres o ya se cuenta con un volumen suficiente de datos para utilizar años. Creo que uno de los ejercicios que se debe hacer con las carteras cuando se esta validando, es si la reserva constituida contra los pagos realizados fue una buena estimación o no, además de investigar qué hubiera pasado si hubiéramos tenido una base de desarrollo diferente.

5. Manejo de Fechas.

Es posible, que la mayor confusión para el cálculo de la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados, la represente el manejo de las fechas que controlan el triángulo de desarrollo. Una variación en el criterio de que se considera fecha de ocurrido, fecha de reportado, fecha de pagado, etc., puede tener impactos enormes en la longitud de las colas de los siniestros. Veamos ejemplos de criterios diferentes:

- Considerar como fecha de ocurrencia para gastos médicos la fecha del primer síntoma.
- Considerar como fecha de ocurrencia para gastos médicos la fecha del primer gasto.
- Considerar cada pago complementario como incurrido en la fecha en que el gasto se efectuó.
- Para siniestros de invalidez, ¿qué papel juegan los períodos de espera?
- Y ¿cuándo se incurre un parto?

También, dentro de este rengión de manejo de fechas surge la duda de cómo valuar los tratamientos de gastos médicos que no tienen un período de beneficio finito, sino que se pagarán “mientras la póliza continúe en vigor”. Tal vez esperaríamos que la reserva de estos beneficios se incrementara en forma considerable, pero también puede argüirse que si la compañía cerrara operaciones al 31 de diciembre la póliza en cuestión no se renovaría al año siguiente y ya no existiría obligación de pago. En estas circunstancias la reserva debería calcularse por las reclamaciones que se presenten, como máximo, en los próximos 12 meses.

6. Siniestros Atípicos y Catástrofes.

Una catástrofe, tal como un huracán o un terremoto, produce muchos siniestros en un período muy corto de tiempo. Las compañías a menudo envían equipos de ajustadores a la zona de desastre con autoridad para efectuar pagos rápidamente. Este tipo de eventos son atípicos y las compañías de seguros deben ajustar las aberraciones causadas por las catástrofes en los datos estadísticos.

De la misma forma pueden presentarse otros siniestros que pudiéramos considerar especiales: casos jumbo en vida, enfermedades extraordinariamente largas, o de tratamiento excesivamente costoso, en gastos médicos, autos clásicos o superdeportivos en autos, etc; que realmente se presentan en forma eventual pero que al incluirlos en una fórmula impactan la reserva dando el efecto de que fueran casos cotidianos

En estos casos el criterio del actuario debe ejercitarse para obtener la estimación más precisa posible de la reserva.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

- **Demostrar la utilidad de los procesos de simulación en la solución de problemas matemáticos aplicados al sector asegurador.**
- **Comparar los resultados obtenidos con los distintos modelos de cálculo de la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados con la finalidad de que se pueda entender cada uno de ellos, y poder elegir según sus necesidades cuál es el mejor para su tipo de cartera y siniestralidad.**
- **Demostrar que la simulación no es una técnica de optimización sino que es utilizada para analizar preguntas tipo ¿ Qué sucede sí...?.**
- **Demostrar que la simulación puede ser de gran ayuda en el proceso de toma de decisiones en la industria de los seguros.**

RECOLECCIÓN DE DATOS

Los datos que presentaremos a continuación, pertenecen a una compañía con capital 100% extranjero y que inició operaciones en México en 1993. Esta compañía opera únicamente el ramo de vida (vida individual, grupo y colectivo) y tomando en cuenta el volumen de primas emitidas en los últimos cinco años, está considerada como una compañía mediana dentro del sector asegurador mexicano. En el cuadro 4.1 se muestra un resumen de la constitución de sus reservas.

Cuadro 4.1 Reservas de la compañía en estudio.

CONCEPTO	INDIVIDUAL	GRUPO	COLECTIVO	TOTAL
Moneda Nacional				
Reserva Básica	41,503,470.15	576,718.00	311,317.60	42,391,505.75
Prima Neta Diferida	15,464,261.28	-	-	15,464,261.28
Vidas incapacitadas	291.37	51,480.67	183.85	51,955.89
RESERVA MATEMATICA	26,039,500.25	628,198.67	311,501.45	26,979,200.37
BENEFICIOS ADICIONALES				
Accidente	1,169,439.42	203,518.00	9,009.52	1,381,966.94
Invalidez	530,421.19	116,325.00	3,443.55	650,189.74
Extraprima	204,994.72	82,261.00	5,565.97	292,821.69
Otros	336,448.64	4,932.00	-	341,380.64
	97,574.87	-	-	97,574.87
REASEGURO CEDIDO	5,006,109.01	381,387.60	75,773.31	5,463,269.92
RESERVA DE RETENCION	22,202,830.66	450,329.07	244,737.66	22,897,897.39
Rva. P/Sin. ONR	-	-	-	-
Dividendos	1,760,182.00	1,425,278.95	3,096,874.80	6,282,335.75
Acc. Personales	-	-	8,469.52	8,469.52
Dólares				
Reserva Básica	683,221.39	-	29,344.04	712,565.43
Prima Neta Diferida	132,554.62	-	-	132,554.62
RESERVA MATEMATICA	550,666.77	-	29,344.04	580,010.81
BENEFICIOS ADICIONALES				
Accidente	25,297.49	-	-	25,297.49
Invalidez	13,026.09	-	-	13,026.09
Extraprima	12,271.40	-	-	12,271.40
Otros	-	-	-	-
REASEGURO CEDIDO	113,445.64	-	14,831.25	128,276.89
RESERVA DE RETENCION	462,518.62	-	14,512.79	477,031.41
Rva. P/Sin. ONR	-	-	-	-
Dividendos	3,439.53	-	-	3,439.53

El cuadro 4.4 muestra las características de los siniestros ocurridos durante el último periodo de desarrollo y ocurrencia de la compañía.

Cuadro 4.4. Características de siniestralidad

	NUMERO DE SINIESTROS	SINIESTROS DIRECTOS
TOTAL		3,471,541.02
ind.tradicional	25	2,509,983.00
primer año	9	650,488.00
renovación	16	1,859,495.00
unicas		
ind.trad.inversion		
primer año		
renovación		
unicas		
dotales corto plazo		
ind.flexible	13	961,558.02
primer año	1	258,140.00
renovación	12	703,418.02
excedentes		
ind.familiar		

El cuadro 4.5 muestra un resumen, tanto del total de siniestros ocurridos como de los pagados en cifras originales del último período de desarrollo y ocurrencia. Cabe mencionar que, de acuerdo a las disposiciones legales emitidas por la C.N.S y F, las cantidades registradas en el triángulo de desarrollo deben de ser en miles.

Cuadro 4.5 Resumen de siniestros ocurridos y pagados

SINIESTROS	OCURRIDOS	PAGADOS
MONTO	3, 471, 541.00	2, 142, 634.00

Los siniestros pagados que son registrados en el triángulo de desarrollo, por ningún motivo pueden ser alterados posteriormente. La C.N.S y F. es la única que puede conceder algún cambio a dicho triángulo, siempre y cuando los argumentos de la compañía aseguradora lo justifiquen.

EL MODELO

Sea la variable aleatoria $X_{i,j} \geq 0$ el monto de los siniestros reclamados en el período de desarrollo j cuyo período de origen es i , $i=1,\dots,k$ y $j=1,\dots$; $X_{i,j}$ es conocida para $i+j \leq k+1$; sea:

$X_{i,j} = M_{i,1} + M_{i,2} + \dots + M_{i,N_j}$, es decir, que cada monto que es reclamado en el período de desarrollo j , cuyo período de origen es i , está compuesto por un número aleatorio de montos reclamados que se dan en el período de desarrollo j , es decir, por $M_{i,1}, M_{i,2}, \dots, M_{i,N_j}$ variables aleatorias independientes entre sí, idénticamente distribuidas e independientes con respecto a N_j (variable aleatoria que representa el número de reclamos en el período de desarrollo j). Se supone que $N_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$ por lo que $X_{i,j}$ es el proceso agregado de siniestros y se distribuye como un proceso Poisson Compuesto² con parámetro λ_j . Se supone además que $M_{i,j}$ son independientes e idénticamente distribuidas para $i=1,\dots,k$, $l=1,\dots, N_j$ y $j=1,\dots,k$.

Se define a $X_{i,0} = \sum_{j=1}^k X_{i,j}$ como el total de siniestros agregados correspondientes al

período de origen i , y $X_{i,a} = \sum_{j=1}^a X_{i,j}$ es el total de siniestros acumulados para el período

de origen i hasta el período de desarrollo a , con $a = k - i + 1$. Por el teorema 11.1 de Bowers² se sigue que:

$$X_{i,0} \sim \text{Poisson Compuesta} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \text{ y}$$

$$X_{i,a} \sim \text{Poisson Compuesta} \left(\sum_{j=1}^a \lambda_j \right).$$

Se desea estimar el monto total de siniestros para el período de ocurrencia i , dada la información disponible, es decir $X_{i,0}$ $i = 2,\dots,k$, dado que $X_{i,0}$ y $X_{i,j}$ $i=1,\dots,k$ y $j=1,\dots,k$ con $i+j \leq k+1$, la parte conocida del triángulo de desarrollo.

² Bowers, L. N., Gerber, H, *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 1986.

Sea $R_i = \sum_{j=a+1}^k X_{i,j} = X_{i,0} - X_{i,a}$ para $i = 2, \dots, k$, con $a = k-i+1$. R_i se define como el proceso

agregado de siniestros para los períodos de desarrollo desconocidos correspondientes al período de origen i . Se utiliza una aproximación Gama para la Poisson Compuesta del tipo de Bowers³, basada en los dos primeros momentos, dado que por lo general se presentan un gran número de reclamaciones con montos pequeños y es menos probable que se presenten siniestros con reclamaciones altas, por lo tanto se considera que una aproximación Gama a la Poisson Compuesta modela un comportamiento en el monto de los siniestros como el anteriormente descrito.

Si $X_{i,j} \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ se sabe que:

$$E(X_{i,j}) = \frac{\alpha}{\beta} = \lambda_j p_1 \text{ y}$$

$$\text{Var}(X_{i,j}) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda_j p_2.$$

Se resuelven las ecuaciones para α y β y se tiene que $\alpha = \alpha_j = \frac{\lambda_j p_1^2}{p_2}$ y $\beta = \frac{p_1}{p_2}$ es decir $X_{i,j} \sim \text{Gama}(\alpha_j, \beta)$.

Por las propiedades de la función de distribución Gama para alguna $a \leq k$ se tiene que:

$$X_{i,a} \sim \text{Gama}\left(\sum_{j=1}^a \alpha_j, \beta\right) \text{ y } R_i \sim \text{Gama}\left(\sum_{j=a+1}^k \alpha_j, \beta\right).$$

Por lo tanto se define a:

$$W_{i,a} = \frac{X_{i,a}}{X_{i,a} + R_i} \text{ , } W_{i,a} \sim \text{Beta}\left(\sum_{j=1}^a \alpha_j, \sum_{j=a+1}^k \alpha_j\right) \text{ y}$$

$$F(W_{i,a}) = \frac{\sum_{j=1}^a \alpha_j}{\sum_{j=1}^a \alpha_j + \sum_{j=a+1}^k \alpha_j} = \frac{\sum_{j=1}^a \lambda_j}{\sum_{j=1}^k \lambda_j} = \pi_c \text{ la que es independiente de } i.$$

³ Bowers, *ob.cit.*, p 51

Pero $\pi_a = E(W_{i,a})$ representa la proporción de siniestros reportados hasta el período de desarrollo a .

Se utiliza $X_{i,0} = R_i + X_{i,a}$ y $\alpha_2 = \sum_{j=a+1}^k \alpha_j$, entonces:

$f_{X_{i,0}(x_{i,0})|X_{i,a}, \alpha_2, \beta} = \frac{\beta^{\alpha_2} (x_{i,0} - x_{i,a})^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_2)} \exp\{-\beta(x_{i,0} - x_{i,a})\}$ es una distribución Gama generalizada con $x_{i,0} \geq x_{i,a}$, Johnson and Kotz⁴.

Sea $(X_{i,0} - x_{i,a}) \sim \text{Gama}(\alpha_2, \beta)$, se obtienen los dos primeros momento, es decir:

$$E(X_{i,0}|x_{i,a}) = x_{i,a} + \frac{\alpha_2}{\beta} \quad \text{y} \quad (1)$$

$$\text{Var}(X_{i,0}|x_{i,a}) = \frac{\alpha_2}{\beta^2}. \quad (2)$$

De la independencia de $W_{i,a}$ y $X_{i,0}$:

$E(X_{i,a}) = E(X_{i,0}(X_{i,a}|X_{i,0})) = E(W_{i,a}X_{i,0}) = E(W_{i,a})E(X_{i,0}) = \pi_a E(X_{i,0})$; con este resultado obtenemos lo siguiente:

$$E\left[E(X_{i,0}|X_{i,a} = x_{i,a})\right] = E(X_{i,0}) = E(X_{i,a}) + \frac{\alpha_2}{\beta} = \pi_a E(X_{i,0}) + \frac{\alpha_2}{\beta}$$

$$\text{Entonces } \frac{\alpha_2}{\beta} = (1 - \pi_a)E(X_{i,0}), E(X_{i,0}|x_{i,a}) = x_{i,a} + (1 + \pi_a)E(X_{i,0})$$

Sea $\theta_a = \frac{\pi_a}{(1 - \pi_a)}$ que representan los momios para los primeros a años o períodos de desarrollo con respecto a los últimos $(k - a)$ períodos de desarrollo.

⁴ Johnson, L. Norman, *Continuous Univariate Distributions*. U.S.A, Houghton Mifflin Company, 1970.

Así $\pi_a = \frac{\theta_a}{(1 + \theta_a)}$ y $E(X_{i,0} | x_{i,a}) = x_{i,a} + \frac{E(X_{i,a})}{\theta_a}$, se utiliza $x_{i,a}$ como un estimador para el parámetro $E(X_{i,a})$, así $E(X_{i,0} | x_{i,a}) = x_{i,a} + \frac{x_{i,a}}{\theta_a}$, esto se obtiene si suponemos que $(X_{i,0} - x_{i,a}) \sim \text{Gama}(x_{i,a}, \theta_a)$. Esta expresión para la distribución de $X_{i,0}$ tiene la ventaja de que no posee parámetros desconocidos; además $E(X_{i,0} | x_{i,a}) = E(X_{1,0})$, es decir, $X_{i,0}$ es independiente de $X_{i,a}$, por lo que el modelo resultante a utilizar es:

$$f(X_{i,0}(x_{i,0} | x_{i,a}, \theta_a) = \frac{1}{\Gamma(x_{i,a})} \theta_a^{x_{i,a}} (x_{i,0} - x_{i,a})^{x_{i,a}-1} \exp\{-\theta_a(x_{i,0} - x_{i,a})\} \quad (3)$$

De lo anterior de desprende que:

$E[(X_{i,0} - x_{i,a}) | x_{i,a}] = E[E(X_{i,0} - x_{i,a}) | x_{i,a}] = \frac{1}{\theta_a}$, el valor esperado de la razón de los siniestros agregados en los últimos k -a periodos de desarrollo con respecto a los primeros a , depende únicamente de a . Se tiene para algún valor de $a \leq k$ lo siguiente:

$(X_{1,0} - x_{1,a}) \sim \text{Gama}(x_{1,a}, \theta_a)$ (4) que coincide con la función de verosimilitud para θ_a , y utilizando la distribución previa no informativa⁵ $f(\theta_a) \propto \frac{1}{\theta_a}$ se obtiene la distribución posterior de la forma:

$f(\theta_a | x_{1,0}, x_{1,a}) \propto \theta_a^{x_{1,a}-1} (x_{1,0} - x_{1,a})^{x_{1,a}} \exp\{-\theta_a(x_{1,0} - x_{1,a})\}$. De este resultado se obtiene:

$$E[\theta_a | x_{1,0}, x_{1,a}] = \frac{x_{1,a}}{x_{1,0} - x_{1,a}}$$

La función de densidad predictiva para $X_{i,0}$ dado $X_{1,0}$ y $X_{i,j}$ con $i+j \leq k+1$, para $i = 2, \dots, k$ se obtiene con (3) y (4).

Sea $X_{2,a} = \sum_{j=1}^a x_{2,j}$ = el total de los siniestros para el periodo de origen 2, hasta el periodo de desarrollo j . Para el periodo de desarrollo 2 tenemos lo siguiente:

⁵ Jeffreys, Harol, *Theory of Probability*: Clarendom Pres, 3ª Ed, 1961.

$f(x_{2,0}|x_{1,0}, x_{1,a}, x_{2,a}) \propto (x_{2,0} - x_{2,a})^{x_{2,0}-1} (x_{2,0} + x_{2,a} - x_{1,a})^{-(x_{2,0} + x_{1,a})}$ es una beta inversa de 1 tipo 2 Raiffa & Schlaifer⁶, o sea $Bel2(x_{2,a}, x_{1,a}, (x_{1,0} - x_{1,a}))$. Se utiliza una función de pérdida cuadrática, por lo que la esperanza de la función de densidad predictiva del estimador que se requiere es la siguiente:

Media del Modelo Bayesiano

$$E[X_{2,0}|X_{1,0}, X_{1,a}, X_{2,a}] = x_{1,a} * \left(\frac{x_{1,0}}{x_{1,a}}\right). \quad (5)$$

Y la varianza del modelo Bayesiano se puede calcular como sigue:

$$Var[X_{2,0}|X_{1,0}, X_{1,a}, X_{2,a}] = \frac{x_{1,a}(x_{1,0} + x_{1,a} - 1)(x_{1,0} - x_{1,a})^2}{(x_{1,a} - 1)^2(x_{1,a} - 2)}. \quad (6)$$

Generalizando para el i -ésimo período de origen tenemos lo siguiente:

$$E(R_i|D_{i,a}) = E(X_{i,0}|D_{i,a}) - x_{i,a}. \quad (7)$$

Si suponemos independencia entre los períodos de origen, la varianza para el estimador es entonces:

$Var(R_i|D_{i,a}) = Var(X_{i,0}|D_{i,a})$ (8) donde $D_{i,a}$ es la información que utiliza el modelo; considerando los datos de los períodos de origen con la información (por lo general el primer período de origen) y el dato del período, al cual se le está estimando su reserva.

El estimador de la reserva total se obtiene con:

$$\sum_{i=2}^k E(R_i|D_{i,a}).$$

El estimador de la varianza con:

$$Var \sum_{i=2}^k (R_i|D_{i,a}).$$

⁶ Raiffa H., *Applied Statistical Decision Theory*. The M.I.T. Press, 1968.

Además, se considera que es independiente la reserva de un período de origen a otro.

El modelo presentado anteriormente, toma únicamente los datos de m periodos de información completa y la información del período en el que se estima la reserva. Si se estima la reserva para el j - ésimo período de origen, no se utiliza la información disponible para los períodos de origen $i=2, \dots, j-1$.

La media posterior de la predictiva puede modificarse para que incluya la información completa y expresarse de manera analítica. En general para el i - ésimo período de origen, con $a_i = k - i + 1$, $i=2, \dots, k$, se define como:

$$X_0^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{t=1}^k X_{j,t}, \quad (9)$$

$$X_{1,0} = \sum_{t=1}^k X_{1,t}, \quad (10)$$

$$q_i = X_{a_i}^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{t=k}^{a_i} X_{j,t}, \quad (11)$$

$$p_i = X_{i,a_i} = \sum_{t=1}^{a_i} X_{i,t}, \quad (12)$$

$$b_i = X_0^{(i-1)} - X_{a_i}^{(i-1)}$$

$y_i = X_{i,0} - X_{i,a_i}$ y Beta Inversa 2 (p_i, q_i, b_i) entonces obtenemos lo siguiente:

$$E(X_{i,0} | X_{i,t}^*, t=1, \dots, a_i, \forall i=1, \dots, k) = X_{i,a_i} * \left(\frac{E(X_0^{(i-1)})}{X_{a_i}^{(i-1)}} \right) \text{ es igual a:}$$

$$E\left(\sum_{j=k-i+2}^k X_{i,j}\right) = X_{i,a_i} \left(\frac{E(X_0^{(i-1)})}{X_{a_i}^{(i-1)}} \right) - X_{i,a_i}, \quad (13)$$

Por otro lado, $i = 2, \dots, k$, entonces tenemos que:

$$E(X_0^{(i)}) = X_{1,0} + \sum_{j=1}^{k-1} X_{2,j} + E(X_{2,k})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{k-2} X_{3,j} + E(X_{3,k-1} + X_{3,k}) + \sum_{j=1}^{k-3} X_{4,j} - E(X_{4,k-2} + X_{4,k-1} + X_{4,k}) \\
& + \dots + \sum_{j=1}^{k-l+1} X_{l,j} + E(X_{l,k-l+2} + \dots + X_{l,k-l}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k-i+1} X_{i,j} + \sum_{i=2}^l \left[\sum_{j=k-i+2}^k E(X_{i,j}) \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

Haciendo algunas operaciones se obtiene la recursividad de las $E(X_0^{(l)})$ de la siguiente manera:

$$E(X_0^{(l)}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=i}^{k-i+1} X_{i,j} + \sum_{i=2}^l \left[X_{i,a_i} * \frac{E(X_0^{(l-i)})}{X_{a_i}^{(l-i)}} - X_{i,a_i} \right]$$

Por lo tanto la media posterior de la reserva total es:

Media del modelo Bayesiano Modificado

$$R_T = \sum_{i=1}^k E\left(\sum_{j=k-i+2}^k X_{i,j} \right) = \sum_{i=2}^k \left[X_{i,a_i} * \frac{E(X_0^{(l-i)})}{X_{a_i}^{(l-i)}} - X_{i,a_i} \right]$$

El comportamiento de la varianza se obtiene mediante el proceso de simulación y esto nos servirá para obtener intervalos de credibilidad.

En los cuadros 4.6 y 4.7 nos muestran los resultados obtenidos con el modelo Bayesiano y Bayesiano Modificado para la predicción de la Reserva de Siniestros Ocurredos y No reportados.

Cuadro 4.6 M.B

MODELO BAYESIANO						
X_i	$X_{i,a}$	$X_{i,a}$	ACUMLADO	RESERVA	VARIANZA	DE
353	353	353	353	-	0.000	0
353	353	355	355	-	0.000	0
353	353	355	355	-	0.000	0
353	303	55	64	9	1.788	1.33719561
353	303	2	2	0	0.055	0.23530524
353	303	341	397	55	19.958	4.46850748
353	303	497	579	82	35.163	6.01355853
353	303	460	536	76	31.921	5.64684085
353	303	165	198	27	7.075	2.65884773
353	303	77	90	13	2.658	1.63021461
353	303	711	828	117	65.580	8.09877503
353	303	774	902	128	75.843	8.70576215
353	303	354	424	60	22.077	4.69888076
353	303	425	465	70	28.137	5.30445373
353	303	1979	2,305	327	411.084	20.2752088
353	303	3525	4,223	598	1295.359	35.0051206
353	303	2044	2,381	337	435.685	20.8970154
353	303	3507	4,086	579	1216.484	34.8781293
353	303	4570	5,324	754	2027.504	45.0288224
353	298	2273	2,693	420	676.789	25.0151895
353	298	2491	2,951	460	804.613	28.3557083
353	32	253	2,901	2,638	276355.748	525.695489
				6,781	283,516.65	785,958826

Cuadro 4.7 M.B.M

MODELO BAYESIANO MODIFICADO

i	a	$q_i = X_{i,i}$ ⁽ⁱ⁻¹⁾	$p_i = X_{i,a}$	b_i	ACUMLADO	RESERVA	$E(X_i)$ ⁽ⁱ⁻¹⁾
1	22	353	353				
2	21	353	356	-	356	0.000	356
3	20	688	356	-	356	0.000	688
4	19	1.034	56	-	56	3	1.034
5	18	1.039	2	-	2	0	1.142
6	17	1.091	341	-	357	16	1.144
7	16	1.432	47	-	521	24	1.501
8	15	1.939	463	-	482	22	2.002
9	14	2.369	166	-	174	8	2.506
10	13	2.666	77	-	81	4	2.609
11	12	2.622	711	-	748	37	2.739
12	11	3.333	774	-	815	41	3.507
13	10	4.107	334	-	368	19	4.322
14	9	4.447	425	-	463	25	4.706
15	8	4.792	1909	-	2.129	130	5.166
16	7	6.771	3625	-	3.699	274	7.284
17	6	10.336	2044	-	2.189	166	11.189
18	5	13.692	3637	-	3.466	52	13.382
19	4	15.662	4670	-	4.664	284	16.837
20	3	19.223	2273	-	2.667	294	21.691
21	2	18.285	2461	-	3.306	614	24.289
22	1	4.96	263	-	1.46	123	27.592
			2508		RESERVA	3408	

Por el hecho de que con el modelo bayesiano no se obtuvo una expresión analítica para la varianza de la función de densidad predictiva de la reserva, utilizaremos el proceso de simulación para conocer de esta manera el comportamiento de la función de densidad.

Se obtiene la reserva por simulación para el período de origen $i=2$, después generamos cierto número de simulaciones para esta reserva. Posteriormente con el uso de recursividades, se obtiene la reserva también para el período de origen $i=3$, luego generamos un cierto número de simulaciones para esta reserva. esto se hace recursivamente hasta llegar a la reserva que corresponde al último período de origen $i=k$.

A continuación se especifica el procedimiento:

$$q_i = X_{a_i}^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{t=1}^{a_j} X_{j,t},$$

$$p_i = X_{i,a_i} = \sum_{t=1}^{a_i} X_{i,t},$$

Para $1 \leq i \leq T$ como el número de simulaciones requeridas; para este proyecto se considera $T=5,000$.

Se genera una muestra aleatoria, que en primer lugar corresponde al período de origen $i=1$, con el uso de los parámetros respectivos, los que son obtenidos de la información contenida en el triángulo de desarrollo. Posteriormente se pueden generar muestras aleatorias para los restantes períodos de desarrollo, una vez que se tiene generada la información requerida para las recursividades correspondientes.

Se transforman estos números aleatorios en una distribución Beta Inversa de tipo 2, de la siguiente, manera:

$$Y_{t,i} = \frac{b_i Z_{t,i}}{(1 - Z_{t,i})}$$

Donde $Y_{t,i} \sim \text{Bel}(p_i, q_i, b_i)$

Para $i=2$ se genera una observación $t=1$ de $Y_{t,2} = X_{2,0} - X_{2,a_2}$, por lo tanto $Y_{t,2} \sim \text{Bel}(p_2, q_2, b_2)$. Para la siguiente observación, $i=3$ con $a_i = k - i + 1$ y k igual al número

total de períodos de desarrollo, se tiene que $b_3 = b_2 + Y_{i,2} + \sum_{s=1}^2 X^*_{s,a_{i-1}}$. En general, la

recursividad es la siguiente: $b_i = b_{i-1} + Y_{i,i-1} + \sum_{s=1}^{i-1} X^*_{s,a_{i-1}}$.

La i -ésima observación de la reserva total, es decir la reserva para el total de los períodos de origen, es obtenida de la siguiente manera:

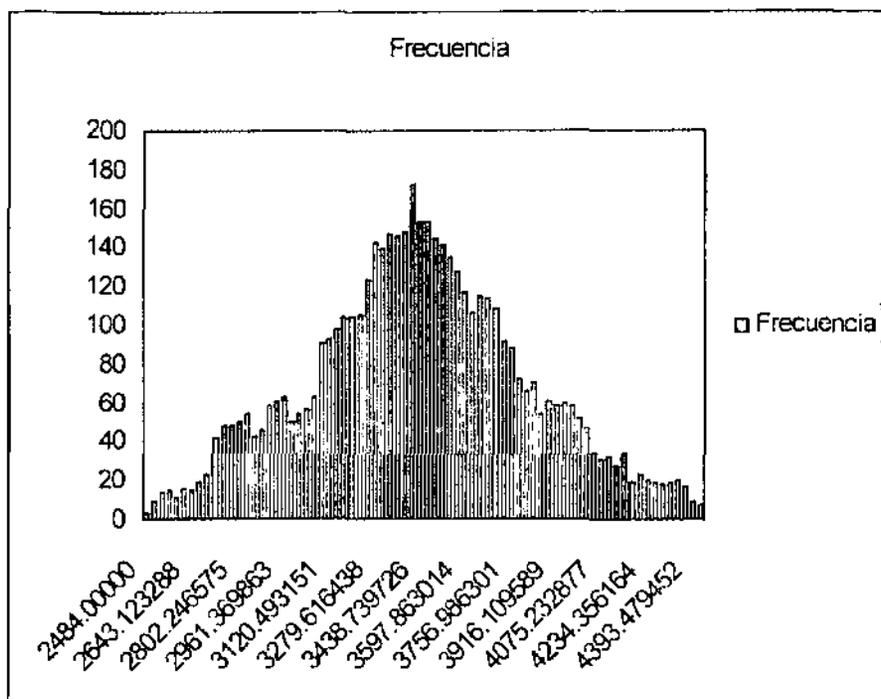
$$R_{Tot}^{(i)} = \sum_{i=2}^k Y_{i,i} \text{ para } i=1, \dots, T \text{ con } T = 5,000.$$

Una vez obtenidos los resultados de las corridas de simulación (ver anexo 4) se procede al análisis de datos.

ANÁLISIS DE DATOS

En histograma 4.1 se puede ver un resumen de las simulaciones y las estadísticas descriptivas. En el anexo 5 se pueden ver los datos para la construcción de éste histograma.

Histograma 4.1



Suma.	17, 149, 817.00
Media	3, 430.00
Máximo.	4, 393.00
Mediana.	3, 439.00
Mínimo.	2, 484.00
Varianza.	170, 192.95
D.E.	412.54

Se calcula un intervalo de credibilidad al 95% del histograma generado con datos del ejercicio. En el intervalo se encuentran el 95 % de las simulaciones que corresponden a la reserva total para los Siniestros Ocurridos y No reportados. En el cuadro 4.8 podemos ver los datos del intervalo de credibilidad.

Cuadro 4.8 Intervalo de credibilidad

ESTIMADOR PUNTUAL DE LA RESERVA 3,403.00	INTERVALO DE CREDIBILIDAD PARA LA ESTIMACIÓN DE LA RESERVA. MODELO BAYESIANO MODIFICADO.
1- α	
95%	(2,594 , 4,212)

El cuadro 4.9 nos muestra un resumen de la reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados obtenida por los diferentes métodos presentados en este trabajo.

Cuadro 4.9 Resumen de reservas S.O.N.R⁶

Método de la Razón.	5,200.00
Método de Crecimiento.	5,547.00
Método Bayesiano.	6,751.00
Método Bayesiano Modificado.	3,403.00

El cuadro 4.10 nos muestra un resumen de los Siniestros Ocurridos y No Reportados de los últimos cuatro trimestres de desarrollo.

⁶ No se presenta el Método de Porcentajes Acumulados, ya que no se contaba con el total de primas.

CONCLUSIONES

Para el cálculo de la reserva de Sinistros Ocurridos y No Reportados, existen varios métodos que están siendo utilizados en la actualidad por empresa mexicanas y extranjeras, pero lamentablemente, estos métodos son mecánicos y al carecer de bases estadísticas no se puede saber que tan buenas son las estimaciones, lo cual puede repercutir en sus resultados técnicos al no conocerse la magnitud de ésta reserva.

El objetivo principal de este trabajo de tesis, fue hacer notar las ventajas que tiene el uso de la técnica de simulación para la predicción de pasivos en las compañías de seguros y, en este caso en particular, de los Sinistros Ocurridos y No Reportados, aplicada a modelos probabilísticos. Con esto se pretende que las compañías realicen un estudio más profundo de los riesgos que en determinado momento pueden llegar a mermar su situación financiera y traer con ello problemas al momento de hacer frente a sus obligaciones.

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que al aplicar la simulación a un modelo probabilístico para la predicción de la reserva S.O.N.R., no sólo se obtuvo como resultado una reserva menor al compararla con las obtenidas por los otros métodos, sino que además, se contó con la ventaja de tener medida la variabilidad en el cálculo, la función de densidad de la predictiva de la reserva y su aplicación en el cálculo de los intervalos de credibilidad como un estimador por intervalos al 95% que con otros métodos es imposible obtener.

Pero, el hecho de haber obtenido una reserva menor, no implica que nuestro objetivo principal sea la optimización al generar ésta, sino que se obtenga un criterio de decisión para elegir un curso de acción, y de esta manera poder elegir cual método se ajusta a las características principales de cada compañía. Con los resultados obtenidos en el presente trabajo consideramos que el modelo Bayesiano Modificado es una buena alternativa para poder sustituir los métodos mecánicos para la predicción de la reserva de Sinistros Ocurridos y No Reportados. La simulación, aplicada correctamente, puede llegar a ser una técnica cuantitativa muy importante para la toma de decisiones, no solamente en la predicción de la reserva S.O.N.R., sino en varios puntos medulares de las compañías de seguros, como lo son las carteras de inversiones y el control de operaciones de la administración de la compañía.

En México, las compañías aseguradoras, deben de empezar a utilizar métodos con bases estadísticas más sólidas para la generación de sus pasivos de toda índole, para que de esta manera, tengan un mejor estudio de sus riesgos y que esto repercuta directamente en la mejor tarificación de sus productos y conseguir ser altamente competitivos en el mercado y no únicamente pensando que se trata de obligaciones que se tienen que cumplir con las autoridades correspondientes. en este caso, con la Comisión Nacional de Seguros y

Fianzas. La simulación es una técnica que puede ser de gran utilidad para estudiar el comportamiento de sistemas complejos y todas las variables que lo afectan, y de esta manera tener un mejor parámetro para poder tomar decisiones que puedan, en determinado momento, ser de gran utilidad para el progreso de la compañía.

Considero que actualmente, desde que se implemento como obligatoria la reserva S.O.N.R, las compañías de seguros cuentan con información suficientemente amplia relacionada con su siniestralidad y que deben de comenzar a realizar análisis basados en modelos con bases estadísticas más sólidas, aunque más complejos, y utilizar diferentes técnicas cuantitativas, como la técnica de simulación, para formarse criterios de decisión más apegados a la realidad, una realidad que está constantemente en cambio.

BIBLIOGRAFÍA

- Baumol, William J., *Economic Dynamics*. Nueva York, The Macmillan Co., 1959.
- Bernardo J.M., *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, 1994.
- Bowers, L. N., Gerber, H., *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 1986.
- C.N.S y F., *Circular S-10.6: Reglas de Carácter General*. C.N.S y F., 1994.
- _____. *Circular S-10.6.1: Envío de Formatos Estadísticos*. C.N.S y F., 1994.
- _____. *Circular S-10.6.2: Envío de Formatos Estadísticos*. C.N.S y F., 1994.
- _____. *Circular S-10.6.4.7: Bases para las que se fija el Procedimiento para la Constitución de la Reserva S.O.N.R y G.A.A.S.*, C.N.S y F., 1995.
- _____. *Circular S-10.6.5: Forma y Términos para el Control y Registro Contables*. C.N.S y F., 1996.
- De Alba E. y Juárez M.A., *Bayesian Forecasting: An Application to I.B.N.R. Reserves*. Proceedings of I.S.B.A, 1995.
- Goovaerts, M.J., *Effective Actuarial Methods*. North – Holland, 1990.
- Harrel, Charles, *Simulation Made Easy*. Simulation, 1997.
- Jeffreys, Harold, *Theory of Probability*. Clarendon Pres. 3ª Ed, 1961.
- Johnson, L. Norman, *Continuous Univariate Distributions*. U.S.A, Houghton Mifflin Company, 1970.
- Klugman, Stuart, *Bayesian Statistics in Actuarial Science*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- McComas, G. Michael, *How to Select Simulation Software*. Simulation, 1992.
- Mood .F.M, f. Graybill, et.al., *Introduction to The Theory of Statistics*. Mc Graw Hill, 1974.
- Münch. G.L., *Fundamentos de Administración*. México, Trillas, 5ªEd, 1990.
- Naylor H. Thomas, *Técnicas de Simulación en Computadora*. Limusa, 1ªEd, 1975.

- Pritsker, Alan B., *Simulation: The Premier Technique of Industrial Engineering*. Pritsher Corp., 1992.
- Raiffa, Howard, *Applied Statistical Decision Theory*. The M.I.T Press, 1968.
- Rodriguez, T. Federico, *Técnicas y Modelos de Simulación de Sistemas*. México, I.PN, 1991.
- Terry, R. George, *Principios de Administración*. México, Editorial Continental, 1980.
- Thierauf, J. Robert, *Toma de decisiones*. México, Limusa, 1ªEd, 1972.
- Thompson, B. Michael, *Expanding Simulation Beyond Planning and Design*. Simulation, 1994.
- Zubizarreta, Armando F., *La Aventura del Trabajo Intelectual*. México, Addison Wesley, 2ªEd, 1986.

ANEXO 1

Formato oficial S.E.S.A O.N.R TRIMESTRAL A1

CONTRIBUCIONALES DE SEGUROS Y FONDOS										Moneda	Código Contable				
Atenciones en consulta de R.C. ()	Agraria ()			Diversa											
Consultas de R.C. de Admisión ()	Ingeniería ()														
Seguimiento en consulta de R.C. ()	Sanita ()				Punto										
Consultas de R.C. de Ingreso ()	Asistencia Precedida ()				Tipo de Material										
Mantenimiento en consulta de P.C. ()	S.M. Materiales ()				Nacional										
Asesoría en consulta de R.C. ()	S.M. Materiales G. ()				Extranjera										
Consultas de R.C. de salida ()	S.M. Salarios ()														
Ofertas en consulta de P.C. ()	Vista electrónica ()														
Consultas de R.C. de Opciones ()	Vista Grupos ()														
Responsabilidad Civil ()	Vista Colección ()														
AÑOS EN LOS CUALES SE EMITIERON PENAS Y OCURRIERON SUJETOS	PAGO POR SUJETOS CAS										10 SALVAMENTOS Y RECUPERACIONES	11 NÚMERO DE SUJETOS REPORTADOS DIRECTOS Y ASIGNADOS	12 NÚMERO DE SUJETOS PAGADOS		
	RENTAS			SUJETOS PAGADOS				GASTOS DE AJUSTE ASIGNADOS AL SUJETO						9 PAGO NOTA (54+10)	
	2	3	4	5 DEL DIRECTO Y TOMADO		6 R REAS C	7 DEL DIRECTO Y TOMADO		8 R REAS C						
ANTES DE 1984															
AÑO 1984															
AÑO 1985															
AÑO 1986															
TOTAL															
RESERVAS PARA OBLIGACIONES PENDIENTES DE CUMPLIR										TOTAL DE RESPONSABILIDADES PENDIENTES AL FINAL DEL AÑO					
POR SUJETOS CONOCIDOS										POR OPR		POR GAS			
13 DEL DIRECTO Y TOMADO			14 R REAS C		15 DEL DIRECTO Y TOMADO			16 R REAS C		17 DEL DIRECTO Y TOMADO		18 R REAS C			
19 DEL DIRECTO Y TOMADO			20 R REAS C		(13+15+17)		(14+16+18)		(19+20)		(21+22+23)				
ANTES DE 1984															
AÑO 1984															
AÑO 1985															
AÑO 1986															
TOTAL															

ANEXO 4

Resultados de las corridas de la simulación.

2568	2677	2739	2669	2829	2824	2782	2940	2898	2927
2503	2626	2779	2771	2795	2883	2798	2910	2957	2895
2571	2604	2738	2827	2867	2806	2854	2909	2803	2957
2549	2700	2721	2839	2851	2882	2870	2941	2894	2948
2527	2724	2709	2859	2867	2868	2831	2958	2904	2905
2489	2778	2770	2809	2794	2834	2809	2926	2941	2941
2551	2708	2714	2849	2798	2792	2821	2924	2916	2931
2505	2735	2743	2840	2862	2872	2810	2937	2937	2890
2542	2735	2699	2852	2870	2838	2825	2920	2929	2910
2545	2772	2746	2876	2789	2795	2806	2896	2906	2930
2506	2889	2768	2812	2801	2822	2858	2899	2910	2952
2549	2777	2755	2840	2824	2832	2857	2905	2924	2898
2522	2777	2732	2885	2864	2823	2844	2941	2896	2928
2493	2689	2710	2829	2796	2869	2856	2906	2920	2908
2536	2699	2771	2847	2822	2804	2837	2898	2937	2902
2562	2702	2749	2779	2875	2784	2791	2920	2916	2947
2520	2712	2717	2878	2802	2881	2804	2955	2948	2945
2558	2738	2691	2856	2827	2860	2840	2945	2959	2901
2514	2766	2739	2826	2858	2850	2852	2900	2902	2913
2536	2764	2701	2847	2875	2887	2813	2922	2906	2912
2493	2728	2752	2799	2789	2876	2839	2909	2928	2894
2516	2694	2738	2858	2848	2839	2823	2902	2915	2912
2496	2735	2708	2824	2794	2810	2811	2890	2943	2892
2556	2762	2711	2873	2798	2824	2790	2907	2907	2896
2563	2779	2726	2823	2864	2786	2807	2953	2909	2918
2586	2693	2720	2837	2854	2791	2893	2959	2930	2942
2530	2752	2741	2862	2820	2792	2899	2899	2901	2955
2577	2712	2742	2819	2787	2872	2947	2933	2929	2960
2681	2736	2709	2826	2860	2870	2911	2950	2930	2950
2656	2724	2734	2863	2830	2812	2945	2933	2942	2937
2653	2767	2754	2813	2851	2887	2908	2917	2939	2917
2613	2750	2760	2856	2836	2862	2945	2919	2935	2937
2680	2703	2696	2783	2780	2781	2942	2891	2956	2941
2817	2708	2899	2852	2793	2880	2921	2957	2960	2951
2619	2704	2699	2847	2805	2825	2938	2948	2917	2935
2634	2714	2728	2835	2830	2810	2897	2955	2948	2957
2580	2765	2718	2795	2797	2881	2920	2938	2939	2945
2664	2721	2699	2873	2853	2862	2905	2910	2912	2894
2657	2756	2774	2886	2871	2801	2915	2956	2942	2912
2597	2757	2711	2789	2832	2853	2933	2952	2960	2950
2587	2696	2732	2839	2790	2833	2934	2907	2953	2908
2608	2775	2748	2884	2833	2852	2936	2900	2909	2934
2593	2771	2711	2875	2843	2842	2894	2907	2908	2928
2623	2765	2719	2809	2836	2881	2944	2913	2918	2950
2601	2704	2703	2840	2885	2818	2906	2931	2925	2909
2632	2722	2722	2841	2835	2817	2955	2932	2931	2936
2618	2691	2768	2884	2868	2782	2906	2897	2929	2944
2577	2763	2755	2836	2836	2832	2895	2929	2917	2899
2618	2705	2720	2781	2883	2868	2927	2936	2940	2951
2589	2760	2693	2795	2783	2781	2941	2893	2895	2931
2655	2756	2742	2791	2868	2822	2955	2932	2898	2945
2806	2724	2768	2809	2827	2871	2960	2919	2890	2910
2673	2732	2753	2798	2869	2889	2890	2903	2940	2892
2614	2759	2747	2816	2834	2884	2953	2951	2950	2947
2679	2724	2737	2805	2782	2840	2892	2924	2949	2904
2635	2695	2699	2887	2847	2841	2902	2893	2953	2903
2679	2734	2743	2846	2860	2803	2909	2890	2921	2932
2629	2760	2755	2801	2862	2834	2892	2899	2895	2913
2656	2737	2745	2870	2853	2797	2913	2946	2899	2929
2621	2701	2720	2875	2834	2786	2942	2914	2930	2915

2947	2002	3017	3055	3059	2971	3182	3179	3156	3144
2909	2061	3083	3047	3057	3082	3110	3187	3115	3115
2929	2045	3090	3028	3035	2994	3179	3160	3152	3188
2906	2994	3067	2972	2989	3067	3161	3095	3183	3184
2903	2978	3033	2999	3086	3016	3121	3128	3128	3151
2928	2963	3022	3082	3050	3091	3134	3180	3105	3108
2897	2995	3054	3067	3036	3089	3111	3098	3138	3149
2912	2072	3016	2986	3054	3060	3137	3142	3167	3178
2919	2058	3069	2996	2985	2979	3105	3182	3127	3166
2953	2030	3089	3007	2995	3057	3182	3121	3120	3142
2948	2014	2966	2962	2971	3027	3132	3169	3191	3166
2930	2964	2963	3068	3092	3068	3100	3094	3102	3189
2900	2976	3027	3069	2979	3025	3149	3152	3115	3186
2934	2003	3000	2978	3058	3074	3104	3155	3145	3121
2896	2055	3059	3024	3019	3031	3099	3096	3119	3128
2988	2047	3019	2981	3087	3032	3127	3131	3188	3190
2007	2061	2993	3085	3083	3099	3136	3120	3152	3101
2083	2986	2998	2995	3075	3116	3174	3158	3181	3167
2965	2020	3027	3000	3039	3123	3101	3133	3189	3190
2091	2003	3063	2984	3023	3187	3173	3171	3177	3167
2085	2007	3054	3076	2980	3161	3133	3152	3171	3146
2082	2064	3054	3028	3003	3166	3188	3128	3157	3108
2028	2048	2975	3048	3023	3105	3137	3156	3188	3132
2987	2989	2974	3013	2960	3105	3115	3154	3132	3169
2054	2070	3052	2989	3011	3170	3099	3095	3162	3131
2031	2016	2991	3051	3055	3186	3100	3177	3127	3147
2024	2989	3018	2965	2966	3121	3162	3134	3184	3171
2988	2986	3073	3043	3059	3121	3172	3138	3132	3163
2028	2966	3036	3002	3060	3114	3167	3159	3097	3100
2093	2986	3004	3029	3023	3127	3133	3184	3162	3125
2056	2047	3069	2980	3025	3108	3111	3182	3141	3107
2966	2069	3087	3083	3007	3135	3136	3143	3164	3174
2966	2048	2985	2971	3057	3109	3110	3181	3136	3114
2070	2070	3068	3052	2969	3145	3103	3098	3155	3187
2966	2069	3000	2963	3049	3172	3156	3191	3172	3108
3076	2046	2983	3004	3032	3105	3169	3120	3156	3141
2978	2005	2996	2971	2989	3101	3167	3151	3120	3158
2986	2057	3074	2974	2991	3140	3094	3125	3127	3143
2969	2063	2972	2964	3078	3143	3106	3153	3139	3191
3010	2093	3048	3064	2963	3125	3121	3187	3170	3125
2982	2060	3052	3038	3010	3094	3094	3097	3126	3140
3013	2999	3047	3041	3079	3096	3181	3114	3139	3166
2968	2964	2976	2997	3073	3149	3185	3182	3105	3127
3063	2051	2978	3061	3055	3147	3189	3191	3098	3100
3012	2016	2962	3090	3082	3157	3143	3143	3110	3155
2971	2068	3022	3014	2988	3096	3100	3100	3153	3189
2966	2960	3048	3046	3030	3102	3110	3107	3093	3186
3067	2013	2983	3066	3079	3187	3191	3122	3172	3153
2969	2049	3043	2963	2969	3132	3097	3149	3124	3142
2962	2064	2964	2983	3079	3133	3174	3113	3129	3168
2074	2066	2973	2982	2963	3133	3107	3162	3180	3162
2009	2994	3003	3077	2969	3124	3161	3156	3155	3138
2027	2999	3042	3077	3089	3095	3141	3153	3185	3173
2968	3065	2963	3087	3032	3103	3156	3104	3145	3096
2040	2977	2982	3090	3065	3179	3127	3191	3147	3144
3005	2977	3062	3036	3077	3142	3163	3112	3106	3168
2005	2995	3065	3028	3091	3172	3179	3103	3140	3148
2962	3055	3050	3087	2962	3095	3095	3169	3184	3173
2961	2961	2974	2987	3079	3183	3174	3122	3105	3159
2983	3052	3010	3087	2993	3116	3182	3111	3140	3101

3096	3139	3238	3234	3211	3279	3220	3294	3192	3216
3100	3127	3196	3239	3253	3248	3198	3259	3298	3256
3113	3108	3241	3289	3284	3227	3263	3216	3281	3290
3116	3148	3279	3267	3286	3232	3197	3199	3237	3267
3127	3191	3287	3253	3269	3194	3195	3196	3287	3210
3121	3102	3294	3286	3249	3257	3229	3227	3227	3281
3146	3124	3204	3204	3252	3226	3298	3205	3218	3264
3129	3118	3264	3270	3205	3224	3211	3266	3214	3192
3145	3144	3211	3217	3292	3209	3285	3264	3248	3249
3108	3134	3208	3191	3273	3235	3196	3252	3250	3296
3144	3164	3277	3210	3271	3245	3284	3298	3266	3197
3162	3126	3275	3272	3254	3192	3235	3238	3247	3234
3172	3113	3277	3293	3235	3243	3297	3245	3224	3214
3116	3107	3215	3209	3284	3194	3216	3248	3196	3203
3185	3108	3266	3279	3276	3209	3217	3252	3195	3262
3159	3185	3210	3248	3252	3226	3215	3277	3255	3271
3160	3127	3250	3205	3295	3293	3282	3280	3277	3195
3175	3166	3280	3244	3237	3270	3231	3264	3256	3215
3126	3165	3237	3297	3286	3232	3231	3251	3283	3225
3127	3176	3259	3275	3283	3226	3250	3241	3230	3285
3114	3107	3232	3198	3288	3206	3214	3233	3298	3234
3129	3178	3243	3253	3280	3218	3244	3208	3271	3275
3148	3169	3240	3209	3239	3288	3204	3275	3261	3240
3177	3115	3223	3200	3286	3292	3229	3199	3192	3236
3174	3116	3242	3235	3239	3283	3295	3230	3192	3231
3123	3183	3205	3228	3298	3203	3205	3267	3274	3214
3117	3136	3249	3297	3297	3295	3261	3200	3256	3201
3145	3128	3237	3200	3289	3199	3227	3201	3209	3243
3166	3109	3297	3225	3268	3224	3241	3290	3273	3304
3097	3153	3199	3251	3245	3238	3218	3238	3207	3339
3162	3147	3294	3214	3258	3219	3217	3211	3273	3307
3168	3150	3243	3276	3201	3196	3250	3229	3247	3313
3147	3128	3273	3291	3206	3253	3263	3211	3281	3341
3106	3167	3265	3248	3288	3212	3203	3253	3197	3349
3143	3133	3238	3249	3286	3279	3200	3213	3253	3368
3097	3140	3274	3268	3258	3264	3225	3208	3287	3314
3118	3102	3258	3284	3245	3196	3277	3276	3191	3343
3098	3177	3207	3222	3212	3210	3253	3207	3248	3341
3185	3131	3222	3219	3201	3290	3202	3252	3292	3391
3158	3177	3210	3225	3218	3204	3252	3280	3237	3377
3156	3125	3247	3265	3291	3221	3223	3246	3286	3321
3116	3146	3221	3214	3193	3255	3224	3292	3257	3313
3164	3143	3211	3275	3212	3270	3246	3252	3299	3316
3186	3163	3273	3299	3289	3285	3211	3224	3265	3346
3188	3128	3294	3220	3223	3246	3234	3249	3256	3385
3141	3117	3274	3221	3287	3208	3251	3216	3247	3321
3141	3190	3245	3224	3266	3191	3204	3256	3288	3393
3183	3125	3228	3242	3298	3271	3248	3253	3197	3340
3098	3105	3280	3206	3210	3199	3212	3262	3215	3308
3103	3183	3269	3289	3285	3280	3277	3259	3258	3392
3171	3125	3243	3252	3247	3240	3211	3203	3260	3385
3114	3108	3288	3261	3277	3279	3241	3248	3285	3304
3172	3176	3291	3297	3194	3293	3249	3260	3236	3358
3127	3154	3231	3259	3290	3275	3236	3279	3293	3364
3105	3100	3272	3287	3248	3280	3266	3283	3203	3328
3174	3121	3275	3242	3281	3258	3291	3286	3255	3299
3186	3097	3204	3191	3245	3194	3282	3290	3194	3338
3176	3191	3284	3262	3258	3289	3248	3221	3221	3305
3148	3249	3197	3245	3296	3281	3209	3231	3260	3383
3139	3205	3199	3295	3222	3191	3247	3271	3192	3321

3340	3325	3330	3387	3360	3320	3393	3329	3398	3417
3300	3335	3350	3365	3371	3314	3302	3345	3395	3412
3365	3391	3386	3357	3325	3345	3303	3340	3393	3412
3325	3304	3367	3333	3363	3333	3302	3384	3418	3420
3333	3357	3375	3340	3324	3390	3339	3349	3393	3406
3301	3376	3340	3391	3387	3307	3353	3334	3417	3405
3348	3316	3328	3306	3317	3315	3314	3375	3406	3419
3368	3300	3324	3349	3330	3348	3368	3342	3411	3402
3321	3354	3345	3383	3392	3368	3326	3316	3401	3411
3326	3363	3383	3339	3355	3363	3374	3333	3386	3415
3314	3372	3324	3351	3376	3367	3331	3328	3393	3401
3329	3376	3323	3386	3358	3381	3365	3339	3418	3419
3369	3359	3367	3343	3361	3301	3390	3345	3395	3408
3346	3383	3331	3322	3357	3366	3358	3369	3399	3400
3304	3375	3384	3346	3336	3327	3322	3359	3400	3416
3321	3390	3378	3350	3367	3354	3326	3333	3402	3408
3368	3382	3300	3314	3309	3324	3337	3353	3412	3404
3301	3386	3369	3349	3350	3340	3343	3352	3408	3407
3379	3308	3325	3364	3349	3332	3320	3366	3417	3418
3368	3323	3373	3326	3388	3300	3317	3377	3396	3396
3391	3315	3370	3332	3339	3384	3388	3344	3406	3410
3309	3355	3300	3307	3355	3367	3379	3311	3402	3402
3301	3392	3385	3375	3327	3376	3322	3360	3404	3393
3341	3351	3356	3368	3386	3343	3367	3352	3393	3408
3315	3318	3359	3315	3308	3310	3328	3341	3414	3406
3316	3301	3321	3344	3365	3333	3389	3355	3400	3405
3327	3326	3321	3353	3382	3364	3330	3337	3415	3418
3356	3363	3366	3338	3311	3305	3324	3393	3420	3405
3392	3312	3351	3361	3328	3356	3340	3362	3418	3416
3344	3315	3312	3392	3341	3378	3375	3310	3399	3410
3378	3383	3309	3322	3393	3346	3331	3306	3401	3409
3305	3328	3315	3344	3373	3319	3334	3328	3406	3395
3314	3359	3312	3356	3345	3367	3385	3306	3395	3420
3344	3352	3304	3339	3322	3331	3335	3339	3394	3405
3353	3368	3392	3361	3330	3367	3334	3382	3409	3408
3356	3349	3390	3340	3307	3373	3391	3336	3408	3411
3317	3329	3328	3323	3340	3345	3303	3303	3309	3394
3368	3333	3347	3344	3379	3314	3341	3343	3296	3403
3321	3353	3354	3393	3322	3352	3325	3311	3320	3411
3312	3369	3311	3364	3363	3363	3309	3388	3301	3395
3339	3317	3377	3367	3351	3330	3350	3375	3303	3393
3315	3374	3327	3338	3343	3378	3338	3313	3302	3414
3334	3319	3391	3374	3327	3353	3326	3302	3318	3406
3378	3357	3338	3319	3325	3316	3354	3355	3300	3403
3313	3315	3316	3322	3300	3383	3349	3352	3319	3415
3383	3351	3311	3316	3310	3387	3347	3343	3318	3400
3369	3369	3349	3310	3369	3387	3375	3370	3297	3420
3378	3339	3325	3358	3348	3358	3365	3370	3295	3415
3333	3369	3314	3366	3351	3370	3365	3367	3308	3420
3385	3364	3390	3299	3343	3379	3319	3412	3308	3411
3328	3359	3391	3324	3321	3384	3321	3419	3317	3402
3349	3377	3333	3325	3327	3343	3366	3409	3393	3420
3392	3372	3346	3303	3351	3360	3312	3417	3403	3401
3304	3316	3370	3310	3338	3323	3358	3395	3403	3405
3302	3358	3331	3005	3334	3356	3392	3417	3403	3403
3325	3381	3377	3303	3321	3391	3336	3408	3418	3406
3304	3344	3369	3376	3323	3336	3335	3398	3397	3413
3334	3388	3349	3388	3338	3335	3335	3400	3409	3400
3345	3317	3330	3320	3302	3351	3377	3395	3411	3414
3351	3380	3377	3385	3355	3326	3360	3396	3401	3400

3409	3408	3414	3418	3418	3395	3543	3479	3518	3519
3405	3398	3408	3409	3407	3397	3499	3559	3556	3490
3417	3407	3418	3415	3403	3416	3470	3518	3498	3492
3394	3401	3404	3398	3408	3413	3509	3457	3559	3505
3406	3403	3409	3398	3409	3419	3497	3480	3469	3494
3410	3416	3411	3399	3418	3398	3494	3425	3502	3538
3405	3405	3409	3410	3399	3401	3452	3450	3485	3537
3402	3412	3408	3399	3417	3411	3537	3461	3446	3484
3400	3409	3407	3404	3408	3405	3461	3504	3459	3498
3418	3419	3395	3400	3393	3407	3436	3456	3512	3545
3417	3399	3404	3406	3402	3402	3444	3475	3508	3420
3406	3401	3418	3413	3410	3393	3501	3490	3462	3520
3404	3409	3416	3403	3395	3401	3518	3543	3428	3444
3410	3418	3418	3400	3415	3413	3445	3468	3458	3483
3393	3406	3394	3410	3420	3404	3458	3510	3481	3495
3409	3412	3402	3401	3414	3400	3519	3476	3481	3495
3400	3410	3396	3419	3398	3408	3440	3443	3518	3503
3415	3408	3418	3397	3404	3407	3553	3525	3483	3496
3399	3418	3409	3408	3405	3408	3475	3458	3513	3451
3397	3403	3417	3414	3393	3400	3472	3458	3516	3478
3395	3419	3399	3399	3419	3415	3552	3520	3495	3509
3408	3393	3394	3406	3414	3395	3448	3527	3461	3431
3395	3415	3404	3408	3417	3401	3479	3495	3469	3490
3395	3411	3415	3397	3403	3397	3558	3500	3541	3420
3420	3396	3399	3401	3409	3481	3455	3475	3469	3439
3402	3405	3416	3407	3411	3505	3454	3551	3484	3511
3420	3398	3411	3398	3403	3422	3474	3555	3425	3475
3401	3409	3419	3395	3396	3492	3467	3452	3466	3432
3413	3399	3412	3397	3410	3541	3555	3424	3491	3506
3405	3407	3400	3401	3418	3424	3507	3464	3487	3449
3399	3412	3404	3405	3410	3435	3421	3424	3457	3428
3399	3393	3414	3420	3406	3538	3520	3469	3532	3501
3399	3415	3395	3409	3413	3475	3427	3454	3448	3425
3408	3419	3398	3418	3402	3425	3529	3540	3433	3427
3401	3408	3418	3414	3395	3474	3470	3466	3517	3462
3407	3400	3418	3393	3407	3514	3537	3420	3466	3460
3414	3402	3411	3412	3413	3485	3504	3516	3488	3428
3401	3419	3395	3393	3396	3423	3429	3522	3499	3560
3410	3408	3406	3400	3420	3515	3436	3506	3530	3557
3411	3414	3403	3409	3418	3478	3441	3436	3472	3503
3409	3407	3415	3414	3393	3483	3424	3538	3549	3547
3419	3407	3393	3409	3393	3523	3495	3517	3453	3474
3414	3395	3397	3397	3397	3435	3464	3477	3475	3497
3401	3412	3418	3416	3411	3448	3510	3479	3502	3545
3405	3393	3415	3420	3400	3500	3515	3520	3548	3429
3417	3404	3417	3410	3416	3423	3490	3457	3475	3426
3411	3398	3415	3420	3420	3504	3445	3435	3424	3436
3409	3415	3409	3397	3396	3495	3477	3516	3445	3484
3415	3408	3407	3417	3411	3475	3421	3437	3496	3552
3405	3409	3412	3394	3420	3421	3519	3436	3420	3497
3419	3411	3395	3403	3396	3460	3556	3520	3462	3484
3394	3399	3402	3397	3395	3456	3530	3504	3482	3542
3401	3417	3407	3406	3409	3431	3478	3481	3422	3450
3417	3399	3402	3409	3397	3449	3559	3455	3459	3482
3412	3405	3414	3415	3419	3438	3470	3505	3523	3450
3414	3399	3401	3412	3396	3497	3474	3524	3490	3455
3405	3416	3408	3404	3415	3464	3426	3520	3559	3507
3419	3393	3415	3414	3408	3541	3438	3509	3552	3524
3398	3413	3407	3404	3398	3427	3479	3536	3533	3443
3403	3414	3395	3400	3400	3439	3460	3559	3536	3439

3534	3495	3433	3587	3610	3609	3665	3585	3589	3633
3461	3462	3446	3635	3579	3623	3612	3661	3565	3588
3429	3507	3559	3572	3566	3627	3634	3640	3599	3623
3544	3452	3437	3624	3600	3647	3620	3598	3587	3641
3424	3474	3639	3611	3574	3663	3593	3667	3660	3634
3528	3525	3478	3667	3628	3607	3638	3591	3653	3565
3470	3435	3475	3570	3656	3581	3662	3637	3641	3601
3469	3472	3538	3585	3564	3591	3623	3632	3630	3575
3493	3505	3560	3644	3624	3561	3658	3684	3667	3655
3426	3484	3497	3632	3605	3665	3625	3615	3661	3658
3520	3483	3558	3638	3656	3586	3598	3621	3593	3606
3454	3521	3476	3600	3620	3608	3640	3568	3584	3628
3424	3430	3462	3603	3590	3567	3643	3665	3626	3809
3435	3464	3518	3666	3664	3653	3569	3639	3639	3666
3425	3432	3511	3621	3590	3583	3563	3570	3640	3564
3461	3493	3545	3560	3594	3573	3574	3651	3594	3654
3483	3454	3490	3597	3667	3649	3563	3635	3636	3583
3443	3476	3423	3568	3576	3636	3628	3580	3621	3582
3503	3474	3468	3632	3633	3600	3630	3596	3658	3634
3514	3541	3538	3666	3627	3665	3563	3651	3631	3597
3436	3494	3504	3613	3570	3572	3654	3604	3561	3609
3456	3501	3423	3668	3616	3660	3590	3666	3572	3627
3448	3485	3457	3659	3619	3569	3621	3665	3641	3667
3429	3444	3521	3583	3634	3572	3598	3655	3574	3590
3534	3469	3455	3637	3666	3606	3636	3614	3600	3639
3462	3488	3518	3564	3606	3634	3582	3646	3564	3660
3516	3466	3556	3664	3632	3643	3624	3657	3603	3634
3445	3536	3442	3583	3564	3586	3650	3650	3605	3622
3481	3435	3506	3635	3601	3593	3651	3619	3567	3623
3549	3448	3509	3635	3572	3597	3637	3576	3579	3594
3468	3431	3430	3585	3646	3629	3654	3579	3568	3592
3557	3483	3529	3581	3626	3659	3583	3639	3658	3629
3487	3557	3492	3664	3602	3567	3625	3610	3657	3641
3634	3455	3553	3647	3616	3594	3626	3587	3658	3570
3529	3446	3510	3631	3646	3635	3589	3582	3654	3659
3460	3525	3537	3602	3664	3576	3665	3661	3595	3633
3425	3531	3456	3600	3656	3618	3665	3584	3660	3560
3538	3458	3526	3637	3638	3584	3585	3607	3622	3738
3459	3534	3647	3640	3580	3604	3595	3561	3650	3758
3546	3465	3595	3668	3563	3605	3595	3651	3625	3766
3439	3512	3566	3624	3630	3594	3644	3660	3649	3696
3477	3480	3613	3600	3597	3594	3610	3612	3592	3668
3506	3529	3667	3612	3566	3564	3593	3576	3620	3675
3452	3427	3650	3665	3585	3580	3639	3616	3578	3702
3522	3552	3583	3623	3661	3579	3660	3588	3593	3688
3495	3425	3637	3564	3660	3585	3566	3666	3607	3703
3487	3475	3608	3568	3574	3591	3622	3596	3626	3703
3495	3542	3561	3660	3601	3664	3593	3598	3632	3701
3431	3423	3634	3652	3577	3598	3636	3604	3572	3763
3546	3449	3655	3598	3603	3580	3616	3647	3608	3705
3434	3527	3588	3668	3590	3583	3589	3668	3611	3668
3496	3500	3598	3656	3656	3561	3604	3660	3651	3769
3486	3536	3641	3572	3593	3573	3635	3575	3636	3738
3504	3519	3593	3652	3635	3620	3587	3613	3579	3761
3451	3463	3662	3666	3617	3595	3584	3646	3667	3673
3549	3439	3595	3629	3565	3659	3631	3663	3594	3680
3469	3526	3653	3658	3637	3598	3615	3579	3601	3671
3557	3539	3637	3625	3582	3588	3669	3576	3662	3692
3423	3452	3596	3651	3589	3606	3572	3560	3636	3723
3452	3481	3625	3594	3599	3621	3581	3588	3574	3725

3720	3755	3706	3582	3694	3668	3761	3855	3792	3795
3733	3692	3710	3597	3764	3755	3724	3824	3860	3849
3724	3733	3712	3671	3749	3705	3748	3871	3822	3847
3772	3680	3727	3643	3774	3730	3671	3785	3800	3865
3775	3700	3738	3706	3754	3672	3683	3856	3824	3883
3730	3715	3705	3612	3727	3711	3743	3834	3808	3849
3769	3689	3741	3623	3764	3690	3720	3800	3798	3797
3717	3687	3711	3629	3684	3714	3686	3843	3789	3818
3680	3718	3673	3756	3730	3699	3686	3874	3842	3856
3708	3702	3705	3768	3765	3728	3758	3876	3805	3846
3677	3700	3669	3675	3724	3704	3758	3870	3842	3797
3738	3734	3755	3710	3704	3771	3771	3851	3805	3856
3736	3769	3737	3769	3714	3749	3716	3832	3842	3845
3735	3747	3706	3742	3763	3707	3729	3883	3819	3791
3736	3770	3693	3705	3672	3775	3718	3872	3857	3791
3724	3670	3744	3695	3736	3732	3720	3879	3869	3847
3764	3674	3687	3710	3678	3690	3769	3835	3777	3867
3685	3757	3681	3734	3748	3769	3731	3847	3878	3791
3727	3739	3712	3732	3734	3675	3792	3869	3828	3858
3686	3680	3703	3761	3755	3688	3853	3864	3826	3848
3769	3671	3742	3725	3670	3717	3778	3812	3777	3856
3701	3739	3702	3713	3763	3672	3816	3885	3890	3841
3747	3697	3761	3702	3768	3759	3814	3844	3819	3777
3733	3727	3706	3724	3754	3694	3844	3862	3783	3805
3696	3711	3734	3705	3760	3750	3822	3873	3777	3826
3679	3746	3698	3713	3738	3683	3871	3778	3888	3859
3711	3689	3679	3683	3740	3686	3821	3809	3801	3837
3738	3750	3692	3752	3683	3702	3894	3827	3843	3879
3722	3723	3773	3675	3755	3754	3852	3861	3790	3893
3770	3713	3735	3714	3677	3733	3797	3795	3851	3883
3712	3750	3671	3766	3743	3749	3812	3845	3866	3782
3671	3768	3746	3770	3677	3740	3800	3831	3796	3836
3703	3712	3697	3706	3771	3740	3894	3862	3815	3812
3705	3757	3743	3737	3749	3704	3797	3862	3795	3894
3767	3741	3688	3770	3710	3733	3842	3804	3793	3886
3743	3694	3751	3757	3699	3733	3881	3891	3872	3854
3659	3686	3734	3697	3685	3679	3827	3816	3867	3869
3680	3769	3742	3698	3767	3696	3831	3813	3825	3846
3706	3749	3744	3769	3767	3687	3839	3885	3847	3822
3758	3695	3749	3748	3741	3746	3826	3891	3858	3798
3704	3708	3721	3677	3743	3775	3653	3824	3871	3885
3712	3689	3710	3769	3668	3682	3779	3874	3835	3869
3741	3671	3719	3681	3674	3682	3827	3775	3826	3799
3700	3753	3678	3679	3748	3669	3790	3843	3789	3871
3749	3669	3751	3750	3772	3692	3866	3845	3877	3801
3718	3701	3734	3717	3682	3687	3870	3884	3804	3871
3738	3729	3746	3672	3694	3759	3848	3812	3797	3789
3729	3668	3732	3759	3763	3760	3842	3876	3824	3857
3718	3719	3755	3742	3729	3698	3797	3867	3879	3856
3736	3672	3732	3686	3701	3728	3852	3841	3781	3781
3693	3727	3735	3757	3755	3710	3888	3825	3821	3888
3720	3751	3689	3751	3769	3763	3862	3836	3807	3862
3713	3671	3680	3738	3678	3716	3818	3880	3874	3885
3691	3753	3686	3724	3752	3691	3884	3637	3846	3884
3736	3725	3763	3751	3737	3743	3777	3844	3843	3854
3747	3755	3749	3679	3728	3681	3812	3859	3868	3787
3673	3687	3742	3695	3690	3681	3858	3801	3787	3887
3726	3772	3721	3690	3702	3772	3806	3819	3805	3846
3687	3772	3757	3704	3707	3668	3817	3864	3781	3870
3755	3761	3664	3726	3710	3705	3831	3890	3889	3848

3829	3847	3966	3953	3977	3994	4007	4012	4056	4030
3838	3796	3966	3944	3894	4010	4025	3997	4047	4029
3803	3827	3963	3908	3949	4002	4007	3995	4167	4086
3887	3838	3959	3990	3963	3999	4003	4024	4153	4082
3791	3806	3921	3925	3970	4014	4003	3997	4149	4056
3844	3874	3894	3931	3923	4006	4001	4009	4107	4091
3871	3805	3991	3913	3990	4001	4007	4020	4151	4113
3779	3835	3993	3924	3983	4005	4011	4025	4120	4134
3832	3860	3900	3973	3979	4024	4020	4020	4041	4102
3817	3869	3977	3930	3942	4018	4016	4021	4039	4063
3803	3872	3989	3910	3902	4004	4007	4019	4137	4091
3894	3847	3965	3910	3973	4005	3995	4013	4051	4077
3824	3825	3905	3930	3936	4015	4000	4009	4048	4047
3886	3844	3969	3929	3937	4020	4000	4007	4082	4160
3794	3855	3938	3975	3909	3995	4002	4019	4075	4092
3785	3787	3928	3988	3933	4022	4018	3993	4056	4158
3867	3792	3954	3962	3962	4001	3996	4000	4031	4108
3825	3875	3987	3965	3961	4012	3993	4015	4126	4091
3793	3827	3973	3962	3991	4006	4020	4020	4101	4062
3872	3950	3949	3905	3950	4020	3996	4002	4140	4147
3782	3950	3985	3930	3930	4021	4005	4006	4138	4107
3800	3978	3948	3944	3924	3996	4002	4007	4041	4111
3862	3917	3925	3985	3967	4010	4021	4020	4056	4153
3811	3895	3962	3938	3989	4023	4017	4012	4031	4104
3886	3935	3912	3936	3980	4003	4017	4005	4038	4056
3843	3979	3988	3950	3895	4015	3999	4024	4149	4118
3880	3936	3931	3953	3928	4014	4012	4006	4082	4118
3857	3993	3910	3919	3902	4005	4000	4020	4133	4139
3841	3902	3906	3909	3944	4003	4004	4022	4151	4158
3780	3973	3915	3898	4007	4021	4000	4021	4079	4064
3894	3922	3976	3979	3997	4007	4001	4012	4072	4081
3886	3894	3919	3930	4019	4002	4022	4024	4039	4033
3816	3918	3942	3976	4013	4016	4018	3997	4143	4126
3802	3962	3936	3915	4001	4024	4014	3997	4160	4046
3880	3975	3958	3922	3998	3994	4020	4004	4142	4164
3843	3941	3942	3941	4020	4000	4018	4019	4135	4074
3831	3959	3956	3922	4024	4018	4025	4015	4124	4108
3823	3933	3907	3954	3995	4013	4011	4019	4109	4101
3841	3974	3947	3906	4002	4018	4002	4009	4087	4059
3786	3970	3993	3915	4001	4004	4003	3993	4152	4103
3799	3977	3926	3934	4016	4021	4023	3999	4088	4097
3891	3867	3988	3923	4013	3998	4016	3993	4088	4039
3888	3960	3910	3957	4011	3998	3999	4014	4189	4136
3890	3904	3936	3918	4002	4010	4024	4021	4115	4063
3882	3948	3954	3916	4019	4014	4000	4006	4037	4154
3855	3943	3974	3948	3994	4010	3995	4012	4077	4162
3824	3945	3984	3897	4018	4011	4007	4022	4131	4038
3794	3945	3951	3925	4021	4005	4019	4002	4025	4121
3861	3922	3945	3986	4017	3995	4013	4005	4085	4133
3889	3963	3918	3923	4013	3999	4019	4015	4044	4079
3847	3973	3911	3969	4011	4004	4018	4166	4075	4108
3852	3907	3960	3912	4022	3995	4020	4037	4092	4081
3868	3924	3906	3990	4017	3993	4008	4042	4027	4051
3804	3897	3968	3929	4010	4021	4022	4062	4044	4027
3885	3972	3983	3923	4001	4002	4004	4149	4113	4092
3827	3983	3974	3932	3995	3993	4001	4146	4126	4142
3858	3899	3925	3933	4012	4003	4008	4149	4065	4072
3809	3940	3986	3909	4021	4009	3997	4052	4166	4132
3820	3912	3945	3926	4010	4007	3995	4159	4108	4098
3875	3975	3951	3958	4007	4019	4014	4062	4042	4042

4156	4223	4255	4393
4097	4198	4180	4402
4097	4199	4345	4398
4032	4270	4299	4359
4126	4266	4351	4370
4035	4242	4317	4384
4167	4289	4328	4400
4097	4183	4343	4369
4083	4284	4351	4382
4161	4187	4301	4365
4084	4269	4348	4415
4145	4286	4314	4355
4039	4263	4337	4413
4146	4209	4344	4360
4074	4287	4339	4368
4159	4227	4334	4366
4120	4274	4294	4394
4107	4257	4336	4408
4099	4274	4304	4375
4069	4234	4301	
4089	4183	4338	
4237	4212	4304	
4240	4246	4314	
4212	4239	4340	
4219	4204	4329	
4204	4186	4335	
4183	4196	4313	
4263	4283	4326	
4177	4227	4318	
4239	4290	4327	
4210	4220	4308	
4252	4197	4305	
4231	4257	4326	
4226	4273	4297	
4222	4253	4304	
4270	4230	4321	
4232	4246	4314	
4229	4247	4305	
4188	4284	4319	
4227	4292	4334	
4188	4228	4327	
4261	4287	4314	
4189	4176	4307	
4185	4293	4320	
4231	4256	4415	
4212	4176	4404	
4241	4182	4392	
4171	4216	4367	
4195	4260	4387	
4268	4209	4384	
4269	4291	4386	
4237	4257	4399	
4240	4253	4373	
4249	4197	4354	
4246	4247	4389	
4212	4273	4355	
4283	4234	4359	
4170	4177	4403	
4247	4186	4359	
4193	4172	4419	

ANEXO 5

Datos para la construcción del histograma

CALSE	FRECUENCIA	CLASE	FRECUENCIA
2484	3	3518.30137	141
2510.52055	10	3544.82192	135
2537.0411	14	3571.34247	128
2563.56164	15	3597.86301	117
2590.08219	12	3624.38356	106
2616.60274	16	3650.90411	115
2643.12329	15	3677.42466	114
2669.64384	19	3703.94521	109
2696.16438	23	3730.46575	92
2722.68493	41	3756.9863	88
2749.20548	48	3783.50685	72
2775.72603	48	3810.0274	66
2802.24658	50	3836.54795	70
2828.76712	54	3863.06849	54
2855.28767	43	3889.58904	61
2881.80822	46	3916.10959	58
2908.32877	56	3942.63014	60
2934.84932	61	3969.15068	59
2961.36986	63	3995.67123	52
2987.89041	50	4022.19178	47
3014.41096	54	4048.71233	34
3040.93151	56	4075.23288	31
3067.45205	83	4101.75342	32
3093.9726	90	4128.27397	28
3120.49315	93	4154.79452	34
3147.0137	96	4181.31507	19
3173.53425	104	4207.83562	23
3200.05479	104	4234.35616	20
3226.57534	105	4260.87671	19
3253.09589	123	4287.39726	18
3279.61644	143	4313.91781	19
3306.13699	139	4340.43836	20
3332.65753	147	4366.9589	17
3359.17808	146	4393.47945	10
3385.69863	148		
3412.21918	172		
3438.73973	153		
3465.26027	153		
3491.78082	145		