UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HOLONOMIA HOMOTOPICA EN FIBRACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ELHOIM LLORENTE I SUMANO Y RAMIREZ

DIRECTORES DE TESIS. DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZALEZ
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Holonomía Homotópica en Fibraciones"

realizado por Elhoim Llorente I Sumano y Ramírez

con número de cuenta 9329239-9, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Carlos Prieto de Castro	
Propietario	Dr. Marcelo Alberto Aguilar González	
Propietario	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora	
Suplente	Dr. Santiago López de Medrano Sánchez	
Suplente	Dr. Alberto León Kushner Schnur	alberto León Kushner

Consejo Departamental de Matemáticas

Dra. Ma. de Lourdes Esteva Peralta

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

PARA ARACELI

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda de muchas personas.

Agradezco a mis profesores Carlos y Marcelo por sus multiples consejos académicos y personales.

A mis compañeros Luis Edoardo, Sael, Paola el *Barbas*, el *Pañales*, el *Cruz*, Rogelio, Mayam, el *Mito*, Manuel Cruz, Diana, Luis .

A mi mamá, mi papá y mis hermanos por comprender mi ausencia.

A *la chamaca* por estar cerca de mi.

Contenido

Sea $E \xrightarrow{p} B$ una aplicación cubriente, es decir, una aplicación continua y sobre con la propiedad que para cada $x \in E$ existe una vecindad $U \subset E$ de x tal que $p^{-1}p(U)$ es la unión de abiertos ajenos U_ι, donde algún U_ι es igual a U y tal que $p|_{U_\iota}$ es un homeomorfismo con su imagen $p(U)$. Es resultado bien sabido que si $\alpha\colon \mathrm{I} \to B$ es una trayectoria continua y $x \in p^{-1}(\alpha(0))$, entonces existe una única trayectoria $\alpha_x\colon \mathrm{I} \to E$ que levanta a α, es decir, tal que $p(\alpha_x(t)) = \alpha(t)$, y que empieza en x, es decir, tal que $\alpha_x(0) = x$.

Si pedimos que la aplicación cubriente sea punteada,

$$(E, x_0) \xrightarrow{p} (B, b_0),$$

puede mostrarse que la asignación que a cada trayectoria cerrada, es decir, a cada $\alpha\colon \mathrm{I} \to B$ con $\alpha(0) = b_0 = \alpha(1)$, asocia $\alpha_{x_0}(1)$, determina una función punteada

$$\lambda\colon (\pi_1(B, b_0), 0) \to (p^{-1}(b_0), x_0).$$

Mas aún, en caso de restringír nuestra atención a G-espacios cubrientes, donde G es un grupo discreto fijo, es decir, a aplicaciones cubrientes que también son el cociente bajo una acción libre de G en E, se obtiene de esta manera un morfismo de grupos $\lambda\colon \pi_1(B, b_0) \to G$ que hace exacta la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\lambda} G \longrightarrow 0$$

El resultado principal en este contexto es que si $\mathcal{C}_G(B,b_0)$ denota el conjunto que consiste de las clases de isomorfismo punteado de los G-espacios cubrientes $(E,x_0) \xrightarrow{p} (B,b_0)$, entonces la asignación que a cada G-espacio cubriente asocia el morfismo de grupos $\lambda\colon \pi_1(B,b_0) \to G$, determina una biyección de conjuntos, entre $\mathcal{C}_G(B,b_0)$ y el conjunto de todos los morfismos de grupo de $\pi_1(B)$ en G.

Obsérvese que si consideramos a G como un grupo topológico discreto, el conjunto $[\Omega(B,b_0),G]_0$ que consiste de las clases de homotopía punteada de las aplicaciones continuas del espacio de trayectorias cerradas de B, $\Omega(B,b_0)$, en G, está en biyección con el conjunto de todas las funciones de $\pi_1(B)$ en G que mandan al neutro en el neutro.

En este trabajo mostraremos que si $K_G(B,b_0)$ denota el conjunto de las clases de *isomorfismo punteado* de los *haces G-principales sobre B*, bajo ciertas condiciones en B, por ejemplo B paracompacto, se tendrá una función:

$$\Lambda\colon K_G(B,b_0) \to \left[(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(G,e)\right],$$

tal que la siguiente sucesión es H_0-*exacta*

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega^2(B,b_0) \arrow[dll, "\Omega(\lambda)"'] \\
\Omega(G,e) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E,x_0) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda"'] \\
G \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda = \Lambda(E \xrightarrow{p} B\ )$.

Por último mostraremos que si (B, b_0) es un espacio *bien punteado* Λ corresponde a la función:

$$\Omega\colon [(B, b_0), (BG, *)] \to [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\Omega(BG, *), \omega_*)]$$

a través de biyecciones naturales:

$$\begin{array}{ccc} K_G(B, b_0) & \xrightarrow{\quad\Lambda_0\quad} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)] & \xrightarrow[\Omega]{} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\Omega(BG, *), \omega_*)], \end{array}$$

donde BG denota el *espacio clasificante de* G.

1. Preliminares

Si X y Y son dos espacios topológicos, el espacio de las aplicaciones continuas con dominio X y codominio Y, con la topología compacto-abierta, lo denotamos por Y^X, donde por la topología compacto-abierta entendemos aquella que tiene por subbase a los subconjuntos de la forma $\{f\colon X \to Y \mid f(K) \subset U\}$ donde $U \subset Y$ es un abierto y $K \subset X$ es un compacto arbitrario.

Es conocido el siguiente resultado

Proposición 1.1. *Sean X, Y y Z tres espacios topológicos con Y de Haussdorff y localmente compacto. Entonces, la asignación $f \mapsto \widetilde{f}$ determina una biyección*

$$Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$$

donde si $f\colon X \times Y \to Z$, entonces $\widetilde{f}\colon X \to Z^Y$ esta definida como $\widetilde{f}(x)(y) = f(x,y)$.

Demostración. Una demostración de esto puede encontrarse en [1]. $\square$

Si $f, g\colon X \to Y$ son dos aplicaciones, decimos que f *es homotópica a* g, si existe una aplicación $H\colon X \times \mathrm{I} \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. En este caso escribimos $H_t\colon f \simeq g\colon X \to Y$ o simplemente $f \simeq g$. Decimos que $f\colon X \to Y$ es *nulhomotópica* si f es homotópica a $c_y\colon X \to Y$ donde c_y es la aplicación constante con valor y para alguna $y \in Y$.

Si X y Y son espacios topológicos, se tiene una relación de equivalencia en Y^X definida como, $f\colon X \to Y$ esta relacionada con $g\colon X \to Y$

si $f \simeq g$. Al conjunto de las clases de equivalencia de Y^X bajo esta relación lo denotamos por $[X, Y]$. A la clase de equivalencia de una aplicación $f\colon X \to Y$ la llamamos *clase de homotopía de* f y la denotamos por $[f] \in [X, Y]$.

Tenemos entonces una categoría $\mathfrak{Toph}$ que tiene por objetos a los espacios topológicos y donde $[X, Y]$ es el conjunto de morfismos entre dos espacios X y Y.

Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones continuas. Decimos que la sucesión de aplicaciones

(2). $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una *sucesión H-exacta* si se cumple que la composición $g \circ f$ es homotópica a la aplicación constante c_{z_0}, para alguna $z_0 \in Z$ y siempre que se tenga una aplicación $\varphi\colon W \to Y$ tal que la composición $g \circ \varphi$ es homotópica a la misma constante c_{z_0}, entonces existe una aplicación $\psi\colon W \to X$ tal que $f \circ \psi \simeq \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
& W \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[u, dotted, "\varphi"] \arrow[ur, "c_{z_0}"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\simeq"] \arrow[u, phantom, shift right=3ex, "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

Si observamos que para cada espacio W, la sucesión (2) induce una sucesión de funciones

$$[W, X] \xrightarrow{f_*} [W, Y] \xrightarrow{g_*} [W, Z],$$

donde $f_*([\psi]) = [f \circ \psi]$, entonces $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es una sucesión H exacta si y sólo si $\mathrm{im} f_* = \{[\varphi] \mid g_*([\varphi]) = [c_{z_0}]\}$ para todo espacio W.

Por un *espacio punteado* entendemos una pareja (X, x_0), donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$ es un punto. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacio punteados, si $f: X \to Y$ es una aplicación con la propiedad $f(x_0) = y_0$, decimos que f es una *aplicación punteada* y escribimos $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Denotamos como $(Y, y_0)^{(X, x_0)} \subset Y^X$ al subespacio que consiste de aquellas aplicaciones de X en Y que son punteadas.

Decimos que dos aplicaciones punteadas $f, g: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son *homotópicas como aplicaciones punteadas*, si existe una homotopia $H: f \simeq g: X \times I \to Y$ con la propiedad adicional $H(x_0, t) = y_0$ para toda $t \in I$. A una homotopía como esta la llamamos *homotopía punteada* y escribimos $H_t: f \simeq g: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ o también $f \simeq g\,(\mathrm{rel}\ x_0)$. Si una aplicación $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es homotópica como aplicación punteada a la aplicación constante $c_{y_0}: (X, x_0) \to (Y, y_0)$, decimos que f es *nulhomtópica como aplicación punteada* y escribimos $f \simeq 0\,(\mathrm{rel}\ x_0)$.

Como antes, se tiene una relación de equivalencia en $(Y, y_0)^{(X, x_0)}$ definida como, f esta relacionada con g si $f \simeq g\,(\mathrm{rel}\ x_0)$. Al conjunto de las clases de equivalencia bajo esta relación lo denotamos como $[(X, x_0), (Y, y_0)]$. A la clase de equivalencia de una aplicación punteada $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ la denotamos por $[f]_0$ y a $[c_{y_0}]_0$ por $0 \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$.

Tenemos entonces una categoría $\mathfrak{Toph}_0$ que tiene por objetos a los espacios punteados y donde $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ es el conjunto de morfismos entre dos espacios (X, x_0) y (Y, y_0).

Sean $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ y $g\colon (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ dos aplicaciones punteadas. Decimos que la sucesión

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3}$$

es una *sucesión H_0-exacta* si se cumple que $g\circ f \simeq 0\,(\mathrm{rel}\ x_0)$ y para cada aplicación $\varphi\colon (W,w_0) \to (Y,y_0)$ tal que $g\circ\varphi \simeq 0\,(\mathrm{rel.}\ w_0)$ existe una aplicación punteada $\psi\colon (W,w_0) \to (X,x_0)$ tal que $f\circ\psi \simeq \varphi\,(\mathrm{rel}\ w_0)$. Si observamos que para cada espacio punteado (W,w_0), la sucesión de aplicaciones punteadas (3) induce una sucesión de aplicaciones

$$[(W,w_0),(X,x_0)] \xrightarrow{f_*} [(W,w_0),(Y,y_0)] \xrightarrow{g_*} [(W,w_0),(Z,z_0)],$$

donde $f_*([\psi]_0) = [f\circ\psi]_0$, entonces $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es una sucesión H_0-exacta si y sólo si $\mathrm{im} f_* = \{[\varphi]_0 \mid g_*([\varphi]_0) = [c_{z_0}]_0 = 0\} = g_*^{-1}(0)$ para todo espacio punteado (W,w_0).

Denotemos por $\mathfrak{Set}_0$ a la categoría que tiene por objetos a los conjuntos punteados, es decir, a las parejas $(A,0)$ donde A es un conjunto y $0\in A$; y por morfismos a las funciones $f\colon A\to B$ tales que $f(0)=0$. Sea (W,w_0) un espacio punteado, decimos que (W,w_0) es un *H-cogrupo* si el funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Toph}_0 & \xrightarrow{[(W,w_0),-]} & \mathfrak{Set}_0 \\ (X,x_0) & \longmapsto & ([(W,w_0),(X,x_0)],0) \end{array}$$

toma valores en la categoría de grupos, es decir, $[(W,w_0),(X,x_0)]$ tiene estructura de grupo con 0 como neutro y si $f\colon (X,x_0)\to(X',x_0')$ es una aplicación punteada, la función inducida $f_*\colon [(W,w_0),(X,x_0)] \to [(W,w_0),(X',x_0')]$ es un morfismo de grupos.

Proposición 1.2. *Sea (W, w_0) un espacio punteado. Entonces, (W, w_0) es un H-cogrupo si y sólo si existen dos aplicaciones punteadas*

$$\mu\colon (W, w_0) \to (W \vee W, w_0 \vee w_0)$$

$$y$$

$$\nu\colon (W, w_0) \to (W, w_0)$$

tales que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía punteada

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & W \vee W \arrow[d, "\mathrm{id}_W \vee \mu"] \\ W \vee W \arrow[r, "\mu \vee \mathrm{id}_W"] & W \vee W \vee W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \vee W \arrow[r, "(\mathrm{id}_W, c_{w_0})"] & W & W \vee W \arrow[l, "(c_{w_0}, \mathrm{id}_W)"'] \\ & W \arrow[ul, "\mu"] \arrow[u, "\mathrm{id}_W"] \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\simeq"] \arrow[u, phantom, shift right=4, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W \vee W \arrow[r, "(\nu, \mathrm{id}_W)"] & W & W \vee W \arrow[l, "(\mathrm{id}_W, \nu)"'] \\ & W \arrow[ul, "\mu"] \arrow[u, "c_{w_0}"] \arrow[ur, "\mu"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\simeq"] \arrow[u, phantom, shift right=4, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

donde $(W \vee W, w_0 \vee w_0) = (W \cup W/\{w_0\} \cup \{w_0\}, \{w_0\} \cup \{w_0\})$.

Demostración. Ver [1]. □

Por definición se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *Sea (W, w_0) un H-cogrupo. Entonces,*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión H_0-exacta de espacios y aplicaciones en $\mathfrak{Toph}_0$, si y sólo si la sucesión inducida de grupos y morfismos de grupos

$$[(W, w_0), (X, x_0)] \xrightarrow{f_*} [(W, w_0), (Y, y_0)] \xrightarrow{g_*} [(W, w_0), (Z, z_0)],$$

es una sucesión exacta de grupos en el sentido usual, es decir, $\operatorname{im}(f_*) = \ker(g_*)$.

Si (W, w_0) y (W', w_0') son dos H-cogrupos, y $f\colon (W, w_0) \to (W', w_0')$ es una aplicación punteada, decimos f es un morfismo de H-cogrupos si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía punteada:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & W \vee W \arrow[d, "f \vee f"] \\ W' \arrow[r, "\mu'"] & W' \vee W' \end{tikzcd}$$

Si (W, w_0) y (W', w_0') son dos H-cogrupos, denotamos por

$$[(W, w_0), (W', w_0')]^H$$

a la calse de morfismos de H-cogrupos que son homtópicos a través de una homotopía H_t donde H_t es un morfismo de H-cogrupos para toda $t \in \mathrm{I}$.

Tenemos entonces una categoría $\mathfrak{Hcogr}$ que tiene por objetos a los H-cogrupos y donde $[(W, w_0), (W', w_0')]^H$ es el conjunto de morfismos entre dos H-cogrupos (W, w_0) y (W', w_0').

De manera dual, si (X, x_0) es un espacio punteado, decimos que (X, x_0) es un H-*grupo* si el funtor

$$\begin{aligned} \mathfrak{Toph}_0 &\xrightarrow{[-,(X,x_0)]} \mathfrak{Set}_0 \\ (W, w_0) &\longmapsto ([(W, w_0), (X, x_0)], 0) \end{aligned}$$

toma valores en la categoría de grupos.

Proposición 1.4. *Sea (X, x_0) un espacio punteado. Entonces, (X, x_0) es un H-grupo si y sólo si existen dos aplicaciones punteadas*

$$\mu\colon (X \times X, (x_0, x_0)) \to (X, x_0)$$

y

$$\nu\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$$

tales que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía punteada

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times id_X"] \arrow[d, "id_X \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times X \arrow[dr, "\mu"'] & X \arrow[l, "(c_{x_0}, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, c_{x_0})"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & X \times X \arrow[dl, "\mu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[dr, "\mu"'] & X \arrow[l, "(\nu, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, \nu)"] \arrow[d, dashed, "c_{x_0}"] & X \times X \arrow[dl, "\mu"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [1]. □

Si (X, x_0) y (X', x_0') son dos H-grupos, y $f\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$ es una aplicación punteada, decimos f es un morfismo de H-grupos si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía punteada:

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f \times f"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ X' \times X' \arrow[r, "\mu'"] & X' \end{tikzcd}$$

Si (X, x_0) y (X', x_0') son dos H-grupos, denotamos por

$$[(X, x_0), (X', x_0')]^H$$

a la calse de morfismos de H-grupos que son homtópicos a través de una homotopía H_t donde H_t es un morfismo de H-grupos para toda $t \in \mathrm{I}$.

Tenemos entonces una categoría $\mathfrak{Hgr}$ que tiene por objetos a los H-grupos y donde $[(X, x_0), (X', x_0')]^H$ es el conjunto de morfismos entre dos H-grupos (X, x_0) y (X', x_0').

Sea X un espacio punteado con punto básico x_0. Al espacio $(X, x_0)^{(\mathrm{I},0)}$ lo denotamos como $\mathcal{P}(X, x_0)$ y lo llamamos el *espacio de trayectorias de* X. Se tiene que la evaluación $\mathrm{e}_1 \colon \mathcal{P}(X, x_0) \to X$, que a cada elemento α de $\mathcal{P}(X, x_0)$ le asocia el elemento $\alpha(1) \in X$, es una aplicación punteada y que es suprayectiva si X es conectable por trayectorias [1].

Notemos que la *fibra* de la aplicación $\mathrm{e}_1 \colon \mathcal{P}(X, x_0) \to X$, es decir ${\mathrm{e}_1}^{-1}(x_0)$, es igual al conjunto de las trayectorias α en X tales que $\alpha(1) = x_0$. A una trayectoria con esta propiedad la llamamos *lazo* en X. Al conjunto de todos los lazos en X, lo denotamos como $\Omega(X, x_0)$, es decir

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha \colon \mathrm{I} \to X \mid \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}$$

Proposición 1.5. *El asignamiento que a cada espacio punteado (X, x_0) asocia el espacio $(\Omega(X, x_0), \omega_{x_0})$ y a cada aplicación punteada*

$$f \colon (X, x_0) \to (X', x_0')$$

asocia la aplicación

[1] Puede verse que si X es también localmente conectable por trayectorias, la evaluación $\mathrm{e}_1 \colon \mathcal{P}(X, x_0) \to X$ es abierta, por lo que es una identificación.

$$\Omega(f)\colon (\Omega(X,x_0),\omega_{x_0}) \to (\Omega(X,x_0),\omega_{x'_0})$$

definida por

$$\Omega(f)(\alpha)(t) = f(\alpha(t)).$$

define un funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Toph}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{Hgr} \\ (X,x_0) & \longmapsto & (\Omega(X,x_0),\omega_{x_0}) \end{array}$$

Demostración. Ver [1]. □

Para cada espacio punteado (W,w_0) denotamos como $(\Sigma(W,w_0),*)$ al cociente de $W\times \mathrm{I}$ entre su subespacio $W\times\{0\}\cup W\times\{1\}\cup\{w_0\}\times \mathrm{I}$ y lo llamamos *la suspensión reducida de* W.

Proposición 1.6. *El asignamiento que a cada espacio punteado* (W,w_0) *asocia el espacio* $(\Sigma(W,w_0),*)$, *define un funtor*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Toph}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{Hcogr} \\ (W,w_0) & \longmapsto & (\Sigma(W,w_0),*) \end{array}$$

Demostración. Ver [1]. □

Si consideramos a los funtores Ω y Σ como funtores de $\mathfrak{Toph}_0$ en $\mathfrak{Toph}_0$, se sigue de la Proposición 1.1 que Ω es adjunto izquierdo de Σ, es decir:

Proposición 1.7. *Si* (W,w_0) *y* (X,x_0) *son dos espacios punteados, se tiene una biyección natural:*

$$[(W,w_0),(\Omega(X,x_0),\omega_{x_0})] \cong [(\Sigma(W,w_0),*),(X,x_0)]$$

Demostración. Consideremos un espacio punteado (W, w_0) y notemos que si restringimos la biyección de la Proposición 1.1 entre los conjuntos $(X^{\mathrm{I}})^W$ y $X^{W\times \mathrm{I}}$ al subconjunto $(\Omega(X,x_0),\omega_{x_0})^{(W,w_0)}$, el subconjunto de $X^{W\times \mathrm{I}}$ correspondiente es el de las aplicaciones $f\colon W\times \mathrm{I}\to X$ con la propiedad $f(w,0)=f(w,1)=f(w_0,t)=x_0$.

Por la propiedad universal de la topología cociente se tiene que una aplicación continua $f\colon W\times \mathrm{I}\to X$ tal que

$$f(w,0)=f(w,1)=f(w_0,t)=x_0$$

determina biunívocamente una aplicación punteada

$$\widetilde{f}\colon (\Sigma(W,w_0),*)\to (X,x_0).$$

□

De esto se sigue facilmente el siguiente resultado.

Proposición 1.8. *Si*

$$X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión H_0-exacta de espacios y aplicaciones en $\mathfrak{Top}_0$, entonces la sucesión

$$\Omega(X,x_0)\xrightarrow{\Omega(f)}\Omega(Y,y_0)\xrightarrow{\Omega(g)}\Omega(Z,z_0)$$

también es H_0-exacta.

Si $n\geq 0$, denotamos por $\mathbb{S}^n$ al subespacio del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ que consiste de los vectores de norma uno. En [1] se muestra que $(\mathbb{S}^n, 1)$ es homeomorfo como espacio punteado a $(\Sigma^n(\mathbb{S}^0, 1), *)$ para toda $n > 0$. Se concluye que si $n > 0$ tenemos un funtor

$$\begin{aligned} \mathfrak{Toph}_0 &\longrightarrow \mathfrak{Gr} \\ (X, x_0) &\longmapsto [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)] \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{Gr}$ denota la categoría de grupos. Al grupo $[(\mathbb{S}^n, 1), (X, x_0)]$ lo denotamos como $\pi_n(X, x_0)$ y lo llamamos el *n-ésimo grupo de homotopía de* (X, x_0).

Se sigue facilmente de la proposición 1.7 el siguiente resultado.

Proposición 1.9. *Sea* (X, x_0) *un espacio punteado. Si* $n > i$ *se tiene un isomorfismo natural*

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-i}(\Omega^i(X, x_0), \omega_{x_0})$$

2. Fibraciones y Holonomía Homotópica

Sea (B, b_0) un espacio punteado y consideremos la evaluación

$$e_1 \colon \mathcal{P}(B, b_0) \to B,$$

definida como $e_1(\alpha) = \alpha(1)$. Si consideramos una trayectoria $\alpha \colon I \to B$ tal que $\alpha(0) = b_0$. Entonces, la aplicación $\widetilde{\alpha} \colon I \to \mathcal{P}(B, b_0)$ definida como $\widetilde{\alpha}(t)(s) = \alpha(ts)$, *levanta a α a través de* e_1, es decir, $e_1 \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$. Además $\widetilde{\alpha}(0)$ es igual a la trayectoria constante en B con valor b_0.

Mas generalmente, si $\alpha \colon I \to B$ es una aplicación arbitraria y $\omega \in {e_1}^{-1}(\alpha(0))$, es decir $\omega(1) = \alpha(0)$, se tiene que existe $\widetilde{\alpha}_\omega \colon I \to \mathcal{P}(B, b_0)$, un levantamiento de α, con la propiedad $\widetilde{\alpha}_\omega(0) = \omega$. En efecto, si

$$\widetilde{\alpha}_\omega(t)(s) = \begin{cases} \omega(\frac{2s}{2-t}) & 0 \le s \le \frac{2-t}{2} \\ \alpha(2s + t - 2) & \frac{2-t}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

entonces $e_1 \circ \widetilde{\alpha}_\omega(t) = \widetilde{\alpha}_\omega(t)(1) = \alpha(t)$ y $\widetilde{\alpha}_\omega(0)(s) = \omega(s)$.

2.1. Fibraciones de Hurewicz.

Definición 2.1. Sea $p \colon E \to B$ una aplicación. Si existe una aplicación:

$$\Gamma \colon B^I \times_B E := \{(\alpha, x) \in B^I \times E \mid \alpha(0) = p(x)\} \to E^I, \tag{5}$$

donde $B^I \times_B E$ tiene la topología de subespacio del producto $B^I \times E$, con las propiedades:

(i) $p(\Gamma(\alpha, x)(t)) = \alpha(t)$,

(ii) $\Gamma(\alpha, x)(0) = x$,

se dice que $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ es una *fibración de Hurewicz.*

A (5) se le llama *aplicación de levantamiento de trayectorias* de p. Si $b \in B$, a $p^{-1}(b)$ se le llama *la fibra de p sobres b.* A los espacios E y B se les llama, *espacio total* y *espacio base* de la fibración de Hurewicz, respectivamente.

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Si B es un espacio punteado y conectable por trayectorias, entonces la aplicación* $e_1 \colon \mathcal{P}(B, b_0) \to B$*, es una fibración sobre B, con el espacio de lazos de B como fibra y con espacio total contraible. A esta fibración la llamaremos* fibración canónica sobre B.

Demostración. Sea Γ definida como $\Gamma(\alpha,\omega)(t) = \widetilde{\alpha}_\omega(t)$, donde $\widetilde{\alpha}_\omega$ fue definido en (4). Se verifica facilmente que Γ tiene las propiedades deseadas.

Para ver que $\mathcal{P}(B, b_0)$ es contraible, consideremos la homotopía,

$$H \colon \mathcal{P}(B, b_0) \times \mathrm{I} \to \mathcal{P}(B, b_0),$$

con $H(\alpha,t)(s) = \alpha(s(1-t))$. Entonces $H(\alpha, 0) = \alpha$ y $H(\alpha, 1) = \omega_{b_0}$, donde ω_{b_0} es la trayectoria constante con valor b_0. Así, H es la contracción buscada. ☐

Si $p \colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz, queremos mostrar que

$$p^{-1}(b) \overset{j_b}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$$

es una sucesion H-exacta para toda $b \in B$, donde $j_b \colon p^{-1}(b) \hookrightarrow E$ es la inclusión de la fibra de p sobre b en E. Para ello obsérvemos primero que, por definición de $p^{-1}(b)$, $p \circ j_b = c_b$. Consideremos ahora una aplicación $\varphi \colon W \to E$ que cumple que $p \circ \varphi \simeq c_b$. Si $H \colon W \times \mathrm{I} \to B$ es una homotopía con $H(w,0) = p \circ \varphi(w)$ y $H(w,1) = b$, la existencia de una homotopía $\widetilde{H}\colon W \times \mathrm{I} \to E$ tal que $\widetilde{H}(w,0) = \varphi(w)$ y $p \circ \widetilde{H}(w,1) = H(w,1) = b$, sería suficiente y necesario para asegurar la existencia de una aplicación $\psi\colon W \to p^{-1}(b)$ tal que $\varphi \simeq j_b \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(b) \arrow[r, hook, "j_b"] & E \arrow[r, "p"] & B \\
& W \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "c_{b_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Para ello bastaría definir $\psi\colon W \to p^{-1}(b)$ como $\psi(w) = \tilde{H}(w,1)$, entonces $\tilde{H}\colon \varphi \simeq j_b \circ \psi$.

La existencia de una tal homotopía $\widetilde{H}$ se sigue del siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Una aplicación $p\colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz si, y sólo si p tiene la siguiente propiedad:*

> *Dada una homotopía $H\colon W \times \mathrm{I} \to B$ y una aplicación $\varphi\colon W \to E$, donde W es cualquier espacio topológico, tal que $H(w,0) = p \circ \varphi(w)$, existe una homotopía $\widetilde{H}\colon W \times \mathrm{I} \to E$ tal que $\widetilde{H}(w,0) = \varphi(w)$ y $p \circ \widetilde{H} = H$. (ver diagrama, donde $j_0(w) = (w,0)$)*

(PLH)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "j_0"'] & E \arrow[d, dashed, "p"] \\
W \times \mathrm{I} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

A esta propiedad se le llama Propiedad de Levantamiento de Homotopías (PLH)

Demostración. Supongamos primero que $p\colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz, con aplicación de levantamiento de trayectorias Γ. Sea $H\colon W \times \mathrm{I} \to B$ una homotopía y $\varphi\colon W \to E$ una aplicación tal que $H(w,0) = p \circ \varphi(w)$. Si definimos $\widetilde{H}\colon W \times \mathrm{I} \to E$ como $\widetilde{H}(w,t) = \Gamma(H_w, \varphi(w))(t)$, donde H_w es la trayectoria en B definida como $H_w(t) = H(w,t)$, se tiene entonces que $\widetilde{H}$ es la homotopía deseada, pues $\widetilde{H}(w,0) = \Gamma(H_w,\varphi(w))(0) = \varphi(w)$ y $p \circ \widetilde{H}(w,t) = H_w(t) = H(w,t)$. Para ver que $\widetilde{H}$ es una aplicación continua, notemos que la composición

$$(w,t) \mapsto (H_w, \varphi(w), t) \mapsto (\Gamma(H_w,\varphi(w)), t) \mapsto \Gamma(H_w,\varphi(w))(t)$$

es igual a $\widetilde{H}$, y que la aplicación de W en B^{I} definida como $w \mapsto H_w$, es continua por la Proposición 1.1.

Supongamos ahora que $p\colon E \to B$ tiene la propiedad (PLH). Si $H\colon (B^{\mathrm{I}} \times_B E) \times \mathrm{I} \to B$ esta definida como $H(\alpha,x,t) = \alpha(t)$, y $\varphi\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \to E$ como $\varphi(\alpha,x) = x$, se tiene que $p \circ \varphi(\alpha,x) = p(x) = \alpha(0) = H(\alpha,x,0)$, por lo que existe una aplicación $\widetilde{H}\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \times \mathrm{I} \to E$ tal que $\widetilde{H}(\alpha,x,0) = x$ y $p \circ \widetilde{H}(\alpha,x,t) = \alpha(t)$. La llamada *aplicación adjunta* $\Gamma\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \to E^I$, inducida por la Proposición 1.1 y definida como $\Gamma(\alpha,x)(t) = \widetilde{H}(\alpha,w,t)$, es una aplicación de levantamiento de trayectorias. □

De esta proposición y de las observaciones anteriores a ella, se concluye que si $p\colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz, $p^{-1}(b) \xrightarrow{j_b} E \xrightarrow{p} B$ es una sucesión H-exacta para toda $b \in B$.

Verémos ahora que si $p\colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz, la sucesión

$$\Omega(p^{-1}(b),x) \xrightarrow{\Omega(j_b)} \Omega(E,x) \xrightarrow{\Omega(p)} \Omega(B,b)\ ,$$

también es H-exacta para toda $b \in B$ y $x \in p^{-1}(b)$. Para ello necesitamos de un Lema. Obsérvese que este nos da una propiedad equivalente a la Propiedad de Levantamiento de Homotopías (Proposición 2.3).

Lema 2.4. *Sea $p\colon E \to B$ una fibración de Hurewicz. Supongamos que tenemos dos aplicaciones $G, G'\colon W \times \mathrm{I} \to E$ y que existen dos homotopías*

$$\widetilde{G}\colon\ G|_{W\times\{0\}} \simeq G'|_{W\times\{0\}} : W \times \{0\} \times \mathrm{I} \to E$$

$$y$$

$$H : p \circ G \simeq p \circ G' : W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B,$$

con $p \circ \widetilde{G}(w,0,t) = H(w,0,t)$. Entonces existe una homotopía

$$\widetilde{H} : G \simeq G' : W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$$

que levanta H, $p \circ \widetilde{H} = H$, y que extiende a $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}(w,0,t) = \widetilde{G}(w,0,t)$.

Demostración. Consideremos el conjunto $A \subset \mathrm{I} \times \mathrm{I}$ tal que $A = \mathrm{I} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathrm{I} \cup \mathrm{I} \times \{1\}$. Se tiene entonces que las aplicaciónes G, G' y $\widetilde{G}$ definen una nueva aplicación $h\colon W \times A \to E$ definida como

$$h(w,s,t) = \begin{cases} G(w,s) & \text{si } t = 0 \\ \widetilde{G}(w,0,t) & \text{si } s = 0 \\ G'(w,s) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Sea $\xi\colon (\mathrm{I} \times \mathrm{I}, A) \to (\mathrm{I} \times \mathrm{I}, \mathrm{I} \times \{0\})$ un *homeomorfismo de parejas*, es decir, un homeomorfismo del cubo, con la propiedad de que la restricción $\nu := \xi|_A : A \to \mathrm{I} \times \mathrm{I}$ es un encaje con imagen $\mathrm{I} \times \{0\}$. Si

$j\colon A \to \mathrm{I}\times\mathrm{I}$ es la inclusión, ya que $p\circ h = H\circ(\mathrm{id}\times j)$, se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} W\times\mathrm{I}\times\{0\} \arrow[d, hook, "j_0"'] & W\times A \arrow[l, dashed, "\mathrm{id}_W\times\nu"', "\approx"] \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook, dashed, "\mathrm{id}\times j"] & E \arrow[d, "p"] \\ W\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} & W\times\mathrm{I}\times\mathrm{I} \arrow[l, "\approx", "\mathrm{id}_W\times\xi"'] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Por la propiedad PLH de p, se tiene que existe una aplicación $\widetilde{\widetilde{H}}\colon W\times \mathrm{I}\times\mathrm{I}\to E$, tal que $p\circ\widetilde{\widetilde{H}} = H\circ(\mathrm{id}_W\times\xi^{-1})$ y $\widetilde{\widetilde{H}}\circ j_0 = h\circ(\mathrm{id}_W\times\nu^{-1})$. La aplicación $\widetilde{H} = \widetilde{\widetilde{H}}\circ(\mathrm{id}_W\times\xi)$ es la homotopía deseada. □

Proposición 2.5. *Si $p\colon E\to B$ es una fibración de Hurewicz, entonces las sucesiones:*

$$p^{-1}(b) \xhookrightarrow{\;j_b\;} E \xrightarrow{\;p\;} B$$

$$y$$

$$\Omega(p^{-1}(b),x) \xrightarrow{\Omega(j_b)} \Omega(E,x) \xrightarrow{\Omega(p)} \Omega(B,b)$$

son H-exactas para toda $b\in B$ y $x\in p^{-1}(b)$.

Demostración. Ya probamos que si $p\colon E\to B$ es una fibración de Hurewicz entonces $p^{-1}(b) \overset{j_b}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ es H-exacta para toda $b\in B$. Probemos ahora que también $\Omega(p^{-1}(b),x) \overset{\Omega(j_b)}{\longrightarrow} \Omega(E,x) \overset{\Omega(p)}{\longrightarrow} \Omega(B,b)$ es H-exacta para toda $b\in B$ y $x\in p^{-1}(b)$.

Notemos primero que la composición $\Omega(p)\circ\Omega(j_b)$ evaluada en cualquier lazo $\omega\in\Omega(p^{-1}(b),x)$ siempre toma el valor ω_b, pues $p\circ j_b = c_b$.

Supongamos ahora que $\varphi\colon W\to\Omega(E,x)$ es una aplicación tal que $\Omega(p)\circ\varphi\simeq c_{\omega_b}$ y sea $H'\colon W\times\mathrm{I}\to\Omega(B,b)$ una homotpía con $H'(w,0) = \Omega(p)\circ\varphi(w)$ y $H'(w,1)=\omega_b$. Si consideramos la aplicación $H\colon W\times$

$\mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B$, definida como $H(w,s,t) = H'(w,s)(t)$ y tomamos las aplicaciones $G, G' \colon W \times \mathrm{I} \to E$ definidas como $G(w,s) = x = G'(w,s)$ y $\widetilde{G} \colon W \times \{0\} \times \mathrm{I} \to E$ definida como $\widetilde{G}(w,0,t) = \varphi(w)(t)$, por el Lema 2.4 existe una aplicación $\widetilde{H} \colon W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$ tal que

$$\widetilde{H}(w,s,0) = x = \widetilde{H}(w,s,1),$$
$$\widetilde{H}(w,0,t) = \varphi(w)(t) \quad \text{y}$$
$$p(\widetilde{H}(w,s,t)) = H'(w,s)(t).$$

De la igualdad $\widetilde{H}(w,s,0) = x = \widetilde{H}(w,s,1)$ se sigue que $H''(w,s)(t) = \widetilde{H}(w,s,t)$ define una aplicación $H'' \colon W \times \mathrm{I} \to \Omega(E,x)$. De las otras propiedades de $\widetilde{H}$ se tiene que

$$H''(w,0) = \varphi(w) \quad \text{y}$$
$$\Omega(p)(H''(w,s)) = H'(w,s).$$

Por último, notemos que como $p(H''(w,1)(t)) = H'(w,1)(t) = b$, la asignación $w \mapsto H''(w,1)$ define una aplicación $\psi \colon W \to \Omega(p^{-1}(b),x)$ y entonces, $H'' \colon \varphi \simeq \Omega(j_b) \circ \psi$. □

Nota. Observemos que el Lema 2.4 implica facilmente que $p \colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz, si y sólo si p tiene la siguiente propiedad:

> Dada una homotopía $H \colon W \times \mathrm{I} \to B$ y una aplicación $\varphi \colon W \to E$, donde W es cualquier espacio topológico, tal que $H(w,0) = p \circ \varphi(w)$, existe una aplicación única salvo homotopía $\widetilde{H} \colon W \times \mathrm{I} \to E$ tal que $\widetilde{H}(w,0) = \varphi(w)$ y $p \circ \widetilde{H} = H$.

2.2. Holonomía Homotópica.

Si tenemos una sucesión de aplicaciones (resp. aplicaciones punteadas)

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots ,$$

decimos que esta es una *sucesión H-exacta larga* (resp. H_0-exacta larga) si para toda i la sucesión de aplicaciones

$$X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1}$$

es una sucesión H-exacta (resp. H_0-exacta).

Definiremos ahora una aplicación $\lambda\colon \Omega(B,b) \to p^{-1}(b)$ que nos permite ensamblar las sucesiones $\Omega(p^{-1}(b),x) \xrightarrow{\Omega(j_b)} \Omega(E,x) \xrightarrow{\Omega(p)} \Omega(B,b)$ y $p^{-1}(b) \xrightarrow{j_b} E \xrightarrow{p} B$, en una suseción H-exacta larga.

Definición 2.6. Sea $p\colon E \to B$ una fibración de Hurewicz y $x \in E$. Si Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias de p, se tiene que para toda $\omega \in \Omega(B,p(x))$, $\Gamma(\omega,x)(1) \in p^{-1}(p(x))$. En efecto,

$$p(\Gamma(\omega,x)(1)) = \omega(1) = p(x).$$

A la aplicación:

$$\lambda_{\Gamma,x}\colon \Omega(B,p(x)) \to p^{-1}(p(x)) \quad \text{definida como} \quad \lambda_{\Gamma,x}(\omega) = \Gamma(\omega,x)(1),$$

se le llama *holonomía homotópica de p en x respecto de Γ*.

Proposición 2.7. *Sea $p\colon E \to B$ una fibración de Hurewicz y $x \in E$. Si λ es la holonomía homotópica de p en x respecto de cualquier* *aplicación de levantamiento de trayectorias de p, la siguiente es un sucesión H-exacta larga*

$$\text{(6)}\qquad \begin{tikzcd} \Omega(p^{-1}(p(x)),x) \arrow[r, "\Omega(j_{p(x)})"] & \Omega(E,x) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,p(x)) \arrow[dll, "\lambda"'] \\ p^{-1}(p(x)) \arrow[r, hook, "j_{p(x)}"] & E \arrow[r, "p"] & B. \end{tikzcd}$$

Demostración.

H-exactitud de $\Omega(B,p(x)) \xrightarrow{\lambda} p^{-1}(p(x)) \overset{j_{p(x)}}{\hookrightarrow} E$:

Sea Γ una aplicación de levantamiento de trayectorias de p. Considérese la siguiente homotopía $H\colon \Omega(B,p(x))\times \mathrm{I} \to E$ definida como $H(w,t) = \Gamma(\omega,x)(t)$. Entonces, $H\colon c_x \simeq j_{p(x)} \circ \lambda_{\Gamma,x}$.

Supongamos ahora que $\varphi\colon W \to p^{-1}(p(x))$ es una aplicación tal que $j_{p(x)} \circ \varphi$ es homotópica a la aplicación constante c_x. Entonces, existe $H\colon W \times \mathrm{I} \to E$ tal que $H(w,0) = x$ y $H(w,1) = j_{p(x)} \circ \varphi(w)$. Si observamos que $p \circ H(w,0) = p(x) = p \circ H(w,1)$ concluimos que podemos definir $H'\colon W \to \Omega(B,p(x))$ como $H'(w)(t) = p \circ H(w,t)$. Mostraremos que $\lambda_{\Gamma,x} \circ H' \simeq \varphi$. Para ello consideremos las aplicaciones $G, G'\colon W \times \mathrm{I} \to E$ definidas como $G(w,s) = \Gamma(H'(w),x_0)(s)$ y $G'(w,s) = H(w,s)$, $\widetilde{G}\colon W \times \{0\} \times \mathrm{I} \to E$ constante con valor $x \in E$ y $H\colon W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B$, definida como $H(w,s,t) = H'(w,s)$. Por el Lema 2.4, existe una homotopía $\widetilde{H}\colon W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$ tal que $H = p \circ \widetilde{H}$, $H_t\colon G \simeq G'$ y $H(w,0,t) = x$. Ya que $p \circ \widetilde{H}(w,1,t) = p(x)$, podemos definir la aplicación $K\colon W \times \mathrm{I} \to p^{-1}(p(x))$ como $K(w,t) = \widetilde{H}(w,1,t)$. Entonces, $K(w,0) = G(w,1) = \lambda_{\Gamma,x} \circ H'(w)$ y $K(w,1) = G(w,0) = \varphi(w)$, es decir, $K\colon \lambda_{\Gamma,x} \circ H' \simeq \varphi$.

H-exactitud de $\Omega(E,x) \overset{\Omega(p)}{\to} \Omega(B,p(x)) \overset{\lambda_{\Gamma,x}}{\to} p^{-1}(p(x))$:

Mostraremos primero que la aplicación $\lambda_{\Gamma,x} \circ \Omega(p)$ es homotópica a la aplicación constante c_x. Para ello considerense las aplicaciones $G, G' \colon \Omega(E,x) \times \mathrm{I} \to E$ definidas como $G(\omega, s) = \omega(s)$, y como $G'(\omega, s) = \Gamma(\Omega(p)(\omega), x)(s)$, y tómese la aplicación $\widetilde{G} \colon \Omega(E,x) \times \{0\} \times \mathrm{I} \to E$ constante con valor $x \in E$ y $H \colon \Omega(E,x) \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B$, definida como $H(\omega, s, t) = p(\omega(s))$. Por el Lema 2.4 existe una aplicación $\widetilde{H} \colon \Omega(E,x) \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$, tal que $H = p \circ \widetilde{H}$, $\widetilde{H}_t \colon G \simeq G'$ y $\widetilde{H}(w, 0, t) = x$. Ya que $p \circ \widetilde{H}(w, 1, t) = p(x)$, $\widetilde{H}$ induce una aplicación $K \colon \Omega(E,x) \times \mathrm{I} \to p^{-1}(p(x))$, definida como $K(\omega, t) = \widetilde{H}(\omega, 1, t)$. Entonces, $K \colon c_x \simeq \lambda_{\Gamma,x} \circ \Omega(p) \colon \Omega(E,x) \to p^{-1}(p(x))$.

Supongamos ahora que $\varphi \colon W \to \Omega(B, p(x))$ es una aplicación tal que la composición $\lambda_{\Gamma,x} \circ \varphi$ es homotópica a la aplicación constante c_x, y sea $G \colon W \times \mathrm{I} \to p^{-1}(p(x))$ una homotopía con $G(w,0) = \lambda_{\Gamma,x} \circ \varphi(w)$ y $G(w,1) = x$. Observamos que tenemos aplicaciones $j \circ G \colon W \times \mathrm{I} \to E$ y $H \colon W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B$ donde $H(w,t,s) = \varphi(w)(s)$, tales que $p \circ (j \circ G)(w,t) = p(x) = \varphi(w)(0) = H(w,t,0)$. Por la propiedad de levantamiento de homotopías de p, existe una aplicación $\widetilde{H} \colon W \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$ tal que $\widetilde{H}(w,t,0) = j \circ G(w,t)$ y $p \circ \widetilde{H}(w,t,s) = \varphi(w)(s)$. Definimos $\psi \colon W \to \Omega(E,x)$ como $\psi(w)(s) = \widetilde{H}(w,0,s)$, entonces $(\Omega(p) \circ \psi(w))(s) = \varphi(w)(s)$, es decir, $\Omega(p) \circ \psi = \varphi$.

El resto se sigue de la Proposición 2.5 $\square$

Nota. Mas adelante en la Proposición 4.9 encontraremos, para un tipo especial de fibraciones $p \colon E \to B$, un espacio X y una aplicación $\varphi \colon B \to X$ tal que la sucesión $E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\varphi} X$ es H-exacta.

Ya que la Proposición 2.7 se cumple cuando λ es la holonomía respecto de cualquier aplicación de levantamiento de trayectorias de p, es natural preguntarse si existe alguna relación entre cualesquiera dos tales aplicaciones.

Proposición 2.8. *Sea $p\colon E \to B$ una fibración de Hurewicz y $x \in E$. Si*

$$\lambda_{\Gamma,x}, \lambda_{\Gamma',x}\colon \Omega(B, p(x)) \to p^{-1}(p(x))$$

son las holonomías homotópicas de p en x respecto de dos aplicaciones de levantamiento de trayectorias Γ y Γ' de p, respectivamente, entonces éstas son homotópicas.

Demostración. En efecto, por la definición de λ es suficiente mostrar que las aplicaciones $\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}'\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \times \mathrm{I} \to E$, donde $\widetilde{\Gamma}(\alpha, x, s) = \Gamma(\alpha, x)(s)$ y $\widetilde{\Gamma}'(\alpha, x, s) = \Gamma'(\alpha, x)(s)$, son homotópicas a través de una homotopía, $\widetilde{H}\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$ con la propiedad $p(\widetilde{H}(\alpha, x, s, t)) = \alpha(s)$. Esto último se sigue, tomando en el Lema 2.4 a G como $\widetilde{\Gamma}$, a G' como $\widetilde{\Gamma}'$, $\widetilde{G}(\alpha, x, 0, t) = x$ y $H(\alpha, x, s, t) = \alpha(s)$. □

Nota. Observemos que en la prueba pasada se muestra que dos aplicaciones de levantamiento de trayectorias de p son homotópicas a través de una homotopía $H_t\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \times \mathrm{I} \to E^{\mathrm{I}}$ donde H_t es una aplicación de levantamiento de trayectorias de p para toda $t \in \mathrm{I}$.

Definición 2.9. Sea $p\colon E \to B$ una fibración de Hurewicz y $x \in E$. A la clase de homotopía $[\lambda] \in [\Omega(B, p(x)), p^{-1}(p(x))]$, donde λ es la holonomía homotópica de p en x respecto de cualquier aplicación de levantamiento de trayectorias de p, se le llama *holonomía homotópica de p en x*.

2.3. Fibraciones de Hurewicz punteadas.

Si $p\colon E \to B$ es una fibración de Hurewicz y $x \in E$, definimos la holonomía homotópica de p en x como un elemento del conjunto $[\Omega(B, p(x)), p^{-1}(p(x))]$. Ya que los espacios $\Omega(B, p(x))$ y $p^{-1}(p(x))$ tienen puntos ditinguidos naturalmente, $\omega_{p(x)}$ y x respectivamente, señalaremos condiciones suficientes para que una fibración de Hurewicz tenga su holonomía homotópica como un elemento en el conjunto

$$[(\Omega(B, p(x)), \omega_{p(x)}), (p^{-1}(p(x)), x)].$$

Definición 2.10. Sea $p\colon E \to B$ una aplicación. Si existe una aplicación de levantamiento de trayectorias de p que levanta trayectorias constantes en trayectorias constantes, es decir, con la propiedad $\Gamma(\omega_b, x)(t) = x$, para toda $b \in B$, $x \in X$ y $t \in \mathrm{I}$, donde ω_b denota la trayectoria constante con valor $b \in B$, decimos que p *es una fibración de Hurewicz regular y que* Γ *es una aplicación de levantamiento de trayectorias regular de* p.

Sea $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ una aplicación punteada. Si Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias de p con la propiedad

$$\Gamma(\omega_{b_0}, x_0)(t) = x_0, \text{ para toda } t \in \mathrm{I},$$

decimos que p *es una fibración de Hurewicz punteada y que* Γ *es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de* p

Es inmediato que si p es fibración de Hurewicz regular y p es una aplicación punteada, p es una fibración de Hurewicz punteada.

En cuanto a la existencia de fibraciones con aplicación de levantamiento de trayectorias regular, se muestra en [5] que toda fibración de

Hurewicz sobre un espacio métrico tiene una aplicación de levantamiento de trayectorias regular. También Brown muestra en [2], siguiendo al ya citado articulo de Hurewicz, que un haz localmente trivial con base paracompacta tiene una aplicación de levantamiento de trayectorias con algunas propiedades adicionales, entre ellas, que levanta trayectorias constantes en trayectorias constantes. En la próxima sección se hará una demostración de esta última afirmación.

Teorema 2.11. *Si $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ es una fibración de Hurewicz punteada y $\lambda_{\Gamma,x_0}\colon \Omega(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ es la holonomía homotópica de p en x_0 respecto de Γ, donde Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p, entonces λ_{Γ,x_0} es una aplicación punteada, es decir, $\lambda_{\Gamma,x_0}(\omega_{b_0}) = x_0$. Más aún, si Γ y Γ' son aplicaciones de levantamiento de trayectorias punteadas de p, entonces λ_{Γ,x_0} y λ_{Γ',x_0} son homotópicas como aplicaciones punteadas de $(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0})$ en $(p^{-1}(b_0), x_0)$.*

También, la sucesión

(7)
$$
\begin{tikzcd}
 & & \Omega^2(B, b_0) \arrow[dll, bend right, "\Omega(\lambda_{\Gamma,x_0})"'] \\
\Omega(p^{-1}(b_0), x_0) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E, x_0) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B, b_0) \arrow[dll, bend right, "\lambda_{\Gamma,x_0}"'] \\
p^{-1}(b_0) \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}
$$

es una sucesión H_0-exacta larga.

Demostración. Que la aplicación de levantamiento de trayectorias Γ sea punteada, es decir, $\lambda_{\Gamma,x_0}(\omega_{b_0})(t) = \Gamma(\omega_{b_0}, x_0)(t) = x_0$ para toda $t \in \mathrm{I}$, es equivalente a que λ_{Γ,x_0} sea una aplicación punteada.

La demostración de que λ_{Γ,x_0} y λ_{Γ',x_0} son homotópicas como aplicaciones punteadas de $(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})$ en $(p^{-1}(b_0),x_0)$ y que la sucesión

$$\begin{tikzcd}
\Omega(p^{-1}(b_0),x_0) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E,x_0) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda_{\Gamma,x_0}"'] \\
p^{-1}(b_0) \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

es H_0-exacta larga, son identicas a las demostraciones que ya hicimos. Para ello basta notar que si $p\colon (E,x_0)\to(B,b_0)$ es una aplicación punteada, es equivalente tener una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p, a que se cumpla la siguiente propiedad análoga a (PLH)

> Dada una homotopía punteada $H_t\colon (W,w_0)\to(B,b_0)$ y una aplicación punteada $\varphi\colon (W,w_0)\to(E,x_0)$, donde (W,w_0) es cualquier espacio punteado, tal que $H(w,0)=p\circ\varphi(w)$, existe una homotopía punteada $\widetilde{H}_t\colon (W,w_0)\to(E,x_0)$ tal que $\widetilde{H}(w,0)=\varphi(w)$ y $p\circ\widetilde{H}=H$, (ver diagrama, donde $j_0(w)=(w,0)$).

(PLH_0)

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
W\times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

El resto se sigue de la Proposición 1.8 $\square$

Nota. Observa que si $p\colon E\to B$ es una fibración de Hurewicz regular y Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias regular de p, la Proposición pasada se cumple de un modo mas general, es decir, se tiene una sucesión H_0-exacta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr, dotted, no head] & & \Omega^2(B,b) \arrow[dll, "\Omega(\lambda_\Gamma)"'] \\
\Omega(p^{-1}(b),x) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E,x) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,b) \arrow[dll, "\lambda_\Gamma"'] \\
p^{-1}(b) \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

para toda $b \in B$ y $x \in p^{-1}(b)$.

Definición 2.12. Sea $p\colon (E,x_0) \to (B,b_0)$ una fibración de Hurewicz punteada. A la clase de homotopía punteada

$$[\lambda]_0 \in [(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(p^{-1}(b_0),x_0)],$$

donde λ es la holonomía homotópica de p en x_0 respecto de cualquier aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p, se le llama *holonomía homotópica punteda de p*.

Corolario 2.13. *Si $p\colon (E,x_0) \to (B,b_0)$ es una fibración de Hurewicz punteada, se tiene una sucesión exacta de grupos de homotopía*

(8)
$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_3(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda_*"'] \\
\pi_2(p^{-1}(b_0),x_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_2(E,x_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_2(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda_*"'] \\
\pi_1(p^{-1}(b_0),x_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_1(E,x_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_1(B,b_0)
\end{tikzcd}$$

donde $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica punteada de p.

Demostración. Si aplicamos el funtor $[(\mathbb{S}^1, 1), -]$ a la sucesión (7) del Teorema 2.11, el resultado se sigue de la Proposición 1.9. $\square$

De esto se concluye también fácilmente el siguiente corolario que puede ser útil para calcular los grupos de homotopía de algunos espacios.

Corolario 2.14. *Sea $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ una fibración de Hurewicz punteada y supongamos que $\pi_n(E, x_0) = 0$ para toda $n > 0$. Si*

$$[\lambda]_0 \in [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (p^{-1}(b_0), x_0)]$$

es la holonomía homotópica punteada de p, la aplicación inducida

$$\lambda_*\colon \pi_{n+1}(B, b_0) \to \pi_n(p^{-1}(b_0), x_0)$$

es un isomorfismo de grupos para toda $n > 0$

2.4. Cofibraciones.

Lo que haremos ahora será introdicir un concepto dual al de fibración de Hurewicz, para poder decir cuando una fibración de Hurewicz es un fibración de Hurewicz punteada.

Definición 2.15. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que $A \hookrightarrow X$ es una *cofibración* si se cumple la siguiente propiedad:

> Si $f\colon X \to W$ y $H\colon A \times \mathrm{I} \to W$ son dos aplicaciones continuas donde W es un espacio topológico arbitrario, existe una aplicación $\widetilde{H}\colon X \times \mathrm{I} \to W$ tal que $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$ y $\widetilde{H}(a, t) = H(a, t)$ para toda $a \in A$ y $t \in \mathrm{I}$.

$$\begin{tikzcd}
W & & \\
& X \times \mathrm{I} \arrow[ul, dashed, "\widetilde{H}"'] & X \arrow[l, "j_0"] \arrow[ull, bend right, "f"'] \\
& A \times \mathrm{I} \arrow[u, "j \times \mathrm{id}_{\mathrm{I}}"] \arrow[uul, "H"] & A \arrow[l, "j_0"] \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

Si (X, x_0) es un espacio punteado decimos que (X, x_0) es un *espacio bien punteado* si $\{x_0\} \hookrightarrow X$ es una cofibración

Obseva que el concepto de cofibración es dual al concepto de fibración de Hurewicz. Para tener esto mas claro notemos que $E \xrightarrow{p} B$ es una fibración si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:

> Si $f : W \to X$ y $H : W \to B^{\mathrm{I}}$ son dos aplicaciones continuas donde W es un espacio topológico arbitrario, existe una aplicación $\widetilde{H} : W \to E^{\mathrm{I}}$ tal que $e_0 \circ \widetilde{H}(w) = f(w)$ y $p^{\mathrm{I}} \circ \widetilde{H}(w) = H(w)$ para toda $w \in W$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "\widetilde{H}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, "H"'] & & \\
& E^{\mathrm{I}} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "p^{\mathrm{I}}"] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^{\mathrm{I}} \arrow[r, "e_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Puede encontrarse así el concepto dual al de aplicación de levantamiento de trayectorias:

> Una aplicación $A \hookrightarrow X$ es una cofibración si y sólo si existe una retracción de $X \times \mathrm{I}$ en $A \times I \cup X \times \{0\}$, es decir, una aplicación
>
> $$r\colon X \times \mathrm{I} \to A \times \mathrm{I} \cup X \times \{0\}$$
>
> tal que $r(a,t) = (a,t)$ para toda $(a,t) \in A \times \mathrm{I}$ y $r(x,1) = (x,0)$ para toda $(x,0) \in X \times \{0\}$.

Se tiene el siguiente lema que entre otras cosas permite mostrar que la aplicación $\widetilde{H}$ de la Definición 2.15 es única salvo homotopía.

Lema 2.16. *Sea $A \hookrightarrow X$ una cofibración. Supongamos que tenemos dos aplicaciones $\widetilde{H}, \widetilde{H}'\colon X \times \mathrm{I} \to W$ y que existen dos homotopías*

$$G\colon\ \widetilde{H}\Big|_{X\times\{0\}} \simeq \widetilde{H}'\Big|_{X\times\{0\}} : X \times \{0\} \times \mathrm{I} \to W$$

$$y$$

$$H\colon\ \widetilde{H}\Big|_{A\times\mathrm{I}} \simeq \widetilde{H}'\Big|_{A\times\mathrm{I}} : A \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to W$$

con $H(a,0,s) = G(a,0,s)$ para toda $a \in A$ y $t \in \mathrm{I}$. Entonces existe una homotopía

$$\widetilde{G}\colon \widetilde{H} \simeq \widetilde{H}'\colon X \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to W$$

tal que $\widetilde{G}(x,0,s) = G(x,0,s)$ y $\widetilde{G}(a,t,s) = H(a,t,s)$ para toda $a \in A$.

Demostración. Si $A \hookrightarrow X$ es una cofibración entonces $A \times \mathrm{I} \hookrightarrow X \times \mathrm{I}$ también es una cofibración pues si $r : X \times \mathrm{I} \to X \times \{0\} \cup A \times \mathrm{I}$ es una retracción, $r \times \mathrm{id}_{\mathrm{I}} : X \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to X \times \{0\} \times \mathrm{I} \cup A \times \mathrm{I} \times \mathrm{I}$ también es una retracción.

Esto implica que si $G\colon X \times \{0\} \times \mathrm{I} \to W$ y $H\colon X \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to W$ son aplicaciones continuas tales que $G(a,0,s) = H(a,0,s)$ para toda

$a \in A$ y $s \in \mathrm{I}$, existe una aplicación $\widetilde{G}\colon X \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to W$ tal que $\widetilde{G}(x, 0, s) = G(x, 0, s)$ y $\widetilde{G}(a, t, s) = H(a, t, s)$ para toda $x \in X$, $a \in A$ y $s, t \in \mathrm{I}$. Utilizando la misma idea que en el Lema 2.4 se concluye lo deseado. ◻

En [8] podemos encontrar el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Sea $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ una fibración de Hurewicz y $A \hookrightarrow X$ una cofibración. Entonces, si tenemos dos aplicaciones*

$$f\colon A \times \mathrm{I} \cup X \times \{0\} \to E$$

y

$$H\colon X \times \mathrm{I} \to B$$

tales que $p \circ f(a, t) = H(a, t)$ para toda $(a, t) \in A \times \mathrm{I}$ y $p \circ f(x, 0) = H(x, 0)$ para toda $(x, 0) \in X \times \{0\}$; existe una aplicación $\widetilde{H}\colon X \times \mathrm{I} \to E$ tal que

$$\widetilde{H}\Big|_{A \times \mathrm{I} \cup X \times \{0\}} = f$$

y $p \circ \widetilde{H}(x, 0) = H(x, 0)$ para toda $(x, 0) \in X \times \{0\}$.

Se concluye inmediatamente lo siguiente.

Teorema 2.18. *Si $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ es una fibración de Hurewicz, se cumple la siguiente propiedad:*

> *Dada una homotopía punteada $H_t\colon (W, w_0) \to (B, b_0)$ y una aplicación punteada $\varphi\colon (W, w_0) \to (E, x_0)$, donde (W, w_0) es un espacio bien punteado, tal que $H(w, 0) = p \circ \varphi(w)$, existe una homotopía punteada $\widetilde{H}_t\colon (W, w_0) \to (E, x_0)$ tal que $\widetilde{H}(w, 0) = \varphi(w)$ y $p \circ \widetilde{H} = H$.*

Si X es un espacio topológico contraible, es decir, si existe una homotopía $H_t\colon E \to E$ tal que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) = x_0$ para toda x en X, donde H_t no es necesariamente una aplicación punteada para toda $t \in I$; puede mostrarse que los grupos de homotopía de X son todos cero. Ahora mostraremos que bajo otras condiciones en (W, w_0) también

$$[(W, w_0), (X, x_0)] = 0$$

Si G es un grupo, decimos que G *actua bajo la derecha en un conjunto* X si existe una aplicación

$$\mu\colon X \times G \to X$$

con las propiedades

(i) $\mu(x, e) = x$ para toda $x \in X$, donde $e \in G$ es el elemento neutro.
(ii) $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$ para toda $x \in X$ y $g, h \in G$.

Si G es un grupo que actua por la derecha en un conjunto X, tenemos una relación de equivalencia en X definda como, x esta relacionado con y si existe $g \subset G$ tal que $\mu(x, g) = y$. Al espacio cociente por esta relación de equivalencia lo llamamos el *espacio de orbitas de X por la acción de G.*

Teorema 2.19. *Sea (X, x_0) un espacio bien punteado. Si (Y, y_0) es un espacio punteado arbitrario, se tiene una acción*

$$\mu\colon [(X, x_0), (Y, y_0)] \times \pi_1(Y, y_0) \to [(X, x_0), (Y, y_0)].$$

La función que a cada clase de homotopía punteada en $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ asocia la clase de homotopía no punteada de sus representantes determina una biyección entre el espacio de orbitas del conjunto $[(X, x_0), (Y, y_0)]$

bajo la acción de $\pi_1(Y, y_0)$ y el conjunto de aplicaciones punteadas de (X, x_0) en (Y, y_0) salvo homotópia (no punteada).

Demostración. Sea $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación punteada y $\alpha\colon \mathrm{I} \to Y$ una trayectoria en Y tal que $\alpha(0) = y_0 = \alpha(1)$. Como (X, x_0) un espacio bien punteado existe una apliación $H\colon X \times \mathrm{I} \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x_0, t) = \alpha(t)$. Se muestra facilmente del Lema 2.16 que la aplicación $\mu([f]_0, [\alpha]_0) = [H_1]_0$ esta bien definida y que se tiene así una acción de $\pi_1(Y, y_0)$ en $[(X, x_0), (Y, y_0)]$.

Notemos ahora que por definición $\mu([f]_0, [\alpha]_0)$ es homotópica (no punteadamente) a f. Recíprocamente, si $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son dos aplicaciones punteadas y $H : X \times \mathrm{I} \to Y$ es una homotopía (no punteada) tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, entonces $\mu([f]_0, [H_{x_0}]_0) = [g]_0$, donde $H_{x_0}(t) = H(x_0, t)$. Se concluye que el espacio de orbitas del conjunto $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ por la acción de $\pi_1(Y, y_0)$ esta en biyección con el conjunto de aplicaciones punteadas de (X, x_0) en (Y, y_0) salvo homotópia (no punteada). □

Nota. Observa que si Y es un espacio conectable por trayectorias entonces el conjunto de aplicaciones punteadas de (X, x_0) en (Y, y_0) salvo homotópia (no punteada) es igual a $[X, Y]$.

Proposición 2.20. *Sea (X, x_0) un espacio punteado. Si X es una espacio contraible, los grupos de homotopía de (X, x_0) son cero:*

$$\pi_n(X, x_0) = 0 \quad \textit{para toda } n > 0.$$

Demostración. Si $f\colon (\mathbb{S}^n, 1) \to (X, x_0)$ es una aplicación punteada, sabemos que como X es contraible, existe una homotopía $H\colon \mathbb{S}^n \times \mathrm{I} \to$

X con $H(z,0) = x_0$. Si definimos la aplicaión $F\colon \mathbb{S}^n \times \mathrm{I} \to X$ como

$$F(z,t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq \frac{tz+(1-t)1}{\|tz+(1-t)1\|} \leq \frac{1}{2} \\ H(\frac{tz+(1-t)1}{\|tz+(1-t)1\|}, 2\|tz+(1-t)1\| - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \frac{tz+(1-t)1}{\|tz+(1-t)1\|} \leq 1 \end{cases}$$

puede verse que F esta bien definida y que es una homotopía punteada de f en c_{x_0}. □

Corolario 2.21. *Sea (X, x_0) un espacio punteado. Si X es contraible, para todo espacio bien punteado (W, w_0) se tiene que*

$$[(W, w_0), (X, x_0)] = 0.$$

Demostración. Por la Proposición 2.20

$$\pi_1(X, x_0) = 0.$$

Por el Teorema 2.19 $[(W, w_0), (X, x_0)]$ esta en biyección con el conjunto de aplicaciones punteadas de (W, w_0) en (X, x_0) salvo homotopía no punteada. Como X es contraible se tiene que $[W, X] = 0$ de lo que se concluye que $[(W, w_0), (X, x_0)] = 0$ □

3. Equivalencia Homotópica Fibrada

Si $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ es una fibración de Hurewicz punteada, hemos asociado canónicamente a p un elemento en el conjunto

$$[(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (p^{-1}(b_0), x_0)],$$

el cual únicamente depende de (B, b_0) y del tipo de homotopía punteda de la fibra $(p^{-1}(b_0), x_0)$. A este elemento lo llamamos holonomía homotópica punteada de p.

Lo que haremos ahora será definir una categoría de fibraciones sobre un espacio fijo (B, b_0), y con fibra del tipo de homotopía de otro espacio fijo $(F, *)$; observar que bajo cierta equivalencia en los objetos de esta categoría, se determina un conjunto $L_{(F,*)}(B, b_0)_0$; y mostrar que la asignación

$$\textit{fibración} \rightsquigarrow \textit{holonomía homotópica},$$

se realizaría en una función de conjuntos

$$L_{(F,*)}(B, b_0)_0 \xrightarrow{\Lambda_0} [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (F, *)].$$

3.1. Categoría de fibraciones y su holonomía homotópica.

Sean (B, b_0) y $(F, *)$ dos espacios punteados. Denotemos por

$$\mathfrak{L}_{(F,*)}(B, b_0)_0$$

a la categoría que tiene por objetos a las parejas

$$((E, x_0) \xrightarrow{p} (B, b_0), p^{-1}(b_0) \overset{p_0}{\simeq} F),$$

donde $(E, x_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ es una fibración de Hurewicz y

$$p_0\colon (p^{-1}(b_0), x_0) \to (F, *)$$

una equivalencia homotópica punteada. Estos objetos son llamados *fibraciones sobre* (B, b_0), *con fibra del tipo de homotopía de* $(F, *)$. A los objetos de $\mathfrak{L}_{(F,*)}(B, b_0)_0$ que cumplen además que p es una fibración de Hurewicz regular (resp. punteada) les llamamos *fibraciones regulares (resp. punteadas) sobre* (B, b_0), *con fibra del tipo de homotopía de* $(F, *)$. Los morfismos entre dos objetos $(E \xrightarrow{p} B, p^{-1}(b_0) \overset{p_0}{\simeq} F)$ y $(E' \xrightarrow{p'} B, p'^{-1}(b_0) \overset{p'_0}{\simeq} F)$ son las aplicaciones punteadas $\varphi\colon E \to E'$ tales que $p' \circ \varphi = p$ y $p'_0 \circ \varphi|_{p^{-1}(b_0)} \simeq p_0\colon (p^{-1}(b_0), x_0) \to (F, *)$. En diagramas:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "="] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} \quad \text{tal que} \quad \begin{tikzcd} p^{-1}(b_0) \arrow[rr, "\varphi|_{p^{-1}(b_0)}"] \arrow[dr, "p_0"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\simeq"] & & p'^{-1}(b_0) \arrow[dl, "p'_0"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Los objetos de esta categoría los denotamos simplemente como

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B.$$

Si $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ y $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{p'} B$ son dos objetos, decimos que éstos son *homotópicamente equivalentes fibra a fibra* si existen morfismos $\varphi\colon E \to E'$ y $\psi\colon E' \to E$, y homotopías $H\colon E \times \mathrm{I} \to E$ y $H'\colon E' \times \mathrm{I} \to E'$, tales que las aplicaciones $H_t\colon E \to E$ y $H'_t\colon E' \to E'$, definidas como $H_t(x) = H(x, t)$ y $H'_t(x) = H'(x, t)$, respectivamente, son morfismos en nuestra categoría que cumplen $H_t\colon \psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_E$ y $H'_t\colon \varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_{E'}$. A φ la llamamos *equivalencia homotópica fibrada* y ψ su *inversa homotópica*.

Definición 3.1. Se define la *holonomía homotópica* de una fibración sobre (B, b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F, *)$,

$$((E, x_0) \xrightarrow{p} (B, b_0), p^{-1}(b_0) \overset{p_0}{\simeq} F),$$

como la clase de homotopía

$$[p_0 \circ \lambda] \in [\Omega(B, b_0), F],$$

donde $[\lambda] \in [\Omega(B, b_0), p^{-1}(b_0)]$, es la holonomía homotópica de p en x_0 como fué definida en 2.9.

Si $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{p} B$ es una fibración punteada sobre (B, b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F, *)$, definimos su *holonomía homotópica punteada* como la clase de homotopía punteada

$$[p_0 \circ \lambda]_0 \in [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (F, *)],$$

donde $[\lambda]_0 \in [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (p^{-1}(b_0), x_0)]$, es la holonomía homotópica punteada de p como fué definida en 2.12.

Proposición 3.2. *Si dos fibraciones (resp. fibraciones punteadas) sobre (B, b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F, *)$ son homotópicamente equivalentes fibra a fibra, sus holonomías homotópicas son iguales.*

Demostración. Demostraremos la afirmación para fibraciones punteadas. El caso no punteado se hace de manera similar.

Sea φ una equivalencia homotópica fibrada de $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ en $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{p'} B$ y ψ su inversa homotópica.

Observemos que si $\Gamma \colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \to E^{\mathrm{I}}$ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p y definimos $\varphi_* \Gamma \colon (B^{\mathrm{I}} \times_B E') \times$

$\mathrm{I} \to E'$, como $\varphi_*\Gamma(\alpha, x', s) = \varphi(\Gamma(\alpha, \psi(x'))(s))$, se tiene que

$$\varphi_*\Gamma(\alpha, x', 0) = \varphi \circ \psi(x'),$$
$$p'(\varphi_*\Gamma)(\alpha, x', s) = p'(\varphi_*\Gamma(\alpha, x', s)) = \alpha(s) \quad \text{y}$$
$$\varphi_*\Gamma(\omega_{x_0}, x'_0, t) = x'_0,$$

y si Γ' es una aplicación levantamiento de trayectorias de p', entonces la aplicación $\widetilde{\Gamma}'\colon (B^{\mathrm{I}} \times_B E') \times \mathrm{I} \to E'$ definida como $\widetilde{\Gamma}'(\alpha, x', s) = \Gamma'(\alpha, x')(s)$, cumple

$$\widetilde{\Gamma}'(\alpha, x', 0) = x',$$
$$p' \circ \widetilde{\Gamma}'(\alpha, x', s) = \alpha(s) \quad \text{y}$$
$$\widetilde{\Gamma}(\omega_{x_0}, x'_0, t) = x'_0.$$

Consideremos aplicaciones punteadas $H'_t\colon E' \to E'$ que cumplen $H'_t\colon \varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_{E'}$ (rel. w_0) y $p' \circ H_t = p$. Aplicando la versión punteada del Lema 2.4 cuando G es igual a $\varphi_*\Gamma$, G' es igual a $\widetilde{\Gamma}'$, $\widetilde{G}(\alpha, x', 0, t) = H'_t(x')$ y $H(\alpha, x', s, t) = \alpha(s)$, obtenemos una aplicación $\widetilde{H}\colon B^{\mathrm{I}} \times_B E' \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E'$ con las propiedades

$$\widetilde{H}_t\colon \varphi_*\Gamma \simeq \widetilde{\Gamma}',$$
$$\widetilde{H}(\alpha, x', 0, t) = H'_t(x'),$$
$$p' \circ \widetilde{H}(\alpha, x', s, t) = \alpha(s) \quad \text{y}$$
$$\widetilde{H}(\omega_{x_0}, x'_0, s) = x'_0.$$

La restricción de $\widetilde{H}$ a $\Omega(B,b_0)\times\{x_0\}\times\{1\}\times \mathrm{I}$ determina una homotopía punteada de $(\omega\mapsto\varphi_*\Gamma(\omega,x_0')(1))$ en $\lambda_{\Gamma'}$ como aplicaciones punteadas de $(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})$ en $(p'^{-1}(b_0),x_0')$, pues $p'(\widetilde{H}(\omega,x_0',1,t))=b_0$ y $\widetilde{H}(\omega_{x_0},x_0',s)=x_0'$.

Si observamos que $\varphi_*\Gamma(\omega,x_0)(1)=\varphi\circ\lambda_\Gamma(\omega)$, se concluye que

$$\lambda_{\Gamma'}\simeq\varphi\circ\lambda_\Gamma\colon(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})\to(p'^{-1}(b_0),x_0').$$

Por lo tanto

$$p_0'\circ\lambda_{\Gamma'}\simeq p_0'\circ\varphi\circ\lambda_\Gamma\simeq p_0\circ\lambda_\Gamma\colon(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})\to(F,*).$$

$\square$

En [7], Schön muestra que la familia de fibraciones sobre (B,b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F,*)$, determina un conjunto cuando consideramos a ésta bajo la relación dada por equivalencia homotópica fibrada. A este conjunto lo denotaremos por $L_{(F,*)}(B,b_0)$[2]. Por la Proposición 3.2, la asignación que a cada fibración, asocia su holonomía homotopía, respecto de cualquier aplicación de levantamiento de trayectorias, determina una función de conjuntos:

$$\Lambda\colon L_{(F,*)}(B,b_0)\to[\Omega(B,b_0),F]$$

[2]Podemos considerar a $L_{(F,*)}(B,b_0)$ como una colección de fibraciones sobre B, una por cada clase de fibraciones equivalentes.

Denotemos por $L_{(F,*)}(B,b_0)_0$ al conjunto de las fibraciones punteadas sobre (B,b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F,*)$ bajo la relación de equivalencia homotópica fibrada.

Por la Proposición 3.2, la asignación que a cada fibración punteada, asocia su holonomía homotopía punteada, respecto de cualquier aplicación de levantamiento de trayectorias punteada, determina una función de conjuntos:

$$\Lambda_0 \colon L_{(F,*)}(B,b_0)_0 \to [(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(F,*)]$$

Notemos que se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L_{(F,*)}(B,b_0) \arrow[r, "\Lambda"] & {[\Omega(B,b_0),F]} \\ L_{(F,*)}(B,b_0)_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Lambda_0"] & {[(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(F,*)]} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

3.2. **Fibración inducida.**

Consideremos una aplicación punteada $f\colon (B',b'_0) \to (B,b_0)$, y una fibración sobre (B,b_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F,*)$, $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$. Construiremos una fibración sobre (B',b'_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F,*)$:

$$(f^*E, f^*E \overset{f^*p}{\to} B', f^*p^{-1}(b'_0) \overset{f^*p_0}{\simeq} F),$$

a la cual llamaremos *fibración sobre* (B',b'_0) *inducida por* p *a través de* f.

Consideremos primero la aplicación punteada

$$(f^*E,(b'_0,x_0)) := (\{(b',x)\in B'\times E \mid f(b')=p(x)\},(b'_0,x_0)) \xrightarrow{f^*p} (B',b'_0)$$

donde $f^*p(b',x) = b'$. Si $f^*\colon f^*E \to E$ está definida como $(b',x) \mapsto x$, de la definición de f^*E se sigue que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Como $(f^*p)^{-1}(b_0') = \{b_0'\} \times p^{-1}(b_0)$, podemos observar que f^* se restringe a un homeomorfismo en las fibras $(f^*p)^{-1}(b_0')$ y $p^{-1}(b_0)$, por lo que tenemos una equivalencia homtópica punteada $f^*p_0\colon (f^*p)^{-1}(b_0') \to F$ definida como $f^*p_0(b_0',x) = p_0(x)$.

Por último notemos que $f^*p\colon f^*E \to B'$ es una fibración de Hurewicz. Si consideramos una aplicación Γ de lavantamiento de trayectorias de p, se tiene que $f(\alpha(t)) = p(\Gamma(f\circ\alpha,x)(t))$, por lo que podemos definir la aplicación

$$f^*\Gamma\colon B'^{I}\times_{B'} f^*E \to f^*E^{I}$$

como

$$f^*\Gamma(\alpha,(b',x))(t) = (\alpha(t), \Gamma(f\circ\alpha,x)(t)),$$

De las propiedades que cumple Γ se sigue que

$$f^*\Gamma(\alpha,(b',x))(0) = (b',x) \quad \text{y}$$

$$f^*p(f^*\Gamma(\alpha,(b',x))(t)) = \alpha(t).$$

Se concluye pues, que $f^*\Gamma$ es una aplicación de levantamiento de trayectorias para f^*p.

Proposición 3.3. *Sea* $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ *una fibración puteada sobre* (B, b_0) *con fibra del tipo de homotopía de* $(F, *)$. *Entonces, la fibración inducida por* p *a traves de una aplicación punteada* $f\colon (B', b_0') \to (B, b_0)$ *es punteada.*

Demostración. Si Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p, sabemos que la aplicación

$$f^*\Gamma\colon B'^{\mathrm{I}} \times_{B'} f^*E \to f^*E^{\mathrm{I}}$$

definida como

$$f^*\Gamma(\alpha, (b', x))(t) = (\alpha(t), \Gamma(f \circ \alpha, x)(t)),$$

es una aplicación de levantamiento de trayectorias de f^*p. Si en suma $\Gamma(\omega_b, x)(t) = x$ para toda $b \in B$, $x \in p^{-1}(b)$ y $t \in \mathrm{I}$ (resp. $\Gamma(\omega_{b_0}, x_0)(t) = x_0$ para toda $t \in \mathrm{I}$) es inmediato que $f^*\Gamma$ tiene la misma propiedad. $\square$

Veamos ahora cuán similares deben de ser dos aplicaciones

$$f, g\colon (B', b_0') \to (B, b_0)$$

para que las fibraciones inducidas a través de ellas sean equivalentes.

Proposición 3.4. *Sea* $F \hookrightarrow E \overset{p}{\to} B$ *una fibración punteada sobre* (B, b_0) *con fibra del tipo de homotopía de* $(F, *)$. *Si*

$$K\colon f \simeq g\colon (B', b_0') \to (B, b_0)$$

es una homotopía punteada, las fibraciones inducidas por p *a través de* f *y* g *son equivalentes.*

Demostración. Sea Γ una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p. Sean $\varphi\colon f^*E \to g^*E$ y $\psi\colon g^*E \to f^*E$ las aplicaciones definidas como

$$\varphi(b',x) = (b', \Gamma(K'(b'),x)(1))$$

y

$$\psi(b',y) = (b', \Gamma(\bar{K}'(b'),y)(1)),$$

donde $K'\colon B' \to B^{\mathrm{I}}$ y $\bar{K}'\colon B \to B^{\mathrm{I}}$ son $K'(b')(s) = K(b',s)$ y $\bar{K}'(b')(s) = K(b', 1-s)$.

Mostraremos siguiendo las pruebas del Lema 2.4 y de la Proposición 2.3, que φ es una equivalencia homotópica fibrada con inversa ψ.

Definamos las aplicaciones $H'\colon f^*E \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to B$ y $h\colon f^*E \times A \to E$ como $H'(b',x,s,t) = K(b',1-s)$ y

$$h(b',x,s,t) = \begin{cases} \Gamma(K'(b'),x)(1-s) & \text{si } t=0 \\ \Gamma(K'(b'),x)(1) & \text{si } s=0 \\ \Gamma(\bar{K}'(b'), \Gamma(K'(b'),x)(1))(s) & \text{si } t=1 \end{cases}$$

Entonces $p \circ h = H'|_{f^*E \times A}$.

Si consideramos la aplicación $\widetilde{H}'\colon f^*E \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to E$ definida como

$$\widetilde{H}'(b',x,s,t) =$$

$$\Gamma\Big(H'\left(b',x,\xi^{-1}(p_1(\xi(s,t),-))\right), h\left(b',x,\nu^{-1}(p_1(\xi(s,t)),0)\right)\Big)(p_2(\xi(s,t))),$$

donde $p_i\colon \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ denota la proyección en la i-ésima coordenada. Se puede observar que

$$p \circ \widetilde{H}'(b',x,s,t) = H'(b',x,s,t) = K(b',1-s).$$

De este modo, se tiene que $\widetilde{H}'(b', x, 1, t) \in p^{-1}(f(b'))$, mas $\widetilde{H}'$ induce una aplicación $H : f^*E \times \mathrm{I} \to f^*E$, definida como $H(b', x, t) = (b', \widetilde{H}'(b', x, 1, t))$.

Se observa que

$$H(b', x, 0) = (b', \Gamma(K'(b'), x)(0)) = (b', x)$$
$$H(b', x, 1) = (b', \Gamma(K'^{-1}(b'), \Gamma(K'(b'), x)(1))(1) = \psi \circ \varphi(b', x)$$

Como Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada y K_t es una aplicación punteada, se tiene que $\Gamma(K(b_0', s), x_0)(t) = x_0$, de lo que se sigue la igualdad

$$H(b_0', x_0, t) = (b_0', h(b_0', x_0, \nu^{-1}(\xi(1, t), 0))) = (b_0', x_0),$$

por lo que H_t es punteada. Por último, observemos que

$$f^*p_0 \circ H_t|_{f^*p^{-1}(b_0')} = f^*p_0.$$

La continuidad de H se ve de su construcción.

La existencia de la otra homotopía se sigue de manera análoga. □

Nota. Obsérvese que en la prueba anterior se muestra que si $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ es una fibración y b, b' son dos puntos en B, dada una trayectoria que los une, una aplicación de levantamiento de trayectorias de p nos da una equivalencia homotópica entre las fibras $p^{-1}(b)$ y $p^{-1}(b')$. La propiedad de levantamiento de homotopías nos permite pegar las equivalencias homotópicas de las fibras $p^{-1}(b_x)$ y $p^{-1}(b_x')$ en caso de que las curvas que unen a b_x y b_x' dependan continuamente de $x \in X$, es decir, cuando se tenga una homotopía $H : X \times \mathrm{I} \to B$. La condición adicional en Γ nos permite que esta equivalencia homotópica sea punteada.

De las Proposiciones 3.3 y 3.4 se deduce que si $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{p'} B'$ es una fibración punteada sobre (B', b'_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F, *)$, la asignación que a cada aplicación punteada $f\colon (B, b_0) \to (B', b'_0)$ asocia la fibración inducida por p' a través de f, se realiza en una función de conjuntos:

$$[(B, b_0), (B', b'_0)] \xrightarrow{\mathcal{I}_{E'}} L_{(F,*)}(B, b_0)_0.$$

La siguiente Proposición relaciona la holonomía homotópica de la fibración inducida por p' a través de f, con la holonomía homotópica de p'.

Proposición 3.5. *Sea $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{p'} B'$ una fibración punteada sobre (B', b'_0) con fibra del tipo de homotopía de $(F, *)$. Si $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica punteada de p', el siguiente cuadrado conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
{[(B, b_0), (B', b'_0)]} \arrow[r, "\mathcal{I}_{E'}"] \arrow[d, "\Omega"'] & L_{(F,*)}(B, b_0)_0 \arrow[d, "\Lambda_0"] \\
{[(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\Omega(B'), \omega_{b'_0})]} \arrow[r, dashed, "\lambda_*"] & {[(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (F, *)],}
\end{tikzcd}$$

donde $\Omega([f]_0) = [\Omega(f)]_0$ *y* $\lambda_*([f]_0) = [\lambda \circ f]_0$.

Demostración. Observemos que si $\Gamma\colon B'^I \times_{B'} E' \to E'^I$ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p', entonces la aplicación inducida $f^*\Gamma\colon B^I \times_B f^*E' \to (f^*E')^I$, definida como

(9) $$f^*\Gamma(\alpha, (b, x'))(t) = (\alpha(t), \Gamma(f \circ \alpha, x')(t)),$$

es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de f^*p'. Si en (9) evaluamos cuando α es un lazo, x' el punto básico de E' y t es igual a uno, se tiene que $f^* \circ \lambda_{f^*\Gamma} = \lambda_\Gamma \circ \Omega(f)$, por lo que $(p_0 \circ \lambda_\Gamma) \circ \Omega(f) = (p_0 \circ f^*) \circ \lambda_{f^*\Gamma} = (f^*p_0 \circ \lambda_{f^*\Gamma})$. $\square$

4. $K_G(B, b_0)$

En esta sección consideraremos una clase de aplicaciones $E \xrightarrow{p} B$, donde E tiene estructura de *G-espacio* y B es el espacio de órbitas E/G. Por una propiedad de trivialización local que pedimos, se tendrá que estas aplicaciones tienen levantamiento de trayectorias punteado.

4.1. Haces G-principales.

Un *grupo topológico* G es un conjunto que tiene estructura de grupo abstracto y de espacio topológico, relacionadas con la restricción de que las aplicaciones $(x, y) \mapsto xy$ y $x \mapsto x^{-1}$ (o equivalentemente que la aplicación $(x, y) \mapsto xy^{-1}$) son continuas. Si G es un grupo topológico y E es un espacio topológico, decimos que G *actúa por la derecha en* E o que E *es un G-espacio*, si existe una aplicación continua $\mu\colon E \times G \to E$ que tiene las propiedades, $\mu(x, gh) = \mu(\mu(x, g), h)$ y $\mu(x, e) = x$ donde $e \in G$ es el elemento neutro del grupo. Denotaremos a $\mu(x, g)$ como $x \cdot g$; así, las propiedades anteriores se ven como $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ y $x \cdot e = x$

La acción de un grupo G por la derecha en un conjunto E determina una relación de equivalencia en E definida como $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = x \cdot g$. A las clases de equivalencia determinadas por esta relación las llamaremos *órbitas bajo la acción de G en E*, al conjunto formado por estas lo denotamos como E/G. Para cada $x \in E$ llamamos *órbita de x bajo la acción de G en E*, a la órbita bajo la acción de G en E determinada por el elemento x.

Definición 4.1. Sea E un G-espacio y $p\colon (E, x_0) \to (B, b_0)$ una aplicación punteada. Decimos que $E \xrightarrow{p} B$ es un *haz principal*, si se tiene la siguiente propiedad:

> Existe una cubierta abierta $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Xi}$ de B, y para cada $\alpha \in \Xi$ un homeomorfismo
>
> $$\varphi_\alpha\colon p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times G$$
>
> de la forma $\varphi_\alpha = (p|_{p^{-1}U_\alpha}, \psi_\alpha)$, donde
>
> $$\psi_\alpha\colon p^{-1}U_\alpha \to G$$
>
> es tal que $\psi_\alpha(x \cdot g) = \psi_\alpha(x) \cdot g$, y se cumple que $\psi_\alpha(x_0) = e$ siempre que $x_0 \in p^{-1}U_\alpha$ [3].

A los espacios E y B los llamamos *espacio total* y *espacio base* del haz, respectivamente. A G le llamamos *grupo estructural* del haz. A la cubierta $\mathcal{A}$ la llamamos *cubierta trivializadora del haz* y a cada pareja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *trivialización local*.

Notemos que si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz principal con grupo estructural G, las órbitas de la acción de G en E son homeomorfas a G. Para esto observemos que cada $x \in E$ determina un *encaje canónico de G en E a través de x*, $j_x\colon G \to E$, definido como $j_x(g) = x \cdot g$. Entonces, j_x es un homeomorfismo con su imagen, es decir, con la órbita por x bajo la acción de G en E. En efecto, si (U, φ) es una trivialización local con

[3] Notemos que esta última condición es innecesaria. Si $\psi_\alpha(x_0) \neq e$ entonces $\overline{\varphi}_\alpha\colon p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times G$ definida como $\overline{\varphi}_\alpha(x) = (p(x), \psi_\alpha(x)\psi_\alpha(x_0)^{-1})$ cumple lo requerido.

$p(x) \in U$, debido a la propiedad $\psi_\alpha(x \cdot g) = \psi_\alpha(x)g$, se tiene que

$$p^{-1}(p(x)) \xrightarrow{\varphi|_{p^{-1}(p(x))}} \{p(x)\} \times G \xrightarrow{\mathrm{pr}_G} G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto \psi(x)^{-1}g$$

es inversa de j_x.

Sea B un espacio punteado, con b_0 su punto básico, y sea G un grupo topológico. Consideremos la categoría que tiene por objetos a los haces principales con espacio base B y grupo estructural G, $E \xrightarrow{p} B$, donde E es un espacio punteado con punto básico x_0. A estos objetos los llamamos *haces G-principales sobre B*.

Los morfismos entre dos haces G-principales sobre B, $E \xrightarrow{p} B$ y $E' \xrightarrow{p'} B$, son las aplicaciones punteadas $\Phi\colon E \to E'$ tal que $p' \circ \Phi = p$ y $\Phi(x \cdot g) = \Phi(x) \cdot g$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2. *Si $\Phi\colon E \to E'$ es un morfismo entre dos haces G-principales sobre B, $E \xrightarrow{p} B$ y $E' \xrightarrow{p'} B$, entonces Φ es un isomorfismo, es decir, existe un morfismo $\Psi\colon E' \to E$ de haces G-principales sobre B, tal que $\Phi \circ \psi = \mathrm{id}_{E'}$ y $\Psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$.*

Demostración. Sean $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ familias de trivializaciones locales de E y E' respectivamente, donde $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una cubierta de B. Si definimos las aplicaciones continuas

$$f_\alpha := \varphi'_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \to U_\alpha \times G,$$

éstas son de la forma $f_\alpha(b, g) = (b, \widetilde{f}_\alpha(b, g))$ donde $\widetilde{f}_\alpha(b, gh) = \widetilde{f}_\alpha(b, g)h$. Entonces las aplicaciones $g_\alpha\colon U_\alpha \times G \to U_\alpha \times G$ definidas como

$$g_\alpha(b, g) := (b, \widetilde{g}_\alpha(b, g)) := (b, \widetilde{f}_\alpha(b, e)^{-1}g)$$

cumplen también que $\widetilde{g}_\alpha(b, gh) = \widetilde{g}_\alpha(b, g)h$ y son inversas de las aplicaciones f_α.

Esto nos muestra que $\varphi_\alpha^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi'_\alpha$ es inversa de $\Phi|_{p^{-1}U_\alpha}$ y como las funciones inversas son únicas, las aplicaciones así definidas determinan una inversa global de Φ. Este inverso es un morfismo de haces porque $\varphi_\alpha^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi'_\alpha(x \cdot g) = (\varphi_\alpha^{-1} \circ g_\alpha \circ \varphi'_\alpha(x)) \cdot g$. □

Teorema 4.3. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal. Supongamos que tenemos una familia de trivializaciones locales de p $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma\in\Xi}$, donde $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Xi}$ es una cubierta localmente finita de B. Si existe una familia de aplicaciones continuas, $\{\rho_\gamma \colon B \to \mathbb{R}\}_{\gamma\in\Xi}$, tales que ρ_γ es positiva en U_γ y cero en $B \backslash U_\gamma$, entonces existe una aplicación de levantamiento de trayectorias regular de p, $\Gamma \colon B^I \times_B E \to E^I$, con la propiedad adicional*

$$\Gamma(\alpha, x \cdot g)(t) = \Gamma(\alpha, x)(t) \cdot g$$

Demostración. Si (U, φ) es una trivialización local de $E \xrightarrow{p} B$, podemos definir una aplicación

$$\begin{aligned} U^I \times_U E &\xrightarrow{\Gamma_U} E^I \\ t &\longmapsto \varphi^{-1}(\alpha(t), \psi(x)) \end{aligned}$$

con las propiedades:

(i) $\Gamma_U(\alpha, x)(0) = x$

(ii) $p(\Gamma_U(\alpha, x)(t)) = \alpha(t)$

(iii) $\Gamma_U(\alpha, x \cdot g)(t) = \Gamma_U(\alpha, x)(t) \cdot g$

(iv) $\Gamma_U(\omega_b, x)(t) = x$,

donde $U^I \times_U E$ denota el subconjunto abierto de aquellas parejas $(\alpha, x) \in B^I \times_B E$ tales que $\alpha(I) \subset U$.

Ahora, si $\{(U_{\gamma_i}, \varphi_{\gamma_i})\}_{i=1}^{n}$ son trivializaciones locales de $E \xrightarrow{p} B$, podemos definir una aplicación

$$V_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n} \xrightarrow{\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}} E^I,$$

con las propiedades

(i) $\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x)(0) = x$

(ii) $p(\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x)(t)) = \alpha(t)$

(iii) $\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x\cdot g)(t) = \Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n+1}}(\alpha, x)(t)\cdot g$

(iv) $\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n+1}}(\omega_b, x)(t) = x$,

donde

$$V_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n} := (U_{\gamma_1}^{[0,\frac{1}{n}]}\cap\cdots\cap U_{\gamma_i}^{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}\cap\cdots\cap U_{\gamma_n}^{[\frac{n-1}{n},1]})\cap B^{\mathrm{I}}\times_B E$$

denota el subconjunto abierto de aquellas parejas $(\alpha, x) \in B^{I} \times_B E$ tales que $\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U_{\gamma_i}$ para toda $i = 1,\cdots,n$. Para ello basta definir

$$\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x)(t) = \varphi_{\gamma_1}^{-1}(\alpha(t), \psi_{\gamma_1}(x)),$$

si $t \in [0, \frac{1}{n}]$;

$$\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x)(t) = \varphi_{\gamma_2}^{-1}\Big(\alpha(t), \psi_{\gamma_2}\big(\varphi_{\gamma_1}^{-1}(\alpha(\frac{1}{n}), \psi_{\gamma_1}(x))\big)\Big),$$

si $t \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$;

$$\vdots$$

$$\Gamma_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n}(\alpha, x)(t) = \varphi_{\gamma_i}^{-1}\Bigg(\alpha(t), \psi_{\gamma_i}\bigg(\cdots\varphi_{\gamma_1}^{-1}\Big(\alpha(\frac{2}{n}), \psi_{\gamma_1}\big(\varphi_{\gamma_0}^{-1}(\alpha(\frac{1}{n}), \psi_{\gamma_0}(x))\big)\Big)\cdots\bigg)\Bigg),$$

si $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$.

Sea $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma\in\Xi}$ una familia de trivializaciones locales de p tales que $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Xi}$ es una cubierta de B localmente finita, y consideremos una familia de aplicaciones continuas $\{\rho_\gamma : B \to \mathbb{R}\}_{\gamma\in\Xi}$, tales que ρ_γ es positiva en U_γ y cero en $B\backslash U_\gamma$.

Notemos que la familia

$$\{V_{\gamma_1,\cdots,\gamma_n} \mid \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\} \subset \Xi \text{ finito}\}$$

es una cubierta de $B^I \times_B E$. Tomemos una subcubierta $\{V_\delta\}$ localmente finita y supongamos además que esta familia esta bien ordenada.

Si construimos con ayuda de $\{\rho_\gamma\}$ una familia de aplicaciones continuas $\{\tau_\delta \colon B \to \mathbb{R}\}$ tales que τ_δ es positiva en V_δ y cero en $B^{\mathrm{I}}\backslash V_\delta$, definimos

$$\Gamma \colon B^{\mathrm{I}} \times_B E \to E^{\mathrm{I}}$$

como

$$\Gamma(\alpha, x)(t) = \varphi_{\gamma_i}^{-1}\left(\alpha(t), \psi_{\gamma_i}\left(\cdots \varphi_{\gamma_1}^{-1}\left(\alpha(t_2), \psi_{\gamma_1}\left(\varphi_{\gamma_0}^{-1}\left(\alpha(t_1), \psi_{\gamma_0}(x)\right)\right)\right) \cdots\right)\right),$$

si $t \in [t_{i-1}, t_i]$, donde $V_{\delta_1} < \cdots < V_{\delta_m}$ son todos aquellos abiertos de nuestra cubierta $\{V_\delta\}$ que contienen a α y

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} \tau_{\delta_j}(\alpha)}{\sum_{j=1}^{m} \tau_{\delta_j}(\alpha)}.$$

Por lo antes observado Γ cumple las propiedades requeridas. $\square$

4.2. Haz G-principal inducido.

Al igual que en la categoría de fibraciones, si $f \colon (B', b_0) \to (B, b_0)$ es una aplicación punteada y $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal sobre B, f induce un haz G-principal sobre B' de la siguiente manera:

Definimos primero la aplicación punteada

$$(f^*E, (b'_0, x_0)) := (\{(b', x) \in B' \times E \mid f(b') = p(x)\}, (b'_0, x_0)) \xrightarrow{f^*p} (B', b'_0)$$

como $(f^*p)(b', x) = b'$. Entonces, la acción de G en E induce una acción derecha de G en f^*E como $(b', x) \cdot g = (b', x \cdot g)$, la cual es libre por cumplir lo mismo la original.

Sea $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Xi}$ una cubierta abierta de B, y $\varphi_\alpha \colon p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times G$ homeomorfismos con $\varphi_\alpha = (p|_{p^{-1}U_\alpha}, \psi_\alpha)$, donde $\psi_\alpha(x \cdot g) = \psi_\alpha(x) \cdot g$.

Como f es continua, $f^*\mathcal{A} = \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Xi}$ es una cubierta abierta de B'. Observemos ahora que $f^*\mathcal{A}$ es una cubierta trivializadora de $f^*E \xrightarrow{f^*p} B'$, pues las aplicaciones

$$f^*\varphi_\alpha \colon f^*p^{-1}(f^{-1}U_\alpha) \to f^{-1}U_\alpha \times G$$

definida como

$$f^*\varphi_\alpha(b', x) = (b', \psi_\alpha(x))$$

son homeomorfismos con inversas $(b', g) \mapsto (b', \varphi_\alpha^{-1}(f(b'), g))$. Además

$$f^*\varphi_\alpha = (f^*p|_{f^*p^{-1}(f^{-1}U_\alpha)}, \psi_\alpha)$$

donde $\psi_\alpha(x \cdot g) = \psi_\alpha(x) \cdot g$.

Esto muestra que $f^*E \xrightarrow{f^*p} B'$ es un haz G-principal sobre B. A éste lo llamaremos el *haz G-principal sobre B' inducido por p a través de f*.

Proposición 4.4. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3. Si $H_t \colon f \simeq g \colon (B', b'_0) \to (B, b_0)$ es una homotopía punteada, los haces sobre B' inducidos por f y por g son isomorfos.*

Demostración. Por el Teorema 4.3 existe una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada Γ de p con la propiedad

$$\Gamma(\alpha, x \cdot g)(t) = \Gamma(\alpha, x)(t) \cdot g$$

Si definimos la aplicación

$$\Phi\colon f^*E \to g^*E$$

como

$$\Phi(b, x) = (b, \Gamma(H_b, x)(1))$$

donde H_b es la trayectoria en B definida como $H_b(t) = H_t(b)$. Se tiene entonces que $g^*p \circ \Phi(b, x) = b = (f^*p)(b, x)$, es decir, el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f^*p"'] & & g^*E \arrow[dl, "g^*p"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

y, $\Phi(b, x \cdot g) = (b, \Gamma(H_b, x \cdot g)(1)) = (b, \Gamma(H_b, x)(1)) \cdot g = \Phi(b, x) \cdot g$.

Se tiene así que Φ es un morfismo de haces G-principales sobre B. Por la Proposición 4.2, Φ es un isomorfismo. $\square$

Para realizar como una función de conjuntos a la asignación que a cada aplicación punteada asocia el haz inducido de un haz fijo, necesitamos que los objetos de la categoría de haces G-principales determinen un conjunto cuando consideramos a estos salvo isomorfismo. Para conseguir esto nos restringiremos a algunos objetos de nuestra categoría. La Proposición 4.6 mas abajo, nos indica que obtenemos la misma categoría en muchos de los casos.

Definición 4.5. Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal sobre B. Decimos que $E \xrightarrow{p} B$ es de *tipo numerable punteado* si existe una cubierta trivializadora de p localmente finita, $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in\Xi}$, con $\Xi \subset \mathbb{N}$, y una familia de aplicaciones continuas, $\{\rho_i \colon B \to \mathrm{I}\}_{i\in\Xi}$, tal que $\rho_i^{-1}(0,1] = U_i$, $\rho_1(b_0) = 1$ y $\sum_i \rho_i(b) = 1$ para toda $b \in B$.

Observemos que un haz de tipo numerable punteado cumple con las hipótesis del Teorema 4.3. Se sigue que todo haz de tipo numerable punteado tiene una aplicación de levantamiento de trayectorias regular con la propiedad adicional

$$\Gamma(\alpha, x\cdot g)(t) = \Gamma(\alpha, x)(t)\cdot g$$

Proposición 4.6. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal sobre un espacio normal y 2-numerable. Entonces $E \xrightarrow{p} B$ es de tipo numerable punteado.*

Demostración. Sea $\{W_i\}_{i\in\Xi'}$ una cubierta abierta trivializadora de B. Como B es normal y 2-numerable, existe un refinamiento $\{V_i\}_{i\in\Xi}$ de $\{W_i\}_{i\in\Xi'}$ localmente finito con $\Xi' \subset \mathbb{N}$. Observemos que podemos suponer además que b_0 únicamente pertenece a un V_i, digamos V_1, pues de nos ser así, definimos otra cubierta como $\{V_j\} \cup \{V_i \backslash \{b_0\} \mid V_i \neq V_j\}$, donde V_j es tal que $b_0 \in V_j$, y esta nueva cubierta cumple lo deseado.

Nuevamente por ser B normal, existe una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{V_i\}_{i\in\Xi}$, es decir, una familia de aplicaciones continuas $\{\rho_i \colon B \to \mathrm{I}\}_{i\in\Xi}$ tal que $\operatorname{supp}(\rho_i) := \overline{\{x \in B \mid \rho_i(b) \neq 0\}} \subset V_i$ y $\sum_i \rho_i(b) = 1$.

Se tiene que $\{U_i := \rho_i^{-1}(0,1]\}_{i\in\Xi}$ es una cubierta trivial localmente finita de B y que la familia $\{\rho_i \colon B \to \mathrm{I}\}_{i\in\Xi}$ es tal que $U_i = \rho_i^{-1}(0,1]$ y $\sum_i \rho_i(b) = 1$. Además $\rho_1(b_0) = 1$ pues b_0 solamente pertenece a V_1. $\square$

Proposición 4.7. *Si $E' \xrightarrow{p'} B'$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado, entonces el haz G-principal inducido por una aplicación punteada $f \colon (B, b_0) \to (B', b_0')$ a través de p es de tipo numerable punteado.*

Demostración. Sea $\{U_i\}$ una cubierta tivializadora de B' localmente finita y numerable, y sea $\{\rho_i \colon B' \to \mathrm{I}\}$ una familia de aplicaciones tal que $\rho_i^{-1}(0,1] = U_i$, $\rho_1(b_0') = 1$ y $\sum_i \rho_i(b) = 1$ para toda $b \in B'$. Hemos probado ya, que $\{f^{-1}U_i\}$ es una cubierta trivializadora del haz inducido a través de f. Esta cubierta es inmediatamente numerable. Para ver que también es localmente finita tomemos $b \in B$, y notemos que existe una vecindad V de $\varphi(b) \in BG$ que intersecta a un número finito de elementos de la cubierta $\{U_i\}$. Entonces, $\varphi^{-1}V$ intersecta a un número finito de elementos de $\{\varphi^{-1}U_i\}$.

Por último, tenemos que la familia de aplicaciones $\{\rho_i' \colon B \to \mathrm{I}\}$ definidas como $\rho_i' = \rho_i \circ \varphi$, tienen las propiedades $\rho_i'^{-1}(0,1] = \varphi_i^{-1}U_i$, $\rho_1'(b_0) = \rho_1(p_G(*)) = 1$ y $\sum_i \rho_i'(b) = \sum_i \rho_i(\varphi(b)) = 1$ para toda $b \in B$. Esto muestra que $f^*E' \xrightarrow{f^*p'} B$ es de tipo numerable punteado. $\square$

En la Proposición 5.5 mas adelante se muestra que la clase de haces G-principales de tipo numerable punteado determina un conjunto si consideramos a ésta bajo la relación de equivalencia dada por isomorfismo de haces. Denotamos por $K_G(B, b_0)$ a este conjunto.

Ya que los haces G-principales de tipo numerable punteado satisfacen las hipótesis del Teorema 4.3, de la Proposición 4.4 y 4.7 se sigue que si $E' \xrightarrow{p'} B'$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado, la asignación que a cada aplicación punteada $f\colon (B,b_0) \to (B',b_0')$ asocia el haz G-principal inducido por p' a través de f, se realiza en una función de conjuntos:

$$[(B,b_0),(B',b_0')] \xrightarrow{\mathcal{I}_{E'}} K_G(B,b_0).$$

4.3. Holonomía homotópica de haces G-principales.

Definiremos ahora la holonomía homotópica de los haces G-principales. Notemos primero que si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado, de acuerdo con nuestra definición de estos objetos, E es un espacio punteado con punto básico x_0 y por el Teorema 4.3 existe una aplicación Γ de levantamiento de trayectorias punteada de p.

Definición 4.8. Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado; y sea Γ una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p. A la clase de homotopía punteada de la aplicación

$$\lambda_\Gamma\colon (\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}) \to (G,e)$$

definida como

$$\lambda_\Gamma(\omega) = j_{x_0}^{-1}(\Gamma(\omega,x_0)(1)),$$

la llamamos *holonomía homotópica del haz G-principal p*, donde

$$j_{x_0}\colon G \to p^{-1}(b_0)$$

es el encaje canónico de G en E a través de x_0, es decir, $j_{x_0}(g) = x_0 \cdot g$.

La independencia de la elección de la aplicación de levantamiento de trayectorias punteado en esta definición, se debe al Teorema 2.11.

También del Teorema 2.11 se sigue el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado; entonces la siguiente es una sucesión H_0-exacta larga:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & \cdots \arrow[r, dotted] & \Omega^2(B,b_0) \arrow[dll, "\Omega(\lambda)"'] \\
\Omega(G,e) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E,x_0) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda"'] \\
G \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B,
\end{tikzcd}$$

donde $[\lambda]$ es la holonomía homotópica de p.

Si (X,x_0) es un espacio punteado, denotamos por $\pi_0(X,x_0)$ al conjunto $[(\mathbb{S}^0,1),(X,x_0)]$. Notemos que si G es un grupo abstracto, entonces el conjunto $\pi_0(G,e)$ tiene estructura de grupo inducida por la estrucura de H-grupo de (G,e).

Teorema 4.10. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado;*

entonces se tiene una sucesión exacta larga de grupos:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_3(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda_*"'] \\
\pi_2(G,e) \arrow[r, "j_*"] & \pi_2(E,x_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_2(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda_*"'] \\
\pi_1(G,e) \arrow[r, "j_*"] & \pi_1(E,x_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_1(B,b_0) \arrow[r, "\lambda_*"] & \pi_0(G,e)
\end{tikzcd}$$

donde $[\lambda]_0$ *es la holonomía homotópica de* p.

Más aún;

(i) *Si* E *es conectable por trayectorias*

$$\pi_1(B,b_0) \xrightarrow{\lambda_*} \pi_0(G,e) \to 0$$

es una sucesión exacta de grupos.

(ii) *Si* G *es un grupo topológico discreto los grupos* $\pi_0(G,e)$ *y* G *son isomorfos y entonces*

$$\pi_1(E,e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b_0) \xrightarrow{\lambda_*} G$$

es una sucesión exacta de grupos.

Demostración.

H-exactitud de $\pi_1(E,x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b_0) \to \pi_0(G,e)$:

Como p satisface las hipótesis del Teorema 4.3, podemos considerar una aplicación Γ de levantamiento de trayectorias de p. No es difícil ver que si esta aplicación es la construida en la prueba del Teorema 4.3, entonces

$$\lambda_\Gamma : (\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}) \to (G,e)$$

es un morfismo de H-grupos (ver [2]). Se sigue que la sucesión

$$\Omega(E, x_0) \xrightarrow{\Omega(p)} \Omega(B, b_0) \xrightarrow{\lambda_\Gamma} (G, e)$$

es una sucesión H_0-exacta de H-grupos y morfismos de H-grupos por lo que la sucesión inducida

$$\pi_0(\Omega(E, x_0) \longrightarrow \pi_0(\Omega(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(G, e)$$

es una sucesión exacta de grupos.

Como se tienen isomorfismos de grupos

$$\pi_1(E, x_0) \cong \pi_0(\Omega(E, x_0)$$

$$\pi_1(B, b_0) \cong \pi_0(\Omega(B, b_0)$$

se concluye que

$$\pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\lambda_{\Gamma*}} \pi_0(G, e)$$

es una sucesión exacta de grupos.

Supongamos ahora que E es conectable por trayectorias, es decir,

$$\pi_0(E, x_0) = 0.$$

Como

$$\Omega(B, b_0) \xrightarrow{\lambda_\Gamma} G \xrightarrow{j_{x_0}} E$$

es una sucesión H_0-exacta, se tiene que

$$\operatorname{im}(\lambda_{\Gamma*}) = j_{x_0*}^{-1}(0) = \pi_0(G, e):$$

$$\pi_0\Omega(B, b_0) \stackrel{\lambda_{\Gamma*}}{\to} \pi_0(G, e) \stackrel{j_{x_0*}}{\to} 0$$

por lo que la sucesión

$$\pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\lambda_*} \pi_0(G, e) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos.

Puede observarse facilmente que si G es un grupo topológico discreto

$$\begin{aligned} \pi_0(G, e) &\longrightarrow G \\ [f]_0 &\longmapsto f(-1) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. Se tiene entonces una sucesión exacta de grupos

$$\pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\lambda_*} G.$$

El resto se sigue del Corolario 2.13. □

De este Teorema obtenemos inmediatamente los siguientes resultdos.

Corolario 4.11. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado. Supongamos que E es un espacio contraible.*

Se tiene entonces que

$$\pi_{n+1}(B, b_0) \cong \begin{cases} \pi_n(G, e) & si\ n > 0 \\ \pi_0(G, e) & si\ n = 0 \end{cases}$$

en particular, si G es un grupo topológico discreto

$$\pi_n(B, b_0) \cong \begin{cases} 0 & si\ n > 1 \\ G & si\ n = 1 \end{cases}$$

Demostración. Como E es contraible, por la Proposición 2.20 se tiene que $\pi_n(E,x_0) = 0$ para toda $n > 0$. Por el Teorema 4.10 se concluye que

$$\pi_{n+1}(B,b_0) \cong \pi_n(G,e) \quad \text{si } n > 0$$

Como E es contraible, también es conectable por trayectorias. Por el Teorema 4.10 se tiene que

$$\pi_1(B,b_0) \cong \pi_0(G,e).$$

□

Corolario 4.12.

$$\pi_n(\mathbb{S}^1,1) \cong \begin{cases} 0 & \textit{si } n > 1 \\ \mathbb{Z} & \textit{si } n = 1 \end{cases}$$

Demostración. Considera la aplicación $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida como $\exp(t) = e^{2\pi i t}$. No es difícil mostrar que exp es un haz $\mathbb{Z}$-principal, por la Proposición 4.6 exp es un haz $\mathbb{Z}$-principal de tipo numerable punteado. El resultado se sigue entonces del Corolario pasado pues $\mathbb{R}$ es contraible. □

Teorema 4.13. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado. Supongamos que E es un espacio contraible y que (G,e) es bien punteado. Si $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica de p, entonces*

$$\lambda\colon (\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}) \to (G,e)$$

es un morfismo de H-grupos y una equivalencia homotópica punteada. En particular,

$$\lambda\colon [(W,w_0),(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})] \to [(W,w_0),(G,e)]$$

es un isomorfismo de grupos para todo espacio punteado (W,w_0).

Demostración. En la demostración del Teorema 4.10 ya habíamos notado que λ es un morfismo de H-grupos. Como E es contraible y (G,e) es bien punteado, se sigue del Corolario 2.21 que

$$[(G,e),(E,x_0)] = 0 = [(G,e),(\Omega(E,x_0),\omega_{x_0})]$$

Se sigue entonces de la sucesión H_0-exacta del Teorema 4.9 que tenemos una biyección de conjuntos (realmente un isomorfismo de grupos)

$$[(G,e),(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})] \xrightarrow{\lambda_{\Gamma*}} [(G,e),(G,e)]$$

por lo que podemos encontrar una aplicación

$$\rho\colon (G,e) \to (\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})$$

tal que $\lambda_\Gamma \circ \rho \simeq \mathrm{id}_G$ (rel e).

Se tiene que la siguiente composición de funciones entre conjuntos es la identidad:

$$[(G,e),(G,e)] \xrightarrow{\rho_*} [(G,e),(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0})] \xrightarrow{\lambda_{\Gamma*}} [(G,e),(G,e)]$$

Como $\lambda_{\Gamma*}$ es una función biyectiva se concluye que también la composición $\rho_* \circ \lambda_{\Gamma*}$ es la identidad. De esto último se sigue que

$$\rho \circ \lambda_\Gamma \simeq \mathrm{id}_{\Omega(B,b_0)} \text{ (rel } b_0).$$

□

Supongamos ahora que $E \xrightarrow{p} B$ y $E' \xrightarrow{p'} B$ son dos haces G-principales de tipo numerable punteado y que $\varphi\colon E \to E'$ es un isomorfismo entre ellos. Si Γ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p, entonces $\Gamma'\colon B^I \times_B E \to E^I$ definida como $\Gamma'(\alpha, x)(t) = \tilde{\varphi}(\Gamma(\alpha, \varphi^{-1}(x))(t))$ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada de p'. Si notamos que $\tilde{\varphi} \circ j_{x_0} = j_{x'_0}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Gamma'}(\omega) &= {j_{x'_0}}^{-1}(\varphi^{-1}(\Gamma(\omega, x'_0)(1))) \\
&= (\varphi \circ j_{x_0})^{-1}(\varphi^{-1}(\Gamma(\omega, x'_0)(1))) \\
&= j_{x_0}^{-1}(\Gamma(\omega, x'_0)(1)) = \lambda_\Gamma(\omega).
\end{aligned}$$

donde j_{x_0} (resp. $j_{x'_0}$) es el encaje canónico de G en E (resp. E') a través de x_0 (resp. x'_0), es decir, $j_{x_0}(g) = x_0 \cdot g$ (resp. $j_{x'_0}(g) = x'_0 \cdot g$).

Se tiene entonces que la asignación que a cada haz G-principal sobre B de tipo numerable punteado asocia su holonomía homotópica, se realiza como una función de conjuntos:

$$K_G(B, b_0) \xrightarrow{\Lambda_0} [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)]$$

Teorema 4.14. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal que satisface las hipótesis del Teorema 4.3, por ejemplo, p de tipo numerable punteado. Si $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica de p' tenemos un cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
{[(B, b_0), (B', b'_0)]} \arrow[r, "\mathcal{I}_{E'}"] \arrow[d, "\Omega"'] & K_G(B, b_0) \arrow[d, "\Lambda_0"] \\
{[(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\Omega(B', b'_0), \omega_{b'_0})]} \arrow[r, "\lambda_*"] & {[(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)]}
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda_*([f]_0) = [\lambda \circ f]_0$.

Demostración. Consideremos $[f]_0 \in [(B, b_0), (B', b'_0)]_0$ y sea Γ una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada del haz G-principal $E' \xrightarrow{p'} B'$. Si definimos $f^*\Gamma\colon B^I \times_B f^*E' \to f^*E'^I$ como $f^*\Gamma(\alpha, (b, x')(t) = (\alpha(t), \Gamma(f \circ \alpha, x')(t))$, hemos visto que $f^*\Gamma$ es una aplicación de levantamiento de trayectorias punteado de f^*p'.

De la igualdad

$$\begin{aligned} \lambda_{f^*\Gamma}(\omega) &= j^{-1}_{(b_0, x'_0)}(f^*\Gamma(\omega, (b_0, x'_0))(t)) \\ &= j^{-1}_{x'_0}(\Gamma(f \circ \omega, x'_0)(t)) \\ &= \lambda_\Gamma \circ \Omega f(\omega) \end{aligned}$$

se concluye la conmutatividad. $\square$

5. Grupos de Cohomología y Holonomía Homotópica

Existen varias formas de mostrar la existencia de un haz G-principal $E' \xrightarrow{p'} B'$ tal que

$$K_G(B, b_0) \cong [(B, b_0), (B', b_0')] \tag{10}$$

para todo espacio adecuado (B, b_0).

Lo que haremos ahora será construir para cualquier grupo topológico, un haz G-principal que cumple con (10) siempre que (B, b_0) es un espacio bien punteado.

Por último, bajo ciertas condiciones en G, por ejemplo G discreto, encontraremos una relación entre los grupos de cohomología de (B, b_0) con coeficientes en G y la holonomía homotópica de cualquier haz G-principal sobre (B, b_0).

5.1. Construcción del Haz G-Principal Universal de Milnor.

Si G es un espacio topológico, definimos el espacio $C(G)$ como sigue: Como conjunto, $C(G)$ es el producto cartesiano $\mathrm{I} \times G$ bajo la relación de equivalencia $(t, g) \sim (s, h)$ si $t = 0 = s$. A la clase de equivalencia de un elemento $(t, g) \in \mathrm{I} \times G$ la denotamos por $[t, g]$ si $t \neq 0$, y por $[0, G]$ si $t = 0$.

Damos a $C(G)$ la topología mas pequeña tal que las siguientes aplicaciones

(i) $C(G) \xrightarrow{\mathrm{pr}_\mathrm{I}} \mathrm{I}$ donde $\mathrm{pr}_\mathrm{I}([t, g]) = t$ y $\mathrm{pr}_\mathrm{I}([0, G]) = 0$

(ii) $C(G) \backslash [0, G] \xrightarrow{\mathrm{pr}_G} G$ donde $\mathrm{pr}_G([t, g]) = g$

son continuas.

La topología que damos a $C(G)$ cumple inmediatamente la siguiente propiedad:

Lema 5.1. *Una base para la topología de $\mathcal{C}(G)$ consiste de los siguientes subconjuntos:*

(i) $\{[t,g] \in \mathcal{C}(G) \mid 0 \le a < t < b \le 1$ *y* $g \in G\}$

(ii) $\{[t,g] \in \mathcal{C}(G) \mid 0 < a < t < b \le 1$ *y* $g \in U\}$, *donde* $U \subset G$ *es un abierto arbitrario.*

Tenemos entonces

Lema 5.2. *Si X es un espacio topológico y $f\colon X \to \mathcal{C}(G)$ es una función, entonces f es continua si, y sólo si,*

$$X \xrightarrow{f} \mathcal{C}(G) \xrightarrow{\mathrm{pr}_I} \mathrm{I} \qquad y$$

$$f^{-1}(\mathcal{C}(G)\backslash[0,G]) \xrightarrow{f} \mathcal{C}(G)\backslash[0,G] \xrightarrow{\mathrm{pr}_G} G,$$

son continuas.

Consideremos ahora el espacio punteado

$$(EG, ([1,e], \cdots, [0,G], \cdots) = *),$$

donde EG es el subespacio del producto $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(G)$ definido como

$$([t_1, g_1], \cdots, [t_i, g_i], \cdots) \in EG$$

si un número finito de las t_i no son cero y se cumple que $\sum_i t_i = 1$. Entonces, si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal sobre B de tipo numerable punteado, podemos definir aplicaciones $\phi_i\colon E \to \mathcal{C}(G)$ como $\phi_i(x) = [\rho_i \circ p(x), \varphi_i(x)]$ si $\rho_i \circ p(x) \neq 0$ y $\phi_i(x) = [\rho_i \circ p(x), G]$ si $\rho_i \circ p(x) = 0$, donde $\varphi_i\colon p^{-1}U_i \to U_i \times G$ son trivializaciones locales de p. Las aplicaciones ϕ_i, que son continuas por el Lema 5.2, determinan una aplicación continua $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}}\colon E \to EG$ como $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}}(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_i(x), \cdots)$, que es punteada pues $\rho_1(b_0) = 1$ y $\psi_1(x_0) = e$.

Definimos una acción derecha libre de G en EG como

$$([t_1, g_1], \cdots, [t_i, g_i], \cdots) \cdot g = ([t_1, g_1 g], \cdots, [t_i, g_i g], \cdots)$$

La acción así definida es continua porque las aplicaciones $C(G) \to C(G)$ y $G \to C(G)$ definidas como $[t, g] \mapsto [t, gh]$ con $h \in G$ fijo, y $h \mapsto [t, gh]$ con $[t, g] \in C(G)$ fijo, respectivamente, son continuas por el Lema 5.2. Además $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}}(x \cdot g) = \widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}}(x) \cdot g$ pues las aplicaciones $\psi_i\colon p^{-1}U_i \to G$ son tales que $\psi_i(x \cdot g) = \psi_i(x) \cdot g$.

Si BG es igual a EG/G con la topología cociente y $p_G\colon EG \to BG$ es la aplicación inducida, se sigue de la igualdad $\widetilde{\varphi}_\alpha(x \cdot g) = \widetilde{\varphi}_\alpha(x) \cdot g$ que si $p_G([1, e], [0, e], \cdots) = p_G(*)$ es considerado como punto básico de BG, existe una función punteada $\varphi_{\mathcal{A}}\colon B \to BG$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}}} & EG \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_G} \\ B & \xrightarrow[\varphi_{\mathcal{A}}]{} & BG \end{array}$$

La continuidad de $\varphi_{\mathcal{A}}$ se debe a que p es una identificación. A esta aplicación la llamamos *aplicación clasificante del haz* $E \xrightarrow{p} B$ *respecto de la cubierta trivializadora* $\mathcal{A}$.

Proposición 5.3. *Sea G un grupo topológico. Entonces $E(B) \xrightarrow{p_G} BG$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado con espacio total contraíble. A este haz lo llamaremos* haz G-principal universal de Milnor *y al espacio BG* espacio clasificante de G.

Demostración.

$E(B) \overset{p_G}{\to} BG$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado:

Solamente nos falta ver la trivialización local. Consideremos la cubierta abierta $\{U_j := \{p_G(([t_i, g_i])_{i\in\mathbb{N}}) \in BG \mid t_j \neq 0\}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y notemos que $p_G^{-1}(U_j) = \{([t_i, g_i])_{i\in\mathbb{N}} \in EG \mid t_j \neq 0\}$. Definimos las aplicaciones

$$\varphi_j : p_G^{-1}(U_j) \to U_j \times G$$

como

$$\varphi_j(([t_i, g_i])_{i\in\mathbb{N}}) = (p_G(([t_i, g_i])_{i\in\mathbb{N}}), g_j)$$

Estas aplicaciones son continuas porque p_G y $\mathrm{pr}_G : [t_j, g_j] \mapsto g_j$ son continuas. Además, son biyecciones porque son suprayectivas y porque dos elementos en la misma fibra de p_G coinsiden si alguna de sus coordenadas bien definidas g_i son iguales, es decir, donde $t_i \neq 0$.

Mostraremos que φ_j es un homeomorfismo observando que las aplicaciones φ_j son abiertas, para lo que es suficiente mostrar que las aplicaciones $\mathrm{pr}_G : \mathcal{C}(G)\backslash[0, G] \to G$ y p_G son abiertas. En efecto, por un lado, la aplicación cociente inducida por una acción de un grupo siempre es abierta; así p_G es abierta. Para ver que $\mathrm{pr}_G : \mathcal{C}(G)\backslash[0, G] \to G$ es abierta notemos que los abiertos de $\mathcal{C}(G)\backslash[0, G]$ son de la forma $\mathrm{pr}_{\mathrm{I}}^{-1}(V) \cap \mathrm{pr}_G^{-1}(U)$ donde $U \subset G$ y $V \subset \mathrm{I}$ son abiertos. Pero

$$\mathrm{pr}_G(\mathrm{pr}_{\mathrm{I}}^{-1}(V) \cap \mathrm{pr}_G^{-1}(U)) = U.$$

por lo que $\mathrm{pr}_G : \mathcal{C}(G)\backslash[0, G] \to G$ es abierta.

Por último notemos que la proyección $\mathrm{pr}_{\mathrm{I}} : \mathcal{C}(G) \to \mathrm{I}$ determina un conjunto de aplicaciones continuas $\{\rho_j : BG \to I\}$ definidas como

$\rho_j(([t_i, G])_{i\in\mathbb{N}}) = t_j$. Estas aplicaciones satisfacen que $\rho_j^{-1}(0,1] = U_j$, $\sum_j \rho_j(b) = 1$ y $\rho_1(b_0) = 1$.

Para una prueba de que EG es contraible ver [3]. □

Como EG es contraible, podemos concluir lo siguiente.

Teorema 5.4. *Si G es grupo topológico,*

$$\pi_{n+1}(BG, p_G(*)) \cong \begin{cases} \pi_n(G, e) & si\ n > 0 \\ [(\mathbb{S}^0, 1), (G, e)]_{\cdot} & si\ n = 0 \end{cases}$$

en particular si G es un espacio topológico discreto,

$$\pi_n(BG, p_G(*)) \cong \begin{cases} 0 & si\ n > 1 \\ G & si\ n = 1 \end{cases}$$

Demostración. Este resultado se sigue del Corolario 4.11. □

Si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal sobre B con aplicación clasificante $\varphi_{\mathcal{A}}$ respecto de una cubierta trivializadora $\mathcal{A}$, podemos definir una aplicación $\psi_{\mathcal{A}}\colon E \to \varphi_{\mathcal{A}}^* EG$ como $\psi_{\mathcal{A}}(x) = (p(x), \tilde{\varphi}_{\mathcal{A}}(x))$, donde $\varphi_{\mathcal{A}}^* EG \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{A}}^* p_G} B$ es el haz inducido de p_G a través de $\varphi_{\mathcal{A}}$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "\psi_{\mathcal{A}}"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\varphi}_{\mathcal{A}}"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
& \varphi_{\mathcal{A}}^* EG \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{A}}^*"] \arrow[d, dashed, "\varphi_{\mathcal{A}}^* p_G"] & EG \arrow[d, "p_G"] \\
& B \arrow[r, dashed, "\varphi_{\mathcal{A}}"] & BG
\end{tikzcd}$$

Por la Proposición 4.2, ya que $\varphi_{\mathcal{A}}^* p_G \circ \psi_{\mathcal{A}} = p$ y $\psi_{\mathcal{A}}(x \cdot g) = \psi_{\mathcal{A}}(x) \cdot g$, se tiene que el haz G-principal $E \xrightarrow{p} B$ es isomorfo a $\varphi_{\mathcal{A}}^* EG \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{A}}^* p_G} B$.

Proposición 5.5. *Si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal sobre B, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *$E \xrightarrow{p} B$ es de tipo numerable punteado.*

(ii) *Existe una aplicación punteada $\varphi\colon B \to BG$ tal que $E \xrightarrow{p} B$ es isomorfo a $\varphi^* EG \xrightarrow{\varphi^* p_G} B$.*

Demostración. Nosotros ya mostramos después del Lema 5.2 que si $E \xrightarrow{p} B$ es de tipo numerable punteado entonces existe la aplicación punteada $\varphi\colon B \to BG$ con la propiedad requerida.

El recíproco se sigue de la Propósición 4.7 que asegura que el haz inducido de un haz de tipo numerable punteado es de tipo numerable punteado y de la Proposición 5.3. □

Por la Proposición 5.5 la familia de los haces G-principales de tipo numerable punteado sobre un espacio B determina un conjunto, al que ya denotamos por $K_G(B, b_0)$, cuando consideramos a esta familia bajo la relación dada por isomorfismo de haces. Por la Proposición 4.6, si B es normal y 2-numerable $K_G(B, b_0)$ es el conjunto que determinan las clases de isomorfismo de los haces G-principales sobre B.

Proposición 5.6. *Sea (B, b_0) un espacio bien punteado. Tenemos entonces que la función que representa a la asignación que a cada aplicación punteada $f\colon (B, b_0) \to (BG, *)$ asocia el haz G-principal inducido por p_G a través de f:*

$$[(B, b_0), (BG, *)] \xrightarrow{T_{EG}} K_G(B, b_0),$$

es una biyección de conjuntos.

Demostración. Por la Proposición 5.5

$$[(B,b_0),(BG,*)] \xrightarrow{\mathcal{I}_{BG}} K_G(B,b_0)$$

es una función sobre.

Supongamos ahora que

$$f,g\colon (B,b_0) \to (BG,*)$$

son dos aplicaciones punteadas tales que los haces inducidos por p_G a través de ellas son isomorfos. Si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal que es isomorfo a f^*p_G y a g^*p_G se tienen entonces dos aplicaciones punteadas

$$\varphi,\psi\colon (E,x_0) \to (EG,*)$$

tales que

(i) $\varphi(x\cdot g) = \varphi(x)\cdot g$ y $\psi(x\cdot g) = \psi(x)\cdot g$; y

(ii) $p_G \circ \varphi = f \circ p$ y $p_G \circ \psi = g \circ p$.

Como $\varphi(x\cdot g) = \varphi(x)\cdot g$ y $\psi(x\cdot g) = \psi(x)\cdot g$, se tiene que φ y ψ determinan dos aplicaciones punteadas

$$\varphi',\psi'\colon (B,b_0) \to (EG,*)$$

tales que $p_G \circ \varphi' = f$ y $p_G \circ \psi' = g$.

Si observamos que por el Corolario 2.21 tenemos que

$$[(B,b_0),(EG,*)] = 0,$$

pues EG es contraible y (B,b_0) es un espacio bien punteado, se concluye que $[\varphi']_0 = [\psi']_0$. Entonces

$$[f]_0 = p_{G*}([\varphi']_0) = p_{G*}([\psi']_0) = [g]_0.$$

$\square$

Definición 5.7. Sea (B, b_0) un espacio bien punteado. Si $E \xrightarrow{p} B$ es un haz G-principal de tipo numerable punteado llamamos a la única clase de homotopía $[\varphi]_0 \in [(B, b_0), (BG, *)]$ tal que p es isomorfo a $\varphi^* EG$, la *aplicación clasificante de p.*

Proposición 5.8. *Sea $E \xrightarrow{p} B$ un haz G-principal de tipo numerable punteado. Si (B, b_0) y (E, x_0) son espacios bien punteados, la siguiente es una sucesión H_0-exacta larga:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & \Omega^2(B,b_0) \arrow[dll, "\Omega(\lambda)"'] \\
\Omega(G,e) \arrow[r, "\Omega(j)"] & \Omega(E,x_0) \arrow[r, "\Omega(p)"] & \Omega(B,b_0) \arrow[dll, "\lambda"'] \\
G \arrow[r, hook, "j"] & E \arrow[r, "p"] & B \arrow[r, "\varphi"] & BG,
\end{tikzcd}$$

donde $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica de p y $[\varphi]_0$ es la aplicación clasificante de p.

Demostración.

H_0-exactitud de $E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\varphi} BG$:

Observemos primero que como $E \xrightarrow{p} B$ es de tipo numerable punteado existe una aplicación clasificante φ. Como (E, x_0) es un espacio bien punteado y EG es un espacio contraíble, del Teorema 2.19 se sigue que $[(E, x_0), (EG, *)] = 0$. Notemos ahora que $\varphi \circ p \simeq 0\,(\text{rel. } x_0)$ pues hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d, "p"'] & EG \arrow[d, "p_G"] \\
B \arrow[r, "\varphi"'] & BG
\end{tikzcd}$$

y tenemos que $0 = p_{G*}([\widetilde{\varphi}]_0) = [\varphi \circ p]_0$.

Consideremos ahora un espacio punteado (W, w_0) y una aplicación $f\colon (W, w_0) \to (B, b_0)$ con la propiedad $\varphi \circ p \simeq 0$ (rel. w_0). Como $EG \overset{p_G}{\to} BG$ es un haz de tipo numerable punteado, por la Proposición 4.3, $EG \overset{p_G}{\to} BG$ tiene una aplicación de levantamiento de trayectorias punteada, y según la prueba de la Proposición 2.11 podemos levantar una homotopía punteada $H_t\colon c_{p_G(*)} \simeq \varphi \circ f\colon (W, w_0) \to (BG, p_G(*))$ a una homotopía punteada $\widetilde{H}_t(W, w_0) \to (EG, *)$ con la propiedad $\widetilde{H}_0 = c_*$ y $p \circ \widetilde{H}_t = H_t$.

Si $\widetilde{\psi}\colon \varphi^* EG \to E$ es un isomorfismo de haces G-principales sobre B, entonces la aplicación $\psi\colon (W, w_0) \to (E, x_0)$ definida como $\psi(w) = \widetilde{\psi}(f(w), \widetilde{H}_1(w))$ cumple que $p \circ \psi = f$.

El resto se sigue del Teorema 4.9. □

Notemos que el Teorema 4.10 se sigue también de los Teoremas 5.8 y 5.4.

Teorema 5.9. *Si G es un grupo topológico tal que (G, e) es un espacio bien punteado, entonces*

$$\lambda\colon (\Omega(BG, p_G(*)), \omega_{p_G(*)}) \to (G, e)$$

es una equivalencia homotópica punteada. donde $[\lambda]_0$ es la holonomía homotópica de $EG \overset{p_G}{\to} BG$.

Demostración. Ver el Teorema 4.13. □

El siguiente Teorema muestra escencialmente que la función holonomía

$$K_G(B, b_0) \overset{\Lambda_0}{\to} [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)]$$

corresponde, salvo isomorfismos naturales, a la función Ω que a cada morfismo asocia la correspondiente aplicación entre los espacios de lazos.

Teorema 5.10. *Sea G un grupo topológico. Si (B, b_0) y (G, e) son espacios bien punteados, se tiene un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} K_G(B, b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (G, e)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ [(B, b_0), (BG, p_G(*))] & \xrightarrow[\Omega]{} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\Omega(BG, p_G(*)), \omega_{b'_0})] \end{array}$$

Demostración. La conmutatividad se sigue del Teorema 4.14. Las biyecciónes se probaron en los Teoremas 5.6 y 5.9. □

5.2. Grupos de Cohomología.

En esta última parte entenderemos por un CW-complejo punteado a una pareja (X, x_0) donde X es un CW-complejo numerable y x_0 una 0-célula de X[4]. Entonces (X, x_0) es un espacio bien punteado y todo haz G-principal sobre (X, x_0) es de tipo numerable punteado.

Es conocido el siguiente resultado. Ver por ejemplo [1].

Teorema 5.11. *Sea A un grupo abeliano finitamente generado.*

Existe una familia

$$\{(K(A, n), *), \phi_n\}_{n>0}$$

donde $(K(A, n), *)$ es un CW-complejo punteado con estructura de H-grupo tal que

$$\pi_m(K(A, n), *) \cong \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ A & si\ m = n \end{cases}$$

[4]Para las definiciones de CW-complejo numerable y n-célula ver [1].

y donde

$$\phi_n\colon (\Omega(K(A,n+1),*),\omega_*) \to (K(A,n),*)$$

es un morfismo de H-espacios y una equivalencia homotópica punteada.

Los espacios $(K(A,n),*)$ son llamados espacios de Eilenberg-Mac Lane de tipo (A,n). La familia

$$\{(K(A,n),*),\phi_n\}_{n>0}$$

se conoce como espectro de Eilenberg-Mac Lane .

Si A es un grupo abeliano finitamente generado, por el Teorema pasado tenemos una familia de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Toph}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{Gr} \\ (W,w_0) & \longmapsto & [(W,w_0)],(K(A,n),*)] \end{array}$$

donde $\mathfrak{Gr}$ denota la categoría de grupos. Al grupo $[(W,w_0)],(K(A,n),*)]$ lo denotamos como $\check{\mathrm{H}}^n(W,w_0;A)$ y lo llamamos *n-ésimo grupo de cohomología de (W,w_0) con coeficientes en A*[5].

Al morfismo de grupos

$$\Omega\colon \check{\mathrm{H}}^n(W,w_0;A) \to \check{\mathrm{H}}^{n+1}(\Omega(W,w_0),\omega_{w_0};A)$$

inducido por el funtor Ω y por el morfismo de H-grupos ϕ_n lo llamamos *morfismo de lazos en cohomología.*

[5] Lo que nosotros estamos definiendo aquí son los llamados grupos de cohomología homotópica. Puede mostrarse que si (W,w_0) es un CW-complejo punteado entonces estos grupos coinciden con los grupos de chomología singular (Ver [1]) y que si (W,w_0) es un espacio paracompacto y de Hausdorff coinciden con los grupos de cohomología de Čhech (Ver [4]).

Se tiene la siguiente caracterización de los espacios de Eilenberg-Mac Lane en la categoría de los espacios CW-complejos punteados .

Teorema 5.12. *Sea A un grupo abeliano finitamente generado. Si (X, x_0) es un espacio CW-complejo punteado , tal que*

$$\pi_m(X, x_0) \cong \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ A & si\ m = n \end{cases}$$

el funtor

$$\begin{aligned} \mathfrak{Toph}_0 &\longrightarrow \mathfrak{Gr} \\ (W, w_0) &\longmapsto [(W, w_0), (X, x_0)] \end{aligned}$$

es naturalmente isomorfo al funtor $\check{\mathrm{H}}^n(W, w_0; A)$.

Demostración. Ver [1]. □

Por este Teorema, si (X, x_0) es un espacio CW-complejo punteado tal que

$$\pi_m(X, x_0) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ A & \text{si } m = n \end{cases}$$

decimos que (X, x_0) es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo (A, n).

Teorema 5.13. *Sea G es un CW-grupo[6] que como grupo abstracto es abeliano y finitamente generado. Si G es un espacio discreto, entonces $(BG, *)$ es una espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(G, 1)$.*

Si (B, b_0) es un espacio bien punteado, podemos concluir que se tiene una biyección.

$$K_G(B, b_0) \cong \check{\mathrm{H}}^1(B, b_0; G)$$

[6] Ver [6].

y entonces un cuadrado conmutativo que relaciona la función holonomía con el morfismo de lazos en cohomología

$$\begin{array}{ccc} K_G(B,b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(G,e)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ \check{\mathrm{H}}^1(B,b_0;G) & \xrightarrow[\Omega]{} & \check{\mathrm{H}}^2(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0};G) \end{array}$$

Demostración. En [6] se muestra que $(BG,*)$ es un espacio CW-complejo punteado bajo la condición de que G sea un CW-grupo. Por el Teorema 5.4 se sigue que $(BG,*)$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(G,1)$.

El resto se sigue del Teorema 5.10. □

De la misma forma se tiene:

Teorema 5.14. *Sea G es un CW-grupo y A un grupo abstracto abeliano y finitamente generado. Si G es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo (A,n), entonces $(BG,*)$ es una espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(A,n+1)$.*

Si (B,b_0) es un espacio bien punteado, podemos concluir que se tiene una biyección.

$$K_G(B,b_0) \cong \check{\mathrm{H}}^{n+1}(B,b_0;A)$$

y entonces un cuadrado conmutativo que relaciona la función holonomía con el morfismo de lazos en cohomología

$$\begin{array}{ccc} K_G(B,b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0}),(G,e)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ \check{\mathrm{H}}^{n+1}(B,b_0;A) & \xrightarrow[\Omega]{} & \check{\mathrm{H}}^{n+2}(\Omega(B,b_0),\omega_{b_0};A) \end{array}$$

Señalemos tres casos importantes:

$G = \mathbb{Z}$ (Cubrientes regulares con cíclica infinita)

Tenemos para todo espacio bien punteado (B, b_0) una biyección

$$K_{\mathbb{Z}}(B, b_0) \cong \check{\mathrm{H}}^1(B, b_0; \mathbb{Z})$$

y un cuadrado conmutativo que relaciona la función holonomía con el morfismo de lazos en cohomología

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}}(B, b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\mathbb{Z}, 0)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ \check{\mathrm{H}}^1(B, b_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\Omega]{} & \check{\mathrm{H}}^2(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

$G = \mathbb{Z}_2$ (Haces vectoriales lineales reales)

Tenemos para todo espacio bien punteado (B, b_0) una biyección

$$K_{\mathbb{Z}_2}(B, b_0) \cong \check{\mathrm{H}}^1(B, b_0; \mathbb{Z}_2)$$

y un cuadrado conmutativo que relaciona la función holonomía con el morfismo de lazos en cohomología

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}_2}(B, b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\mathbb{Z}_2, 0)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ \check{\mathrm{H}}^1(B, b_0; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\Omega]{} & \check{\mathrm{H}}^2(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

$G = \mathbb{S}^1$ (Haces vectoriales lineales complejos)

En el Corolario 4.12 se muestra que $\mathbb{S}^1$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $(\mathbb{Z}, 1)$. Tenemos entonces para todo espacio bien punteado (B, b_0) una biyección

$$K_{\mathbb{S}^1}(B, b_0) \cong \check{\mathrm{H}}^2(B, b_0; \mathbb{Z})$$

y un cuadrado conmutativo que relaciona la función holonomía con el morfismo de lazos en cohomología

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{S}^1}(B, b_0) & \xrightarrow{\Lambda_0} & [(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}), (\mathbb{S}^1, 0)] \\ \wr\| & & \wr\| \\ \check{\mathrm{H}}^2(B, b_0; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\Omega]{} & \check{\mathrm{H}}^3(\Omega(B, b_0), \omega_{b_0}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Referencias

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, Topología algebraica, Un enfoque homotópico, Primera Edición, McGraw-Hill, (1998).

[2] Edgar Brown Jr., *Twisted tensor products, I*, Annals of Mathematics, **69**, No. 1, 223-246 (1959).

[3] Albercht Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Annals of Mathematics, **78**, No. 2, 223-255 (1963).

[4] Peter J. Huber, *Homotopical Cohomology and Čech Cohomology*, Math. Annalen **144**, 73-76 (1961).

[5] Witold Hurewicz, *On the concept of fiber space*, Proc. N. A. S., **41**, 956-961 (1955).

[6] John Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics, **63**, No. 3, 430-436 (1956).

[7] Rolf Schön, *The Brownian classification of fiber space*, Arch. Math., **39**, 359-365 (1982).

[8] George W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, (1978).