

142



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**CURVAS HORIZONTALES EN CANALES
EN REGIMEN SUBCRITICO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A :
ORLANDO FABIO STIRNIMANN GORDILLO

DIRECTOR DE TESIS: DR. GILBERTO SOTELO AVILA

MEXICO, D. F.

2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTIT/089/01

Señor
ORLANDO FABIO STIRNIMANN GORDILLO
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M.I. GILBERTO SOTELO ÁVILA, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

"CURVAS HORIZONTALES EN CANALES A RÉGIMEN SUBCRÍTICO"

INTRODUCCIÓN

- I. ASPECTOS GENERALES
- II. AVANCES SOBRE EL TEMA
- III. DESARROLLO TEÓRICO
- IV. EJEMPLO NUMÉRICO
- V. CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deba prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente

~~"POR MI RAZA/HABLARA EL ESPIRITU"~~

Cd. Universitaria a 4 de mayo de 2001

EL DIRECTOR

~~M. C. GERARDO FERRANDO BRAVO~~

~~GFB/GMP/mstg.~~

A la Facultad de Ingeniería, a mi familia, al Dr. Sotelo, a mis amig@s y especialmente a Reinhard, que es un ejemplo de trabajo y progreso.

ÍNDICE	4
PROLOGO	6
INTRODUCCIÓN	6
1 ASPECTOS GENERALES	6
1.1 Planteamiento del problema	
1.2 Importancia de la solución	
1.3 Objetivo del trabajo	
1.4 Aplicación de los resultados	
2 AVANCES SOBRE EL TEMA (<i>Estado del Arte</i>)	16
2.1 Algunas características del flujo helicoidal en curvas horizontales	
2.2 Pérdidas de energía	
2.2.1 Ocurrencia	
2.2.2 <i>Chow (1959)</i>	
2.2.3 <i>Escriba, B. D. (1988)</i>	
2.2.4 <i>USBR (1988)</i>	
2.2.5 <i>Rozovskii (1961)</i>	
2.2.6 Comparación experimental de métodos	
2.2.7 Pruebas	
2.3 La sobreelevación y el perfil transversal de la superficie libre	
2.3.1 <i>Chow (1959)</i>	
2.3.2 <i>Escribá (1988)</i>	
2.3.3 <i>Graf – Kozeny (1993)</i>	
2.3.4 <i>French, R.H. (1985)</i>	
2.3.5 <i>Grashof (1985)</i>	
2.3.6 <i>Woodward (1980)</i>	
2.3.7 Comparación analítica de métodos	
2.3.8 Observaciones y comentarios	
3 DESARROLLO TEÓRICO	44
3.1 Sobreelevación	
3.1.1 Desarrollo de las ecuaciones	
3.1.2 Modelos experimentales	
3.1.3 Análisis de ecuaciones	
3.1.4 Resultados obtenidos	
3.1.5 Observaciones y comentarios	
3.2 Pérdidas de energía	
3.2.1 Causas de las pérdidas de energía	
3.2.2 Modelo matemático	

3.2.3	Distribución de la velocidad longitudinal	
3.2.4	Efecto de pared	
3.2.5	Distribución de la velocidad transversal	
3.2.6	<i>Hipótesis adicionales</i>	
3.2.7	Alternativa simplificada	12
3.2.8	Integración	
3.2.9	Pruebas realizadas y resultados obtenidos	
3.2.10	Modelo matemático con la variación gradual de pérdidas	
3.2.11	Consideraciones e hipótesis	
3.2.12	Perfil de flujo longitudinal	
3.2.13	Variación espacial de la velocidad transversal	
3.2.14	Detalle del modelo matemático y propuesta de solución	
3.2.15	Experimentos realizados y resultados obtenidos	
3.3	Medida de atenuación: Pendiente transversal de plantilla	
3.4	Aplicación del Excel paso por paso	
4	EJEMPLO NUMÉRICO	86
4.1	Planteamiento	
4.2	Aplicación del método iterativo	
4.3	Tabulaciones	
4.4	Análisis de gráficas generadas y resultados numéricos	
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	102
	REFERENCIAS	103
	SIMBOLOGÍA	104

CURVAS HORIZONTALES EN CANALES A RÉGIMEN SUBCRÍTICO

PRÓLOGO

Esta tesis fue realizada para cumplir con el requerimiento que se hace a todos los estudiantes de nivel licenciatura en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es sabido que el conocimiento es algo que se encuentra en constante expansión, cada vez más rápida, siendo las universidades el lugar ideal para que el nuevo conocimiento se formalice y se adapte de manera que pueda ser transmitido a las generaciones que siguen. Si bien esa es tarea esencialmente de investigadores y profesores, los alumnos, con nuestra poca experiencia, también podemos hacer pequeñas contribuciones a ese avance, lo cual se da a través de las tesis de licenciatura. Contribuir con una aportación académica puede ser más útil para los fines de la universidad que dar dinero y es una forma de retribuir la formación que uno recibió como estudiante. El objetivo de la tesis es que el egresado tenga una idea de cómo llevar a cabo una investigación, ya sea a nivel bibliográfico y/o práctico, que tenga la capacidad de interpretar sus resultados y generar conclusiones con criterio propio (claro, con la guía de un director de tesis para evitar desvaríos), eso le servirá en su ejercicio profesional, aun si no se dedica propiamente a la investigación o a actividades académicas.

La tesis en este caso es una breve investigación a nivel bibliográfico y de aplicación sobre los temas que se mencionan en el título, enfocados especialmente a tratar de dar una solución actualizada a un problema, pequeño pero significativo dentro del área de la hidráulica de canales.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los libros disponibles en México, que de alguna manera pueden contribuir a lograr los objetivos de esta tesis, son de las décadas de los años cincuenta y sesenta, así que para contar con información más actualizada se recurre también (como se puede constatar en la Bibliografía) a revistas y publicaciones de las áreas de Ingeniería Hidráulica y Mecánica de Fluidos, las cuales hasta nuestros días se siguen publicando. Estas revistas publican artículos que son seleccionados entre muchos que son propuestos cada año por investigadores de todo el mundo. Según explica una de las publicaciones, se da preferencia a los artículos que contribuyen con nuevo conocimiento, el cual es fácil de aplicarse en forma inmediata al diseño y construcción de todo tipo de obras hidráulicas.

El desarrollo de esta tesis es exclusivamente en el ámbito teórico y de aplicación, haciendo referencia a los experimentos de otros autores. Se desechó la opción de realizar programas experimentales para construir un modelo de canal artificial de sección cualquiera, debido a la falta de presupuesto y especialmente por la enorme cantidad de tiempo que suele tomar la realización de tesis basadas en modelos experimentales.

Tomando en cuenta que una tesis muy elevada y compleja podría resultar casi inútil para cualquier estudiante o ingeniero por su poca aplicabilidad, se procura exponer todo de manera directa y sencilla para que esta tesis le resulte fácil de entender a cualquier estudiante de ingeniería civil.

1. ASPECTOS GENERALES

1.1 Planteamiento del problema

El diseño en la Ingeniería Hidráulica toma en cuenta todas las variables y fenómenos conocidos y más o menos cuantificables que influyen en el comportamiento del agua y por tanto en la operación de los distintos sistemas hidráulicos. En la Hidráulica de Canales se diseñan y construyen, entre otras, las conducciones conocidas como *canales* que son básicamente caminos con dirección específica que el agua ha de seguir y en los cuales la superficie libre del líquido se mantiene en contacto permanente con la presión atmosférica. Los canales se construyen de acuerdo con el gasto Q que han de conducir, el uso que se les dé, las condiciones topográficas, el espacio disponible, material de excavación, etc., por mencionar algunos factores que influyen en el trazo y forma de los canales.

El trazo de un canal conlleva casi invariablemente a la necesidad de hacer uno o más cambios en la dirección de flujo, ya sea en un plano vertical (que sería un cambio brusco o gradual en la pendiente de plantilla del canal S_0), en un plano horizontal o una combinación de ambos. Las características del flujo a través de una curva o cambio de dirección son notablemente distintas de las del flujo en línea recta

El cambio de dirección en un plano horizontal es claramente visible cuando se observa el canal según la vista en planta, ya que puede ser de manera abrupta o gradual. Cuando es de manera abrupta, una línea imaginaria a la mitad del cauce, representativa de la dirección de desplazamiento efectivo del agua y llamada *eje del canal*, modifica su curso en un vértice dado con el ángulo (ϑ) definido entre la dirección anterior y la nueva dirección. Por otro lado, el cambio gradual de dirección implica que no hay un vértice de cambio de dirección sino una trayectoria curvilínea de cuyos extremos es tangente el eje del canal antes y después de la curva. A su vez el cambio abrupto de dirección puede descomponerse en varios vértices que impliquen cada uno un cambio menor, de manera que dos, tres, cuatro o la cantidad de vértices que sean, den en suma el ángulo total de cambio de dirección horizontal en el canal. Si el número de vértices en que se divide un cambio abrupto es muy grande, se tiende a la forma gradual, que geométricamente implica un número infinito de lados.

El agua es un fluido relativamente pesado (alta densidad), por tanto con inercia grande y un cambio de dirección horizontal implica un cambio total en su estado de movimiento, pasando de un movimiento rectilíneo a uno curvilíneo. Esto provoca un reajuste de los vectores de velocidad de todas sus partículas. De observaciones experimentales en régimen subcrítico se sabe que las velocidades tienden a ser mayores en el interior de la curva cuando ésta inicia: la distribución de velocidades longitudinales gradualmente se va acomodando durante toda la trayectoria curvilínea hasta que las velocidades mayores quedan en el flanco exterior del canal, de manera que se compensa la desproporción debida al aceleramiento inicial en el flanco interior y se mantiene la continuidad del gasto circulante. Algunas de las mediciones de la velocidad longitudinal hechas por Lien (1999) lo muestran esquemáticamente en la figura 1.1.

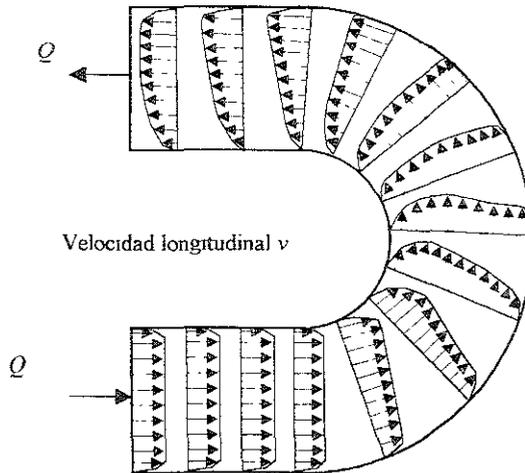


Figura 1.1 Evolución del perfil transversal de la velocidad longitudinal a lo largo de una curva (vista en planta)

Sobre el comportamiento de las líneas de velocidad longitudinal v puntual en una curva, Silva (1999) hizo pruebas con flujo subcrítico en canales artificiales y encontró que el comportamiento es distinto de acuerdo con la sinuosidad. Para esto la sinuosidad está definida como el cociente de la distancia entre dos posiciones de un canal a lo largo de su línea media, sobre la distancia en línea recta entre las dos posiciones, de manera que una trayectoria rectilínea tiene sinuosidad igual a uno, es decir

$$\zeta = \frac{l_c}{l_r} \quad (1.11)$$

donde

ζ sinuosidad (adimensional)

l_c longitud a lo largo de la línea media del canal entre 2 puntos.

l_r longitud en línea recta entre los mismos 2 puntos.

La diferencia de comportamiento es más visible entre dos condiciones extremas de poca y alta sinuosidad. En la primera, la tendencia del líquido de mantener su estado de movimiento hace que sus líneas de corriente se acumulen en el flanco interior de la curva, lo que compensa notablemente la tendencia a la *sobreelevación* característica en las curvas horizontales. Por otro lado la misma inercia del fluido en el caso de alta sinuosidad (bajo radio de curvatura) hace que las líneas de corriente se encuentren con la pared exterior del canal, lo que las obliga a retomar la dirección paralela al eje del canal, esto explica que la *sobreelevación* se ve aumentada conforme disminuye el radio de curvatura (figura 1.2).

En cuanto a la distribución vertical y horizontal de la velocidad longitudinal (v) el lector puede tener referencia de múltiples autores acerca de la forma aproximadamente parabólica que tienen dependiendo de las condiciones de flujo, con la característica de valer cero junto a las paredes y plantilla del canal.

Se podría afirmar que la aparición de un componente vectorial de aceleración adicional llamado *aceleración centrífuga* es la principal causa de que el flujo en curvas horizontales sea distinto del de trayectorias rectilíneas. El fenómeno de la aceleración centrífuga es una característica física común a todo

cuerpo con masa distinta de cero que siga una trayectoria curvilínea. Toda aceleración está dada por $\frac{dv}{dt}$

(variación de la velocidad en un lapso de tiempo). La velocidad es un vector, por tanto, hablar de su variación es hablar de un cambio en su magnitud y/o en su dirección y/o en su sentido. En el caso del canal curvo la aceleración centrífuga aparece principalmente por el cambio en la dirección de la velocidad longitudinal del agua.

Una trayectoria curvilínea se puede representar como un fragmento de circunferencia con sus respectivos radio y centro de circunferencia, mientras más aguda sea la curva menor es el radio característico (una trayectoria rectilínea tiene radio de curvatura infinito) y la aceleración centrífuga siempre está en dirección ortogonal a la trayectoria y en sentido opuesto al centro de curvatura.

El componente de velocidad que induce el vector de aceleración centrífuga \vec{a}_c es también en dirección radial respecto de la curva, obligando así a las partículas de agua a desplazarse transversalmente respecto del eje del canal. La *velocidad radial o transversal* (u) solamente haría que el fluido se desviara de la trayectoria curvilínea, para esto la pared exterior y el *bordo libre* del canal impiden tal desplazamiento y confinan al líquido dentro del canal. Si el canal no tiene un bordo libre lo suficientemente grande, la *sobreelevación* del agua provocada por esta velocidad hace que desborde; en cambio, si el bordo libre es relativamente grande, el agua no desborda pues su *sobreelevación* está limitada por la cantidad de energía que trae consigo. Al quedar el agua restringida por el bordo libre a no alejarse más del centro de la curva, el perfil de velocidad transversal u se modifica e invierte gradualmente hacia el fondo del canal, de manera que las partículas cercanas a la superficie se desplazan al exterior de la curva, mientras que las partículas cercanas al fondo del canal se desplazan al interior. Esto significa que la velocidad transversal se equilibra a sí misma dividiendo su perfil en dos partes, la primera es aquella de los vectores que apuntan en sentido contrario al centro de curvatura y la segunda aquella de los vectores que apuntan hacia el centro de curvatura, es decir, la velocidad transversal u no desaparece pero el agua tampoco se sale del canal. Este flujo en dirección radial se conoce como *flujo secundario*.

El flujo secundario debe de ser tomado en cuenta ya que, como se verá más adelante, provoca pérdidas de energía de un orden similar a las debidas al flujo rectilíneo, a pesar de tener un perfil de velocidades menores.

Como se observa en la figura 1.3, las líneas de corriente del flujo secundario tienen forma parecida a círculos concéntricos deformados según la geometría del canal.

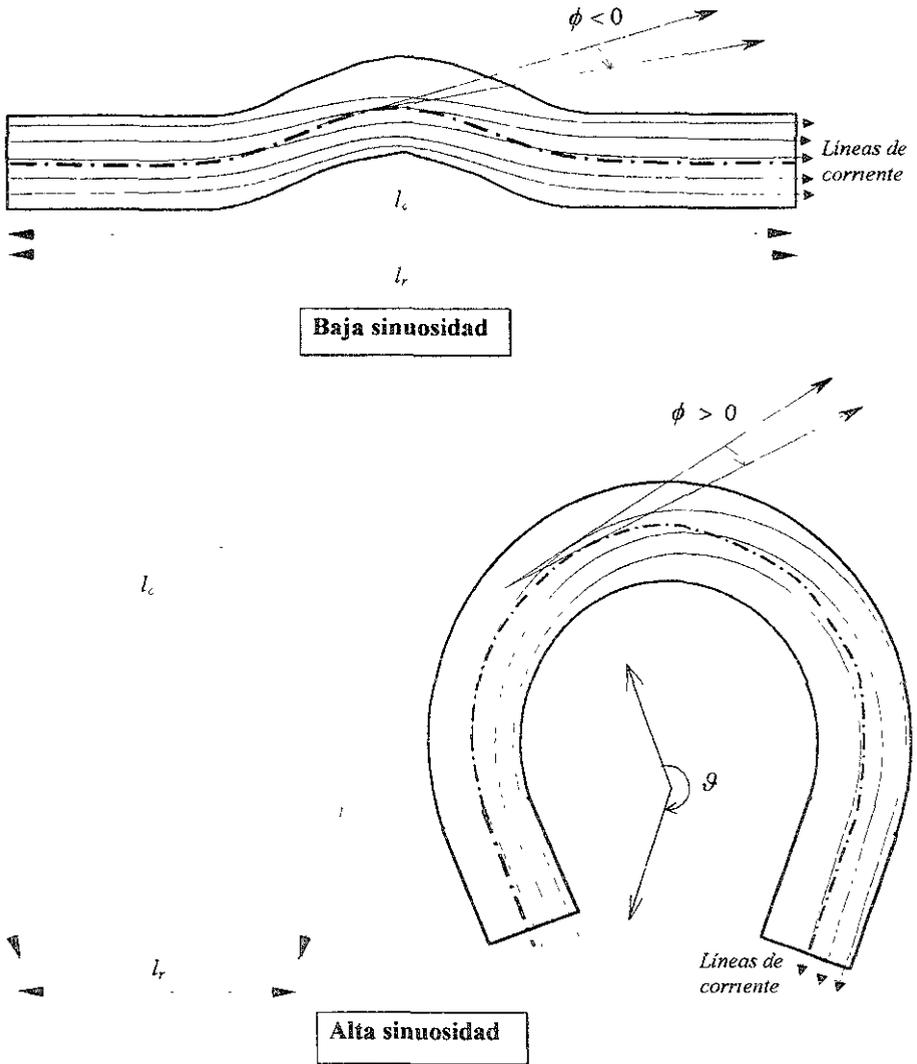


Figura 1.2 Distintas condiciones de sinuosidad, vistas en planta

La *sobreelevación* ΔH mencionada, es provocada por la velocidad transversal y significa un aumento del nivel del agua en el lado exterior del canal. Como se observa en la figura 1.4, la sobreelevación conlleva a una depresión al interior de la curva por simple conservación de la materia.

Si se considera a su vez el componente de velocidad tangencial (longitudinal) a la curva que tienen todas las partículas del agua, la suma de vectores da por resultado un flujo helicoidal. El flujo helicoidal tiene el aspecto de una espiral y es más fácil de observar si al agua se le deja caer momentáneamente algún líquido colorante al inicio de una curva.

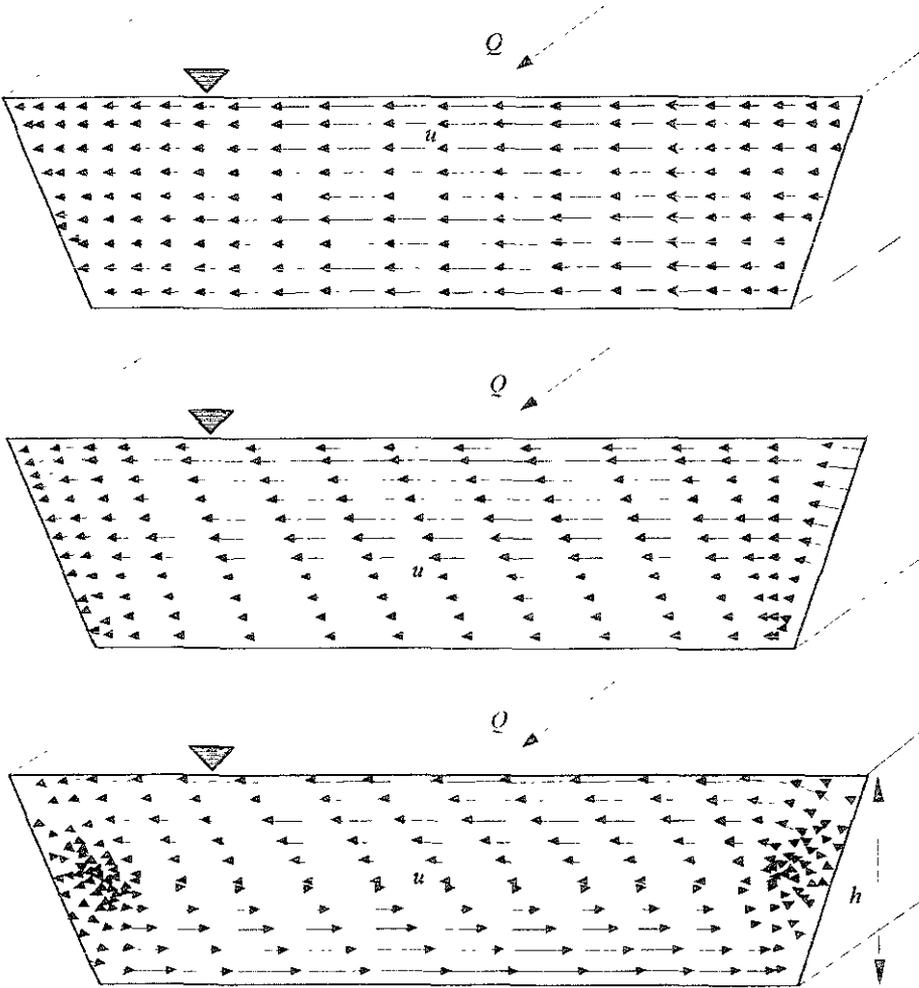


Figura 1.3 Esquema representativo de la evolución del campo vectorial de velocidades transversales u o flujo secundario

El flujo helicoidal es de interés porque su presencia agrega términos referentes al esfuerzo cortante y al cambio en la cantidad de movimiento radial a las ecuaciones de movimiento, los cuales influyen a su vez en la sobreelevación del agua.

Por otro lado, junto con la redistribución de velocidades tangenciales que se menciona antes, este flujo helicoidal induce una fuerte turbulencia en el agua debida al cambio de dirección, misma que para el canal es un factor de desgaste en sus superficies y junto con la sobreelevación constituyen un factor de resistencia al avance

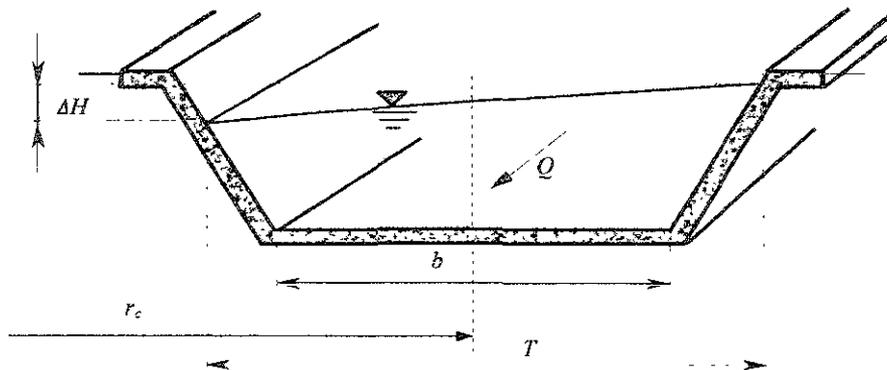


Figura 1.4 Esquema representativo de la sobreelevación en un canal curvo

En la figura 1.5 se muestran los perfiles aproximados que adquieren las velocidades de interés u y v .

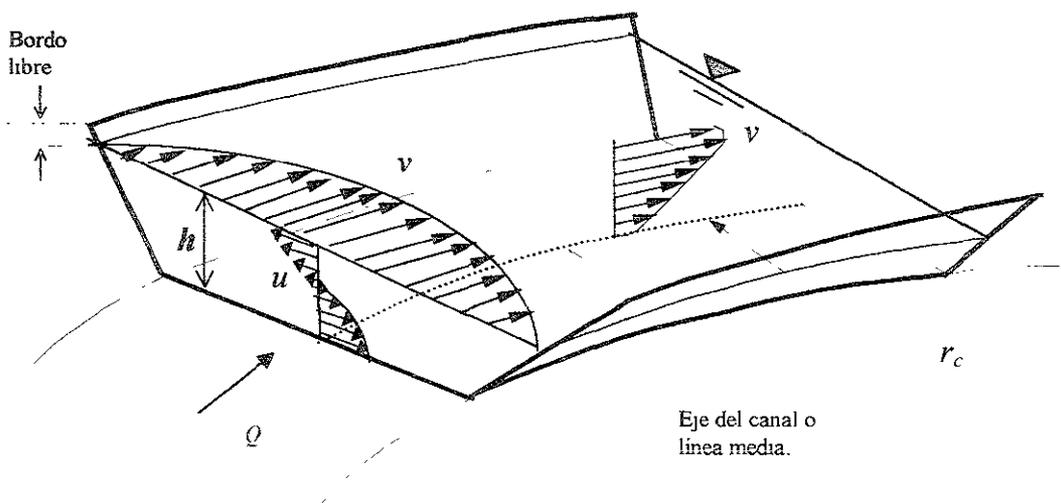


Figura 1.5 Esquema representativo de la distribución de la velocidad longitudinal v y de la velocidad transversal u .

En la figura 1.6 se esquematiza la forma del flujo helicoidal de una partícula de agua.

Dependiendo de la geometría del canal, de su pendiente transversal y de la velocidad del agua en una curva, es posible que se dé otro fenómeno debido al flujo secundario conocido como *separación de flujo* en la pared interior del canal, como su nombre lo indica, el gasto circulante puede llegar a desprenderse totalmente de la pared interior del canal, especialmente si la *aceleración centrífuga es muy alta* por tanto es un fenómeno más característico del flujo supercrítico que del subcrítico

Cabe mencionar que todas las variables dimensionales que se manejan en esta tesis así como las ecuaciones en que se usan, están consideradas en *unidades del sistema internacional* por ser las más convenientes

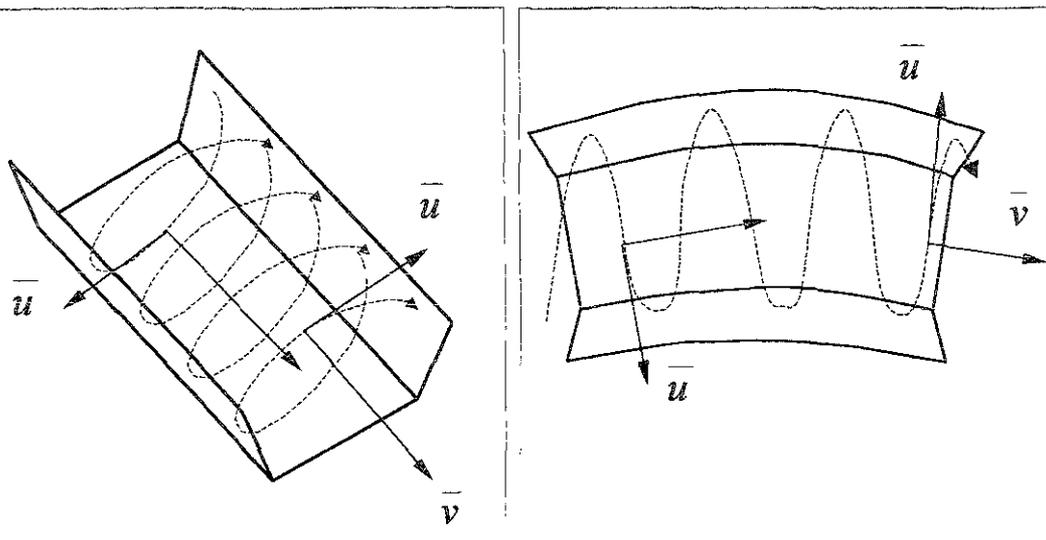


Figura 1.6 Representación gráfica del flujo helicoidal

Dos parámetros importantes que se consideran en la hidráulica de canales y que en esta tesis se mencionarán en varias ocasiones son:

Número de Reynolds

$$Re = \frac{R_h V_m}{\eta} \tag{1.1.2}$$

donde η es la viscosidad cinemática, R_h el radio hidráulico (magnitud que toma en cuenta la forma del canal), V_m la velocidad media obtenida del tirante h_m sobre el eje del canal y la ecuación de continuidad

El número de Reynolds es una referencia de los efectos de las fuerzas viscosas y de gravedad con relación a las fuerzas de inercia internas del flujo. Según Sotelo (1976) los rangos para el número de Reynolds son.

Flujo laminar	$Re < 500$
Flujo de transición	$500 < Re < 2000$
Flujo turbulento	$2000 < Re$

En otra de sus obras bibliográficas, Sotelo (1974) proporciona la gráfica para determinar la viscosidad cinemática para el agua a presión atmosférica igual a la del nivel del mar y para un amplio rango de temperaturas. Por ejemplo para una temperatura de 20°C la viscosidad cinemática es $\eta = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Número de Froude

$$Fr = \frac{V_m}{\sqrt{g \frac{A}{T}}} \tag{1.1.3}$$

donde A es el área hidráulica y T el ancho de la superficie libre

El número de Froude es un indicador de la proporción entre las fuerzas de inercia en la dirección del desplazamiento neto del agua y las fuerzas gravitacionales que la afectan (su peso) En el flujo *subcrítico* tienen más preponderancia las fuerzas gravitacionales y el flujo se ve relativamente lento, mientras que en el régimen *supercrítico* dominan las fuerzas inerciales y el flujo se ve relativamente rápido

El número de Froude siempre es mayor o igual que cero y los intervalos son

Flujo subcrítico (lento)	$Fr < 1$
Flujo crítico	$Fr = 1$
Flujo supercrítico (rápido)	$Fr > 1$

Factor de Fricción

En adelante se manejará como factor de fricción a f (de Darcy-Weisbach), el cual depende de las condiciones de flujo, por tanto, al analizar distintas secciones transversales de un canal f va cambiando de valor Es sabido que el factor de fricción depende directamente del número de Reynolds, aunque no se ha podido obtener exclusivamente de ecuaciones de movimiento, sino que se han tenido que crear fórmulas a partir de observaciones experimentales. En este texto se consideran como apropiadas las fórmulas que originalmente desarrollaron distintos autores para el flujo uniforme

Para la zona laminar se tiene como buena aproximación que.

$$f = \frac{8g}{C^2} = \frac{24}{Re} = \frac{24\eta}{V_m R_h} \tag{1.1.4}$$

donde C es el factor de Chezy

Para la zona de transición vale la ecuación de Colebrook y White:

$$\frac{1}{f} = 2 \log \left(\frac{12R_h}{k_s} + \frac{Re \cdot f}{0.6375} \right) \tag{1.1.5}$$

k_s es la rugosidad equivalente que definen los autores de la ecuación 1.1.5 y que se puede consultar en la referencia de Sotelo (1976)

Para flujo turbulento se tiene la fórmula de Nikuradse para tubos adaptada a canales, parecida a la ecuación 1.1.5

$$\frac{1}{f} = 2 \log \left(\frac{12R_h}{k_s} \right) \tag{1.1.6}$$

Las ecuaciones 1.1.4, 1.1.5 y 1.1.6 son sólo algunas de las varias que distintos autores han propuesto. Las mas precisas suelen incluir gráficas y solución por tanteos Dado que en la mayoría de los casos las condiciones de flujo en canales son de *flujo turbulento*, se puede aplicar alguna de las varias fórmulas desarrolladas para estos casos. La más sencilla es la de Manning – Strickler:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \tag{1.1.7}$$

a su vez $f = \frac{8g}{C^2}$

n es el coeficiente de Manning con valores entre 0.009 y hasta 0.5, dependiendo del material de las paredes y plantilla del canal. El factor n se puede obtener consultando las tablas que de ese factor existen en casi cualquier libro de *Hidráulica de Canales*. La ecuación 1.1.7 no depende directamente del número de

Reynolds, así que la fórmula 1.1.7 se puede considerar limitada a condiciones de presión cercana a 1 atmósfera y temperatura ambiente, por lo cual las variaciones en la viscosidad cinemática no provocan un error significativo. Además, en el coeficiente de rugosidad (obtenido experimentalmente) ya está implícita la relación entre el canal y la viscosidad del agua.

No está dentro del alcance de este texto profundizar en detalles sobre la manera de obtener el factor de fricción, es por eso que se ha seleccionado la fórmula más sencilla

En la práctica se procura evitar los cambios bruscos de dirección, ya que traen consigo mayores pérdidas de energía y mayor desgaste de las paredes del canal (por los fenómenos descritos), así que lo más común es que se construyan cambios graduales de dirección

Muchos investigadores han hecho pequeños avances en el estudio de canales horizontalmente curvos, sin embargo, hasta inicios del siglo XXI la naturaleza del fenómeno no ha sido del todo entendida y resulta difícil analizarlo matemáticamente.

Se conoce como *curva horizontal* al cambio gradual de dirección horizontal, y específicamente es el caso que interesa en esta tesis. En adelante se hará referencia a ella simplemente como *curva*, ya que no se hará más alusión a curvas en plano vertical o combinadas. Debido a que el flujo en curvas llega a ser sumamente complicado de estudiar debido a la cantidad de variables que intervienen en su comportamiento, se tendría que hacer un verdadero tratado de varios tomos para poder analizar todos los casos y condiciones que tienen que afrontar los ingenieros hidráulicos. Por tanto se decidió reducir el objetivo de esta tesis al caso de curvas de canales con flujo en régimen subcrítico. El caso de flujo subcrítico tiene un detalle de interés y es la formación de un ligero remanso aguas arriba de una curva, el cual se explica con más detalle más adelante

1.2 Importancia de la solución

No es de esperarse que las pérdidas de energía y sobreelevación por flujo en curvas sean muy grandes, más que en conducciones de megaproyectos donde se manejan enormes gastos, sin embargo conocer de manera veraz cada parte de un sistema puede favorecer el llegar a soluciones y alternativas de problemas mayores que resueltos de manera empírica podrían derivar en situaciones de mayor riesgo o costo

La importancia de entender mejor los temas de esta tesis radica especialmente en el hecho de poder describir con más claridad y precisión el comportamiento de una estructura hidráulica común desde antes de construirla y verla físicamente en operación, o lo que es lo mismo, poder predecir con menor incertidumbre. Esta posibilidad es importante en lo referente al diseño, pues éste se vuelve de mejor calidad en cuanto a que se ajusta más a la realidad, además de que puede evolucionar en el sentido de una mayor optimización, que es a fin de cuentas uno de los intereses permanentes de todas las ingenierías

La necesidad de un modelo matemático más preciso está más bien dada por lo importante que resulta el tener un método racional para describir cualquier fenómeno natural que un ingeniero enfrenta.

1.3 Objetivo del trabajo

Con esta tesis se pretende hacer en principio una revisión del *Estado del Arte*, es decir, repasar la manera en que actualmente se trata el asunto del flujo en curvas de canales artificiales de cualquier sección transversal y con flujo en régimen subcrítico, algunos de los métodos que existen, qué hipótesis se hacen, cuáles son las variables que se consideran y qué tan racionales o empíricos son los métodos aplicados a los dos fenómenos de mayor interés (sobre elevación y las pérdidas totales de energía). Una vez revisado el estado del arte, se hace un análisis de una metodología alternativa a las del capítulo anterior y a partir de ella se estructura la manera de aplicarla buscando dar buena descripción y predicción de los fenómenos de interés, es decir otro método, el cual es la esencia de esta tesis. Este método está basado en planteamientos teóricos de autores con buena experiencia en hidráulica de canales. El desarrollo se lleva a cabo en forma escrita y con el complemento de esquemas y figuras necesarias. Después, para una mejor comprensión, se propone un ejemplo numérico lo más realista posible, en el cual se aplica la metodología alternativa desarrollada.

Posteriormente se exponen conclusiones y observaciones de la teoría propuesta, su factible aplicación, las restricciones que se encontraron, las dificultades que conlleva, así como las recomendaciones que parezcan más apropiadas, con base en los resultados del ejemplo numérico, entre otras cosas. Esta sección de conclusiones es la más importante por ser lo que da sentido y validez a toda la tesis.

1.4 Aplicación de los resultados

Una tesis de licenciatura tiene muy baja probabilidad de trascender más allá de una biblioteca y de estar entre miles de tesis que rara vez serán revisadas antes de que el papel en que están impresas se ponga totalmente amarillo y la tesis se eche a perder por la humedad del ambiente, sin embargo, siempre cabe la posibilidad de que a alguien le sirva. En este caso, mi tesis puede serle útil a algún estudiante de ingeniería civil que quiera complementar su conocimiento en los temas que aquí se revisan y/o como punto de partida para hacer una investigación más a fondo, con más información y nuevos conocimientos que surjan al respecto en la posteridad, apoyados por las nuevas facilidades que brinde la tecnología (como la computación) a la investigación, lo que en el futuro podría generar otra tesis.

Por otro lado y momentáneamente más importante, esta tesis puede serle útil a algún ingeniero hidráulico que tenga que diseñar un canal curvo para diversos usos, como abastecimiento de agua potable, evacuación de aguas residuales, desalojo de aguas de inundación, etc, y que quiera contar con mayor referencia que las recomendaciones aplicadas en la actualidad (*Estado del Arte*), específicamente si quiere tener una idea de planteamientos más racionales y conclusiones más recientes que han obtenido autores e investigadores dedicados exclusivamente al área de la Ingeniería hidráulica. De esta manera, el ingeniero puede hacer un diseño que se ajuste más a la realidad y evitar así la necesidad de aplicar criterios muy conservadores, que generalmente son consecuencia de un escaso entendimiento del funcionamiento práctico de aquello que se está diseñando, además de que los criterios muy conservadores suelen implicar mayores costos en la construcción. Dicho en otras palabras, puede ahorrar dinero en lo que haga, que es lo que le da sentido a la ingeniería.

También puede servir como un criterio adicional para la revisión de un canal curvo ya diseñado o inclusive ya construido, para el cual se quiera prever su comportamiento ante un cambio en las condiciones de operación, ya que después de todo, muchas áreas de la ingeniería civil (si no es que todas) no tienen un criterio único de solución y diseño para cada tipo de problema.

2 AVANCES SOBRE EL TEMA (*Estado del arte*)

2.1 Algunas características del flujo helicoidal en curvas horizontales

El flujo espiral en canales fue observado primeramente por *Thomson* (1876) quien hizo una breve descripción a primera vista del fenómeno y desde entonces varios estudios se han hecho al respecto. Según *Chow* (1959) las características de este fenómeno se deben esencialmente a:

- ✓ *Fricción en las paredes del canal*, lo que causaría mayores velocidades cerca de la línea media o eje del canal, que junto a las paredes de éste, donde por definición la velocidad es nula.
- ✓ *Fuerza centrífuga*, la cual aparta a las partículas del movimiento meramente longitudinal y es también responsable de la sobreelevación.
- ✓ La presencia de un pequeño *componente vertical de velocidad* (w) al inicio de la curva y que favorecería el inicio del flujo secundario.

Si se observa el flujo espiral hacia aguas abajo, se verá que es en el sentido del reloj si la curva horizontal está dirigida a la izquierda y en sentido contrario si lo está a la derecha. Si la curva es seguida por un tramo recto largo, el flujo espiral persiste por una distancia considerable.

La mejor manera de analizar el flujo en curvas horizontales es mediante el sistema de coordenadas cilíndricas r (coordenada radial), θ (coordenada longitudinal curvilínea), y z (coordenada vertical) por ser con este sistema con el que las ecuaciones se complican menos. Para tramos rectilíneos anteriores y posteriores es más conveniente un sistema rectangular con x (coordenada longitudinal rectilínea), y (coordenada transversal) y z (coordenada vertical).

De los trabajos previos de *Shukry* (1950), *Chow* (1959) menciona algunas observaciones que hizo de los factores que influyen en la intensidad del flujo secundario (representado por la configuración de la velocidad transversal u).

Si todas las líneas de corriente se mantuvieran paralelas (yendo en trayectoria curvilínea) al eje longitudinal θ , la proyección de todos los vectores de velocidad absoluta sobre la sección sería nula, pero como no se mantienen paralelas sí existe el flujo secundario durante la curva. En condiciones de régimen subcrítico se dedujo que ' u ' es mayor con bajo número de Reynolds y viceversa con alto valor del número de Reynolds. Esto último quiere decir que el estado laminar hace al líquido más propenso a generar flujo secundario, en contraposición a la menor tendencia que hay con flujo turbulento; También se observó que u

decrece gradualmente si se incrementa la proporción $\frac{r_c}{b}$ = radio de curvatura en la línea media del canal /

ancho de plantilla y prácticamente alcanza un valor despreciable a partir de que $\frac{r_c}{b} = 3.0$; u decrece conforme

la proporción $\frac{h_m}{b}$ = tirante promedio en la sección / ancho de plantilla aumenta; u aumenta mientras mayor

sea el ángulo de desviación total que produzca la curva, de manera que desde $\frac{\theta}{180^\circ} = 0$ (tramo rectilíneo) a

$\frac{\theta}{180^\circ} = 0.5$, u se incrementa casi al doble de lo que se incrementa para el rango de 0.5 a 1.0.

El flujo espiral ocurre tanto en cauces de ríos como en canales artificiales, sin embargo, puede casi no existir si la fricción debida a la rugosidad de las paredes y plantilla del canal es muy alta, lo cual es común en ríos anchos.

2.2 Pérdidas de energía

2.2.1 Ocurrencia

La existencia de un flujo secundario adicional en las trayectorias curvilíneas hace que las pérdidas netas de energía se vean incrementadas. Dicho en otras palabras, el factor de fricción característico del flujo aumenta. Para esto es importante que el lector reconozca la diferencia que existe entre el *coeficiente de rugosidad* y el *factor de fricción*. El *coeficiente de rugosidad* es un número que representa las asperezas de las paredes y plantilla de un canal (o de una tubería en el caso de conductos a presión), y proporciona una referencia de la resistencia que éstas inducen al flujo. Por otro lado el *factor de fricción* es también un número adimensional que representa la resistencia y pérdidas de energía totales que afectan al flujo y además de la rugosidad y parámetros geométricos del canal, considera las condiciones de flujo dadas por el número de Reynolds.

Respecto de las pérdidas de energía *Chow* (1959) menciona los planteamientos que hizo *Müller* (1943) acerca del comportamiento de la línea de energía en curvas horizontales, tanto para régimen subcrítico como supercrítico. Resulta interesante el comportamiento del perfil de la superficie libre del agua sobre el eje del canal (la línea media del canal) con la respectiva línea de energía que fue observado (figuras 2.1 y 2.2) por *Müller* (1943) en pruebas experimentales.

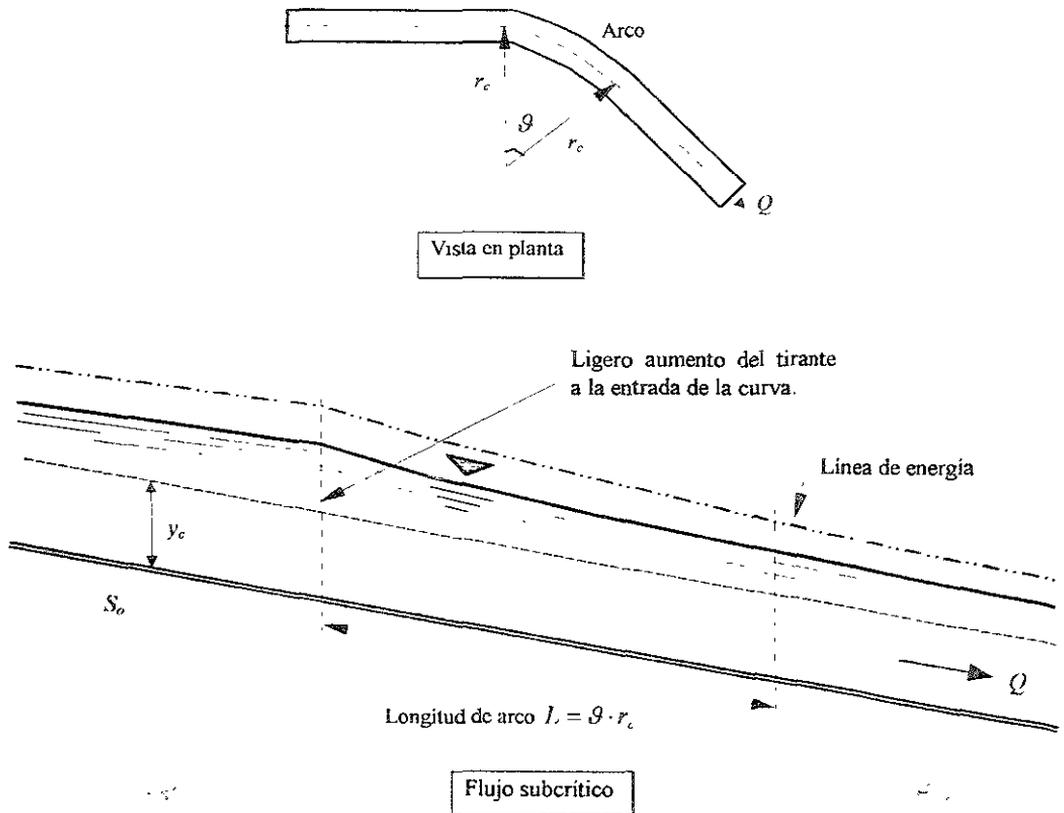
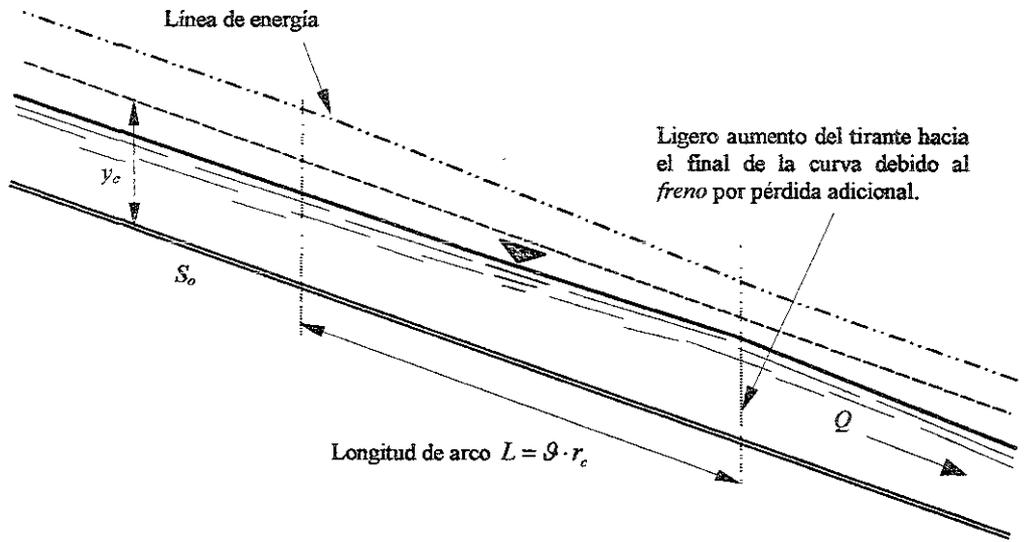


Figura 2.1 Formación de remanso en régimen subcrítico con tirante superior al normal

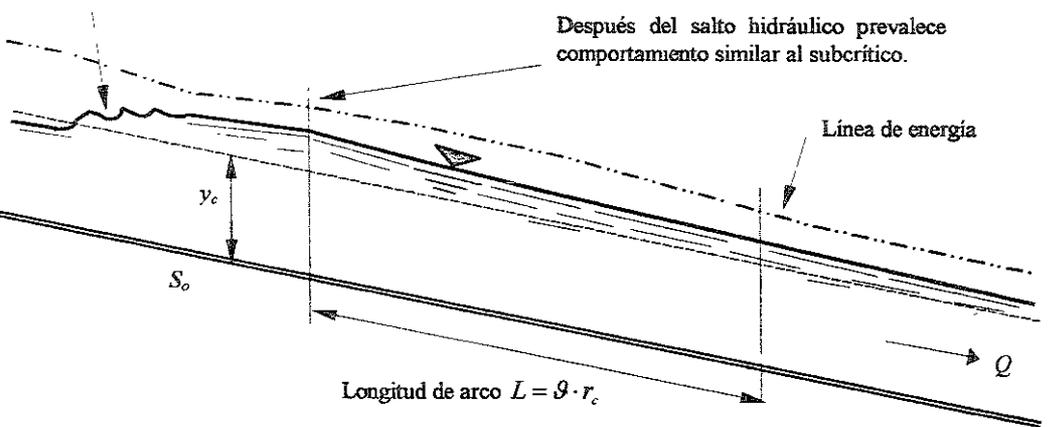


a) Flujo supercrítico

Pequeño salto hidráulico consecuencia del cambio de régimen.

Después del salto hidráulico prevalece comportamiento similar al subcrítico.

Línea de energía



b) Flujo subcrítico cercano al crítico

Figura 2.2 Formación de remanso en régimen cercano al crítico y supercrítico

La formación de un ligero remanso a la entrada de una curva se observa cuando hay régimen subcrítico como consecuencia del freno que provoca el aumento en las pérdidas.

En el caso de régimen supercrítico (figura 2.2) el agua ingresa a la curva con alta velocidad, no obstante, la pérdida de energía adicional impide al agua mantener sin problema su estado inicial, por lo que hacia el final de la curva se da la formación de un ligero remanso que hace que el agua que el agua parcialmente se *frene* y entonces continuar más o menos como inició ya que el gradiente vuelve a ser menor. Por último, en el caso de régimen supercrítico cercano al crítico, se presenta antes de la curva un pequeño salto hidráulico inducido por el mismo freno que provoca la curva para continuar aguas abajo el comportamiento similar al de régimen subcrítico.

Cuando el régimen es supercrítico se observó que la alta velocidad longitudinal v hace que el agua, antes de adoptar la trayectoria curvilínea del canal, se *impacte* inicialmente con la pared exterior del canal y *rebote* hacia la otra pared aguas abajo. Esta situación que se repite a lo largo de la curva se ve como *ondas cruzadas*, una especie de pequeños saltos hidráulicos en régimen supercrítico, fenómeno que en régimen subcrítico prácticamente no existe y que en el supercrítico incrementa las pérdidas de energía. La figura 2.3 da una leve idea de lo mencionado

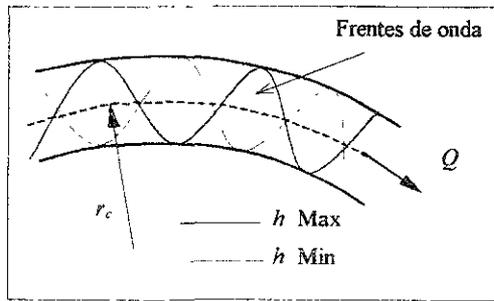


Figura 2.3 Ondas cruzadas en régimen supercrítico (vista en planta)

Regresando al régimen subcrítico, se presentan ahora algunos procedimientos comúnmente usados para cuantificar las pérdidas de energía.

2.2.2 Chow (1959)

Consideraciones e hipótesis

- La pérdida total de energía debida a la trayectoria curvilínea es directamente proporcional a la carga de velocidad longitudinal del fluido.
- Método básicamente empírico

Modelo matemático

Chow (1959) considera que la pérdida total de energía se conoce multiplicando a la carga de velocidad por un factor f_c .

$$h_c = f_c \frac{V^2}{2g} \tag{2.2.1}$$

El factor f_c depende de $\frac{r_c}{b}$, $\frac{h}{b}$, $\frac{g}{180^\circ}$ y el número de Reynolds Re , es decir de cuatro variables, para lo cual se usa el grupo de gráficas obtenidas experimentalmente por el mismo Shukry (1950) y que Chow (1959) retoma y expone en su libro. El coeficiente f_c se obtiene en principio a partir de dos de las variables y

posteriormente se ajusta de acuerdo a las otras dos, yendo de una gráfica a otra y haciendo las interpolaciones necesarias hasta cerrar en un solo valor.

Observaciones y Comentarios

El lector puede consultar las gráficas y un ejemplo en la referencia correspondiente para conocer más sobre la aplicación del método. Es un método tedioso por lo tardado que resulta estar interpolando en las pequeñas gráficas y porque se requieren al menos cinco o seis iteraciones para llegar a resultados concluyentes. Por otro lado las gráficas son muy irregulares como para ajustarlas a ecuaciones, menos aún a un algoritmo para computadora que abarque el método completo y que lo haría más rápido. Otra observación es que el método se basa exclusivamente en gráficas obtenidas empíricamente, lo que hace que su exactitud sea dudosa cuando se aplica en canales a condiciones muy distintas a las de los canales usados para generar el método, ya que en éste último caso el flujo fue con números de Reynolds pequeños.

2.2.3 *Escriba, B. D. (1988)*

Consideraciones e hipótesis

- Las pérdidas por curvas horizontales son pequeñas.
- Las pérdidas de energía totales son iguales a las pérdidas en flujo rectilíneo en el mismo canal pero con rugosidad ligeramente mayor.

Modelo matemático

Cualquier método que se utilice para cuantificar las pérdidas en tramos rectilíneos considera el factor de rugosidad un poco mayor. Uno de los más comunes es la fórmula de Manning. Por ejemplo, un canal de hormigón de tamaño regular con un gasto entre 5 y 15 metros cúbicos por segundo con curvas quebradas angulosas frecuentes de unos 10° en cada desvío, puede implicar un valor de $n = 0.0155$, en circunstancias que el mismo canal recto tendría $n = 0.0135$, aproximadamente. En los codos (cambios bruscos de dirección de 90 grados), en caso de que se les quiera calcular individualmente, se pueden tomar valores de k_c (coeficiente de pérdidas por accesorio) iguales a los de las tuberías.

La fórmula de Manning:

$$V_m = \frac{R_h^{2/3} S_o^{1/2}}{n} \quad (2.2.2)$$

donde

S_o , pendiente longitudinal de la plantilla,

R_h , radio hidráulico,

n coeficiente de Manning,

V_m velocidad longitudinal media.

Observaciones y Comentarios

Se trata de un método muy práctico y de fácil aplicación, pero con pobre sustento teórico y experimental. Hace falta por lo menos una ecuación o gráfica que justifique el incremento en el coeficiente de rugosidad, pues de otra manera se queda en el mero criterio de quién lo aplique sin más fundamento que su propia apreciación.

2.2.4 USBR (1988)

Consideraciones e hipótesis

- Método puramente empírico.
- Las pérdidas de energía son directamente proporcionales a la carga de velocidad.
- Las pérdidas de energía son directamente proporcionales al producto del ángulo total de la curva por un coeficiente más o menos constante.
- El cociente radio de curvatura entre el ancho de la superficie libre del agua $\frac{r_c}{T}$ fue generalmente mayor de 5 y hasta 22.1 en los canales en que se hicieron mediciones y se obtuvo el coeficiente de pérdida k_c recomendado

Modelo matemático

Los análisis hechos por el *U.S. Bureau of Reclamation* mostraron que la pérdida de energía por curvas horizontales h_c se puede expresar como un coeficiente igual a k_c veces la suma de los ángulos de deflexión $\Sigma\theta$ en un tramo y por la carga de velocidad h_v , es decir:

$$h_c = k_c (\Sigma\theta) \cdot h_v \quad (2.2.3)$$

Se encontró que las pérdidas por flujo curvilíneo horizontal se aproximaban lo suficiente cuando se consideraba $k_c = 0.001$; Por tanto, se puede usar la expresión

$$h_c = 0.001(\Sigma\theta) \cdot h_v \quad (2.2.4)$$

Cuando se tiene una curva con ángulo de 45° con una velocidad de 3 m/s, se obtiene $h_c = 0.0206$ m.

Si ocurren cuatro ángulos sucesivos de 22.5° , $\Sigma\theta = 4 \times 22.5^\circ = 90^\circ$ y velocidad $V_m = 3$ m/s, da una pérdida neta $h_c = 0.0412$ m.

Pérdidas de energía del mismo orden se obtienen si se usa la figura 2.4. Ésta se usa con el número de Froude de la sección inmediata aguas arriba de la curva. Se sube desde el eje de las abscisas hasta encontrar la curva que relaciona al tirante medio y el ancho de plantilla correspondientes también a la misma sección y se continúa horizontalmente al eje de las ordenadas para conocer el factor de fricción C_L , que se multiplica por la carga de velocidad h_v (ecuación 2.2.5).

$$h_c = C_L h_v \quad (2.2.5)$$

La diferencia entre los resultados de la ecuación 2.2.5 y el método gráfico de la figura 2.4 está dentro de un rango de 0% a 20% respecto al valor de la ecuación.

Observaciones y Comentarios

Igual que el método de *Escriba*, el del USBR es muy sencillo y puede ser válido por lo práctico que resulta, especialmente si se realizan proyectos con muchas curvas y cambios de dirección que de otra manera implicarían un lento análisis curva por curva. Sin embargo, el mismo USBR debería de complementarlo, ya que resulta difícil aceptar que el coeficiente k_c sea siempre igual a 0.001, pues es evidente que las pérdidas de energía no dependen exclusivamente del cambio total de dirección del agua. Por ello, el uso del método está totalmente restringido a canales similares a los usados en las pruebas del USBR.

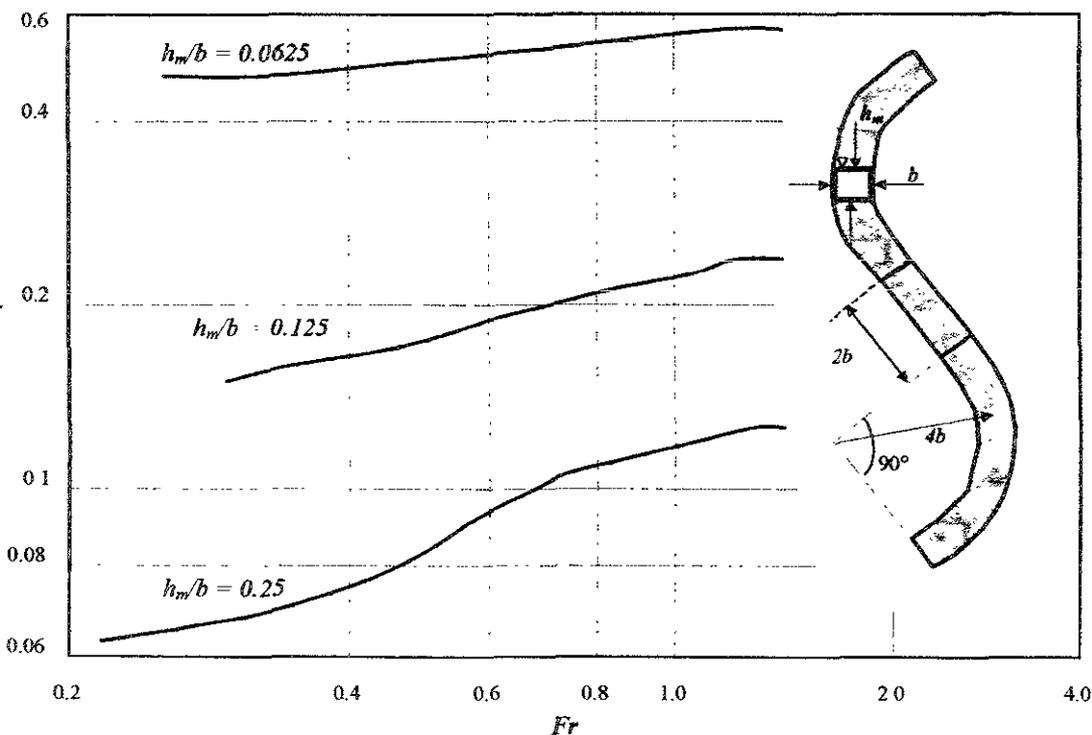


Figura 2.4 Gráfica del USBR para cuantificar pérdidas de energía en canales rectangulares a partir del número de Froude (Zipparo y Hasen (1993))

De la figura 2.4

h_m tirante promedio en una sección transversal,

T ancho del canal rectangular,

Fr número de Froude,

C_L coeficiente de pérdida por curva de 90°.

2.2.5 Rozovskii (1961)

Rozovskii (1961) fue uno de los primeros autores que estudiaron con detalle el problema de flujo subcrítico en curvas horizontales en canales y es normal que autores posteriores a él hagan alguna mención sobre sus trabajos. Rozovskii (1961) considera la cuestión de las pérdidas de energía desde el punto de vista de gradientes. Como el lector recordará, un gradiente está dado por un cociente de diferenciales con una dirección específica. Conforme hay un desplazamiento (variación en el denominador) en esa dirección, el numerador va cambiando de valor. Por ejemplo si se hace referencia a un gradiente de temperaturas de una fuente de calor, al alejarse una unidad longitudinal de la fuente, la temperatura disminuirá en una vez la magnitud del gradiente. El concepto de gradiente es aplicable en medios continuos, como el flujo en canales abiertos. Las pérdidas de energía se pueden visualizar como variaciones en la columna de agua representativa de la energía total del fluido por cada unidad de desplazamiento, ya sea en dirección longitudinal, transversal o incluso vertical, y eso son sus gradientes. Una vez que se tiene definido el sistema de coordenadas a considerar y el significado de los ejes, se pueden trazar los gradientes correspondientes.

Consideraciones e hipótesis

- Las pérdidas de energía por flujo longitudinal en curvas son iguales a las de tramos rectos.
- Se agregan las pérdidas por flujo transversal en forma de un gradiente transversal S'' .
- El gradiente transversal S'' depende directamente del número de Froude Fr y del tirante promedio h_m e inversamente del radio de curvatura r_c .
- El gradiente total es igual a la suma del gradiente longitudinal más el gradiente transversal

Modelo matemático

El mismo *Rozovski* (1961) llegó a la siguiente ecuación para curvas horizontales en canales rectangulares relativamente anchos

$$S'' = \left(12 \frac{\sqrt{g}}{C} + 30 \frac{g}{C^2} \right) \cdot \left(\frac{h_m}{r_c} \right)^2 Fr^2 \quad (2.2.6)$$

donde

S'' gradiente de energía debido a la circulación transversal,

g aceleración gravitatoria,

C factor de Chezy,

h_m tirante medio en una sección transversal,

r_c radio de curvatura del eje del canal,

Fr número de Froude = $\frac{V_m}{\sqrt{gh_m}}$

V_m velocidad promedio del flujo

En esta ecuación se observa la proporcionalidad directa entre la pérdida de energía y el cociente profundidad - radio de curvatura, así como el número de Froude (indicador de la relación entre la velocidad y la atracción gravitatoria). Al aumentar la rugosidad, aumenta S'' ya que disminuye el factor de Chezy

Observaciones y Comentarios

El mayor problema que implica usar el modelo matemático de *Rozovski* (1961) radica en la forma de valorar el factor de Chezy C , pues en este caso se requiere conocer el esfuerzo cortante a lo largo de la trayectoria curvilínea. De hecho el mismo *Rozovski* (1961) concluyó en los años sesenta que el problema de pérdidas de energía en curvas horizontales no podía considerarse aún resuelto y que requería mayor estudio, esto debido principalmente a las limitaciones existentes en cuanto a las mediciones experimentales de los esfuerzos cortantes. Probablemente sea válido utilizar las fórmulas para cuantificar C que expone *Sotelo* (1976) a partir de otros autores.

Hasta donde se obtuvo referencia, el modelo de *Rozovski* (1961) sí tiene un sustento teórico y no solamente empírico

2.2.6 Comparación experimental de métodos

Para precisar la magnitud del incremento de resistencia se han propuesto varios métodos a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, los cuales van desde ajustes sencillos a factores de fricción, (ajustes que son determinados de forma empírica) hasta fórmulas complejas con base en ecuaciones diferenciales dependientes de variables que tienen que ver con la geometría del canal y las condiciones de flujo, todo esto para predecir cuanta energía se perderá en una curva horizontal. Sin embargo los resultados que dan los distintos métodos suelen ser notablemente distintos, además de que más allá de las condiciones en que fueron desarrollados o probados, su confiabilidad es desconocida.

James (1994) hizo una revisión de varios métodos, para lo cual establece en principio el criterio de comparación a seguir. Para demostrar el efecto de las curvas en el transporte por canales y para proveer una base de comparación con los otros métodos, consideró inicialmente un escenario en el cual solamente hay pérdidas por fricción y el flujo es longitudinalmente uniforme.

En general, el gasto está dado por la ecuación de continuidad.

$$Q = AV_m \quad (2.2.7)$$

Para flujo uniforme e ignorando las pérdidas que no sean por fricción, el gradiente de energía puede ser representado por la pendiente de la plantilla S_o en dirección longitudinal, y la velocidad V_m puede ser estimada usando la ecuación de Manning con el factor de fricción f de Darcy-Weisbach.

$$V_m = \left(\frac{8gR_h S_o}{f} \right)^{1/2} = (C^2 R_h S_o)^{1/2} = \left(\frac{R_h^{2/6} R_h S_o}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{S_o} \quad (2.2.8)$$

R_h , radio hidráulico de la sección transversal,

S_o pendiente de plantilla,

f factor de fricción.

Con S_o conocida, la medición que se hace es del tirante medio h_m , de donde se obtienen el área, perímetro mojado y tirante.

▪ Método del servicio de conservación de los suelos (SCS) (1963)

El SCS propone que para conocer las pérdidas en canales *ondulados horizontalmente* se haga un ajuste al coeficiente de Manning n de acuerdo con la sinuosidad del canal multiplicando a n por un número fijo, el cual depende de

$$\zeta = \frac{l_c}{l_r} \quad (1.1.1)$$

ζ sinuosidad (adimensional),

l_c longitud a lo largo de la línea media del canal entre 2 puntos,

l_r longitud en línea recta entre los mismos 2 puntos.

$$\frac{n'}{n} = 1.0 \quad \text{para } \zeta < 2.2 \quad (2.2.9)$$

$$\frac{n'}{n} = 1.15 \quad \text{para } 2.2 \leq \zeta < 2.5 \quad (2.2.10)$$

$$\frac{n'}{n} = 1.30 \quad \text{para } \zeta \geq 2.5 \quad (2.2.11)$$

n' es el coeficiente de rugosidad ajustado. Debido a que n es proporcional a \sqrt{f} , a la corrección hay que sacarle raíz cuadrada cuando se use la ecuación 2.2.8.

▪ **Método linearizado del SCS (1991)**

Si se traza una gráfica con las correcciones del método anterior del SCS, se observan discontinuidades en los límites de los rangos de sinuosidad establecidos, con la consecuentes ambigüedad e incertidumbre. Para resolver ese problema, posteriormente el mismo SCS emitió otro método linearizado

$$\frac{n'}{n} = \left(\frac{f'}{f} \right)^{1/2} = 0.43\zeta + 0.57 \quad \text{para } \zeta < 2.7 \quad (2.2.12)$$

$$\frac{n'}{n} = \left(\frac{f'}{f} \right)^{1/2} = 1.30 \quad \text{para } \zeta \geq 2.7 \quad (2.2.13)$$

donde f' es el factor de Darcy-Weisbach ajustado.

▪ **Método de Toebes y Sooky (1967)**

A partir de resultados experimentales en un canal con sinuosidad de 2.09 estos dos autores propusieron un ajuste al factor de fricción f . Por abajo del valor crítico del número de Froude, el ajuste depende exclusivamente del radio hidráulico de acuerdo con la expresión

$$\frac{f'}{f} = 1.0 + 6.89R_h \quad (2.2.14)$$

No es de esperarse que esta ecuación tenga validez general ya que está basada en resultados experimentales generados a partir de un valor único de sinuosidad.

▪ **Método de Leopold et al. (1960)**

Este grupo de autores presentó una relación gráfica entre dos cocientes, el primero es el del esfuerzo de frontera adicional inducido por la curvatura del canal entre el esfuerzo de frontera asociado con la fricción longitudinal $\frac{\tau_b}{\tau_o}$; el segundo cociente es el del ancho del canal entre el radio de curvatura medio $\frac{b}{r_c}$. Su relación queda expresada en la ecuación 2.2.15.

$$\frac{\tau_b}{\tau_o} = 2.632 \cdot \left(\frac{b}{r_c} \right) - 0.526 \quad (2.2.15)$$

Esta ecuación se aplica para régimen subcrítico y parece ser especialmente buena para números de Froude en torno a 0.5, sin embargo, existe la dificultad de cuantificar los esfuerzos cortantes que no especifican en la referencia. James y Wark (1992) facilitaron la solución desarrollando una relación entre los esfuerzos cortantes de frontera con los gradientes de energía a partir de la ecuación 2.2.15, de donde concluyeron un ajuste al factor de fricción como sigue

$$\frac{f'}{f} = 2.632 \cdot \left(\frac{b}{r_c} \right) + 0.474 \quad (2.2.16)$$

De acuerdo con la ecuación 2.2.16, $\frac{f'}{f}$ podría ser menor de 1.0, lo cual no es nada realista ya que f no puede reducirse, así que 1.0 debe ser tomado como el valor mínimo. Esta anomalía surgió probablemente del hecho de que la relación entre $\frac{\tau_b}{\tau_o}$ y $\frac{b}{r_c}$ presentada por *Leopold et al* (1960) está basada en solamente 4 puntos de datos experimentales, por lo que requiere mayor investigación a futuro para pequeños valores de $\frac{b}{r_c}$.

▪ Método de *Mockmore* (1944)

Mockmore analizó datos de modelos de canales y ríos para cambios de dirección entre 90° y 180° y propuso un modelo matemático basado en la ecuación

$$h_c = \left(2 \frac{b}{r_c}\right) \cdot \frac{V_m^2}{2g} \quad (2.2.17)$$

h_c energía perdida en una curva horizontal (mayor que la pérdida sola por fricción).

A partir de las ecuaciones 2.2.17 y 2.2.8 *James y Wark* (1992) concluyen otro método de ajuste al factor de fricción mediante la ecuación

$$f' = f + \frac{8bR_h}{Lr_c} \quad (2.2.18)$$

donde L es la longitud de la curva en la línea media del canal.

▪ Método de *Agarwal et al.* (1984)

Agarwal (1984) desarrolló un análisis de regresión sobre datos previamente publicados de canales aluviales para definir una corrección a las pérdidas por curvas horizontales. La corrección se realiza propiamente sobre la velocidad calculada para el tramo recto inmediato aguas arriba, la cual se modifica de acuerdo con la ley de resistencia de *Ranga Raju* (1970), ley obtenida exclusivamente para ríos. La velocidad así obtenida se divide entre

$$\phi = 2.16 \cdot f_{*R}^{-0.042} \quad (2.2.19)$$

y resulta:

$$f_{*R} = \text{Re} \left(\frac{\mathcal{G}}{180^\circ} \right)^{-4.65} \left(\frac{b}{h_m} \right)^{1.11} \left(\frac{r_c}{b} \right)^{1.38} Fr^{9.29} \quad (2.2.20)$$

donde

Re número de Reynolds definido en el capítulo 1,

\mathcal{G} ángulo del cambio total de dirección debido a la curva,

h_m tirante medio.

No se consideró necesario averiguar la ley de resistencia de *Ranga Raju* (1970) debido a que esta tesis se enfoca más a canales artificiales y a que los resultados que genera el método de *Agarwal* (1984) son poco precisos, lo cual podrá constatarse más adelante

▪ **Método de Chang (1983)**

Chang (1983) derivó un modelo analítico general para las pérdidas por unidad de longitud del canal asociadas con el flujo transversal. Para secciones rectangulares con flujo uniforme la forma más simplificada del modelo de *Chang* (1983) es

$$S'' = \left(\frac{2.86 f^{1/2} + 2.07 f}{0.565 + f} \right) \cdot \left(\frac{h_m}{r_c} \right)^2 Fr^2 = S' \quad S' \quad (2.2.21)$$

donde

S'' gradiente de energía asociado al flujo transversal,

S' gradiente de energía total,

f' gradiente de energía asociado al flujo longitudinal (fricción)

Si por otro lado se considera que una forma de ajustar el factor de fricción f' de Darcy-Weisbach es mediante la proporción del gradiente asociado al flujo longitudinal sobre su diferencia respecto al transversal. Se tiene

$$\frac{f'}{f} = \frac{S'}{S' - S''} = \frac{1}{S' - S''/S'} = \frac{1}{1 - \frac{S''}{S'}} \quad (2.2.22)$$

Si se considera flujo uniforme, S' es igual a la pendiente del canal S_0 y S'' se obtiene de la ecuación 2.2.21. El método es aplicable cuando la circulación secundaria se considera completamente establecida.

▪ **Método de Chang modificado (1984)**

El agua al entrar en una curva suele requerir una distancia considerable para establecer el flujo secundario del todo y su decaimiento se da ya en la zona rectilínea aguas abajo de la curva. Si sigue otra curva, hay una tendencia a que la circulación transversal sea brevemente en la superficie del agua y hacia el interior de la curva mientras se invierte y establece en sentido contrario. Por todo esto, el gradiente de energía asociado a la circulación secundaria debe ser menor al que se predice asumiendo siempre flujo completamente establecido. Para esto el mismo *Chang* (1984) propuso un modelo matemático para predecir la formación y decaimiento del flujo transversal y que el lector puede conocer a detalle en el siguiente capítulo de ésta tesis.

James (1994) simplificó lo propuesto por *Chang* (1984) y lo redujo a asumir flujo uniforme en una serie de meandros, esto le permitió calcular un factor de corrección D , el cual se aplica al gradiente transversal obtenido con la ecuación 2.2.21. La corrección está basada en la hipótesis de *Chang* (1984) de que el patrón del flujo secundario es constante durante su formación y decaimiento, según la expresión

$$D = \frac{u'_m}{u'} \quad (2.2.23)$$

donde

u' velocidad radial superficial correspondiente al flujo transversal completamente formado,

u'_m velocidad radial superficial promedio durante toda la curva

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{\left(1 - \frac{DS''}{S'} \right)} \quad (2.2.24)$$

D es un valor menor de 1, por lo que hace menos distinta a f' de f normal

2.2.7 Pruebas

Los métodos de predicción mencionados fueron aplicados a tres grupos de canales en tres lugares distintos y ninguno de los grupos fue usado en el desarrollo de cualquiera de los métodos. Uno de ellos fue probado en Wallingford, UK y consistió en un canal trapecial como se muestra en la figura 2.5.

Simuosidad = 2.37
 4 curvas
 Pendiente de plantilla = 0.00073

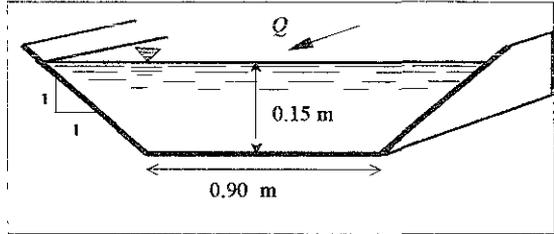


Figura 2.5 Esquema del canal usado para la comparación de distintos métodos

Las demás pruebas fueron en la Universidad de Aberdeen y en un laboratorio del US Army Corps of Engineers. Cada uno de los métodos descritos fue aplicado en forma iterativa para predecir el gasto circulante y el gradiente total de energía, haciendo simultáneamente el ajuste del factor de fricción f de acuerdo con el número de Reynolds

La figura 2.6 muestra la comparación entre valores medidos y calculados de gasto circulante para distintos tirantes (la relación entre gasto y tirante que se presente es dependiente de las pérdidas de energía que se den a lo largo del canal) en el modelo de la figura 2.5

Grupo de datos	Solo fricción	SCS (1963)	Toebes & Sooly (1967)	Leopold (1960)	Agarwal (1984)	Mockmore (1944)	Chang (1983)	Chang modificado (1984)	ISCS (1991)
SERC $\zeta = 2.37$	9.54	6.38	14.60	13.35	15.97	33.69	5.36	1.19	7.36
Aberdeen $\zeta = 2.21$	19.80	7.34	8.84	7.61	16.29	51.73	23.84	3.91	8.94
Aberdeen $\zeta = 2.4$	11.90	5.24	2.69	12.84	30.57	46.12	27.71	9.13	7.36
Aberdeen $\zeta = 3.06$	28.66	6.18	16.07	12.68	43.63	37.42	34.27	10.78	6.18
USACE ancho	37.30	14.53	4.50	11.70	4.79	30.13	6.19	16.29	17.68
USACE angosto	10.89	11.01	13.09	10.32	25.81	20.59	16.17	4.61	7.77
Todos los datos	16.17	7.27	10.22	11.36	22.80	39.43	19.04	5.71	8.07
		7.38							

Cuadro 2.1 Resumen de porcentajes de error absoluto en las predicciones de las pérdidas de energía con distintos métodos.

El porcentaje de error en cada predicción se calculó con la ecuación

$$\%error = 100 \cdot \frac{(Q_p - Q_m)}{Q_m} \tag{2.2.25}$$

donde Q_p gasto predicho,
 Q_m gasto aforado

Los promedios de los valores absolutos de porcentaje de error para cada grupo de datos y para todos los datos juntos están enlistados en el cuadro 2.1 de acuerdo con el método aplicado

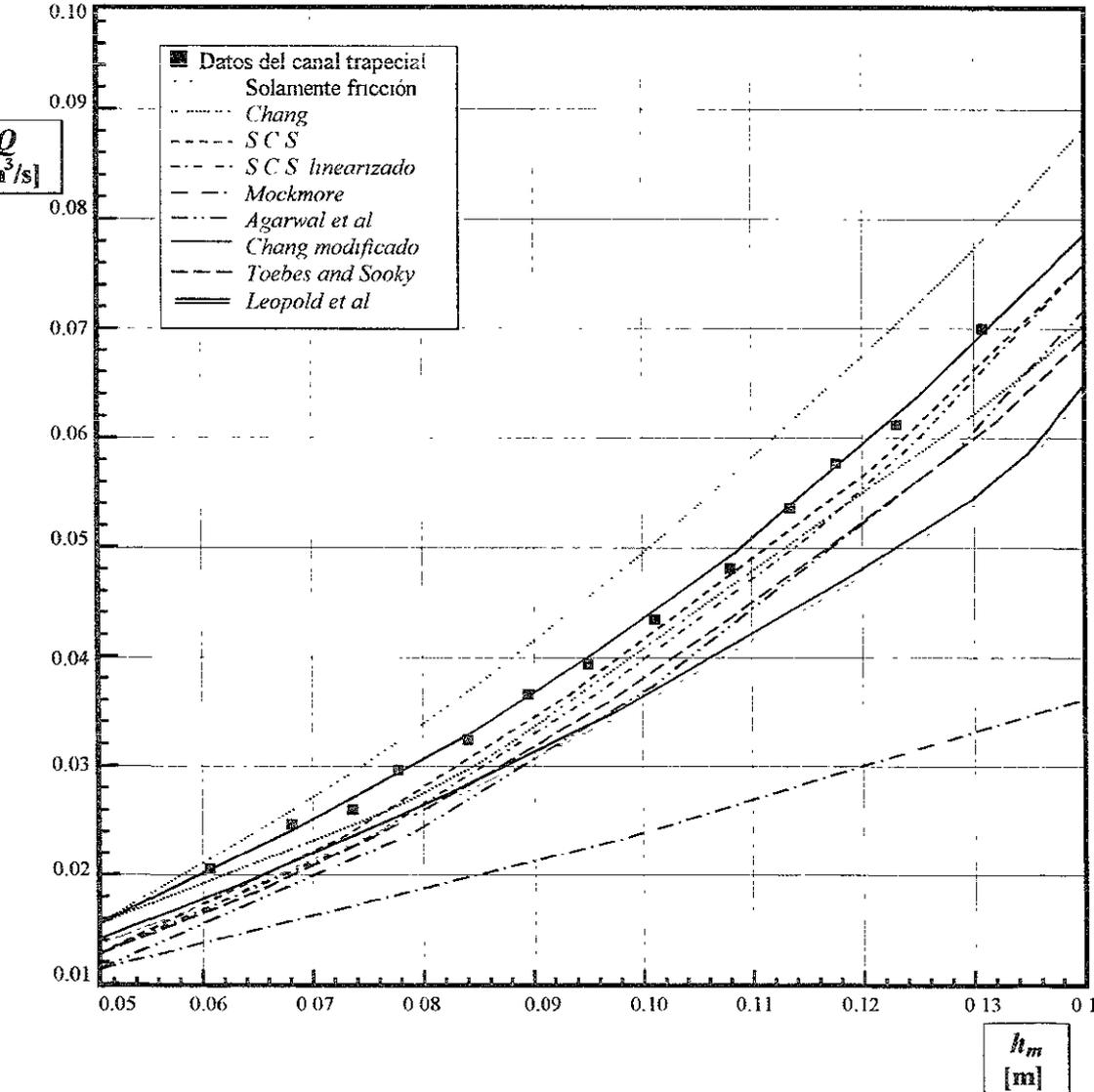


Figura 2.6 Gráfica comparativa de los resultados teóricos contra los experimentales

Se calcularon dos valores para algunos de los datos del USACE con el método del SCS debido a que algunas sinuosidades se encontraban en las discontinuidades que tiene el método y por tanto había que conocer los resultados de dos ecuaciones. Se consideraron los valores en cada lado de la discontinuidad para el cálculo del promedio.

De la figura 2.6 se deduce que los tres peores métodos para predicción son el de *Mockmore*, el de *Agarwal et al* y el de considerar solo pérdidas por fricción con f de tramo rectilíneo. Los tres mejores son el de *Chang modificado*, el de SCS y el SCS linealizado. Del cuadro 2.1 se observa que los métodos que más error generan son el de *Chang*, el de *Agarwal et al* y el de *Mockmore*, incluso superan en error al método de considerar solo la fricción. En cambio el de SCS, el de SCS linealizado y el de *Chang modificado* dan errores bajos.

Observaciones y comentarios

Es de resaltar la gran precisión del método *Chang modificado*, propuesto por el mismo *James* (1994). Algo interesante que observó es el hecho de que los dos métodos SCS son especialmente precisos a pesar de su simplicidad, lo cual sugiere que ajustar el coeficiente de Manning n con un factor dependiente de la sinuosidad es algo razonable, no obstante que las pérdidas en curvas horizontales no son causadas por la sinuosidad ζ como tal sino por el ángulo total del cambio de dirección ϑ y la longitud de cada curva L (lo que de alguna manera tiene implícito el radio de curvatura).

De los métodos revisados, el de *Chang* y *Chang modificado* son los únicos que tienen un fundamento teórico. Aunque el planteamiento simplificado de *Chang* está basado en la suposición de canal ancho rectangular, puede ser aplicado a más casos, pues a pesar de esa restricción, demostró en este caso ser efectivo en canales trapeciales y eventualmente podría usarse para corregir las limitaciones de los métodos del SCS.

La diferencia de resultados entre el método de *Chang* y el de *Chang modificado* demuestra la importancia de tomar en cuenta las etapas de formación y decaimiento de la circulación secundaria.

2.3 La sobrelevación y el perfil transversal de la superficie libre

Ahora se exponen algunos métodos comunes para predecir de la sobrelevación.

2.3.1 Chow (1959)

Consideraciones e hipótesis

Quizás el método más detallado para obtener la sobrelevación máxima mencionado en los libros de texto es el que expone *Chow* (1959).

La distribución transversal de la velocidad longitudinal se puede describir con lo que llama *ley de movimiento de vórtice libre* que anteriormente propuso *Mockmore* (1944) y que básicamente es una ecuación que describe el perfil transversal de la velocidad longitudinal de manera inversamente proporcional al radio de curvatura.

Chow (1959) afirma que la precisión del método es buena para curvas con $\vartheta \geq 90^\circ$.

Modelos matemáticos

La predicción de la sobrelevación se hace a partir de una ecuación que describe el perfil transversal de la velocidad longitudinal superficial y que es la *ley de movimiento de vórtice libre*:

$$v' = \frac{\Omega}{r} \quad (2.3.1)$$

donde

v' velocidad longitudinal en la superficie libre en la posición r

r distancia al centro de curvatura,

Ω constante de circulación.

Ω es constante en una sección pero no necesariamente en dirección longitudinal. Si la ecuación 2.3.1 se integra a lo ancho de toda la sección transversal y posteriormente se divide entre la diferencia de radio de la pared exterior y la interior del canal, se obtiene la velocidad promedio dada por la expresión

$$V_m = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\Omega}{r} \right) dr}{r_2 - r_1} = \frac{\Omega}{(r_2 - r_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2.3.2)$$

donde r_1 es el radio de la pared interior del canal al nivel de la superficie libre y r_2 es el radio de la pared exterior también al nivel de la superficie libre. Para la ecuación 2.3.2 se considera a la velocidad superficial como representativa de la velocidad total del flujo. De manera similar se obtiene el tirante promedio

$$h_m = \frac{\int_{r_1}^{r_2} h dr}{r_2 - r_1} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \left(E - \frac{v'^2}{2g} \right) dr}{r_2 - r_1} \quad (2.3.3)$$

donde E es la energía específica

Sustituyendo la ecuación 2.3.1 en la 2.3.3 e integrando

$$h_m = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \left(E - \frac{v'^2}{2g} \right) dr}{r_2 - r_1} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \left(E - \frac{\Omega^2}{2gr^2} \right) \cdot dr}{r_2 - r_1} = E - \frac{\Omega^2}{2gr_1 r_2} \quad (2.3.4)$$

de manera que el gasto está dado por

$$Q = V_m h_m (r_2 - r_1) = \frac{\Omega}{(r_2 - r_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} \left(E - \frac{\Omega^2}{2gr_1 r_2} \right) (r_2 - r_1) \quad (2.3.5)$$

Conocidos E , Q , r_2 , y r_1 se puede obtener Ω y consecuentemente la sobreelevación total ΔH_{max} . Para esto se considera que la energía específica a lo ancho de una sección transversal es constante $E_1 = E_2$, es decir

$$h_1 + \frac{v_1'^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2'^2}{2g} \quad (2.3.6)$$

h_1 es el tirante en la pared interior y h_2 es el tirante en la pared exterior, de manera que se obtiene

$$\Delta H_{max} = h_2 - h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} - \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{\Omega^2}{2gr_1^2} - \frac{\Omega^2}{2gr_2^2} = \frac{\Omega^2}{2g} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{\Omega^2}{2gr_1^2 r_2^2} (r_2^2 - r_1^2) \quad (2.3.7)$$

El gasto es constante y para conocer la energía específica en la sección transversal de la curva donde se presenta la máxima sobreelevación, se aplica la siguiente ecuación

$$E_i = E_o - L_i S' - 0.4h_c \tag{2.3.8}$$

donde

E_o energía específica a la entrada del canal,

E_i energía específica en la sección de máxima sobreelevación,

S' pendiente de fricción obtenida con la fórmula de Manning e igual a la de tramo recto,

L_i longitud desde el inicio de la curva y hasta la sección de máxima sobreelevación,

h_c pérdida de energía de acuerdo al método gráfico – iterativo que expone Chow (1959) y que fue mencionado en la sección anterior.

Con \mathcal{Q} , Re , r_c y b para conocer L_i se requiere recurrir, a una tabla que el mismo Chow (1959) expone en su texto y la cual está basada en trabajos experimentales.

Observaciones y comentarios

Sin embargo, no se muestra suficiente fundamento teórico o de resultados de pruebas hechas que sustenten la mayor parte de todo el procedimiento de Chow (1959), es por eso que no se detalla en este texto la obtención de L_i . Si se recurre a una tabla es porque los datos están tan dispersos que resultaría muy difícil ajustarlos a una ecuación y más aún a un programa de computo.

2.3.2 Escribá (1988)

Consideraciones e hipótesis

Según Escribá (1988) la sobreelevación ΔH se debe a la fuerza centrífuga que experimenta el agua y depende explícitamente de la velocidad longitudinal, del radio de curvatura y del ancho de superficie libre.

El tirante sobre la línea media del canal no tiene variación significativa y mantiene continuidad del perfil a superficie libre como flujo gradualmente variado.

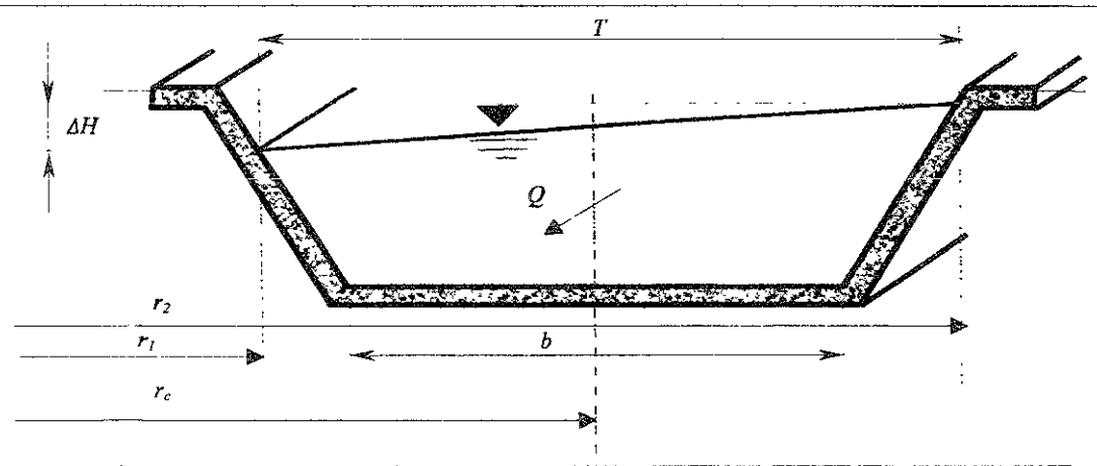


Figura 2.7 Sobreelevación

Modelo matemático

Con aceptable aproximación *Escribá* (1988) encontró que

$$\frac{\Delta H}{2} = \frac{T}{r_c} \cdot \frac{V_m^2}{2g} \tag{2.3.9}$$

T ancho de superficie libre en tramo recto y que se mantiene en la curva
 ΔH diferencia total de nivel en la superficie libre, entre las dos paredes del canal

En la ecuación 2.3.9 ΔH aparece dividido entre dos para hacer referencia específicamente al cambio de nivel en el lado exterior del canal

Observaciones y comentarios

El modelo es muy sencillo y práctico. Parece lógica la ecuación 2.3.9 (por las variables de las que depende), sin embargo algún coeficiente de corrección o de ajuste podría requerirse ya que el comportamiento real de los fenómenos dinámicos de fluidos suele no ser tan ordenado como para describirse con ecuaciones muy sencillas. No se especifica si ΔH es el máximo, sin embargo es de suponerse que así es, ya que la velocidad V_m casi no varía a lo largo de la trayectoria curvilínea.

2.3.3 Graf – Kozeny (1993)

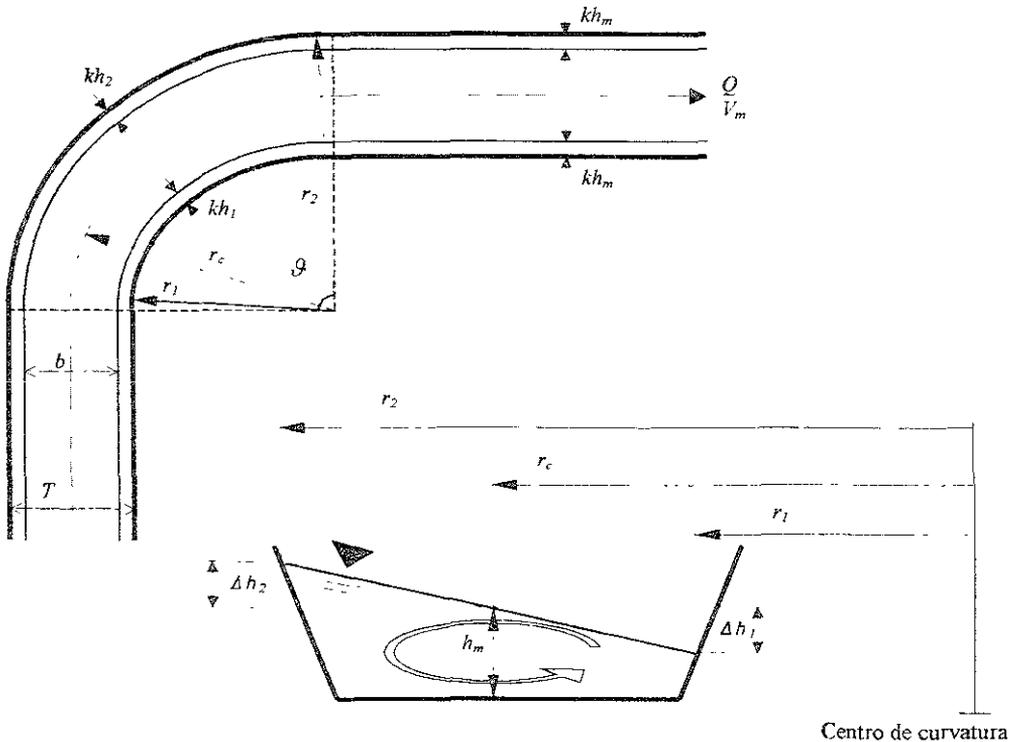


Figura 2.8 Esquema representativo del modelo de *Graf* (1993)

Consideraciones e hipótesis

Graf (1993) considera la diferencia de niveles igual a la diferencia en cargas de velocidad entre la orilla exterior y la interior (figura 2.8). Toda vez que la línea media de la superficie libre mantiene la continuidad del tirante que tenía el agua antes de tomar la curva, si las pérdidas de energía no se consideran no hay remansos y por tanto no se distinguiría si se está en una curva o en un tramo rectilíneo, viendo solamente el perfil sobre la línea media.

Modelo matemático

Se asume que la pérdida de energía h_c en cada una de las líneas de corriente se puede expresar en función del gradiente total:

$$S = \frac{h_c}{L} = \varepsilon \cdot v_l^2 \tag{2.2.6}$$

donde

- S gradiente total para una velocidad v_l en una posición r ,
- v_l velocidad longitudinal de la misma línea de energía,
- ε factor de proporcionalidad,
- L longitud de la curva = $\mathcal{G} \cdot r$.

De esta manera

$$v_l = \sqrt{\frac{h_c}{\varepsilon \mathcal{G}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r}} = \frac{K}{\sqrt{r}} \tag{2.2.7}$$

En el último paso algebraico se está suponiendo constante la relación entre la pérdida de energía y el producto del factor de proporcionalidad ε por el ángulo total de la curva \mathcal{G} .

Cuando $r = r_c$, v_l viene siendo la velocidad en la línea media, la cual a su vez se asume igual a V_m , la velocidad media obtenida del gasto y el tirante medio h_m a la entrada de la curva

Así la constante $K = V_m \sqrt{r_c}$. Eliminando la constante K de la ecuación 2.2.7 se llega a:

$$\frac{v_l}{V_m} = \sqrt{\frac{r_c}{r}} \tag{2.2.8}$$

$$v_2 = V_m \sqrt{\frac{r_c}{r_2}} \tag{2.2.9}$$

$$v_1 = V_m \sqrt{\frac{r_c}{r_1}} \tag{2.2.10}$$

donde r_2 y r_1 son los radios exterior e interior de la curva respectivamente.

Como la sobreelevación está dada por la diferencia de cargas de velocidad en la superficie libre, se tiene

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{V_m^2}{2g} \left(\frac{r_c}{r_1} - \frac{r_c}{r_2} \right) \quad (2.3.10)$$

Se resta la carga de 1 menos la de 2 porque la distribución de velocidad que considera *Graf* es tal que resulta mayor la velocidad al interior de la curva. Como $T = (r_2 - r_1)$

$$\Delta H = \frac{Tr_c}{r_1 r_2} \cdot \frac{V_m^2}{2g} \quad (2.3.11)$$

El perfil transversal del agua es convexo, de manera que respecto a la línea media se separa en 2 ecuaciones

$$\Delta h_2 = \frac{V_m^2}{2g} \left(1 - \frac{r_c}{r_2} \right) \quad (2.3.12)$$

$$\Delta h_1 = \frac{V_m^2}{2g} \left(\frac{r_c}{r_1} - 1 \right) \quad (2.3.13)$$

El resultado es que la diferencia de niveles es igual a la suma del sobrenivel mas el subnivel, $\Delta H = \Delta h_2 + \Delta h_1$

Observaciones y comentarios

Graf (1993) observó también que la máxima sobreelevación se presenta cerca del inicio de la curva para régimen subcrítico, mientras que para el régimen supercrítico hacia el final de la curva, lo que es a su vez congruente con los lugares en que respectivamente se forman los pequeños remansos de agua. Parece una buena suposición que la sobreelevación esté dada por la diferencia de cargas de velocidad, solo que no siempre sucede que la velocidad mayor está en el lado exterior de la curva, como se verá más adelante.

2.3.4 French, R.H. (1985)

Consideraciones e hipótesis

Cuando se tiene flujo en una curva, se produce un sobrenivel en el talud exterior de ésta con un subnivel correspondiente en la parte interior y ambos suman en valor absoluto lo que aquí se ha llamado ΔH y que se cuantifica a partir de la velocidad media V_m , la cual a su vez se obtiene del tirante medio en cada sección y la ecuación de continuidad con gasto conocido

French (1985) plantea una solución al problema de la sobreelevación en curvas horizontales desde el punto de vista del *bordo libre*. El término *bordo libre* se refiere a la distancia vertical entre la parte superior del canal o de su recubrimiento y la de la superficie libre del agua prevaleciente cuando el canal trabaja con el gasto de diseño en flujo normal y su propósito es prevenir el derrame por encima de las paredes del canal, por fluctuaciones en la superficie libre del agua causadas entre otros por el paso del líquido a través de curvas horizontales. En flujo curvilíneo se considera una sola velocidad promedio V_m representativa de la carga de velocidad

Modelo matemático

$$b_i = \frac{V_m^2 b}{2gr_c} \quad (2.3.14)$$

donde

b ancho de plantilla,

r_c radio de la curva al centro del canal,

b_i altura del bordo libre mínima necesaria para evitar el desborde.

Observaciones y comentarios

Prácticamente es el mismo modelo que el de *Escribá* (1988), la única diferencia es que se toma el ancho de plantilla b en lugar del ancho de superficie libre T .

Según el mismo *French* (1985), la ecuación 2.3.14 siempre subestima el valor de b_i debido a su suposición sobre la velocidad media, y que en algunos casos, esta ecuación puede tener un error respecto de la realidad de hasta un 50%

2.3.5 Grashof (1985)**Consideraciones e hipótesis**

Grashof (1985) desarrolló su propuesta para cuantificar la sobreelevación a partir de la segunda ley del movimiento de Newton aplicada a cada línea de corriente en su paso alrededor de la curva, de esta manera llegó a que el perfil transversal de la superficie del agua está dado por una curva de forma logarítmica.

Modelo matemático

$$\Delta h = 2.3 \frac{V_m^2}{g} \log \frac{r}{r_1} \quad (2.3.15)$$

donde

V_m velocidad media representativa del flujo total,

Δh diferencia de tirante entre la línea de corriente ubicada en el radio r y la línea media en r_c ,

r radio de alguna línea de corriente en la curva,

r_c radio de la línea media del canal,

g aceleración gravitatoria

La forma de perfil transversal que genera la ecuación 2.3.15 se muestra en la figura 2.9 en un ejemplo de canal con radio medio de 9.5 m y velocidad media de 4 m/s.

Observaciones y comentarios

Algo que no considera este modelo matemático ni los dos anteriores es la posible interdependencia entre la sobreelevación y las pérdidas de energía; es de suponerse que las pérdidas de energía *tranquilizan* al agua y atenúan la sobreelevación. El perfil que genera la ecuación 2.3.15 es más o menos simétrico y parece que la sobreelevación se desarrolla en forma casi instantánea al iniciar la curva

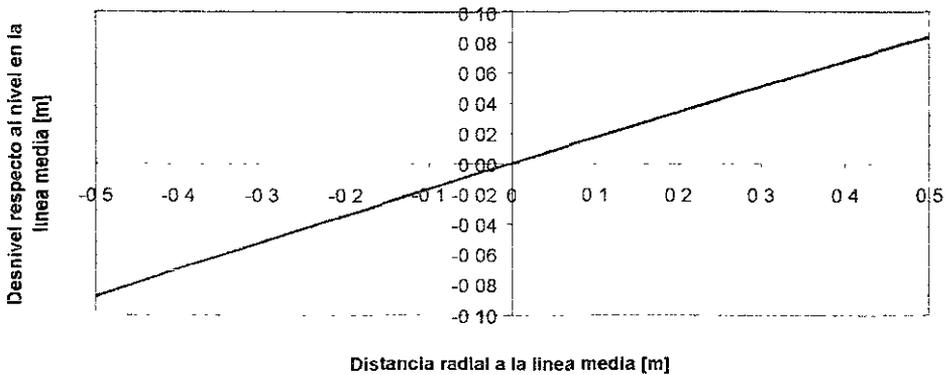


Figura 2.9 Perfil transversal según la ecuación 2.3.15

2.3.6 Woodward (1980)

Consideraciones e hipótesis

La velocidad del flujo es por definición igual a cero en las paredes y en la plantilla del canal. Al considerarse el ancho b del fondo del canal y no el ancho de la superficie libre T se restringe el modelo a canales rectangulares y trapeciales de pequeño talud.

La velocidad máxima V_{max} es al centro del canal y de ella depende la sobreelevación total. La velocidad varía en forma parabólica entre los taludes y el centro.

Modelo matemático

Al aplicar la segunda ley de Newton a estas suposiciones, Woodward (1980) llegó a la ecuación 2.3.16.

$$\frac{\Delta H}{2} = \frac{V_{max}^2}{2g} \left[\frac{20}{3} \frac{r_c}{b} - \frac{16r_c^3}{b^3} + \left(\frac{4r_c^2}{b^2} - 1 \right)^2 \ln \left(\frac{2r_c + b}{2r_c - b} \right) \right] \tag{2.3.16}$$

Observaciones y comentarios

Cómo obtener la velocidad V_{max} es una imprecisión que Woodward (1980) no aclara, podría pensarse en la superficial o en la máxima de la distribución vertical de v .

No se especifican intervalos (de gasto, de rugosidad, de radio de curvatura, de sección transversal del canal, etc.) dentro de los cuales éste y los dos métodos anteriores sean suficientemente exactos, por lo que hasta cierto punto se les puede considerar incompletos.

En las ecuaciones 2.3.14, 2.3.15 y 2.3.16 no aparece la densidad del fluido ni el tirante medio como variable, lo cual significa que no se consideran la masa ni el volumen que circulan; en otras palabras, da lo mismo cualquiera que sea el fluido y la cantidad que circule ya que el resultado es el mismo, lo cual está un poco fuera de la lógica.

Hasta el momento no existen reglas fijas que determinen el radio mínimo de curvatura para el cual se puede ignorar cualquier consideración de sobreelevación en el diseño y operación del canal. Algunos autores hicieron la afirmación de que el efecto de las curvas es despreciable cuando el radio de curvatura al centro del canal es mayor que tres veces el ancho de plantilla $\frac{r_c}{b} > 3$, afirmación que parece insuficiente pues no considera el gasto ni el fluido que circula, ni tampoco su velocidad (importante aún si se trata de régimen subcrítico)

2.3.7 Comparación analítica de métodos

Determinar el gasto de un canal abierto es muy importante para la hidrología ya que es un parámetro primario cuando se hacen análisis como la curva masa. También es necesario para calcular distribuciones de energía y fuerza, coeficientes de retardo, aportaciones de agua y formación de sedimentos. Los aparatos usados comúnmente para aforar el gasto son aquellos que obtienen el valor de la velocidad en cualquier posición de una sección transversal y que se basan en la fuerza del fluido o aquellos que miden una carga diferencial (como el canal Parshall), se basan en el tirante crítico y otros más que funcionan con principios eléctricos, magnéticos y ópticos.

Apmann (1973) hizo un planteamiento interesante que sirve para determinar el gasto circulante en régimen subcrítico a partir de la sobreelevación que se presente en las curvas horizontales de un cauce, planteamiento que es de utilidad para el análisis de ríos, especialmente si son muy caudalosos como para aforarlos volumétricamente.

En su método de estimación, *Apmann (1973)* emplea marcas del nivel del agua así como datos topográficos del cauce. El principio que considera es que la sobreelevación está relacionada con la carga de velocidad y la geometría de la curva. El método sirvió a su vez para comparar otros métodos referentes a la sobreelevación.

Consideraciones e hipótesis

➤ Balance de fuerzas

Se considera que son 3 las acciones que influyen en el movimiento curvilíneo y que juntas inducen la sobreelevación en un tramo curvilíneo $r \cdot d\theta$ unitario

- ✓ *Fuerza centrífuga* – Actúa hacia afuera de la curva y es consecuencia de la inercia del líquido que tiende a hacerlo salir de la trayectoria de la curva.
- ✓ *Componente radial del esfuerzo cortante* – Actúa hacia afuera en la plantilla del canal oponiéndose al sentido del movimiento espiral en la zona más profunda del flujo.
- ✓ *Fuerzas de presión* – Supuestas hidrostáticas y cuya resultante actúa hacia el centro de curvatura dado que es mayor la altura del triángulo de presiones en la pared exterior que en la interior. Para esto hay que recordar que se analizan las fuerzas sobre el agua, no del agua sobre su entorno.

Modelo matemático

El equilibrio queda entonces como sigue

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \tau_r}{\partial z} - \rho \frac{v^2}{r} = 0 \quad (2.3.17)$$

donde

ρ densidad del líquido [kg/m³]

v velocidad longitudinal

τ_r componente radial del esfuerzo cortante

p presión (hidrostática), dada por el tirante y el peso específico $[\text{N/m}^2]$

No entra la variable ϑ porque como se mencionó, se trata de un tramo $r \cdot d\theta$ fijo unitario

Si ahora se integran por separado los términos respecto al eje z , resulta el primero

$$\frac{\partial(\gamma h)}{\partial r} = \gamma \frac{dh}{dr} \tag{2.3.18}$$

debido a que el tirante h solo varía en función de r .

$$\frac{\int_0^h v^2 dz}{h} = \delta \cdot v_m^2 \tag{2.3.19}$$

donde v_m es el componente longitudinal de la velocidad media a lo largo del tirante,

$\delta = \frac{1}{hv_m^2} \int_0^h v^2 dz$ coeficiente para promediar v^2 , pues se integra a lo largo de la altura z y se divide entre el tirante h , algo parecido al ajuste que se hace con el coeficiente de Boussinesq, debido a que en la práctica v_m^2 no es exactamente igual al promedio obtenido integrando.

Para el esfuerzo cortante se asume una distribución lineal a lo largo del eje vertical. Este esfuerzo se genera en el fondo del canal y en la superficie libre vale 0, por lo que el único término representativo es τ_{or} = componente radial de esfuerzo cortante en el fondo del canal que queda dividiendo entre h como un valor fijo para una misma sección y ya no requiere integrarse respecto a z . Es decir

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial z} = \frac{\tau_{or}}{h} \tag{2.3.20}$$

Ahora se divide todo entre γ

$$\frac{dh}{dr} = \delta \cdot \frac{v_m^2}{gr} + \frac{\tau_{or}}{h\gamma} \tag{2.3.21}$$

En este paso *Apmann* (1973) encontró el problema de la falta de ecuaciones matemáticas que describan adecuadamente las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante en una curva, ecuaciones necesarias porque ambas cantidades varían espacialmente, para poder integrar la ecuación 2.3.21. Para dar una solución al problema, *Apmann* (1973) considera una ecuación que parece dar una buena estimación de δ y que propuso *Chow* (1959)

$$\delta = 1 + \frac{v_*^2}{K^2 v_m^2} \tag{2.3.22}$$

K constante von Karman = 0.4

$v_* = \sqrt{\frac{\tau_{or}}{\rho}}$, velocidad al cortante

Por otro lado la componente radial del esfuerzo cortante es

$$\tau_{or} = \tan\phi \cdot \tau_{oi} \tag{2.3.23}$$

donde ϕ es el ángulo entre el componente radial y el esfuerzo cortante total τ_o , proyectado en plano horizontal. Según *Rozovski* (1961) el resultado se puede aproximar con la expresión

$$\tau_{or} = \tan\phi \cdot \tau_{oi} = 11 \frac{h}{r} \cdot \tau_{oi} \tag{2.3.24}$$

donde τ_{oi} es el componente longitudinal del esfuerzo cortante total en plantilla, que por su poca diferencia el autor confunde con τ_o .

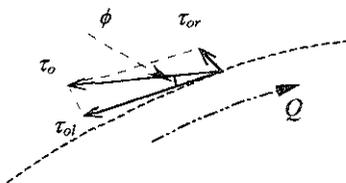


Figura 2.10 Esfuerzos cortantes

Ahora se sustituyen las ecuaciones 2.3.22 y 2.3.24 en la ecuación 2.3.21, además de no considerar τ_o , sino su equivalente en velocidad al cortante $v_*^2 \rho$

$$\frac{dh}{dr} = \underbrace{\left[1 + \left(11 + \frac{1}{\kappa^2} \right) \frac{v_*^2}{v_m^2} \right]}_W \cdot \frac{v_m^2}{gr} \tag{2.3.25}$$

W viene siendo el coeficiente de resistencia, variable a lo largo de la curva. A pesar de las simplificaciones, la presencia y compleja variabilidad espacial de la distribución del esfuerzo cortante hace aun difícil usar la ecuación 2.3.25, por lo que *Apmann* (1973) hace una consideración más, y es la de que se ignore momentáneamente la variabilidad del coeficiente de resistencia W . Para poder continuar el desarrollo algebraico se aplican dos artificios

- ♦ W , que funciona como factor de corrección, es supuesto simplemente igual a 1.
- ♦ Se dividen ambos lados de la igualdad entre la velocidad media elevada al cuadrado, V_m^2 , como sigue:

$$\frac{dh}{V_m^2 dr} = 1 \cdot \frac{v_m^2}{V_m^2 gr} \tag{2.3.26}$$

$$\frac{dh}{V_m^2 / g} = \frac{v_m^2}{V_m^2 r} dr \tag{2.3.27}$$

dh es a lo largo de la dirección radial la variación del tirante que, para la diferencia entre radio exterior e interior en la superficie libre $r_2 - r_1$, es igual a ΔH . Del otro lado de la igualdad queda una integral. Es importante que el lector sepa que la ΔH que se maneja en este planteamiento es la máxima que aparezca durante toda la trayectoria curvilínea

$$\frac{\Delta H}{V_m^2/g} = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{v_m}{V_m} \right)^2 \frac{dr}{r} \tag{2.3.28}$$

Al cociente que se encuentra al lado izquierdo en la ecuación 2.3.28 se le puede llamar $\Theta = \frac{\Delta H}{V_m^2/g}$.

Si se considera la ecuación de continuidad $Q = A \cdot V_m$ y se sustituye en esta última igualdad, se llega a

$$Q = A \cdot \sqrt{\frac{g\Delta H}{\Theta}} \tag{2.3.29}$$

Para obtener Θ , *Apmann* (1973) consideró que el comportamiento del fluido en curvas horizontales podría depender del número de Reynolds Re , de la rugosidad del canal, del ángulo total de la curva \mathcal{S} , del cociente de curvatura $\frac{b}{r_c}$, del cociente $\frac{R_h}{h_m}$, del número de Froude Fr y del ancho de plantilla del canal b . A

partir de estas variables y los datos experimentales de más de setenta modelos usados en pruebas hechas por doce autores previos (Cuadro 2.2) obtuvo una ecuación que da un valor de Θ y que en la medida de lo posible satisface a todos los datos experimentales

Cuando los datos parecían dispersarse fueron correlacionados estadísticamente y la relación numérica entre el coeficiente Θ y las variables más importantes fue determinada calculando la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los datos medidos experimentalmente y los datos obtenidos de la Θ más actualizada, así se fue ajustando la ecuación final. Un problema seguía siendo la poca información disponible acerca de las distribuciones de esfuerzos cortantes

Fuente	Sección transversal	Ángulo total \mathcal{S}	Número de pruebas
<i>Blue et al.</i>	Cauce natural	95°	4
<i>Denzler</i>	Rectangular	90°	27
<i>Ippen</i>	Trapezoidal	60°	6
<i>Leopold et al.</i>	Poligonal	50°	2
<i>Parsons</i>	Cauce natural	143°	1
<i>Rozovski</i>	Rectangular	180°	2
	Poligonal	90°	1
<i>Shukry</i>	Rectangular	180°	10
<i>Yarnell</i>	Rectangular	280°	6
<i>Yen</i>	Rectangular	90°	16
<i>Eskinazi</i>	Rectangular	360°	1
<i>Wattendorf</i>	Rectangular	300°	1
<i>Von Cordier</i>	Rectangular	90°	1

Cuadro 2.2 Fuentes de datos experimentales para la obtención de Θ según *Apmann* (1973)

Otra suposición importante es que v_m no varía longitudinalmente, lo que hace más fácil de integrar a la ecuación 2.3.28, pues $v_m = V_m$. La ecuación que representa el mejor ajuste que se obtuvo es

$\Delta H = \frac{V_m^2}{g} \ln \frac{r_2}{r_1}$	<i>Grashof (1875)</i>
$\Delta H = \frac{V_m^2}{g} \frac{b}{r_c}$	<i>Woodward (1920)</i>
$\Delta H = \frac{3}{2} \frac{V_m^2}{g} \frac{b}{r_c}$	<i>Joebes y Douma (1942)</i>
$\Delta H = \frac{V_m^2}{g} \frac{b}{r_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{b^2}{12r_c^2}} \right)$	<i>Ippen (1960)</i>
$\Delta H = \frac{V_m^2}{2g} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 r_1}$	<i>Ippen y Drinker (1962)</i>
$\Delta H = \frac{V_{max}^2}{2g} \left\{ \frac{20r_c}{b} - \frac{16r_c^3}{b^3} + \left[\left(\frac{4r_c^2}{b^2} - 1 \right)^2 \ln \frac{2r_c + b}{2r_c - b} \right] \right\}$	<i>Woodward (1920)</i>

Cuadro 2.3 Ecuaciones previas que ayudaron a la obtención de la ecuación 2.3.30

Aplicación

Apmann (1973) verificó las bondades de su método en una corriente fluvial natural en el estado de New York cerca de Buffalo en un tramo de 3700 metros. Se levantó la topografía con detalle y se tomaron 22 curvas para las cuales en el mapa se midió el radio de curvatura y los radios correspondientes a las paredes del canal natural, así como el ángulo total de cada curva y la sobreelevación ΔH máxima generada en cada una, de esta manera se pudieron aplicar las ecuaciones 2.3.29 y 2.3.30 para conocer el gasto circulante. Se eliminaron resultados que eran picos absurdos. En general sí se presentó una tendencia a una media con varianza baja, excepto para sobreelevaciones menores de 7.6 cm, que dan resultados muy pequeños para lo que debieran y para aquellos casos en que el agua rebasó momentáneamente el nivel de la pared lateral. Para complementar el trabajo experimental se hicieron mediciones aplicando el método Sección - pendiente y se observaron resultados muy similares a los que se obtienen con el método aquí desarrollado. Según Apmann (1973) el error de este método es menor del 8%, mientras que el grupo de datos usados para desarrollar el método (cuadro 2.2) tienen un error aproximado del 12%.

2.3.8 Observaciones y comentarios

Como puede observar el lector, la varianza de los resultados en la figura 2.11 es baja; La razón de haberlo mencionado en esta tesis es que si el método es bueno se puede usar al revés, para predecir ΔH a partir del gasto conocido. En cuanto a la aplicación, ésta se hace en un cauce natural y el error fue relativamente bajo, lo que hace pensar que el método es confiable en canales artificiales. Aunque no se cuente con el gasto conocido de antemano, el hecho de que el conjunto de datos experimentales de distintas curvas (o meandros) del mismo río tengan una tendencia clara a un valor hace pensar que el método no es un simple tanteo.

Dado que la figura 2.11 muestra bastante exactitud del método de Apmann (1973), es de suponerse que entre las fórmulas anteriores la de Grashof (1875) y Woodward (1920) ya estaban aproximadas por su forma logarítmica.

Las ecuaciones 2.3.20 y 2.3.30 son una buena forma de darle la vuelta al problema de cuantificar los esfuerzos cortantes.

3 DESARROLLO TEÓRICO

Por ser la sobreelevación y las pérdidas de energía los principales problemas que atañen al flujo subcrítico en curvas horizontales, en este capítulo se describe de manera detallada una alternativa metodológica a lo mencionado en el capítulo anterior que permite predecir estos dos fenómenos.

3.1 Sobreelevación

Para tratar la cuestión de la sobreelevación se aplicará la teoría propuesta por los profesores *Chien Len Yen* y *Ber Che Yen* (1971).

3.1.1 Desarrollo de las ecuaciones

Con las ecuaciones de movimiento de Reynolds para flujo turbulento estable en coordenadas cilíndricas se puede describir la configuración del perfil de la superficie libre del agua que avanza en una curva horizontal, tanto en dirección longitudinal como en dirección radial.

Sistema de coordenadas: r longitud radial en un plano horizontal de referencia.
 θ ángulo que representa la dirección longitudinal curvilínea.
 z cota o altura respecto al mismo plano de referencia

La forma en que *Rouse* (1959) expuso las ecuaciones de movimiento de Reynolds es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma'_r}{\rho} \right) - \frac{\sigma'_\theta}{\rho} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\tau_{rz}}{\rho} \right) \right] - \left(u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} \right) + \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\sigma'_\theta}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\tau_{\theta z}}{\rho} \right) \right] - \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau_{rz}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\tau_{\theta z}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\sigma'_z}{\rho} \right) \right] - \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.1.3)$$

donde

p presión media,

ρ densidad del fluido,

g aceleración gravitatoria,

u, v, w componentes de la velocidad media del flujo a lo largo de los ejes coordenados r, θ y z , respectivamente

Se puede observar que las ecuaciones anteriores no son tan complicadas como parecen. La ecuación 3.1.1 significa que la variación de la carga de presión y de la carga de posición respecto de la coordenada r , más el gradiente de la velocidad radial multiplicado por la matriz de velocidades, dependen directamente de los esfuerzos cortantes ortogonales a r y del esfuerzo axial en dirección de r . La forma es similar en las ecuaciones 3.1.2 y 3.1.3, solo que en la ecuación 3.1.2 en lugar de r es $r \partial \theta$ y la velocidad es la longitudinal y en la ecuación 3.1.3 es z y la velocidad vertical w .

Las ecuaciones diferenciales que describen los esfuerzos existentes en el flujo curvilíneo horizontal, tanto normales como tangenciales (cortantes), son.

$$\sigma_r = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho u^2 \tag{3.1.4}$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - \rho v w \tag{3.1.8}$$

$$\sigma_\theta = 2\mu \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - \rho v^2 \tag{3.1.5}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right) - \rho u v \tag{3.1.7}$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \rho w^2 \tag{3.1.6}$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho u w \tag{3.1.9}$$

donde

τ_{ij} esfuerzo cortante sobre el plano $i - j$,

μ viscosidad dinámica del fluido,

u, v, w fluctuaciones turbulentas respecto de u, v y w respectivamente.

Como la ecuación 3.1.1 está referida a la dirección radial r , se puede obtener de ella el valor de S_r , pendiente transversal de la superficie libre. Para esto se plantea la integral de la variación en las cargas de presión (tirante, en el caso de canal) y de posición, porque son ellas dos las que determinan la pendiente transversal.

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_m}{\rho} + gz \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{p_m}{\rho} + gz \right) dz - \left[\left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) \frac{\partial z_1}{\partial r} - \left(\frac{p_0}{\rho} + gz_0 \right) \frac{\partial z_0}{\partial r} \right] \tag{3.1.10}$$

donde

$\frac{\partial z}{\partial r}$ pendiente transversal de la superficie libre en cualquier posición de una sección transversal,

z_0 coordenada vertical del fondo del canal,

z_1 coordenada vertical de la superficie libre,

p_0 presión al fondo del canal,

p_1 presión en la superficie libre, $p_1 = 0$,

$\frac{\partial z_1}{\partial r}$ variación del nivel de la superficie a lo largo del eje radial e igual a S_r .

Para el paso anterior se aplicó la regla de Leibniz. Al extraer la derivada parcial de la integral hay que restar la función valuada en los límites de la integral y multiplicada por sus derivadas parciales.

Por otro lado, la integral del cuarto término a la derecha en la ecuación 3.1.1 queda

$$\frac{1}{r} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\tau_{rz}}{\rho} \right) \cdot dz = \frac{1}{\rho} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} \cdot dz = \frac{1}{\rho} \cdot \tau_{rz} \Big|_{z_0}^{z_1} \tag{3.1.11}$$

donde τ_{rz} es el componente del esfuerzo cortante τ_θ , perpendicular al eje θ y proyectado en el plano $r - z$. Ese esfuerzo cortante en la superficie libre del agua es despreciable y al fondo en z_0 es igual a

$$\tau_{rz} = \tau_\theta \sin \phi \tag{3.1.12}$$

donde ϕ es el ángulo de desviación del vector de velocidad media del agua respecto de la dirección longitudinal del canal en un plano horizontal. La existencia de este ángulo se debe a que hay un componente de velocidad transversal durante la curva.

Por otra parte se define a la velocidad del cortante como $v_s = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}$. Sustituyendo esta variable y la ecuación 3.1.12 en la ecuación 3.1.11 el resultado es

$$-\frac{\tau_o \sin \phi}{\rho} = -v_s^2 \sin \phi \tag{3.1.13}$$

Ahora se sustituye el resultado de la ecuación 3.1.10 y de la 3.1.13 en la integración de la ecuación 3.1.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{z_o}^{z_1} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot dz - gz_1 \frac{\partial z_1}{\partial r} + \left(\frac{p_o}{\rho} + gz_o \right) \frac{\partial z_o}{\partial r} = \frac{1}{r} \int_{z_o}^{z_1} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma_r'}{\rho} \right) - \frac{\sigma_\theta'}{\rho} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} \right) \right] \cdot dz + \\ - v_s^2 \cdot \sin \phi + \int_{z_o}^{z_1} \left(-u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v^2}{r} - v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \omega \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot dz \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

La presión se considera hidrostática, de manera que $\frac{p}{\rho} = g(z_1 - z)$; $\frac{p_o}{\rho} = g(z_1 - z_o)$ y con esto se desarrollan los términos de la izquierda en la ecuación 3.1.14 como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{z_o}^{z_1} (gz_1 - gz + gz) \cdot dz - gz_1 \frac{\partial z_1}{\partial r} + (gz_1 - gz_o + gz_o) \frac{\partial z_o}{\partial r} \\ g \frac{\partial}{\partial r} z_1 \int_{z_o}^{z_1} dz - gz_1 \frac{\partial z_1}{\partial r} + gz_1 \frac{\partial z_o}{\partial r} \\ g \frac{\partial}{\partial r} [z_1 (z_1 - z_o)] - gz_1 \frac{\partial z_1}{\partial r} + gz_1 \frac{\partial z_o}{\partial r} \end{aligned}$$

z_1 no varía respecto de z pero sí respecto de r , lo mismo que z_o , si la plantilla del canal tiene pendiente transversal.

derivando y recordando que $S_r = \frac{\partial z_1}{\partial r}$

$$g \left[z_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial r} - \frac{\partial z_o}{\partial r} \right) + (z_1 - z_o) \frac{\partial z_1}{\partial r} \right] - gz_1 \frac{\partial z_1}{\partial r} + gz_1 \frac{\partial z_o}{\partial r} = g \cdot (z_1 - z_o) \cdot \frac{\partial z_1}{\partial r} = S_r \cdot gh$$

el último resultado es lo que va a la izquierda en la ecuación 3.1.14. $h = (z_1 - z_o)$ es el tirante local en cualquier posición radial de una sección transversal

Así la ecuación diferencial que describe a la pendiente transversal de la superficie libre del fluido es

$$S_r = \frac{1}{gh} \left\{ \frac{1}{r} \int_{z_o}^{z_1} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma_r'}{\rho} \right) - \frac{\sigma_\theta'}{\rho} + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(r \frac{\tau_{r\theta}}{\rho} \right) \right] \cdot dz - v_s^2 \cdot \sin \phi + \int_{z_o}^{z_1} \left(-u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v^2}{r} - v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot dz \right\} \tag{3.1.15}$$

La ecuación 3.1.15 resulta aun muy compleja, así que *Lien Yen* y *Cie Yen* (1971) eliminan varios términos, de los cuales, por su propia experiencia y la de otros autores, saben que suelen tener valores muy pequeños con respecto de otros términos de la misma ecuación y por tanto casi no influyen en el valor total de S_r . La forma más simplificada es la ecuación 3.1.16 y resulta

$$S_r = \frac{1}{gh} \left\{ -v_*^2 \cdot \sin \phi + \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{v^2}{r} - v \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right) \cdot dz \right\} \tag{3.1.16}$$

donde h es el tirante en la posición r .

Como la comparación entre canales, así como la construcción de gráficas, se hacen usando cocientes, la ecuación 3.1.16 se puede reacomodar distribuyendo h , agregando V_m y extrayendo r como factor común. Resulta entonces

$$S_r = \frac{V_m^2}{2gr} \left\{ -2 \frac{r}{h} \left(\frac{v_*}{V_m} \right)^2 \cdot \sin \phi + \int_{z_0/h}^{z_1/h} 2 \left[\left(\frac{v}{V_m} \right)^2 - \frac{v}{V_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{V_m} \right) \right] \cdot d \left(\frac{z}{h} \right) \right\} \tag{3.1.17}$$

donde V_m es la velocidad media del longitudinal

3.1.2 Modelos experimentales

El trabajo experimental de *Lien Yen* y *Chien Yen* (1971) se realizó con 2 modelos de canales, cada uno consistente de 2 curvas como se muestra en la figura 3.2

El primer canal era de sección trapezoidal con base menor $b = 1.83$ m, taludes $k = 1$ y paredes de concreto bien acabado, lo mismo que la plantilla (figura 3.1).

Para el segundo canal se construyeron las paredes separadas 2.33 m y se colocó una plantilla de arena fina. Se hizo circular agua hasta que la forma de la plantilla se estabilizó y con las lecturas hechas de la topografía resultante se retiró la arena y en su lugar se puso mortero, de manera que se mantuviera fija la forma de canal fluvial natural y sobre él se trabajó (figura 3.3)

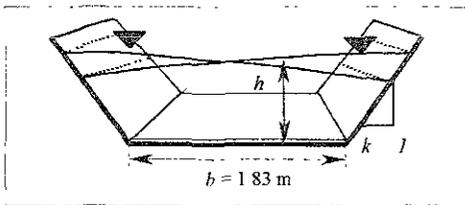


Figura 3.1 Modelo de canal con sección trapezoidal

Todos los flujos para los cuales se tomaron registros de la superficie libre en distintas secciones de ambos canales fueron dentro del régimen subcrítico (número de Froude < 1)

Tanto en el cómputo teórico de valores del tirante en una sección transversal, como en las mediciones experimentales, se consideraron 3 secciones transversales en cada curva que fueron a $\pi/8$, a $\pi/4$ y a $3\pi/8$ (considerando que la curva completa es de $4\pi/8$).

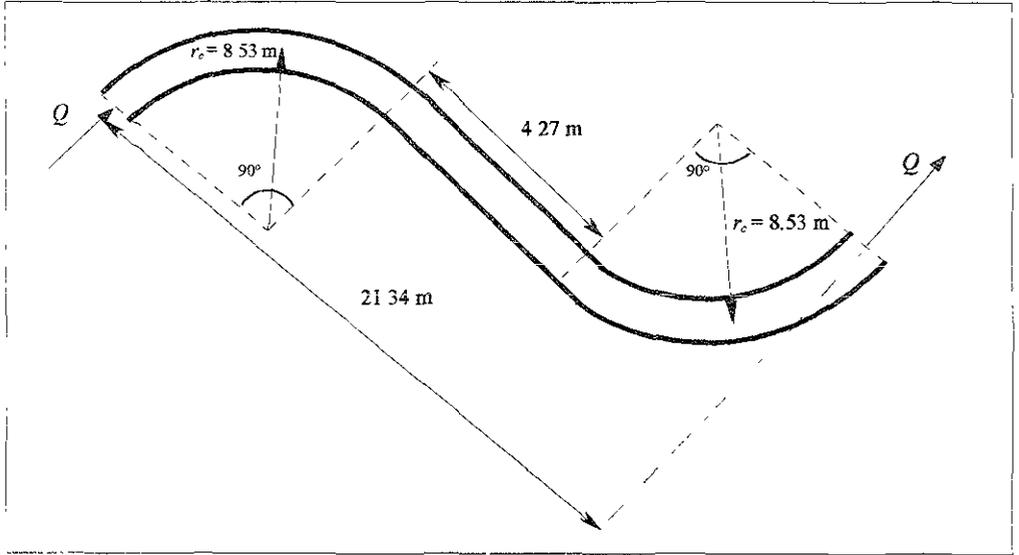


Figura 3.2 Vista en planta del modelo experimental de Lien Yen y Chien Yen

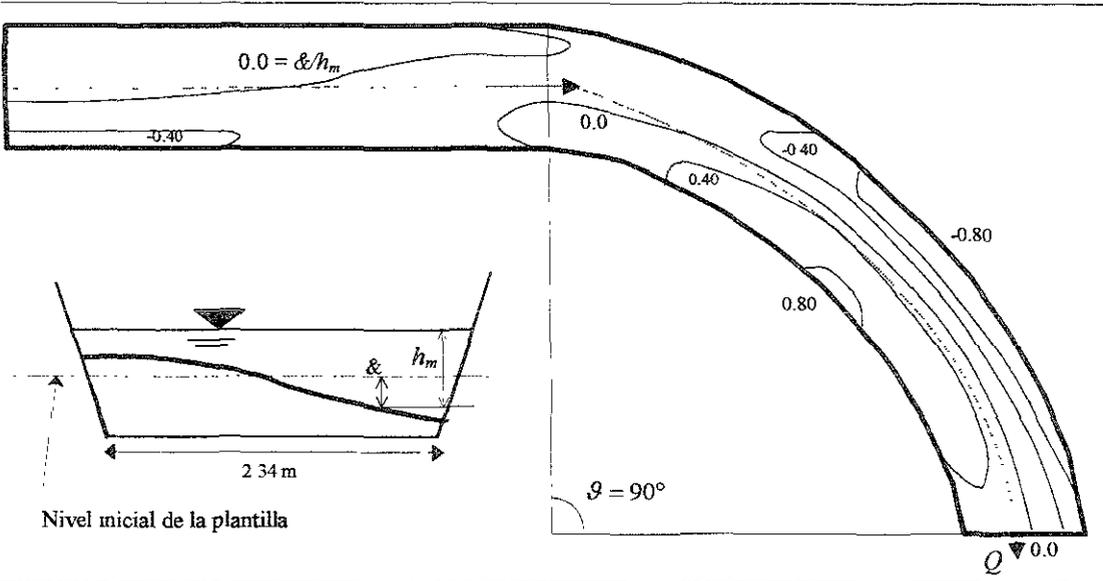


Figura 3.3 Topografía y sección transversal resultantes en la primera curva el modelo de cauce natural

3.1.3 Análisis de ecuaciones

Del planteamiento teórico se llegó a la ecuación 3.1.17. Esa ecuación se puede separar en 3 partes para analizar la importancia de cada término

$$\left. \begin{aligned}
 C_{r1} &= -2 \frac{r}{h} \left(\frac{v_*}{V_m} \right)^2 \cdot \sin \phi \\
 C_{r2} &= 2 \int_{z_o/h}^{z_1/h} \left(\frac{v}{V_m} \right)^2 \cdot d \left(\frac{z}{h} \right) \\
 C_{r3} &= -2 \int_{z_o/h}^{z_1/h} \left(\frac{v}{V_m} \right) \frac{\partial \left(\frac{u}{V_m} \right)}{\partial \theta} \cdot d \left(\frac{z}{h} \right)
 \end{aligned} \right\} C_r$$

El primer término representa el efecto del componente radial del esfuerzo cortante sobre la pendiente transversal de la superficie libre. El segundo refleja el efecto de la aceleración centrípeta resultante del cambio de dirección de la velocidad longitudinal y el tercero la existencia de una velocidad transversal a lo largo de la curva del canal y su variabilidad en dirección vertical.

$$C_r = C_{r1} + C_{r2} + C_{r3} \tag{3.1.18}$$

Por lo que S_r se sintetiza en la expresión

$$S_r = C_r \frac{V_m^2}{2gr} \tag{3.1.19}$$

Para distintas posiciones transversales y distintos ángulos de la curva, Lien Yen y Chien Yen (1971) se apoyaron en la integración numérica utilizando los valores medidos de velocidad media del flujo V_m , de los componentes u , v y del esfuerzo cortante, para calcular los valores de las 3 C_r (coeficientes de pendiente transversal de superficie libre) y analizar su comportamiento. Los resultados se muestran en las figuras 3.4 y 3.5.

Lo más destacable de dichas figuras es el hecho de que C_{r2} , término referente a la aceleración centrípeta, es el que más peso tiene en S_r , mientras que C_{r1} casi no pinta, es decir, el esfuerzo cortante transversal casi no influye en la pendiente transversal de ninguno de los dos modelos. C_{r3} tiene importancia secundaria en el modelo de cauce natural, principalmente donde la inclinación transversal de la plantilla es máxima, en $\frac{\pi}{4}$. C_{r3} depende de la variabilidad de la velocidad transversal a lo largo de la curva y esa variabilidad es mayor cuando la topografía de la plantilla no es constante.

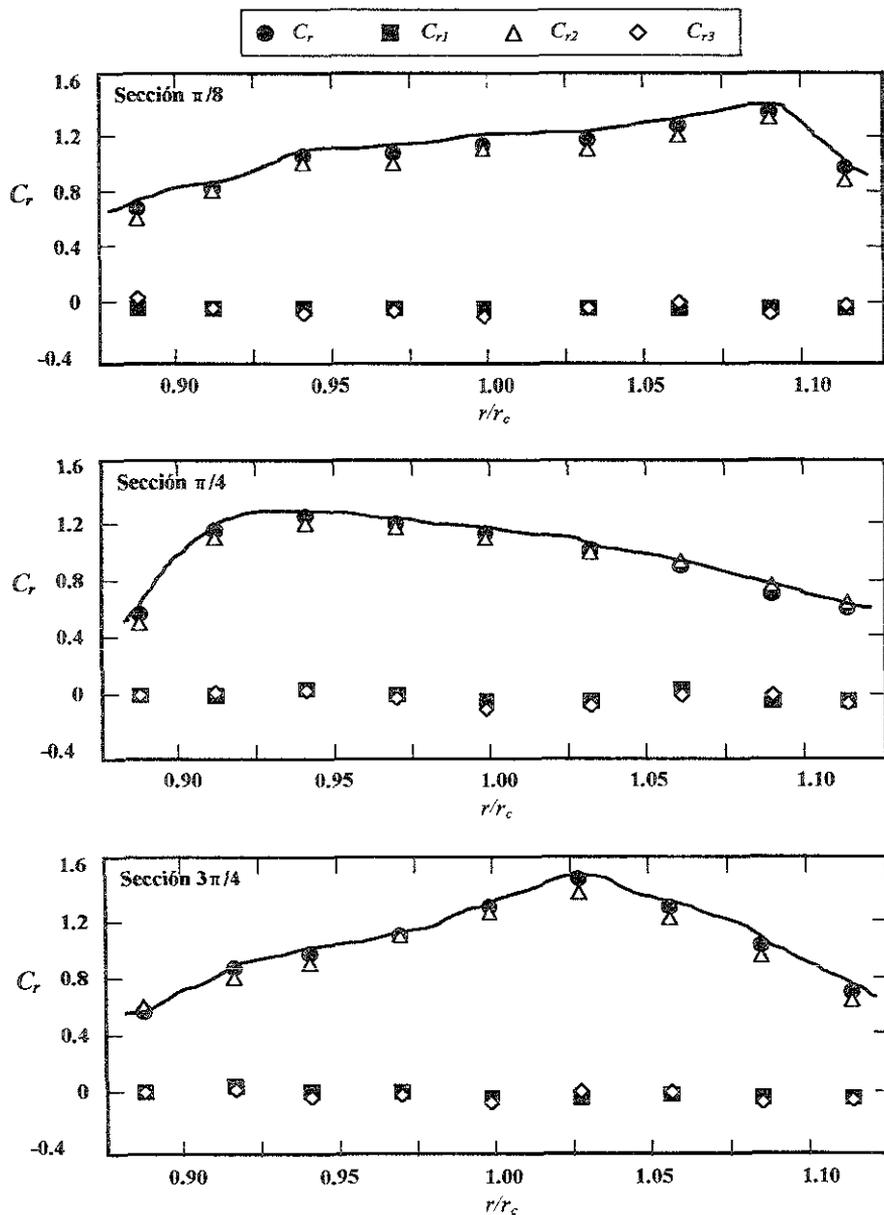


Figura 3.4 Coeficientes de pendiente transversal resultantes para modelo de sección trapezoidal

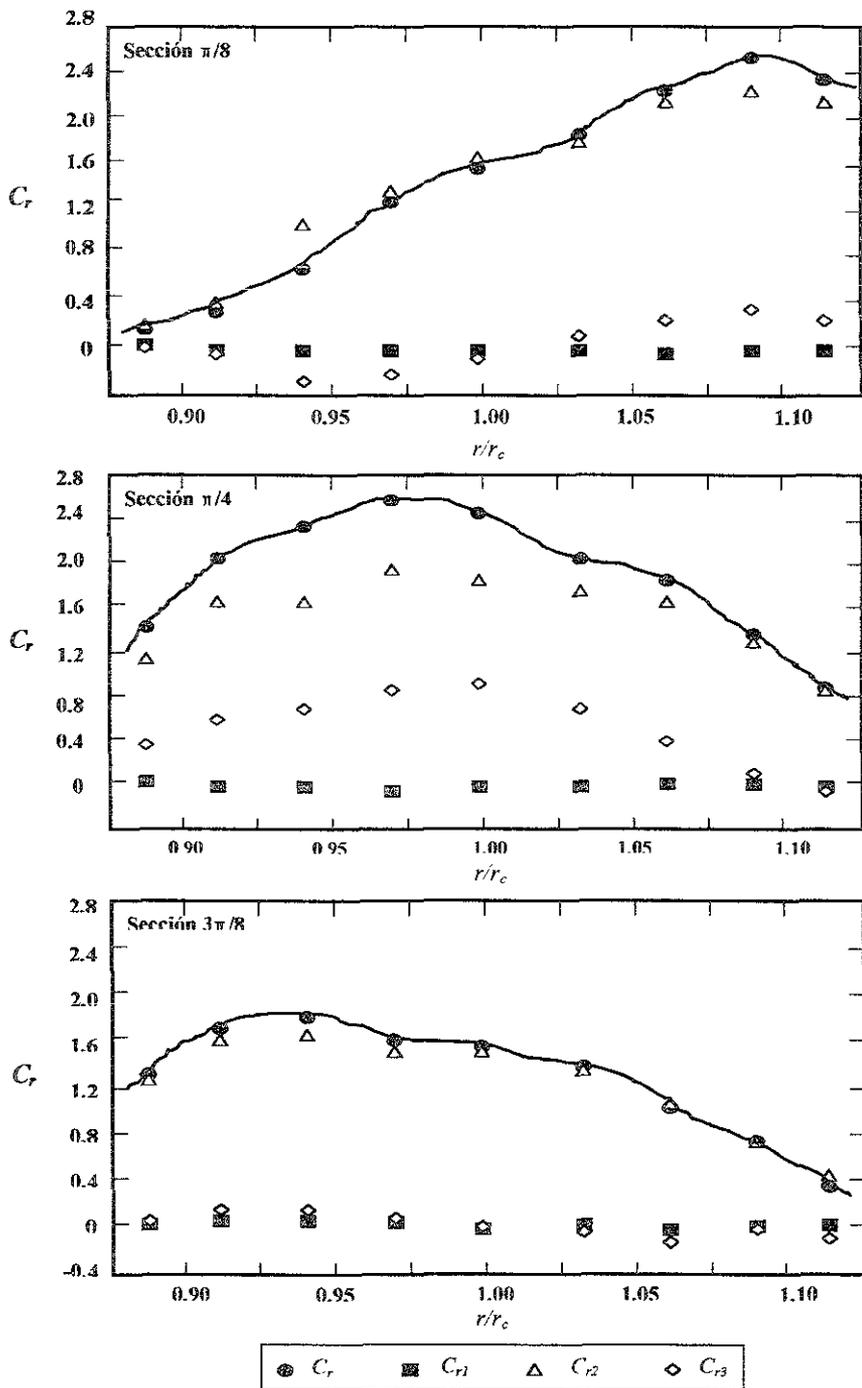


Figura 3.5 Coeficientes de pendiente transversal resultantes para modelo de cauce natural

Como S_r es el valor de la diferencia en el nivel de la superficie libre del agua por cada unidad de desplazamiento radial, se aplica la ecuación 3.1.20 para conocer la diferencia de nivel entre 2 posiciones de una sección transversal, como sigue

$$\Delta h = \int_{r_c}^r S_r dr = \frac{V_m^2}{2g} \int_{r_c}^r \frac{C_r}{r} dr \tag{3.1.20}$$

donde

- r_c radio al eje del canal,
- r coordenada radial del punto considerado,
- Δh diferencia de nivel entre dos puntos localizados en r y r_c .

Si se deja la integral al lado derecho del signo de igualdad y el resto al lado izquierdo, se obtiene un cociente adimensional

$$C_s = \frac{r_c}{T} \frac{\Delta H}{\frac{V_m^2}{2g}} = \frac{r_c}{T} \int_{r_c}^{r_2/r_c} \frac{C_r}{\left(\frac{r}{r_c}\right)} d\left(\frac{r}{r_c}\right) \tag{3.1.21}$$

donde

- ΔH diferencia total de nivel en la superficie libre, entre las dos paredes del canal,
- r_1 radio interior del canal en la superficie libre,
- r_2 radio exterior del canal en la superficie libre,
- $T = r_2 - r_1$, ancho de superficie libre, igual a b si el canal fuera rectangular.

A pesar de que C_s es adimensional, implica una relación directa entre ΔH y V_m .

Una vez que se multiplican ambos lados de la ecuación 3.1.21 por la relación $\frac{r_c}{T}$ para considerar el radio de curvatura y el ancho de la superficie libre, se separa la ecuación 3.1.21 en dos partes.

C_s teórico

r_c, r_1, r_2 y T son poco variables. C_r y toda la integral se resuelven para cualquier sección transversal usando integración numérica.

$$\frac{r_c}{T} \int_{\frac{r_1}{r_c}}^{\frac{r_2}{r_c}} \frac{C_r}{\left(\frac{r}{r_c}\right)} d\left(\frac{r}{r_c}\right)$$

C_s experimental

V_m es cuantificable en cualquier tramo recto a partir del gasto conocido y la ecuación de continuidad; ΔH se mide fácilmente en cualquier sección, lo mismo que T .

$$\frac{r_c}{T} \frac{\Delta H}{\frac{V_m^2}{2g}}$$

3.1.4 Resultados obtenidos

La figura 3.6 muestra la comparación entre lo medido y lo teórico en cuanto a C_s

Lo interesante de la gráfica de la figura 3.6 es el hecho de que C_s en el canal trapecial se mantiene más o menos constante. C_s comienza a desarrollarse en el tramo recto a $0.2r_c$ de distancia aguas arriba del

la curva y se estabiliza casi inmediatamente que entra el agua a ella. El decaimiento inicia poco antes de salir de la curva. La gran ventaja de este comportamiento es el hecho de que por ser C_s un valor adimensional, es generalizable para canales trapeciales no muy angostos (esto último por el efecto pared que tendría mayor importancia en canales muy angostos). Los autores *Lien Yen* y *Chien Yen* (1971) consideran a partir de la figura 3.6 que ese valor es 2.2

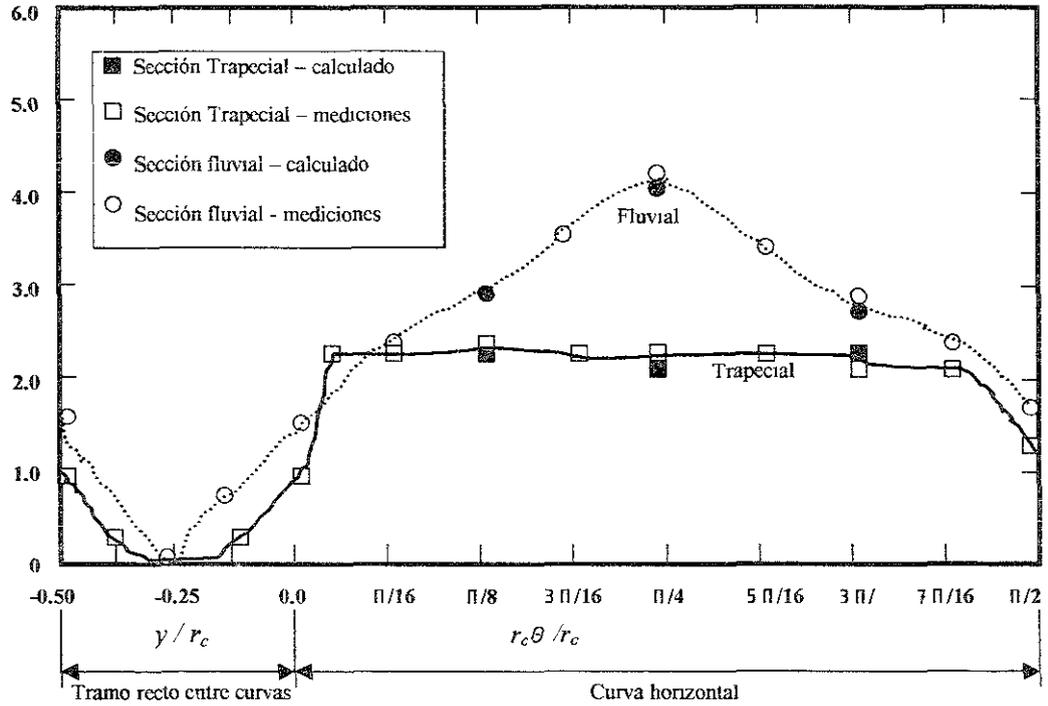


Figura 3.6 Comportamiento del coeficiente de sobreelevación, teórica y experimentalmente

$$C_s \cdot \frac{V_m^2}{2g} \cdot \frac{T}{r_c} = 2.2 \frac{V_m^2}{2g} \cdot \frac{T}{r_c} = 1.1 \frac{V_m^2}{g} \cdot \frac{T}{r_c} = \Delta H \tag{3.1.22}$$

3.1.5 Observaciones y comentarios

La concordancia entre lo teórico y lo medido en la figura 3.6 demuestra que el planteamiento teórico se ajusta a la realidad. En el modelo de cauce natural el factor C_s se hace más pronunciado donde la plantilla del canal está más inclinada transversalmente (en la sección $\pi/4$), lo cual no es de extrañar ya que la ecuación 3.1.21 no obliga a que la diferencia de tirantes entre la pared interior y la exterior del canal sea a nivel de la superficie libre, sino que puede ser al nivel de plantilla. Es de suponerse que en el modelo con plantilla inclinada hacia afuera de la curva, el fluido se acumule más en el lado exterior que en el interior debido a la fuerza centrífuga y por tanto aunque la plantilla se haya deformado libremente para compensar ese desplazamiento aun se puede ver una sobreelevación al nivel de superficie libre. Eso se

refleja en el hecho de que el factor C_{r3} sea más importante en el modelo de plantilla deformada que en el de plantilla horizontal, pues hay más desplazamiento en el modelo de cauce natural.

De esta manera se tiene una ecuación sencilla y sustentada de fácil aplicación (ecuación 3.1.22). Es de suponer que éste mismo resultado es aplicable a canales de sección rectangular por ser de comportamiento más simple que los canales trapeziales y porque la ecuación 3.1.22 depende del ancho de superficie libre T , no del ancho de plantilla b . El problema de la sobreelevación en canales artificiales con plantilla transversalmente horizontal parece estar resuelto, por lo menos en canales lo suficientemente anchos para considerar despreciable el efecto de pared y en régimen subcrítico. Esto último porque la ecuación 3.1.22 fue probada por el autor de esta tesis usando el Excel dando más de 35 combinaciones aleatorias de gasto Q , ancho de plantilla b y tirante medio h_m y se observó que en algunos casos, desde un valor de 1.4 en el número de Froude la sobreelevación superaba el doble del tirante medio, es decir, el agua se desprendía de la pared interior del canal, lo cual no se puede asegurar que suceda en la realidad ya que el efecto de las *ondas cruzadas* (característico del régimen supercrítico) mencionado en el primer capítulo, puede influir en este comportamiento de manera no analizada en este trabajo.

3.2 Pérdidas de energía

Para el problema de pérdidas de energía que se presenta en una trayectoria horizontal curvilínea, se considera que la teoría del profesor *Howard H. Chang* (1983) da una buena descripción del fenómeno, así como ecuaciones fundamentadas para predecirlo.

3.2.1 Causas de las pérdidas de energía

Chow (1959) y otros autores concluyeron de sus experimentos que las pérdidas totales de energía debidas a la circulación en curvas horizontales son de orden similar a las pérdidas que experimenta la misma corriente de agua en el mismo canal en la zona rectilínea pero con la rugosidad incrementada.

Las causas de pérdidas de energía en curvas horizontales son.

- a) *Fricción interna del líquido* (agua) debida a la circulación secundaria.
- b) *Resistencia en la frontera del líquido y el canal*, asociada con los esfuerzos cortantes transversales.
- c) *Pérdidas por turbulencia*, generada al separarse el fluido de alguna de las paredes del canal, esto en el caso de curvas muy agudas (de radio relativamente pequeño) y/o velocidades altas.
- d) *Pérdidas por turbulencia generada a partir de pequeños saltos hidráulicos* ocurrientes en zonas al interior de la curva con alto número de Froude, ya que los tirantes son menores y las velocidades pueden ser muy elevadas.

Las 2 primeras causas son de interés, ya que las otras 2 son más bien características de flujo en régimen supercrítico

3.2.2 Modelo analítico

El modelo analítico de *Chang* (1983) inicia de la siguiente manera:

$$P = P' + P'' \quad (3.2.1)$$

P representa la pérdida de energía por unidad de longitud en el canal por unidad de tiempo, que en el caso de flujo curvilíneo es igual a la suma de la pérdida por flujo longitudinal P' más la debida al flujo transversal P'' .

Las unidades de P son $\left[\frac{J}{m-s} \right]$ unidad de energía J (joule) por cada metro longitudinal por cada segundo transcurrido, esto debido a que las pérdidas no dependen de una masa estática de agua, sino dinámica, así que la interpretación que hay que dar a estas unidades es *joules perdidos en un tramo recorrido en un lapso de tiempo*.

Por otro lado, ya que las pérdidas dependen del líquido de que se trata y del gasto que circula, se tiene

$$P' = \gamma Q S' \quad (3.2.2) \qquad P'' = \gamma Q S'' \quad (3.2.3)$$

donde

γ peso específico del líquido.

Q gasto circulante

S' gradiente de energía longitudinal.

S'' gradiente de energía transversal.

Tanto S' como S'' tienen unidades [m/m], lo que significa metros perdidos de columna de agua por cada metro horizontal recorrido, en dirección longitudinal y transversal, respectivamente. Todas las variables involucradas son escalares, así que la ecuación 3.2.1 también da por resultado una cantidad escalar. Al sustituir las ecuaciones 3.2.2 y 3.2.3 en la ecuación 3.2.1, γQ es el factor común, por lo que la suma resultante es $S' + S''$. Ambos gradientes no son cantidades vectoriales en igual dirección, sin embargo se pueden sumar ya que afectan directamente, de manera lineal y mutuamente independiente en la columna de agua representativa de la línea de energía. Lo que interesa entonces es obtener el valor de ambos gradientes (γ y Q deben de ser conocidos de antemano para cualquier sistema de canales que se quiera analizar)

El punto de vista que asume Chang (1983) es que *el total de energía que pierde el fluido es igual al trabajo que realiza sobre el entorno* y esto se explica primero analizando un tramo rectilíneo. Para esto se plantea la integral que representa la potencia por unidad de longitud.

$$P = \int V \cdot dF \quad (3.2.4)$$

donde

V vector de velocidad media del fluido [m/s]

F fuerza por unidad de longitud del canal [N/m]

F es el total de fuerzas que en su avance ejerce el fluido sobre las paredes y plantilla del canal y que éstos responden con esfuerzos cortantes debidos a la fricción

Se reemplaza ahora el vector velocidad por la componente de velocidad longitudinal v porque es en esa dirección donde se reflejan el total de pérdidas y porque es la componente más representativa de la velocidad total.

La fuerza por unidad de longitud se reemplaza por su equivalente, es decir

$$\Delta F = \gamma \cdot \Delta z \cdot \Delta y \cdot S \quad (3.2.5)$$

donde

z coordenada vertical,

y coordenada transversal en tramo rectilíneo,

γ peso volumétrico del líquido

La interpretación que se da para entender la ecuación 3.2.5 es la siguiente: En este caso las fuerzas de fricción en conjunto que experimenta el fluido llevan implícita una aceleración que se opone a su movimiento (hay que recordar que la segunda ley de Newton dice $F = ma$). El fluido para mantener su gasto constante responde con otra fuerza de igual magnitud, llamada ΔF , de donde $\Delta z \cdot \Delta y$ es el área de cualquier sección transversal, que multiplicada por el peso volumétrico da por resultado la masa (multiplicada a su vez por la aceleración gravitatoria) del fluido por unidad de longitud del canal. Por otro lado, una aceleración siempre implica transformación y/o transmisión de energía en la mecánica newtoniana, así que aunque S no tiene unidades de aceleración, sí lo representa ya que con esta pérdida (o transmisión) de energía es que el fluido compensa la aceleración contraria, producto de la fricción.

Sustituyendo la ecuación 3.2.5 y el componente de velocidad longitudinal en la ecuación 3.2.4, se tiene

$$P = \int \int V \cdot dF = \int \int v \cdot \gamma \cdot S \cdot dz dy \quad (3.2.6)$$

donde

- v velocidad longitudinal,
- S gradiente total,
- dz diferencial de tirante h ,
- dy diferencial del ancho del canal.

La doble integral a lo ancho y a lo alto del canal da el área transversal que multiplicada por la velocidad, da por resultado el gasto total Q . De esta manera se obtiene una ecuación con la forma de las ecuaciones 3.2.2 y 3.2.3 y que es

$$P = \gamma QS \quad (3.2.7)$$

S' (el gradiente por flujo longitudinal) se puede obtener de fórmulas comunes cuya efectividad ya está aceptada en la actualidad, como es el caso de la fórmula de Manning.

A continuación se desarrolla la ecuación 3.2.4 para P'' , pérdida de energía por flujo transversal en trayectoria curvilínea. Ahora la aceleración está dada por la aceleración normal en la dirección longitudinal y la aceleración gravitatoria en la dirección vertical

$$P'' = \int V \cdot dF = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^h \rho \left(u \frac{v^2}{r} + wg \right) dz \cdot dr \quad (3.2.8)$$

donde

- u componente transversal de la velocidad total,
- w componente vertical de la velocidad total,
- ρ densidad del líquido.

El componente vertical de la velocidad w es muy pequeño y el trabajo realizado por el ascenso y descenso del nivel del agua se puede considerar mutuamente anulado, así que w es prácticamente igual a 0.

Aunque en la ecuación 3.2.8 pareciera que no hace falta el valor de ningún esfuerzo cortante, en realidad éste y la rugosidad influyen directamente en la distribución no uniforme de los dos componentes de velocidad u y v que interesan

En la figura 3.7 el lector puede darse una idea de cómo se distribuyen u y v . De las distribuciones de velocidad la que resulta más difícil de describir con ecuaciones apropiadas es la distribución vertical de la velocidad transversal debido, entre otras cosas, a su cambio de sentido.

Además de la forma de la distribución de las velocidades, el lector debe de imaginar que las magnitudes varían en dirección transversal y longitudinal.

3.2.3 Distribución de la velocidad longitudinal

La velocidad longitudinal varía en dirección vertical y radial. Para la distribución radial se considera la forma que obtuvo *Odgaard* (1981)

$$v_m = V_m \cdot \left(\frac{h}{h_m} \right) \left(\frac{r_c}{r} \right) \quad (3.2.9)$$

donde

v_m velocidad longitudinal promediada de toda la distribución vertical en la posición r ,

r_c radio de la línea media del canal,

h tirante en la posición r ,

h_m tirante en el eje del canal,

V_m velocidad longitudinal media del fluido

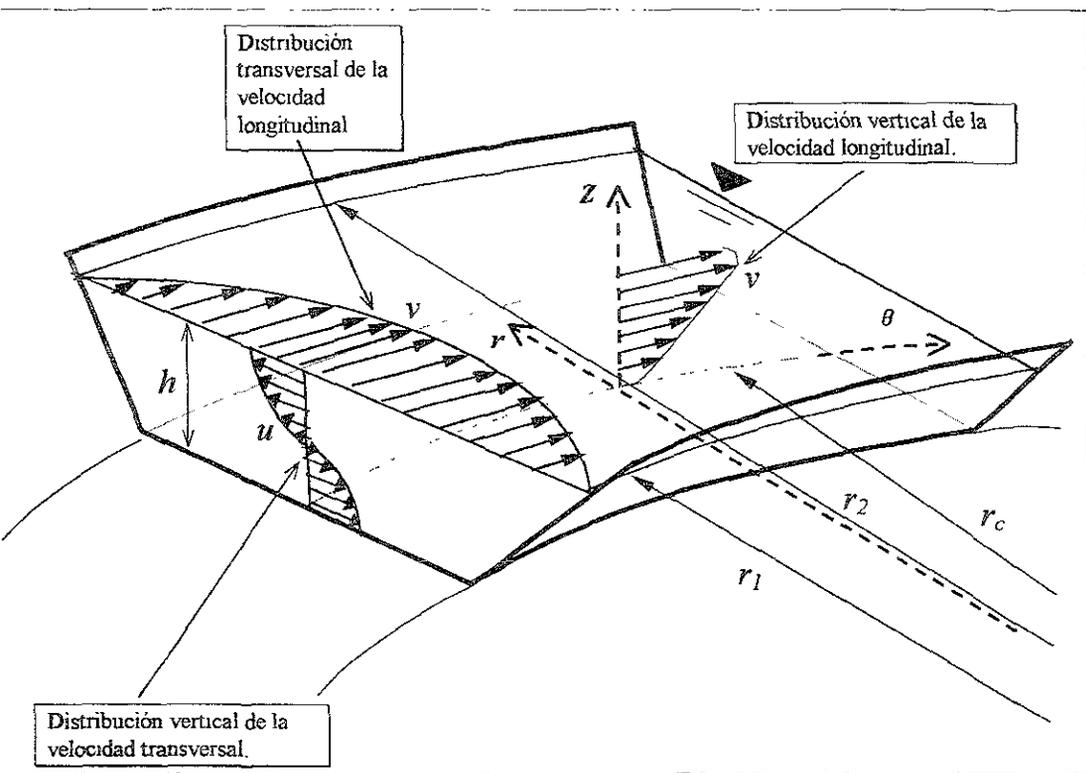


Figura 3.7 Distribución de los componentes de la velocidad

Aunque no se profundiza en los estudios de *Odgaard* (1981) debido a que están muy enfocados a cuestiones de granulometría de ríos, resulta interesante revisar el comportamiento gráfico de la ecuación 3.2.9 que *Odgaard* (1981) propuso de sus trabajos experimentales

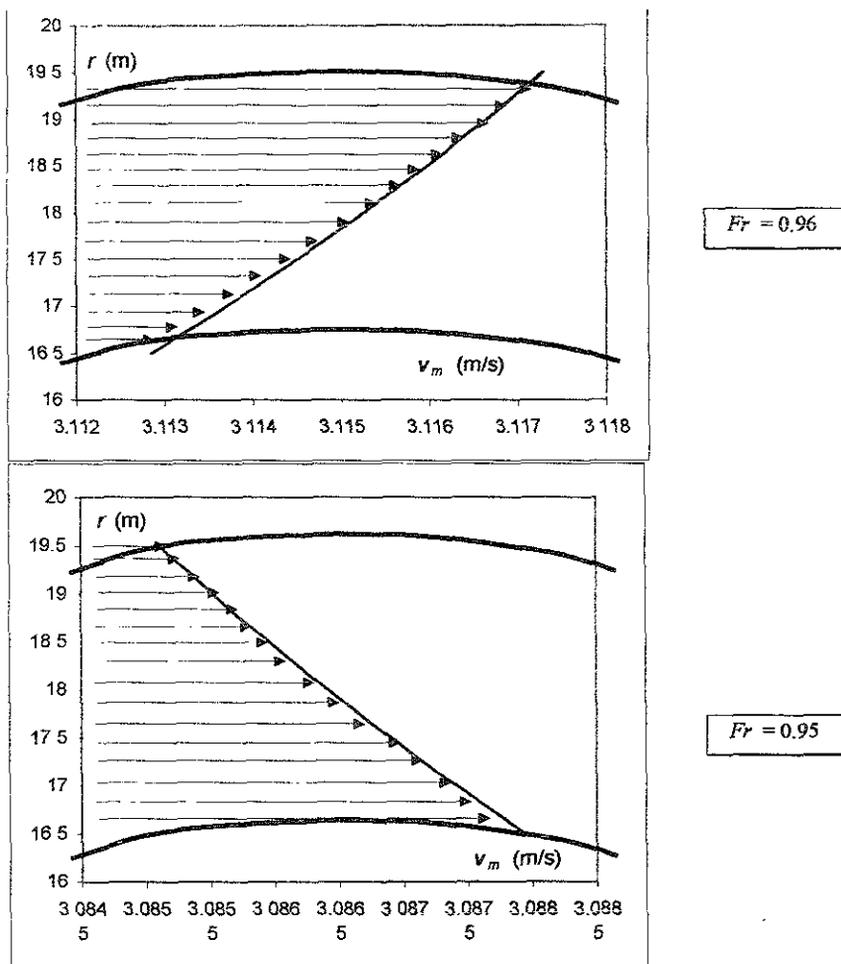
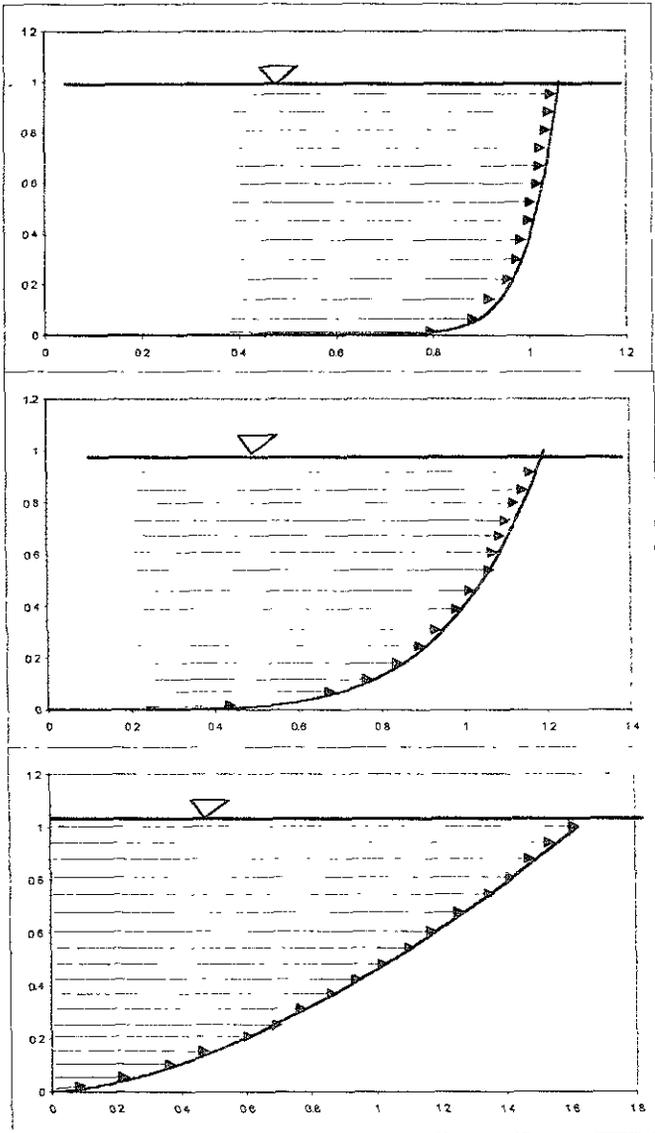


Figura 3.8 Vista en planta que muestra la inversión en la forma del perfil transversal de la velocidad longitudinal v_m cerca del régimen crítico.

Al asignar distintos valores de gasto, tirante medio y ancho de plantilla (considerando sección rectangular) para generar en computadora una cantidad n -ésima de combinaciones posibles, se observó que cuando el número de Froude vale aproximadamente 0.96 se da una *inversión* en la forma del perfil transversal de velocidad media v_m . Dicho en otras palabras, para condiciones de régimen subcrítico la velocidad longitudinal tiende a ser mayor cerca de la pared interior del canal curvo mientras que en

condiciones de régimen supercrítico sucede lo contrario; la frontera de regímenes ($f/r = 1$) casi coincide con el punto de inversión 0.96. El análisis es sobre la ecuación 3.2.9, la cual a su vez es el reflejo de los trabajos experimentales de *Odgaard* (1981). Lo mencionado se puede visualizar mejor en la vista en planta de la figura 3.8



La figura 3.9 muestra la forma de la distribución vertical de la velocidad longitudinal v que genera la ecuación 3.2.10 para un gasto y tirante unitarios

El primer caso corresponde a un factor de fricción bajo 0.005, el segundo caso a f medio 0.05 y tercer caso a f alto 0.5

Figura 3.9 Perfil vertical de velocidad longitudinal según *Zimmermann y Kennedy* (1978)

Los perfiles de velocidad vistos en planta de la figura 3.8 corresponden a un ejemplo de canal con un gasto de $10 \text{ m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla igual a 3 m y radio de curvatura al eje del canal de 18 m . El tirante medio en el primer caso es de 1.07 m y número de Froude $Fr = 0.96$, mientras que el tirante medio en el segundo caso es de 1.08 m con número de Froude $Fr = 0.95$. De esta manera el lector puede observar cómo cambia la forma de la distribución de velocidades.

No debe de sorprender la inclinación tan pronunciada de los perfiles de la figura 3.8, ya que en ambos casos la escala del eje de las abscisas ha sido incrementada para que se visualicen mejor las tendencias. Evidentemente no se está considerando en estas gráficas el efecto de pared que se explica más adelante.

Para la distribución vertical de la velocidad longitudinal Zimmermann y Kennedy (1978) obtuvieron una ecuación que genera perfiles similares a los obtenidos por varios autores en distintas mediciones

$$v = \left[\frac{1 + \frac{1.131}{\sqrt{f}}}{\frac{1.131}{\sqrt{f}}} \right] v_m \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{\sqrt{f}}{1.131}} \tag{3.2.10}$$

donde f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach.

La variable v_m no debe de causar confusión, se trata específicamente de la velocidad longitudinal promediada verticalmente y que no varía con la profundidad, por lo que no proporciona la velocidad puntual en toda una sección transversal, así que puede ser vista como una variable requerida en la ecuación 3.2.10 y cuya distribución transversal es una referencia de cómo varía en dirección radial v . Una vez que se establece la posición radial de interés, el valor de v obtenido de la ecuación 3.2.10 *si* es la velocidad puntual longitudinal en cualquier punto a lo largo del tirante local.

3.2.4 Efecto de pared

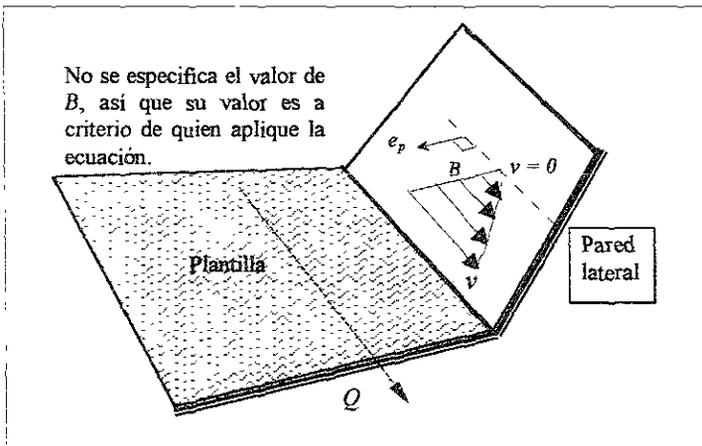


Figura 3.10 Efecto de pared sobre la velocidad longitudinal

En la cercanía de las paredes laterales del canal, v tiene un decaimiento brusco hasta ser nula en la superficie de la pared. Para esto, Zimmermann y Kennedy (1978) sugieren seguir la misma ley de decaimiento 3.2.10, sólo que en lugar de $\frac{z}{h}$ se maneja la distancia ortogonal a la pared $\frac{e_p}{D}$ y en lugar de v_m se usa la v máxima en la cercanía de las paredes, es decir la última v obtenible con 3.2.10 usando $\frac{z}{h}$ (figura 3.10).

Debido a que la velocidad transversal u depende en parte de la velocidad longitudinal v , también se ve drásticamente disminuida en la cercanía de las paredes por el efecto de pared.

3.2.5 Distribución de la velocidad transversal

La velocidad transversal u tiene un patrón de comportamiento notablemente más complicado que la velocidad longitudinal (figura 3.11), no solo no varía linealmente a lo largo del eje vertical, sino que sus extremos no son iguales, mientras que al fondo del canal vale casi cero, en la superficie libre está cerca de su valor máximo y en sentido contrario al que tiene cerca de la plantilla.

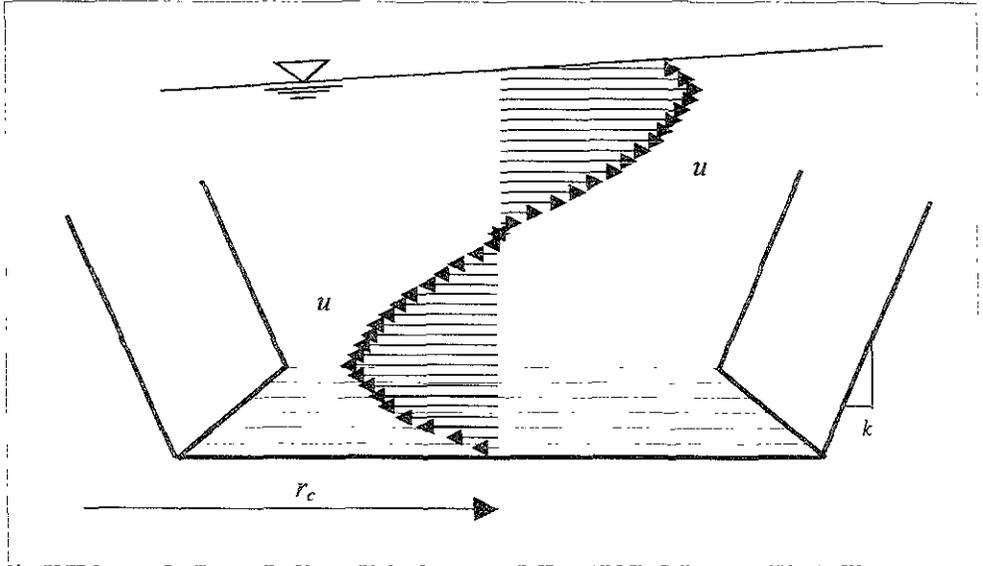


Figura 3.11 Forma de la distribución de la velocidad transversal u sobre la línea media del canal (vista de sección transversal)

Hasta ahora las ecuaciones que mejor describen la distribución de la velocidad transversal a lo largo del eje vertical z y a cualquier radio r son las que desarrolló Kikkawa (1976)

$$\frac{u}{V_m} = \left(\frac{v_m}{V_m}\right)^2 \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left[\xi_1 \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{\kappa} \frac{v_*}{V_m} \xi_2 \left(\frac{z}{h}\right) \right] \quad (3.2.11)$$

$$\xi_1 \left(\frac{z}{h}\right) = -15 \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{15}{54} \right] \quad (3.2.12)$$

$$\xi_2 \left(\frac{z}{h}\right) = \frac{15}{2} \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln \left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{19}{54} \right] \quad (3.2.13)$$

Donde v_* es la velocidad de cortante y κ es la constante de von Karman = 0.4 en fluidos homogéneos.

Las ecuaciones 3.2.11, 3.2.12 y 3.2.13 generan un perfil de velocidad muy similar al de la figura 3.11 con valores regulares de factor de fricción. (Si se usan valores absurdamente altos se genera también un perfil absurdo, si el factor de fricción vale cero, el perfil no se reduce a cero en el fondo del canal).

A pesar de lo larga que llega a ser, la ecuación 3.2.11 no es tan complicada como parece, ya que no involucra muchas variables distintas ni operaciones muy complejas (como variables - exponentes, etc). El asunto se complica especialmente al sustituir las distribuciones transversal y vertical de la velocidad longitudinal (ecuaciones 3.2.9 y 3.2.10) considerando además el *efecto de pared*, junto con la distribución de la velocidad transversal (ecuación 3.2.11) y todo en la ecuación 3.2.8 para resolver así la doble integral. Se hicieron las sustituciones en la ecuación 3.2.8 pero el tamaño de la doble integral hacía sumamente complicado resolverla y con gran probabilidad de cometer errores, sin embargo es ese el modelo analítico que describe de manera precisa las pérdidas de energía por flujo transversal.

3.2.6 Hipótesis adicionales

Debido a que un grado de exactitud demasiado refinado haría poco práctica y por tanto poco aplicable la teoría sobre pérdidas de energía por lo complejas que serían las ecuaciones, es necesario hacer algunas hipótesis que simplifiquen el método

- I. Solo se consideran secciones rectangulares o trapeciales simétricas *anchas*, de manera que transversalmente casi no varían la velocidad longitudinal v ni la transversal u , $v_m = V_m$ y no hace falta considerar la ecuación 3.2.9
- II. La hipótesis anterior lleva a que la zona afectada por el *efecto de pared* en la proximidad de las paredes del canal sea proporcionalmente muy pequeña, por lo que se desprecia ese efecto y la distribución transversal de las velocidades u y v es uniforme respecto a su comportamiento en la línea media del canal.
- III. Cuando se requiere el ancho del canal para integrar se maneja el ancho de superficie libre T y los radios interior r_1 y exterior r_2 que de ella se generen por ser a ese nivel donde se presenta la sobreelevación. No se considera la variación vertical por taludes. Para tabulaciones de parámetros hidráulicos *si* se distingue entre ancho de superficie libre y ancho de plantilla.
- IV. El tirante medio se sigue considerando sobre el eje del canal ($r = r_o$), aun si se puede suponer que la sobreelevación junto con el desplazamiento lateral en la curva cambien ligeramente su posición.

Se considera que las hipótesis no restringen mucho la aplicabilidad de la teoría que aquí se desarrolla, por lo que se conserva alta exactitud en el método por desarrollar.

3.2.7 Alternativa simplificada

Chang (1983) propone como hipótesis adicionales que la distribución vertical de la velocidad transversal u sea una línea recta y que no hay sobreelevación a lo largo de la curva, por lo que llega a ecuaciones mucho más simplificadas. A partir de las de Kikkawa (1976), Chang (1983) obtiene una forma mucho más simplificada para la velocidad transversal, que es

$$u = \frac{2}{\kappa} \left(3.75 - \frac{1.875 v_*}{V_m} \right) \left(z - \frac{h_m}{2} \right) \frac{V_m}{r_c} \tag{3.2.14}$$

Para las pérdidas por flujo transversal, Chang (1983) simplificó la ecuación 3.2.8 hasta obtener la ecuación.

$$P'' = \gamma Q \left(\frac{2.86 \bar{f} + 2.07 f}{0.565 + \bar{f}} \right) \left(\frac{h_m}{r_c} \right)^2 Fr^2 \tag{3.2.15}$$

La ecuación 3.2.15 expresa que las pérdidas transversales son directamente proporcionales al cociente tirante medio h_m entre radio de curvatura r_c , al número de Froude y a la rugosidad del canal. Las ecuaciones 3.2.14 y 3.2.15 vienen siendo parte de lo que llama *modelo simplificado*. No se puede considerar muy apropiado el modelo simplificado por despreciar la sobreelevación en flujo curvilíneo horizontal, la cual es, junto con las pérdidas de energía, uno de los dos fenómenos principales que caracterizan a ese tipo de flujo. La ecuación 3.2.14 requiere el valor de la velocidad de cortante v_* , la cual no es difícil de cuantificar si se considera un comportamiento similar al flujo uniforme en cuanto a esfuerzos cortantes en el perímetro mojado.

3.2.8 Integración

$$P'' = \int V \cdot dF = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^h \rho \left(u \frac{v^2}{r} + wg \right) dz dr \tag{3.2.8}$$

Se requiere resolver la integral doble anterior. El primer paso es recordar que la velocidad vertical es despreciable $w \approx 0$. Ahora se obtendrá u de las ecuaciones de Kikkawa (1976)

Sustituyendo las ecuaciones 3.2.12 y 3.2.13 en la ecuación 3.2.11 y desarrollando

$$\frac{u}{V_m} = \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left[-15 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{15}{54} \right] - \frac{1}{\kappa} \frac{v_*}{V_m} \frac{15}{2} \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 - \frac{19}{54} \right] \right]$$

$$u = \frac{15h}{r} \frac{V_m}{\kappa} \left[-\frac{15}{54} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{1.25v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1.25v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{0.625v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{0.44v_*}{V_m} \right]$$

$$u = \frac{37.5h}{r} V_m \left[\left(\frac{0.44v_*}{V_m} - \frac{15}{54} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{0.625v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{1.25v_*}{V_m} - 1 \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{1.25v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) \right]$$

sustituyendo en la ecuación 3.2.8

$$= \int_0^r \int_0^h \rho \frac{v^2}{r} \frac{37.5h}{r} V_m \left[\left(\frac{0.44v_*}{V_m} - \frac{15}{54} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{0.625v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{1.25v_*}{V_m} - 1 \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{1.25v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) \right] dz dr$$

Recordando que la distribución vertical de la velocidad longitudinal según *Zimmermann* y *Kennedy* (1978) está dada por

$$v = \left[\frac{1 + \frac{1.131}{\sqrt{f}}}{\frac{1.131}{\sqrt{f}}} \right] v_m \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{\sqrt{f}}{1.131}} \tag{3.2.10}$$

Ya que no se considera variación transversal de la velocidad longitudinal $v_m = V_m$

Llamando $m = \frac{1.131}{\sqrt{f}}$ y agregando un factor unitario $\frac{h}{h}$ para que la primera integral sea respecto de $\frac{z}{h}$, se

sustituye la ecuación 3.2.10 en la doble integral y resulta

$$= \int_0^r \int_0^h \rho \cdot V_m^3 \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{z}{h} \right)^{2m} \left[\left(\frac{16.5v_*}{V_m} - \frac{5625}{54} \right) + \left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{46.88v_*}{V_m} - 37.5 \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{46.88v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) \right] d \left(\frac{z}{h} \right) \cdot dr$$

Constantes extraíbles de la doble integral.
Términos que se integran respecto de $\frac{z}{h}$

Término que se integra respecto de r

Debido al tamaño de la integral, es necesario separarla en dos para poder continuar

▪ Integración de los términos dependientes de $\frac{z}{h}$

Debido al factor agregado $\frac{h}{h}$ los límites de la integral son 0 y 1 en lugar de 0 y h .

$$\int_0^1 \left[\underbrace{\left(\frac{16.5v_*}{V_m} - \frac{5625}{54} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{2m}}_1 + \underbrace{\left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{2+2m}}_2 + \underbrace{\left(\frac{46.88v_*}{V_m} - 37.5 \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{2m} \ln \left(\frac{z}{h} \right)}_3 - \underbrace{\frac{46.88v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^{2+2m} \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right)}_4 \right] \cdot d \left(\frac{z}{h} \right)$$

El tercer y cuarto términos requieren integración por partes que no se incluye aquí por ser un paso elemental.

$$\int = \left[\frac{\left(\frac{16.5 v_*}{V_m} - \frac{562.5}{54} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{2+m}{m}}}{\frac{2+m}{m}} + \frac{\left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44 v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{2+3m}{m}}}{\frac{2+3m}{m}} + \left(\frac{46.88 v_*}{V_m} - 37.5 \right) A - \frac{46.88 v_*}{V_m} A' \right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{m}{2+3m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{2+3m}{m}} \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \left(\frac{m}{2+3m} \right)^2 \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{2+3m}{m}}$$

$$A' = \left(\frac{m}{2+3m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{2+3m}{m}} \left[\ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{2m}{2+3m} \ln \left(\frac{z}{h} \right) + 2 \left(\frac{m}{2+3m} \right)^2 \right]$$

Valuando todo de 0 a 1, se obtiene \mathbf{O} como resultado parcial de la primera integración

$$\int = \frac{\left(\frac{16.5 v_*}{V_m} - \frac{562.5}{54} \right)}{\frac{2+m}{m}} + \frac{\left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44 v_*}{V_m} \right)}{\frac{2+3m}{m}} + \left(-\frac{46.88 v_*}{V_m} + 37.5 \right) \left(\frac{m}{2+3m} \right)^2 - \frac{93.75 v_*}{V_m} \left(\frac{m}{2+3m} \right)^3 \longrightarrow \mathbf{O}$$

Aunque los términos que se integraron respecto de $\frac{z}{h}$ dependen de h (la cual a su vez depende de r), no se genera un error por realizar las dos integrales por separado ya que la integral respecto de la diferencial $d\left(\frac{z}{h}\right)$ es la primera que se realiza y una vez que su resultado se valúa en los extremos (de 0 a 1), desaparece la variable h y la segunda integral ya solo depende de $\frac{h^2}{r^2}$ y se resuelve a continuación.

▪ Integración de los términos dependientes de r

El término que se integra respecto de r es $\int_{r_1}^{r_2} \frac{h^2}{r^2} \cdot dr$

Ya que h no es constante en dirección transversal, hay que considerar a la ecuación 3.1.22, la cual describe la sobreelevación como sigue

$$1.1 \frac{V_m^2}{g} \cdot \frac{T}{r_c} = \Delta H \tag{3.1.22}$$

donde $T = (r_2 - r_1)$ es el ancho de superficie libre y $\Delta H = 2(h_2 - h_m) = 2(h_m - h_1)$ es la sobreelevación. El subíndice 1 significa junto a la pared interior y el 2 junto a la pared exterior (Figura 3.12)

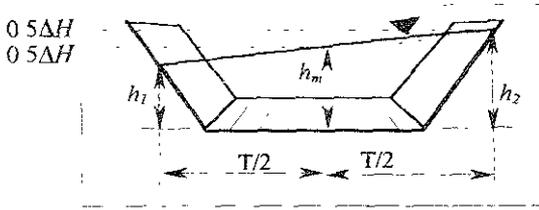


Figura 3.12 Sección transversal de canal con sección trapezoidal

Como una ley que describa el perfil transversal del agua se propone la ecuación 3.2.16

$$h = h_m + \frac{(r - r_c)}{0.5(r_2 - r_1)} [0.5\Delta H] \tag{3.2.16}$$

La ventaja de la ecuación 3.2.16 es que de la pared interior a la línea media el segundo término le resta a h_m y le suma en la segunda mitad (no se requieren dos ecuaciones), generando además un perfil convexo ΔH se obtiene de la ecuación 3.1.22, la cual se sustituye y resulta

$$h = h_m + \frac{1.1(r - r_c) V_m^2}{r_c g} \tag{3.2.17}$$

La ecuación 3.2.17 es muy útil ya que no depende de los radios interior y exterior y la variable r aparece una sola vez, lo que facilita la integración h_m sigue siendo el tirante sobre el eje del canal Sustituyendo la ecuación 3.2.17 en los términos que se integran respecto de r , se obtiene

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{h^2}{r^2} \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\left(h_m + \frac{1.1(r - r_c) V_m^2}{r_c g} \right)^2}{r^2} \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{h_m^2 + \frac{2.2h_m(r - r_c) V_m^2}{r_c g} + \frac{1.1^2(r - r_c)^2 V_m^4}{r_c^2 g^2}}{r^2} \cdot dr$$

Para facilitar los siguientes pasos se hace un cambio de las variables:

$$a = \frac{2.2h_m V_m^2}{r_c g} \qquad a' = \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c^2 g^2}$$

así la integral se simplifica y resulta

$$\begin{aligned} &= \int_{r_1}^{r_2} h_m^2 \frac{dr}{r^2} + a \frac{dr}{r} - ar_c \frac{dr}{r^2} + a' dr - 2a' r_c \frac{dr}{r} + a' r_c^2 \frac{dr}{r^2} = \int_{r_1}^{r_2} \left(h_m^2 - ar_c + a' r_c^2 \right) \frac{dr}{r^2} + (a - 2a' r_c) \frac{dr}{r} + a' dr = \\ &= \left(h_m^2 - ar_c + a' r_c^2 \right) \left[-\frac{1}{r} \right] + (a - 2a' r_c) \ln[r] + a' r \Big|_{r_1}^{r_2} = \left(h_m^2 - ar_c + a' r_c^2 \right) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + (a - 2a' r_c) \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + a' (r_2 - r_1) = \end{aligned}$$

$$= \left(h_m^2 - 2.2h_m \frac{V_m^2}{g} + 1.1^2 \frac{V_m^4}{g^2} \right) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + \left(\frac{2.2h_m V_m^2}{r_c} - 2 \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c g^2} \right) \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c^2 g^2} (r_2 - r_1) \rightarrow \text{OO}$$

OO y OO se sustituyen en la integral total y se obtiene

$$P'' = S'' Q \gamma = \rho V_m^3 \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 \left[\left(h_m^2 - 2.2h_m \frac{V_m^2}{g} + 1.1^2 \frac{V_m^4}{g^2} \right) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + \left(\frac{2.2h_m V_m^2}{r_c} - 2 \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c g^2} \right) \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c^2 g^2} (r_2 - r_1) \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{16.5v_*}{V_m} - \frac{5625}{54} \right) \left(\frac{m}{2+m} \right) + \left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44v_*}{V_m} \right) \left(\frac{m}{2+3m} \right) + \left(-\frac{46.88v_*}{V_m} + 37.5 \right) \left(\frac{m}{2+3m} \right)^2 - \frac{93.75v_*}{V_m} \left(\frac{m}{2+3m} \right)^3 \right] \quad (3.2.18)$$

El gradiente transversal se obtiene dividiendo entre el gasto y el peso específico, como sigue

$$S'' = \frac{V_m^3}{gQ} \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 \left[\left(h_m^2 - 2.2h_m \frac{V_m^2}{g} + 1.1^2 \frac{V_m^4}{g^2} \right) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + \left(\frac{2.2h_m V_m^2}{r_c} - 2 \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c g^2} \right) \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{1.1^2 V_m^4}{r_c^2 g^2} (r_2 - r_1) \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{16.5v_*}{V_m} - \frac{5625}{54} \right) \left(\frac{m}{2+m} \right) + \left(\frac{37.5}{2} - \frac{23.44v_*}{V_m} \right) \left(\frac{m}{2+3m} \right) + \left(-\frac{46.88v_*}{V_m} + 37.5 \right) \left(\frac{m}{2+3m} \right)^2 - \frac{93.75v_*}{V_m} \left(\frac{m}{2+3m} \right)^3 \right] \quad (3.2.19)$$

La ecuación 3.2.19 tiene aun el detalle de que requiere el esfuerzo cortante (en la velocidad de cortante), para esto se requiere otra ecuación que complemente este modelo matemático.

Para dar solución a esta cuestión se retoma la ecuación 3.2.11 de velocidad transversal que obtuvo Kikkawa (1976).

$$u = \frac{37.5h}{r} V_m \left[\left(\frac{0.44v_*}{V_m} - \frac{15}{54} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{0.625v_*}{V_m} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{1.25v_*}{V_m} - 1 \right) \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{1.25v_*}{V_m} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h} \right) \right]$$

Como se consideran canales anchos, u casi no varía transversalmente y se maneja sobre la línea media del canal. Pensando en la condición de frontera que es la superficie libre donde $z = h$ $r = r_c$ $h = h_m$ u se reduce a:

$$u' = \frac{37.5h_m}{r_c} V_m \left[\left(\frac{0.44v_*}{V_m} - \frac{15}{54} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{0.625v_*}{V_m} \right) \right] = \frac{h_m}{r_c} V_m \left[\frac{450}{54} - \frac{6.9375v_*}{V_m} \right]$$

Donde u' es la velocidad transversal en la superficie libre sobre el eje del canal. Si se despeja la velocidad del cortante, resulta

$$\frac{v_*}{V_m} = 1.2 - 0.144 \frac{u' r_c}{V_m h_m} \quad (3.2.20)$$

De esta manera se obtiene la velocidad al cortante que completa a la ecuación 3.2.19. Ahora hace falta conocer la velocidad transversal en la superficie libre y para esto se desarrolla otro modelo matemático que da solución al problema en una sección posterior.

3.2.9 Pruebas realizadas y resultados obtenidos

Para comprobar la exactitud o inutilidad del modelo analítico aquí planteado, Chang (1983) utilizó un modelo de canal con varias curvas en su trayectoria que se construyó en Ft. Collins, Colorado. Las curvas del canal se sometieron a minuciosas mediciones, 2 de ellas (la 6 y la 7) para distintas combinaciones de tirante medio - radio de curvatura, y se obtuvo el gradiente por flujo transversal S'' , tanto experimental como con la ecuación 3.2.19 (no se consideró necesario incluir aquí más detalles sobre el modelo experimental). Se compararon 3 fuentes de resultados:

- ❖ Datos obtenidos del modelo experimental.
- ❖ Datos obtenidos del modelo analítico general (ecuaciones 3.2.8 a 3.2.11)
- ❖ Datos obtenidos del modelo analítico simplificado (ecuaciones 3.2.14 y 3.2.15).

La comparación gráfica de los resultados obtenidos se puede consultar en la figura 3.13, de la cual se observa que el modelo analítico da resultados con buena aproximación a la realidad. El modelo simplificado, sin embargo, genera un error tan grande como era de suponerse

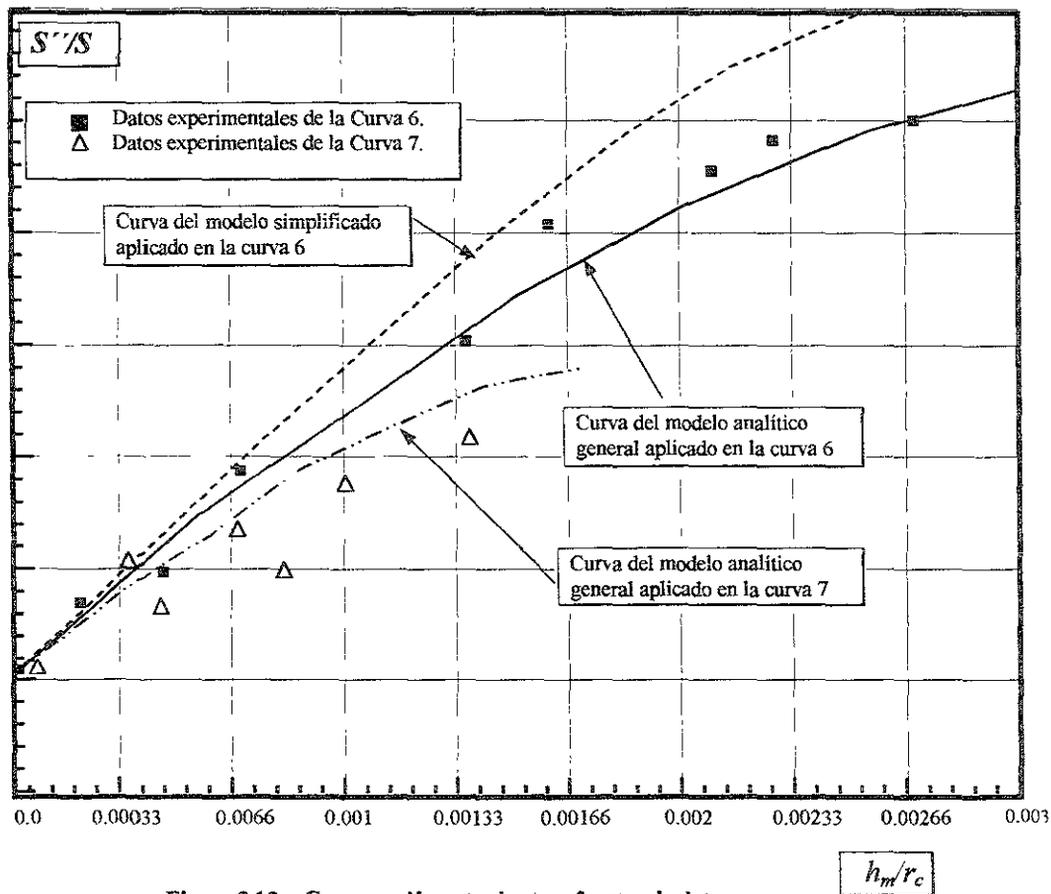


Figura 3.13 Comparación entre las tres fuentes de datos

$$h_m/r_c$$

3.2.10 Modelo matemático con la variación gradual de pérdidas

Como complemento a la teoría de “Pérdidas de Energía” para flujo transversal y helicoidal establecidos en los subcapítulos anteriores, se desarrolla ahora también a partir de los trabajos del profesor Chang (1984), un modelo matemático adyacente que considera la formación y decaimiento graduales del flujo transversal, lo cual siempre sucede en la práctica aún si las características de la curva (radio, ancho, rugosidad, etc.) son uniformes. Si el arco total de la curva es relativamente breve, el estado de movimiento espiral y flujo transversal estables no se alcanza, por lo que resulta muy importante complementar los planteamientos hasta ahora hechos.

3.2.11 Consideraciones e hipótesis

El modelo matemático que se desarrolla es para flujo curvilíneo horizontal en las siguientes condiciones:

- Estable (al entrar en la curva)
- Régimen subcrítico
- Distribución hidrostática de la presión del líquido sobre las paredes del canal
- Se consideran algunos planteamientos para flujo uniforme en cuanto a la distribución de esfuerzos cortantes

Otra consideración importante es que las ecuaciones que se desarrollan son aplicables siempre y cuando *no* se llegue a producir separación entre el líquido y la pared interior de la curva, lo cual en general se cumple si el régimen es subcrítico. Hay que recordar que aún no hay un criterio preciso para predecir esa separación, sin embargo estudios experimentales hechos por Shukry y Bagnold (1952) denotaron que la separación de flujo suele no presentarse siempre que el cociente radio de curvatura entre ancho de plantilla del canal $\frac{r_c}{b}$ sea mayor que 2

3.2.12 Perfil de flujo longitudinal

El perfil longitudinal se puede describir a partir de sus pérdidas de energía, considerando un comportamiento similar al de flujo uniforme.

$$\frac{\partial}{r_c \partial \theta} \left(z + h_m + \alpha \frac{V_m^2}{2g} \right) = -S \quad (3.2.21)$$

donde

z elevación de la plantilla del canal,

S gradiente total de energía.

El coeficiente α que ha de llevar la carga de velocidad es igual a 1

El gradiente total de energía se separa a su vez en gradiente por flujo longitudinal S' y gradiente por flujo transversal S'' :

$$S = S' + S'' \quad (3.2.22)$$

Para el gradiente por resistencia longitudinal hay varias opciones, una de ellas es la ecuación de Darcy-Weisbach, como sigue

$$S' = \frac{f V_m^2}{8 g R_h} \quad (3.2.23)$$

donde R_h es el radio hidráulico O también la ecuación de Manning

$$S' = \frac{n^2 V_m^2}{R_h^{4/3}} \quad (3.2.24)$$

donde n es el coeficiente de Manning.

De manera que el perfil queda descrito por

$$z_i + h_{m_i} + \alpha \frac{V_m^2}{2g} = z_{i+1} + h_{m_{i+1}} + \alpha \frac{V_m^2}{2g} + (S' + S'') r \Delta \theta \quad (3.2.25)$$

Siendo régimen subcrítico, el recorrido del perfil hidráulico se hace con el método de incrementos finitos de aguas abajo a aguas arriba. Si bien S'' es cuantificable a partir de 3.2.19, aún se requiere un parámetro que dé referencia de la formación y decaimiento del flujo transversal, de otra manera se le consideraría siempre *completamente establecido*, lo cual no es correcto.

3.2.13 Variación espacial de la velocidad transversal

A través del comportamiento de la velocidad transversal se puede cuantificar correctamente S'' . Rozovski (1961) desarrolló la ecuación dinámica para la velocidad radial siguiente:

$$v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v^2}{r} - g S_r + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.2.26)$$

donde

- v componente longitudinal de la velocidad,
- u componente transversal (radial) de la velocidad,
- w componente vertical de la velocidad,
- r coordenada radial,
- z coordenada vertical,
- S_r inclinación transversal de la superficie del fluido (agua).

El lado izquierdo de la ecuación 3.2.26 viene siendo el primer renglón de la matriz jacobiana de la función vectorial de variable vectorial, *Campo vectorial de todos los componentes de velocidad del flujo*, identificado por su viscosidad dinámica μ . Aunque no se muestre la función vectorial completa, se verifica que la velocidad transversal u depende directamente de la velocidad longitudinal v , pues éste es el principal componente dinámico del agua.

Los componentes transversal y vertical de la velocidad son pequeños respecto del componente longitudinal, por lo que su producto por las diferenciales del componente transversal son mucho mas pequeños, de manera que para simplificar se desprecian esas multiplicaciones.

En adelante se considera a la ecuación 3.2.26 en el eje del canal a nivel superficial, por considerarse ahí la velocidad suficientemente representativa del comportamiento del flujo, así que los componentes de velocidad son ahora exclusivamente de la velocidad superficial. Para esta última consideración hay que recordar que lo que interesa es tener una referencia de la formación, estabilización y decaimiento de la velocidad transversal y la superficie libre es una buena referencia. A partir de ella se puede calcular, con las ecuaciones de Kikkawa (1976), la velocidad u en cualquier profundidad.

Con la hipótesis de que durante el crecimiento y decaimiento de la circulación radial el perfil de velocidad transversal mantiene su forma, *Rozovski* (1961) demostró que de la ecuación 3.2.26 el término a la derecha evaluado en la superficie del agua se puede aproximar como una función de la fricción en el canal, mediante la expresión

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u'}{\partial z} \right) = -\kappa \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{u' v'}{h_m} \tag{3.2.27}$$

donde

κ constante de Karman,

v' velocidad longitudinal en la superficie y a lo largo del eje del canal,

u' velocidad transversal en la superficie y a lo largo del eje del canal

Sustituyendo la ecuación 3.2.27 en la ecuación 3.2.26 y quitando los términos despreciables se obtiene

$$v' \frac{du'}{r_c d\theta} = \frac{v'^2}{r_c} - g S_r - \kappa \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{u' v'}{h_m} \tag{3.2.28}$$

donde solo queda un cociente de derivada y ésta ya no requiere ser parcial.

Un artificio algebraico para quitar la variable v' y en su lugar manejar una variable más fácil de conocer, que es V_m , consiste en sustituir la ecuación propuesta:

$$\psi = \frac{v'}{V_m} \tag{3.2.29}$$

en la ecuación 3.2.28. Simultáneamente, la pendiente transversal del agua se puede describir dividiendo la ecuación 3.1.22 entre el ancho de superficie libre, dado por la expresión

$$S_r = \frac{\Delta H}{T} = 1.1 \frac{V_m^2}{g r_c} \tag{3.2.30}$$

Dividiendo todos los cocientes de 3.2.28 entre v' y sustituyendo las ecuaciones 3.2.29 y 3.2.30 en la ecuación 3.2.28 se llega a la expresión

$$\frac{du'}{r_c d\theta} = (\psi) \frac{V_m}{r_c} - 1.1 \frac{V_m}{(\psi) r_c} - \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} u' \tag{3.2.31}$$

despejando

$$\frac{du'}{r_c d\theta} + \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} u' = \left(\psi - \frac{1.1}{\psi} \right) \frac{V_m}{r_c} \tag{3.2.32}$$

Si en la ecuación 3.2.32 se considera la condición de frontera $\frac{du'}{r_c d\theta} = 0$, es decir, cuando el flujo transversal ya se haya establecido, se puede entonces conocer el parámetro entre paréntesis, en la forma

$$\left(\psi - \frac{1.1}{\psi}\right) = -\sqrt{\frac{f}{2}} \frac{\kappa r_c}{h_m} \left(\frac{u'}{V_m}\right) \quad (3.2.33)$$

Se podría discutir que ese parámetro es variable a la entrada y a la salida de la curva, pero se trata solo de un valor frontera que no perjudica el objetivo del modelo matemático, ya que la principal ecuación 3.2.32 sigue manejando diferencial de la velocidad transversal.

Retomando las ecuaciones de *Kikkawa* (1976) que describen el perfil de distribución de la velocidad transversal u ,

$$\frac{u}{V_m} = \left(\frac{v_m}{V_m}\right)^2 \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left[\xi_1 \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{\kappa} \frac{v_*}{V_m} \xi_2 \left(\frac{z}{h}\right) \right] \quad (3.2.11)$$

$$\xi_1 \left(\frac{z}{h}\right) = -15 \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{15}{54} \right] \quad (3.2.12)$$

$$\xi_2 \left(\frac{z}{h}\right) = \frac{15}{2} \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln^2 \left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \ln \left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{19}{54} \right] \quad (3.2.13)$$

se puede obtener la velocidad u' para el eje del canal al nivel de superficie libre, en cuyo caso $v_m \approx V_m$, $z = h$, $h = h_m$ y $u = u'$, lo cual elimina todos los logaritmos y reduce las ecuaciones de *Kikkawa* (1976) a la expresión

$$\frac{u'}{V_m} = \frac{h_m}{r_c} \left[8.333333 - \frac{v_*}{V_m} 6.9375 \right] \quad (3.2.34)$$

Ahora se hacen las mismas consideraciones que hizo *Rozovski* (1961) para sustituir la velocidad de cortante, ya que uno de los objetivos de lo que aquí se expone es que no se requiera medir esfuerzos cortantes en su aplicación.

El esfuerzo cortante medio sobre la frontera en flujo uniforme se define como

$$\tau_0 = \gamma R_h S_0 \quad (3.2.35)$$

y la fórmula de Darcy-Weisbach para canales, en función del radio hidráulico, resulta

$$S_0 = \frac{f}{4 R_h} \frac{V_m^2}{2g} \quad (3.2.36)$$

De esta ecuación es fácil despejar $R_h S_0$ y sustituir en la ecuación 3.2.35.

$$\tau_0 = \gamma \frac{f}{8g} V_m^2 \quad (3.2.37)$$

Al dividir entre la densidad y aplicar raíz cuadrada, se obtiene la velocidad al cortante en la forma

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{f}{8}} V_m = \sqrt{\frac{f}{2}} \frac{V_m}{2} \tag{3.2.38}$$

La consideración más notable en lo anterior está en aplicar ecuaciones del flujo uniforme a un flujo que no lo es, lo cual es congruente si se considera que la pérdida adicional de energía debida al flujo transversal, hace que se llegue antes al tirante uniforme al trazar el perfil hidráulico hacia aguas arriba y de ahí el flujo arriba ya es totalmente uniforme (siempre que las condiciones del canal no vuelvan a cambiar y que el tirante al final de la curva sea menor que el tirante normal) La ecuación 3.2.38 es sustituible en la ecuación 3.2.34 para obtener la expresión

$$\frac{u'}{V_m} = \frac{h_m}{kr_c} \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{9\kappa} \sqrt{\frac{f}{2}} \right)$$

Los números decimales se sustituyen por cocientes de enteros, ya que son números racionales.

Haciendo algunos movimientos algebraicos y multiplicando ambos lados por $\sqrt{\frac{f}{2}}$, resulta

$$\sqrt{\frac{f}{2}} \frac{kr_c}{h_m} \left(\frac{u'}{V_m} \right) = \sqrt{\frac{f}{2}} \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{9\kappa} \sqrt{\frac{f}{2}} \right)$$

donde el conjunto de términos a la izquierda del signo igual es idéntico a los términos de la ecuación 3.2.33, así que este último resultado va en la ecuación 3.2.32 en lugar de $\left(\psi - \frac{1.1}{\psi} \right)$, como sigue

$$\frac{du'}{r_c d\theta} + \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} u' = \sqrt{\frac{f}{2}} \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{9\kappa} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) \frac{V_m}{r_c} \tag{3.2.39}$$

Una ecuación diferencial lineal de primer orden donde la variable dependiente es u' y la independiente es θ . La solución general para esta ecuación diferencial (que puede verificarse en cualquier libro de ecuaciones diferenciales) es

$$u' = \left[c + \int \sqrt{\frac{f}{2}} \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{9\kappa} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) \frac{V_m}{r_c} e^{\left(\int \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} ds \right)} ds \right] \cdot e^{\left(- \int \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} ds \right)} \tag{3.2.40}$$

donde $ds = r_c d\theta$ incremento de arco.

La constante c es de la integral indefinida. De acuerdo con las condiciones de frontera, la velocidad transversal inicial u'_0 aparece en el punto donde inicia la curva y en ese momento los demás términos de la ecuación 3.2.40 desaparecen porque el radio de curvatura tiende a infinito y $d\theta = 0$, así que $c = u'_0$.

La ecuación 3.2.40 aplicada en forma iterativa, proporciona la variación espacial de la velocidad transversal a lo largo de la línea media del canal, dependiente de V_m , de f y de h_m , además del incremento

ds . A diferencia de la ecuación 3.2.19, la ecuación 3.2.40 se aplica recorriendo el perfil de arriba a aguas abajo, ya que no se puede partir de conocer donde termina de dispersarse la velocidad transversal, pero sí se puede conocer donde inicia su formación, que es al inicio de la curva en el sentido del flujo.

Una vez que el agua sale de la curva, el radio de curvatura es infinito y la ecuación 3.2.40 se reduce a

$$u' = u_o' e^{\left(- \int \frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{f}{2}} ds \right)} \quad (3.2.41)$$

Cuando se analiza con el método de incrementos finitos, ds se puede considerar dx en un tramo rectilíneo aguas abajo de la curva, a lo largo del cual se dispersa el flujo transversal.

La ecuación 3.2.41 implica que el decaimiento de la velocidad transversal inmediatamente después de la curva sigue una ley exponencial (numero e) para la cual la rapidez de decaimiento está directamente relacionada con el factor de fricción f e inversamente con el tirante medio del flujo h_m .

La ecuación 3.2.40 es el complemento de las ecuaciones 3.2.19 y 3.2.20, con lo que queda completo el modelo matemático que describe simultáneamente sobreelevación y pérdidas de energía en cada sección de un canal curvo.

3.2.14 Detalle del modelo matemático y propuesta de solución

Si se observa la ecuación 3.2.19 se deduce que todos los términos se hacen cero en el tramo rectilíneo (donde r_o , r_1 y r_2 valen infinito), eso quiere decir que el gradiente transversal vale instantáneamente cero aguas abajo de la curva horizontal, lo cual significaría que el flujo secundario desaparece de manera también instantánea al terminar el agua de recorrer la curva, mientras que en la práctica nunca sucede así sino que hay un tramo de disipación de la velocidad secundaria, por tanto, el gradiente transversal también desaparece gradualmente. Este detalle curiosamente no lo menciona Chang (1984), sin embargo si en lugar de considerar al radio de curvatura infinito (como es en la realidad) se considera que el radio de curvatura se mantiene aguas abajo de la curva exclusivamente para la ecuación 3.2.19, el gradiente transversal presenta un patrón de decaimiento similar a los resultados experimentales, esto debido a que el gradiente transversal depende implícitamente de la velocidad transversal u' a través de la velocidad al cortante v^* y la velocidad transversal si considera radio infinito aguas debajo de la curva en la ecuación 3.2.40. Es de suponer que eso haya hecho Chang (1984).

3.2.15 Experimentos realizados y resultados obtenidos

Chang (1984) utilizó los datos experimentales que obtuvieron Yen (1972) e Ippen (1962) de sus modelos de pruebas. Yen (1972) utilizó un canal con dos curvas de 90° de dirección opuesta y separadas 4.27 metros así como sección transversal trapecial con base menor igual a 1.83 metros y taludes de 45° , coeficiente de Manning $n = 0.0103$, pendiente del canal $S_o = 0.00072$, $h_m = 0.156$ metros, velocidad media $V_m = 0.70$ m/s y número de Froude = 0.58. Yen (1972) hizo mediciones para distintas condiciones de flujo subcrítico y posteriormente Chang (1984) aplicó el modelo analítico y comparó sus resultados teóricos con los experimentales de Yen (1972). La comparación para una condición de flujo se observa en la figura 3.14

Como se observa en la figura 3.14, además de la buena concordancia entre lo experimental y lo teórico en cuanto a la velocidad transversal, la variación espacial del cociente velocidad transversal superficial sobre velocidad media $\frac{u'}{V_m}$ es significativa, es decir, considerarlo constante sería un notable error.

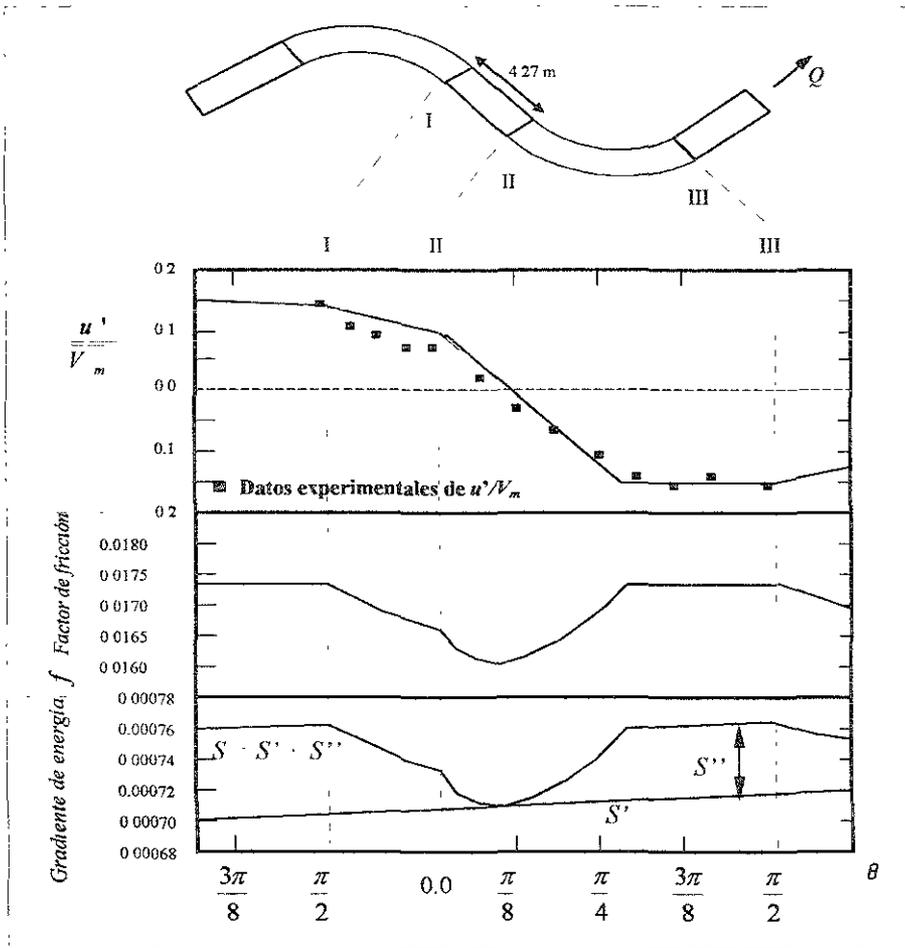


Figura 3.14 Modelo experimental de curvas opuestas con tramo rectilíneo y resultados obtenidos

Después de salir de la primera curva, la velocidad transversal decae gradualmente en el tramo recto. Al entrar a la segunda curva de dirección opuesta, el flujo transversal se revierte rápidamente y empieza a acelerarse en dirección contraria hasta alcanzar un valor constante cuando el flujo transversal se ha estabilizado y el cociente es igual a 0.15.

Otras comparaciones se realizaron con los datos de Ippen (1962). El modelo experimental fue un canal de concreto con sección trapecial simétrica y talud igual a 2, ángulo de la curva de 60° con entrada y salida rectilíneas, n de Manning = 0.01. En este caso se hicieron mediciones de esfuerzos cortantes en las fronteras con ayuda de un tubo de Pitot, luego se obtuvo el esfuerzo cortante medio τ_o de la sección como el promedio de los medidos en una sección en todo el perímetro mojado.

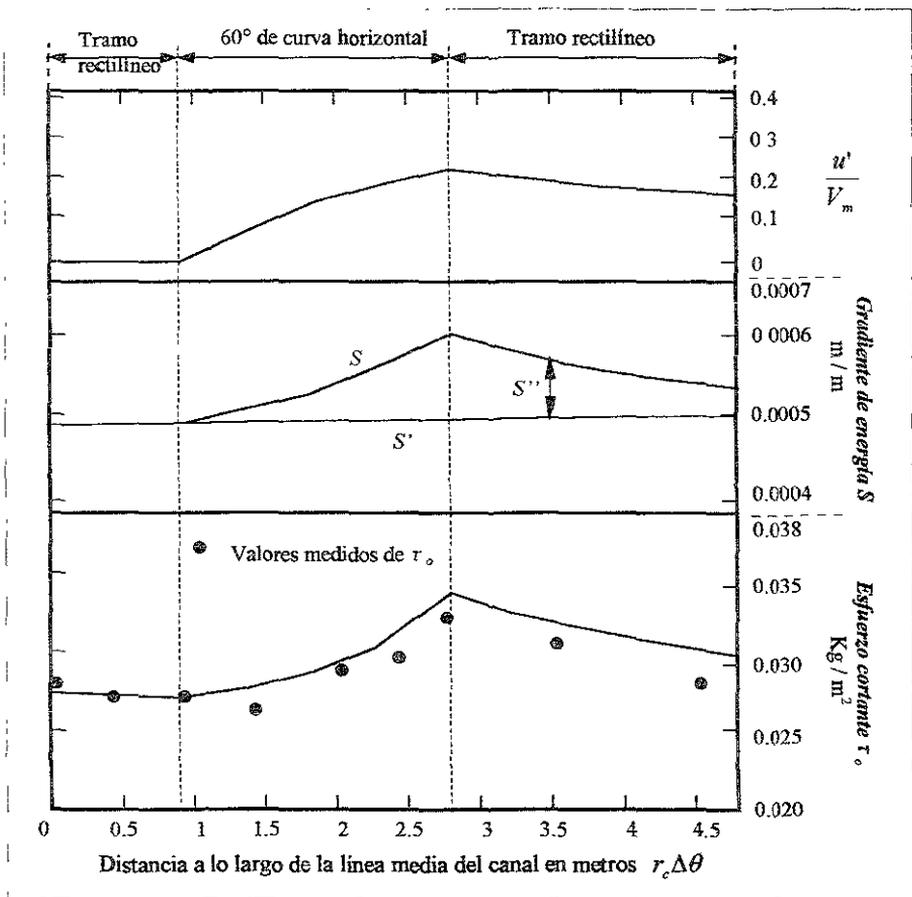


Figura 3.15 Comparación de resultados del modelo experimental de curva de 60°

El mismo esfuerzo pero en forma teórica se obtuvo a partir del gradiente total de energía

$$\tau_o = \gamma R_p S \tag{3.2.42}$$

La figura 3.15 muestra la comparación entre esfuerzos medidos y calculados en una de las mediciones de flujo subcrítico llevadas a cabo.

De la figura 3.15 se observa que la velocidad transversal comienza a crecer al iniciar la curva y comienza a decaer al final de ella. La velocidad transversal no llega a estabilizarse debido a la insuficiente longitud de curva. Como se observa, la ocurrencia de circulación transversal produce un incremento en el gradiente de energía total, incremento atribuible primeramente al gradiente de energía transversal ya que el gradiente longitudinal se mantiene más o menos estable.

Las secciones para el cortante máximo son hacia la salida de la curva (en concordancia con el gradiente máximo) y aguas abajo de ella persisten esfuerzos cortantes relativamente altos en una distancia considerable.

3.3 Medida de atenuación: Pendiente transversal de plantilla

Sotelo (1976) expone, a partir de trabajos previos, una deducción teórica de la forma que ha de tener la plantilla del canal de tal manera que se atenúe la sobreelevación. Según Henderson (1966) se puede mantener la superficie libre prácticamente horizontal transversalmente si se da a la plantilla del canal una pendiente transversal apropiada que haga que el gasto por unidad de ancho de plantilla sea uniforme

$$q = Vh \quad (3.3.1)$$

donde q es el gasto unitario. La ecuación 3.3.1 es en principio válida para canales rectangulares y trapeciales de bajos talud

Por otro lado la ley de vórtice libre dice que la velocidad longitudinal en la curva es inversamente proporcional al radio de curvatura en la posición de interés, es decir

$$V = \frac{\Omega}{r} \quad (3.3.2)$$

Ω es la constante de proporcionalidad = $Vr = V_2r_2$

Considerando pérdidas de energía cercanas a cero se puede aplicar la ecuación de la energía total H_T entre una posición aguas arriba de la curva muy cerca de ella y una sección dentro de la curva y se obtiene

$$H_T = z + h + \frac{V^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.3.3)$$

El subíndice 2 denota parámetros en la pared exterior de la curva, que es donde más se visualiza la sobreelevación y z es la cota de la plantilla respecto del nivel antes de la curva.

Combinando las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2 se tiene que

$$\text{Constante} = \frac{q}{\Omega} = \frac{h}{r} = \frac{dh}{dr} \quad (3.3.4)$$

La energía total H_T es mas o menos constante transversalmente, así que su derivada respecto de la dirección radial es igual a 0, por eso la ecuación 3.3.5 es igual a 0, es decir

$$\frac{dH_T}{dr} = \frac{d}{dr} \left(z + h + \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{dz}{dr} + \frac{dE}{dr} = 0 = \frac{dz}{dr} + \frac{dE}{dh} \frac{dh}{dr} = \frac{dz}{dr} + (1 - Fr^2) \frac{dh}{dr} = 0 \quad (3.3.5)$$

Despejando $\frac{dz}{dr}$, se tiene

$$\frac{dz}{dr} = (Fr^2 - 1) \frac{dh}{dr} \quad (3.3.6)$$

Según la ecuación 3.3.6 si se tiene régimen subcrítico ($Fr < 1$), $\frac{dz}{dr} < 0$ es decir, la plantilla es descendiente hacia el exterior de la curva (y al revés en régimen supercrítico) lo cual se visualiza en la figura 3.16. Sustituyendo las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2 en la ecuación 3.3.3 y despejando z se llega a

$$z = H_T - \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) = H_T - \left(\frac{qr}{V_2 r_2} + \frac{V_2^2 r_2^2}{2g r} \right) \tag{3.3.7}$$

La ecuación 3.3.7 describe el perfil transversal de la plantilla, pero no se aplica porque el mismo *Sotelo* (1976) considera que los resultados que proporciona para régimen subcrítico son exagerados (algún factor de corrección podría hacer falta).

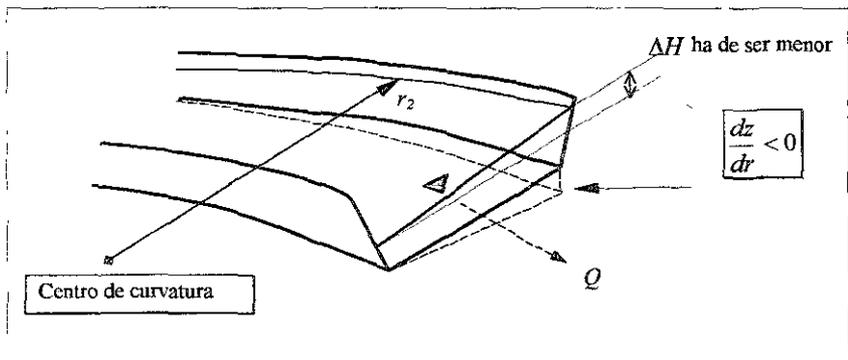


Figura 3.16 Representación gráfica del tipo de solución al problema de sobreelevación según la ecuación 3.3.6

Si el lector revisa nuevamente la parte de este texto llamada "integración" recordará que para integrar el gradiente transversal y considerar el efecto de la sobreelevación se utilizó la ecuación 3.2.17.

$$h = h_m + \frac{1.1(r - r_c) V_m^2}{r_c g}$$

La ecuación 3.2.17 se dedujo a partir de los trabajos teóricos y experimentales de *Chien Len Yen* y *Ben Chue Yen* (1971). El lector puede observar que la ecuación no hace referencia alguna a un nivel de plantilla necesario, solamente tirantes, así que el autor de esta tesis propone que la sobreelevación que da esta ecuación sea aplicada al revés para mantener así el tirante medio h_m y atenuar la sobreelevación.

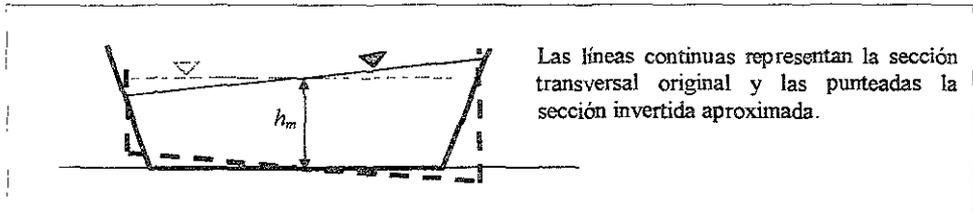


Figura 3.17 Inversión de la superficie libre y la plantilla

La figura 3.17 muestra como el autor piensa que podría haber una solución, el perfil con sobreelevación se invirtió para que esa fuera la forma de la plantilla y el fondo horizontal pasa a ser la superficie libre, de esta manera se mantendrían el tirante medio h_m y los demás tirantes que se tenían con la forma original y la pendiente transversal en la superficie libre sería nula. Las paredes pasan a ser verticales en el caso trapecial para que el área hidráulica se incremente lo menos posible. Aunque desde el punto de vista algebraico parece factible, ésta es solo una teoría y requiere de pruebas experimentales para ver que tan diferente se comporta el agua cuando se trata de *invertir* su comportamiento.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

3.4 Aplicación del Excel paso a paso

I. Datos requeridos

- Material con el cual está hecho todo el perímetro mojado; esto determina el coeficiente de Manning n
- La geometría del canal. Como el método está pensado para canales trapeciales y rectangulares, es necesario conocer el ancho de plantilla b y el talud k de las paredes laterales.
- Gasto circulante Q .
- La pendiente longitudinal de la plantilla S_o . Esta última puede ser no uniforme, en cuyo caso habría que conocer las posiciones donde varía.
- La distancia d entre la posición a partir de la cual se inician las iteraciones y el final de la curva horizontal que se va a analizar. Por tratarse de régimen subcrítico, la iteración del perfil hidráulico inicia en una posición aguas abajo de la curva.
- El tirante aguas abajo de la curva h_{mo} con el cual se inicia el método depende de lo que siga aguas abajo (otro cambio de dirección, tramo rectilíneo, una descarga, etc.) puede ser el tirante crítico, tendiendo así al normal, etc.
- El tirante aguas arriba de la curva h_m , con el cual se concluye el recorrido. Este parámetro es necesario porque en una posición dada aguas arriba se podría requerir un tirante específico y con este método se puede lograr que el tirante y la posición requeridos coincidan.
- El ángulo total de la curva ϑ .
- El radio de curvatura r_c de la circunferencia representativa de la curva horizontal. El método acepta tanto radio de curvatura constante como variable.

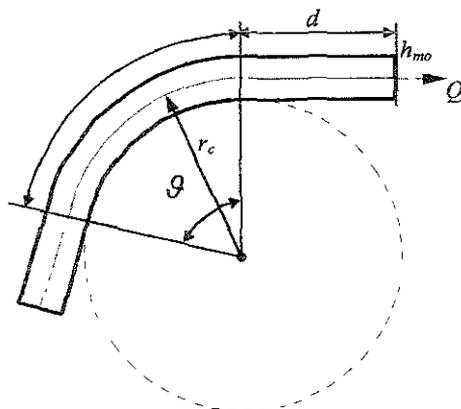


Figura 3.18 Vista en planta representativa de datos requeridos

II. Obtención de tirantes característicos

- Tirante crítico – El tirante crítico depende del gasto circulante Q y de la geometría del canal. Para el tirante crítico en cualquier canal se cumple la ecuación deducida de considerar el punto de inflexión en la gráfica energía específica vs tirante.

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{T} \quad (3.4.1)$$

Para el canal de sección trapecial (si es rectangular $k = 0$) y se obtiene

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(b + kh_{cr})^3 h_{cr}^3}{b + 2kh_{cr}} \quad (3.4.2)$$

No es posible despejar h_{cr} de la ecuación 3.4.2 así que se obtiene de manera iterativa despejando parcialmente la ecuación 3.4.2

$$h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{(b + 2kh_{cr})Q^2}{(b + kh_{cr})^3 g}} \tag{3.4.3}$$

Con los demás datos conocidos, se propone un valor de h_{cr} en la ecuación 3.4.3 y se obtiene $h_{cr,a}$, que es el valor del tirante crítico actualizado e igual al h_{cr} de la siguiente iteración. En diez iteraciones ya se tiene una exactitud de nueve cifras decimales.

- Tirante normal – El tirante normal depende de las condiciones de flujo y se obtiene de la ecuación de Manning

$$\frac{Qn}{S_o} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \tag{3.4.4}$$

En sección trapecial vale

$$\frac{Qn}{S_o} = \frac{((b + kh_n)h_n)^{5/3}}{(b + 2h_n \cdot k^2 + 1)^{2/3}} \tag{3.4.5}$$

Despejando parcialmente a h_n resulta

$$h_{na} = \left[\frac{(b + 2h_n \cdot k^2 + 1)^2 Qn}{(b + kh_n)^{5/3} S_o} \right]^{3/5} \tag{3.4.6}$$

Igual que como se hace con el tirante crítico, se propone un valor de h_n en la ecuación 3.4.6, con los demás datos conocidos, así se obtiene h_{na} , que es el valor del tirante normal actualizado e igual al h_n de la siguiente iteración. En diez iteraciones ya se tiene una exactitud de nueve cifras decimales y en Excel no es problema programar ambos grupos de iteraciones

III. Parámetros geométricos e hidráulicos

La tabla se inicia calculando todos los parámetros geométricos necesarios para determinar la energía específica y los gradientes longitudinal y transversal en cada sección del canal. En cada iteración se hace un recorrido completo desde la sección inicial hasta el tirante o posición deseada (ésta última establece la longitud total recorrida)

Contador de secciones	Longitud recorrida m	z_i m	h_{mi} m	k m	A_i m ²	Pm_i m	R_h m	$R_h^{2/3}$	V_{mi} m/s	$V_{mi}^2/2g$ m	T_i m	Y_i m	Fr	Re	E_i m
--------------------------	-------------------------	------------	---------------	----------	-------------------------	-------------	------------	-------------	-----------------	--------------------	------------	------------	------	------	------------

- El contador determina el número de secciones sucesivas a lo largo del canal para las cuales se hacen todos los cálculos dentro de una iteración; en Excel se pueden hacer para el número de secciones deseado. Se recomiendan cien secciones para garantizar que se recorra toda la curva.
- La longitud recorrida es el parámetro que sirve para indicar de donde a donde hay que considerar radio de curvatura.
- La carga de posición z_i de la plantilla se refiere a la sección inicial.
- Al tirante medio se le llama h_m y es representativo de toda una sección en los parámetros hidráulicos. (recordar que h_m es sobre el eje del canal). Se debe de programar h_m de tal manera que cuando se alcance el tirante final deseado deje de incrementarse.
- Conviene tener una columna de talud k , ya que así se puede ajustar los radios r_1 y r_2 en cada sección de acuerdo con la sobreelevación generada.
- V_m es la velocidad obtenida a partir de la ecuación de continuidad con el tirante h_m .
- El número de Froude permite comprobar la existencia de régimen subcrítico.
- El número de Reynolds permite verificar que existan condiciones de flujo turbulento, lo cual casi siempre se cumple.
- El cambio de una sección a otra está dado por un incremento porcentual en el tirante medio de la sección ya conocida. Para tener alta precisión se recomiendan incrementos del orden de un 0.4%.

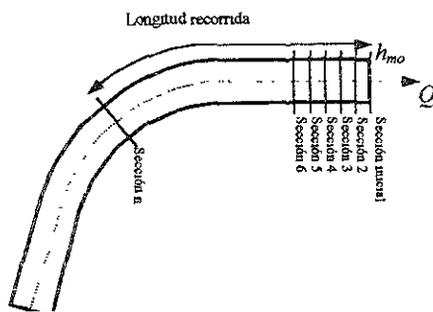


Figura 3.19 Vista representativa en planta de la secuencia de secciones

IV. Pérdidas de energía

Las siguientes columnas de la tabla corresponden a:

S'_i m/m	S''_i Anterior	$S_{total\ i}$ m/m	S_m	$\Delta\lambda$ m	h_c m	Chezy C	f Darcy
---------------	---------------------	-----------------------	-------	----------------------	------------	------------	------------

- Si la pendiente de plantilla longitudinal S_o es variable, se debe de agregar una columna S_o , antes de S'_i , de otra manera siempre se hará referencia a un valor fijo de S_o .
- El gradiente longitudinal S'_i se obtiene de la fórmula de Manning (ecuación 3.2.24) con la velocidad, el coeficiente de rugosidad y el radio hidráulico a la 2/3 ya conocidos.
- El gradiente transversal S''_i , corresponde al obtenido para la misma posición en la iteración anterior. En la primera iteración todos los gradientes transversales valen cero.
- El gradiente total S es igual a la suma de los dos gradientes anteriores y S_m es el promedio entre el gradiente total de la sección anterior y la actual.
- La distancia entre la sección anterior y la actual está dada por $\Delta\lambda$, al sumarla con todas las $\Delta\lambda$ anteriores se tiene la longitud recorrida del inciso anterior.

$$\Delta\lambda = \frac{E_i - E_{i-1}}{S_m - S_o} \tag{3.4.7}$$

- h_c es la pérdida en cada sección y es igual al producto del gradiente total y $\Delta\lambda$.

- El factor de Chezy C es necesario para determinar el factor de fricción f y se obtiene de la fórmula de Manning-Strickler para flujo turbulento mencionada en el capítulo 1

$$C = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n} \tag{1 1.7}$$

y el factor de fricción f

$$f = \frac{8g}{C^2} \tag{1 1.4}$$

Obtener el factor de fricción de esta manera implica una de las hipótesis más importantes que se hacen, de aplicar la fórmula 1 1.7 para flujo uniforme aunque no sea el caso en todo el canal

V. Flujo transversal

- La velocidad transversal, como se explicó antes, solo se requiere conocer en la superficie libre y sobre el eje del canal.

$$u' = \left[u'_o + \frac{\bar{f}}{2} \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{9\kappa} \left[\frac{\bar{f}}{2} \right] \frac{V_m}{r_c} e^{\left(\frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{\bar{f}}{2} \Delta s} \right)} \Delta s \right) \right] \cdot e^{\left(-\frac{\kappa}{h_m} \sqrt{\frac{\bar{f}}{2} \Delta s} \right)} \tag{3 4.8}$$

- A diferencia de la ecuación 3.2.40, en la ecuación 3.4.8 no hay que integrar y es que en su lugar se manejan incrementos de arco Δs muy pequeños
- La ecuación 3.4.8 requiere f , V_m y h_m promedios entre la sección anterior y la actual *Contrario a la ecuación de gradiente transversal, la ecuación de velocidad transversal 3.4.8 se aplica de arriba a aguas abajo iniciando en la sección cien. por lo tanto en Excel la sección anterior corresponde a la fila inferior en los tres promedios*

promedio		promedio		promedio		promedio		
f	V_m	h_m	V_m^2/g	T	r_c	r_1	r_2	u'_i
	m/s	m	m	m	m	m	m	m/s

- Para el ajuste posterior de los radios exterior e interior se requiere el ancho de superficie libre T promediado
- Es bueno agregar columnas con los radios interior, medio y exterior del canal que dependen de la columna *longitud recorrida* para que, fuera de la curva horizontal, indiquen un valor de radio infinito e influyan en la velocidad transversal u'_i y en el gradiente transversal S'' . Los radios interior y exterior son a nivel de superficie libre y se valúan restando y agregando respectivamente la mitad del ancho de superficie libre actualizada y sumando en ambos casos la mitad de la sobreelevación total por el talud $\frac{\mp T' + k\Delta H}{2}$ a r_c , es decir, *si se ajustan de acuerdo a la sobreelevación y al tirante medio. La figura 3.20 muestra el ajuste para el radio interior.*
- Si el radio de curvatura es variable, se deben de programar en el Excel las columnas de los radios para que de acuerdo a la longitud recorrida se ajusten a su valor actualizado

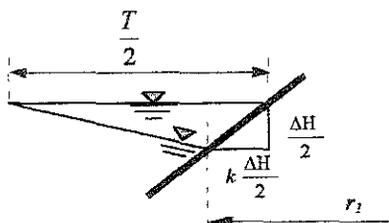


Figura 3.20 Esquema de ajuste al radio interior r_1

VI. Sobreelevación y velocidad de cortante

- La sobreelevación se cuantifica donde la trayectoria es curvilínea. Se considera la velocidad promedio V_m y el respectivo ancho de superficie libre T .

$\frac{\Delta H}{m}$	u_i' / V_m	v^* / V_m	m
----------------------	--------------	-------------	-----

$$\Delta H = 1.1 \frac{V_m^2}{g} \cdot \frac{T}{r_c} \tag{3.1.22}$$

- Para conocer el gradiente transversal se necesita la velocidad al cortante, la cual se obtiene a partir de la velocidad transversal.

$$\frac{v_*}{V_m} = 1.2 - 0.144 \frac{r_c}{h_m} \left[\frac{u'}{V_m} \right] \tag{3.2.20}$$

- El factor requerido para la distribución vertical de la velocidad longitudinal es

$$m = \frac{1.131}{\sqrt{f}}$$

VII. Gradiente transversal

- Dado que la ecuación de S'' (3.2.19) es muy larga, conviene separarla en términos que solo se sumen o se multipliquen. La siguiente numeración es un ejemplo de cómo se pueden agrupar los términos de la ecuación y la forma que se usará en el ejemplo.

$$S'' = \underbrace{\frac{V_m^2}{gQ} \left(\frac{m+1}{m}\right)^2}_{(1)} \left[\underbrace{\left[h_m^2 - 2.2h_m \frac{V_m^2}{g} + 1 \right]}_{(7)} \underbrace{\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]}_{(8)} + \underbrace{\left(\frac{2.2h_m}{r_c} \frac{V_m^2}{g} - 2 \frac{1.1^2}{r_c} \frac{V_m^4}{g^2} \right)}_{(9)} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \right] + \underbrace{\frac{1.1^2}{r_c^2} \frac{V_m^4}{g^2}}_{(10)} (r_2 - r_1) \right] \times$$

$$\times \left[\underbrace{\left(\frac{16.5v_*}{V_m} - \frac{562.5}{54} \right)}_{(3)} \left(\frac{m}{2+m}\right) + \underbrace{\left(\frac{37.5}{2} - \frac{2344v_*}{V_m} \right)}_{(4)} \left(\frac{m}{2+3m}\right) + \underbrace{\left(-\frac{46.88v_*}{V_m} + 37.5 \right)}_{(5)} \left(\frac{m}{2+3m}\right)^2 - \underbrace{\frac{93.75v_*}{V_m}}_{(6)} \left(\frac{m}{2+3m}\right)^3 \right] \quad (3.2.19)$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	S'' actualizado
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----------------------

- El resultado final de cada iteración es la columna de gradientes transversales actualizados correspondientes a las cien secciones del canal analizadas. Esos gradientes se usan como los iniciales en la siguiente iteración. Cuando dos iteraciones dan valores prácticamente iguales se considera que el método ya ha convergido.

VIII. Gráficas

- De la última iteración se pueden trazar algunas gráficas que ayuden a visualizar distintas características del flujo a lo largo del canal, lo cual en Excel resulta sencillo realizar. Las gráficas que se recomiendan son:

X	Y
Longitud recorrida	Sobreelevación ΔH
Longitud recorrida	Velocidad transversal u'
Longitud recorrida	Gradiente total S
Longitud recorrida	Tirante h_m

Nota – Para la correcta aplicación del método, es bueno que el lector recuerde sus conocimientos básicos de perfiles hidráulicos

4 EJEMPLO NUMÉRICO

4.1 Planteamiento

En este capítulo se propone un ejemplo numérico en el cual se aplica la metodología desarrollada en el capítulo 3.

Datos del canal propuesto

Debido al espacio disponible, se requiere construir una curva horizontal para un canal artificial con flujo en régimen subcrítico. Es necesario simular y conocer el comportamiento hidráulico de este tramo particular de la conducción para hacer el diseño más apropiado.

Se trata de un canal con paredes y plantilla de cemento-concreto y sección trapecial simétrica.

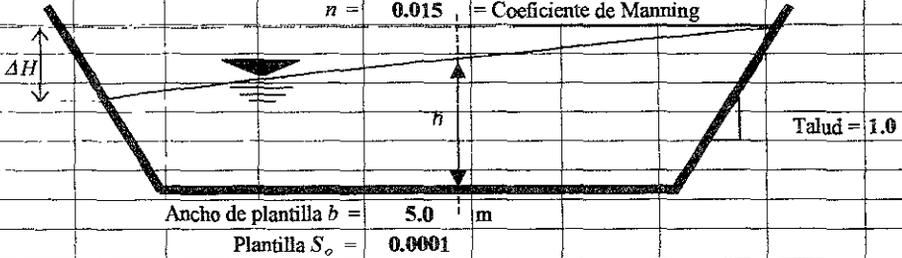
Pendiente longitudinal $S_o = 0.0001$

En las figuras 4.1 y 4.2 se especifican mas características del canal.

Viscosidad cinemática del agua = $0.000001 \text{ m}^2/\text{s}$

Gasto $Q = 10.5 \text{ m}^3/\text{s}$

$n = 0.015$ = Coeficiente de Manning



Ancho de plantilla $b = 5.0 \text{ m}$

Plantilla $S_o = 0.0001$

Figura 4.1 Sección transversal del canal trapecial

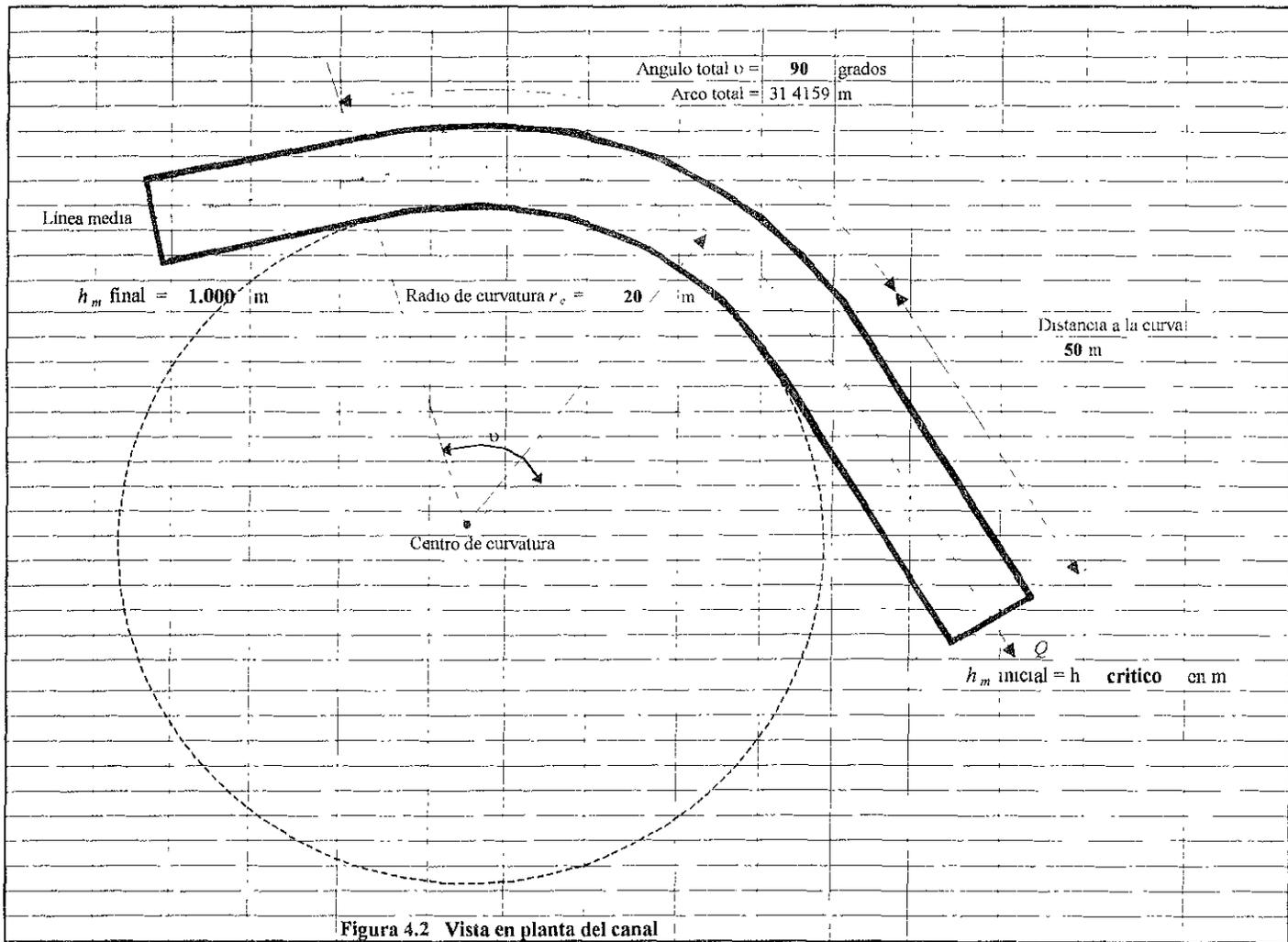


Figura 4.2 Vista en planta del canal

4.2 APLICACIÓN DEL MÉTODO ITERATIVO

CARACTERÍSTICAS DEL TIRANTE CRÍTICO

Tirante hidráulico $Y_{Cr} =$	0.646	m
Area $A_{Cr} =$	4.171	m ²
Perímetro mojado $Pm_{Cr} =$	7.060	m
Radio hidráulico $R_{hCr} =$	0.591	m
Gradiente longitudinal $S' =$	0.00288	
Velocidad en tramo recto $V_{mCr} =$	2.517	m/s
Tirante crítico $h_{Cr} =$	0.728	m
$Fr =$	1.000	

CARACTERÍSTICAS DEL TIRANTE NORMAL

Tirante hidráulico $Y_n =$	1.509	m
Area $A_n =$	13.370	m ²
Perímetro mojado $Pm_n =$	10.457	m
Radio hidráulico $R_h =$	1.279	m
Gradiente longitudinal $S' =$	0.0001	
Velocidad en tramo recto $V_{mn} =$	0.785	m/s
Tirante normal $h_n =$	1.929	m
$Fr =$	0.204	

Iteraciones para obtener el tirante crítico

N	0.714	0.729	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728
h_{Cr}	1.000	0.714	0.729	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728	0.728

Iteraciones para obtener el tirante normal

N	1.985	1.926	1.930	1.929	1.929	1.929	1.929	1.929	1.929	1.929
h_n	1.000	1.985	1.926	1.930	1.929	1.929	1.929	1.929	1.929	1.929

$a = 3906.98$ a es una parte constante de la ecuación 3.4.6 y corresponde a términos que no cambian durante todas las iteraciones

0.4 % = Porcentaje de incremento de h para las iteraciones

4.3 TABULACIONES

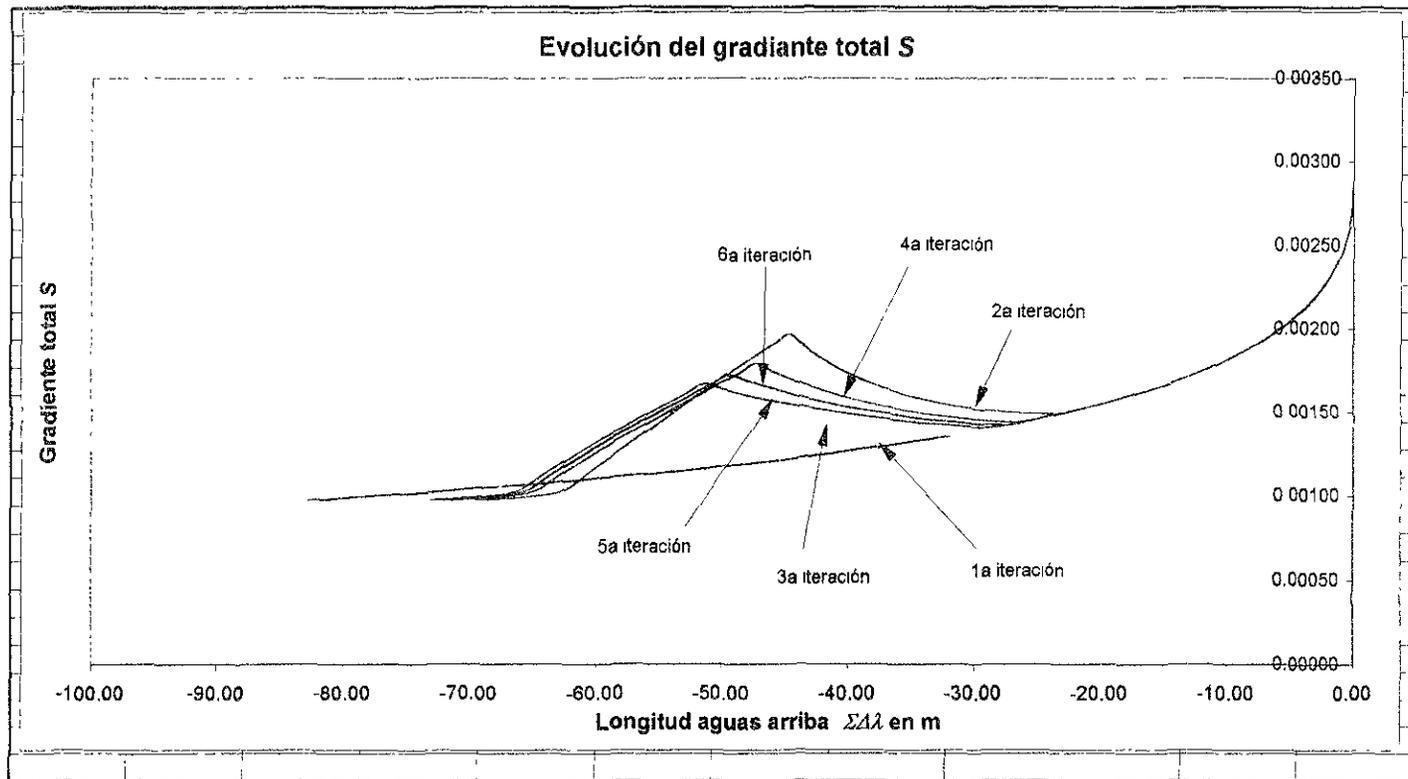
		RÉGIMEN SUBCRÍTICO											$b + (2h_m \text{raz}(k^2 + 1))$		$b + 2kh_m$		
													$h_m (kh_m + b)$	Perímetro	A/Pm	Ancho de	
													mojado		Superficie		
		Contador	Longitud recorrida		z_t	h_{mt}	k	A_t	Pm_t	R_h	$R_h^{2/3}$	V_{ms}	$V_{ms}^2/2g$	T_t			
		m	m	m	m	talud	m ²	m	m		m/s	m	m				
Primeros renglones de la primera iteración		1	0 00	0 00	0 000	0 728	1 000	4 17	7 060	0 591	0 704	2 517	0 323	6 456			
		2	0 01	-0 01	0 000	0 731	1 000	4 19	7 068	0 593	0 706	2 506	0 320	6 462			
		3	0 03	-0 03	0 000	0 734	1 000	4 21	7 076	0 595	0 707	2 495	0 317	6 468			
		4	0 06	-0 06	0 000	0 737	1 000	4 23	7 084	0 597	0 709	2 484	0 314	6 474			
		5	0 11	-0 11	0 000	0 740	1 000	4 25	7 093	0 599	0 710	2 472	0 312	6 480			
		6	0 17	-0 17	0 000	0 743	1 000	4 27	7 101	0 601	0 712	2 461	0 309	6 486			
		7	0 25	-0 25	0 000	0 746	1 000	4 29	7 109	0 603	0 714	2 450	0 306	6 492			
		8	0 34	-0 34	0 000	0 749	1 000	4 30	7 118	0 605	0 715	2 439	0 303	6 498			
		9	0 45	-0 45	0 000	0 752	1 000	4 32	7 126	0 607	0 717	2 428	0 301	6 504			
		10	0 57	-0 57	0 000	0 755	1 000	4 34	7 135	0 609	0 718	2 417	0 298	6 510			
		11	0 71	-0 71	0 000	0 758	1 000	4 36	7 143	0 611	0 720	2 406	0 295	6 516			
		12	0 87	-0 87	0 000	0 761	1 000	4 38	7 152	0 613	0 721	2 396	0 293	6 522			
		13	1 04	-1 04	0 000	0 764	1 000	4 40	7 161	0 615	0 723	2 385	0 290	6 528			
		14	1 24	-1 24	0 000	0 767	1 000	4 42	7 169	0 617	0 725	2 374	0 287	6 534			
		15	1 44	-1 44	0 000	0 770	1 000	4 44	7 178	0 619	0 726	2 363	0 285	6 540			
		16	1 67	-1 67	0 000	0 773	1 000	4 46	7 187	0 621	0 728	2 353	0 282	6 546			
		17	1 92	-1 92	0 000	0 776	1 000	4 48	7 195	0 623	0 730	2 342	0 280	6 552			
		18	2 18	-2 18	0 000	0 779	1 000	4 50	7 204	0 625	0 731	2 331	0 277	6 559			
		19	2 47	-2 47	0 000	0 782	1 000	4 52	7 213	0 627	0 733	2 321	0 275	6 565			
		20	2 77	-2 77	0 000	0 786	1 000	4 54	7 222	0 629	0 734	2 310	0 272	6 571			
		21	3 10	-3 10	0 000	0 789	1 000	4 57	7 231	0 631	0 736	2 300	0 270	6 577			
		22	3 44	-3 44	0 000	0 792	1 000	4 59	7 240	0 633	0 738	2 290	0 267	6 584			
		23	3 81	-3 81	0 000	0 795	1 000	4 61	7 249	0 636	0 739	2 279	0 265	6 590			
		24	4 20	-4 20	0 000	0 798	1 000	4 63	7 258	0 638	0 741	2 269	0 262	6 596			
		25	4 61	-4 61	0 000	0 801	1 000	4 65	7 267	0 640	0 742	2 259	0 260	6 603			
		26	5 04	-5 04	0 001	0 805	1 000	4 67	7 276	0 642	0 744	2 248	0 258	6 609			
		27	5 50	-5 50	0 001	0 808	1 000	4 69	7 285	0 644	0 746	2 238	0 255	6 616			
		28	5 98	-5 98	0 001	0 811	1 000	4 71	7 294	0 646	0 747	2 228	0 253	6 622			
		29	6 48	-6 48	0 001	0 814	1 000	4 73	7 303	0 648	0 749	2 218	0 251	6 629			
		30	7 01	-7 01	0 001	0 818	1 000	4 76	7 312	0 650	0 751	2 208	0 248	6 635			
		31	7 57	-7 57	0 001	0 821	1 000	4 78	7 322	0 653	0 752	2 198	0 246	6 642			
		32	8 15	-8 15	0 001	0 824	1 000	4 80	7 331	0 655	0 754	2 188	0 244	6 648			
		33	8 76	-8 76	0 001	0 827	1 000	4 82	7 340	0 657	0 756	2 178	0 242	6 655			

AT														
		$R_b V / \eta$	Anterior				promedio				promedio		promedio	promedio
Y_i	Fr	Re	E_c	S'_i	S''_i	S_{total}	S_m	ΔL	hc	Chery	f	f	V_m	h_m
m			m		m/m	m/m		m	m	C			m/s	m
0.646	1.0000	1487357	1.051	0.00288	0.00000	0.00288		0	0.0000	61.0686	0.0210	0.0210	2.512	0.730
0.648	0.9937	1485624	1.051	0.00284	0.00000	0.00284	0.00286	0.007	0.0000	61.1026	0.0210	0.0210	2.501	0.733
0.651	0.9875	1483887	1.051	0.00280	0.00000	0.00280	0.00282	0.020	0.0001	61.1365	0.0210	0.0210	2.489	0.735
0.653	0.9813	1482148	1.051	0.00276	0.00000	0.00276	0.00278	0.034	0.0001	61.1705	0.0210	0.0210	2.478	0.738
0.655	0.9751	1480406	1.051	0.00273	0.00000	0.00273	0.00274	0.048	0.0001	61.2044	0.0210	0.0209	2.467	0.741
0.658	0.9690	1478661	1.052	0.00269	0.00000	0.00269	0.00271	0.063	0.0002	61.2384	0.0209	0.0209	2.456	0.744
0.660	0.9629	1476913	1.052	0.00265	0.00000	0.00265	0.00267	0.077	0.0002	61.2724	0.0209	0.0209	2.445	0.747
0.662	0.9568	1475162	1.052	0.00262	0.00000	0.00262	0.00264	0.093	0.0002	61.3063	0.0209	0.0209	2.434	0.750
0.665	0.9508	1473408	1.052	0.00258	0.00000	0.00258	0.00260	0.108	0.0003	61.3403	0.0209	0.0208	2.423	0.753
0.667	0.9448	1471652	1.053	0.00255	0.00000	0.00255	0.00257	0.124	0.0003	61.3743	0.0208	0.0208	2.412	0.756
0.670	0.9389	1469893	1.053	0.00251	0.00000	0.00251	0.00253	0.140	0.0004	61.4082	0.0208	0.0208	2.401	0.759
0.672	0.9330	1468130	1.053	0.00248	0.00000	0.00248	0.00250	0.157	0.0004	61.4422	0.0208	0.0208	2.390	0.762
0.674	0.9271	1466366	1.054	0.00245	0.00000	0.00245	0.00246	0.174	0.0004	61.4762	0.0208	0.0208	2.379	0.765
0.677	0.9213	1464598	1.054	0.00241	0.00000	0.00241	0.00243	0.191	0.0005	61.5102	0.0207	0.0207	2.369	0.768
0.679	0.9155	1462828	1.055	0.00238	0.00000	0.00238	0.00240	0.209	0.0005	61.5442	0.0207	0.0207	2.358	0.772
0.682	0.9097	1461054	1.055	0.00235	0.00000	0.00235	0.00237	0.227	0.0005	61.5781	0.0207	0.0207	2.347	0.775
0.684	0.9040	1459278	1.056	0.00232	0.00000	0.00232	0.00233	0.246	0.0006	61.6121	0.0207	0.0207	2.337	0.778
0.687	0.8983	1457500	1.056	0.00229	0.00000	0.00229	0.00230	0.265	0.0006	61.6461	0.0207	0.0206	2.326	0.781
0.689	0.8926	1455718	1.057	0.00226	0.00000	0.00226	0.00227	0.284	0.0006	61.6801	0.0206	0.0206	2.316	0.784
0.692	0.8870	1453934	1.058	0.00223	0.00000	0.00223	0.00224	0.304	0.0007	61.7141	0.0206	0.0206	2.305	0.787
0.694	0.8814	1452147	1.058	0.00220	0.00000	0.00220	0.00221	0.325	0.0007	61.7481	0.0206	0.0206	2.295	0.790
0.697	0.8758	1450357	1.059	0.00217	0.00000	0.00217	0.00218	0.345	0.0008	61.7821	0.0206	0.0205	2.284	0.793
0.699	0.8703	1448564	1.060	0.00214	0.00000	0.00214	0.00215	0.367	0.0008	61.8162	0.0205	0.0205	2.274	0.797
0.702	0.8648	1446769	1.061	0.00211	0.00000	0.00211	0.00212	0.388	0.0008	61.8502	0.0205	0.0205	2.264	0.800
0.704	0.8594	1444971	1.061	0.00208	0.00000	0.00208	0.00210	0.411	0.0009	61.8842	0.0205	0.0205	2.253	0.803
0.707	0.8540	1443171	1.062	0.00205	0.00000	0.00205	0.00207	0.433	0.0009	61.9182	0.0205	0.0205	2.243	0.806
0.709	0.8486	1441367	1.063	0.00203	0.00000	0.00203	0.00204	0.457	0.0009	61.9522	0.0204	0.0204	2.233	0.809
0.712	0.8432	1439562	1.064	0.00200	0.00000	0.00200	0.00201	0.481	0.0010	61.9863	0.0204	0.0204	2.223	0.813
0.714	0.8379	1437753	1.065	0.00197	0.00000	0.00197	0.00199	0.505	0.0010	62.0203	0.0204	0.0204	2.213	0.816
0.717	0.8326	1435942	1.066	0.00195	0.00000	0.00195	0.00196	0.530	0.0010	62.0543	0.0204	0.0204	2.203	0.819
0.719	0.8273	1434128	1.067	0.00192	0.00000	0.00192	0.00193	0.555	0.0011	62.0883	0.0204	0.0203	2.193	0.822
0.722	0.8221	1432311	1.068	0.00189	0.00000	0.00189	0.00191	0.581	0.0011	62.1224	0.0203	0.0203	2.183	0.826
0.724	0.8169	1430492	1.069	0.00187	0.00000	0.00187	0.00188	0.608	0.0011	62.1564	0.0203	0.0203	2.173	0.829

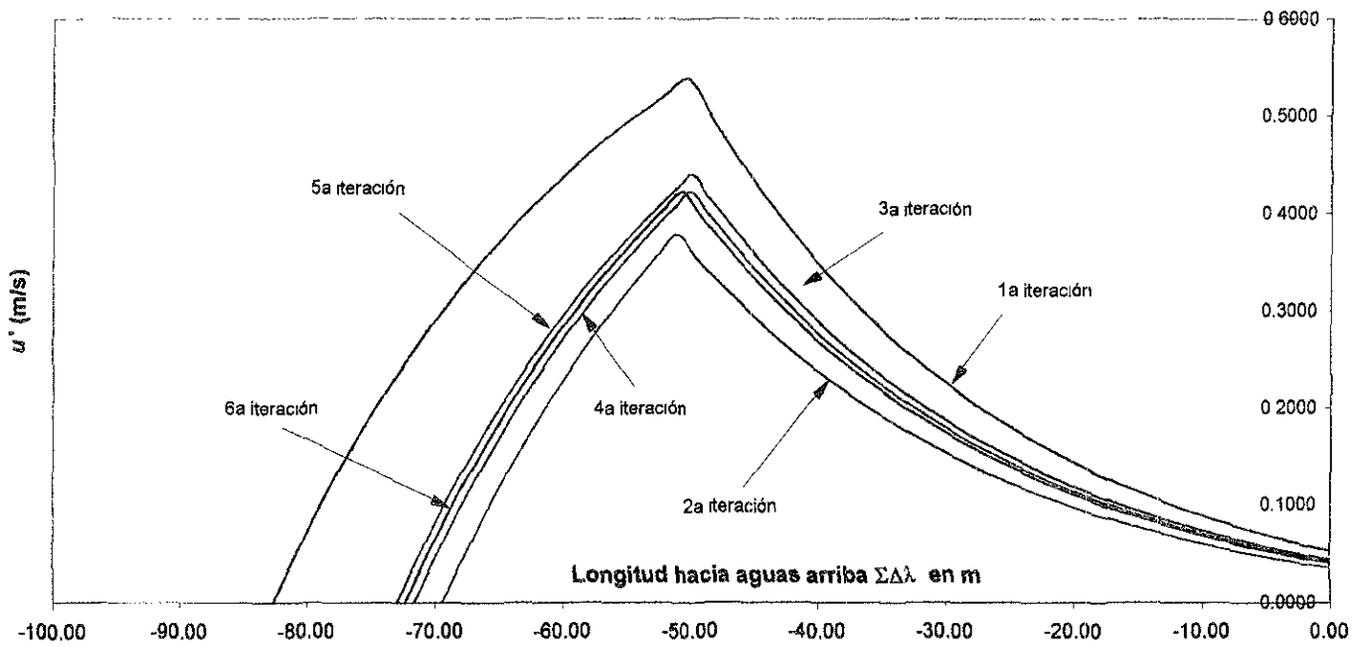
Factor de sobreelevación $C_s = 1.1$															
promedio															
i_m^2/g	l	r_c	r_1	r_2	u_1'	ΔH	u_1'/V_m	v^0/V_m	m	l	2	3	4	5	6
m	m	m	m	m	m/s	m									
0.643	6.459	Infinito	Infinito	Infinito	0.0543	0.0000	0.022	1.1147	7.80	1.5272	0.0086	0.8311	-0.2904	-0.1784	-0.3880
0.637	6.465	Infinito	Infinito	Infinito	0.0543	0.0000	0.022	1.1146	7.80	1.5074	0.0087	0.8306	-0.2902	-0.1783	-0.3879
0.632	6.471	Infinito	Infinito	Infinito	0.0543	0.0000	0.022	1.1145	7.81	1.4878	0.0088	0.8300	-0.2900	-0.1781	-0.3876
0.626	6.477	Infinito	Infinito	Infinito	0.0544	0.0000	0.022	1.1143	7.81	1.4685	0.0088	0.8293	-0.2896	-0.1779	-0.3874
0.620	6.483	Infinito	Infinito	Infinito	0.0546	0.0000	0.022	1.1140	7.82	1.4494	0.0089	0.8284	-0.2892	-0.1777	-0.3871
0.615	6.489	Infinito	Infinito	Infinito	0.0548	0.0000	0.022	1.1137	7.82	1.4305	0.0090	0.8275	-0.2888	-0.1774	-0.3869
0.609	6.495	Infinito	Infinito	Infinito	0.0550	0.0000	0.023	1.1133	7.82	1.4119	0.0091	0.8264	-0.2882	-0.1771	-0.3866
0.604	6.501	Infinito	Infinito	Infinito	0.0553	0.0000	0.023	1.1128	7.83	1.3935	0.0092	0.8252	-0.2876	-0.1767	-0.3862
0.598	6.507	Infinito	Infinito	Infinito	0.0556	0.0000	0.023	1.1122	7.83	1.3753	0.0093	0.8239	-0.2870	-0.1763	-0.3859
0.593	6.513	Infinito	Infinito	Infinito	0.0560	0.0000	0.023	1.1116	7.84	1.3574	0.0093	0.8225	-0.2862	-0.1759	-0.3855
0.588	6.519	Infinito	Infinito	Infinito	0.0564	0.0000	0.023	1.1109	7.84	1.3397	0.0094	0.8209	-0.2854	-0.1754	-0.3851
0.582	6.525	Infinito	Infinito	Infinito	0.0569	0.0000	0.024	1.1101	7.85	1.3222	0.0095	0.8192	-0.2846	-0.1748	-0.3846
0.577	6.531	Infinito	Infinito	Infinito	0.0574	0.0000	0.024	1.1092	7.85	1.3050	0.0096	0.8173	-0.2836	-0.1743	-0.3842
0.572	6.537	Infinito	Infinito	Infinito	0.0580	0.0000	0.024	1.1082	7.86	1.2880	0.0097	0.8153	-0.2826	-0.1736	-0.3837
0.567	6.543	Infinito	Infinito	Infinito	0.0587	0.0000	0.025	1.1071	7.86	1.2711	0.0098	0.8131	-0.2814	-0.1729	-0.3831
0.562	6.549	Infinito	Infinito	Infinito	0.0594	0.0000	0.025	1.1060	7.86	1.2545	0.0099	0.8108	-0.2802	-0.1722	-0.3826
0.557	6.555	Infinito	Infinito	Infinito	0.0601	0.0000	0.026	1.1047	7.87	1.2381	0.0100	0.8083	-0.2789	-0.1714	-0.3820
0.552	6.562	Infinito	Infinito	Infinito	0.0610	0.0000	0.026	1.1033	7.87	1.2219	0.0100	0.8056	-0.2775	-0.1706	-0.3813
0.547	6.568	Infinito	Infinito	Infinito	0.0619	0.0000	0.027	1.1018	7.88	1.2059	0.0101	0.8027	-0.2760	-0.1696	-0.3806
0.542	6.574	Infinito	Infinito	Infinito	0.0629	0.0000	0.027	1.1002	7.88	1.1902	0.0102	0.7997	-0.2744	-0.1687	-0.3799
0.537	6.580	Infinito	Infinito	Infinito	0.0639	0.0000	0.028	1.0985	7.89	1.1746	0.0103	0.7964	-0.2726	-0.1676	-0.3792
0.532	6.587	Infinito	Infinito	Infinito	0.0651	0.0000	0.028	1.0966	7.89	1.1592	0.0104	0.7929	-0.2708	-0.1665	-0.3784
0.527	6.593	Infinito	Infinito	Infinito	0.0663	0.0000	0.029	1.0946	7.89	1.1440	0.0105	0.7892	-0.2688	-0.1653	-0.3775
0.522	6.600	Infinito	Infinito	Infinito	0.0676	0.0000	0.030	1.0924	7.90	1.1290	0.0106	0.7852	-0.2667	-0.1640	-0.3766
0.518	6.606	Infinito	Infinito	Infinito	0.0691	0.0000	0.031	1.0901	7.90	1.1142	0.0107	0.7809	-0.2645	-0.1626	-0.3756
0.513	6.612	Infinito	Infinito	Infinito	0.0706	0.0000	0.031	1.0876	7.91	1.0996	0.0108	0.7764	-0.2621	-0.1611	-0.3746
0.508	6.619	Infinito	Infinito	Infinito	0.0722	0.0000	0.032	1.0849	7.91	1.0851	0.0109	0.7716	-0.2595	-0.1596	-0.3735
0.504	6.625	Infinito	Infinito	Infinito	0.0740	0.0000	0.033	1.0821	7.92	1.0709	0.0110	0.7664	-0.2568	-0.1579	-0.3724
0.499	6.632	Infinito	Infinito	Infinito	0.0759	0.0000	0.034	1.0790	7.92	1.0568	0.0111	0.7609	-0.2538	-0.1561	-0.3712
0.495	6.638	Infinito	Infinito	Infinito	0.0779	0.0000	0.035	1.0757	7.92	1.0429	0.0112	0.7551	-0.2507	-0.1542	-0.3699
0.490	6.645	Infinito	Infinito	Infinito	0.0800	0.0000	0.036	1.0722	7.93	1.0292	0.0113	0.7489	-0.2474	-0.1521	-0.3685
0.486	6.651	Infinito	Infinito	Infinito	0.0823	0.0000	0.038	1.0684	7.93	1.0157	0.0114	0.7422	-0.2438	-0.1500	-0.3671
0.481	6.658	Infinito	Infinito	Infinito	0.0848	0.0000	0.039	1.0644	7.94	1.0023	0.0115	0.7351	-0.2401	-0.1476	-0.3655

7	8	9	10	11	S''	
					Actualizado	
0.00049	0.0166	0.00157	0.3258	0.0081	0.00000	Primeros renglones de la primera iteración
0.00099	0.0166	0.00220	0.3261	0.0079	0.00000	
0.00165	0.0166	0.00282	0.3264	0.0078	0.00000	
0.00248	0.0166	0.00343	0.3267	0.0077	0.00000	
0.00347	0.0166	0.00402	0.3270	0.0075	0.00000	
0.00463	0.0167	0.00460	0.3273	0.0074	0.00000	
0.00594	0.0167	0.00517	0.3276	0.0073	0.00000	
0.00741	0.0167	0.00572	0.3279	0.0072	0.00000	
0.00904	0.0167	0.00626	0.3282	0.0070	0.00000	
0.01081	0.0167	0.00678	0.3286	0.0069	0.00000	
0.01274	0.0167	0.00730	0.3289	0.0068	0.00000	
0.01482	0.0168	0.00780	0.3292	0.0067	0.00000	
0.01704	0.0168	0.00829	0.3295	0.0066	0.00000	
0.01941	0.0168	0.00877	0.3298	0.0065	0.00000	
0.02193	0.0168	0.00923	0.3301	0.0064	0.00000	
0.02458	0.0168	0.00969	0.3304	0.0063	0.00000	
0.02737	0.0168	0.01013	0.3308	0.0061	0.00000	
0.03030	0.0169	0.01056	0.3311	0.0060	0.00000	▼
0.03337	0.0169	0.01098	0.3314	0.0059	0.00000	
0.03657	0.0169	0.01140	0.3317	0.0058	0.00000	
0.03991	0.0169	0.01180	0.3320	0.0057	0.00000	
0.04338	0.0169	0.01219	0.3324	0.0056	0.00000	
0.04697	0.0169	0.01257	0.3327	0.0055	0.00000	
0.05070	0.0170	0.01294	0.3330	0.0054	0.00000	
0.05455	0.0170	0.01330	0.3333	0.0054	0.00000	
0.05853	0.0170	0.01365	0.3337	0.0053	0.00000	
0.06263	0.0170	0.01399	0.3340	0.0052	0.00000	
0.06685	0.0170	0.01433	0.3343	0.0051	0.00000	
0.07120	0.0170	0.01465	0.3347	0.0050	0.00000	
0.07566	0.0171	0.01497	0.3350	0.0049	0.00000	
0.08025	0.0171	0.01527	0.3354	0.0048	0.00000	
0.08495	0.0171	0.01557	0.3357	0.0047	0.00000	
0.08977	0.0171	0.01586	0.3360	0.0047	0.00000	

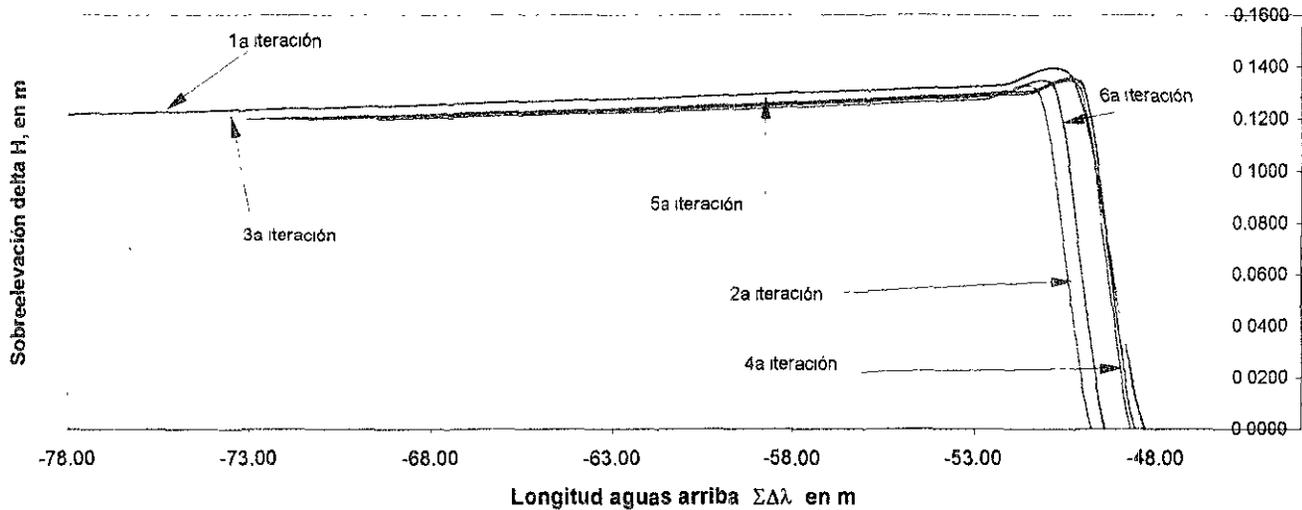
0.5799	-0.1570	-0.0966	-0.3322	0.19519	0.0175	0.01984	0.3424	0.0034	0.00000			
0.5581	-0.1452	-0.0894	-0.3276	0.20203	0.0175	0.02000	0.3428	0.0034	0.00000			
0.5343	-0.1324	-0.0815	-0.3226	0.20897	0.0175	0.02015	0.3431	0.0033	0.00000	Zona intermedia		
0.5087	-0.1186	-0.0730	-0.3173	0.21600	0.0175	0.02030	0.3435	0.0032	0.00000	de la sexta		
0.4813	-0.1039	-0.0639	-0.3116	0.22313	0.0175	0.02044	0.3439	0.0032	0.00002	iteración		
0.4521	-0.0881	-0.0542	-0.3055	0.23036	0.0176	0.02058	0.3442	0.0031	0.00004			
0.4209	-0.0713	-0.0439	-0.2990	0.23768	0.0176	0.02071	0.3446	0.0031	0.00007			
0.3877	-0.0534	-0.0329	-0.2921	0.24509	0.0176	0.02084	0.3450	0.0030	0.00010			
0.3524	-0.0344	-0.0212	-0.2848	0.25260	0.0176	0.02096	0.3454	0.0030	0.00013			
0.3149	-0.0142	-0.0087	-0.2770	0.26021	0.0176	0.02108	0.3457	0.0029	0.00016			
0.2752	0.0073	0.0045	-0.2688	0.26791	0.0177	0.02119	0.3461	0.0029	0.00019			
0.2330	0.0300	0.0185	-0.2601	0.27570	0.0177	0.02130	0.3465	0.0028	0.00022			
0.1885	0.0540	0.0332	-0.2508	0.28358	0.0177	0.02141	0.3469	0.0028	0.00025			
0.1416	0.0793	0.0488	-0.2411	0.29156	0.0177	0.02150	0.3473	0.0027	0.00029			
0.0921	0.1060	0.0653	-0.2309	0.29962	0.0177	0.02160	0.3477	0.0027	0.00033			
0.0402	0.1340	0.0825	-0.2202	0.30778	0.0178	0.02169	0.3480	0.0026	0.00037			
-0.0143	0.1634	0.1006	-0.2089	0.31603	0.0178	0.02178	0.3484	0.0026	0.00041			S''
-0.0714	0.1942	0.1196	-0.1971	0.32437	0.0178	0.02186	0.3488	0.0025	0.00045			
-0.1311	0.2264	0.1394	-0.1848	0.33280	0.0178	0.02194	0.3492	0.0025	0.00050			
-0.1952	0.2609	0.1607	-0.1715	0.34132	0.0177	0.02201	0.3485	0.0025	0.00054			
-0.1459	0.2342	0.1443	-0.1816	0.34993	0.0177	0.02208	0.3489	0.0024	0.00050			
-0.0907	0.2043	0.1258	-0.1928	0.35862	0.0178	0.02215	0.3493	0.0024	0.00046			
-0.0286	0.1706	0.1051	-0.2054	0.36741	0.0178	0.02221	0.3497	0.0023	0.00041			
0.0420	0.1324	0.0816	-0.2198	0.37629	0.0178	0.02227	0.3501	0.0023	0.00035			
0.1233	0.0884	0.0545	-0.2364	0.38525	0.0178	0.02232	0.3505	0.0023	0.00029			
0.2184	0.0369	0.0227	-0.2558	0.39430	0.0179	0.02238	0.3509	0.0022	0.00021			
0.3322	-0.0246	-0.0152	-0.2791	0.40344	0.0179	0.02244	0.3513	0.0022	0.00013			
0.4730	-0.1007	-0.0621	-0.3079	0.41267	0.0179	0.02247	0.3517	0.0021	0.00002			
0.6443	-0.1934	-0.1192	-0.3430	0.42198	0.0179	0.02251	0.3521	0.0021	0.00000			
0.8426	-0.3005	-0.1852	-0.3836	0.42889	0.0179	0.02254	0.3525	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			
0.9429	-0.3548	-0.2186	-0.4041	0.43112	0.0179	0.02255	0.3526	0.0021	0.00000			



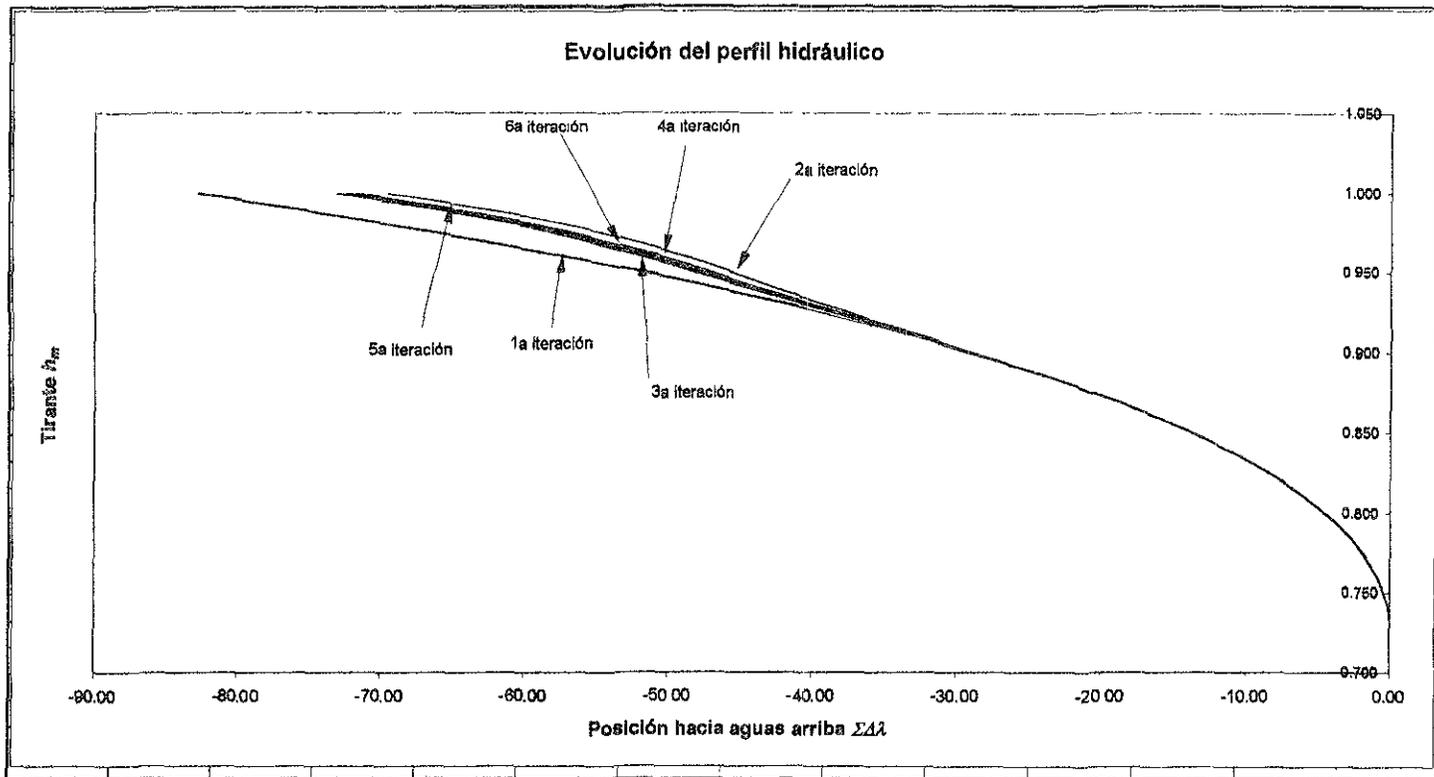
Evolución de la velocidad transversal



Comportamiento de la sobreelevación



Evolución del perfil hidráulico



4.4 ANÁLISIS DE GRÁFICAS GENERADAS Y RESULTADOS OBTENIDOS

- Las gráficas obtenidas son el resultado de 6 iteraciones o recorridos entre la posición inicial aguas debajo de la curva horizontal y la posición en la cual se alcanzó el tirante final especificado inicialmente
- En la gráfica Longitud recorrida vs Gradiente total se aprecia cómo se comporta el gradiente a lo largo del canal y cómo en cada iteración, donde se consideran los gradientes transversales del recorrido anterior, la curva se va desplazando hasta estabilizarse y lo mismo sucede con los resultados numéricos. La forma de las curvas se parece a la de las curvas que obtuvo Chang (1984).
- Algo similar sucede en las curvas de velocidad transversal sobre el eje del canal u' , y además ésta presenta un decaimiento normal aguas debajo de la curva
- El perfil hidráulico tiende a tirantes mayores, a consecuencia de mayores pérdidas, lo que aumenta el remanso
- En la gráfica de sobreelevación se observa que las curvas se estabilizan y no llegan a la distancia que se encontró en la primera iteración (o recorrido), es decir, como las pérdidas de energía son mayores, el tirante requerido aguas arriba de la curva se alcanza en menor distancia que si no se consideran las pérdidas de energía por flujo curvilíneo
- Una vez que se alcanza el tirante final se repiten los valores de la sección alcanzada hasta que el contador de secciones analizadas llega a cien o al número de secciones que se le haya asignado revisar, esto evita analizar zonas no especificadas aguas arriba
- Mientras que el tirante final en la primera iteración se alcanza a los 82.5 metros, el tirante final en el sexto recorrido se alcanza a los 72.4 metros
- La sobreelevación también se ve atenuada conforme se consideran las pérdidas de energía, así que para conocer el bordo libre mínimo requerido hay que sumar a lo obtenido en la gráfica de perfil hidráulico la mitad de los valores obtenidos de sobreelevación, es decir $h_m + \frac{\Delta H}{2}$.
- Se observa que la sobreelevación máxima es de cerca de 14 cm, lo que significa que en el lado exterior de la curva el nivel del agua llega a unos 7 cm
- Debido a que el gradiente transversal varía en la zona intermedia de la iteración (porque se inicia 50 metros aguas abajo del canal) en la mayoría de las hojas de Excel no se alcanza a visualizar (la impresión de todas las tablas requiere cerca de 50 cuartillas).
- En el ejemplo expuesto el valor del gradiente transversal llega a ser del orden de un 35% del gradiente longitudinal, lo cual significa que no es despreciable
- La zona de máxima sobreelevación es hacia el final de la curva según muestran las tablas y gráfica generadas.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Se hizo una revisión general del flujo en curvas horizontales de canales abiertos a régimen subcrítico.
- Se hizo la revisión y analizó la comparación de algunos métodos ingenieriles más comunes para cuantificar los fenómenos de interés en el flujo subcrítico en curvas horizontales.
- Quedó formalmente establecido un método iterativo que describe de manera detallada el perfil del agua, o de cualquier otro fluido de densidad similar, a lo largo de una curva horizontal.
- La teoría aplicada proporciona valores puntuales congruentes de pérdidas de energía por flujo longitudinal y por flujo transversal.
- La máxima sobreelevación se presenta hacia el final de la curva en contraposición al tirante medio máximo.
- La sobreelevación descrita a lo largo del perfil permite la construcción más económica del bordo libre.
- Al diseñar el canal se deben de estimar estos cambios en elevaciones para que el canal funcione de manera apropiada y sin situaciones de caos.
- Las pérdidas de energía por flujo secundario son considerables y sí son capaces de modificar el perfil longitudinal.
- En la medida de lo posible se fundamentó matemática y experimentalmente lo realizado en esta tesis, lo cual da sustento a estas conclusiones.
- Hace falta desarrollar un método de fácil aplicación en la computadora para obtener con mayor exactitud el factor de fricción en cualquier sección transversal de un canal en condiciones no uniformes.
- Aunque las ecuaciones no parecen tener problema en cuanto a la inversión del fenómeno de sobreelevación, se requieren trabajos experimentales para ver la congruencia con la realidad.
- Respecto a los esfuerzos cortantes considero que harían bien más investigaciones en el futuro para conocerlos con mayor precisión, especialmente para cuestiones de recubrimiento del perímetro mojado.
- Mayores estudios podrían hacer el método aplicable a régimen supercrítico una vez que se pueda integrar en las ecuaciones el fenómeno de ondas cruzadas. De esta manera se puede ampliar el método.
- La aplicabilidad de lo logrado en esta tesis es gracias al avance que existe hoy en día en la computación, pues aplicar el método a mano resulta sumamente tedioso y no valdría la pena en la mayoría de los casos, debido a que por lo general los efectos de las curvas horizontales pueden sobrestimarse con fórmulas empíricas.
- Es una tarea permanente de todos los ingenieros el poder describir de forma siempre más realista y precisa cualquier fenómeno de su interés.

REFERENCIAS

1. Chang, H. H. (1983) "Energy Expenditure in Curved Open Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 7, Julio, 1983, pp. 1012-1022.
2. Chang, H. H. (1984) "Variation of Flow Resistance Through Curved Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 12, Diciembre, 1984, pp. 1772-1782.
3. Chow, V. T. (1959) "Open Channel Hydraulics," *McGraw-Hill Book Co.*, New York, USA, 1959, pp. 439-447.
4. Escribá, B. D. (1988) "Hidráulica para Ingenieros," *Ed. Bellisco*, Madrid, España, 1988, pp. 18-34.
5. French, R. H. (1985) "Open Channel Hydraulics," *Ed. McGraw-Hill*, New York, USA, 1985, pp. 281-284.
6. Graf, W. H. et Altinakar, M.S., (1993) "Hydraulique fluviale," *Presses polytechniques et universitaires romandes*. Vol. 1, Lausanne, Suisse, 1993, pp. 100-103.
7. James, C. S., (1994) "Evaluation of Methods for Predicting Bend Loss in Meandering Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 2, febrero 1994, pp. 245-253.
8. Kikkawa, H. et al. (1976) "Flow and Bed Topography in Curved Open Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 102, No. 9, septiembre 1976, pp. 1327-1329.
9. Leschziner, M. A. and Rodi, W., (1979) "Calculation of Strongly Curved Open Channel Flow," *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, Vol. 105, No. 10, octubre 1979, pp. 1297-1314.
10. Lien, H. C. Et al. (1999) "Bend Flow Simulation Using 2D Depth-Averaged Model," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 10, octubre 1999, pp. 1102 - 1103.
11. Odgaard, A. J. (1981) "Transverse Bed Slope in Alluvial Channel Bends," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 107, No. 12, diciembre 1981, pp. 1690-1691.
12. Silva, A. M. (1999) "Friction Factor of Meandering Flows," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 7, julio 1999, pp. 779-782.
13. Sotelo, A. G. (1976) "Apuntes de Hidráulica II," *Facultad de Ingeniería*, UNAM, México 1980, pp. 26-48, 182-227.
14. Sotelo, A. G. (1974) "Hidráulica General," Volumen 1, Fundamentos, *Limusa, Noriega Editores*, UNAM, México 1978, pp. 277-296.
15. Yen, Ch.-lien and Yen, B. Ch., (1971) "Water Surface Configuration in Channel Bends," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 97, No. 2, febrero 1971, pp. 303 - 321.
16. Zipparo, V. J. and Hasen, H. (1993) "Davis' Handbook of Applied Hydraulics," *McGraw-Hill Inc.*, 4th edition, Chicago, USA, 1993, pp. 7.11-7.13.

SIMBOLOGÍA

a, a'	variables temporales de integración
A	área hidráulica
a_c	aceleración centrífuga
α	coeficiente de energía
B	alcance del efecto de pared
b	ancho del plantilla
b_1	altura de bordo libre
c	constante de la integral indefinida
C_L	coeficiente de pérdida por curva de 90° (USBR)
C	coeficiente de Chezy
C_r	coeficiente de pendiente transversal S_r
C_s	factor de sobreelevación
D	factor de corrección de James
d	distancia de punto de inicio de iteraciones al final de la curva
E	energía específica
E_o	energía específica inicial
E_s	energía específica en la sección de máxima sobreelevación
e_p	longitud afectada por efecto de pared
ε	factor de proporcionalidad de Graf
F	fuerza por unidad de longitud
Fr	número de Froude
f, f'	coeficiente de Darcy-Weisbach / ajustado
f_c	coeficiente de pérdidas totales del texto de Chow
f_{FR}	variable temporal del método de Agarwal
ϕ	ángulo de desviación del vector velocidad media del agua respecto de la dirección longitudinal del canal proyectado en un plano horizontal
φ	factor de corrección a la velocidad
g	aceleración gravitatoria
γ	peso específico
H_T	carga hidráulica total
h	tirante en una posición específica
ΔH	sobre elevación total
Δh	diferencia de tirante respecto de h_m
h_{cr}	tirante crítico
h_n	tirante normal
h_v	carga de velocidad
h_m	tirante medio en la sección
h_c	carga perdida por curvas horizontales
κ	constante de von Karman, que en fluidos homogéneos vale 0.4
k	talud en canal trapecial
k_a	coeficiente de pérdidas por accesorio
k_c	coeficiente de pérdidas por curvas, según el USBR
k_s	coeficiente de rugosidad de Nikuradse
K	constante de proporcionalidad del método de Graf
L	longitud de la curva
L_i	longitud del inicio de la curva a la sección de máxima sobre elevación
l_c	longitud a lo largo de la línea media del canal entre 2 puntos
l_r	longitud en línea recta entre los mismos 2 puntos
$\Delta \lambda$	distancia entre dos secciones transversales

m	variable temporal de integración
μ	viscosidad dinámica del fluido
η	viscosidad cinemática
n	coeficiente de Manning
n'	coeficiente de Manning ajustado
Q	gasto circulante
Q_p	gasto circulante predicho
Q_m	gasto circulante aforado
q	gasto unitario
Θ	variable temporal, ecuación 2.3.29
P_m	perímetro mojado
P	pérdida de energía por unidad de desplazamiento por unidad de tiempo
P'	pérdida de energía por unidad de desplazamiento por unidad de tiempo en dirección de θ
P''	pérdida de energía por unidad de desplazamiento por unidad de tiempo en dirección de r
p_o	presión al fondo del canal
p_1	presión en la superficie libre, $p_1 = 0$
p	presión media
ρ	densidad del fluido
Re	número de Reynolds
R_h	radio hidráulico
r	radio de curvatura
r_c	radio de curvatura al eje del canal
r_1	radio de curvatura de la pared interior
r_2	radio de curvatura de la pared exterior
S_o	pendiente longitudinal del canal
S'	gradiente de energía longitudinal
S''	gradiente de energía transversal
S	gradiente de energía total
S_m	gradiente total promedio entre dos secciones
S_r	pendiente transversal de la superficie del fluido (agua)
s	longitud en arco
σ_i	esfuerzo normal en dirección i
T	ancho de superficie libre
τ_b	esfuerzo cortante adicional inducido por trayectoria curvilínea
τ_r, τ_{or}	componente radial de esfuerzo cortante / en plantilla
τ_o	esfuerzo cortante total
τ_{ol}	componente longitudinal del esfuerzo cortante total
θ	eje (coordenada) longitudinal curvilíneo
u	componente de la velocidad media del flujo a lo largo del eje coordenado r
v	componente de la velocidad media del flujo a lo largo del eje coordenado θ
w	componente de la velocidad media del flujo a lo largo del eje coordenado z
u'	fluctuación turbulenta respecto a u
v'	fluctuación turbulenta respecto a v
w'	fluctuación turbulenta respecto a w
v'	velocidad longitudinal en la superficie libre
u'	velocidad transversal en la superficie y a lo largo de la línea central
u'_m	velocidad radial superficial promedio a lo largo de toda la curva
v'_m	componente longitudinal de la velocidad promediada a lo largo del tirante
V'_m	velocidad promedio a partir de la ecuación de continuidad
V'_{max}	velocidad longitudinal máxima en una sección
\mathcal{G}	ángulo total de la curva

W	coeficiente de resistencia
Y	tirante hidráulico
z_o	coordenada vertical del fondo del canal
z_1	coordenada vertical de la superficie libre
z	coordenada vertical
$\frac{\partial z_1}{\partial t} = S_r$	variación del nivel de la superficie a lo largo del eje radial
ψ	variable temporal, ecuación 3.2.28
Ω	constante de circulación de la ley de vórtice libre
ζ	sinuosidad (adimensional)
$\delta = \frac{1}{hv_m^2} \int_0^h v^2 dz$	coeficiente para promediar v^2
ξ	variable temporal de las ecuaciones de Kikkawa
$\&$	variación en plantilla de cauce natural