



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN ANALISIS GEOMETRICO COMBINATORIO DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

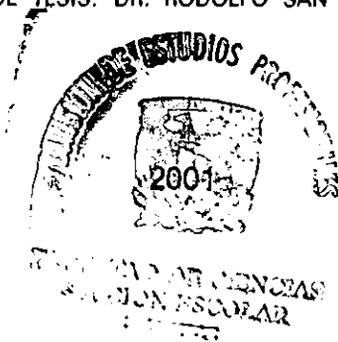
MARTHA PAOLA VERA LICONA

294953

DIRECTOR DE TESIS: DR. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA DE EL SALVADOR
EN LA AMERICA CENTRAL

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Un análisis geométrico combinatorio del Hexagrama Místico de Pascal"

realizado por Vera Licona Martha Paola

con número de cuenta 08900181-1 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Rodolfo San Agustín Chi

Propietario Dr. Emilio Lluís Riera

Propietario Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Suplente Dr. Alejandro Javier Díaz Barriga Casales

Suplente M. en C. Armando Paulino Preciado Babb

Consejo Departamental de Matemáticas



FACULTAD DE CIENCIAS
M. en C. Alejandro Bravo
Escuela de Matemáticas
MATEMÁTICAS

“Un análisis geométrico combinatorio del
Hexagrama Místico de Pascal ”

Martha Paola Vera Licona

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que de alguna forma han influido para lograr hoy día la conclusión de este trabajo.

Muy especialmente a mi familia: a mi mamá y mi abue (mami) por ser un ejemplo de mujeres de gran capacidad de entrega en cualquier proyecto de vida que se propongan, a mi papá Rogelio por el simple hecho de serlo y por representar a una de las personas que más amo y admiro y a mi hermana Pam por su ejemplo de amor para con la familia.

A Ramón por su amor, apoyo, paciencia, amistad y compañía en estos últimos y cruciales años de mi vida.

A mis amigos: José Luis, Manolo, Bere, Augusto, Edna, Paulino, Rogelio, Luis David, Elhoim, Luis Edoardo, Mariana, Abril, Amanda y Emiliano, por compartir y crecer juntos en alguna etapa de la vida.

A todos los profesores que con su entrega y amor por lo que hacen, han sido importantes ejes en mi formación tanto académica como personal: Dr. Barajas, Laura Sandoval, César Rincón, Antonmaría Minzoni, Javier Páez, Rodolfo San Agustín, Emilio Lluís R., Concepción Ruíz, Alejandro Díaz, Francisco Marmolejo y Carlos Prieto.

Quiero agradecer de manera especial a Rodolfo San Agustín, asesor de esta tesis, por el apoyo y el tiempo que me ha dedicado desde casi el comienzo de mi carrera. Por hablarme por primera vez del Hexagrama y por transmitirme su pasión por la investigación.

A la Facultad de Ciencias por todo lo que ahí he aprendido, vivido y madurado; por ser mi hogar y mi refugio.

Índice General

1	Construcción del Hexagrama	15
1.1	Rectas de Pascal	17
1.2	Puntos de Steiner	19
1.3	Puntos de Kirkman	21
1.4	El Teorema de Descomposición de Veronese	23
1.5	Rectas de Cayley	25
1.6	Rectas de Plücker	28
1.7	Puntos de Salmon	29
1.8	Breve resumen	30
2	El \mathcal{HM} como retícula geométrica parcial	33
2.1	Definiciones y propiedades básicas	33
2.2	Construcción de la representación	39
2.2.1	Supremo de rectas de Pascal	42
2.2.2	Supremo de puntos de Steiner y Kirkman	43
2.2.3	Supremo de Puntos de Steiner	44
2.2.4	Supremo de Rectas de Cayley	45

2.2.5	Supremo de otros elementos del \mathcal{HM}	46
3	El \mathcal{HM} como geometría combinatoria parcial	51
3.1	Cerrados de las rectas de Pascal	55
3.2	Cerrados de los puntos de Steiner	55
3.3	Cerrados de los puntos de Kirkman	55
3.4	Cerrados de las rectas de Cayley	56
3.4.1	Construcción del algoritmo para rectas de Cayley	57
3.5	Cerrados de las rectas de Plücker	66
3.6	Cerrados de los puntos de Salmon	66
3.6.1	Un algoritmo de teoría de gráficas	69
3.6.2	Consecuencias del resultado obtenido en el cerrado de los puntos de Salmon	71
4	COMENTARIOS FINALES	81
A	Teoría de Gráficas	85
A.1	Conceptos básicos	85
A.2	Propiedades de K_6	88
B	Una representación del \mathcal{HM} en $S(K_6)$	89
B.1	Rectas de Pascal	89
B.2	Puntos de Steiner	90
B.3	Puntos de Kirkman	92
B.4	Rectas de Cayley	92

B.5 Rectas de Plücker	94
B.6 Puntos de Salmon	95

Prefacio

La configuración del Hexagrama, surge como toda una recopilación de resultados a través de más de tres siglos, encontrando su fuente de inspiración en Blaise Pascal quien en 1640, obtuvo el teorema que lleva su nombre, que en su versión generalizada establece que *un hexágono está inscrito en una cónica si y sólo si las intersecciones de sus pares de lados opuestos están alineados*; es decir, un hexágono $abcdef$ con vértices a, b, c, d, e, f es concónico si y sólo si la intersección de los lados ab y de , be y ef , cd y fa están en una línea. A dicha recta se le conoce como recta de Pascal del hexágono antes mencionado y constituye el primer elemento de nuestra configuración.

Casi dos siglos después de que Pascal demostrara dicho teorema, Steiner se planteó una pregunta muy interesante: al considerar todos los órdenes cíclicos posibles de seis puntos fijos sobre una cónica, generamos 60 diferentes hexágonos (como el $abcdef$, $abdcef$, etc), entonces ¿la recta de Pascal que cada uno de estos hexágonos genera a partir de los mismos puntos tomados en diferente orden, es la misma?; así, lo que Steiner demostró, fue que *tomando seis puntos fijos sobre una cónica en todos los órdenes cíclicos posibles, se*

obtienen exactamente 60 rectas de Pascal diferentes.

Luego Steiner mismo y Kirkman, encontraron 80 diferentes ternas de rectas de Pascal que se intersectan, 20 de estos puntos de intersección fueron encontrados por Steiner, y que por ende reciben el nombre de puntos de Steiner, y los 60 restantes fueron encontrados por Kirkman, por lo que los llamamos puntos de Kirkman. Más adelante, Plücker demostró que existen 15 conjuntos de 4 puntos de Steiner que son colineales y Cayley por su cuenta, demostró que existen 20 ternas de puntos de Kirkman que son colineales, constituyendo así, las rectas de Plücker y de Cayley, respectivamente. Finalmente Salmon demostró, que existen 15 conjuntos de cuatro rectas de Cayley que son concurrentes, recibiendo estos puntos de intersección el nombre de puntos de Salmon.

De manera que en esencia, consideramos como la configuración del Hexagrama Místico, a la que resulta de los 95 puntos y 95 rectas mencionadas arriba prestando una especial atención a la parte teórica de dicha estructura que otros matemáticos como Veronese y Hesse, enriquecieron.

Así, el presente trabajo, a través de un enfoque combinatorio, tiene como objetivo el observar diferentes propiedades geométricas y combinatorias que posee la configuración del Hexagrama Místico, con el fin de caracterizar dicha estructura a partir de cada una de las partes que la componen, cuya motivación principal es la de llevar a cabo un trabajo introductorio para su

posterior aplicación en el estudio de invariantes de la configuración.

Procederemos entonces de la siguiente manera: estructuraremos a los elementos del hexagrama en diferentes niveles, los cuales son establecidos de acuerdo a la manera en que son construídos, es decir, consideraremos en el primer nivel a las rectas de Pascal, luego a los puntos de Steiner y Kirkman, etc, para dar una representación del hexagrama como retícula geométrica parcial.

En este sentido resulta importante mencionar que llevaremos a cabo una serie de pasos a lo largo del trabajo para lograr alcanzar nuestro objetivo; el primero de ellos será el análisis de la notación elegida para designar a cada uno de estos 190 elementos, que nos permita recopilar la información sobre las rectas o bien los puntos, a través de los cuales cada elemento es generado, para de esta manera encontrar para cada pareja de elementos del Hexagrama su supremo, o bien su ínfimo, en el caso de que existan.

El éxito para obtener esta representación del hexagrama dependerá en gran medida de la siguiente meta por alcanzar: dar una representación del hexagrama como geometría combinatoria parcial, que estará determinada a partir de ciertos conjuntos que por sus características, contienen la información fundamental de la estructura completa y que por lo tanto hemos decidido llamarlos cerrados, al hacer una analogía con los cerrados en una topología.

En esta representación nos interesará en gran medida el comportamiento que tiene cada uno de los cerrados que representan a los diferentes elementos del hexagrama y la información geométrica y combinatoria que podamos recuperar de estos; de igual manera volveremos a plantearnos la pregunta al respecto de la forma en que podamos saber de dónde proviene cada uno de los elementos de la configuración para calcular cada uno de los cerrados. Será de gran relevancia en esta etapa, el estudiar o inclusive crear, algoritmos que nos proporcionen la información que la notación quizás no nos proporcionara.

Cabe mencionar que muchas de las preguntas planteadas a lo largo de la tesis, con adecuaciones, ya han sido respondidas, algunos otras no, por lo que a manera de un pequeño proyecto de investigación, trataremos de encontrar algunas de esas respuestas, que nos resulten satisfactorias en concordancia con las necesidades que dicho análisis requiera.

Introducción

El objetivo de esta tesis al hacer un análisis de la configuración del Hexagrama Místico de Pascal (\mathcal{HM}), desde un punto de vista geométrico y combinatorio es formar parte de un trabajo introductorio para una posterior aplicación de la Teoría de Invariantes a través del álgebra de corchetes, que nos permita caracterizar a dicha estructura.

En el primer capítulo llevaremos a cabo la construcción de la configuración del \mathcal{HM} en el plano proyectivo sobre un campo k con $\text{char}(k) \neq 2$ y $|k| > 7$. Introduciremos la notación que emplearemos para cada una de las 95 rectas y 95 puntos que conforman al \mathcal{HM} , haciendo una combinación entre la propuesta por Salmon [5] y por Rodolfo San Agustín [4]; haremos también un breve análisis de las propiedades e información geométrica que dicha notación nos proporcionará, debido a la complejidad que dicha estructura posee.

En este capítulo estudiaremos también el Teorema de Veronese que resulta de gran importancia debido a que nos da una caracterización de tipo combinatorio de la configuración del \mathcal{HM} , ya que descompone a dicha estructura en seis configuraciones de Desargues ajenas. Veremos además un

algoritmo dado por Rodolfo San Agustín para encontrar dichas componentes arguesianas.

En el segundo capítulo, haremos un análisis de las condiciones que nos permitan realizar una representación de la configuración del \mathcal{HM} como retícula geométrica parcial, estructurando a sus 190 elementos en diferentes niveles de acuerdo a la forma en cada uno de éstos fueron construídos.

En el tercer capítulo realizaremos la representación de la retícula geométrica parcial del \mathcal{HM} como geometría combinatoria parcial, través de la construcción de los conjuntos cerrados correspondientes a cada elemento del \mathcal{HM} . Para lograr dicho objetivo, comenzaremos con algunas nociones básicas incluyendo el estudio de la representación de una retícula geométrica como geometría combinatoria para posteriormente aplicarlo con ciertas adecuaciones a nuestro caso: el parcial.

Construiremos en este tercer capítulo, un algoritmo para encontrar a los cerrados de algunos elementos de la configuración del \mathcal{HM} y en base a este algoritmo obtendremos un resultado muy interesante a cerca de esta estructura, por lo que compararemos este resultado con el obtenido a través de la aplicación de un algoritmo aún no publicado de Rodolfo San Agustín con herramienta de Teoría de Gráficas.

Haremos finalmente, un planteamiento de preguntas abiertas que se recopilarán a través de los resultados obtenidos a lo largo del presente trabajo.

Capítulo 1

Construcción del Hexagrama

En este capítulo llevaremos a cabo la construcción de la configuración del Hexagrama Místico basándonos esencialmente en las notas de Sahnou [5], así como la tesis doctoral de San Agustín [4]. Introduciremos además la notación que emplearemos a lo largo de la tesis, observando las propiedades de cada uno de los elementos del Hexagrama y analizando la información geométrica que podemos obtener de dicha notación.

La construcción del Hexagrama, será realizado en el plano proyectivo sobre un campo k con $\text{char}(k) \neq 2$ y $|k| > 7$.

Observación 1.0.1. Dado que no podemos tener una clara diferencia entre conjugados armónicos (distinción que será de gran utilidad para identificar más adelante ciertos puntos en la configuración), la primera restricción es para evitar obtener la configuración del Plano de Fano y la segunda restricción, es únicamente para tener garantizada la existencia de un número suficiente de puntos sobre cada recta de $P^2(k)$.

Notación 1.0.2. *La siguiente notación será empleada en la primer parte de este capítulo:*

- (i) P_1, P_2, \dots, P_6 son seis puntos no ordenados en $P^2(k)$.
- (ii) (a, b, c, d, e, f) , representa al ordenamiento cíclico, sin omisión ni repetición, de los puntos P_1, \dots, P_6 .
- (iii) $abcdef$ es la palabra que denotará al hexágono formado a través del ordenamiento de los puntos, como arriba.
- (iv) $ab = 0$ denotará la ecuación de la recta que pasa por los puntos a y b .
- (v) La intersección de las rectas dadas por las ecuaciones $ab = 0$ y $de = 0$ es el punto denotado por (ab, de) .

Observación 1.0.3. *Dados los seis puntos P_1, \dots, P_6 , tenemos $\frac{6!}{8 \times 2} = 60$ diferentes maneras de ordenarlos dihédricamente, por lo que es posible obtener 60 diferentes hexágonos.*

Ahora, si consideramos todas las rectas que se pueden formar a partir de los puntos P_1, \dots, P_6 , tomando parejas no ordenadas $P_i P_j$, tendremos $C_6^2 = 15$ rectas a las cuales denotaremos *lados fundamentales*.

Cada lado fundamental es intersecado por los otros 14 lados fundamentales de la siguiente manera: 4 lados que pasan por el punto P_i , 4 por el punto P_j y otros 6 en puntos distintos de los seis originales. Así formamos $C_{15}^2 - 6C_5^2 = 45$ puntos nuevos, que llamaremos *puntos fundamentales*.

De esta manera, cada hexágono $abcdef$ tiene asociados tres puntos fundamentales: (ab, de) , (bc, ef) y (cd, ef) que corresponden a la intersección de los lados opuestos en dicho hexágono.

1.1 Rectas de Pascal

Blais Pascal, encontró en 1640, la condición necesaria para que un hexágono esté inscrito en una circunferencia y más adelante se llevó a cabo la generalización de dicho teorema que hoy en día lleva su nombre:

Teorema 1.1.1 (Pascal). *Un hezágono está incrito en una cónica si y sólo si las intersecciones de sus lados opuestos son colineales.*

Dicho de otra manera: un hexágono $abcdef$ está incrito en una cónica si y solo si (ab, de) , (bc, ef) y (cd, fa) son colineales.

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5].

□

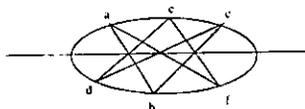


Figura 1.1: Teorema de Pascal

Definición 1.1.2. *La recta de teorema 1.1.1 es la recta de Pascal del hezágono $abcdef$.*

Observación 1.1.3. *La pregunta natural que surge a raíz de este teorema y la observación 1.0.3, es si obtenemos la misma recta de Pascal, teniendo los mismos seis puntos fijos, pero cambiando el ordenamiento para formar los otros 59 hexágonos diferentes. La respuesta, debida a Steiner, es no, pues de hecho por cada uno de estos 60 hexágonos, obtenemos una recta de Pascal diferente.*

Notación 1.1.4. *De acuerdo a Salmon [5], denotaremos a la recta del teorema 1.1.1 con el símbolo*

$$(1.1) \quad \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$$

Observación 1.1.5. *Lo que en primer instancia observamos de esta notación, es que en cada entrada tenemos un lado fundamental y que cada columna contiene una pareja de lados fundamentales opuestos, así que cada columna representa al punto de intersección de los lados fundamentales opuestos contenidos en ésta. De esta manera sugiere la notación, como es de esperarse por su interpretación geométrica, que se representa a la misma recta de Pascal aunque llevemos a cabo permutaciones entre columnas completas o bien renglones completos.*

Por otro lado, vemos que en cada renglón aparecen los seis puntos a, b, c, d, e y f sin omisión ni repetición, por lo que si consideramos un lado fundamental xy en un renglón, en el otro aparecerán los lados xz y yw donde por supuesto $z \neq y$ y $w \neq x$ (pues si no, formarían al mismo lado xy), así como un tercer lado lm , en la misma columna de xy , donde $l, m \notin \{x, y, z, w\}$.

Así, si tenemos los seis lados fundamentales que forman una recta de Pascal, tenemos determinado de manera única el acomodamiento de renglones y columnas, respetando por renglones el que se encuentren los los seis elementos a, b, c, d, e, f y que por columnas, los lados correspondan geoméricamente a lados opuestos, considerando el lado fundamental lm debajo del lado xy , donde $z \neq x \neq w$ y $z \neq y \neq w$. Por ejemplo, si tuviéramos los elementos ab, cd, ef, fa, bc y de , colocamos el renglón: $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$ y los lados fundamentales fa, bc, de , estarán debajo de los elementos cd, ef y ab correspondientemente, para formar la recta de Pascal:

$$(1.2) \quad \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$$

1.2 Puntos de Steiner

Teorema 1.2.1 (Steiner). Las rectas de Pascal $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} ed & af & bc \\ cf & eb & ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & eb & ad \end{array} \right\}$ son concurrentes.

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5]. \square

Definición 1.2.2. El punto de concurrencia del teorema 1.2.1 es un Punto de Steiner del hexagrama místico.

Notación 1.2.3. Denotaremos al punto de Steiner del teorema 1.2.1 a través del arreglo:

$$(1.3) \quad \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$$

- Observación 1.2.4.** 1. Las tres parejas de renglones que son posibles considerar en el arreglo anterior, representan a las tres rectas de Pascal que se intersecan para formar al punto de Steiner en cuestión, por lo que las propiedades del arreglo que representa a una recta de Pascal, según vimos en la observación 1.1.5, son heredadas.
2. Si consideramos una recta de Pascal representada con la notación de Salmon, podemos completar de manera única a una matriz de 3×3 que represente a un punto de Steiner, agregando únicamente los dos puntos faltantes del conjunto de los seis elementos que deben aparecer en cada columna.
3. Por la observación anterior, tenemos que dada una recta de Pascal, existe una única manera de completar el arreglo para formar un punto de Steiner, por lo que en cada recta de Pascal hay un solo punto de Steiner.

Daremos ahora un resultado más obtenido por Steiner, a partir del cual obtendremos un punto más de Steiner y que guarda una gran relación con el punto de Steiner del teorema 1.2.1.

Teorema 1.2.5. Las rectas de Pascal $\left. \begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} cd & af & be \\ ef & cb & ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{ccc} ef & bc & ad \\ ab & de & cf \end{array} \right\}$ son concurrentes.

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5]. □

Observación 1.2.6. (i) *El punto de Steiner del teorema anterior y el punto de Steiner del teorema 1.2.1 son conjugados armónicos respecto a nuestra cónica original C . Ahora bien, dado un punto de Steiner podemos encontrar al punto de Steiner que es su conjugado armónico, transponiendo el arreglo como en una matriz de 3×3 .*

(ii) *Dado que en cada recta de Pascal hay un solo punto de Steiner, que es el punto de concurrencia de tres rectas de Pascal y tenemos sesenta rectas de Pascal, entonces tenemos $\frac{60}{3} = 20$ puntos de Steiner en el Hexagrama.*

1.3 Puntos de Kirkman

Kirkman encontró otras ternas de rectas de Pascal que se intersecan y que son diferentes a las ternas encontradas por Steiner.

Teorema 1.3.1 (Kirkman). *Las rectas de Pascal $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} ed & af & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$ son concurrentes.*

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5]. □

Definición 1.3.2. *El punto de concurrencia del teorema 1.3.1 es un punto de Kirkman del Hexagrama Místico*

Notación 1.3.3. *Denotaremos al punto de Kirkman del teorema 1.3.1 a través de la matriz:*

$$\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$$

Observación 1.3.4. 1. Como en el caso de la matriz correspondiente a los puntos de Steiner, las tres parejas de renglones que se pueden formar en el arreglo que representa a un punto de Kirkman, corresponden a cada una de las tres rectas de Pascal que se intersectan en dicho punto y por ende hereda las propiedades de las rectas de Pascal sobre la posibilidad de intercambiar el orden de cualquier renglón o columna completa dejando la matriz invariante.

2. A diferencia de la notación asignada para el punto de Steiner, la matriz que representa a un punto de Kirkman tiene solo una columna en la que no se repite ninguno de los seis puntos a, b, c, d, e, f . Llamaremos a esta columna, que de alguna manera caracteriza a un punto de Kirkman, columna marcada dado que en los casos en los que sea necesario colocaremos una línea horizontal sobre esta columna (tal y como lo hace Salmon).

3. En cada recta de Pascal hay tres puntos de Kirkman ¹

4. Por la observación anterior y al tener sesenta rectas de Pascal, que a través de ternas se intersectan en puntos de Kirkman, tenemos $\frac{(60)(3)}{3} = 60$ puntos de Kirkman en el Hexagrama.

¹la demostración de esta observación puede verse en la tesis de Gabriela Frías ([3]).

1.4 El Teorema de Descomposición de Veronese

Recordemos que en la configuración del Hexagrama tenemos 15 lados fundamentales, de los cuales en el teorema 1.3.1 consideramos a los lados:

$$ab, cd, ef, ed, af, bc, fc, bd \text{ y } ae, \text{ que forman el punto de Kirkman } K_\sigma = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\},$$

por lo que falta considerar los lados fundamentales: ac, ad, be, bf, ce y df , con los cuales, por la observación 1.1.5, tenemos determinada de manera única a

$$\text{la recta de Pascal } \sigma = \left. \begin{array}{ccc} ac & be & df \\ bf & ad & ce \end{array} \right\}$$

Inversamente, dada la recta de Pascal σ , al considerar a los seis lados fundamentales que la constituyen, tenemos que los lados fundamentales restantes: $ab, ae, af, bc, bd, cd, cf, de, ef$, forman exactamente tres rectas de Pascal

$$\text{tomando los diferentes acomodamientos posibles; estas tres rectas de Pascal son: } \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & af & bc \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} de & af & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ae & bd \end{array} \right\},$$

que por el teorema 1.3.1 sabemos que se intersectan en el punto de Kirkman K_σ .

Así, si de manera general, denotamos por K_σ a un punto de Kirkman dado por el teorema 1.3.1, podemos establecer la correspondencia de Hesse:

Definición 1.4.1.

$$(1.4) \quad K_\sigma \longleftrightarrow \bar{\sigma}$$

es la correspondencia de Hesse entre puntos de Kirkman y rectas de Pascal en el hexagrama.

Ahora bien, dada la correspondencia anterior, mencionaremos un teorema que representa una de las más importantes contribuciones de Veronese con respecto a la teoría del \mathcal{HM} .

Teorema 1.4.2 (Descomposición de Veronese). *La configuración de puntos de Kirkman y rectas de Pascal del Hexagrama Místico, se descompone en seis configuraciones arguesianas².*

Demostración. Ver la tesis de Rodolfo San Agustín [4]. □

Este teorema, dota a la configuración del Hexagrama de una importante propiedad que entre otras cosas, nos permite estudiarla por “pedazos” que poseen la propiedad proyectiva de Desargues, ya que al existir diversas configuraciones de tipo (10_3) , gracias a la correspondencia de Hesse, se tiene establecida la propiedad combinatoria que caracteriza a la configuración de Desargues³

Con el objetivo de analizar en el tercer capítulo, la configuración de Desargues a las que pertenecen ciertos elementos del Hexagrama, mencionaremos un algoritmo que nos permita identificar cada configuración arguesiana, basándonos en la demostración del teorema 1.4.2 dada por San Agustín [4], en el que a partir de una recta de Pascal σ obtenemos a las otras nueve rectas de Pascal y los diez puntos de Kirkman que se encuentran en la configuración de Desargues de σ .

Algoritmo 1.4.3. 1. Consideremos la recta de Pascal σ

2. Asociamos por la correspondencia de Hesse, el punto de Kirkman K_σ

²Las configuraciones que cumplen con la propiedad de Desargues, son denotadas “arguesianas” para evitar la interpretación que en el español se tiene de las palabras que comienzan con el prefijo “des” que significa “sin”, al hablar de configuraciones *desarguesianas*

³Esta propiedad fue establecida por Rodolfo San Agustín [1]

3. Asociamos al punto K_σ las tres rectas de Pascal que lo determinan por el teorema 1.3.1
4. Repetimos el procedimiento una vez más para cada una de las rectas de Pascal en (3).
5. Al obtener una colección de puntos y rectas en donde cada punto está asociado, como en (1), a alguna de las rectas de dicha colección, si repetimos el procedimiento en cualquiera de las rectas ya obtenidas, no se obtienen puntos o rectas nuevas.

De esta manera obtenemos una configuración de tipo (10_3) , que es una figura con:

- i) 10 puntos y 10 rectas tales que
- ii) Por cada punto pasan 3 rectas y
- iii) Cada recta contiene a 3 de los puntos mencionados.

1.5 Rectas de Cayley

En esta sección veremos que de manera análoga a la correspondencia (1.1), podemos establecer una correspondencia biyectiva entre las rectas de Cayley c , que definiremos a continuación y los puntos de Steiner St , a partir del siguiente teorema:

Teorema 1.5.1 (Cayley-Salmon). *Los tres puntos de Kirkman asociados de acuerdo a la correspondencia (1.1) a las rectas de Pascal que concurren en*

un punto de Steiner St , están en una recta c que también pasa por el punto St' , conjugado de St .

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5]. □

Sin pérdida de generalidad, podemos decir a partir del teorema anterior que los puntos de Kirkman $\left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right\}$ y el punto de Steiner $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$ están alineados.

Definición 1.5.2. *La recta del teorema 1.5.1, que denotaremos como c , se denomina recta de Cayley (o recta de Cayley-Salmon) del Hexagrama Místico.*

Ahora bien, por el teorema 1.5.1, tenemos la correspondencia biyectiva:

$$(1.5) \quad c \longleftrightarrow St$$

A partir de esta correspondencia, podemos establecer la notación para las rectas de Cayley de la siguiente manera:

Notación 1.5.3. *Denotaremos a la recta de Cayley del teorema 1.5.1 a través del arreglo:* $\left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & af & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$

Las entradas de esta matriz corresponden según la notación de Salmon a las del punto de Steiner St' que siendo el conjugado de St , se obtiene transponiendo la matriz del punto St . Para hacer la distinción entre rectas de Cayley y puntos de Steiner, empleamos la notación de Rodolfo San Agustín [4], con los paréntesis en lugar de la llave usual a la derecha del arreglo, en la notación de Salmon.

Observación 1.5.4. *Por la correspondencia (1.2) y la observación 1.2.6, podemos concluir que tenemos 20 rectas de Cayley en la configuración del HM.*

Ahora bien, la siguiente observación es de gran importancia, debido al papel central que tendrá para los algoritmos, con notación de Salmon y de la Teoría de gráficas, que analizaremos en el tercer capítulo.

Observación 1.5.5. 1. *La matriz asociada al punto de Steiner*

$$\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$$

del teorema 1.5.1, puede ser construída a través de las columnas "mar-

$$\left. \begin{array}{ccc} \overline{ab} & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} ae & \overline{cd} & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} ac & bd & \overline{ef} \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right\}$$

casas" de los puntos de Kirkman que los caracterizan de manera única, una vez considerados los seis lados restantes en su matriz.

2. *Recordando que tenemos 15 lados fundamentales, los lados que se encuentran en las matrices que representan a los puntos de Kirkman y que no se encuentran en la matriz del punto de Steiner y por ende, tampoco en el punto de Steiner conjugado, son el complemento de los nueve lados fundamentales de dicho punto de Steiner y su conjugado, acomodados en diferente orden en cada matriz de los puntos de Kirkmans; en el caso de la recta de Cayley que estamos considerando, dichos lados son ce, df, bf, ac, ae, bd . Por ende, al considerar a la recta de Cayley que contiene al punto de Steiner conjugado, necesariamente en todos los puntos de Kirkman de esta nueva recta de Cayley, también aparecerán los lados fundamentales complementarios ce, df, bf, ac, ae, bd ,*

aunque está claro que estas rectas de Cayley son diferentes.

1.6 Rectas de Plücker

Teorema 1.6.1. *Los puntos de Steiner*

$$\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & be \\ cf & be & ad \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{array} \right\},$$

$\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ ec & bf & ad \end{array} \right\}$ están alineados.

Demostración. Ver la tesis de doctorado de Rodolfo San Agustín [4]. \square

Definición 1.6.2. *La recta del teorema 1.6.1, que denotaremos por pl , es la recta de Plücker (o recta de Steiner-Plücker) del Hexagrama.*

Observación 1.6.3. *En el teorema anterior podemos observar que el renglón*

$$ab \ cd \ ef$$

se encuentra en todas las matrices que están asociadas a los cuatro puntos de Steiner y son exactamente estas cuatro matrices las únicas posibles que se pueden formar manteniendo este renglón fijo.

De esta manera, tenemos una correspondencia biyectiva entre estas tres parejas de elementos y la recta de Plücker que contiene dicho renglón. De esta manera, la notación que elijeremos para esta recta de Plücker será aquella que involucre a este renglón. Así, a través de la representación hecha por Rodolfo San Agustín [4]⁴ de los elementos de Hexagrama en la red de subgráficas de K_6 , tenemos:

Notación 1.6.4. *Denotaremos a la recta de Plücker del teorema 1.6.1 a través del 1-factor*⁵:

⁴Ver apéndice B

⁵Ver apéndice A

$$\{ab, cd, ef\}$$

1.7 Puntos de Salmon

Teorema 1.7.1 (Teorema de Salmon). *Las cuatro rectas de Cayley, asociadas a través de la correspondencia (1.2), a cuatro puntos de Steiner colineales de acuerdo al teorema 1.6.1, son concurrentes.*

Demostración. Ver las notas del libro de George Salmon [5]. □

Sin pérdida de generalidad, podemos decir a partir del teorema anterior que las rectas de Cayley $c_1 = \begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix}$ y $c_4 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$ son concurrentes.

Definición 1.7.2. *El punto de concurrencia del teorema 1.7.1 es un punto de Salmon del Hexagrama Místico.*

Observación 1.7.3. *Dado que las entradas de estas matrices que representan a las rectas de Cayley se obtienen al considerar las entradas de las matrices transpuestas que representan los puntos de Steiner del teorema 1.6.1, en donde dichas matrices son las únicas que se pueden construir con un renglón fijo, tendremos que las matrices correspondientes a las rectas de Cayley que se intersectan, serán sólo aquellas cuatro que tengan una columna en común.*

Dada la observación anterior, la notación que debemos emplear para dicho punto es sugerente; basándonos de nueva cuenta en la representación del \mathcal{HM} con gráficas, por Rodolfo San Agustín, tenemos entonces:

Notación 1.7.4. *Denotaremos al punto de Salmon del teorema 1.7.1 a través de la gráfica tripartita de tipo $K_{2,2,2}$ ⁶: $[ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df]$, que es el complemento de la gráfica $[ab, cd, ef]$ del teorema 1.6.1, que considerando en la notación de Salmon, el hecho de que contamos con 15 lados fundamentales, al tener todas las matrices de las rectas de Cayley tres lados fundamentales en común, entonces el punto de Salmon estará representado por los doce lados fundamentales restantes.*

1.8 Breve resumen

A partir de las secciones anteriores podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.8.1. *El Hexagrama Místico de Pascal es la configuración constituida por:*

- (i) *Sesenta rectas de Pascal, que concurren por ternas en veinte puntos de Steiner y sesenta puntos de Kirkman*
- (ii) *Veinte puntos de Steiner, cada uno de los cuales está contenido en una recta de Cayley y en tres rectas de Pascal*
- (iii) *Sesenta puntos de Kirkman, cada uno de los cuales están contenidos en tres rectas de Pascal y en una recta de Cayley*

⁶Ver apéndice A

-
- (iv) *Veinte rectas de Cayley, cada una de las cuales contiene tres puntos de Kirkman y un punto de Steiner*
 - (v) *Quince rectas de Plücker, cada una de las cuales contiene cuatro puntos de Steiner*
 - (vi) *15 puntos de Salmon, cada uno de los cuales están contenidos en cuatro rectas de Cayley*

Capítulo 2

El \mathcal{HM} como retícula geométrica parcial

2.1 Definiciones y propiedades básicas

En este capítulo trabajaremos sobre el primer objetivo planteado de dar una representación del Hexagrama Místico (\mathcal{HM}) como retícula geométrica parcial. Comenzaremos definiendo una retícula, observando algunas propiedades de dichas estructuras con el fin de avanzar paulatinamente y deducir las condiciones que se deben cumplir para llevar a cabo dicha representación. De acuerdo a las condiciones que no sea posible cumplir, es que construiremos el concepto de retícula geométrica parcial.

Haremos uso de todos y cada unos de los teoremas para la construcción del Hexagrama Místico vistos en el capítulo anterior, para definir de manera natural el supremo de algunas parejas de elementos del Hexagrama que nos permita identificar a cada elemento, en base a los puntos o rectas a partir de los cuales fue construido, ya que es una información importante que queremos

conservar en todo momento.

Definición 2.1.1. Una retícula L es un conjunto parcialmente ordenado (COPO), con la propiedad de que cualquier subconjunto finito $S \subseteq L$ tiene ínfimo y supremo.

Notación 2.1.2. Para un conjunto $\{x, y\}$ con dos elementos, denotaremos a su ínfimo ($\inf\{x, y\}$) y supremo ($\sup\{x, y\}$) a través de $x \wedge y$ y $x \vee y$, respectivamente.

Así, \wedge y \vee cumplen con diversas propiedades:

$$(\alpha) \quad a \vee a = a \text{ (leyes de idempotencia)}$$

$$(\hat{\alpha}) \quad a \wedge a = a$$

$$(\beta) \quad a \vee b = b \vee a \text{ (leyes conmutativas)}$$

$$(\hat{\beta}) \quad a \wedge b = b \wedge a$$

$$(\gamma) \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \text{ (leyes asociativas)}$$

$$(\hat{\gamma}) \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$(\delta) \quad a \vee (a \wedge b) = a \text{ (leyes de absorción)}$$

$$(\hat{\delta}) \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

De esta manera, tenemos el siguiente resultado, que nos da la primera pauta para llevar a cabo la representación del \mathcal{HM} , como retícula.

Teorema 2.1.3. Sea $\langle L; \wedge, \vee \rangle$, un conjunto no vacío con dos operaciones binarias que satisfacen (α) - (δ) y $(\hat{\alpha})$ - $(\hat{\delta})$, entonces:

(i) Para cualesquiera $a, b \in L$, $a \vee b = b$ si y solo si $a \wedge b = a$

(ii) Si definimos \leq como $a \leq b$ si $a \vee b = b$, \leq es una relación de orden parcial.

(iii) Con \leq como en (ii), $\langle L; \leq \rangle$ es una retícula.

Demostración. Supongamos $a \vee b = b$. Entonces

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (a \vee b) \text{ por } (\hat{\delta}) \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

Inversamente, si $a \wedge b = a$, entonces

$$\begin{aligned} b &= b \vee (b \wedge a) \text{ por } (\delta) \\ &= a \vee b \end{aligned}$$

Ahora, definiendo \leq como en (ii), tenemos que:

1. \leq es reflexiva por (α) .

2. $a \leq b$ y $b \leq a \iff a \vee b = b$ y $b \vee a = a \iff a = b$

3. $a \leq b$ y $b \leq c \iff a \vee b = b$ y $b \vee c = c \iff a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c \iff a \leq c$

Por último, en $\langle L; \leq \rangle$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$, debido a que:

1. $a \vee b$ es cota superior de $\{a, b\}$ por construcción y

$$2. d \text{ es cota superior de } \{a, b\} \iff a \leq d \text{ y } b \leq d \iff d = d \vee d = (a \vee d) \vee (b \vee d) = (a \vee b) \vee d \iff (a \vee b) \leq d.$$

□

Para las retículas que no tienen cadenas infinitas de elementos comparables, podemos encontrar un único elemento mínimo O_L y un único elemento máximo 1_L , respecto a toda la retícula.

Para elementos a y b de un COPO, decimos que a cubre b ($a < b$), cuando $a > b$ y no hay elementos c tales que $a > c > b$.

Un átomo¹ de una retícula L con elemento mínimo O_L es un elemento que cubre O_L .

Definición 2.1.4. *Una retícula geométrica es una retícula L que no tiene cadenas infinitas y tal que*

1. L es atómica, esto es, cada elemento de L es el supremo de átomos de L
2. L es semimodular, es decir, si a y b son distintos y ambos cubren a c en L , entonces $a \vee b$ cubre tanto a como b

Una de las opciones claras para llevar a cabo esta representación por haber construido al Hexagrama en $P^2(k)$ y debido a que a los elementos de $P^2(k)$ podemos estructurarlos como una retícula, es pensar en la configuración del

¹Generalmente denotado como "punto", decidimos en este caso denotarlo de esta manera para no confundirlo con un punto de $P^2(k)$

Hexagrama como una subretícula de $P^2(k)$; sin embargo esto no es posible debido a que para cualquier pareja de rectas o puntos del \mathcal{HM} , no existe su punto de intersección o la recta generada que sean parte de los 190 elementos del \mathcal{HM} .

Ahora bien, otra opción sería la de completar con las rectas y los puntos en $P^2(k)$ que sea necesario para poder tener los puntos y rectas que nos hacen falta para tener una subretícula geométrica de $P^2(k)$, sin embargo este procedimiento no resulta del todo conveniente por diversas razones: tendremos a los elementos acomodados en dos niveles, que como hemos venido mencionando, estructurarlos de acuerdo a la manera en que fueron construidos forma parte de la información fundamental de la estructura del \mathcal{HM} y por otro lado, las rectas y puntos que tendremos que agregar, no serán fácilmente distinguibles cuando trabajemos con la representación que llevaremos a cabo en el tercer capítulo.

Es por esta razón que dada la definición y las propiedades a lo largo de esta sección, la manera en que procederemos para dar dicha representación será la siguiente:

1. Dado que al comenzar la construcción de los elementos del Hexagrama, las rectas de Pascal contienen mucha de la información que utilizamos al generar los demás elementos, consideraremos a las rectas de Pascal como los átomos de la retícula geométrica parcial.
2. Definimos para cualquier elemento h_i del Hexagrama, $h_i \vee h_i = h_i$,

así como $h_i \wedge h_i = h_i$, es decir, pedimos que se cumplan las leyes de idempotencia (o reflexivas) de ambas operaciones binarias.

3. Definiremos el supremo para todos los elementos que aparecen en los teoremas para la construcción de la configuración del Hexagrama, considerando los siguientes hechos:

- a) Los puntos Steiner, Kirkman y Salmon de la configuración que resultan de la intersección de tres rectas, quedan determinados geoméricamente de manera única al considerar a solo dos de estas rectas, lo que en la construcción de la representación en una retícula geométrica nos permitirá fundamentalmente cumplir con la propiedad asociativa y conmutativa de la operación binaria que en estos elementos hayamos definido (supremo o ínfimo).
- b) Las rectas de Plücker y Cayley, que son construídas a partir de cuatro puntos que pertenecen al Hexagrama, quedan determinadas geoméricamente de manera única al considerar a solo una pareja de estos puntos, lo que también nos permitirá fundamentalmente, cumplir con la propiedad asociativa y conmutativa de la operación binaria que en estos elementos hayamos definido (supremo o ínfimo).
- c) Una vez definidos el supremos de parejas de elementos del \mathcal{HM} que de manera natural podíamos hacerlo, determinaremos a través de las propiedades que dichas operaciones deben cumplir (como

leyes de absorción), supremos o ínfimos de las parejas de elementos del Hexagrama en las que sea posible, debido a que, aunque hayamos definido el supremo (o ínfimo) para una pareja de elementos, quizás no podamos definir su ínfimo (o supremo).

- d) Las parejas de elementos en el Hexagrama en las que no sea posible definir supremo o ínfimo, no tendrán definidas dichas operaciones en la representación, debido al interés de cumplir las propiedades básicas de retícula, así como nuestro fundamental interés de poder identificar a todos los elementos del Hexagrama en la representación, con solo observar la manera en que dichos elementos fueron contruídos.

Es con respecto a estos dos últimos incisos que definimos una **Retícula Geométrica Parcial**, debido a que solo para ciertas parejas de elementos del Hexagrama tenemos definido el supremo o ínfimo.

2.2 Construcción de la representación

Para dar esta primer representación del \mathcal{HM} , comenzaremos por utilizar lo que ya tenemos, es decir, los teoremas clásicos de geometría proyectiva vistos en el capítulo 1, que naturalmente son condiciones por cumplir en esta representación y continuaremos avanzando, de acuerdo a las necesidades que vayan surgiendo.

Así, estructuraremos a los elementos del mismo, en diferentes niveles .

Esta estructura, llamada *jerarquía* por Rodolfo San Agustín [4] está definida de acuerdo a:

- (i) El orden en que se han definido los elementos
- (ii) De acuerdo al tipo de elementos que se consideran para dicha construcción
- (iii) Considerando la restricción de las operaciones \vee (meet o supremo) e \wedge join o ínfimo de la retícula de subespacios vectoriales en \mathbf{k}^{3^2} a la estructura de incidencia del Hexagrama Místico.

Observación 2.2.1. Debemos destacar la enorme ventaja que representa el estructurar a los elementos del \mathcal{HM} por niveles, pues será mucho más fácil la identificación de cada objeto representado, analizando los elementos de los que proviene en su construcción y así, tendremos al mismo tiempo, formadas de manera natural algunas cadenas finitas de elementos ordenados a través de este criterio.

Consideremos las operaciones \vee e \wedge que actúan sobre parejas de elementos $(h_i, h_j) \in \mathcal{HM}$ de manera que:

$$(\alpha) \vee(h_i, h_j) = h_i \vee h_j \iff \exists h_{ij} \in \mathcal{HM} \text{ tal que } h_{ij} = h_i \vee h_j$$

$$(\beta) \vee(h_i, h_i) = h_i, \forall h_i \in \mathcal{HM} \text{ (reflexividad o ley de idempotencia)}$$

²Como mencionamos en el primer capítulo, \mathbf{k} es un campo con $\text{char}(\mathbf{k}) \neq 2$ y $|\mathbf{k}| > 7$

(γ) $\exists h_{ij} \in \mathcal{HM}$ tal que $\vee(h_i, h_j) = h_{ij} \iff \vee(h_j, h_i) = h_{ij}$ (simetría o ley conmutativa)

(δ) $(\vee(h_i, h_j)) \vee h_k = \vee(h_i, \vee(h_j, h_k))$ (ley asociativa)

y

($\hat{\alpha}$) $\wedge(h_i, h_j) = h_i \vee h_j \iff \exists h_{ij} \in \mathcal{HM}$ tal que $h_{ij} = h_i \wedge h_j$

($\hat{\beta}$) $\wedge(h_i, h_i) = h_i \forall h_i \in \mathcal{HM}$ (reflexividad o ley de idempotencia)

($\hat{\gamma}$) $\exists h_{ij} \in \mathcal{HM}$ tal que $\wedge(h_i, h_j) = h_{ij} \iff \wedge(h_j, h_i) = h_{ij}$ (simetría o ley conmutativa)

($\hat{\delta}$) $(\wedge(h_i, h_j)) \wedge h_k = \wedge(h_i, \wedge(h_j, h_k))$ (ley asociativa)

($\hat{\epsilon}$) leyes de absorción:

- $\wedge(h_i, \vee(h_i, h_j)) = h_i$
- $\vee(h_i, \wedge(h_i, h_j)) = h_i$

Comenzaremos entonces describiendo el supremo, de manera que cumpla las condiciones dadas arriba y observaremos después las consecuencias de dicha descripción, con respecto a los supremos de algunas otras parejas de elementos del \mathcal{HM} .

2.2.1 Supremo de rectas de Pascal

De acuerdo al Teorema de Steiner 1.2.1, sabemos que las rectas de Pascal

$\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ed \ af \ bc \\ cf \ eb \ ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}$ son concurrentes en el punto
 de Steiner $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}$, por lo que tenemos definido el supremo para
 cualesquiera dos de estas rectas de Pascal, como sigue:

$$\begin{aligned}
 V: \left(\begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ed \ af \ bc \\ cf \ eb \ ad \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ dc \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\} \\
 V: \left(\begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\} \\
 V: \left(\begin{array}{l} de \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo al Teorema de Kirkman 1.3.1, tenemos que las rectas de

Pascal $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ed \ af \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ ae \ bd \end{array} \right\}$ son concurrentes en el
 punto de Kirkman $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\}$, de manera que para cada pareja de
 dichas rectas tenemos definido el supremo como:

$$\begin{aligned}
 V: \left(\begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ed \ af \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ dc \ fa \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\} \\
 V: \left(\begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ ae \ bd \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\} \\
 V: \left(\begin{array}{l} de \ fa \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ ae \ bd \end{array} \right\} &\mapsto \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ bd \ ae \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Por la observación 1.3.4, sabemos que una recta de Pascal contiene tres puntos de Kirkman, de modo que basándonos en la recta de Pascal

$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$, describiremos los otros dos puntos de Kirkman asociados a esta recta.

$$\begin{aligned} V: & \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ed & af & bc \\ ac & eb & fd \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ ac & be & fd \end{matrix} \right\} \\ V: & \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ cd & af & bc \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ ac & be & fd \end{matrix} \right\} \\ V: & \left(\begin{matrix} ed & af & bc \\ ac & eb & fd \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ ac & be & fd \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V: & \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & cb \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ed & af & bc \\ fb & ce & ad \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ fb & ce & ad \end{matrix} \right\} \\ V: & \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & cb \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ ce & bf & ad \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ fb & ce & ad \end{matrix} \right\} \\ V: & \left(\begin{matrix} ed & af & bc \\ fb & ce & ad \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ ce & bf & ad \end{matrix} \right) \mapsto \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ fb & ce & ad \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

2.2.2 Supremo de puntos de Steiner y Kirkman

De acuerdo al Teorema de Cayley (teorema 1.5.1), sabemos que los puntos

de Kirkman $\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{matrix} \right\}$ y el punto de

Steiner $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\}$ están alineados en la recta de Cayley $\left(\begin{matrix} ab & de & cf \\ cd & af & be \\ ef & bc & ad \end{matrix} \right)$,

por lo que para cualquier pareja de estos puntos tenemos definido el

supremo de la siguiente manera:

$$V: \left(\begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} ae & cd & bf \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right) \mapsto \left(\begin{matrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{matrix} \right)$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & af & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ec \\ ac & be & df \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & af & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ec \\ ac & be & df \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$$

2.2.3 Supremo de Puntos de Steiner

De acuerdo al Teorema de Plücker (teorema 1.6.1), los puntos de Steiner

$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ ec & bf & ad \end{array} \right\} \right\}$ están en la

recta de Plücker $[ab, cd, ef]$, de manera que el supremo de cualquier pareja

de estos puntos lo definimos como:

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ ec & af & db \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{array} \right) \mapsto [ab, cd, ef]$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{array} \right) \mapsto [ab, cd, ef]$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ ec & bf & ad \end{array} \right) \mapsto [ab, cd, ef]$$

$$V: \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{array} \right) \mapsto [ab, cd, ef]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ df & ea & db \\ ec & bf & ad \end{pmatrix} \right) \mapsto [ab,cd,ef]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ ec & bf & ad \end{pmatrix} \right) \mapsto [ab,cd,ef]$$

2.2.4 Supremo de Rectas de Cayley

De acuerdo al Teorema de Salmon (teorema 1.7.1), las rectas de Cayley

$\begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$ son concurrentes en el punto de Salmon $[ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$, por lo que tenemos:

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

$$V: \left(\begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix} \right) \mapsto [ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,ce,cf,de,df]$$

2.2.5 Supremo de otros elementos del \mathcal{HM}

Continuaremos definiendo la retícula parcial con las relaciones dadas en la sección anterior entre elementos del Hexagrama y basándonos en las propiedades básicas que se deben cumplir para tener una retícula.

Los elementos para los cuales encontraremos su supremo, será para aquellos que por transitividad deberían de poderse comparar, es decir, si

$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$, entonces $a_1 < a_n$.

Es importante mencionar que para que esta propiedad básica se cumpla, debemos respetar todas y cada una de las condiciones que hayan sido impuestas para comparar cada elemento a_j, a_{j+1} .

Para trabajar en esta sección, introduciremos la siguiente notación: sean p_i y p_j rectas de Pascal, K_i , K_j y K_{ij} puntos de Kirkman, St_i punto de Steiner, c_i y pl_i recta de Cayley y Plücker, correspondientemente, y finalmente, S_i un punto de Salmon.

Entonces tenemos que:

1. Dado que $p_i \vee p_j = K_{ij}$ si y solo si $K_{ij} \in p_i \cap p_j^3$, tenemos por las propiedades (α) y (γ) que:

$$K_{ij} = p_i \vee p_j = (p_i \vee p_i) \vee p_j = p_i \vee (p_i \vee p_j) = p_i \vee K_{ij}, \text{ es decir,}$$

$$\vee(p_i, K_{ij}) \longmapsto K_{ij} \iff K_{ij} \in p_i$$

2. Procediendo de manera análoga a 1:

³Consideramos intersección como conjuntos

$$\vee(p_i, St_i) \mapsto St_i \iff St_i \in p_i$$

3. Sean $St_i, K_i \in p_i$ y supongamos que cualquiera de las dos condiciones siguientes se cumplen: $K_i \in c_i$ o bien, $St_i \in c_i$. Entonces

$$p_i \vee c_i = \begin{cases} p_i \vee (K_i \vee c_i) & \text{si } K_i \in c_i \\ p_i \vee (St_i \vee c_i) & \text{si } St_i \in c_i \end{cases} =$$

$$\begin{cases} (p_i \vee K_i) \vee c_i & \text{si } K_i \in c_i \\ (p_i \vee St_i) \vee c_i & \text{si } St_i \in c_i \end{cases} = \begin{cases} K_i \vee c_i & \text{si } K_i \in c_i \\ St_i \vee c_i & \text{si } St_i \in c_i \end{cases} = C_i, \text{ es decir,}$$

$$(P_i, C_i) \mapsto C_i \iff K_i \in C_i \text{ ó } St_i \in C_i$$

4. Sabemos que $K_i \vee K_j = C_i$ si y sólo si $K_i, K_j \in c_i$, entonces por las propiedades (β) y (γ) tenemos que

$$c_i \vee K_i = (K_j \vee K_i) \vee K_i = K_i \vee K_j = c_i, \text{ es decir,}$$

$$(K_i, c_i) \mapsto c_i \iff K_i \in c_i$$

5. Procediendo como en 4, tenemos que:

$$(St_i, c_i) \mapsto c_i \iff St_i \in c_i$$

6. Dado que $St_i \vee St_j = pl_i$ si y solo si $St_i, St_j \in pl_i$, entonces por las propiedades (α) , (β) y (γ) , tenemos que

$$pl_i \vee St_i = (St_i \vee St_j) \vee St_i = St_i \vee St_j = pl_i, \text{ es decir,}$$

$$(St_i, pl_i) \mapsto pl_i \iff St_i \in pl_i$$

7. Procediendo como en 1, tenemos que:

$$(S_i, c_i) \mapsto S_i \iff S_i \in c_i$$

8. Sean $St_i, K_i \in p_i$ y supongamos que $p_i \ni K_i \in c_i$, entonces por 4 y la asociatividad de \vee , sabemos que:

$$p_i \vee c_i = p_i \vee (K_i \vee c_i) = (p_i \vee K_i) \vee c_i = K_i \vee c_i = c_i, \text{ es decir,}$$

$$(p_i, c_i) \mapsto c_i \iff p_i \ni K_i \in c_i$$

9. De manera análoga a 8, tenemos que:

$$(p_i, pl_i) \mapsto pl_i \iff \exists St_i \text{ tal que } p_i \ni St_i \in pl_i$$

10. Consideremos $St_i \in pl_i$, de manera que $\exists p_i$ tal que $St_i \vee K_i =$, entonces por 6 y 9, así como las propiedades (β) y (γ) tenemos:

$$K_i \vee pl_i = K_i \vee (p_i \vee St_i) = (K_i \vee St_i) \vee p_i = p_i \vee pl_i = pl_i, \text{ es decir,}$$

$$(K_i, pl_i) \mapsto pl_i \iff \exists St_i \in pl_i \text{ tal que } St_i \vee K_i = pl_i$$

11. Sean $K_i, St_i \in c_i$, entonces por 4 y 7, así como la condición

$$(\gamma) K_i \vee S_i = K_i \vee (c_i \vee S_i) = (K_i \vee c_i) \vee S_i = c_i \vee S_i = S_i, \text{ es decir,}$$

$$(K_i, S_i) \mapsto S_i \iff \exists c_i \text{ tal que } K_i, S_i \in c_i$$

12. Por 3 y 4, así como la propiedad (γ) , tenemos que

$$p_i \vee S_i = p_i \vee (c_i \vee S_i) = (p_i \vee c_i) \vee S_i = c_i \vee S_i = S_i \text{ siempre que}$$

$$(K_i \in p_i \text{ y } K_i \in c_i) \text{ ó } (St_i \in p_i \text{ y } S_i \in c_i), \text{ es decir,}$$

$$(p_i, S_i) \mapsto S_i \iff (K_i \in p_i \text{ y } K_i \in c_i) \text{ ó } (St_i \in p_i \text{ y } S_i \in c_i)$$

Debido a que hemos hecho una representación de los elementos del Hexagrama en una retícula geométrica parcial, las propiedades que se cumplen no son enteramente las de retícula geométrica, ya que nos han hecho falta los supremos e ínfimos de diversas parejas de elementos del Hexagrama y por ende, en el trabajo posterior, tendremos que tomar en cuenta las consecuencias que dichas deficiencias de elementos tendrán. Sin embargo, es importante mencionar que nos resulta conveniente esta representación, debido a que podemos identificar a cada elemento del \mathcal{HM} en todo momento, aunado a la enorme cantidad de información que las rectas de Pascal nos darán en nuestro siguiente capítulo, por el hecho de ser átomos dentro de la retícula.

Capítulo 3

El \mathcal{HM} como geometría combinatoria parcial

En este capítulo daremos una representación del Hexagrama como geometría combinatoria parcial. Comenzaremos por estudiar algunas definiciones y propiedades que caracterizan a una geometría combinatoria para de este modo, analizar los elementos que serán necesarios para nuestra representación.

Definición 3.0.2. *Una geometría combinatoria es una pareja (X, \mathcal{F}) , donde X es un conjunto de puntos y donde \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de X , a los que llamaremos cerrados¹, tales que:*

1. \mathcal{F} es cerrado bajo intersecciones,
2. No hay cadenas infinitas en \mathcal{F} ,

¹Denotados "Flats" (ver Van Lint), los llamaremos cerrados debido a la analogía con los cerrados de una topología

3. \mathcal{F} contiene al conjunto vacío, a todos los conjuntos formados por un solo elemento $\{x\}$, $x \in X$ y al propio conjunto X y
4. Para cada cerrado $E \in \mathcal{F}$, $E \neq X$, los cerrados F que cubren a E en \mathcal{F} , forman una partición en los puntos restantes, es decir:

$$X - E = \bigsqcup (F - E) \text{ i.e. } \forall x \in X - E, \exists! F \in \mathcal{F} \text{ (que cubre a } E) \text{ tal que } x \in F.$$

Aquí, “ F cubre a E ” significa que F es un conjunto minimal de E con respecto a la inclusión, es decir $E, F \in \mathcal{F}$ de manera que $E \subset F$, pero que $E \subset G \subset F$ no puede ocurrir para ningún $G \in \mathcal{F}$.

Así pues, podemos pensar en el conjunto de cerrados \mathcal{F} de una geometría combinatoria, ordenados por inclusión y así encontrar una serie de propiedades importantes tal y como se plantea en el siguiente teorema que nos será de gran utilidad para representar a la retícula geométrica parcial como geometría combinatoria parcial.

Teorema 3.0.3. *Dada una retícula geométrica L con átomos $x \in X$, entonces $(X, \{F_y : y \in L\})$ es una geometría combinatoria, donde*

$$F_y = \{x \in X : x \leq y\}.$$

Demostración. Sea L una retícula geométrica; definimos los cerrados F_y (como arriba), como los cerrados X de L .

1. \mathcal{F} es cerrado bajo intersecciones, pues $x \leq y$ y $y \leq z \iff x \leq y \wedge z$, entonces $F_y = \{x \in X \mid x \leq y\}$ y $F_z = \{x \in X \mid x \leq z\} \implies$

$$F_y \cap F_z = \{x \in X \mid x \leq y \wedge z\} = F_{y \wedge z} \in \mathcal{F}.$$

2. No hay cadenas infinitas en \mathcal{F} , por construcción, recordando que en la retícula geométrica tampoco las hay.
3. \mathcal{F} contiene al conjunto vacío, a todos los conjuntos formados por un solo elemento $\{x\}$, $x \in X$ y al propio conjunto X , ya que:

$$F_{0_L} = \{x \in X \mid x \leq 0_L\} = \emptyset$$

$$F_{1_L} = \{x \in X \mid x \leq 1_L\} = X$$

$$F_y = \{x \in X \mid x \leq y\} = \{y\}, \forall \text{ átomo } y \in X$$

4. Para cada cerrado $F_w \in \mathcal{F}$, todos los cerrados $F_y \neq X$, que cubren a F_w en \mathcal{F} , forman una partición en $X - F_w$ i.e $\forall x \in X - F_w, \exists! F_y$ que cubre a F_w tal que $x \in F_y$ debido a que:

- (i) Primero demostraremos que si $x \in X - F_w \implies$ no existen F_y y F_z tales que $F_y \ni x \in F_z$ y ambos cubran a F_w . Supongamos que sí, entonces

$$\begin{aligned} &[(x \in F_y \implies x \leq y) \text{ y } (x \in F_z \implies x \leq z)] \implies x \leq y \wedge z \\ &\implies x \in F_y \cap F_z = F_w \text{ (pues si no, } F_y \cap F_z \in F_y) \nabla \end{aligned}$$

- (ii) Ahora vamos a demostrar que $\forall x \in X - F_w, \text{ i.e } \forall x > y, \exists!$
 F_y tal que $x \in F_y$, donde F_y cubre a F_w , donde $F_y = F_x \vee w$
Observemos primero que:

$$\begin{aligned} &\implies F_y = F_x \vee w \text{ cubre a } F_w \iff F_w \subset F_y \text{ y } F_y \text{ es en} \\ &\text{este sentido, minimal} \iff w \leq y = x \vee w \text{ y no existe} \end{aligned}$$

$z \in F_y - F_w$ tal que $w < z < x \vee w$ i.e. $\iff x \vee w$
 cubre a w

De manera que basta demostrar que $x \vee w$ cubre a w . Entonces consideremos la siguiente cadena:

$$w = w_k < w_{k-1} < w_{k-2} < \dots < w_1 < 0_L$$

Como x y w_1 cubren a 0_L , dado que la retícula es semimodular, entonces $x \vee w_1$ cubre a w_1 . Dado que $x \vee w_1$ y w_2 cubren a $w_1 \implies x \vee w_1 \vee w_2 = x \vee w_2$ cubre a w_2 . Inductivamente, tenemos que $x \vee w_k$ cubre a $w_k = w$

□

De este modo, nuestra siguiente meta a alcanzar, será la de proceder de manera similar al teorema 3.0.3. considerando el hecho de que la retícula geométrica con la que estamos trabajando es parcial, por lo que los cerrados serán también parcialmente definidos, en el sentido de que estos conjuntos podrían tener elementos si pudiésemos completar la retícula parcial a retícula, y es con este enfoque que hablamos sobre representar al \mathcal{HM} como **Geometría Combinatoria Parcial**.

Es en este punto en donde cobra sentido el que, como mencionamos en el capítulo anterior, los átomos de la retícula son las rectas de Pascal del hexagrama, pues de esta manera. como vimos en el teorema 3.0.3, los cerrados que corresponderán a los elementos del \mathcal{HM} , aunque parcialmente, estarán definidos a través de las rectas de Pascal únicamente,

lo cual nos resultará conveniente entre otras cosas, para poder trabajar un poco con respecto al Teorema de Descomposición de Veronese.

3.1 Cerrados de las rectas de Pascal

Sin pérdida de generalidad, consideremos la recta Pascal:

$$P := \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$$

Entonces, dado que definimos a las rectas de Pascal como átomos de la retícula, tenemos por el teorema 3.0.3 que:

$$F_P = \{P\}$$

3.2 Cerrados de los puntos de Steiner

Sin pérdida de generalidad, consideremos el punto de Steiner

$$St := \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$$

Por el teorema 1.2.1, sabemos que este punto es el supremo de los

“átomos”: $P_1 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $P_2 = \left. \begin{array}{ccc} ed & af & bc \\ cf & eb & ad \end{array} \right\}$ y $P_3 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$; así

por el teorema 3.0.3, tenemos que:

$$F_{St} = \{P_1, P_2, P_3\}$$

3.3 Cerrados de los puntos de Kirkman

Sin pérdida de generalidad, consideremos al punto de Kirkman

$$K := \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$$

Entonces, por el teorema 1.3.1 sabemos que este punto es el supremo de los

“átomos” $P_4 := \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{pmatrix}$, $P_5 := \begin{pmatrix} cd & af & bc \\ cf & bd & ae \end{pmatrix}$ y $P_6 := \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ cf & ae & bd \end{pmatrix}$.

Entonces, por el teorema 3.0.3, tenemos que:

$$F_K = \{P_4, P_5, P_6\}$$

3.4 Cerrados de las rectas de Cayley

Consideremos la recta de Cayley $c := \begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & af & bc \\ ef & bc & ae \end{pmatrix}$.

Por el teorema 1.5.1, sabemos que los puntos que están contenidos en dicha recta son $K_1 := \begin{pmatrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{pmatrix}$, $K_2 := \begin{pmatrix} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{pmatrix}$, $K_3 := \begin{pmatrix} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{pmatrix}$ y

$St := \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{pmatrix}$, por lo que para definir el cerrado de esta recta de Pascal, tomamos la unión de los cerrados de cada uno de los cuatro puntos

que la conforman. Es decir:

$$F_C = \{F_{K_1}, F_{K_2}, F_{K_3}, F_{St}\}$$

En este nivel, la descripción del cerrado correspondiente comienza a ser más complicada y es poco manejable recurrir al teorema y hacer el intercambio de cada letra de manera pertinente para obtener cada uno de los cuatro puntos de una recta de Cayley dada; por esto, resulta de enorme importancia construir un algoritmo para calcular dichos puntos únicamente con la recta de Cayley dada.

3.4.1 Construcción del algoritmo para rectas de Cayley

Recordemos que por la Correspondencia de Hesse, tenemos una correspondencia biyectiva entre los puntos de Steiner y las rectas de Cayley. De manera que la notación de la recta de Cayley proviene de la matriz transpuesta que corresponde al punto de Steiner que se encuentra en dicha recta y por lo tanto nuestro problema se reduce en realidad a contruir un algoritmo, en el cual dado un punto de Steiner, podamos encontrar los tres puntos de Kirkman que se encuentran en la recta de Cayley a la cual dicho punto pertenece.

Para construir este algoritmo, consideremos el punto de Steiner y los puntos de Kirkman del Teorema de Cayley (teorema 1.5.1), mencionados al principio de la sección.

Denotaremos a la matriz S_t como la matriz con entradas a_{ij} , es decir $a_{ij} = \alpha\beta$ con $\alpha, \beta \in \{a, b, c, d, e, f\}$ y $\alpha \neq \beta \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, 6$.

A los puntos de Kirkman que queremos calcular a través del punto de Steiner, los denotaremos por medio de la matriz $K_n = (b_{ij}^n)$ donde $n = 1, 2, 3$.

Ahora bien, por la observación 1.1.5 sabemos que las columnas de la matriz correspondiente al punto de Steiner, se forman tomando la única columna en cada matriz correspondiente a un punto de Kirkman, en la que los seis elementos a, b, c, d, e, f aparecen sin omisión ni repetición, que como vimos en la observación 1.3.4, son una característica de este tipo de matrices. Si

enumeramos las columnas del punto de Steiner por 1, 2 y 3 correspondientemente, obtenemos de inmediato una columna en cada punto de Kirkman, es decir:

$$b_{in}^n = a_{in}, \text{ donde } n = 1, 2, 3$$

Así por ejemplo para el punto K_1 , tenemos que $K_1 = \left. \begin{array}{lll} ab & b_{12} & b_{13} \\ de & b_{22} & b_{23} \\ cf & b_{32} & b_{33} \end{array} \right\}$.

Tenemos ahora que calcular las dos columnas restantes en cada uno de los puntos de Kirkman; sin pérdida de generalidad nos enfocaremos en el punto K_1 para construir el algoritmo tratando de utilizar argumentos que funcionen de manera general.

Observaciones generales:

- I. Dado que las tres posibles parejas de renglones representan una recta de Pascal, aparecen los seis elementos a, b, c, d, e, f sin omisión ni repetición, por lo que al considerar una entrada $b_{ij} = \alpha\beta$, no vuelve a aparecer sobre el j -ésimo renglón ni α ni β .
- II. Si consideramos al elemento $b_{in} = \alpha\beta$, que corresponde a los tres elementos que provienen de una columna de Steiner, los elementos b_{ij} con $i \neq 1 \neq j$ (es decir, elementos que no están ni en la misma columna ni en el mismo renglón n), contienen a α o bien β (naturalmente no a los dos, si no sería el mismo punto b_{in}) junto con las otras cuatro letras restantes. Utilizaremos fuertemente esta observación para pasar a la observación III.

III. Si nos fijamos por ejemplo en la entrada $a_{11} = ab = b_{11}$ y la comparamos con las entradas a_{ij} con $i \neq 1 \neq j$, vemos que de las cuatro letras que obtenemos, si omitimos las dos que se repiten (es decir, a y b), entonces la pareja de letras restantes coinciden con las entradas b_{ij} con $i \neq 1 \neq j$, es decir:

$a_{11} = ab$ y $a_{22} = af \mapsto bf$ entonces eliminamos la a que aparece en ambas parejas de letras y por el teorema 1.5.1, sabemos que este elemento es el b_{22}^1 ,

$a_{11} = ab$ y $a_{23} = bc \mapsto ac$ por lo que eliminamos la b que aparece en ambas parejas de letras y por el teorema 1.5.1, sabemos que este elemento es el b_{22}^1 ,

Y así continuamos con los elementos a_{32} y a_{33} .

Ahora bien, para las entradas del primer renglón, si consideramos al elemento $a_{21} = de$ y lo comparamos ahora con dichas entradas, tenemos que:

$a_{21} = de$ y $a_{12} = cd \mapsto ec$, por lo que eliminamos la d que aparece en ambas parejas de letras y por el teorema 1.5.1, sabemos que este elemento es el b_{12}^1 ,

$a_{21} = de$ y $a_{13} = ef \mapsto df$ entonces eliminamos la e que aparece en ambas parejas de letras y por el teorema 1.5.1, sabemos que este elemento es el b_{13}^1 .

Si verificamos esto mismo para los otros dos puntos de Kirkman

sucede el mismo fenómeno (haciendo algunos ajustes), por lo que en términos generales podemos decir que para el punto de Kirkman K_n , utilizamos a los elementos a_{nn} y a_{ln} (que para este caso funcionó para $l = n + 1$) con la siguiente regla:

$$b_{rs} = \begin{cases} a_{rs} \text{ y } a_{nn} & \text{si } r \neq n \\ a_{rs} \text{ y } a_{ln} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Después de verificar lo que sucede con los otros dos puntos de Kirkman, las pequeñas correcciones que hay que hacer son en cuanto a una excepción que ocurre para el punto de Kirkman K_2 por lo que es mejor concentrarnos en terminar de definirlo para el caso de K_1 .

Quisiéramos entonces tratar de escribir de una manera sencilla y muy concreta lo que significa “considerar dos parejas de letras, compararlas y obtener una nueva pareja en donde el elemento que se repite ha sido omitido” o dicho formalmente:

Necesitamos un operador Ω con $Dom(\Omega) = X \times Y$ e $Im(\Omega) = Z$ donde $X, Y, Z \subset L = a, b, c, d, e, f$ tal que:

- a) $\Omega(x, y) \mapsto z$, es decir, que mande un lado fundamental en un lado fundamental.
- b) Si $x = \alpha\beta$ y $y = \alpha\delta$, entonces $z = \Omega(x, y) = \beta\delta$, es decir, que elimine la letra que se repite.

La respuesta sobre qué tendría que ser Ω , la encontramos en la Teoría de Grupos y naturalmente se trata de *automorfismos interiores* en el grupo de

permutaciones pares de S_6 , toda vez que consideremos a las parejas de letras en cada entrada de las matrices como transposiciones de dichas letras. Por el hecho de ser automorfismos, cumplirán la condición a) y dado que los automorfismos interiores están dados a través de conjugaciones, cuando conjugamos con transposiciones en las que se tiene un elemento en común, este elemento es "eliminado" después de llevar a cabo el producto de dichas transposiciones.

Por lo tanto nuestro algoritmo es el siguiente:

Algoritmo 3.4.1. Dado un punto de Steiner $St_1 = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \Bigg\}$,
 encontramos a la matriz asociada al punto de Kirkman

$K_{j_0} = (b_{ij}), j_0 = 1, 2, 3$ a los que está asociado por el Teorema de Cayley, a través de los siguientes pasos:

1. Considerar las entradas $a_{j_0 j_0}$ y $a_{k j_0}$ donde $|j_0 - k| = 1, k > 1$
2. Si consideramos cada entrada de las matrices como transposiciones, entonces

$$b_{mn} = \begin{cases} a_{ij_0} & \text{si } n = j_0 \\ a_{j_0 j_0} a_{mn} a_{j_0 j_0}^{-1} & \text{si } m \neq j_0 \text{ y } (j_0 \neq 2 \text{ y } m \neq 1) \\ a_{k j_0} a_{mn} a_{j_0 j_0}^{-1} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.2. Reconstruyamos a los tres puntos de Kirkman del teorema

1.5.1 a partir del punto del punto de Steiner $St = \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \Bigg\}$.

a) Calculemos el punto de Kirkman K_1

Consideramos las entradas $a_{11} = ab$ y $a_{21} = de$. Entonces:

$$\begin{aligned}
b_{11}^1 &= a_{11} = ab \\
b_{12}^1 &= a_{21}a_{12}a_{21}^{-1} = (dc)(ce)(dc) = (ce) \\
b_{13}^1 &= a_{21}a_{13}a_{21}^{-1} = (de)(ef)(de) = (df) \\
b_{21}^1 &= a_{21} = dc \\
b_{22}^1 &= a_{11}a_{22}a_{11}^{-1} = (ab)(af)(ab) = (bf) \\
b_{23}^1 &= a_{11}a_{23}a_{11}^{-1} = (ab)(cb)(ab) = (ac) \\
b_{31}^1 &= a_{31} = cf \\
b_{32}^1 &= a_{11}a_{32}a_{11}^{-1} = (ab)(cb)(ab) = (ae) \\
b_{33}^1 &= a_{11}a_{33}a_{11}^{-1} = (ab)(da)(ab) = (bd) \\
\implies K_1 &= \left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

b) Calculemos el punto de Kirkman K_2

Consideramos las entradas $a_{22} = af$ y $a_{32} = be$. Entonces:

$$\begin{aligned}
b_{11}^2 &= a_{32}a_{11}a_{32}^{-1} = (be)(ab)(be) = (ae) \\
b_{12}^2 &= a_{12} = cd \\
b_{13}^2 &= a_{32}a_{13}a_{32}^{-1} = (be)(fb)(be) = (fe) \\
b_{21}^2 &= a_{32}a_{21}a_{32}^{-1} = (be)(de)(be) = (db) \\
b_{22}^2 &= a_{22} = fa \\
b_{23}^2 &= a_{32}a_{23}a_{32}^{-1} = (be)(bc)(be) = (ce) \\
b_{31}^2 &= a_{22}a_{31}a_{22}^{-1} = (af)(cf)(af) = (ca) \\
b_{32}^2 &= a_{32} = be \\
b_{33}^2 &= a_{22}a_{33}a_{22}^{-1} = (af)(da)(af) = (df)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_2 = \left. \begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{array} \right\}$$

c) Calculemos el punto de Kirkman K_3

Consideramos las entradas $a_{33} = ad$ y $a_{23} = bc$. Entonces:

$$b_{11}^2 = a_{33}a_{11}a_{33}^{-1} = (ad)(ab)(ad) = (bd)$$

$$b_{12}^2 = a_{33}a_{12}a_{33}^{-1} = (ad)(cd)(ad) = (ca)$$

$$b_{13}^2 = a_{13} = ef$$

$$b_{21}^2 = a_{33}a_{21}a_{33}^{-1} = (ad)(ed)(ad) = (ea)$$

$$b_{22}^2 = a_{33}a_{22}a_{33}^{-1} = (ad)(af)(ad) = (fd)$$

$$b_{23}^2 = a_{23} = bc$$

$$b_{31}^2 = a_{23}a_{31}a_{23}^{-1} = (bc)(cf)(bc) = (fb)$$

$$b_{32}^2 = a_{33}a_{32}a_{33}^{-1} = (bc)(be)(bc) = (ec)$$

$$b_{33}^2 = a_{33} = ad$$

$$\Rightarrow K_3 = \left. \begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right\}$$

En principio pareciera que el algoritmo propuesto depende en gran medida del orden en que vayamos tomando las columnas de la matriz que corresponde al punto Steiner y dada la observación 1.2.3.2 sobre la invariancia de la matriz del punto de Steiner al intercambiar renglones o columnas completas, es natural que surjan una serie de preguntas sobre la validez de este algoritmo. Sin embargo, el algoritmo planteado no depende del orden de renglones o columnas de la matriz, pues seguimos obteniendo los mismos tres puntos de Kirkman, aunque en diferente orden de aparición.

Proposición 3.4.3. *El algoritmo no depende de la elección de la matriz que representa al punto de Steiner.*

Demostración. Dados las tres columnas de Steiner, tenemos $|S_3| = 3! = 6$ maneras diferentes de acomodarlas. Por lo que, sin pérdida de generalidad,

si consideramos la matriz del punto de Steiner $St_1 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$, las otras 5 matrices equivalentes que resultan del intercambio de columnas son

$St_2 = \left. \begin{array}{ccc} ab & ef & cd \\ de & bc & fa \\ cf & ad & be \end{array} \right\}$, $St_3 = \left. \begin{array}{ccc} cd & ab & ef \\ fa & de & bc \\ be & cf & ad \end{array} \right\}$, $St_4 = \left. \begin{array}{ccc} cd & ef & ab \\ fa & bc & de \\ be & ad & cf \end{array} \right\}$,

$St_5 = \left. \begin{array}{ccc} ef & ab & cd \\ bc & de & fa \\ ad & cf & be \end{array} \right\}$, $St_6 = \left. \begin{array}{ccc} ef & cd & ab \\ bc & fa & de \\ ad & be & cf \end{array} \right\}$.

Si aplicamos el algoritmo 3.3.1 a estas matrices, obtenemos:

Pto de Steiner	K_1	K_2	K_3
St_2	$k_1^2 = \left. \begin{array}{ccc} ab & df & ce \\ de & ac & bf \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$	$k_2^2 = \left. \begin{array}{ccc} bd & ef & ac \\ ae & bc & fd \\ bf & ad & ce \end{array} \right\}$	$K_3^2 = \left. \begin{array}{ccc} ac & bf & cd \\ bd & ec & fa \\ ca & fd & be \end{array} \right\}$
St_3	$K_1^3 = \left. \begin{array}{ccc} cd & bf & ae \\ fa & ce & bd \\ be & df & ac \end{array} \right\}$	$K_2^3 = \left. \begin{array}{ccc} df & ab & ce \\ ac & de & bf \\ bd & cf & ae \end{array} \right\}$	$K_3^3 = \left. \begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ fd & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right\}$
St_4	$K_1^4 = \left. \begin{array}{ccc} cd & ae & bf \\ fa & db & ce \\ be & ac & df \end{array} \right\}$	$K_2^4 = \left. \begin{array}{ccc} ca & ef & bd \\ fd & bc & ae \\ ec & ad & bf \end{array} \right\}$	$K_3^4 = \left. \begin{array}{ccc} df & ce & ab \\ ac & bf & de \\ bd & ae & cf \end{array} \right\}$
St_5	$k_1^5 = \left. \begin{array}{ccc} ef & ac & bd \\ bc & df & ea \\ ad & ec & bf \end{array} \right\}$	$k_2^5 = \left. \begin{array}{ccc} ce & ab & fd \\ bf & de & ca \\ ac & cf & bd \end{array} \right\}$	$K_3^5 = \left. \begin{array}{ccc} bf & ae & cd \\ ce & bd & fa \\ df & ca & be \end{array} \right\}$
St_6	$k_1^6 = \left. \begin{array}{ccc} ef & bd & ac \\ bc & ea & df \\ ad & bf & ce \end{array} \right\}$	$K_2^6 = \left. \begin{array}{ccc} bf & cd & ae \\ ce & fa & bd \\ fd & be & ac \end{array} \right\}$	$K_3^6 = \left. \begin{array}{ccc} ce & df & ab \\ bf & ca & ce \\ ac & bd & cf \end{array} \right\}$

Así, por la observación 1.3.4.1, obtenemos exactamente los mismos tres puntos de Kirkman del teorema 1.3.1.

Ahora bien si intercambiamos los renglones de la matriz del punto de Steiner, las otras cinco matrices equivalentes son: $St_7 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$,

$$\left. \begin{aligned} St_8 &= \begin{pmatrix} de & fa & bc \\ ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{pmatrix}, St_9 = \begin{pmatrix} de & fa & bc \\ cf & be & ad \\ ab & cd & ef \end{pmatrix}, St_{10} = \begin{pmatrix} cf & be & ad \\ ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{pmatrix} \text{ y} \\ St_{11} &= \begin{pmatrix} cf & be & ad \\ de & fa & bc \\ ab & cd & ef \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Ahora aplicamos el algoritmo 3.3.1 a estas matrices y obtenemos así la siguiente tabla, en donde en la primera columna están los puntos de Steiner y sobre el renglón de cada uno, están los puntos de Kirkman que se obtienen.

Pto de Steiner	1 ^{er} Pto de Kirkman	2 ^o Pto de Kirkman	3 ^{er} Pto de Kirkman
St_7	$k_1^7 = \begin{pmatrix} ab & df & ce \\ cf & ae & bd \\ de & bf & ac \end{pmatrix}$	$k_2^7 = \begin{pmatrix} bf & cd & ae \\ ca & be & fd \\ db & fa & ec \end{pmatrix}$	$K_3^7 = \begin{pmatrix} ac & bd & ef \\ bf & ec & ad \\ de & fd & bc \end{pmatrix}$
St_8	$K_1^8 = \begin{pmatrix} de & bf & ac \\ ab & ce & df \\ cf & db & ea \end{pmatrix}$	$K_2^8 = \begin{pmatrix} db & fa & ec \\ ac & cd & bf \\ fd & be & ac \end{pmatrix}$	$K_3^8 = \begin{pmatrix} ac & fd & bc \\ bd & ac & ef \\ ce & bf & ad \end{pmatrix}$
St_9	$K_1^9 = \begin{pmatrix} de & ca & bf \\ cf & db & ea \\ ab & ec & df \end{pmatrix}$	$K_2^9 = \begin{pmatrix} ce & fa & bd \\ fd & be & ca \\ ea & cd & bf \end{pmatrix}$	$K_3^9 = \begin{pmatrix} df & ea & bc \\ ce & bf & ad \\ bd & ac & ef \end{pmatrix}$
St_{10}	$k_1^{10} = \begin{pmatrix} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \\ de & ca & bf \end{pmatrix}$	$k_2^{10} = \begin{pmatrix} ca & be & fd \\ bf & cd & ae \\ ce & fa & bd \end{pmatrix}$	$K_3^{10} = \begin{pmatrix} bf & ec & ad \\ ac & bd & ef \\ df & ea & bc \end{pmatrix}$
St_{11}	$k_1^{11} = \begin{pmatrix} cf & bd & ae \\ de & ac & bf \\ ab & df & ce \end{pmatrix}$	$K_2^{11} = \begin{pmatrix} df & be & ca \\ ce & af & cbd \\ bf & cd & ea \end{pmatrix}$	$K_3^{11} = \begin{pmatrix} ce & bf & ad \\ df & ae & bc \\ ac & bd & ef \end{pmatrix}$

De esta manera observamos que los puntos de Kirkman que obtenemos intercambiando los renglones, por las observaciones 1.3.4.1, aunque las columnas y renglones aparezcan en distinto orden y por 1.1.5, aunque haya una permutación entre los elementos que aparecen en “negritas” en la tabla, son equivalentes a los puntos de Kirkman que originalmente obtuvimos. Así, dado que cualquier otra matriz equivalente a la de Steiner, se obtiene con uno o la combinación de 12 intercambios entre columnas y renglones, la proposición es válida.

□

3.5 Cerrados de las rectas de Plücker

Por el teorema 1.6.1, sabemos que los puntos de Steiner en esta recta son:

$$\left. \begin{array}{l} St_\alpha = \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{pmatrix} \\ St_\beta = \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ ec & af & db \end{pmatrix} \\ St_\gamma = \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{pmatrix} \\ St_\delta = \begin{pmatrix} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ ec & bf & ad \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ y}$$

Así, sin pérdida de generalidad, para la recta de Plücker $[ab, cd, ef]$,

tenemos que:

$$F_{[ab,cd,ef]} = F_{St_\alpha} \cup F_{St_\beta} \cup F_{St_\gamma} \cup F_{St_\delta}$$

Es importante recordar que, como vimos en el capítulo 1, las matrices de los puntos de Steiner correspondientes a una recta de Plücker $[xy, wz, ml]$ son todas aquellas diferentes matrices que se pueden formar con el renglón fijo $xy \ wz \ ml$, por lo que tenemos entonces un algoritmo de “ensayo y error” que en realidad no resulta complicado, considerando el número de casos posibles que intervienen en este cálculo.

3.6 Cerrados de los puntos de Salmon

Como vimos en el teorema 1.7.1, el punto de Salmon

$S = [ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df]$, proviene de las rectas de Cayley

$$C_1 = \begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$$

De manera que para obtener el cerrado del punto de Salmon S , es necesario obtener el punto de Steiner y los tres de Kirkman que se encuentran en cada una de estas rectas de Cayley y tomar la unión de sus cerrados, para lo cual necesitamos entonces aplicar primero el algoritmo 3.4.1.

Sin embargo, antes de comenzar con este cálculo, es interesante hacer la siguiente observación: Cada una de las cuatro rectas de Cayley es supremo de tres puntos de Kirkman y uno de Steiner, que a su vez son cada uno supremos de tres rectas de Pascal, entonces:

Pregunta 1. ¿el cerrado de Salmon, estará conformado por $4(4)(3) = 48$ rectas de Pascal?,

Pregunta 2. ¿qué implicación tiene la cardinalidad del cerrado de un punto de Salmon, desde el punto de vista geométrico?.

Aplicando a cada una de las cuatro rectas de Cayley el algoritmo 3.4.1, llevamos a cabo los cálculos en la tabla 3.1 de la siguiente página, escribiendo sobre cada renglón al punto de Steiner y los tres puntos de Kirkman de cada una de las cuatro rectas de Cayley que se intersectan. Entonces el cerrado del punto de Salmon S , queda definido de la siguiente manera:

$$F_S = \bigcup_{j=1}^4 \left(\bigcup_{t=1}^3 K_t^j \right) \bigcup_{i=1}^4 F_{St_i}$$

Así, vemos que la respuesta a la segunda pregunta planteada es negativa, ya que por ejemplo: $\left. \begin{array}{ccc} de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$, pertenece a lo cerrados que corresponden a St_1^1, k_2^2, k_1^3 y k_2^4 .

Tabla 3.1: Puntos de Kirkman y Steiner para el cálculo del cerrado de un punto de Salmon

Pto de Steiner	1 ^{er} Pto de Kirkman	2 ^o Pto de Kirkman	3 ^{er} Pto de Kirkman
$St_1 = \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ de \ fa \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}$	$k_1^1 = \left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ de \ bf \ ac \\ cf \ ae \ bd \end{array} \right\}$	$k_2^1 = \left. \begin{array}{l} ae \ cd \ bf \\ bd \ fa \ cc \\ ac \ be \ df \end{array} \right\}$	$K_3^1 = \left. \begin{array}{l} bd \ ac \ ef \\ bf \ ce \ ad \end{array} \right\}$
$St_2 = \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ df \ be \ ac \\ ec \ af \ db \end{array} \right\}$	$K_1^2 = \left. \begin{array}{l} ab \ cf \ de \\ df \ ae \ bc \\ ec \ bf \ ad \end{array} \right\}$	$K_2^2 = \left. \begin{array}{l} bf \ cd \ ae \\ ad \ eb \ cf \\ bc \ af \ de \end{array} \right\}$	$K_3^2 = \left. \begin{array}{l} ad \ bc \ ef \\ bf \ de \ ac \\ ae \ cf \ db \end{array} \right\}$
$St_3 = \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ cf \ ea \ db \\ ed \ bf \ ac \end{array} \right\}$	$K_1^3 = \left. \begin{array}{l} ab \ df \ ce \\ cf \ be \ ad \\ ed \ af \ bc \end{array} \right\}$	$K_2^3 = \left. \begin{array}{l} af \ cd \ be \\ bc \ ae \ df \\ da \ bf \ ce \end{array} \right\}$	$K_3^3 = \left. \begin{array}{l} bc \ ad \ ef \\ af \ ce \ db \\ be \ df \ ac \end{array} \right\}$
$St_4 = \left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ df \ ea \ bc \\ ec \ bf \ ad \end{array} \right\}$	$k_1^4 = \left. \begin{array}{l} ab \ cf \ de \\ df \ be \ ac \\ ec \ af \ bd \end{array} \right\}$	$k_2^4 = \left. \begin{array}{l} af \ cd \ be \\ bd \ ea \ cf \\ ac \ bf \ de \end{array} \right\}$	$K_3^4 = \left. \begin{array}{l} bd \ ca \ ef \\ af \ de \ bc \\ be \ cf \ ad \end{array} \right\}$

Este resultado resulta muy interesante, porque podríamos encontrar más rectas de Pascal en común. Es por esto, que consideraremos a las gráficas como un camino alternativo para resolver esta duda, por la facilidad con la que podremos encontrar a las rectas de Pascal en común, una vez hechos todos los cálculos.

Partiendo del mismo punto en el que lo hicimos con la notación de Salmon, verificaremos cuáles son las rectas de Pascal que obtenemos en común y las buscaremos dentro de la tabla anteriormente hecha.

3.6.1 Un algoritmo de teoría de gráficas

Utilizaremos aquí un algoritmo aún no publicado de Rodolfo San Agustín, para calcular a partir de una recta de Cayley, las rectas de Pascal que se encuentran en cada uno de sus puntos de Kirkman y Steiner, que formarán así, el cerrado de dicha recta de Cayley y explicaremos brevemente en su construcción el por qué de dicho procedimiento, para que resulte natural en el momento de aplicarlo.

Es recomendable ver el apéndice B donde se construye la representación del \mathcal{HM} en $S(K_6)$ (la red de subgráficas de K_6).

Sin pérdida de generalidad, consideremos al punto de Salmon

$S = [ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df]$, entonces dado que existen

exactamente cuatro subgráficas de tipo $2K_3$ que su unión nos da la gráfica

S , tenemos bien determinadas (análogamente a como ocurría con la

notación de Salmon), las cuatro rectas de Cayley del punto S .

Una vez determinadas estas cuatro rectas de Cayley, si c es la gráfica que corresponde a una de estas rectas de Cayley, entonces $c^c = St$ donde St es el punto de Steiner que se encuentra en c .

Ahora bien, sabemos que para cada uno de estos cuatro puntos de Steiner que obtendremos, tenemos dos factorizaciones que corresponden a los puntos de Steiner conjugados entre sí, por lo que resultará de enorme ayuda de cada factorización, llevar a cabo el cambio de notación por la de Salmon para estos puntos de Steiner y considerar solo aquellas cuatro factorizaciones que nos resulten en su notación de Salmon, con un renglón en común debido a la correspondencia (1.2) del capítulo 1.

Una vez elegidas estas 1-factorizaciones de cada punto de Steiner, dado que en la notación de Salmon, la matriz correspondiente al punto de Steiner se formaba a partir de considerar la columna “marcada” de cada uno de los tres puntos de Kirkman en la recta de Cayley, resulta equivalente a contener como gráfica una de las tres 1-factorizaciones del punto de Steiner y también, dado que $St^c = c \subset K$, entonces, podemos obtener a cada uno de estos puntos de Kirkman al considerar la unión de cada una de las tres 1-factorizaciones con la gráfica de recta de Cayley.

De nuevo, resulta mucho muy útil escribir en la notación de Salmon, cada uno de los puntos de Kirkman calculados, para así, obtener cada una de las tres rectas de Pascal que conforman cada punto y escribirlos después como gráficas.

Llevaremos entonces a cabo dicho algoritmo en la figura (3.1) y (3.2) ,

considerando en cada columna (de izquierda a derecha):

1. Las rectas de Cayley c_i , donde $i = 1 \dots, 4$ que se intersectan en el punto de Salmon $S = [ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df]$
2. El punto de Steiner St_i que se encuentra en la recta c_i (que corresponde entonces a la gráfica complementaria de c_i) con su notación de Salmon
3. La 1-factorización correspondiente al punto de Steiner St_i
4. Los tres puntos de Kirkman K_j^i , con $j=1, \dots, 3$, en la recta de Cayley c_i , junto con su notación de Salmon
5. Las tres rectas de Pascal acomodadas por columnas, que se encuentran en los puntos de Kirkman K_j^i
6. Las tres rectas de Pascal que se encuentran en el punto de Steiner St_i .

Vemos entonces a partir de dichas figuras que los cálculos que habíamos llevado a cabo con la notación de Salmon eran correctos y que tenemos cuatro rectas de Pascal en común, por lo que tendremos ahora que analizar sus consecuencias.

3.6.2 Consecuencias del resultado obtenido en el cerrado de los puntos de Salmon

En base al cálculo del cerrado de un punto de Salmon, podemos responder a la segunda pregunta planteada, pues hemos obtenido un muy interesante

resultado, que llamaremos **Propiedad Ψ** :

Dado un punto de Salmon y las cuatro rectas de Cayley que lo contienen, existen cuatro rectas de Pascal que cortan a cada una de las rectas de Cayley, en los puntos de Kirkman y Steiner contenidos en ellas, es decir, Sin pérdida de generalidad, al considerar al punto de Salmon

$S = \{ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df\}$ y las rectas de Cayley que se intersectan en este punto: $C_1 = \begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}$,

$C_3 = \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix}$ y $C_4 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$, las rectas de Pascal

$P_1 = \begin{Bmatrix} de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{Bmatrix}$, $P_2 = \begin{Bmatrix} df & be & ac \\ ec & af & db \end{Bmatrix}$, $P_3 = \begin{Bmatrix} cf & ea & db \\ ed & bf & ac \end{Bmatrix}$ y

$P_4 = \begin{Bmatrix} df & ea & bc \\ ec & bf & ad \end{Bmatrix}$ cumplen con que $P_1 \ni St_1, K_2^2, K_1^3, K_3^4, P_2 \ni$

$K_2^1, St_2, K_3^3, K_1^4, P_3 \ni K_1^1, K_3^2, St_3, K_2^4$ y $P_4 \ni K_3^1, K_1^2, K_2^3, St_4$, donde

$St_i, K_j^i \in C_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$ y cuya interpretación geométrica, podemos verla en la figura (3.3).

Ahora bien, es importante observar la consecuencia que tiene este resultado con respecto al Teorema de Veronese (teorema 1.4.2), que caracteriza al Hexagrama Místico, al tener involucradas rectas de Pascal y puntos de Kirkman; así, podemos plantearnos la siguiente pregunta:

Pregunta 3. *Dada una de las rectas de Pascal p_i de la propiedad Ψ , ¿existen puntos de Kirkman o rectas de Pascal en el cerrado del mismo punto de Salmon, en la misma configuración de Desargues?*

Supongamos por un momento que sí existen puntos de Kirkman de la tabla

anterior en la configuración de Desargues de la recta p_i , entonces, dado que la configuración de Desargues es de tipo 10_3 y considerando el hecho de que todas las rectas de Pascal solo tienen tres puntos de Kirkman, debemos esperar que esos puntos de Kirkman sean exactamente los mismos tres puntos de Kirkman de la tabla (3.1) que contienen a la recta de Pascal p_i .

De manera que resulta, además de interesante, muy importante llevar a cabo el cálculo de cada una de las componentes arguesianas correspondientes a cada una de las rectas de Pascal p_i y analizar el resultado obtenido.

Llevaremos a cabo los pasos del algoritmo 1.4.3 que vimos en el capítulo 1, desglosando por columnas de las tablas (3.2) y (3.3), de la siguiente manera:

1. En cada columna desarrollaremos el algoritmo para calcular los elementos de las componentes arguesianas de cada recta de Pascal p_i en cada columna.
2. Dado que en cada paso consideraremos a los lados complementarios del punto de Kirkman o recta de Pascal en cuestión, desarrollaremos nuestro algoritmo hasta calcular el cuarto punto de Kirkman en la componente arguesiana, debido a la información que podemos obtener de manera inmediata al llegar hasta este paso.

Tabla 3.2: Elementos de componentes arguesianas asociadas a las rectas de Pascal P_1 y P_2

$P_1 = \left. \begin{array}{l} de \quad fa \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}$			$P_2 = \left. \begin{array}{l} df \quad ea \quad bc \\ ec \quad bf \quad ad \end{array} \right\}$		
$\left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ ef \quad ac \quad db \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\}$			$\left. \begin{array}{l} ab \quad cf \quad de \\ ef \quad ac \quad bd \\ cd \quad be \quad af \end{array} \right\}$		
$\left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ ef \quad ac \quad bd \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} ef \quad ac \quad bd \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ cd \quad ae \quad bf \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} ab \quad cf \quad de \\ ef \quad bd \quad ae \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} ef \quad ac \quad bd \\ cd \quad be \quad af \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} ab \quad cf \quad de \\ cd \quad be \quad af \end{array} \right\}$
$K_2^2 = \left. \begin{array}{l} ad \quad cf \quad bc \\ bf \quad ae \quad cd \\ de \quad bc \quad af \end{array} \right\}$	$K_1^3 = \left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ cf \quad ad \quad be \\ de \quad bc \quad af \end{array} \right\}$	$K_3^4 = \left. \begin{array}{l} ac \quad ef \quad bd \\ cf \quad ad \quad eb \\ de \quad bc \quad af \end{array} \right\}$	$K_2^3 = \left. \begin{array}{l} ad \quad bf \quad ce \\ bc \quad ae \quad df \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\}$	$K_1^2 = \left. \begin{array}{l} ab \quad de \quad cf \\ ec \quad ad \quad bf \\ df \quad bc \quad ae \end{array} \right\}$	$K_3^1 = \left. \begin{array}{l} ac \quad ef \quad bd \\ ce \quad ad \quad bf \\ df \quad bc \quad ae \end{array} \right\}$

Tabla 3.3: Elementos de componentes arguesianas asociadas a las rectas de Pascal P_3 y P_4

	$P_3 =$			$P_4 =$		
	ef	de	bc	cf	ea	db
	ec	ad	af	cd	fb	ac
			bd			
	$K_3^1 =$ ab de c ef ad bc cd bf ae			$K_4^1 =$ ab df ce ef ad bc cd be af		
	$K_3^2 =$ ac df bc bf ad ce cd be af			$K_4^2 =$ ac df ce bf ad bc cd be af		
	$K_3^3 =$ ab de cf cd bf ae ef ad bc			$K_4^3 =$ ab df ce cd be af ef ad bc		
	$K_3^4 =$ ac df bc bf ad ce cd be af			$K_4^4 =$ ac df ce bf ad bc cd be af		

Así, en base a este nuevo cálculo, hemos observado cosas muy interesantes:

1. En la componente arguesiana de cada recta p_i , tenemos a los tres puntos de Kirkman que como ya habíamos visto en la tabla (3.1), contienen a p_i
2. Cada una de estas cuatro rectas de Pascal de la propiedad Ψ , pertenecen a componentes arguesianas ajenas.
3. Para cada recta p_i de la propiedad Ψ , tenemos que todos los puntos de Kirkman K_{p_i} asociados mediante la correspondencia de Hesse, contienen la columna “marcada” en común.

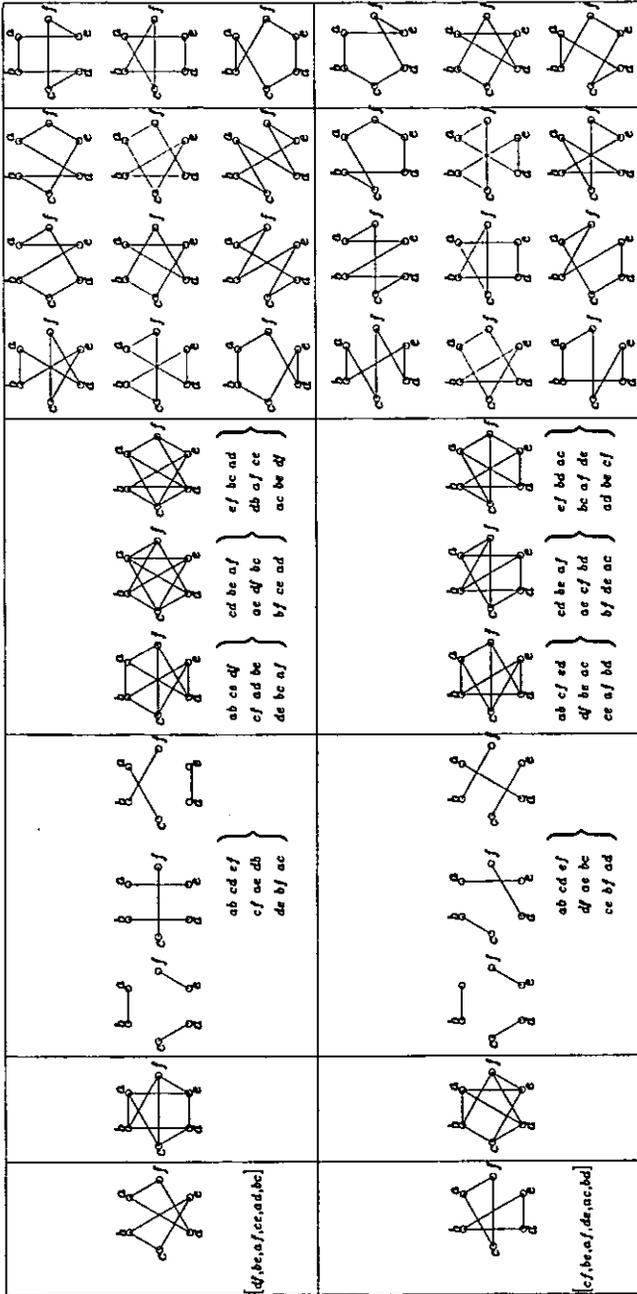
Finalmente, como parte de las consecuencias de la propiedad Ψ , podemos pensar en lo siguiente:

Dado que podemos construir $\frac{C_6^2 C_4^2}{3!} = 15$ columnas “inarcadas” distintas y debido a que tenemos 60 diferentes puntos de Kirkman, tenemos una correspondencia 4 : 1, entre las columnas marcadas y los puntos de Kirkman que podemos construir con ellas.

Ahora bien, a través de la propiedad Ψ , hemos encontrado que los cuatro puntos de Kirkman que tienen la misma columna “marcada” se relacionan con el punto de Salmon que contienen las rectas de Cayley en las que estos puntos se encuentran y recordando que en la configuración del Hexagrama tenemos 15 puntos de Salmon, surge la siguiente pregunta:

Pregunta 3: *¿Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de Kirkman, que contienen a la misma columna*

“marcada”, y el punto de Salmon, a través de las componentes arquesianas en la propiedad Ψ ?



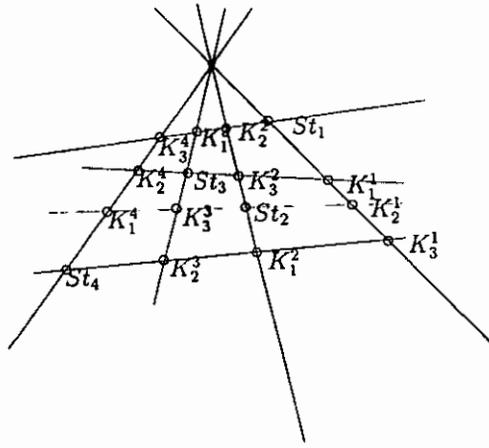


Figura 3.3: Interpretación geométrica de la propiedad psi

Capítulo 4

COMENTARIOS FINALES

Para concluir el presente trabajo, quisiera hacer unos breves comentarios al respecto del interés que tenemos en hacer de este trabajo, una introducción para su posterior aplicación en la Teoría de Invariantes:

En el artículo de Neil White [7], tenemos descrita la forma en la que podemos construir el anillo de corchetes en una geometría combinatoria así en un módulo sobre su propio anillo de corchetes, por lo que en el estudio del Hexagram Místico podríamos hacer uso de la herramienta que la teoría de anillos conmutativa. De igual manera, planteamos la posibilidad de hacer esta representación, para darle un enfoque con el que Sturmfels [6] analiza diversas estructuras a partir de sus anillos de invariantes. Me parece también importante plantear lo siguiente: una representación de la estructura del \mathcal{HM} como retícula geométrica parcial, en base a un criterio en el que nuestra prioridad era la de

conservar la información que nos permitía identificar a cada elemento en base a la forma en que fue construido; creo aún así que sí deben existir otras formas en las que podamos llevar a cabo esta representación, que aunque en el fondo tengan un sustento muy parecido a la de la representación que hicimos, nos podrían proporcionar otro tipo de información, para encontrar nuevas relaciones geométricas y combinatorias en la estructura del \mathcal{HM} . Este planteamiento resulta importante en tanto que siempre la búsqueda de alternativas permite, más allá de hacer un cambio en la dirección que tomamos, perfeccionar lo anteriormente hecho. Sin embargo también es importante mencionar la información que hemos podido obtener en nuestro trabajo ya han surgido una serie de preguntas sobre la estructura del \mathcal{HM} , y también pudimos encontrar una serie de respuestas que nos permitan guiar el rumbo de dicha búsqueda de respuestas.

Haremos entonces un planteamiento de las preguntas que han surgido como resultado del presente trabajo:

1. ¿Existe una correspondencia biunívoca, entre los puntos de Kirkman que contienen a la misma columna “marcada” y los puntos de Salmon, a través de las componentes arguesianas en la propiedad Ψ ?
2. ¿Cómo se relaciona la anterior pregunta con la propiedad Ψ ,

en la búsqueda de una respuesta?

3. Dada una recta de Pascal, ¿es posible determinar a qué cerrados corresponde en la representación del \mathcal{HM} como geometría combinatoria parcial?
4. ¿La respuesta a la pregunta anterior permite que exista una relación entre tales cerrados?
5. Una vez llevada a cabo la representación del álgebra de corchetes del \mathcal{HM} , la descomposición de Veronese corresponde a la descomposición en irreducibles de dicha álgebra, o bien, a la descomposición de Hironaka?

Apéndice A

Teoría de Gráficas

A.1 Conceptos básicos

Este apéndice tiene como objetivo, dar una pequeña introducción a la teoría de gráficas, debido a la importancia que tienen las gráficas como una útil herramienta en el tercer capítulo.

Nos basaremos en gran parte en el apéndice hecho por Gabriela Frías [3].

Definición A.1.1. *Una gráfica G se define como un par ordenado (Γ, Ω) , en donde:*

1. Γ es un conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de elementos llamados **vértices** y
2. Ω es una familia (w_1, w_2, \dots, w_m) de elementos del producto cartesiano de $\Gamma \times \Gamma$, llamados **aristas**

Si $m = (g, w) \in \Omega$, decimos que x es **adyacente** con y y denotamos a dicha arista como la palabra no ordenada gw .

Notación A.1.2. Para denotar a una gráfica G , escribiremos sus aristas dentro de un paréntesis cuadrado [...].

Definición A.1.3. Dos o mas aristas que unen al mismo par de vértices son llamadas **aristas múltiples** y una arista que une a un vértice consigo mismo es llamada un **lazo**. Una gráfica sin lazos o aristas múltiples es una **gráfica simple**.

Definición A.1.4. Si G es una gráfica simple, formamos su **complemento G'** al considerar el conjunto de vértices G y uniendo dos vértices a través de una arista siempre que dichos vértices no estén unidos en G .

Definición A.1.5. Sea G una gráfica con un conjunto de vértices $V(G)$ y una familia de aristas $E(G)$. Una **subgráfica G_1** de G es una gráfica cuyo vértices pertenecen a $V(G)$ y cuyas aristas pertenecen a $E(G)$. Una **subgráfica generadora** de G , es una gráfica que contiene todos los vértices de G .

Definición A.1.6. Una **gráfica completa** es una gráfica en la que cada par de vértices es unido por exactamente una arista. La gráfica completa con n vértices es denotada por K_n .

Definición A.1.7. Una **gráfica n -partita** G , es aquella en la que se puede dar un partición de sus vértices en n subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_n tal que cada arista de G tiene un extremo en V_i y otro en V_j donde $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tal partición (V_1, V_2, \dots, V_n) , se llama **n -partición**.

Definición A.1.8. Una gráfica n -partita completa G es una gráfica con n -partición (V_1, V_2, \dots, V_n) , donde cada vértice de V_i es adyacente con cada vértice de V_j para cualquier pareja $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si (V_1, V_2, \dots, V_n) . Si $|V_i| = a_i$ con $i = 1, \dots, n$, denotamos a la gráfica n -partita por K_{a_1, a_2, \dots, a_n} .

A las gráfica 2-partitas y 3-partitas suelen llamársele bipartitas y tripartitas, respectivamente.

Definición A.1.9. Un camino en una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas $(g_1, w_1, g_2, w_2, \dots, w_{n-1}, g_n)$, empezando y terminando con vértices, en la que cada arista es incidente con los vértices que la preceden y la suceden respectivamente.

Definición A.1.10. Una gráfica en la que a partir de cualquier vértice podemos trazar un camino a cualquier otro, se dice que es conexa, y se dice desconexa, en el caso contrario.

Definición A.1.11. Un factor de una gráfica G , es una subgráfica generadora de G que es completamente desconexa. Decimos que G es la suma de factores G_i , si es unión disjunta en aristas y tal unión es llamada una factorización de G . Si tenemos una factorización de G en n -factores, a cada uno de éstos les llamamos n -factor y su unión es llamada una n -factorización y G es n -factorizable.

A.2 Propiedades de K_6

Sea $A = a, b, c, d, e, f$ el conjunto de vértices de la gráfica completa K_6 . Un 1-factor de K_6 es un conjunto de tres aristas disjuntas.

Proposición A.2.1. *Hay quince 1-factores distintos en K_6*

Demostración. Debido a que en K_6 tenemos $C_6^2 = 15$ aristas, tenemos entonces 15 maneras distintas de escoger la primera arista de nuestra 1-factorización donde tres de ellas nos forman la misma 1-factorización. Ahora, para escoger la segunda arista de entre las disjuntas a la primera arista que tomamos, solo tenemos $C_4^2 = 6$ aristas para considerar, en donde dos de ellas pertenecen al mismo 1-factor.

Por lo tanto tenemos $\binom{15}{3} \binom{6}{2} = 15$ 1-factores. □

Apéndice B

Una representación del \mathcal{HM} en $S(K_6)$

Consideremos la correspondencia $\phi : \mathcal{HM} \rightarrow S(K_6)$, donde \mathcal{HM} representará a la retícula de los elementos del Hexagrama representada a través de la notación de Salmon. Sin pérdida de generalidad, consideraremos a algunos de los elementos del Hexagrama con los que hemos estado trabajando, para lograr una mejor comprensión de la notación de Salmon y la de Rodolfo San Agustín.

B.1 Rectas de Pascal

Consideremos la recta de Pascal $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, entonces, tal y como vimos en el capítulo 1, al tener 60 diferentes rectas de Pascal que están en correspondencia biunívoca con los arreglos que a través de la notación de Salmon representan una recta de

Pascal, en donde lo fundamental son las seis parejas que aparecen en dicho arreglo, resulta natural pensar en la correspondencia establecida por ϕ aplicada a una recta de Pascal, de la siguiente forma:

$$(B.1) \quad \phi : \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\} \longrightarrow [ab, cd, ef, de, fa, bc]$$

en donde $[ab, cd, ef, de, fa, bc]$ representa a la subgráfica de K_6 cuyos vértices son a, b, c, d, e, f y sus aristas ab, cd, ef, de, fa y bc .

De esta manera, a través de la observación 1.1.5 podemos definir $\phi^{-1}([ab, cd, ef, de, fa, bc])$ como el arreglo de 1×2 en donde por columnas están las parejas de letras que no tienen elementos en común y donde por renglones no hay omisiones ni repeticiones de las seis letras.

B.2 Puntos de Steiner

Consideremos el punto de Steiner $St = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$, que tal y como vimos en el capítulo 1, es el punto de concurrencia de las rectas de Pascal $p_1 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $p_2 = \left. \begin{array}{ccc} ed & af & bc \\ cf & eb & ad \end{array} \right\}$ y $p_3 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$, y que en su representación como retícula geométrica parcial, dicho punto de Steiner es el supremo de las rectas de Pascal que lo contienen; por lo tanto:

$$(B.2) \quad \phi(St) = \phi(p_1) \vee \phi(p_2) \vee \phi(p_3) = [ab, cd, ef, de, fa, bc, cf, be, ad]$$

Observación B.2.1. *Sabemos que a través de estas nueve parejas de letras, podemos representar a dos puntos de Steiner, en donde uno es el conjugado armónico del otro, que a través de la notación de Salmon identificábamos a dos matrices, en donde una era la traspuesta de la otra; de igual manera sucede en las gráficas, ya que al llevar a cabo la factorización de dicha gráfica, que en términos geométricos es obtener cada una de las tres rectas de Pascal que conforman dicho punto, vemos que tenemos entonces dos factorizaciones diferentes y que por ende, cada una de estas son las que sí determinan de manera única al punto de Steiner en cuestión.*

Así, podemos obtener $\phi^{-1}(\{ab, cd, ef, de, fa, bc, cf, be, ad\})$, de la siguiente manera:

1. Considerar las dos factorizaciones de la gráfica correspondiente a un punto de Steiner
2. Escribir por renglones las tres aristas que aparecen en cada una de las tres 1-factorizaciones
3. Hacer los reacomodos necesarios sobre los renglones para que en cada renglón y columna, aparezcan las seis letras sin omisión ni repetición, para respetar la notación de Salmon para un punto de Steiner.

Vemos entonces que al llevar a cabo dicho procedimiento, obtendremos dos puntos de Steiner que son conjugados armónicos

entre sí, así como las tres rectas de Pascal que determinarán a cada punto de Steiner.

B.3 Puntos de Kirkman

Como vimos en el capítulo 1, Kirkman encontró otras ternas de rectas de Pascal diferentes a las de Steiner, que se intersectan en 60 puntos que llevan su nombre; por lo que procediendo de manera análoga a como lo hicimos con los puntos de Steiner, si consideramos al punto de Kirman $K = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$, que es el punto de concurrencia de las rectas de Pascal $p_4 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $p_5 = \left. \begin{array}{ccc} cd & af & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\}$ y $p_6 = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$, entonces:

$$(B.3) \quad \phi(K) = \phi(p_4) \vee \phi(p_5) \vee \phi(p_6) = \{ab, cd, ef, de, fa, bc, cf, bd, ae\}$$

B.4 Rectas de Cayley

Consideremos la recta de Cayley $c = \left(\begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & af & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right)$ que se

construye a partir de los puntos de Kirkman $K_1 = \left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$,

$K_2 = \left. \begin{array}{ccc} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{array} \right\}$, $K_3 = \left. \begin{array}{ccc} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{array} \right\}$ y el punto de Steiner

$St = \left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$.

En este caso la regla cambia un poco, ya que si consideramos la intersección de las gráficas que corresponden a cada uno de estos

cuatro puntos, naturalmente dicha intersección sería vacía; de manera que para este caso consideraremos a ϕ de la siguiente manera:

$$(B.4) \quad \phi(c) = \phi(K_1) \wedge \phi(K_2) \wedge \phi(K_3) = [ce, bf, ae, df, ac, bd]$$

Observación B.4.1. Sabemos que tenemos $c_6^2 = 15$ diferentes parejas de letras, que representan a cada una de las 15 diferentes aristas la gráfica de K_6 . Ahora bien, vemos que en cada arreglo que corresponden un punto de Kirkman y por ende en su gráfica correspondiente, aparecen las mismas seis parejas de letras, aunque en diferente orden, y forman estas el complemento de las nueve parejas de letras, o bien aristas, que corresponden a la representación del punto de Steiner St . Es por esto que tenemos la siguiente importante relación:

$$(B.5) \quad \phi^c(c) = \phi(St)$$

Observación B.4.2. También debemos recordar, como vimos en la observación 1.5.5, que al tener un punto de Steiner y su conjugado armónico exactamente los mismos lados fundamentales en su arreglo a través de la notación de Salmon, entonces los seis lados complementarios que representarán a estas dos rectas de Cayley, serán exactamente los mismos, por lo que dada una recta de Cayley en su notación con gráficas, en principio no es posible determinar a qué punto de Steiner corresponde.

Este problema ha sido recientemente resuelto por Gabriela Araujo y Rodolfo San Agustín en una reciente investigación aún no publicada, a partir de gráficas que ellos llaman "gráficas marcadas".

B.5 Rectas de Plücker

Dado que no hay una representación explícita de las rectas de Plücker con la notación de Salmon, utilizamos desde el capítulo 1 la notación designada a través de las gráficas de la siguiente manera:

Consideremos los puntos de Steiner colineales $St_1 = \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ & cf & be & ad \end{array} \Bigg\}$, $St_2 = \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & eb & ac \\ & ec & af & db \end{array} \Bigg\}$, $St_3 = \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & ea & db \\ & ec & bf & ac \end{array} \Bigg\}$ y $St_4 = \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ df & ea & cb \\ & ec & bf & ad \end{array} \Bigg\}$, que tienen en común al renglón con entradas ab, cd, ef y que al ser los único cuatro posibles arreglos para formar a un punto de Steiner manteniendo fijo dicho renglón, entonces podemos caracterizar de manera única esta recta de Plücker (que llamaremos Pl), a través de las entradas de este renglón, y que además forma parte de la intersección de las gráficas correspondientes a cada uno de estos puntos; por lo tanto tenemos:

$$(B.6) \quad \phi(pl) = \phi(St_1) \wedge \phi(St_2) \wedge \phi(St_3) \wedge \phi(St_4) = [ab, cd, ef]$$

B.6 Puntos de Salmon

Para obtener la gráfica que corresponde a un punto de Salmon, tenemos que llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Consideremos a las rectas de Cayley $c_1 = \begin{pmatrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$,
 $c_2 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ dc & eb & af \\ ef & ac & db \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} ab & cf & ed \\ cd & ea & bf \\ ef & db & ac \end{pmatrix}$ y $c_4 = \begin{pmatrix} ab & df & ec \\ cd & ea & bf \\ ef & bc & ad \end{pmatrix}$,
 que por el teorema de Salmon 1.7.1, sabemos que son concurrentes.

2. Mediante la correspondencia 1.2, tomemos al punto de Steiner que está en cada una de estas rectas de Cayley, trasponiendo cada una de las matrices de arriba.
3. Mediante la correspondencia ϕ , debemos considerar $\phi(c_1)$, $\phi(c_2)$, $\phi(c_3)$ y $\phi(c_4)$.
4. Si S es el punto de Salmon en que concurren las anteriores rectas de Cayley, entonces:

$$\phi(S) = \phi(c_1) \vee \phi(c_2) \vee \phi(c_3) \wedge \phi(c_4) = \{ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, ce, cf, de, df\}$$

(B.7)

Bibliografía

- [1] San Agustín Rodolfo, *Dos representaciones del Hexagrama Místico*, Red-Mat. Revista Electrónica de la Fac. de Ciencias, UNAM. Vol 3, num.7, 1997.
- [2] J.H. van Lint y R.M. Wilson, *A course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.
- [3] Frías Villegas Gabriela, *Un estudio combinatorio del Hexagrama Místico de Pascal* (tesis de licenciatura), Fac. Ciencias, UNAM, 2000.
- [4] San Agustín Chi Rodolfo *Dos representaciones del Hexagrama Místico* Red-Mat. Revista electrónica de la Facultad de Ciencias, UNAM, vol.3, n.7 (1997).
- [5] G. Salmon, *A treatise on Conic Sections*. Chelsea, 1952.
- [6] Sturmfels Bernd, *Algorithms in Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1993