

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DEL DOCTORADO

0312

PERFORADO 01149

147



ANALISIS DE CASCARONES CILINDRICOS
MEDIANTE SUPERPOSICION DE SOLUCIONES DE
MEMBRANA Y COMPLEMENTARIA

Cascarones - Analisis

Tesis para optar el grado de:
MAESTRO EN INGENIERIA
ESTRUCTURAS

presentada por:

TEOFILO G. VARGAS S.

México D.F., 1964

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

En el presente trabajo se desarrolla una secuencia de cálculos para obtener los desplazamientos de los puntos de un cascarón cilíndrico. Se utilizan para ello las teorías de membrana y de flexión incluyendo además un modo aproximado de tomar en cuenta los efectos de cortante transversal. Puesto que los operadores que aparecen en dichas teorías son lineales, es factible pensar en la posibilidad de superposición de soluciones; así, una primera sería la correspondiente a la teoría de membrana, y otra - que designaremos como complementaria - es la que no se hacen intervenir los elementos considerados por las ecuaciones de membrana.

El planteamiento supone que la distribución de carga total entre el "cascarón de membrana" y el "cascarón complementario" debe ser tal que ambos cascarones presenten igual estado de deformación. Lograremos tal objetivo procediendo por aproximaciones sucesivas hasta alcanzar la precisión deseada.

En el primer capítulo y en la primera parte del segundo, se presentan las ideas fundamentales sobre el análisis de cascarones cilíndricos con el fin de facilitar al lector el conocimiento de las hipótesis y del desarrollo de las ecuaciones de equilibrio y elasticidad. En su exposición se ha seguido el libro de W. Flügge: "Stresses in Shells"⁽¹⁾ por considerárselo el más apropiado para los efectos pretendidos.

El tema de este trabajo fue sugerido por el Dr. Emilio Rosenbluth y fue desarrollado bajo la dirección del Dr. Juan Pizillo; a quien el autor agradece la puntual revisión y crítica continua.

Capítulo I

Estudio de cascarones cilíndricos

Definiciones

Estableceremos primero algunas definiciones que pudieran interesarnos: cascarón, elementos mecánicos, esfuerzos, deformaciones, rigideces.

Cascarón. - Llamaremos cascarón a un cuerpo definido por una superficie media curva y un espesor en cada uno de los puntos de la superficie, el cual es pequeño comparado con las dimensiones de ésta, incluyendo en ellas los radios de curvatura. De hecho, la superficie media es la que bisecta los espesores del cascarón. En este estudio se considerará que el material es elástico y lineal.

Esfuerzos. - Para analizar los esfuerzos, consideremos un pequeño elemento diferencial del cascarón definido por dos pares de planos normales a la superficie media. Los radios de curvatura principales según los planos " xz " y " yz " son r_x y r_y respectivamente.

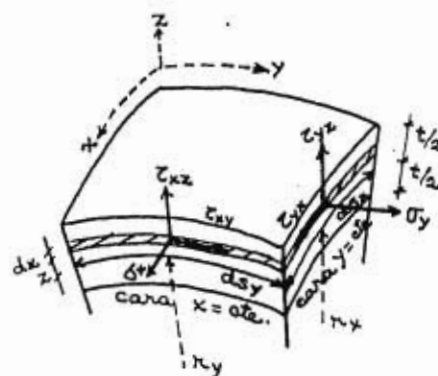


fig. 1.

Esfuerzos que actúan sobre un elemento de cascarón

Elegimos un sistema de coordenadas Gaussianas

sobre la superficie media (las líneas $x = \text{cte.}$ interseccionan a las $y = \text{cte.}$ según ángulos rectos), y definimos los esfuerzos con dos subíndices: el primero que indica la cara en que actúa el esfuerzo, y el segundo según el eje que pique. Serán positivos si actúan en la dirección de incremento del eje en caras anteriores y si están en sentido contrario al incremento del eje en caras posteriores. Serán negativos en casos contrarios. Así quedan definidos $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$.

Elementos mecánicos. - Los esfuerzos determinan: fuerzas normales, cortantes y transversales, y momentos flexionantes y de torsión.

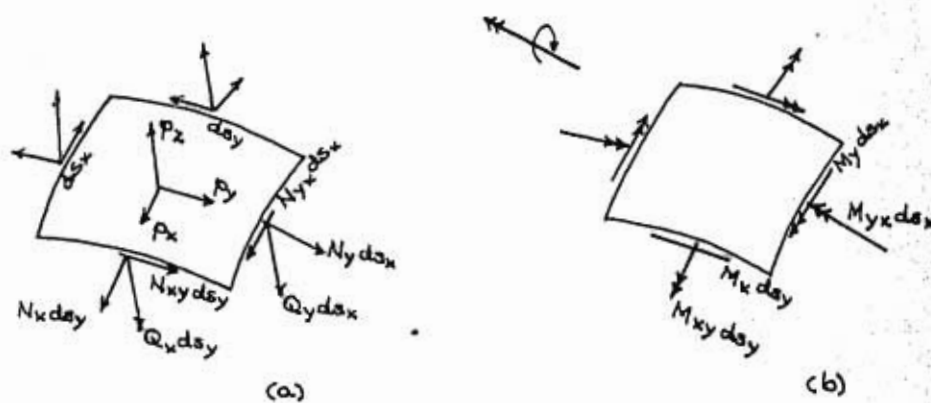


fig. 2.

Elementos mecánicos en un elemento diferencial de viga.

Estos elementos mecánicos (fig. 2) quedan definidos, por unidad de longitud, por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz; & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz; \\
 N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz; & N_{yx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz; \\
 Q_x &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz; & Q_y &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz;
 \end{aligned} \tag{1a-j}$$

$$M_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz;$$

$$M_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz;$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz;$$

$$M_{yx} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz.$$

Las cantidades z/r_x y z/r_y , aparecen en estas expresiones debido a que las caras laterales del elemento mostrado en la fig. 1 son de forma trapezoidal por la curvatura del cascarón.

Deformaciones.- El estado de deformación de un cascarón puede describirse mediante las tres componentes de desplazamiento de un punto arbitrario A del mismo, con coordenadas (x, y, z) . Estas se indican como sigue:

- u_a : desplazamiento a lo largo del eje x , positivo en la dirección de incremento de x ,
- v_a : desplazamiento a lo largo del eje y , positivo en la dirección de incremento de y ,
- w_a : desplazamiento a lo largo del eje z , positivo en la dirección de incremento de z .

Las hipótesis restrictivas para su cálculo, se señalarán en cada caso.

Rigideces.- Entenderemos por rigidez de un cascarón, la resistencia que este opone a la deformación que provoca determinado tipo de elemento mecánico. La llamaremos flexional, si se opone a las deformaciones provocadas por los momentos flexionantes y de torsión; y extensional, si se opone a las deformaciones por fuerzas normales y transversales.

Las expresiones correspondientes a cada caso serán establecidas posteriormente.

Solución de membrana

Fuerzas de membrana. - En la Teoría de la membrana se considera que el cascarón lleva sus cargas esencialmente por fuerzas en la superficie; así es posible despreciar los momentos y fuerzas transversales al efectuar el análisis.

Las fuerzas que se consideran serán por lo tanto, únicamente las que se indican en la fig. 2a (excepto las fuerzas transversales Q), donde p_x , p_y y p_z , son las componentes de la carga que actúa en el elemento. Por equilibrio de momentos respecto a p_z , se tendrá:

$$N_{xy} = N_{yx};$$

y así, el sistema de fuerzas se reduce a tres: N_x , N_y , N_{xy} .

Equilibrio de fuerzas de membrana en un cascarón cilíndrico.

Una superficie cilíndrica es generada por una línea recta que se mueve a lo largo de una curva, manteniéndose paralela a su dirección original. Las líneas rectas son llamadas "generatrices" y las curvas de la superficie normales a ellas, "directrices".

Establezcamos un sistema de coordenadas cilíndricas: x en la dirección de la generatriz, y ϕ , ángulo que hace la tangente a una directriz $x = \text{cte.}$ con la horizontal (fig. 3a). Consideremos un elemento diferencial del cascarón e indiquemos en él las fuerzas de membrana (fig. 3b): N_x , N_ϕ y $N_{x\phi} = N_{\phi x}$. La carga por unidad de área del elemento de cascarón tiene las componentes: p_x , p_ϕ y p_n .

Por equilibrio de fuerzas en la dirección radial se tiene:

$$N_\phi dx \cdot d\phi - p_n \cdot dx \cdot r d\phi = 0.$$

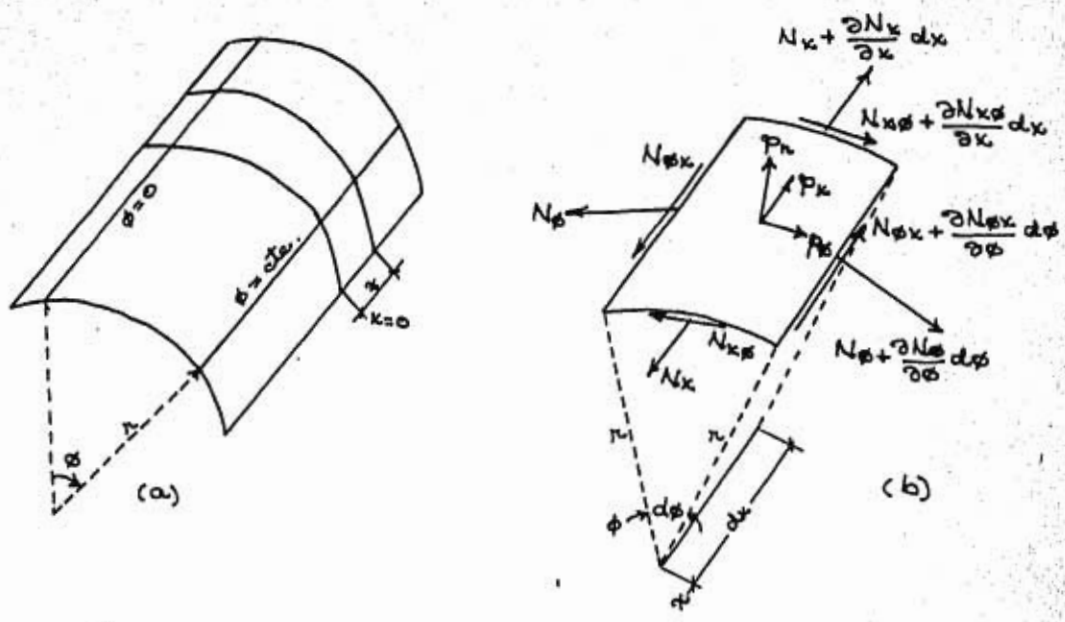


fig. 3. Coordenadas cilíndricas y fuerzas de membrana en un elemento de cascarón cilíndrico.

Por equilibrio de fuerzas en dirección paralela a una tangente a la directriz:

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} d\phi \cdot dx + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} dx \cdot r d\phi + p_\phi \cdot dx \cdot r d\phi = 0.$$

Del equilibrio en la dirección x:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx \cdot r d\phi + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} d\phi \cdot dx + p_x \cdot dx \cdot r d\phi = 0.$$

De estas tres ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} N_\phi &= p_r r, \\ \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} &= -p_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} &= -p_x - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi}. \end{aligned} \tag{2a-c}$$

Deformaciones. - Para ϵ_x , ϵ_ϕ y $\gamma_{x\phi}$, deformaciones unitarias normales y angular, la ley de Hooke da:

$$\begin{aligned} E \epsilon_x &= N_x - \nu N_\phi; \\ E \epsilon_\phi &= N_\phi - \nu N_x; \\ E \gamma_{x\phi} &= 2(1+\nu) N_{x\phi}. \end{aligned} \tag{3a-c}$$

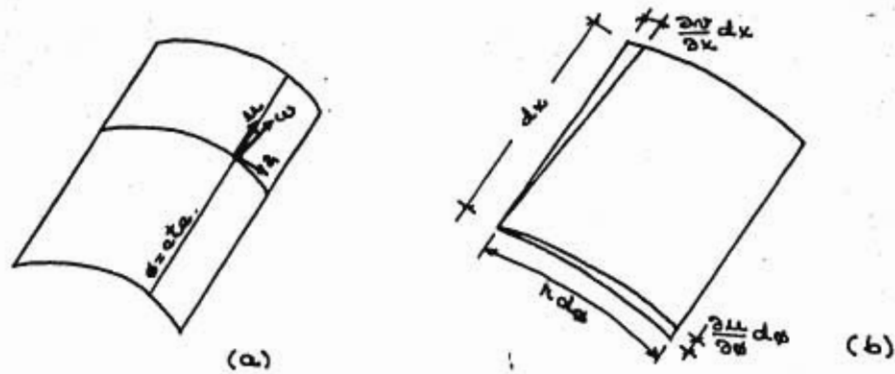


fig. 4. Desplazamientos y distorsión para cascarones cilíndricos.

Si u , v y w son las deformaciones: axial en x , circunferencial en ϕ y radial en r , respectivamente, podemos establecer las siguientes relaciones (fig. 4):

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right), \quad (4a-c)$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

De las relaciones (3) y (4), llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de la deformación de un cascarón cilíndrico:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Et} (N_x - \nu N_\phi),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{x\phi}, \quad (5a-c)$$

$$\frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{1}{Et} (N_\phi - \nu N_x).$$

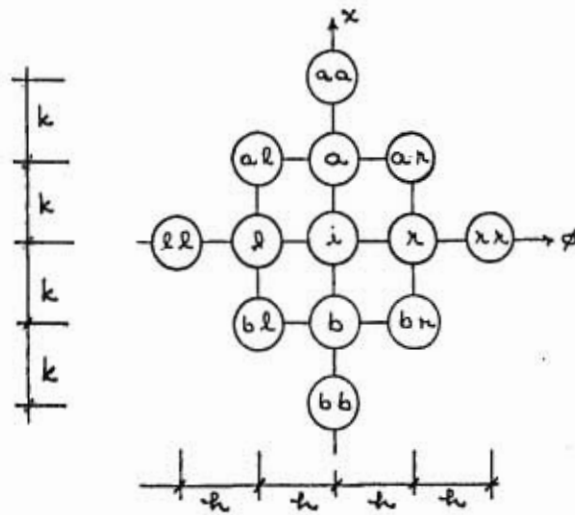
Con (2a-c) en (5a-c) se obtienen las ecuaciones siguientes para el "cascarón de membrana", referidas al caso particular de un cascarón cilíndrico circular ($r=a$):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{Et} \left[-\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial p_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 p_r}{\partial \phi^2} - \nu a \frac{\partial^2 p_r}{\partial x^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} = \frac{2(1+\nu)}{Et} \left(-p_n - \frac{\partial p_n}{\partial \phi} \right) \quad (6a-c)$$

$$w + \frac{\partial v}{\partial \phi} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{p_n}{Et} (1-\nu)$$

Solución por diferencias finitas. - Resolvaremos las ecs. (6) por diferencias finitas utilizando la convención de Salvadori:⁽²⁾



donde "i" es el punto pivote, las letras "a" y "b" indican arriba y abajo, y las letras "l" y "r" izquierda y derecha respectivamente. Los valores de los espaciamentos h y k son $\Delta \phi$ y Δx , respectivamente.

Las derivadas parciales sucesivas:

$$\begin{aligned} 2k \frac{\partial u}{\partial x} &= u_a - u_b & 2h \frac{\partial v}{\partial \phi} &= v_r - v_l \\ k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= v_a - 2v_i + v_b & 2k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= u_{aa} - 2u_a + 2u_b - u_{bb} \\ 4hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} &= u_{ar} - u_{br} - u_{al} + u_{bl} \end{aligned}$$

y las ecs. (6):

$$\begin{aligned} (u_{aa} - 2u_a + 2u_b - u_{bb}) &= \frac{2k^3}{Et} \left\{ -\frac{1}{2k} [(p_x)_a - (p_x)_b] + \frac{1}{2ah} [(p_x)_r - (p_x)_l] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{ak^2} [(p_x)_r - 2(p_x)_i + (p_x)_l] - \frac{\nu a}{k^2} [(p_x)_a - 2(p_x)_i + (p_x)_b] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$(v_a - 2v_i + v_b) + \frac{k}{4ah} (u_{ar} - u_{br} - u_{al} + u_{bl}) = \frac{2k^2}{Et} (1+\nu) \left\{ - (p_x)_i - \frac{1}{2h} [(p_x)_r - (p_x)_l] \right\} \quad (8)$$

$$w_i + \frac{1}{2h} (v_r - v_l) + \frac{a}{2k} (u_a - u_b) = \frac{a^2}{Et} (1-\nu) (p_x)_i \quad (9)$$

Capítulo II

Solución Complementaria

Habíamos llamado solución complementaria a la que se obtiene al resolver las ecuaciones exactas de flexión liberadas de los elementos que intervinieron en la solución de membrana.

Los elementos mecánicos que actúan en el cascarón son diez ($N_x, N_\phi, N_{x\phi}, N_{\phi x}, Q_x, Q_\phi, M_x, M_\phi, M_{x\phi}, M_{\phi x}$). Como las condiciones de equilibrio son seis únicamente, para resolver esta hiperestaticidad es necesario recurrir al estudio de las deformaciones. Se establecerán así ecuaciones exactas de equilibrio y de elasticidad. De ambos grupos se eliminarán los efectos de membrana, y de las ecuaciones resultantes obtendremos la solución complementaria.

Ecuaciones de equilibrio - Adoptaremos el sistema de coordenadas cilíndricas del caso anterior (restringiéndonos al caso de perfiles circulares de $r=a$). Usaremos la notación simplificada de Flügge: $a \frac{\partial(\)}{\partial x} = (\)'$, $\frac{\partial(\)}{\partial \phi} = (\)^\circ$.

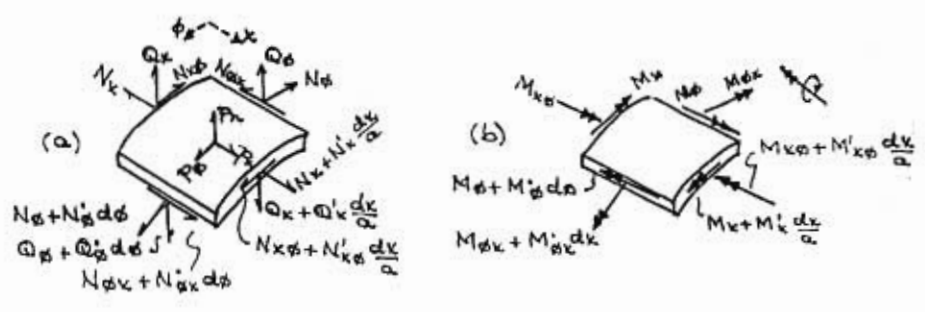


fig. 6 Elementos mecánicos en un elemento diferencial de cascarón cilíndrico.

11

En la fig. 6a se indican las fuerzas internas y externas que actúan sobre un elemento de cascarón, y en la 6b, los momentos flexionantes y de torsión.

Podemos establecer tres condiciones de equilibrio de fuerzas:

Del equilibrio de fuerzas en "x", se tiene:

$$N'_x + N'_{\phi x} + p_x a = 0 \quad (10a)$$

La condición de equilibrio de fuerzas en " ϕ " es:

$$N'_\phi + N'_{x\phi} - Q_\phi + p_\phi a = 0. \quad (10b)$$

Y para el equilibrio radial:

$$Q'_\phi + Q'_{x\phi} + N_\phi - p_r a = 0. \quad (10c)$$

Además, las ecuaciones de equilibrio de momentos son:

Tomando momentos con respecto a " p_x ":

$$M'_\phi + M'_{x\phi} - a Q_\phi = 0. \quad (10d)$$

Análogamente, con " p_ϕ " como eje:

$$M'_x + M'_{\phi x} - a Q_x = 0. \quad (10e)$$

Y del equilibrio radial de momentos:

$$a N_{x\phi} - a N_{\phi x} + M_{\phi x} = 0. \quad (10f)$$

De este juego de seis ecuaciones podemos eliminar Q_x y Q_ϕ , utilizando sus valores de (10d) y (10e) y reemplazándolos en (10b, c). Así obtenemos las ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\begin{aligned} N'_x + N'_{\phi x} + p_x a &= 0, \\ a N'_\phi + a N'_{x\phi} - M'_\phi - M'_{x\phi} + p_\phi a^2 &= 0, \\ M''_\phi + M''_{x\phi} + M''_{\phi x} + M''_x + a N_\phi - p_r a^2 &= 0, \\ a N_{x\phi} - a N_{\phi x} + M_{\phi x} &= 0. \end{aligned} \quad (11a-d)$$

Ecuaciones de elasticidad

... Para un punto $A(x, \phi, z)$ del cascarón,

habíamos definido sus desplazamientos en el sentido longitudinal, circunferencial y radial, como u_x , v_x y w_x , respectivamente. Estos desplazamientos son positivos si siguen las direcciones de incremento de los ejes, en los que z se orienta hacia afuera desde la superficie media.

Primeramente se establecerán las relaciones entre estos desplazamientos y los valores correspondientes u , v , w , para el punto A_0 de la superficie media con las mismas coordenadas x, ϕ . Para esto se utilizarán las siguientes hipótesis:

1) Las deformaciones debidas a σ_x y σ_ϕ son despreciables. Esto es, puntos ubicados sobre una normal a la superficie media antes de la deformación permanecen en una normal después de la deformación.

2) La distancia z del punto A a la superficie media se mantiene constante después de la deformación, ya que el esfuerzo σ_z es despreciable comparado con σ_x y σ_ϕ .

3) Todos los desplazamientos son pequeños, despreciables en comparación con los radios de curvatura de la superficie media, y las primeras derivadas son despreciables comparadas con respecto a la unidad.

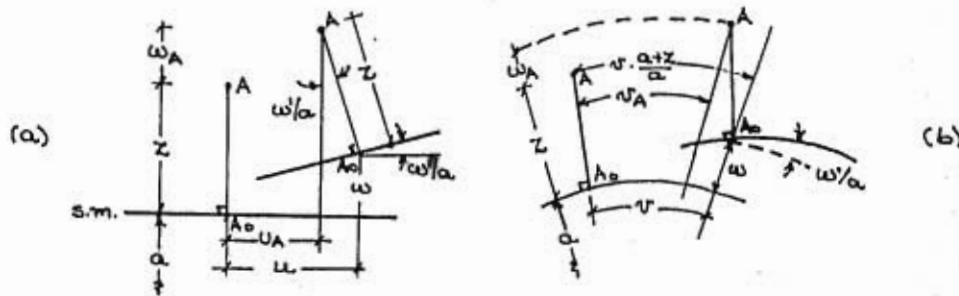


fig. 7

Desplazamientos de A_0 y A .

En la fig. 7a se muestra un corte longitudinal con dos posiciones de la superficie media giradas w/a . De la figura es obvio que

$$u_A = u - z \frac{w'}{a} \quad (12a)$$

En la fig. 7b se presenta un corte transversal con dos posiciones de la superficie media, giradas esta vez w/a . De ella se obtiene que

$$v_A = \left(1 + \frac{z}{a}\right)v - z \frac{w'}{a} \quad (12b)$$

La diferencia entre w_A y w es despreciable ya que de acuerdo con la 3ª hipótesis el coseno de los ángulos w/a

y w/a es despreciable con respecto a la unidad. Luego:

$$\omega_A = w. \quad (12c)$$

Para calcular las deformaciones unitarias se utilizarán las relaciones (4a-c) que nos definirán ϵ_{xA} , $\epsilon_{\phi A}$ y $\gamma_{x\phi A}$. Estas pueden expresarse en función de las deformaciones de A_0 utilizando las relaciones 12a-c.

$$\epsilon_{xA} = \frac{\partial u_A}{\partial x} = \frac{u'}{a} - z \frac{w''}{a^2};$$

$$\epsilon_{\phi A} = \frac{1}{a+z} \left(\frac{\partial v_A}{\partial \phi} + \omega_A \right) = \frac{v'}{a} - \frac{z}{a} \frac{w'}{a+z} + \frac{w}{a+z} \quad (13a-c)$$

$$\gamma_{x\phi A} = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{1}{a+z} \frac{\partial u_A}{\partial \phi} = \frac{u}{a+z} + \frac{a+z}{a^2} v' - \frac{w'}{a} \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right)$$

Las deformaciones unitarias se relacionan con los esfuerzos en A por medio de la ley de Hooke. Despreciando σ_{zA} de acuerdo con la segunda hipótesis, se tiene:

$$\sigma_{xA} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xA} + \nu \epsilon_{\phi A}),$$

$$\sigma_{\phi A} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\phi A} + \nu \epsilon_{xA}), \quad (14a-c)$$

$$\tau_{x\phi A} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\phi A}.$$

Finalmente, aplicando las ecs. (1) a este caso podemos obtener las relaciones entre las fuerzas N y los momentos M con los esfuerzos. Tomando $n_x = \infty$, $n_y = a$ y el subíndice "y" por " ϕ ", obtenemos:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xA} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, & N_{\phi} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\phi A} dz, \\ N_{x\phi} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\phi A} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, & N_{\phi x} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\phi x A} dz, \\ M_x &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xA} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz, & M_{\phi} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\phi A} z dz, \\ M_{x\phi} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\phi A} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz, & M_{\phi x} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\phi x A} z dz. \end{aligned} \quad (15a-b)$$

Podemos utilizar las ecs. (13) y (14) en las (15) a fin de efectuar la integración en z . Así para N_x :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_{\phi}) \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \\ &= \frac{Et}{a(1-\nu^2)} (u' + \nu v' + \nu w') - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)a^3} w'' \end{aligned}$$

Las expresiones $D = \frac{Et}{(1-\nu^2)}$ y $k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)a^3}$ son consideradas representativas de la rigidez extensiva y flexo-

nal, respectivamente. Así intervienen al integrar las demás relaciones, con la salvedad de que en más de un caso habrá que expandir en serie de potencias (con eliminación de términos superiores), las funciones logarítmicas que aparezcan. Se llega al siguiente juego de ecuaciones de **elasticidad**, para el cascarón circular cilíndrico:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{D}{\rho} (u' + \nu v' + \nu w) - \frac{K}{\rho^3} w'' \\
 N_\phi &= \frac{D}{\rho} (v'' + w + \nu u') + \frac{K}{\rho^3} (w + w'') \\
 N_{x\phi} &= \frac{D}{\rho} \frac{(1-\nu)}{2} (u' + v') + \frac{K}{\rho^3} \frac{(1-\nu)}{2} (v' - w') \\
 N_{\phi x} &= \frac{D}{\rho} \frac{(1-\nu)}{2} (u' + v') + \frac{K}{\rho^3} \frac{(1-\nu)}{2} (u' + w'') \\
 M_x &= \frac{K}{\rho^2} (w'' + \nu w'' - u' - \nu v') \\
 M_\phi &= \frac{K}{\rho^2} (w + w'' + \nu w'') \\
 M_{x\phi} &= \frac{K}{\rho^2} (1-\nu) (w' - v') \\
 M_{\phi x} &= \frac{K}{\rho^2} (1-\nu) (w'' + \frac{1}{2} u' - \frac{1}{2} v').
 \end{aligned}
 \tag{16a-h}$$

Ecuaciones complementarias. - Observando este último

juego de ecuaciones de **elasticidad**, podemos comprobar que haciendo $K=0$ obtenemos justamente las relaciones de membrana definidas por (5a-c). Por lo tanto, para obtener las ecuaciones complementarias de **elasticidad**, eliminaremos dichos términos haciendo $D=0$. Esto nos da:

$$\begin{aligned}
 N_x &= - \frac{K}{\rho^3} w'' & M_x &= \frac{K}{\rho^2} (w'' + \nu w'' - u' - \nu v') \\
 N_\phi &= \frac{K}{\rho^3} (w + w'') & M_\phi &= \frac{K}{\rho^2} (w + w'' + \nu w'') \\
 N_{x\phi} &= \frac{K}{\rho^3} \frac{(1-\nu)}{2} (v' - w') & M_{x\phi} &= \frac{K}{\rho^2} (1-\nu) (w' - v') \\
 N_{\phi x} &= \frac{K}{\rho^3} \frac{(1-\nu)}{2} (u' + w'') & M_{\phi x} &= \frac{K}{\rho^2} (1-\nu) (w'' + \frac{1}{2} u' - \frac{1}{2} v').
 \end{aligned}
 \tag{17a-h}$$

Si se han de entender estos efectos como simple

mentarios a los de la solución de membrana, aceptaremos que esta ha absorbido cargas $(p_x)_1, (p_\phi)_1, (p_n)_1$, y así de (11a-d) podemos obtener las ecuaciones complementarias de equilibrio:

$$\begin{aligned} N'_x + N'_{\phi x} + (p_x)_2 &= 0 \\ a N'_\phi + a N'_{x\phi} - M'_\phi - M'_{x\phi} + a^2 (p_\phi)_2 &= 0 \\ M'_x + M'_{x\phi} + M'_{\phi x} + M'_\phi + a N_\phi - a^2 (p_n)_2 &= 0 \\ a N_{x\phi} - a N_{\phi x} + M_{\phi x} &= 0 \end{aligned} \quad (18a-d)$$

La ec. (18d), se convierte en una identidad al aplicar las ecs. (17). Tenemos entonces once ecuaciones para once incógnitas. Al sustituir los valores dados por las ecs. (17 a, b) en las relaciones (18a-d), podremos obtener las ecuaciones diferenciales complementarias de desplazamientos de la superficie media. Así, en (18a):

$$\frac{1-\nu}{2} (u'' + w''') - w''' + \frac{a^3}{K} (p_x)_2 = 0$$

$$\text{o bien } u'' = \frac{2}{1-\nu} w''' - w'' - \frac{2}{1-\nu} \frac{a^3}{K} (p_x)_2 \quad (19a)$$

$$\text{En (18b): } -(3-\nu) w''' + 3(1-\nu) v'' + \frac{2a^4}{K} (p_\phi)_2 = 0$$

$$v'' = \frac{3-\nu}{3(1-\nu)} w''' - \frac{2}{3} \frac{a^4}{(1-\nu)K} (p_\phi)_2 \quad (19b)$$

$$\text{Y en (18c): } \frac{1-\nu}{2} u'' - u'' - \frac{3-\nu}{2} v'' + w'' + 2w''' + w'' + 2w'' + w - \frac{a^4}{K} (p_n)_2 = 0$$

En esta última expresión podemos eliminar u y v mediante derivaciones convenientes de las expresiones anteriores, y obtener:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{1-\nu} w'' + w'' + 3w'' - \frac{2\nu^2}{3(1-\nu)} w'' + 2w'' + w'' - \frac{a^3}{K} (p_x)'' + \\ + \frac{2}{1-\nu} \frac{a^3}{K} (p_x)'' - \frac{a^4}{K} (p_n)'' + \frac{a^4}{3K} \frac{(3-\nu)}{(1-\nu)} (p_n)'' = 0 \end{aligned} \quad (19c)$$

Solución por diferencias finitas. - Las ecuaciones complementarias de deformación serán resueltas por diferencias finitas, aceptando nuevamente la convención de Salvadori⁽²⁾ (fig. 8).

Las expresiones que utilizaremos serán:

$$k^6 \frac{\partial^6 w}{\partial \phi^6} = w_{\phi\phi\phi\phi\phi\phi} - 6w_{\phi\phi\phi\phi\phi} + 15w_{\phi\phi\phi\phi} - 20w_{\phi\phi\phi} + 15w_{\phi\phi} - 6w_{\phi} + w$$

$$k^6 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = w_{aaaa} - 6w_{aaa} + 15w_{aa} - 20w_a + 15w - 6w_{bb} + w_{bbb}$$

$$k^4 k^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} = w_{aaxx} - 4w_{axx} + 6w_{xx} - 4w_{bx} + w_{bbx} -$$

$$-2w_{aa} + 8w_a - 12w + 8w_b - 2w_{bb} +$$

$$+ w_{aax} - 4w_{ax} + 6w_x - 4w_{bx} + w_{bbx}$$

$$k^4 k^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \phi^4} = w_{ax\phi\phi} - 4w_{ax\phi} + 6w_{a\phi} - 4w_{ax} + w_{ax\phi\phi} -$$

$$-2w_{xx} + 8w_x - 12w + 8w_\phi - 2w_{\phi\phi} +$$

$$+ w_{bxx} - 4w_{bx} + 6w_b - 4w_{b\phi} + w_{b\phi\phi}$$

$$\begin{aligned} h^4 \partial^4 w / \partial \phi^4 &= \omega_{nn} - 4\omega_n + 6\omega_l - 4\omega_e + \omega_{ee} \\ h^2 \partial^2 w / \partial \phi^2 &= \omega_n - 2\omega_l + \omega_e \\ k^2 \partial^2 v / \partial x^2 &= v_a - 2v_l + v_b \\ 2hk^2 \partial^2 w / \partial x^2 \partial \phi &= \omega_{an} + \omega_{bn} - \omega_{al} - \omega_{bl} + 2(\omega_e - \omega_n) \\ h^2 \partial^2 u / \partial \phi^2 &= u_n - 2u_l + u_e \\ 2k^3 \partial^3 w / \partial x^3 &= \omega_{aa} - 2\omega_a + 2\omega_b - \omega_{bb} \\ 2h^2 k \partial^3 w / \partial x \partial \phi^2 &= \omega_{an} + \omega_{al} - \omega_{bn} - \omega_{be} + 2(\omega_b - \omega_a) \end{aligned}$$

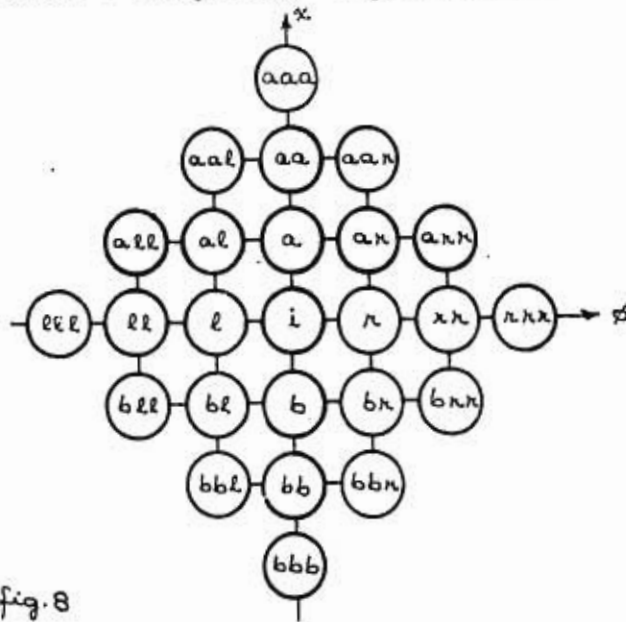


fig. 8

Para aplicarlas a la ec. (19c), esta penúltima expresada en la forma:

$$\begin{aligned} & -\alpha \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial \phi^6} + 3\alpha^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \phi^2} + \beta \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \phi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\alpha^4}{k} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \phi^2} + \\ & + \frac{2}{1-\nu} \frac{\alpha^6}{k} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x^3} - \frac{\alpha^4}{k} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \phi^2} + \frac{\alpha^4}{3k} \frac{(3-\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial^3 p_n}{\partial \phi^3} = 0 \end{aligned}$$

en donde: $\alpha = 2a^2/(1-\nu)$ $\beta = -2a^2 \nu^2 / 3(1-\nu)$ (20-21)

Efectuada la sustitución, y multiplicando por $h^6 k^6$, obtenemos una ecuación de diferencias que queda expresada por el operador de la fig. 9; donde:

$$\begin{aligned} C_i &= 20k^6 - 20\alpha h^6 + 36\alpha^4 h^4 k^2 + 12\beta h^2 k^4 - 12h^2 k^6 + 2h^4 k^6 \\ C_{ell} &= C_{enn} = k^6 \\ C_{all} &= C_{bll} = C_{ann} = C_{bnn} = \beta h^2 k^4 \\ C_{el} &= C_{en} = -6k^6 - 2\beta h^2 k^4 + 2k^6 h^2 \\ C_{aal} &= C_{bbl} = C_{aan} = C_{bbn} = 3\alpha^4 h^4 k^2 \\ C_{al} &= C_{bl} = C_{bn} = C_{an} = -12\alpha^4 h^4 k^2 - 4\beta h^2 k^4 \\ C_l &= C_n = 15k^6 + 18\alpha^4 h^4 k^2 + 8\beta h^2 k^4 - 8h^2 k^6 + h^4 k^6 \\ C_{aaa} &= C_{bbb} = -\alpha h^6 \\ C_{aa} &= C_{bb} = 6\alpha h^6 - 6\alpha^4 h^4 k^2 \\ C_a &= C_b = -15\alpha h^6 + 24\alpha^4 h^4 k^2 + 6\beta h^2 k^4 \end{aligned}$$

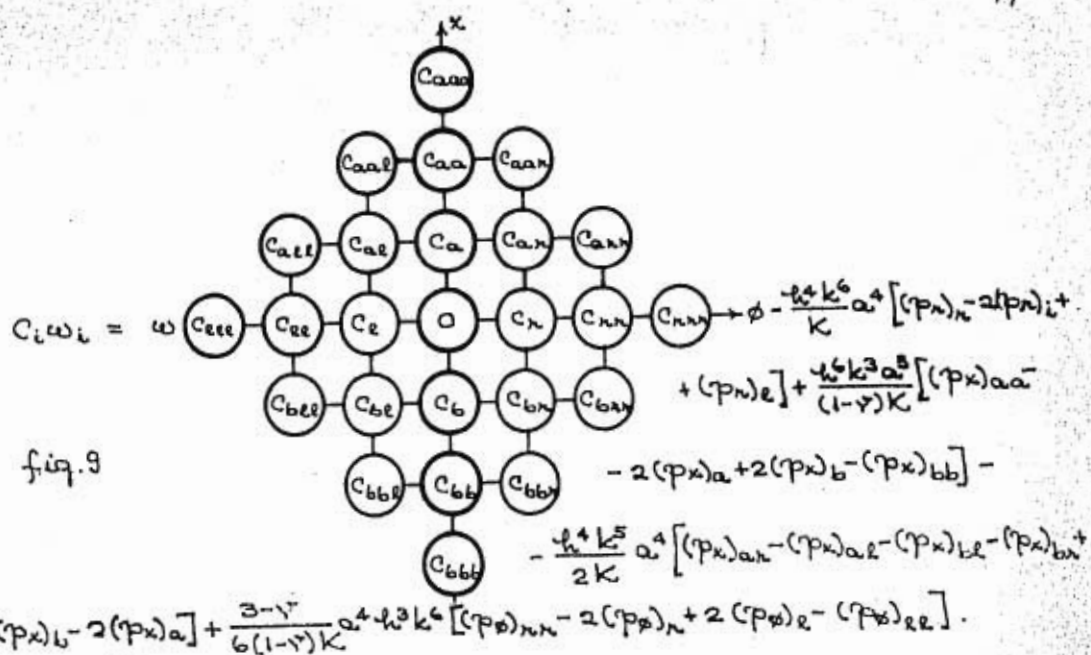


fig. 9

Para la ec. (19b), empleamos $n = \frac{3-\nu}{3(1-\nu)}$ (22)

lo que nos da $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = n \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{2}{3} \frac{a^2}{(1-\nu)K} (p_x)_2$

La ecuación de diferencias para v queda así:

$v_i = \frac{1}{2} (v_a + v_b) - \frac{n}{4h} [(w_{an} + w_{bn} - w_{ae} - w_{be}) + 2(w_e - w_n)] + \frac{a^2 k^2}{3K(1-\nu)} (p_x)_2$ (23)

cuya forma operacional queda expresada en la fig. 10.

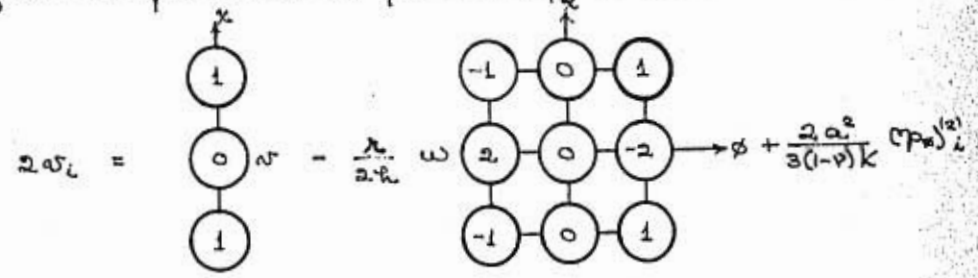


fig. 10

Finalmente, en la ec. (19a)

$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{2a^3}{(1-\nu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} - \frac{2}{(1-\nu)K} a^3 (p_x)_2 = q a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} - \frac{q a}{K} (p_x)_2$

donde $q = \frac{2a^3}{(1-\nu)}$ (24)

Aplicando las expresiones para diferencias finitas obtenemos:

$u_i = \frac{1}{2} (u_n + u_e) - \frac{a^2 q}{4k^3} (w_{aa} - 2w_a + 2w_b - w_{bb}) + \frac{a}{4k} [(w_{an} + w_{ae} - w_{bn} - w_{be}) + 2(w_b - w_a)] + \frac{qa^2 k^2}{2k} (p_x)_2$ (25)

El operador correspondiente a la ec. (25) está dado en la fig. 11.

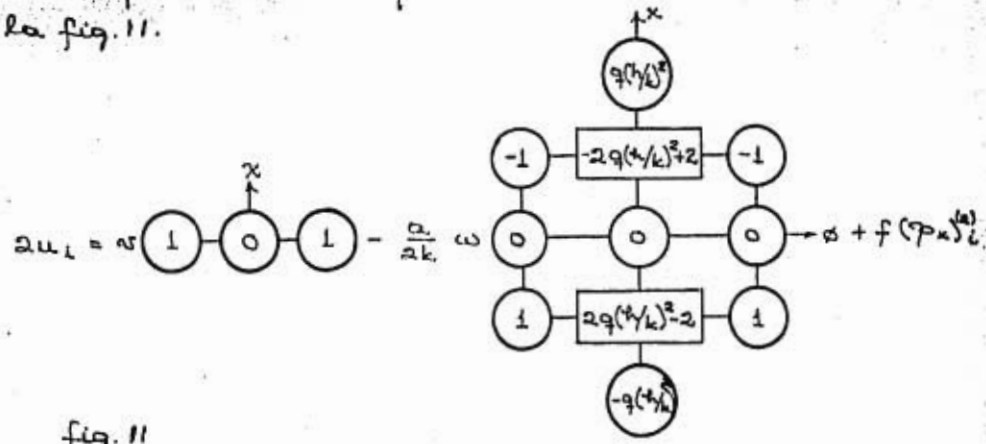


fig. 11

en donde $f(p_n)^2 = \frac{q t^2 a}{k} (p_n)^2$

Condiciones de frontera. - Tanto el "cascarón complementario" como el "cascarón de membrana" deben satisfacer las condiciones naturales de frontera.

Para el caso de apoyos elásticos los elementos mecánicos redundantes se pueden calcular por igualación de desplazamientos y giros, teniendo en cuenta la rigidez flexional, torsional y extensional tanto del cascarón como del elemento de borde.

Casos particulares de condiciones de frontera se ofrecen en el ejemplo de aplicación.

Solución Complementaria aproximada

Si limitamos la solución a cascarones delgados en los que el espesor t es pequeño comparado con sus demás dimensiones, podemos aceptar que z (menor que $t/2$) es numéricamente despreciable comparado con el radio a . Con esta hipótesis podemos revisar las ecuaciones anteriores a fin de hacer simplificaciones que no afecten significativamente los valores buscados.

Así, en las relaciones cinemáticas (13) despreciamos z en el término $(a+z)$, y en las ecs. (16) eliminamos el término z/a . Haciendo esto se obtiene las ecuaciones de elasticidad más simples:

$$\begin{aligned} N_x &= D/a (u' + \nu v' + \nu w) & M_x &= K/a^2 (w'' + \nu w''') \\ N_\phi &= D/a (v' + w + \nu u') & M_\phi &= K/a^2 (w'' + \nu w''') \\ N_{\phi x} &= N_{x\phi} = D(1-\nu)/2a (u' + v') & M_{\phi x} &= M_{x\phi} = K(1-\nu)/a^2 w' \end{aligned} \quad (26a-f)$$

Las ecuaciones complementarias de compatibilidad serán por lo tanto las tres últimas (26d-f); y la única ecuación complementaria de equilibrio, se obtendrá de (18):

$$M_x'' + M_x'' + M_\phi'' + M_x'' - a^2 (p_n)_z = 0 \quad (27)$$

Utilizando las ecs. (26) en (27), podemos escribir nuestra ecuación complementaria de desplazamiento:

$$\begin{aligned} w^{IV} + 2w'''' + w'' - \frac{a^4}{K} (p_n)_z &= 0, \text{ o bien} \\ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{a^4}{K} (p_n)_z &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Por aplicación de diferencias finitas llegamos a

$$\begin{aligned} (6m^4 + 8m^2 + 6) w_i &= -m^4 (w_{aa} + w_{bb}) - (w_{nn} + w_{ee}) - \\ &- 2m^2 (w_{an} + w_{ae} + w_{bn} + w_{be}) + \\ &+ 4(m^2 + 1) (w_n + w_e) + \\ &+ 4m^2 (m^2 + 1) (w_a + w_b) + \\ &+ \frac{a^4 k^4}{K} (p_n)_z \end{aligned} \quad (29)$$

en donde $m = a h / k$

La ec. (29) queda expresada por el operador de la fig. 12.

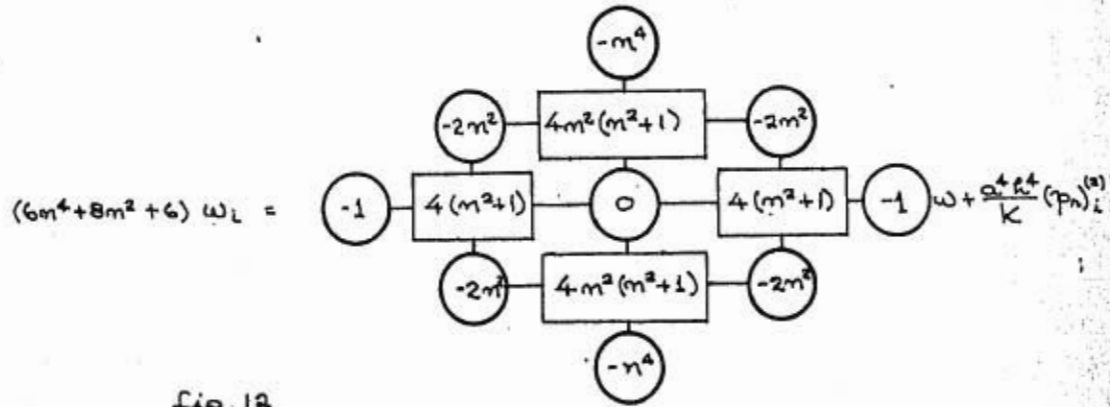


fig. 12

Este desarrollo no permite relaciones más simples para los valores de u y v del "casearón complementario".

Solución Complementaria considerando efectos de cortante transversal

En el planteamiento general de la solución complementaria, que aceptado que el efecto de los cortantes Q_x y Q_y era despreciable en la deformación. En forma aproximada, tal efecto puede tomarse en cuenta modificando la primera hipótesis (pag 12) como sigue:

- Los puntos ubicados sobre una normal a la superficie media antes de la deformación, después de la deformación se mantendrán sobre una recta que forma los ángulos θ y α con la normal a la superficie media deformada, según los ejes x y ϕ , respectivamente.

Esta hipótesis entraña las aproximaciones que se señalan en las figs. 13 y 14.

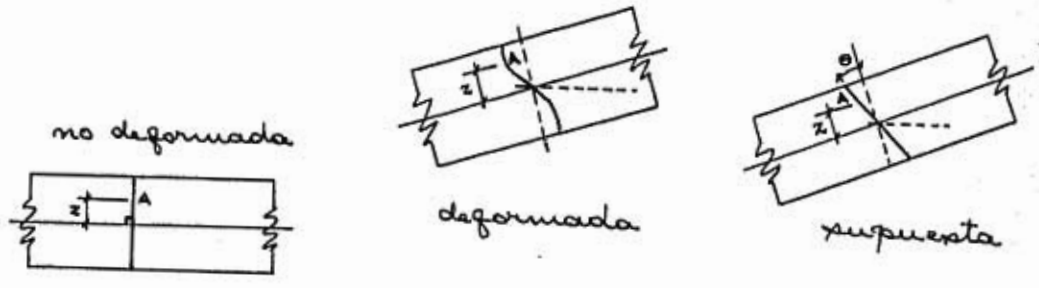


fig. 13

De la fig. 13 se deduce que:

$$w_A = w - z [1 - \cos(w/a + \theta)] \approx w$$

$$u_A = u - z \operatorname{sen}(w/a + \theta) \approx u - z(w/a + \theta)$$

Análogamente, de la fig. 14 se obtiene:

$$w_A \approx w$$

$$v_A = (1 + z/a) v - z(w/a + \alpha)$$

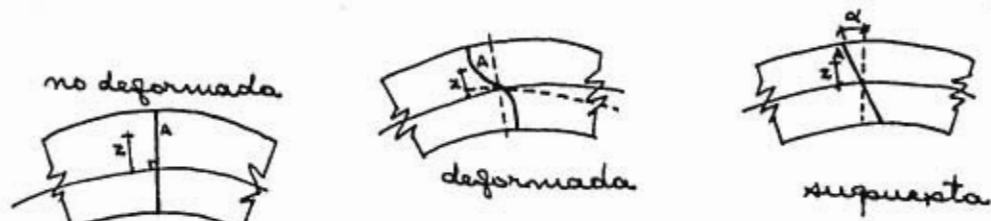


fig. 14

Las relaciones entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos son entonces:

$$\epsilon_{xA} = \frac{\partial u_A}{\partial x} = \epsilon_{xA}^{**} - \frac{z}{a} \theta'$$

$$\epsilon_{\phi A} = \frac{1}{a+z} \left(\frac{\partial v_A}{\partial \phi} + w_A \right) = \epsilon_{\phi A}^{**} - \frac{z \alpha'}{a+z}$$

$$\gamma_{x\phi A} = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{1}{a+z} \frac{\partial u_A}{\partial \phi} = \gamma_{x\phi A}^{**} - \frac{z}{a} \alpha' - \frac{z}{a+z} \theta'$$

$$\gamma_{xzA} = \frac{\partial w_A}{\partial z} + \frac{\partial u_A}{\partial x} = -\theta$$

$$\gamma_{\phi zA} = \frac{1}{a+z} \frac{\partial w_A}{\partial \phi} + \frac{\partial v_A}{\partial z} - \frac{v_A}{a+z} = -\frac{a}{a+z} \alpha$$

La ley de Hooke conduce a los siguientes resulta-

dos:

$$\sigma_{xA} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xA} + \nu \epsilon_{\phi A}) = \sigma_{xA}^{**} - \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\theta'}{a} + \nu \frac{\alpha'}{a+z} \right)$$

$$\sigma_{\phi A} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\phi A} + \nu \epsilon_{xA}) = \sigma_{\phi A}^{**} - \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\alpha'}{a+z} + \nu \frac{\theta'}{a} \right)$$

$$\tau_{x\phi A} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\phi A} = \tau_{x\phi A}^{**} - \frac{E}{2(1+\nu)} z \left(\frac{\alpha'}{a} + \frac{\theta'}{a+z} \right)$$

$$\tau_{xzA} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xzA} = -\frac{E\theta}{2(1+\nu)}$$

$$\tau_{\phi zA} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\phi zA} = -\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{a\alpha}{a+z}$$

En las ecuaciones anteriores, el doble asterisco se refiere a los efectos ajenos al cortante.

Las relaciones complementarias elásticas tienen las dos formas siguientes, según se tome en cuenta o se desprecie z/a respecto a la unidad:

$$N_x = -\frac{K}{a^3} (w'' + a\theta') \approx 0 \quad N_{x\phi} = \frac{K}{a^3} \frac{(1-\nu)}{2} (v' - w'' - a\alpha') \approx 0$$

$$N_{\phi} = \frac{K}{a^3} (w + w'' + a\alpha') \approx 0 \quad N_{\phi x} = \frac{K}{a^3} \frac{(1-\nu)}{2} (w + w'' + a\theta') \approx 0 \quad (30a-d)$$

$$M_x = \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w'' - w' - \nu v' + a\theta' + \nu a\alpha') \approx \frac{K}{a^2} (w'' + \nu w'' + a\theta' + \nu a\alpha')$$

$$M_{\phi} = \frac{K}{a^2} (\omega + \omega'' + \nu \omega''' + a \theta' + \nu a \alpha') \approx \frac{K}{a^2} (\omega'' + \nu \omega''' + a \alpha' + \nu a \theta')$$

$$M_{\kappa \phi} = \frac{K}{a^2} (1-\nu) (\omega' - \nu' + \frac{1}{2} a \theta' + \frac{1}{2} a \alpha') \approx \frac{K}{a^2} (1-\nu) (\omega'' + \frac{1}{2} a \theta' + \frac{1}{2} a \alpha') \quad (30f-j)$$

$$M_{\theta \kappa} = \frac{K}{a^2} (1-\nu) (\omega'' + \frac{1}{2} \omega' - \frac{1}{2} \nu' + \frac{1}{2} a \alpha' + \frac{1}{2} a \theta') \approx \frac{K}{a^2} (1-\nu) (\omega'' + \frac{1}{2} a \theta' + \frac{1}{2} a \alpha')$$

$$Q_{\kappa} \approx \frac{D}{2} (1-\nu) \theta \quad Q_{\theta} = \frac{D}{2} (1-\nu) \alpha + \frac{K}{a^2} \frac{(1-\nu)}{2} \alpha \approx \frac{D}{2} (1-\nu) \alpha$$

Ecuaciones complementarias de desplazamiento.

Haremos uso de las ecs. (10) en las que será notado que (10f) es equivalente a tomar $\tau_{\phi \kappa} = \tau_{\kappa \phi}$. Si u, v, w, θ y α son consideradas como incógnitas, utilizando (30) en las ecs. (10) (o sus equivalentes) tendremos cinco ecuaciones para su solución.

Al reemplazar (30) en (10e) se tiene:

$$\frac{1}{2} (1+\nu) a \alpha'' = \frac{D}{K} \frac{a^2}{2} (1-\nu) \theta - a \theta'' - \frac{1}{2} (1-\nu) a \theta''' - \omega''' - \omega'' \quad (31)$$

En (10d):

$$\frac{1}{2} (1+\nu) a \theta'' = \frac{D}{K} \frac{(1-\nu)}{2} a^2 \alpha - a \alpha'' - \frac{a}{2} (1-\nu) \alpha''' - \omega''' - \omega'' \quad (32)$$

Una primera aproximación para (31) y (32) puede ser obtenida al tomar:

$$\frac{1}{2} (1+\nu) a \alpha'' = -\omega''' - \omega'' \approx \frac{1}{2} (1+\nu) a \alpha' = -\omega'' - \omega' \quad (31')$$

$$\frac{1}{2} (1+\nu) a \theta'' = -\omega''' - \omega'' \approx \frac{1}{2} (1+\nu) a \theta' = -\omega'' - \omega' \quad (32')$$

En (10a):

$$u' = \frac{a}{1-\nu} \omega''' - \omega'' + \frac{2a}{1-\nu} \theta'' - a \theta''' - \frac{2a^2}{K(1-\nu)} (\rho_{\kappa})_2 \quad (33)$$

En (10b):

$$v'' = \frac{3-\nu}{3(1-\nu)} \omega''' - \frac{2}{3} a \alpha'' + \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} a \theta'' - \frac{2}{3} \frac{a^2}{K(1-\nu)} (\rho_{\theta})_2 \quad (34)$$

En (27):

$$\omega^{IV} + 2\omega''' + \omega'' + a(\alpha''' + \alpha'' + \theta''' + \theta'') - \frac{a^4}{K} (\rho_{\kappa})_2 = 0 \quad (35)$$

Capítulo III

Aplicación

El procedimiento de análisis presentado se aplicará al caso de un cascarón cilíndrico de eje recto, con las dimensiones mostradas la fig. 15.

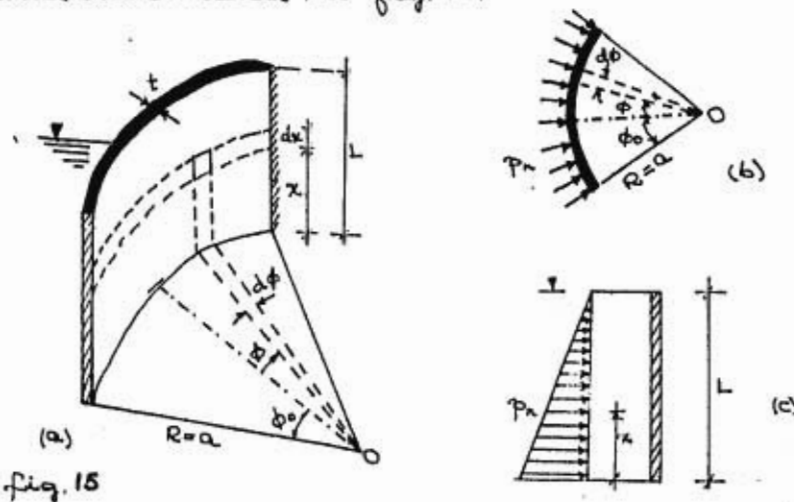


fig. 15

Las características del cascarón se resumen a continuación:

- a) geométricas:
 - espesor constante t
 - longitud L
 - radio de la superficie media $R=a$
 - ángulos máximos: $\pm \phi_0$
- b) físicas:
 - módulo de elasticidad: E
 - relación de Poisson: ν
- c) condiciones de frontera:
 - simétricamente perfecto en $x=0$ y $\phi = \pm \phi_0$
 - borde libre en el extremo $x=L$
- d) condición de carga:
 - presión hidrostática debida a un líquido de peso específico γ . ($p_x = p_0 + \gamma x$)

Para la solución de membrana se tiene, de (7), (8) y (9):

$$(u_{aa} - 2u_a + 2u_b - u_{bb}) = \frac{2k^3}{Et} \left\{ \frac{1}{a^2 k^2} [(\tau_N)_N - 2(\tau_N)_L + (\tau_N)_L] - \frac{\nu a}{k^2} [(\tau_N)_a - 2(\tau_N)_L + (\tau_N)_b] \right\} \quad (36a-c)$$

$$(\nu_a - 2\nu_L + \nu_b) + \frac{k}{4a^2 h} (u_{aN} - u_{bN} - u_{aL} + u_{bL}) + \frac{k^2(1+\nu)}{Et h} [(\tau_N)_N - (\tau_N)_L] = 0$$

$$\omega_L + \frac{1}{2h} (\nu_N - \nu_L) + \frac{a}{2k} (u_a - u_b) = \frac{a^2}{Et} (1-\nu) (\tau_N)_L$$

* Condiciones de frontera. - Debido al empotramiento existen restricciones geométricas en $x=0$ y en $\phi = \pm\phi_0$. En el extremo libre $x=L$ existen condiciones de nulidad de elementos mecánicos.

a) Las restricciones geométricas imponen las siguientes condiciones:

$$(u)_{x=0} = (u)_{\pm\phi_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right)_{\pm\phi_0} = 0$$

$$(\nu)_{\phi=0} = (\nu)_{\pm\phi_0} = (\nu)_{x=0} = 0 \quad (37a-c)$$

$$(\omega)_{x=0} = (\omega)_{\pm\phi_0} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right)_{\pm\phi_0} = 0.$$

b) Los elementos mecánicos en el borde $x=L$ deberán ser nulos.

$$\text{De } M_x = 0 \quad \omega'' + \nu \omega'' - u' - \nu v' = 0 \quad (38a)'$$

$$\text{De } N_x = 0 \quad u' + \nu v' + \nu \omega - \frac{t^2}{12a^2} \omega'' = 0 \quad (38b)$$

Para los otros elementos mecánicos se adopta la simplificación estática que da Flugge⁽¹⁾:

$$T_x = N_x \phi - \frac{M_x \phi}{a} = 0$$

$$\text{de donde: } (u' + v') + \frac{t^2}{4a^2} (v' - \omega'') = 0 \quad ; \quad (38c)$$

$$\text{además: } S_x = Q_x + \frac{M_x \phi}{a} = 0$$

$$\text{y con (10e): } M'_x + M'_{\phi x} + M'_{x\phi} = 0,$$

que con las soluciones aproximadas (26a-f):

$$\omega''' + (2-\nu) \omega''' = 0. \quad (38d)$$

Si se desea tomar en cuenta los efectos de cortante, podrán utilizarse las relaciones (30).

Obsérvese además que de (38a)' y (38b) se obtiene:

$$\left(1 + \frac{t^2}{12a^2}\right) \omega'' + \nu(\omega'' - \omega) = 0. \quad (38a)$$

Método de aproximaciones sucesivas. - El método que

servirá de base al desarrollo numérico del ejemplo siguiente, puede quedar esquematizado como sigue:

a) Distribúyase la carga total p_n tomando $(\dot{p}_n)_1$ para el cascarón de membrana y $(\dot{p}_n)_2$ para el cascarón complementario, de tal manera que se cumpla $(\dot{p}_n)_1 + (\dot{p}_n)_2 = p_n$ en todos los puntos del cascarón.

b) Con $(\dot{p}_n)_2$, las condiciones de frontera (34c) y (38a,d) y el operador de la fig. 9-o el aproximado de la fig. 12-, que corresponden a la solución complementaria, calcúlese el desplazamiento radial \bar{u} .

c) Con (36a) y (36b) que corresponden a la solución de membrana, calcúlese \bar{u} y \bar{v} teniendo en cuenta los valores $(\dot{p}_n)_1$ y las condiciones de frontera: (37a) y (38b) para \bar{u} , y (37b) con (38c) para \bar{v} en las que se utilizará \bar{u} .

d) A partir de (36c), que corresponde al cascarón de membrana, obténgase $(\dot{p}_n)_1$ utilizando los valores \bar{u} , \bar{v} y \bar{u} obtenidos en b) y c). Determinese $(\dot{p}_n)_2$ a partir de la diferencia: $(\dot{p}_n)_2 \equiv p_n - (\dot{p}_n)_1$.

e) Repítase el proceso utilizando los valores de $(\dot{p}_n)_1$ y $(\dot{p}_n)_2$ en vez de $(\dot{p}_n)_1$ y $(\dot{p}_n)_2$ respectivamente. Se determinará así: $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{v}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$, $(\dot{p}_n)_1^{(2)}$ y $(\dot{p}_n)_2^{(2)}$.

f) Compruébese los valores de \bar{u} y \bar{v} con los operadores de las figs. 10 y 11 que corresponden a la solución complementaria.

g) Repítase el proceso hasta obtener el grado de precisión deseado.

h) Si se deseara tomar en cuenta el efecto de cortante, utilícese las relaciones (31-35).

Ejemplo

Es de interés calcular el estado de deformación de un modelo de prensa, bóveda con las siguientes características:

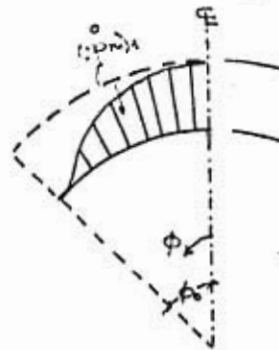
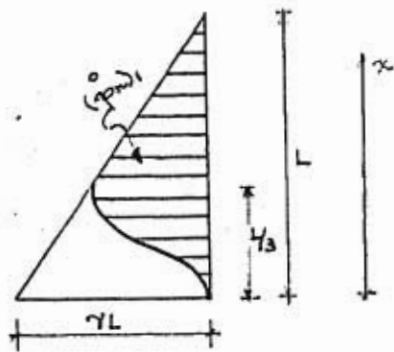
$$\begin{aligned} R = a &= 191 \text{ cm} \\ L &= 150 \text{ cm} \\ t &= 18 \text{ cm} \\ \phi_0 &= 60^\circ = \pi/3 \\ \gamma &= 1 \text{ gr/cm}^3 \\ E &= 58,800 \text{ kg/cm}^2 \\ \nu &= 0.18 \end{aligned}$$

Para la solución del problema por diferencias finitas se utilizará una red con las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} h &= \Delta\phi = 12^\circ = \pi/15 \\ k &= \Delta x = 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

De acuerdo con el método propuesto de aproximaciones sucesivas se tiene:

Para una primera aproximación se adopta la siguiente distribución de carga:



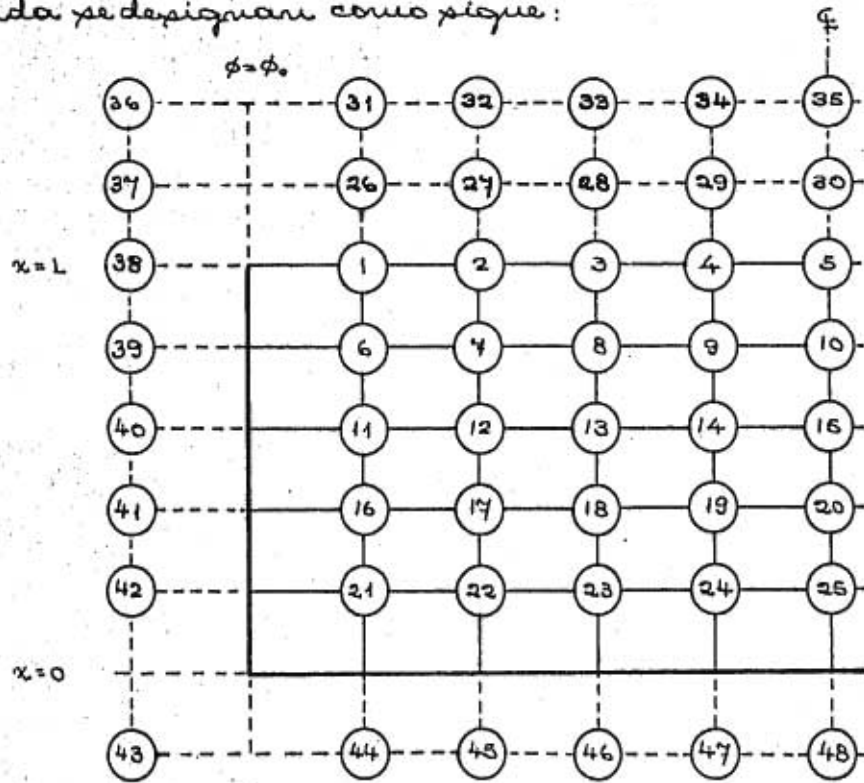
$$\begin{aligned} (p_n)_1 &= 25 (1 - \cos \pi x / 50) (1 + \cos 3\phi) \text{ gr/cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} (150 - x) (1 + \cos 3\phi) \text{ gr/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{1}{3} L \\ \frac{1}{3} L &\leq x \leq L \end{aligned}$$

$$(p_n)_2 = (150 - x) - (p_n)_1 \quad \text{gr/cm}^2$$

$$0 \leq x \leq L$$

Por simetría sólo se considera la mitad del cascarón. Los puntos de la superficie media desarrollada se designan como sigue:



Para w se usó la solución aproximada que da el operador de la fig. 12. Este que aplicado tomando como puntos pivotes del 1 al 25. Los puntos 26 a 48 corresponden a una continuación ficticia del cascarón y los valores de w en ellos se relacionan con los correspondientes en los puntos interiores a través de las condiciones de frontera. Así por ejemplo: para $(\partial w / \partial x)_{x=0}$ se tendrá: $w_{44} = w_{21}$, $w_{45} = w_{22}$, etc.

para $(\partial w / \partial x)_{\phi=\phi_0}$ se tendrá: $w_{42} = w_{21}$, $w_{41} = w_{16}$, etc.

para (38a): $(1 + \frac{t^2}{12a^2}) \frac{w_{26} - w_6}{2k/a^2} + \gamma (\frac{0 - w_2}{2k} - w_1) = 0$, etc.

para (38d): $\frac{a^2}{k^2} (w_{31} - 2w_{26} - w_{11} + 2w_6) + \frac{2-\gamma}{k^2} [(0 + w_{27} - 0 - w_7) + 2(w_6 - w_{26})]$, etc.

Esto permite plantear un sistema de 25 ecuaciones con 25 incógnitas (w , a w_{25}).

Análogamente se trabaja para u y v notándose que v es antisimétrico respecto a los ejes $x=0$, $\phi = \pm \phi_0$ y $\phi=0$; es decir, se tendrá: $v_{44} = -v_{21}$, $v_{42} = -v_{21}$, etc.

En la siguiente tabla se incluyen los valores encontrados de:

(P_n) compl. en gr/cm ²	
$u \times 10^4$ cm	$v \times 10^4$ cm
$w \times 10^3$ cm	

	$(P_n)_c$				$u \times 10^4$		$v \times 10^4$		$w \times 10^3$	
	1a. it.	2a	4a	5a	4a	5a	4a	5a	4a	5a
1	0	29.84	-23.40	-18.40	0.242	0.362	0.718	0.722	0.699	0.102
2	0	-12.08	-148.23	-146.03	0.722	0.738	1.240	1.230	0.597	0.603
3	0	-62.69	-160.00	-159.50	1.200	1.189	0.690	0.686	1.110	1.115
4	0	-61.61	-198.50	-195.00	1.621	1.600	0.321	0.319	1.300	1.302
5	0	-58.54	-198.04	-204.10	2.156	2.143	0	0	1.381	1.351
6	27.14	56.41	-8.20	-8.90	0.104	0.110	0.725	0.730	0.460	0.456
7	19.64	14.41	-17.52	-17.25	0.307	0.312	1.948	1.952	1.190	1.181
8	10.36	-20.47	-30.10	-32.20	0.870	0.860	0.683	0.692	1.760	1.751
9	2.86	-27.50	-5.80	-8.80	1.344	1.338	0.306	0.311	2.070	2.012
10	0	-21.26	-4.52	-3.70	1.580	1.500	0	0	2.085	2.098
11	54.27	93.24	20.75	17.11	0.050	0.060	0.685	0.698	0.810	0.803
12	39.28	48.47	25.50	22.73	0.149	0.151	1.883	1.876	1.730	1.725
13	20.73	11.39	20.50	21.85	0.399	0.401	0.661	0.652	2.267	2.278
14	5.73	6.24	8.63	7.20	0.617	0.615	0.283	0.286	2.500	2.483
15	0	1.10	-1.98	-2.31	1.065	1.058	0	0	2.580	2.557
16	81.40	106.27	25.36	22.92	-0.044	-0.042	0.615	0.602	0.901	0.891
17	58.91	63.45	39.40	38.50	-0.088	-0.084	1.673	1.668	1.761	1.752
18	31.09	32.28	30.78	31.85	0.237	0.230	0.507	0.512	2.148	2.154
19	8.59	26.26	24.06	24.61	0.530	0.525	0.190	0.195	2.289	2.295
20	0	27.89	28.50	28.90	0.597	0.587	0	0	2.347	2.352
21	119.37	118.86	79.40	78.35	-0.022	-0.021	0.248	0.252	0.610	0.612
22	97.34	108.03	98.30	99.50	-0.044	-0.042	0.855	0.860	1.080	1.084
23	77.16	94.20	67.55	68.50	0.118	0.115	0.240	0.247	1.208	1.210
24	60.78	94.27	82.50	82.80	0.180	0.175	0.102	0.104	1.280	1.282
25	54.55	97.68	81.00	80.70	0.298	0.290	0	0	1.316	1.313

Observaciones:



- Será notado que los desplazamientos w convergen más rápidamente que las cargas y que los otros desplazamientos. Esto es explicable puesto que los coeficientes de $(p_n)_c$ (ver fig. 12) resultan numéricamente pequeños, y que dada la magnitud de w , pequeñas variaciones de este desplazamiento radial serán notorias para u y v (figs. 10 y 11).
- La presencia de fuertes cargas negativas en el extremo libre del cascarón pueden sentirse físicamente, aceptables al adoptarse el tramo central del cascarón como una viga en voladizo: pequeñas cargas cerca del extremo empotrado inducirían fuertes desplazamientos en el borde libre; para restringirlos, serán indispensables cargas mayores de signo

contrario.

Los resultados aquí obtenidos se comparan con los reportados en la ref. 3 para el mismo problema. La comparación es hecha únicamente para el desplazamiento radial:

	Del presente trabajo	Schnobrich Newmark	Lombardi Fox
1	0.10	0.09	0.11
2	0.60	0.62	0.60
3	1.12	1.15	1.06
4	1.30	1.47	1.31
5	1.35	1.58	1.39
6	0.46	0.48	0.48
7	1.18	1.21	1.22
8	1.75	1.76	1.77
9	2.01	2.05	2.03
10	2.10	2.14	2.10
11	0.80	0.86	0.82
12	1.72	1.74	1.74
13	2.28	2.26	2.30
14	2.48	2.50	2.51
15	2.56	2.57	2.57
16	0.89	1.03	0.92
17	1.75	1.83	1.76
18	2.15	2.23	2.18
19	2.30	2.37	2.32
20	2.36	2.42	2.35
21	0.61	0.70	0.58
22	1.08	1.13	0.99
23	1.21	1.20	1.17
24	1.28	1.35	1.21
25	1.31	1.36	1.22

En la misma referencia se incluyen resultados para u y v por el método Schnobrich-Newmark. Los valores aquí encontrados son sensiblemente inferiores numéricamente. Esto justificaria en parte el que los resultados del presente trabajo se acerquen más a los de Lombardi-Fox en los que ha sido despreciado el efecto de u . Aunque estos son del mismo orden de magnitud que v y esta simplificación no es por lo tanto consecuentemente, la influencia pudiera estimarse como no significativa.

Comentarios y Conclusiones

• Para el caso aquí estudiado, el planteamiento propuesto ha resultado relativamente fácil en su exposición y desarrollo.

• Puesto que se utilizan soluciones ya estudiadas, la extensión del procedimiento es inmediata para otros tipos de cascarón.

• Será notado que indistintamente puede obligarse a los desplazamientos del cascarón de membrana a tomar los valores obtenidos en el cascarón complementario, o viceversa. Sin embargo, si el cascarón tiene un comportamiento preferentemente de flexión, se "garantizará" una convergencia rápida si se estudia primero el estado del cascarón complementario. Análogamente, si el cascarón trabaja preferentemente como membrana, será recomendable estudiar primero la solución de membrana.

• Para una primera elección de distribución de carga será útil tener en cuenta el hecho de que en general en un cascarón de membrana los desplazamientos son función directa de la intensidad de la carga en el punto.

• Puesto que el procedimiento es repetitivo, será siempre posible adaptarlo a un programa único para una computadora digital. En el ejemplo resuelto se hizo uso de esta herramienta de cálculo sólo para el desplazamiento radial pues el cálculo de σ_r y σ_θ que repetitivamente se realiza.

Referencias

1. W. Flügge. "Stresses in Shells"
Springer-Verlag, Berlin.
2. Salvadori & Baron. "Métodos numéricos
en Ingeniería"
CECSA. México.
3. A. Olivera S. "Aplicación del modelo Newmark-
Schnobrich al análisis elástico
de presas"
Tesis Profesional. UNAM. México.