



01149
0245

107

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería
División del Doctorado

FLUJOS DE FILTRACION A TRAVES DE TERRAPLENES EN REGIMEN NO PERMANENTE

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
INGENIERIA CIVIL CON ESPECIALIDAD EN HIDRAULICA

P R E S E N T A

DOMINGO PERDOMO EHLERS

México, D. F.

1965

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposa e hijos

A la memoria de mi padre

A mi madre y tía Marce

Mi agradecimiento al Dr. Enzo Levi y al
Ing. Darío De Hoyos por su valiosa ayuda
en la elaboración de esta tesis, a su vez
al maestro José L. Sánchez Bribiesca por
las atenciones tenidas con mi persona.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
División del Doctorado

Of. 286/65-73 CU

Ing. Domingo Perdomo Ehlers
P r e s e n t e

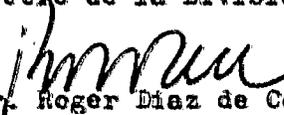
En atención a su solicitud relativa, me es grato transcribir a usted el tema, que ratificado por esta Dirección propone el señor Profesor Dr. Enzo Levi para que lo desarrolle como tesis en su examen para maestro en Ingeniería Civil (Hidráulica)

Título de la Tesis:

FLUJOS DE FILTRACION A TRAVES DE TERRAPLENES EN REGIMEN NO PERMANENTE

Al mismo tiempo hago de su conocimiento que deberán entregarse 8 copias de la tesis a la Secretaría de esta División.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
México, D.F. a 9 de julio de 1965
Jefe de la División


Dr. Roger Díaz de Cossio

INDICE

PARTE I

La física de los flujos de filtración

CAPITULO I	"Conceptos básicos y la difusión."	
1.1	Definiciones y propiedades del medio poroso .	1
1.2	Deducción de la ecuación diferencial de la difusión	3
CAPITULO II	"Flujo bi-fásico, no mezclable"	
2.1	Fluidos o fases mezclables y no-mezclables . .	7
2.2	Clasificación breve del agua contenida en el medio poroso. Estados saturados, pendular y fu- nicular	7
2.3	Presión Capilar	9
2.4	Relación experimental entre la presión capilar y el grado de saturación.	10
2.5	Conductividad relativa.	12
2.6	Flujo capilar.	15
2.8	Relación entre la ley de Darcy y la fórmula de Poiseuille para flujo laminar.	18
2.9	Porosidad y estado de equilibrio.	23
2.10	Resumen y Discusión	28
CAPITULO III	"Regímenes de flujos en la filtración"	
3.1	Comparación de la ley de Darcy con la ecuación de Navier-Stokes.	30
3.2	Fuerzas electromoleculares.	33
3.3	Clasificación del agua en un medio poroso. . .	34
3.4	Regímenes de flujo.	35
3.5	Resultados experimentales - Slepicka, Karadi y Nagy.	42
3.6	Discusión y conclusiones.	51

PARTE II

Soluciones matemáticas de la difusión

CAPITULO IV	"Soluciones numéricas de la ecuación diferencial de la difusión de Calor"	
4.1	Métodos iterativos.	55
4.2	Una mejor primera aproximación a la solución	59
4.3	Forma de integración para nuestro caso. . . .	61

4.4 Difusividad promedio en el sentido x y proble

mas. 64

INTRODUCCION

Son muchas las soluciones matemáticas que se han encontrado con el objeto de poder describir el flujo de agua a través de un medio poroso en régimen no permanente. La mayoría de estas soluciones se basan en simplificaciones dadas a las características físicas del medio poroso. Consecuentemente, se han observado divergencias serias entre los resultados experimentales y las soluciones analíticas.

Se ha tratado de explicar estas diferencias, aduciendo que en contradicción a lo generalmente supuesto, el medio poroso no tiene una distribución uniforme de la humedad y que ésto, por tanto, motiva que la conductividad no sea constante. Nos dicen, al respecto, los investigadores Vladimirescu y Lates, que la variación de la conductividad debe ser a lo largo de una vertical y de una vertical a otra; nos dicen además que el fenómeno se hace más importante en el caso de un medio poroso que tenga un ascenso capilar inicial producido por un nivel freático también inicial.

Nos llama la atención el hecho de que se suponga que la conductividad debe variar con la humedad del suelo, Irmay - nos confirma esto y nos dice que el coeficiente de conductividad no es una constante, sino una función universal del grado de saturación.

Los investigadores Hansen y Lambe, por otro lado, hablan del fenómeno de flujo capilar en arenas y comprueban que en este tipo de flujos en medios porosos se presenta un presión capilar, de valor negativo, y que además se tiene una distribución no uniforme del grado de saturación y por consiguiente de la conductividad; es decir, el fenómeno capilar se presenta - sin que hubiera existido un nivel freático. Hansen y Lambe, sin embargo, hablan exclusivamente de flujos unidireccionales; o sea que, todavía, no se visualiza por qué debe existir una variación de la saturación y de la conductividad en el sentido vertical en el caso de flujo horizontal y viceversa. Nosotros hemos considerado que esta variación en el sentido vertical se debe al hecho de que si consideramos una serie de tubos capila

res horizontales independientes los unos de los otros, cada uno de ellos estará sujeto a una carga hidráulica distinta, motivando por lo tanto un desplazamiento del frente de agua distinto en cada uno de los tubos y una distribución de la saturación y de la conductividad distinta en cada nivel; quiere decir, de acuerdo con lo anterior, que la primera hipótesis de Vladimirescu y Lates es correcta. En cuanto a la segunda hipótesis con respecto a la presencia de un nivel freático y en donde se realice un ascenso capilar, es lógico pensar que de acuerdo con lo anterior esto en sí, trae como consecuencia una saturación original no uniforme, complicándose gravemente la solución matemática.

Esta tesis toma en cuenta, precisamente, la primera condición mencionada y pretende lograr una solución analítica lo suficientemente satisfactoria. Para verificar lo anterior, hemos tomado como referencia los trabajos de Polubarinova Kochina y de Vitalie Pietraru. En cuanto a la solución matemática, hemos partido de la ecuación de difusión que se obtiene de la combinación de la ley de Darcy y de la ecuación de continuidad; se comprueba, por tanto, que se trata de un fenómeno típico de difusión. Hemos utilizado un método iterativo dado por Klute y otros y se ha hecho uso además de las computadoras digitales, que presentan en nuestro caso grandes ventajas.

Por otro lado, tiene esta tesis también como objetivo presentar trabajos recientes, tales como los de Slepicka, Karadi y Nagy, los cuales toman en cuenta la posibilidad de cambio de régimen en los flujos de filtraciones.

No pretendemos haber estudiado el tema en su totalidad, más bien apenas nos hemos asomado a dicho estudio, ya que de los varios casos de flujos de filtraciones con régimen no permanente, tales como: ascenso brusco del nivel del embalse, ascenso a distintas velocidades, descenso, etc.; solamente hemos resuelto el primer caso y con ciertas hipótesis que se podrían prestar a discusión. Se ve claramente la necesidad, por tanto, de mayores estudios analíticos y experimentales.

PARTE I

La Física de los Flujos de Filtración.-

Capítulo I

"Conceptos básicos y la difusión"

1.1 Definiciones y propiedades del medio poroso.

Se define como medio poroso, aquél cuerpo sólido que tiene huecos, ó vacíos. También se les llama intersticios y -poros. La principal característica de estos poros es de que -pueden estar interconectados o no. Para que exista un flujo de filtración es necesario que los poros sí estén interconectados.

Un medio poroso está caracterizado por una variedad de propiedades geométricas, de las más importantes está la porosidad, que se define como la relación del volumen de vacíos al volumen total analizado. Si la determinación de la porosidad se realiza en base a los poros interconectados, entonces se dice que se trata de una porosidad efectiva. Se ha visto -que durante un descenso del nivel freático no todo el volumen de agua contenida en los poros escurre, o sea, permanece una cierta cantidad de agua retenida en éstos. Este fenómeno precisamente nos indica la importancia de clasificar la porosidad. Por otro lado, se sabe que la porosidad depende de la naturaleza del suelo, de su edad geológica, de la presión a la cual está sometido el suelo, de su compactación, etc.

Otra propiedad geométrica del medio poroso es el área específica interna, que se define como la relación del área total de los granos al volumen total.

Se define como grado de saturación a la relación -- del volumen de agua contenido en los vacíos entre el volumen de esos vacíos. Un parámetro parecido es el contenido de agua, que se define como la relación del volumen de agua al volumen total. Si llamamos al grado de saturación S, al contenido de agua C y a la porosidad n, obtenemos lo siguiente:

$$S = C/n$$

(1.1.1)

Introduciremos a continuación la ley de Darcy en forma breve, aclarando que posteriormente en el capítulo III hablaremos más ampliamente de ésta. Sabemos que la ley de Darcy es producto de la experiencia, sin embargo como veremos más adelante ésta se obtiene de la ecuación de Navier-Stokes. Expresamos la ley de Darcy en forma vectorial de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\bar{v} = - K \text{ grad } \phi \quad (1.1.2)$$

en donde $\text{grad } \phi$ representa la variación de la energía con la distancia, K es el coeficiente de conductividad y \bar{v} es el vector de la velocidad de descarga. Discutamos estos dos últimos términos (K y \bar{v}); se define al coeficiente de conductividad como aquél parámetro indicativo de la facilidad o resistencia que tendría un fluido cualquiera para pasar a través de un medio poroso. Este coeficiente es representativo tanto del medio poroso como del fluido. Si realizáramos un análisis dimensional considerando la ecuación $f(K, \gamma_w, \mu, d) = 0$, en donde K , el coeficiente de conductividad, tiene unidades de velocidad, γ_w es el peso volumétrico del fluido en consideración, μ es la viscosidad dinámica y d es un diámetro medio del medio poroso, obtendríamos el siguiente resultado:

$$K = \frac{C d^2 \gamma_w}{\mu} \quad (1.1.3)$$

La ecuación 1.3 nos indica claramente como depende el coeficiente de conductividad en efecto tanto del medio poroso (Cd^2) como del fluido que esté escurriendo a través de éste. De acuerdo con lo anterior, concluimos que el verdadero coeficiente de permeabilidad, o sea aquél que solamente depende del medio poroso, es una función de Cd^2 , en donde C es un coeficiente cualquiera. Denominaremos a este coeficiente por la letra "k" minúscula. La ecuación (1.3) se puede escribir, por lo tanto, en la siguiente forma:

$$K = \frac{k \gamma_w}{\mu} \quad (1.1.4)$$

Sabemos también que el coeficiente de conductividad depende, entre otros, del grado de saturación (Capítulo II), de la porosidad¹, de procesos químicos o físicos, etc.. Existen fórmulas, tal como la de Kozeny, que nos indican la de-

pendencia de este coeficiente con respecto a la porosidad,

$$K = \beta \frac{d^2}{\mu} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad (1.1.5)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del agua, d el diámetro efectivo de las partículas, n la porosidad, β es un coeficiente que depende del medio poroso, que Kozeny consideró constante, en cambio E. A. Zamarrin propuso para β la expresión:

$$\beta = 8.4 (1.275 - 1.5n)^2 \quad (1.1.6)$$

Por último, en cuanto al coeficiente de conductividad, podemos agregar que éste varía de acuerdo con el régimen de flujo (Capítulo III).

Veamos ahora en qué consiste la velocidad de descarga: se define a ésta como la cantidad de fluido que se filtra a través de un área total unitaria del medio poroso en un tiempo unitario². En otras palabras, se trata de una velocidad promedio de las velocidades reales de filtración, las cuales tienen trayectorias sumamente complicadas (v_f). Expresemos la relación que existe entre ambas velocidades, considerando la proyección sobre un eje horizontal x , entonces

$$v_f = \frac{dx}{dt}$$

mientras que la velocidad de descarga, de acuerdo con lo anterior,

$$v = nS \frac{dx}{dt} \quad (1.1.7)$$

en donde n es la porosidad y S es el grado de saturación. Esto viene de que el flujo solamente se puede realizar a través de los poros interconectados con cierta saturación.

1.2 Deducción de la ecuación diferencial de la difusión.

Se ha hecho común la aplicación de la Ley de Darcy para el caso de medios saturados; sin embargo, en este trabajo nos interesa principalmente un medio no-saturado. Se define un medio saturado como aquél en donde los poros están totalmente llenos de agua, o sea $S = 1$. Por otro lado, el medio que nos ocupa, es un medio compuesto de dos fases o fluidos, uno es el agua y el otro es el aire. En el siguiente ca

pítulo se habla ampliamente sobre el flujo bi-fásico; sin embargo iremos adelantando algo al respecto con el objeto de poder continuar con esta deducción. Es claro que la presencia del aire en un medio poroso representa un obstáculo al paso del agua a través de ese medio, ya que sencillamente reduce el área de flujo. Esta reducción se traduce en un coeficiente de conductividad variable según el grado de saturación; a medida que el grado de saturación sea mayor, mayor será el área de flujo, o sea, con mayor facilidad pasará el agua a través de los intersticios. Concluimos que, siendo a mayor grado de saturación, mayor el coeficiente de conductividad, debe de existir una relación directa entre ambos:

$$K = f(S) \quad (1.2.1)$$

Analicemos el potencial ϕ de la ecuación (1.1.2) y veamos en qué consiste; sabemos que en un medio saturado los campos de fuerzas presentes son el de presión y el gravitacional, o sea

$$- \text{grad } \phi = - \text{grad } (\psi + z) \quad (1.2.2)$$

en donde ψ es el potencial de presiones dado por $\int dp/\rho g$ y z es el potencial gravitacional. Comparando lo anterior con la ley de Navier-Stokes, concluimos que la única fuerza que estamos despreciando es la fuerza viscosa y además estamos considerando que se trata de un flujo irrotacional (condición necesaria para que exista potencial). En un medio no saturado las superficies de contacto entre las fases agua-aire y sólidos son de una gran importancia en la determinación de la presión en el agua. Se trata, de fuerzas que actúan en estas superficies de contacto y que dan lugar precisamente a fenómenos de capilaridad.

Debido a lo anterior, en un medio no-saturado, al potencial de presión se le llama potencial capilar^{3,4}. Es lógico pensar que si este potencial capilar está en función de la presencia simultánea del agua y del aire en un medio poroso, esto constituye por naturaleza un medio no-saturado, o sea que este potencial es también función del grado de saturación. Posteriormente veremos que ambas funciones del coeficiente de conductividad y el del potencial capilar con el grado de saturación, no son funciones bien definidas, ya que influye el fenómeno de

la histéresis que viene a constituir una complicación matemática. Por ahora no tomaremos en cuenta este efecto y procederemos como si no existiera.

Comencemos por escribir la ecuación de continuidad en forma vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho nSH) = - \operatorname{div} (\rho \bar{v} H) \quad (1.2.3)$$

donde ρ es la densidad del agua, n la porosidad, S el grado de saturación, H es la altura de la curva de infiltración y \bar{v} es el mismo vector velocidad definido en la ecuación 1.1.2. Si sustituimos la ecuación (1.1.2) en la ecuación (1.2.3), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho nSH) = \operatorname{div} (\rho H K \operatorname{grad} \phi) \quad (1.2.4)$$

Recordemos que ϕ , a final de cuentas, viene siendo la suma de una carga capilar y una carga gravitacional, o sea

$$\phi = (H_c + H) \quad (1.2.5)$$

donde H_c es la carga capilar, y H es la carga gravitacional o de posición igual a la z de la ecuación (1.2.2). La carga capilar H_c actúa como si fuera una carga de succión (ver Capítulo II); consideraremos a esta carga constante, de manera que $\operatorname{grad} \phi = \operatorname{grad} H$. Desarrollemos la ecuación (1.2.4) en el sentido horizontal x ,

$$\rho n \frac{\partial}{\partial t} (SH) = \rho \frac{\partial}{\partial x} (KH \operatorname{grad} H)$$

o sea,

$$\rho n \frac{\partial}{\partial t} (SH) = \rho \frac{\partial}{\partial x} (KH \frac{\partial H}{\partial x})$$

La última consideración que haremos será la de considerar que el grado de saturación S no varía con el tiempo. Veremos en el siguiente capítulo que el grado de saturación varía con la distancia horizontal y con la altura H ; el coeficiente de conductividad también varía en igual forma ya que es función del grado de saturación. Pareciera que incurrimos en una contradicción en lo que respecta a la carga capilar, ya que si ésta también es dependiente del grado de saturación, también debería variar con la distancia horizontal y con la altura; la dependen-

cia a que nos referíamos de esta carga capilar con el grado de saturación es con respecto a la saturación original del medio poroso, o sea con respecto a las aguas muertas. Aclarado lo anterior, eliminando la densidad del agua y pasando la porosidad n y el valor de la saturación a la parte derecha, obtenemos finalmente

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{KH}{nS} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (1.2.6)$$

Si hacemos que $D = \frac{KH}{nS}$, siendo éste precisamente el coeficiente de difusividad⁵, nos queda la ecuación anterior en la siguiente forma:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(H,x) \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (1.2.7)$$

donde $D(H,x)$ es el coeficiente de difusividad dependiente de la altura y de la distancia horizontal, ya que tanto K y S lo son. Precisamente, el que no sea constante este coeficiente de difusividad, motiva la existencia de una diferencia entre las soluciones matemáticas en que se considera a D constante y los resultados obtenidos en el laboratorio⁶. La investigadora Polubarinova Kochina¹ llega a los mismos resultados de la ecuación anterior en base a dos suposiciones fundamentales: 1.- que la superficie libre es ligeramente curvada y que oscila sobre una profundidad media, quiere decir que las líneas de corriente pueden ser supuestas como horizontales; 2.- que las velocidades horizontales no varían con la altura, o sea que el gradiente hidráulico puede ser considerado igual a la pendiente de la superficie libre y que éste es invariable con la profundidad.

Bibliografía

- 1.- Polubarinova Kochina - "Theory of Ground Water Movement" Princeton University Press - (1962)
- 2.- M.E.Harr- "Groundwater and Seepage" - McGraw-Hill -(1962)
- 3.- Arnold Klute - "Some Theoretical Aspects of the Flow of Water in Unsaturated Soils" - Soil Science Soc. of America Proc. - v.16 pags 144-8 - (1952)
- 4.- Arnold Klute - "A Numerical Method for solving the flow equations for water in Unsaturated Soils" - Soil Science- v.73 pags 105-116 - (1952)
- 5.- J.Crank - "The Mathematics of Diffusion" - Oxford At The Clarendon Press - (1956)
- 6.- Vladimirescu L. y Lates M. - "Recherches Expérimentales Sur La Filtration en Régime Non-Permanent, avec application aux digues et Barrages en Terre" - Assoc. Int. Rech. Hyd.- 9th Convention, Dubrovnik 1961

Capítulo II
"Flujo bi-fásico, no-mezclable"

2.1 Flúidos o fases mezclables y no-mezclables.

Mencionábamos en el capítulo anterior, el hecho de que el principal problema que nos preocupa resolver, es el caso de la difusión de una masa líquida (agua) a través de un medio no-saturado o parcialmente saturado; en ambos casos se acepta de antemano la existencia del aire dentro de la masa porosa. El problema pues, es bi-fásico y además por propiedades del conjunto agua-aire, bajo las condiciones que nos interesan, se refiere a dos flúidos no mezclables.

El término mezclable quiere decir que existe un grado de solubilidad entre uno y otro de los flúidos, como es el caso del agua dulce y el agua salada.

2.2 Clasificación breve del agua contenida en el medio poroso. Estados saturados, pendular y funicular.

Con el objeto de señalar que no toda el agua dentro de un medio poroso tiene la capacidad para formar parte de un escurrimiento libre y además que, de acuerdo con ciertas regiones del medio poroso, se pueden producir escurrimientos en distintos regímenes de flujo, damos a continuación una clasificación un tanto sobria¹ de estas aguas:

- 1.- Aguas firmemente adheridas
- 2.- Aguas débilmente adheridas
- 3.- Aguas libres

Las primeras, o sea, las aguas firmemente adheridas, son aquéllas que rodean las superficies de las partículas sólidas y que además están sujetas a grandes fuerzas de atracción; se necesitarían por lo tanto fuerzas de gran magnitud, para lograr separar estas aguas de los sólidos. Al aumentar la distancia de las superficies de sólidos, esas fuerzas de atracción van disminuyendo. Esta disminución trae como consecuencia que las fuerzas de atracción ya no sean insuperables, o sea, sí se puede esperar un movimiento de estas aguas débilmente adheridas, una vez vencidas las fuerzas de atracción.

Por último tenemos el agua libre, cuyo nombre indica precisamente que está libre para moverse y que las fuerzas de atracción en este caso son nulas.

Cabe notar que no hemos querido mencionar qué son y a qué se deben esas fuerzas de atracción; no lo hemos hecho en cuanto en el próximo capítulo, donde trataremos los - - distintos regímenes de flujo, expondremos más ampliamente este tema y además expondremos otra clasificación más completa que es la de A.F. Lebedev y así podremos comparar ambos criterios.

En un medio poroso bi-fásico, se pueden presentar distintos estados de saturación², tales como los siguientes:

a) Estado saturado: El medio poroso está completamente saturado por una de las fases.

b) Estado pendular: El medio poroso tiene una saturación mínima de una de las fases (agua). Esta saturación mínima produce únicamente una ligazón entre los distintos cuerpos sólidos (fig. 1a) y debido a ésto no hay posibilidades de flujo.

c) Estado funicular: El medio poroso tiene un grado de saturación intermedio entre los dos estados anteriores. Es como si aumentara la saturación mínima del caso anterior, logrando así un contacto de aquella fase que hacía de ligazón a través de los intersticios que anteriormente estaban ocupados totalmente por la otra fase en cuestión (fig. 1b). Es claro que en este tipo de estado existirá un flujo de dos fases a través de trayectorias sumamente "tortuosas" o funiculares.

En la clasificación anterior, el estado pendular corresponde a un medio no saturado y el estado funicular a un medio parcialmente saturado.



Fig. 1

2.3 Presión Capilar.

Analicemos de acuerdo con los incisos anteriores un medio poroso que tiene dentro de sus intersticios dos fases "no-mezclables". Si consideramos que estas fases están distribuidas continuamente a través del medio poroso, sucederá que una de las fases "moja" preferentemente los sólidos. El término "mojar" indica solamente el predominio sobre la fase en cuestión, de las fuerzas de adherencia sobre las fuerzas de cohesión; és to implica que su ángulo de contacto sea menor de 90° . Conjuntamente a este fenómeno, se presenta otro; en las superficies de contacto entre ambas fases se produce una curvatura, que de acuerdo con la teoría de la capilaridad, nos indica una diferencia de presiones, igual a la presión capilar.

Hemos hablado del efecto de una fase que preferentemente moja los sólidos sobre la otra; éste no es más que un movimiento desplazante. Quiere decir que la fase que preferentemente moja, que llamaremos desplazante, trata de expulsar a la fase que no moja, o sea la fase desplazada. En síntesis, el movimiento de desplazamiento se debe precisamente a la atracción que ejercen los sólidos sobre una de las fases y la presión capilar ó tensión superficial no es más que una fuerza que resistirá (ó ayudará) la entrada de la fase desplazante. Es claro que se debe esperar una situación de equilibrio entre las fuerzas, de tal modo que a un cierto grado de saturación, existirá un equilibrio dinámico y la presión capilar por consecuencia será una función del grado de saturación,

$$P_c = P_c(S) = p(\text{fase 1}) - p(\text{fase 2}) \quad (2.3.1)$$

Aclaremos un poco más la razón por la cual se admite que la presión capilar debe ser función del grado de saturación. Si analizamos un punto en el medio poroso en donde se presenta la superficie de contacto entre ambas fases, debido a esta condición se presenta una presión capilar; además en ese punto y en ese momento (considerando la superficie de contacto en movimiento) habrá un grado de saturación de la fase desplazante menor que en un instante después en que la superficie de contacto se haya desplazado aguas arriba motivando que desaparezca la presión capilar. Se infiere que a mayor grado

de saturación corresponde menor presión capilar.

Decíamos en el capítulo anterior que la dependencia de la presión o carga capilar con la saturación es con respecto a la saturación original del suelo; no podría ser de otro modo, ya que para que se desarrolle una carga capilar es necesario que el medio poroso esté seco o parcialmente saturado, en un medio saturado completamente nunca se podría desarrollar una carga capilar. Quiere decir que si un medio poroso tiene originalmente dentro de sus intersticios solamente aire, en nuestro caso la fase desplazada, la carga capilar que se desarrollaría sería máxima al presentarse un frente de agua, la fase desplazante. Por otro lado, si este medio poroso tiene un cierto contenido de agua, la carga capilar que se desarrollaría aguas arriba del frente de agua sería menor que en el caso anterior. Nos salta a la vista la siguiente duda: ¿es esta carga capilar constante, ó varía de acuerdo con cierta ley? El que la acción capilar sea constante o no, depende exclusivamente de las condiciones de saturación original del medio poroso; si se trata de una saturación homogénea, la carga capilar que se desarrollaría bajo la presencia de un frente debe ser constante, en cambio si la saturación original no es homogénea, se tendrá una acción capilar no constante.

2.4 Relación experimental entre la presión capilar y el grado de saturación.

Se ha comprobado experimentalmente³ que la relación entre la presión capilar y el grado de saturación sí existe. Se han hecho experimentos con distintos materiales porosos y con distintos flúidos no mezclables; entre éstos cabe mencionar el experimento de Leverett⁴, el cual introduce la presión capilar a través de un parámetro adimensional $J(S)$, llamado función de Leverett. Esta función fue obtenida por un análisis dimensional y se define en la siguiente forma:

$$J(S) = \frac{P_c}{\sigma} \left(\frac{k}{n} \right)^{1/2} \quad (2.4.1)$$

en donde p_c es la presión capilar, $f(\theta)$ es una función del ángulo de contacto, n es la porosidad y k es el coeficiente de permeabilidad (ver ecuac. 1.1.4).

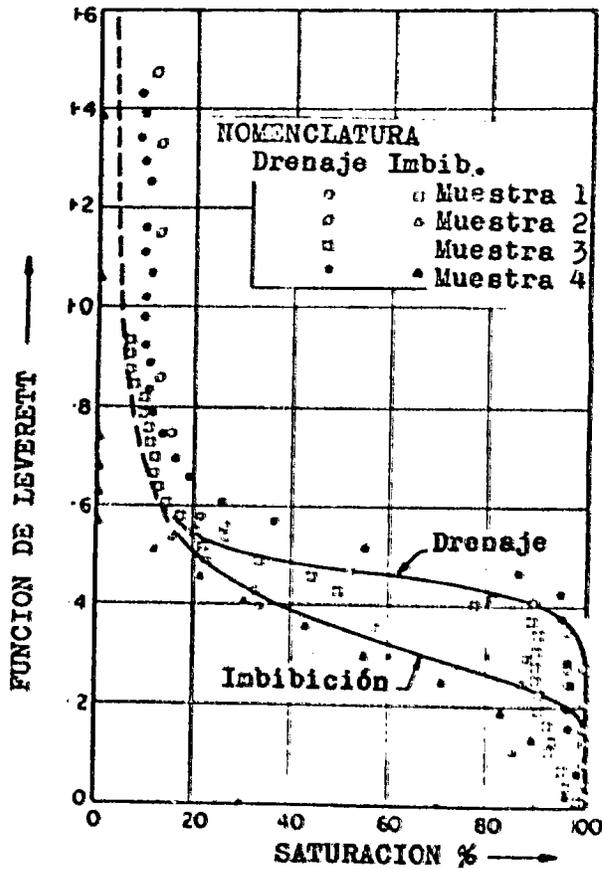


Fig. 2

Entre los materiales empleados, que tenían un amplio rango de valores de coeficientes de conductividad, se determinó la función de Leverett $J(S)$ para distintos grados de saturación y se logró la siguiente gráfica (fig. 2), en donde se señalan los procesos de drenaje y de imbibición.

Antes de continuar, es necesario explicar los términos de drenaje y de imbibición. El primero, o sea el proceso de drenaje, consiste en la disminución de la fase que moja (desplazante) mediante su drenaje en la muestra; la imbibición por el contrario, consiste en el aumento en la muestra de la fase desplazante y la expulsión o disminución de la fase desplazada. Un proceso típico de imbibición es el de la filtra-

ción de las aguas de un embalse a través de un terraplen con un nivel freático más bajo que el nivel máximo del embalse. Un proceso de drenaje consiste en un descenso del nivel freático, es el caso de extracción de aguas mediante un pozo de bombeo.

Habiendo aclarado ambos procesos, veamos nuevamente la figura 2, producto de las experiencias de Leverett; observamos que queda comprobado el razonamiento del inciso anterior en que afirmábamos que a mayor grado de saturación menor presión capilar ya que la presión capilar es directamente proporcional a la función de Leverett. Cabe observar que la función de Leverett tiene aplicación para distintos casos: a) diseño de modelos, b) cálculo de la relación presión capilar-saturación para un sistema bifásico dado con respecto a otro sistema bifásico ya conocido, c) obtención de la presión capilar en un sistema bifásico correspondiente a un grado de saturación cualquiera. Otra observación importante que se hace en la gráfica de Leverett es el desdoblamiento de la curva en dos ramales a partir de cierto grado de saturación; uno para el proceso de drenaje y el otro para el proceso de imbibición. ¿A qué se debe este desdoblamiento de la curva?, la respuesta es sencilla, se debe al fenómeno de la histéresis. Este fenómeno no lo tomaremos en cuenta en este trabajo, sin embargo obsérvese que esto en sí no es un problema, ya que cuando se esté analizando un problema de imbibición, se utiliza simplemente el ramal de la curva correspondiente, lo mismo en el caso de un problema de drenaje.

2.5 Conductividad relativa.

Describiremos a continuación principalmente las experiencias realizadas por Wyckoff, R.D. y Botset, H.G.⁵ en donde comprueban lo que señalábamos en el inciso 1.1, o sea que la conductividad es una función universal del grado de saturación. Ya desde el año de 1921, Gardner⁶ había hecho la hipótesis de que la conductividad era función del potencial capilar, Richards⁷ por otro lado, en el año de 1931 extendió la ley de Darcy a flujo no saturado, considerando también a K como función del potencial capilar. Vimos en el inciso 2.4 que

la presión capilar es función del grado de saturación; por tanto los investigadores Wyckoff y Botset, no hicieron más que corroborar experimentalmente estas hipótesis.

Introduciremos los conceptos de conductividad líquida⁸ y conductividad gaseosa, K_L y K_G respectivamente; si llamamos K'_L a la conductividad líquida para un grado de saturación máximo (S=1) y a K'_G a la conductividad gaseosa para un medio poroso seco (S=0), podemos entonces definir lo que es conductividad relativa, de acuerdo con lo siguiente:

$$x_L = \frac{K_L}{K'_L} \quad \text{y} \quad x_G = \frac{K_G}{K'_G}$$

en donde x_L y x_G son las conductividades relativas, líquidas y gaseosas respectivamente. Es obvio que estas conductividades relativas son parámetros adimensionales, lo cual implica una gran ventaja. En sus experiencias, Wyckoff y Botset, buscaron la relación de estas conductividades relativas con el grado de saturación y encontraron una gráfica típica para dos fases cualesquiera en un medio no saturado (Fig. 3).

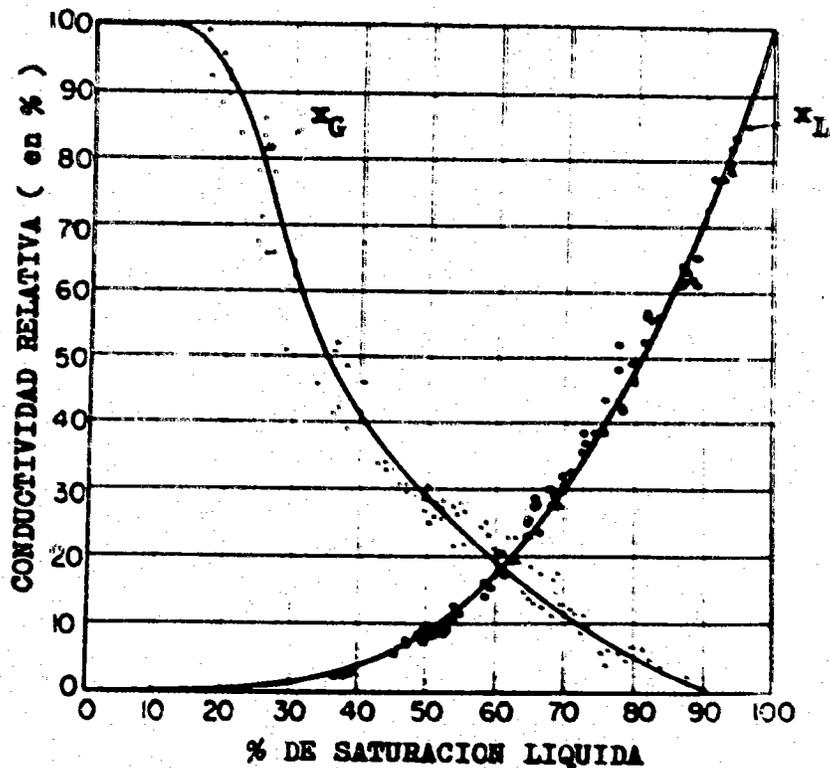


Fig. 3

Los investigadores señalan dos observaciones sumamente interesantes respecto a sus experiencias; éstas consisten en lo siguiente:

1.- Todos los puntos están sobre las dos curvas, sin influir el tamaño de los granos de la arena utilizada.

2.- No influyó la heterogeneidad de la arena, aún con un amplio rango de líquidos con distintas viscosidades.

Estas observaciones nos indican que el medio poroso no influye en esta configuración, y que resultaría la misma configuración si usáramos ya sea agua o aceite. Esta condición curiosa sale precisamente por el hecho de trabajar con conductividades relativas; he aquí la gran ventaja que tiene este concepto que mencionábamos anteriormente. Lo mismo resultaría si se utilizaran dos fases con distintas relaciones de tensiones superficiales.

Si fijamos nuestra atención en la figura 3, observaremos lo siguiente:

1.- La conductividad relativa líquida x_L es prácticamente despreciable a un grado de saturación $S_0 = 0.1$ a 0.2 y crece rápidamente a su valor máximo correspondiente a un grado de saturación $S = 1$.

2.- En forma similar $x_G = 1$ para un grado de saturación $S_1 = 0.1$ a 0.2 y decrece rápidamente a cero.

Discutamos un poco más estas dos observaciones de la gráfica. El que exista un grado de saturación S_0 para una conductividad relativa $x_L = 0$, que corresponde a una conductividad líquida $K_L = 0$, o sea cuando suponemos que el contenido de agua es nulo, quiere decir que se trata de una saturación remanente de aguas muertas. Se trata de aguas retenidas por tensión superficial, las cuales no pueden circular libremente. En cuanto a S_1 , esta saturación corresponde a la misma saturación S_0 de aguas muertas.

Se ha visto en el laboratorio, que al experimentar en la misma forma que lo hicieron Wyckoff y Botset para los procesos de drenaje y de imbibición, se produce nuevamente un des-

doblamiento de las curvas, debido a la acción de la histéresis, de la cual hablamos en el inciso anterior.

2.6 Flujo capilar.

Hablábamos en el inciso 2.3 de la influencia de la presión capilar sobre el movimiento desplazante o flujo capilar, surge de lo anterior la siguiente pregunta: ¿es ésta la única influencia que existe sobre este tipo de movimiento? Bajo el punto de vista microscópico, podemos contestar afirmativamente, o sea que el flujo capilar depende solamente de las fuerzas capilares; depende por lo tanto, de la tensión superficial, del grado de saturación original y de los tamaños y forma de los granos. La comprobación de esta aseveración está sólidamente basada en dos experiencias⁹, una de ellas es la determinación de la relación de la presión capilar con la saturación en condiciones estáticas y en condiciones dinámicas, la otra es la determinación de la relación conductividad relativa con respecto a la saturación también en condiciones estáticas y dinámicas. De estas pruebas se obtuvieron los mismos resultados, o sea que las dos configuraciones (Figs. 2 y 3) no cambiaron su forma, quiere decir que éstas son independientes de cualquier fuerza inherente al movimiento. En síntesis, bajo el punto de vista microscópico, el flujo capilar solamente depende de las fuerzas capilares y de la historia del material poroso, o sea de la histéresis.

Analicemos ahora el problema bajo un punto de vista macroscópico. En el caso de flujo laminar las fuerzas que actúan son las fuerzas viscosas, las fuerzas capilares y las fuerzas gravitacionales. Las fuerzas viscosas son debidas a los gradientes de presión aplicados al medio, las fuerzas capilares son debidas a las curvaturas que se presentan en las superficies de contacto y por último las fuerzas gravitacionales son debidas al peso propio de la fase desplazante.

Las investigaciones han demostrado que en el flujo capilar existen tres zonas definidas.¹⁰ Debido a que estas zonas son producidas por una continuidad dinámica, éstas están inseparablemente ligadas o conectadas, pero a pesar de esto presentan características distintas.

La primera zona que se distingue es la zona de transmisión, la cual se caracteriza por tener una saturación constante; sin embargo no es de 100 % como siempre se ha supuesto sino más bien se aproxima al 80 %. Debido a que se tiene un grado de saturación constante en esta zona, el gradiente hidráulico también es constante, o sea es una línea recta. Por otro lado, la conductividad como depende de la saturación, también es constante. La otra zona es la llamada zona de humectación, la cual se caracteriza por tener un grado de saturación que rápidamente decrece hasta el valor de saturación que tiene el frente de humectación, que viene siendo la tercera zona. Debido a este decrecimiento rápido de la saturación en la zona de humectación, se tiene por consecuencia una conductividad que también decrece hasta cierto valor. Señalan los investigadores que en un suelo húmedo, la zona de humectación tiene más desarrollo que en un suelo seco; este fenómeno lo atribuyen ellos a dos hechos: 1) que la conductividad es mayor y 2) que existe una tendencia de esa saturación original a desplazarse. El investigador T.W.Lambe¹¹ encontró que para flujo capilar horizontal, la energía consumida en la zona de humectación es aproximadamente constante cuando la saturación aguas arriba de esta zona es constante. Se concluye que el gradiente hidráulico será menor en un suelo húmedo, mientras que en un suelo seco, este gradiente será mayor. Queda por último el frente de humectación, el cual viene siendo especie de capilares discontinuos, los cuales tienen una saturación igual a la saturación original del medio poroso.

Tratemos de obtener una expresión analítica para un flujo capilar, basándonos en la siguiente gráfica (Fig. 4). Consideraremos el caso de una saturación original constante, resultando por lo tanto una carga capilar constante; analizaremos un tubo capilar con una carga hidrostática H_0 , teniendo así, que la carga total H es igual a $H_0 + H_c$. Debido a que la carga H es constante, podemos por lo tanto escribir la ley de Darcy en la siguiente forma:

$$v = K \frac{H_0 + H_c}{x} \quad (2.6.1)$$

en donde x es la coordenada horizontal y K es el coeficiente

de conductividad. La velocidad también se puede expresar de acuerdo con la expresión (1.1.7) en la siguiente forma:

$$v = nS \frac{dx}{dt} \quad (2.6.2)$$

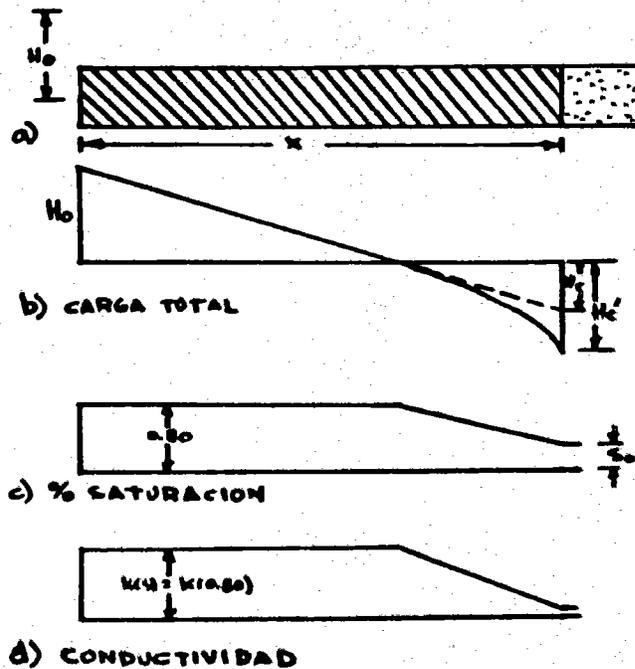


Fig. 4

Igualando las dos ecuaciones anteriores,

$$K \frac{H_0 + H_c}{x} = nS \frac{dx}{dt} \quad (2.6.3)$$

cuya integración resulta

$$x = \sqrt{\frac{2K}{nS} (H_0 + H_c) \cdot t} \quad (2.6.4)$$

en donde ni K ni S son constantes.

Hemos analizado el caso de un flujo confinado; sin embargo nos interesa fundamentalmente el otro caso, o sea de flujo no confinado. ¿Qué similitud existe entre uno y otro caso? Aparentemente ninguna, pero si recurrimos a una hipótesis salvadora, muy utilizada por los autores, la cual considera a la conductividad vertical $K_y = 0$, o sea de que las líneas de corriente sean horizontales. (obsérvese que es la misma hipóte-

sis utilizada en el primer capítulo por la investigadora P.Kochina para la deducción de la ecuación diferencial de difusión), llegamos a la conclusión de que el flujo no confinado equivale a una serie de tubos (confinados) capilares independientes superpuestos unos sobre otros. Quiere decir que cada tubo tiene una carga hidráulica distinta de acuerdo con su altura; si llamamos H_0 la carga total, H la altura del tubo capilar analizado sobre el nivel cero, la carga que estará actuando aguas arriba del tubo será:

$$H' = H_0 - H$$

donde H' equivale a la H_0 del diagrama anterior (Fig. 4). Interpretamos de lo anterior que los tubos superiores tendrán menos energía disponible que los inferiores.

Con respecto a la carga capilar, reconocemos de antemano saber poco sobre ésta, especialmente en el caso de flujo no confinado. Suponemos que, cualquiera que sea la forma del frente de agua, la carga capilar siempre se manifiesta en forma perpendicular a dicho frente con un valor constante si la saturación original es constante, tal como habíamos dicho. Pensamos que la componente horizontal de dicha carga es la que contribuye al movimiento en sentido horizontal, de tal forma que si la curva de infiltración es horizontal al principio (la parte superior) y perpendicular al final (la parte inferior), la carga capilar tendrá un valor cero al inicio de la curva y su valor máximo al final de la curva, o sea variará con la altura.

2.8 Relación entre la ley de Darcy y la fórmula de Poiseuille para flujo laminar.

Irmay⁸ buscó relacionar la ley de Darcy con la fórmula Poiseuille, éste consideró que dicha fórmula puede servir para tubos de cualquier forma y aún para el medio poroso. Recordemos la fórmula de Poiseuille,

$$v = \left(\frac{D^2}{32\mu} \right) \frac{\Delta p}{L} \quad (2.8.1)$$

en donde v es la velocidad de descarga o velocidad media, D es el diámetro, μ es la viscosidad dinámica y $\Delta p/L$ es el gradiente de presiones. Recordemos además el concepto de radio hi

dráulico R, el cual se expresa según,

$$R = \frac{A}{P_m}$$

donde A es el área y P_m es el perímetro mojado.

Considera Irnay que al idealizar como una serie de tuberías a un medio poroso debe variar el coeficiente numérico y que además el radio hidráulico R debe ser nuevamente definido como la relación entre el volumen de líquido contenido en el medio poroso al área total de los granos contenidos en ese medio considerando un volumen unitario de suelo, o sea una especie de área específica interna M (ver capítulo I).

En un suelo saturado se presenta la condición de que el volumen de agua libre es igual a la porosidad efectiva. El área total de los granos M, en caso de que éstos fueran esféricos y de textura conocida, podríamos calcularla. Digamos que son N_1, N_2, \dots granos de diámetros d_1, d_2, \dots contenidos en un volumen unitario y que sus porcentajes de volumen o de peso con respecto al volumen unitario fueran $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ respectivamente, entonces

$$M = \sum N_i \pi d_i^2 = 6 \sum (\alpha_i / d_i) \quad (2.8.2)$$

Como los granos ocupan un volumen $(1-n)$ y el líquido en un medio saturado ocupa un volumen n, nos queda

$$R = \frac{n}{(1-n)M} \quad (2.8.3)$$

Analizando esta fórmula bajo el punto de vista de fuerzas, n está relacionado con el empuje y $(1-n)M$ con la fuerza de resistencia. Introduzcamos un nuevo concepto, el diámetro efectivo,

$$\bar{d} = 6/n = \frac{1}{\sum (\alpha_i / d_i)} \quad (2.8.4)$$

por lo tanto

$$R = \frac{\bar{d}n}{6(1-n)} \quad (2.8.5)$$

Sustituyendo este valor de R, siendo $D = 4R$, y además recordando que $v = n \frac{dx}{dt} = nu$ (medio saturado), la ecuación (2.8.1) queda en la siguiente forma:

$$v = nu = n(4\bar{d}n/6(1-n))^2 / 32\mu \cdot \frac{A p}{L} \quad (2.8.6)$$

Comparemos la ecuación (2.8.6) con la ley de Darcy que nos dice

$$v = \frac{k'_L}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (2.8.7)$$

en donde k'_L es el coeficiente de permeabilidad (inciso 1.1). Sacamos de esta comparación entre las dos ecuaciones anteriores lo siguiente:

$$k'_L = \left(\frac{d^2}{72} \right) \left(\frac{n^3}{(1-n)^2} \right) \quad (2.8.8)$$

Esta expresión fue comprobada experimentalmente por Sullivan y Hertel en el año de 1942 y por Rose en el año de 1943.

Al principio de este inciso decíamos que el volumen de agua libre es igual a la porosidad efectiva, o sea que estamos reconociendo la presencia de aguas muertas; debemos por esto entonces modificar las ecuaciones (2.8.3) y (2.8.8), como sigue

$$R = \frac{n(1-S_e)}{(1-n)M} \quad (2.8.9)$$

por otro lado,

$$v = n(1-S_e)u$$

quedando finalmente,

$$k'_L = C d^2 (1-S_e)^3 \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad (2.8.10)$$

donde C es una constante numérica del valor de 0.01 que depende de la forma de los granos y de la estructura del suelo.

Hasta ahora hemos analizado el problema como si tratara exclusivamente de un medio saturado; sin embargo como decíamos anteriormente, el flujo no saturado es el que nos interesa primordialmente. En el caso de un medio no saturado podemos afirmar que una fracción del volumen considerado está lleno de agua ($C = nS$) y la otra fracción está llena de aire - - - ($n - C = n(1-S)$). Sabemos que la fuerza de empuje es proporcional al volumen de agua $C = nS$ o mejor $n(S-S_e)$, de manera que para el líquido,

$$R_L = \frac{(S-S_e)n}{(1-n)M} \quad (2.8.11)$$

$$v_L = n(S-S_e)u$$

dando por resultado

$$k_L = C \bar{d}^2 \cdot (S-S_0)^3 n^3 / (1-n)^2 \quad (2.8.12)$$

En el caso de que exista saturación total ($S=1$), la ecuación anterior queda igual a la ecuación (2.8.10). Si queremos transformar la ecuación (2.8.12) de manera que quede en función de la conductividad y no de la permeabilidad, obtenemos

$$K_L = \left(C \frac{\mu}{\gamma} \right) \bar{d}^2 (S-S_0)^3 n^3 / (1-n)^2 \quad (2.8.13)$$

Haciendo el mismo razonamiento que para el líquido podemos llegar a las siguientes expresiones para el gas o aire,

$$R_G = \frac{n(1-S)}{(1-n)M} \quad (2.8.14)$$

$$v_G = n(1-S)u \quad (2.8.15)$$

$$K'_G = \left(C \frac{\mu}{\gamma} \right) \bar{d}^2 (1-S_1)^3 n^3 / (1-n)^2 \quad (2.8.16)$$

$$K_G = \left(C \frac{\mu}{\gamma} \right) \bar{d}^2 (1-S)^3 n^3 / (1-n)^2 \quad (2.8.17)$$

En términos de las conductividades relativas,

$$x_L = K_L / K'_L = \frac{(S-S_0)^3}{(1-S_0)^3} \quad (2.8.18)$$

$$x_G = K_G / K'_G = \frac{(1-S)^3}{(1-S_1)^3} \quad (2.8.19)$$

Las curvas dadas por las dos ecuaciones anteriores se cruzan en

$$S' = 0.5 (1-S_0 S_1) / (1 - 0.5(S_0 + S_1)) = 0.575 \quad (2.8.20)$$

$$y \quad x_G = x_L = \left(\frac{1-S_0}{2-S_0-S_1} \right)^3 = 0.125 \text{ a } 0.150$$

Si observamos nuevamente la Figura 3, concluimos que hay una buena concordancia entre los resultados experimentales y este análisis teórico. La conductividad relativa total será entonces $x = x_L + x_G$. Considerando de utilidad, damos a continuación

el cuadro I con los valores de x_L y x_G para distintos valores de S_0 y S_1 y con distintos valores de grado de saturación S .

CUADRO I (Valores de x_L y x_G)

Grado de Saturación S	x_L			x_G		
	S_0	S_0	S_0	S_1	S_1	S_1
	0.10	0.15	0.20	0.10	0.15	0.20
0.10	0.000	---	---	1.000	---	---
0.15	0.000	0.000	---	0.843	1.000	---
0.20	0.001	0.000	0.000	0.702	0.835	1.000
0.25	0.005	0.002	0.000	0.580	0.668	0.825
0.30	0.011	0.005	0.002	0.470	0.558	0.670
0.35	0.022	0.013	0.007	0.378	0.448	0.537
0.40	0.037	0.026	0.016	0.296	0.352	0.422
0.45	0.059	0.044	0.031	0.228	0.270	0.324
0.50	0.088	0.070	0.053	0.171	0.204	0.244
0.55	0.125	0.104	0.084	0.125	0.148	0.178
0.60	0.171	0.148	0.125	0.088	0.104	0.125
0.65	0.228	0.204	0.178	0.059	0.070	0.084
0.70	0.296	0.270	0.244	0.037	0.044	0.053
0.75	0.378	0.352	0.324	0.022	0.026	0.031
0.80	0.470	0.448	0.422	0.011	0.013	0.016
0.85	0.580	0.558	0.537	0.005	0.005	0.007
0.90	0.702	0.688	0.670	0.001	0.002	0.002
0.95	0.843	0.835	0.825	0.000	0.000	0.000
1.00	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000

Concluimos de acuerdo con lo expuesto que

a) La hipótesis de que la conductividad es función universal del grado de saturación queda claramente demostrada.

b) Observando las ecuaciones (2.8.10) y (2.8.12) comprobamos que la permeabilidad en un medio no saturado k_L es proporcional a la permeabilidad de ese mismo medio con saturación total k_L' .

c) Si observamos la ecuación (2.8.12) y la comparamos con la ecuación (1.1.4), comprobamos lo correcto del análisis

dimensional al señalarnos que la verdadera permeabilidad (k) depende solamente de las propiedades del medio poroso cuyas dimensiones son de longitudes al cuadrado (L^2), o sea su correspondiente cm^2 .

2.9 Porosidad y Estado de equilibrio.

Hasta ahora hemos hablado de dos tipos de porosidades: 1) porosidad total, $n = V_v/V_t$, en donde V_v es el volumen de todos los vacíos sin importarnos como sean éstos y V_t es el volumen total unitario; 2) porosidad efectiva que es igual a la suma de los volúmenes de los poros interconectados en un volumen unitario. Zeller¹² introduce un nuevo concepto, se trata de la porosidad específica, n_g . La porosidad específica es aquélla que no solamente toma en cuenta los poros interconectados tal como la porosidad efectiva, sino también la condición de que estos poros interconectados puedan o no tener aguas retenidas debido a la tensión superficial ó a las fuerzas electromoleculares. Definimos pues, a la porosidad específica como aquel volumen de agua que puede escurrir en un volumen unitario de material poroso y que además es proporcional a la porosidad total,

$$n_g = \alpha n \quad (2.9.1)$$

en donde α , es la relación entre el volumen de agua y el volumen total de poros. Este término no viene siendo más que un "factor de reducción", tal como lo llama Zeller. Si comparamos dimensionalmente esta ecuación con la ecuación 1.1.1 vemos de inmediato la correspondencia existente ($C=Sn$), o sea n_g no es más que un contenido de aguas y α corresponde a un grado de saturación; sin embargo si dejáramos al grado de saturación en esa forma indefinida, la semejanza no sería completa; la razón de esto es que S a secas no toma en cuenta las aguas retenidas, previendo esto escribimos la ecuación (1.1.1) en la siguiente forma:

$$C = (S-S_0)n \quad (2.9.2)$$

Debido a que $C = n_g$, podemos sustituir esta relación en la ecuación (2.9.2), obteniendo

$$n_g = (S-S_0)n \quad (2.9.3)$$

Obsérvese que en los análisis de los incisos anteriores de este capítulo hemos utilizado precisamente la parte derecha de la ecuación 2.9.3.

Zeller trató de comprobar la existencia de una relación entre la porosidad n y el grado de saturación S ; sus resultados sin embargo, fueron negativos. Esto es lógico ya que n varía solamente con la compactación, claro que en casos de que haya mayor saturación en alguna zona que en otras puede motivar un asentamiento y cambiar por lo tanto la porosidad original.

Describiremos la forma en que realizó Zeller sus experiencias y enumeramos las hipótesis en que se basó.

Su principal hipótesis consiste en considerar al coeficiente de conductividad K independiente del tipo de régimen, ya sea estable o inestable. De acuerdo con lo dicho en el inciso 2.7 esta hipótesis de Zeller tiene completa validez.

Para la realización de sus experimentos Zeller utilizó un gran número de materiales porosos y distintas compactaciones. Utilizó muestras inicialmente saturadas y lo único que hizo fue aumentar el gradiente hidráulico de acuerdo con la figura 5; inicialmente los niveles de entrada y de salida eran el nivel constante de aguas arriba y el nivel del recipiente de salida que está dibujado en líneas punteadas. El gasto se mantuvo constante. Posteriormente se bajó el recipiente de salida, aumentando por lo tanto la diferencia de cargas. Si analizáramos este dispositivo en función de presiones totales, presiones de poro y de presiones intergranulares, llegaríamos a la siguiente expresión:

$$p_n = \gamma z(1 - i) \quad (2.9.4)$$

donde p_n es la presión neutra o presión de poros, γ es el peso volumétrico del material poroso, z es un nivel cualquiera con respecto al nivel superior e i es la pendiente hidráulica h/L , en donde L es la longitud de la muestra, descontándole 3 cm para evitar los efectos de capilaridad, y h es la diferencia de niveles, o sea la carga hidráulica. En este caso se aumentó la carga hidráulica hasta hacerla igual a la

longitud L , o sea se hizo que $i=1$; quiere decir que la presión de poro, que originalmente tenía un valor determinado, se bajó a un valor igual a cero. Esto se traduce en un degradamiento del grado de saturación (originalmente $S=1$) y por lo tanto en permitir que penetrara el aire.

Aunque Zeller no lo dice, nosotros concluimos que sus experimentos fueron realizados en un medio no saturado y que las conductividades que él midió son conductividades no saturadas K_L . Por otro lado, los volúmenes de agua V_w

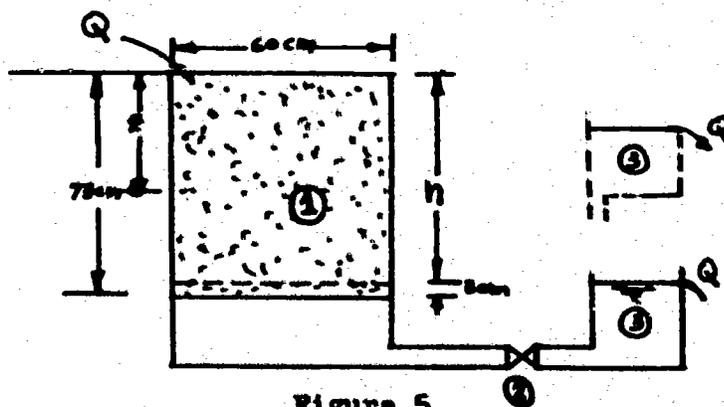


Figura 5

- (1) Muestra
- (2) Válvula
- (3) Recipiente de salida, ajustable en su altura

que midió no son más que aquellas cantidades de agua que pueden escurrir para una carga dada. Estos volúmenes los refirió al volumen de agua que salía originalmente con la muestra saturada, o sea obtuvo $\alpha = n_s/n$. El hecho que variara el gradiente hidráulico, explica en un primer instante la variación del gasto de salida, pero no explica como después de sostenido un nivel constante, el gasto y luego α continuara cambiando. Quiere decir que estuvo variando la conductividad, la cual obtuvo, suponemos, por la relación Q/i . Condensó Zeller todos los resultados de sus experiencias en una gráfica, figura 6, en donde toma como ordenada α , o sea $(S - S_0)$ y como abscisa a K_L . Esta gráfica nos demuestra una vez más la validez de las experiencias de Wyckoff y Botset.

Si observamos la Figura 6 vemos que se nos presenta una nueva dificultad, que consiste en que para materiales de

muy baja conductividad existe un retraso progresivo del flujo de salida. Nos dice Zeller que él estima que este fenómeno se debe a algún efecto de la zona capilar. De acuerdo con los estudios de Lambe¹¹ sabemos que en el caso de ascensión capilar se produce una saturación decreciente desde un 85 % en el nivel freático hasta un valor de la saturación igual a la saturación original del material poroso en el punto más elevado de dicha ascensión. Si de la ecuación (2.4.1) despejamos la presión capilar, vemos que ésta es una función inversa de la permeabilidad y por lo tanto de la conductividad; quiere decir que mientras menos conductivo sea el material mayor presión capilar tendremos, o sea mayor ascenso capilar. El caso de la Figura 5 es el de un flujo vertical hacia abajo, en donde la presión capilar actúa en sentido contrario, o sea disminuye la carga hidráulica, aparte de lo anterior - disminuye la saturación y por lo tanto la conductividad, concluimos por lo tanto que el fenómeno capilar es muy importante en caso de materiales muy finos (arcillosos) y creemos que debido a esto es que se presenta ese retardamiento en materiales poco conductivos tal como lo supuso Zeller. En el siguiente

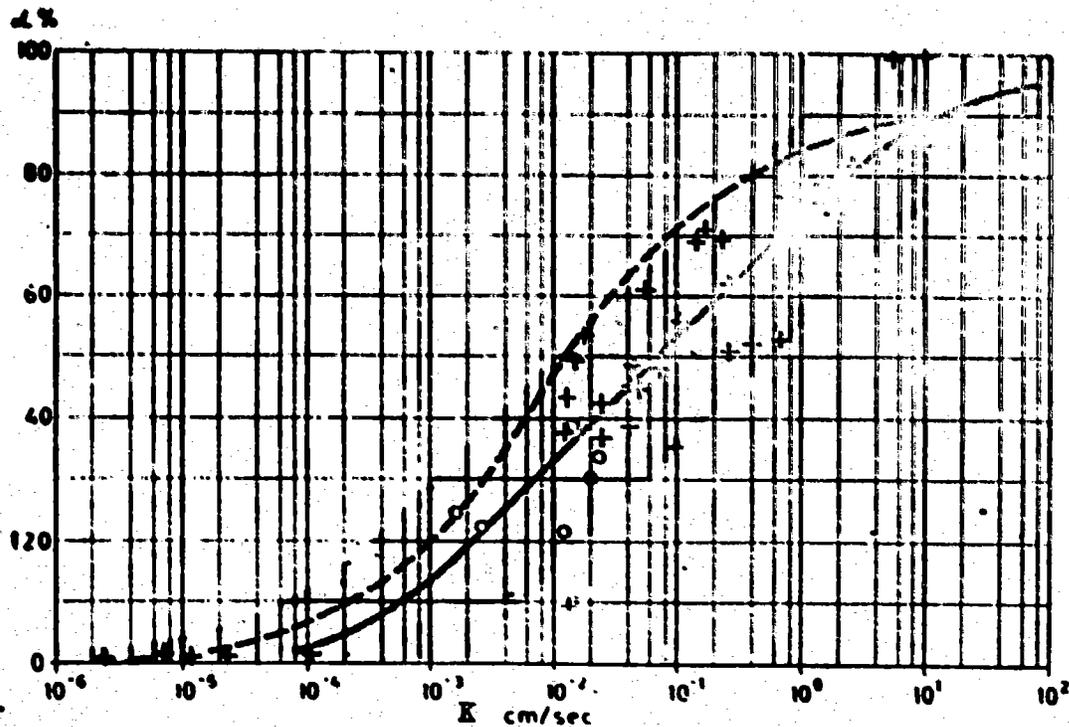


Fig. 6

te capítulo veremos como en estos casos aparecen en juego las fuerzas electromoleculares, las cuales son de tal magnitud que pueden retrasar la realización del escurrimiento laminar. Otra observación que podemos hacer en la Figura 6 es el trazado de dos curvas, una con línea punteada y la otra con línea continua; la presencia de estas dos curvas no nos las explica Zeller, sin embargo creemos que se trata de una región en donde se localizaron todos los puntos experimentales y que podrían ser definidos aproximadamente por cualquiera de las dos curvas.

Con el objeto de entender mejor este retardamiento en los suelos pocos conductivos, nos referiremos a la Figura 7, en

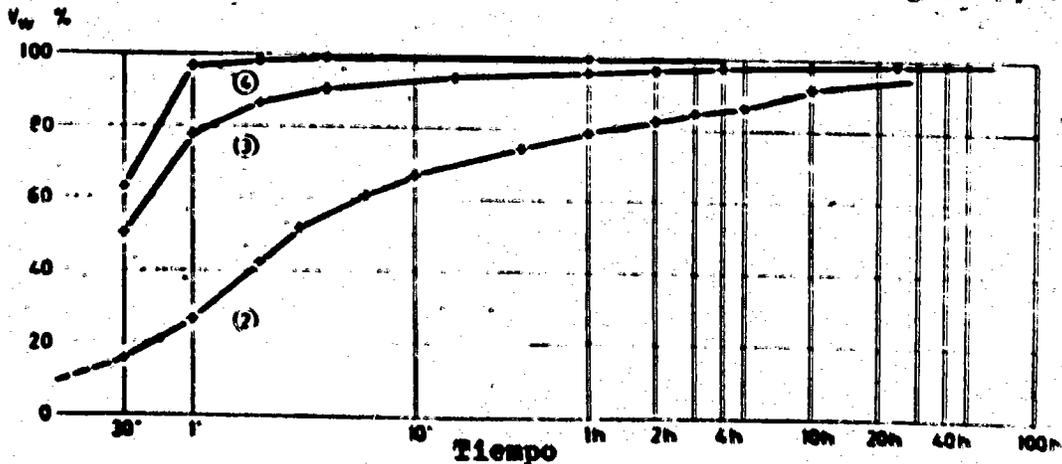


Fig. 7 - Variación del flujo de salida con el tiempo en una prueba de descenso brusco del nivel. V_w = gasto de agua que escurre con respecto al gasto medido después de 100 horas de flujo.

- (2) $K = 4.7 \times 10^{-2}$ cm/seg ; $n = 39.4\%$; $\alpha = 48\%$
- (3) $K = 2.4 \times 10^0$ " ; $n = 37.1\%$; $\alpha = 82\%$
- (4) $K = 5.2 \times 10^0$ " ; $n = 37.1\%$; $\alpha = 99\%$

donde se registran las pruebas realizadas con tres materiales con diferencias notables en sus conductividades; los parámetros registrados son V_w vs. t , donde V_w es el gasto de agua que escurre a través de la muestra y " t " es el tiempo. Se ve de esta gráfica que para los materiales de baja conductividad, éstos tardan mucho más en lograr un gasto de agua constante.

Indudablemente que la presencia de fuerzas electromoleculares indican la presencia de otro régimen distinto al laminar, o sea el problema se complica, ya que se necesitaría con-

siderar la posibilidad de distintos regímenes. Esto sin embargo, afectaría a materiales porosos con una conductividad menor de 10^{-2} cm/s (según Zeller), pero esto no es mayor consuelo, ya que precisamente en los corazones de las presas de tierra se acostumbra utilizar materiales arcillosos de baja conductividad. Pensemos ahora en darle una pequeña transformación a la Figura 7: dividiendo V_v entre el volumen de vacíos obtendríamos $(S-S_0)$, con lo que tendríamos una gráfica de $-(S-S_0)$ contra el tiempo y que sería similar a la Figura 7. Quiere decir que podemos pensar en un cierto equilibrio en que el grado de saturación se estabiliza y que de acuerdo con esta su puesta gráfica, esta estabilización sería mucho más lenta en materiales poco conductivos.

2.10 Resumen y Discusión.

Nuestra preocupación fundamental en este capítulo ha sido la de lograr una comprensión física del coeficiente de difusividad; para esto hemos estudiado por separado cada uno de los términos que componen a dicho coeficiente.

Mediante la gráfica de Wyckoff y Botset, creemos haber resuelto lo que respecta al coeficiente de conductividad dependiente del grado de saturación $K(S)$. Por otro lado, hemos visto que la saturación varía en el sentido horizontal, motivando también por lo tanto una variación de K con el eje x (ver fig. 4, inciso 2.6). Este tipo de variación de K es semejante a cualquier profundidad, cambiando solamente su desarrollo x con la carga hidráulica H_0 que tenga el tubo capilar hipotético y con la carga capilar, suponiendo que esta última varía también con la profundidad. Mediante la gráfica de Leverett se puede determinar la carga capilar máxima que tendría un medio poroso dado y con una saturación original dada, decimos máxima porque partimos del supuesto de que esta carga disminuye hasta cero en el punto más elevado (inciso 2.6) de acuerdo con cierta ley que supondremos en el último capítulo. Creemos que en esta forma hemos logrado conocer la dependencia de K con respecto a S , de S con respecto a x , de x con respecto a H_0 y H_c , o sea a final de cuentas conocer la dependencia de K y S con respecto a x y a la altura H .

La porosidad la hemos considerado constante, ya que no tomaremos en cuenta el caso de distintas compactaciones; sin embargo obsérvese que siempre este término n va multiplicado por S , o sea se trata de la porosidad específica tratada en el inciso anterior. De acuerdo con ésto, queda claro entonces que el coeficiente de difusividad ($D=KH/nS$) cambia con x y H . Obsérvese otra cuestión importante: x tendrá un valor cero en el punto más elevado, ya que tanto H_o como H_c serán iguales a cero en ese punto; en cambio en el punto más bajo x tendrá un valor máximo (H_o y H_c también serán máximos en este punto); quiere decir que tanto K como S variarán de un valor mínimo en el punto más elevado a un valor máximo en la región inferior. Por otro lado H tiene una variación completamente opuesta, o sea varía de cero en la región inferior a un valor máximo en el punto superior; ésto trae como consecuencia que el coeficiente de difusividad tenga su valor máximo en un punto intermedio, tal como veremos en el último capítulo.

Bibliografía

- 1.- G.Karadi y I.V.Nagy - "Investigations into the validity of the lineal seepage law" - International Assoc. for Hydraul-Research - Ninth Convention - Dubrovnik 1961
- 2.- Adrian Scheidegger - "The Physics of Flow through porous media" - University of Toronto Press - (1957)
- 3.- Ross E. Moore - "Water conduction from shallow water tables" - Hilgardia - v.12 pags 383-405 - (1939)
- 4.- M.C.Leverett - Trans. AIME - v.132 pag. 149 - (1939)
- 5.- Wyckoff, R.D. y Botset, H.G. - "The flow of gas-liquid mixtures through porous media- Physics - v.7 pag. 325 - (1936)
Physics - v.5 pag. 265
- 6.- Gardner, W. y Widtsoe, J.A. - "The movement of soil moisture" - Soil Science - v.11 pags. 21-233 - (1921)
- 7.- Richards, L.A. - "Capillary conduction of liquids through porous media - Ph.D. Thesis, Cornell Univ. - Physics - - - v.1 pags 318-353 - (1931)
- 8.- Irmay, S. - "On the hydraulic conductivity of unsaturated soils - Trans. Am. Geoph. Union - v.35, No. 3, pags 463 - (1954)
- 9.- Streeter, Victor L.- "Handbook of Fluid Dynamics" - McGraw-Hill Book Company, Inc. - New York
- 10.-Hansen, V.E. - "Infiltration and water movement during irrigation" - Soil Science - v.79, pags 93-105 - (1955)
- 11.-Lambe, William - "Capillary phenomena in cohesionless soils" - Proc. ASCE- v.76, separate No. 4 - February 1950
- 12.- Zeller, J. - "The significance of aquifer porosity in non-steady seepage flow with free surface - Int. Assoc. for Hyd. Res. - Ninth Convention - Dubrovnik1961

Capítulo III
"Regímenes de flujos en la filtración"

3.1 Comparación de la ley de Darcy con la ecuación de Navier-Stokes.

Sabemos que Darcy encontró su ley en forma experimental; sin embargo, nos parece interesante comparar esta ley con la ecuación de Navier-Stokes, ya que esta última abarca casi todas las características que se pueden presentar en un flujo cualquiera. De esta manera podemos ver cuales son las limitaciones de la ley de Darcy. La ecuación de Navier-Stokes¹ puesta en forma vectorial para un medio continuo:

$$\bar{a} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} (\text{grad } p - \mu (\nabla^2 \bar{v} + \text{grad div } \bar{v})) \quad (3.1.1)$$

en donde ρ es la densidad del fluido
 p es la presión
 μ es la viscosidad dinámica
 \bar{v} es la velocidad media total
 \bar{F} son las fuerzas másicas
 \bar{a} es la aceleración total

Si descomponemos la aceleración total en sus componentes:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad}(v^2/2) + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} (\text{grad } p - \mu (\nabla^2 \bar{v} + \text{grad div } \bar{v}))$$

La primera hipótesis que se ocurre hacer es el considerar al fluido incomprensible, o sea que $\text{div } \bar{v} = 0$, por consecuencia $\text{grad div } \bar{v} = 0$. En realidad esta primera consideración, es congruente con la realidad, ya que solamente en casos especiales tales como el de golpe de ariete, es importante considerar compresible el agua. Recordando también que

$$\nabla^2 \bar{v} = \text{grad div } \bar{v} - \text{rot rot } \bar{v}$$

quedando entonces de lo anterior

$$\nabla^2 \bar{v} = - \text{rot rot } \bar{v}$$

Si sustituimos la expresión anterior del laplaciano en la parte derecha de la ecuación (3.1.1) y además ponemos la aceleración total en su forma descompuesta, obtenemos

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} (\text{grad } p + \mu \text{rot rot } \bar{v}) \quad (3.1.2)$$

que viene siendo la ecuación de Navier-Stokes para flúidos incompresibles. Definamos los términos de esta ecuación

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \text{aceleración local}$$

$$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \text{aceleración de Coriolis}$$

Supongamos que las fuerzas másicas \bar{F} admiten potencial, de tal forma que $\bar{F} = \text{grad } \phi$, sustituyamos esta igualdad en la ecuación (3.1.2) y obtendremos

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} + \nu \text{rot rot } \bar{v} + \text{grad } \left(\frac{v^2}{2} - \phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3.1.3)$$

en donde ν es la viscosidad cinemática igual a μ/ρ . Si se define a E como la energía total por unidad de flúido, de manera que

$$E = \rho \frac{v^2}{2} - \rho \phi + p \quad (3.1.4)$$

en donde $\rho \frac{v^2}{2}$ es la energía cinética, $\rho \phi$ es la energía potencial y p es la energía intrínseca y sustituimos a E en la ecuación (3.1.3) obtenemos la expresión siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} \right) + \mu \text{rot rot } \bar{v} + \text{grad } E = 0 \quad (3.1.5)$$

La siguiente hipótesis consiste en considerar que las velocidades de infiltración son tan pequeñas que la variación de éstas con las distancias es despreciable, o sea que $\text{grad } v^2/2 = 0$, quiere decir que de la expresión (3.1.4) desaparece dicho término, quedando

$$E = \rho \phi + p$$

Si sustituimos el valor del potencial de masa ϕ por su equivalente dado por $-gz$, obtenemos la nueva expresión de E de

la forma siguiente:

$$E = \gamma z + p \quad (3.1.6)$$

donde γ es el peso volumétrico del agua. Otra hipótesis consiste en tratar al flujo como irrotacional y además en despreciar la aceleración local, simplificándose considerablemente la ecuación (3.1.5), quedando que

$$\text{grad } E = - \mu \text{ rot rot } \bar{v}$$

por supuesto que el término de la derecha de la ecuación anterior también debe desaparecer; lo hemos dejado temporalmente con el objeto de señalar que aunque $\text{rot } \bar{v} = 0$, la viscosidad no lo es ($\mu \neq 0$). Procedemos así por el hecho de que generalmente se confunde a un flujo con potencial con un flujo no viscoso. Habiendo hecho la observación anterior, dividimos todos los términos de E entre el peso volumétrico del agua e igualamos dicho gradiente a cero, tal como debe ser:

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \text{grad } h = 0 \quad (3.1.7)$$

donde $h = z + \frac{p}{\gamma}$. Si tomamos la divergencia de la expresión anterior, obtenemos

$$\text{div grad } h = \nabla^2 h = 0 \quad (3.1.8)$$

La expresión anterior no se altera para nada si la multiplicamos por el coeficiente de conductividad, o sea que $K \nabla^2 h$ sigue siendo igual a cero; lo mismo $K \text{grad } h$. Recurrámos ahora a la ecuación de continuidad que nos dice que :

$$-\text{div } \bar{v} = 0 \quad (3.1.9)$$

Combinemos la expresión (3.1.8) multiplicada por K con la ecuación (3.1.9) y de esta manera obtendremos la siguiente expresión:

$$\bar{v} = - K \text{ grad } h \quad (3.1.10)$$

o sea la ecuación de Darcy. Se trata por lo tanto de un campo vectorial con potencial, además es de tipo solenoidal ya que $\text{div } \bar{v} = 0$ y por consecuencia se cumple con la ecuación de Laplace.

De acuerdo con todo el desarrollo anterior, podemos llegar a conocer las limitaciones que tiene esta ley de Darcy, reconociendo que la discusión sobre dicha ley se refiere a la ley de Darcy original, o sea aquella que no ha sido modificada o adaptada a casos más complejos. De acuerdo con esto, sus limitaciones serían las siguientes:

- 1.- Debido a que la ecuación de Navier-Stokes implica un medio continuo, por correspondencia, el medio poroso debe ser un medio homogéneo e isotrópico.
- 2.- Se trata de un fluido viscoso en régimen laminar.
- 3.- El régimen es estable.
- 4.- El fluido es incompresible.
- 5.- El flujo es irrotacional.

3.2 Fuerzas Electromoleculares.

La clasificación del agua en relación con su adherencia a los sólidos depende en gran parte de las fuerzas de tipo electromolecular que pueden actuar sobre ella; por esto y debido a que estas fuerzas son de suma importancia, nos ocuparemos de éstas antes de entrar a dicha clasificación.

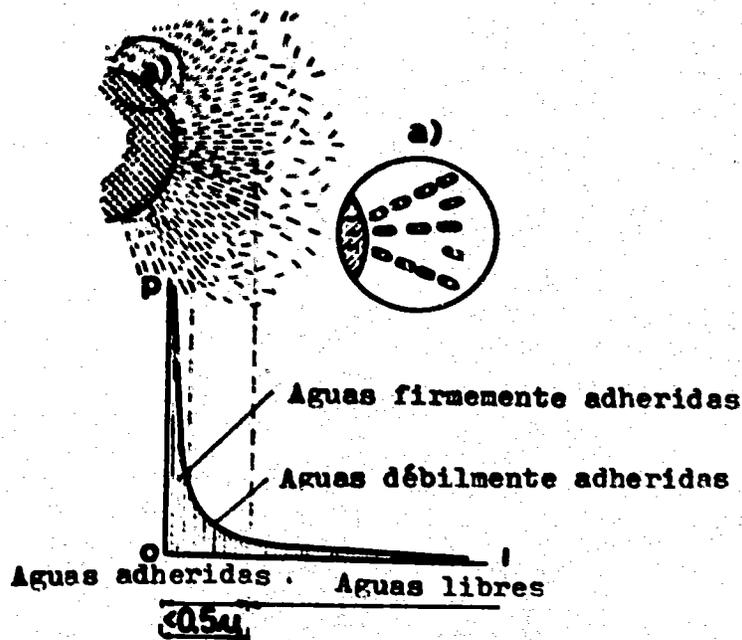


Fig. 1 - Campo electromolecular que rodea a la partícula de suelo.

Sabemos que el agua está constituida por iones positivos y negativos. Las cargas positivas son debidas a los iones Hidrógeno y las cargas negativas son llevadas a su vez por los iones del Oxígeno. Conocemos además la existencia de unas constantes dieléctricas tanto en el agua como en el material sólido que compone el medio poroso. Estas constantes dieléctricas, por naturaleza propia de estos elementos, son distintas, lo cual motiva un campo electromoleculer. Este campo produce una polarización del agua, orientando consecuentemente los dipolos del agua en forma tal que se produce una adherencia de estas moléculas del agua con la superficie sólida del material poroso²(Fig. 1).

Las moléculas del agua sienten el efecto de estas fuerzas electromoleculares solamente en distancias muy pequeñas de la superficie sólida, distancias que no exceden aproximadamente los valores de 0.25 a 0.50 μ (μ = 1 micron = 0.001 mm). En realidad estas fuerzas actúan de acuerdo con una forma similar a la ley de Coulomb ($F = qq'/r^2$). A pesar de que su rango de influencia es muy pequeño, la magnitud de éstas es sumamente elevada, del orden de 10,000 kg/cm²; sin embargo, tal como manifestamos anteriormente respecto a la ley de Coulomb, su magnitud decrece rápidamente al aumentar la distancia del punto en consideración con respecto a la superficie de la partícula sólida, llegando a ser menos importante que las fuerzas de gravedad en una distancia relativamente pequeña.

En la Figura 1 se muestra la atracción molecular en las cercanías de la superficie sólida.

3.3 Clasificación del agua en un medio poroso.

Basándonos en el inciso anterior, podemos concluir - que existen capas de agua muy cercanas a las partículas, que están fuertemente adheridas, y otras capas a mayor distancia que lo estarán menos; precisamente de acuerdo con este criterio podemos clasificar el agua, tal como lo hicimos ver en el inciso 2.2, en la siguiente forma:

- 1.- Aguas firmemente adheridas
- 2.- Aguas débilmente adheridas
- 3.- Aguas libres

Esta clasificación tiene el defecto de la indeterminación en cuanto a las fronteras que separan las distintas capas de agua. Con el objeto de subsanar esta deficiencia, -- A.F. Lebedev³ clasifica el agua de acuerdo con su profundidad, esto es,

- 1.- Agua de vapor
- 2.- Agua higroscópica
- 3.- Agua pelicular
- 4.- Agua gravitacional
- 5.- Agua cristalina
- 6.- Agua químicamente adherida

Examinemos los cuatro primeros tipos de aguas; (1) El agua de vapor es aquella que llena totalmente los vacíos y va de regiones de altas presiones a regiones de bajas presiones;

(2) El agua higroscópica es aquella que se condensa en la superficie de las partículas. Este caso se presenta cuando el material seco entra en contacto con el aire húmedo, los sólidos por su parte absorben la humedad y el volumen de éstos aumenta hasta cierta magnitud. Este fenómeno es notable en las arcillas.

(3) El agua pelicular es el agua retenida por las fuerzas moleculares de adhesión. (4) El agua gravitacional, finalmente, es el agua libre que no está sujeta a fuerzas de adhesión.

En realidad para nuestro efecto, esta clasificación es más bien descriptiva del fenómeno que de utilidad práctica, ya que el agua de vapor en realidad es parte constitutiva del aire y la consideramos como tal; el agua higroscópica, que es agua absorbida por el material poroso, la podemos considerar como parte integral del material sólido. Por el contrario el agua pelicular y el agua gravitacional son los dos tipos que ocupan nuestra atención, ya que la primera es aquella afectada por las fuerzas electromoleculares y la última es lo que llamamos agua libre.

3.4 Regímenes de flujo

Hemos mencionado anteriormente que la ley de Darcy representa el flujo en régimen laminar. Sin embargo, surge la siguiente pregunta: ¿Qué no es posible asimilar la ley de Darcy a otros regímenes? Precisamente, esto ha sido motivo de preocupación de múltiples investigadores, ya que se ha visto que la ley de Darcy en algunos casos no representa fielmente el fenómeno en

la naturaleza. Investigadores como Forchheimer⁴ han recomendado formas distintas a la expresión lineal de la ley de Darcy - - - ($I = av$), considerando que la forma correcta debe ser polinomial:

$$I = av + bv^2 + cv^3 .$$

Sprecker, por otro lado sugirió la siguiente expresión:

$$v = c I^{0.666}$$

en donde I es el gradiente hidráulico, v es la velocidad media, y a , b y c son constantes.

Esta última fórmula en realidad tiene una validez limitada y su aplicación por lo tanto es incierta. Otra forma de visualizar el problema ha sido mediante el número de Reynolds y el coeficiente de fricción f . Este criterio también adolece de defectos, ya que solamente considera las fuerzas viscosas y no toma en cuenta que el medio poroso es un sistema geohidráulico sumamente complicado cuyas propiedades deben influir sobre el flujo de filtración.

Un intento interesante de resolver el problema ha sido el dado por el investigador Slepicka⁷, quien da mucha importancia a los fenómenos microscópicos que se manifiestan en la superficie de contacto agua-sólidos, mediante los efectos de la tensión superficial y de la viscosidad. La tensión superficial no produce más que un efecto de adherencia debido al juego de las moléculas del fluido y de dichos sólidos, o sea viene siendo una fuerza electromolecular. Cabe hacer una importante observación respecto al trabajo de este investigador; ésta consiste en que, a pesar de su generalidad, él no considera un medio no-saturado; sin embargo esto no le quita validez a su estudio ya que lo único que tendríamos que afectar sería su coeficiente de conductividad. Comienza Slepicka con el análisis dimensional de una ecuación que incluye todos los factores que influyen sobre este tipo de movimiento,

$$f(Q, A, L, k, h, g, \rho, \mu, \sigma, E) = 0 \quad (3.4.3)$$

en donde

- Q = Gasto (L^3T^{-1})
- A = Sección Transversal (L^2)
- L = Longitud virtual de filtración (L)
- k = Coeficiente de permeabilidad (L^2)
- h = Carga de presión (L)
- g = Aceleración gravitacional (L/T^2)
- ρ = Masa específica del líquido (M/L^3) ó (FT^2/L)
- μ = Viscosidad dinámica ($ML^{-1}T^{-1}$) ó (FT/L^2)
- σ = Tensión superficial (MT^{-2}) ó (FL/T^4)
- E = Módulo de elasticidad (F/L^2)

Realizando una serie de combinaciones y reemplazando Q y A por $Q/A = v$, la ecuación (3.4.3) se transforma en la siguiente:

$$F\left(\frac{k^{1/2}}{L}, \frac{k^{1/2}}{h}, \frac{v^2}{gk^{1/2}}, \frac{vk^{1/2}}{\mu}, \sigma v^2 k^{1/2}, \rho v^2/E\right) = 0 \quad (3.4.4)$$

quedando finalmente convertida en la siguiente expresión:

$$F\left(k^{1/2}/L, k^{1/2}/h, Fr, Re, We, Ca\right) = 0 \quad (3.4.5)$$

en donde los dos primeros términos combinados en la forma hL/k expresan las condiciones internas y externas de las características hidromecánicas del sistema geohidráulico. Los otros términos son el número de Froude Fr, que representa las fuerzas gravitacionales; el número de Reynolds Re, que representa los efectos viscosos; el número de Weber We, que representa la tensión superficial; y por último el número de Cauchy Ca, que representa los efectos elásticos del agua. Un análisis del fenómeno en base a la ecuación (3.4.5) sería de lo más completo, ya que ésta encierra casi todos los parámetros que puedan influir en este tipo de flujos; en ella, sabiendo que la compresibilidad del agua es despreciable, se puede descartar el número de Cauchy Ca. Para el análisis que vamos a hacer, nos conviene partir de la ecuación (3.4.3), bajo la forma simplificada

$$f(v, k, I_p, \mu, \sigma) = 0 \quad (3.4.6)$$

en donde

$$I_p = \rho g h / L, \quad h = p / \gamma$$

por medio de dos parámetros geohidráulicos:

$$W_1 = \frac{k}{v \mu} \cdot I_p, \quad W_2 = \frac{k}{\sigma} \cdot I_p \quad (3.4.7)$$

siendo W_1 de tipo viscoso y W_2 de tensión superficial; se admitirá que la ecuación (3.4.6) puede escribirse

$$f(W_1, W_2) = 0 \quad (3.4.8)$$

Se supone que existe una relación lineal entre W_1 y W_2 en papel doble logarítmico, siendo luego

$$n \log W_1 + m \log W_2 = 0$$

es decir

$$W_1^m W_2^n = 1$$

Sustituyendo la expresión anterior por sus valores correspondientes de acuerdo con la expresión (3.4.7), obtenemos

$$I_p^{m+n} = \left(\frac{v \mu}{k} \right)^m \cdot \left(\frac{\sigma}{k} \right)^n$$

igualmente

$$I_p = \left(\frac{v \mu}{k} \right)^a \cdot \left(\frac{\sigma}{k} \right)^b \quad (3.4.9)$$

donde $a = m/(m+n)$ y $b = n/(m+n)$ y por lo tanto $a + b = 1$. Si reemplazamos la permeabilidad por el coeficiente de conductividad ($k = \frac{K \mu}{\gamma}$) y consideramos además que $I_p = \gamma I$, obtenemos

$$\gamma^{1/a} I^{1/a} = \frac{v \mu}{K} \left(\frac{\sigma}{K \mu} \right)^{b/a}$$

y despejando la velocidad media

$$v = \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^{b/a} K^{b/a + 1} \cdot \frac{\gamma^{1/a}}{\gamma^{(b/a + 1)}} \cdot I^{1/a}$$

Como $a+b = 1$, si ponemos $f = 1/a = \frac{b}{a} + 1$, queda finalmente

$$v = \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^{f-1} \cdot K^f \cdot I^f \quad (3.4.10)$$

La ecuación (3.4.10) es la ley de Darcy generalizada. Si tomásemos para f el valor 1, obtendríamos inmediatamente la ley de Darcy lineal; quiere decir que para régimen laminar el exponente f debe ser igual a 1. Si de la misma expresión (3.4.10) sacamos logaritmos y agrupamos, obtenemos que el valor de f está dado por

$$f = \frac{\log\left(\frac{\mu}{\rho} \cdot v\right)}{\log\left(\frac{\mu}{\rho} \cdot KI\right)} \quad (3.4.11)$$

en donde v es la velocidad de filtración medida y KI es la velocidad de filtración en régimen laminar. Se deduce en particular que el exponente f puede tomar los valores de acuerdo con la siguiente expresión

$$f \gtrless 1 \quad (3.4.12)$$

es decir, se pueden presentar tres regímenes en el flujo de filtración.

Otra forma de escribir la ley de Darcy generalizada es la siguiente:

$$v = K_f I^f \quad (3.4.13)$$

en donde $K_f = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{f-1} K$ es un nuevo coeficiente de conductividad que ya no es constante, sino por el contrario depende del fluido, del medio poroso y del régimen en que se encuentre el escurrimiento de filtración. Hemos pues, llegado a una conclusión sumamente importante, o sea que, mientras que hasta ahora habíamos considerado el coeficiente de conductividad dependiente del fluido y del medio poroso solamente, ahora vemos que depende también del régimen del flujo. Indudablemente esto viene a ser una complicación para la solución matemática.

Cabe anotar que la tensión superficial utilizada es la correspondiente a la de agua y aire en un tubo de vidrio en vez del correspondiente a un medio poroso; por esto afectamos a la conductividad por un término correctivo,

$$K_f = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{f-1} K \quad (3.4.14)$$

en donde l/a es el término correctivo.

Delimitemos entonces, de acuerdo con el exponente f los distintos regímenes que se pueden presentar. Para valores de

$f > 1$ - Régimen microscópico o electromolecular - prelineal - se designa por la letra p.

$f = 1$ - Régimen laminar - lineal - se designa por la letra n.

$f < 1$ - Régimen turbulento - postlineal - se designa por la letra m.

Hasta ahora hemos expuesto el problema de los regímenes, basándonos únicamente en Slepicka, siendo su forma de ataque puramente matemática; debido a esto, consideramos importante ver el problema en su aspecto físico, tal como lo atacan Kárádi y Nagy². Veamos primero el régimen microscópico o electromolecular, en donde las fuerzas electromoleculares son preponderantes, y en donde existen distintas capas de agua de acuerdo con la magnitud de este tipo de fuerza o de acuerdo con la distancia a la superficie sólida. Las capas firmemente adheridas se pueden considerar como constituyentes de los materiales sólidos. Las capas de agua débilmente adheridas presentarán una resistencia al movimiento, haciéndose necesario lograr un cierto gradiente hidráulico que venza a estas fuerzas resistentes y poder así iniciar el movimiento de estas capas de agua. El proceso es el siguiente: imaginemos un suelo en donde no existen capas de agua libre, existiendo solamente aquellas capas de agua que estén adheridas a las superficies sólidas, digamos que a pesar de su existencia no es capaz de mover las capas de agua débilmente adheridas, si se aumentara gradualmente ese gradiente llegaría el momento en que las capas más lejanas de la superficie comenzarían a moverse, este gradiente hidráulico corresponde al gradiente hidráulico inicial I_1 ; si de una forma u otra se continúa aumentando este gradiente hidráulico, el número de capas que se va integrando al flujo es cada vez mayor, hasta llegar el momento en que por más que se aumenta el gradiente hidráulico, no aumentaría la sección hidráulica. Esto sucede precisamente cuando nos encontramos con las capas de agua firmemente adheridas y el gradiente correspondiente es el gradiente hidráulico crítico de transición entre el

régimen microscópico y régimen laminar, o sea I_{xpn} . Es claro pues que para lograr el gradiente hidráulico inicial I_1 hubo que vencer un esfuerzo límite plástico; quiere decir que el líquido en esta fase no se comporta como líquido Newtoniano ($\tau = \mu \frac{dv}{dy}$) sino más bien como un líquido transitorio entre el cuerpo Bingham, que es un cuerpo visco-plástico cuyo comportamiento está dado por la expresión

$$\tau = \tau_h + \mu \frac{dv}{dy} \quad , \quad (3.4.15)$$

y un líquido Newtoniano generalizado cuyo comportamiento es un tanto distinto del líquido Newtoniano en vista de que su viscosidad dinámica no es constante. En la ecuación (3.4.15) el término τ_h es el esfuerzo plástico límite, μ es la viscosidad dinámica y $\frac{dv}{dy}$ la deformación unitaria. En nuestro caso el esfuerzo límite plástico no es constante, mientras que en el cuerpo Bingham sí lo es, y este esfuerzo límite disminuirá a medida que nos alejemos de las superficies sólidas. No es esta la única diferencia que tenemos con un cuerpo Bingham, otra variante está en el hecho de que la viscosidad dinámica en nuestro caso cambia con el esfuerzo cortante (τ), mientras que en el cuerpo Bingham la viscosidad dinámica es constante. Esto se explica, en cuanto que originalmente las moléculas tenían una orientación determinada, al comenzar el movimiento esta orientación se ve afectada; esto motiva un coeficiente de viscosidad variable, fenómeno que es típico de los líquidos Newtonianos generalizados. Concluimos de lo anterior, que el estudio de un medio poroso bajo el punto de vista de la reología es sumamente complicado, siendo menos que imposible evaluar las variables que entran en este proceso; reconocemos, sin embargo, su utilidad en la explicación o comprensión del problema físico.

Son pocos los autores que se han preocupado por comprender qué sucede más allá de cierto número de Reynolds, en donde se deja el régimen laminar y se pasa al régimen turbulento; más bien la preocupación en general ha sido determinar ese valor límite del número de Reynolds. Los investigadores Karadi y Nagy se salieron de esta tendencia y llegaron a una serie de conclusiones de mucho valor; hélas aquí:

1.- Que la separación del régimen laminar no es en forma brusca; se pasa primero por un régimen de transición en donde los efectos de inercia son preponderantes y luego se llega al régimen turbulento.

2.- En un material poroso, la turbulencia se produce primero en forma local y se va poco a poco generalizando. La turbulencia local sucede primero entre los granos más pequeños.

3.- De acuerdo con lo anterior, la turbulencia puede ocurrir con números de Reynolds muy bajos.

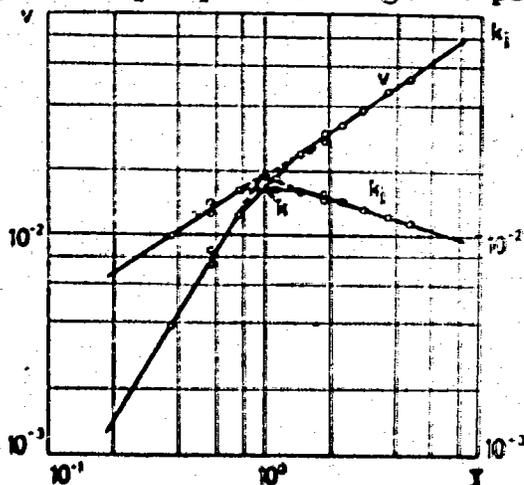
3.5 Resultados experimentales - Slepicka, Karadi y Nagy.

Slepicka utilizó en sus pruebas una gran cantidad de materiales de distintas propiedades físicas y mecánicas y una variedad apreciable de cargas hidráulicas. Los materiales consistieron en piedras arenosas, finas, naturalmente cementadas, hasta conglomerados de estratos cretáceos, concretos utilizados para estructuras hidráulicas, piedras porosas artificiales cementadas con baquelita, así como mezclas de distintas arenas y gravas. Las piedras areniscas tenían diámetros efectivos desde 0.0035 a 0.25 mm (d_{10}), diámetros medios (d_{50}) desde 0.065 hasta 0.65 mm. Los coeficientes de conductividad de las piedras areniscas y de las piedras porosas artificiales oscilaron entre 2.02×10^{-10} a 5.75×10^{-2} cm/s; las porosidades (n) variaron desde el 8 hasta el 30 %. La variación de los gradientes hidráulicos fue desde 2.5×10^{-4} hasta 686. Se utilizaron gases constantes y se experimentó a una temperatura de 10° C.

Dice este investigador que si sus resultados analíticos son correctos, entonces debe haber una relación parabólica entre la velocidad v y el gradiente hidráulico I . Representando esta relación en coordenadas logarítmicas, la relación parabólica debe convertirse en una línea recta con una pendiente igual a f (ver inciso 3.4). Consideró también la relación $k_f = f(I)$, en donde k_f es una velocidad relativa de filtración y cuya expresión es $k_f = v/I$. La figura 2 nos muestra estas dos relaciones, obtenidas de sus experimentos.

Si observamos esta figura 2, vemos que la relación $v = f(I)$ aparece en forma de una recta quebrada, compuesta de tres partes; esto nos comprueba la existencia de tres regímenes: a) régimen prelineal, microscópico ó electromolecular;

b) régimen lineal ó laminar; c) régimen post-lineal ó turbulento. Vemos que para el régimen prelineal su pendiente f es la



mayor; para el régimen lineal, la pendiente es intermedia entre los otros dos regímenes y para el régimen postlineal, la pendiente f es la menor de los tres regímenes. La relación $k_1 = f(I)$ nos aparece también como una línea quebrada compuesta de tres partes, o sea

Fig. 2 - Relación $v = F(I)$ y $k_1 = f(I)$ de los tres regímenes, de acuerdo con esta gráfica, la k_1 es mayor en el caso de régimen lineal.

Consideró también la relación $\Pi_1 = f(\Pi_2)$ e hizo uso nuevamente de las coordenadas logarítmicas tal como muestra la figura 3, comprobándose que sí existe tal relación, de don-

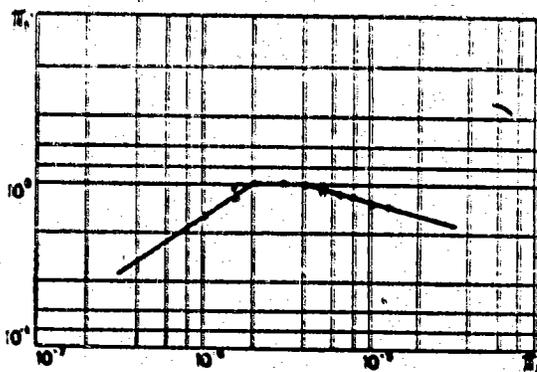


Fig. 3 - Relación entre Π_1 y Π_2 .

de se obtiene que

$$\Pi_1 = a \Pi_2^b \quad (3.5.1)$$

Si sustituimos los valores correspondientes (3.4.7) de Π_1 y Π_2 en la ecuación (3.5.1), obtenemos

$$\frac{k}{\mu} \cdot \frac{I_p}{v} = a \left(\frac{k}{\sigma} \cdot I_p \right)^b$$

Sustituyendo la igualdad $b = 1-f$, o lo que es igual $f = 1 - b$, obtenemos finalmente que

$$v = \frac{1}{a} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^{f-1} \frac{f f}{K I} ,$$

o sea la misma relación que habíamos obtenido en el inciso (3.4). Queda pues comprobada la ley de Darcy generalizada, en forma analítica y en forma experimental.

Ya vimos en el inciso anterior que la determinación de μ y σ no es nada sencilla; por esto es que Slepicka pone la ecuación anterior en términos de una conductividad $K_f = \frac{1}{a} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^{f-1} K^f$.

Fue motivo de preocupación también para este investigador encontrar una forma para poder determinar los gradientes hidráulicos críticos (I_x) que son los correspondientes al paso de un régimen a otro. Adoptaremos su misma nomenclatura, que es la siguiente: para régimen prelineal usaremos la letra p; para el régimen lineal, la letra n y para el régimen post-lineal la letra m; quiere decir que el gradiente crítico que define el paso del régimen prelineal al régimen lineal sería I_{xpn} , el correspondiente al paso del régimen lineal al post-lineal sería I_{xnm} . Parte Slepicka del supuesto que existe la relación $I_x = f(K)$; los resultados experimentales obtenidos vienen dados en las figuras 4 y 5 en coordenadas bilogarithmicas. De la gráfica 5 se obtuvo la relación empírica:

$$I_{xnm} = \frac{0.15}{\sqrt{K^3}}$$

Continuó Slepicka con sus experimentos, esta vez en relación con los exponentes f , en donde f de acuerdo con la nomenclatura anterior toma los siguientes valores:

- $f = p$ (régimen prelineal)
- $f = n$ (régimen lineal)
- $f = m$ (régimen post-lineal)

Considera el señalado investigador que tanto los exponentes como las conductividades de cada régimen son funciones del líquido (V_k) y del medio poroso (V_p), o sea

$$K = f(V_p, V_k)$$
$$K_m = f'(V_p, V_k)$$

$$\begin{aligned} K_p &= f''(v_p, v_k) \\ n &= F(v_p, v_k) \\ p &= F'(v_p, v_k) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

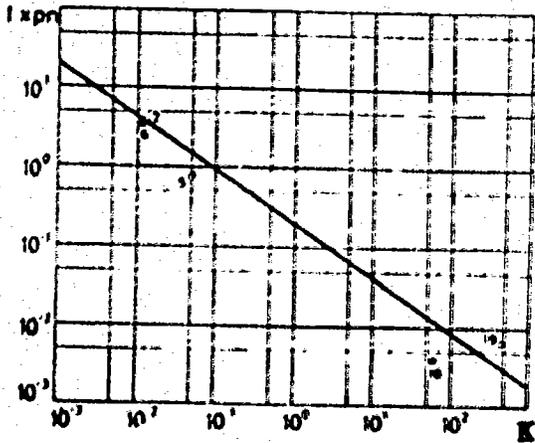


Fig. 4 - Relación entre I_{xpn} y K

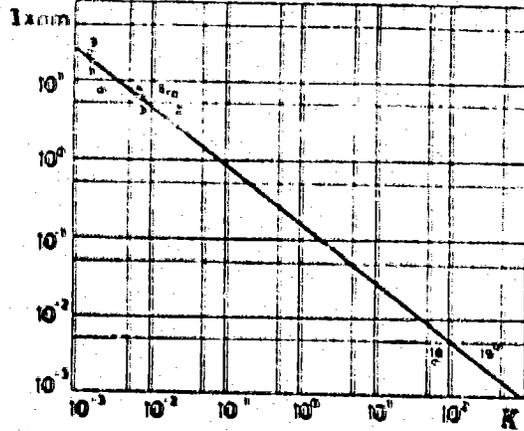


Fig. 5 - Relación entre I_{xnm} y K

Las expresiones (3.5.2) se pueden simplificar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_f &= f(K) \\ f &= F(K) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

En base a lo anterior se obtuvieron las gráficas experimentales 6, 7, 8 y 9. De la gráfica 6 se obtuvo la relación empírica siguiente:

$$K_m = 0.9 K^{5/6}$$

Nos señala también Slepicka que en régimen prelineal en algunos casos, tal como el de las rocas granuladas finas, el valor de la tangente de la relación $k_f = f(I)$ es muy baja, o sea que el valor de su exponente p tiende a $n = 1$.

Comparemos la ley de Darcy generalizada con la ecuación de Chézy ($v=C\sqrt{RI}$), hagamos que f valga $1/2$ y consideremos que $K^{1/2}$ sea igual al radio hidráulico (R), vemos que llegamos a la misma expresión de Chézy. Significa esto que la ley de Darcy no es más que la ecuación de Chézy también generalizada, en donde el coeficiente de Chézy no es constante sino que varía con el exponente.

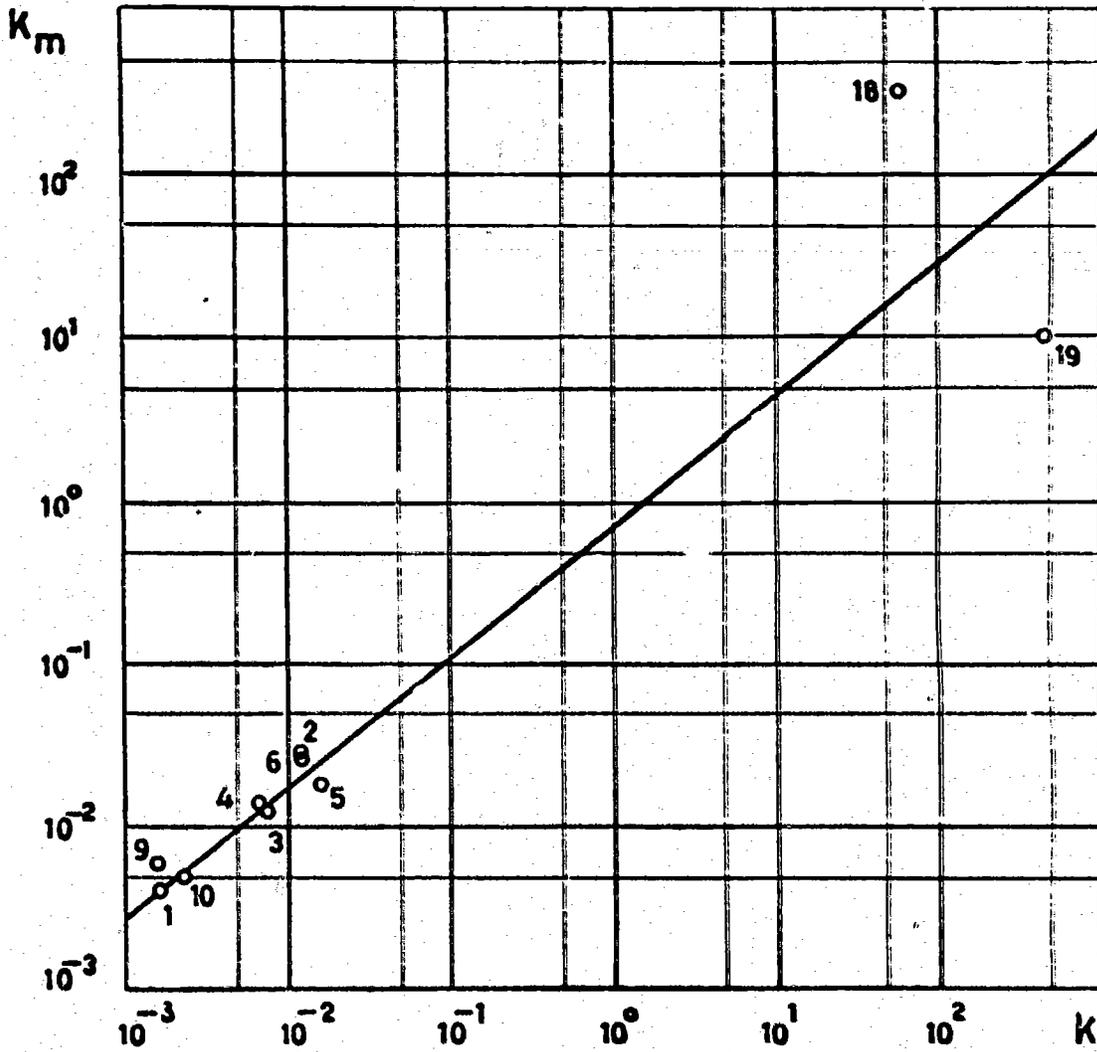


Fig. 6

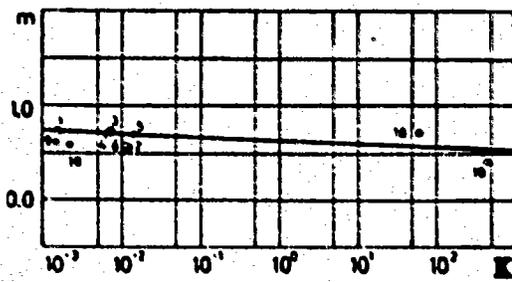


Fig. 7

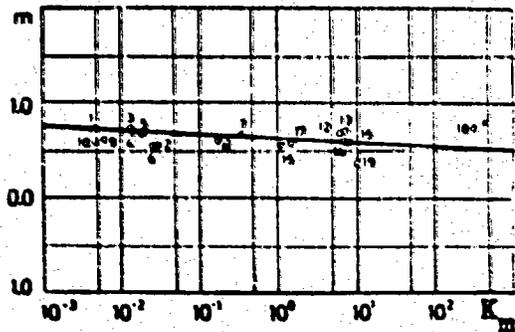


Fig. 8

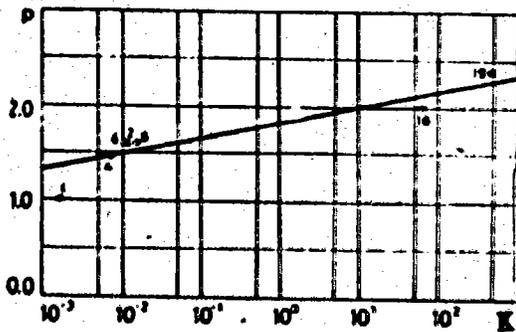


Fig. 9

Nos ocuparemos a continuación de los resultados obtenidos por los investigadores Karadi y Nagy. Al igual que hicimos con Slepicka, comencemos viendo los elementos que utilizaron estos señores para realizar sus experiencias.

Para el estudio del régimen turbulento, usaron bolas de acero de 0.25 cm, 0.42 cm y de 1.6 cm de diámetro respectivamente. Utilizaron también combinaciones de grava y arena. Se buscó en estas combinaciones artificiales que los coeficientes de uniformidad de las granulometrías fueran semejantes. Fueron seis mezclas con diámetros efectivos de 0.015, 0.12, 0.52, 0.83 y 1.2 cm; sus coeficientes de uniformidad correspondientes fueron de 4.3, 4.8, 4.8, 5.4, 4.7, y 4.7.

Para el estudio del régimen microscópico se utilizaron arcillas en donde estuvieran presentes las aguas débilmente adheridas, o sea arcillas con distintas saturaciones y por lo tanto con distintas conductividades. Cabe decir que Karadi y Nagy, al contrario de Slepicka, no pretendieron obtener resultados cuantitativos, sino más bien cualitativos.

Pasemos a ver primeramente las experiencias relativas al fenómeno de la turbulencia. Suponen ellos una relación del siguiente tipo:

$$Re^{\tau} = f(Re) \quad (3.5.4)$$

en donde Re es el número de Reynolds igual a vd/ν y $\tau = \frac{2gdI}{v^2}$

El significado de los términos anteriores es el siguiente:

- v - la velocidad de filtración
- d - diámetro medio de la partícula
- ν - viscosidad cinemática (cm^2/s)
- I - gradiente hidráulico
- g - aceleración gravitacional

Observaron estos investigadores que para valores del número de Reynolds debajo de cierto valor crítico, se cumplía la siguiente relación:

$$Re \tau = \text{Constante}$$

Sustituyendo los valores correspondientes

$$\frac{vd}{\nu} \frac{2gdI}{\sqrt{2}} = C ,$$

despejando la velocidad y simplificando obtenemos

$$v = \frac{1}{C} \frac{2gd^2}{\nu} I = KI \quad (3.5.5)$$

Quiere decir que la línea horizontal que aparece en la figura 10 corresponde al régimen laminar, o sea cuando $Re \tau = \text{constante}$. Podemos observar de esta figura que existen tres secciones definidas: 1) la línea horizontal que es la representativa del régimen laminar, 2) la línea curva que es la

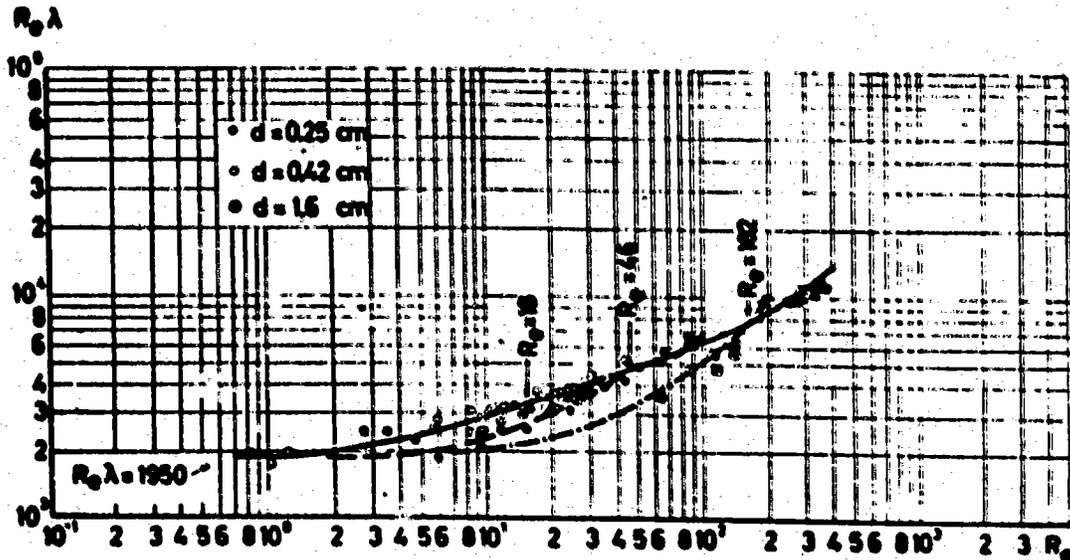


Fig. 10

etapa de transición, en donde los efectos de inercia son los más importantes y 3) la línea recta con pendiente a la cual tienden a unirse las otras líneas en distintos puntos; es ésta la línea representativa del régimen turbulento. Podemos observar de esta gráfica que la desviación de la línea recta horizontal se manifiesta primero en las correspondientes a

diámetros más pequeños, $d=0.25\text{cm}$, luego en la correspondiente al mediano, $d=0.42\text{ cm}$ y finalmente en la línea correspondiente al diámetro mayor usado, $d=1.6\text{ cm}$. Otra observación de importancia es que el rango de transición es menor mientras menor sea el diámetro.

Referente a los experimentos realizados con mezclas artificiales, descritas anteriormente, los resultados se presentan en la siguiente gráfica 11.

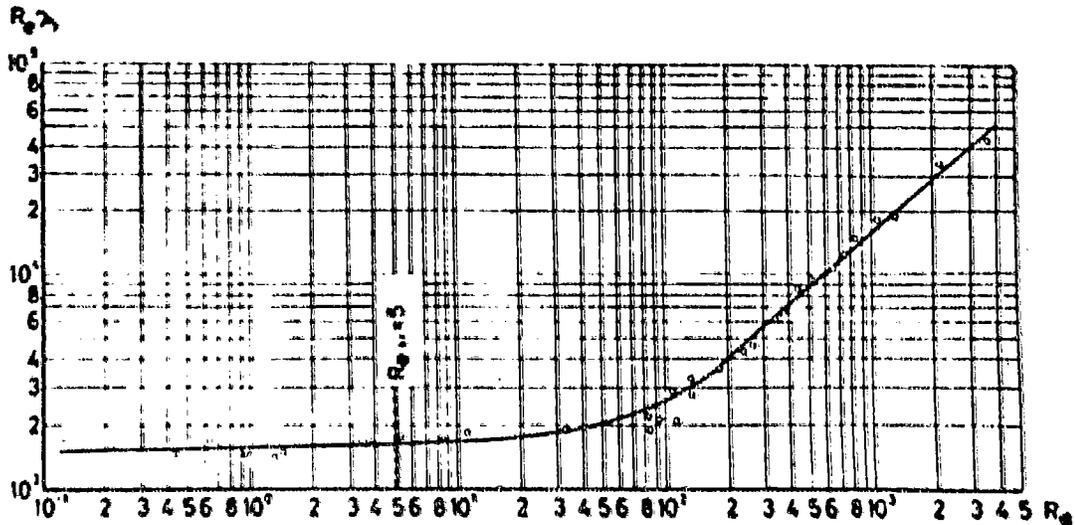


Fig. 11

Esta gráfica presenta una diferencia con la de la figura 10: ésta consiste en que aquí no se ve la separación del régimen laminar para cada diámetro debido a que las mezclas de material no representaban un conjunto homogéneo. Esto no contradice en absoluto las experiencias anteriores, más bien se complementan, ya que nos dice que en un material no homogéneo la turbulencia se va presentando localmente, primero en aquellas regiones donde existen materiales finos y luego se va propagando poco a poco esta turbulencia. Obsérvese la semejanza que se presenta con el caso de turbulencia en tubos.

Veamos por último las experiencias realizadas con respecto al régimen microscópico. Como habíamos dicho, para esto se utilizaron arcillas de distintos contenidos de agua; esto con el objeto de ver la influencia de las aguas débilmente ad-

heridas y aguas libres. De acuerdo con este razonamiento, es de esperarse que mientras mayor sea el contenido de aguas, más probabilidades existirán de que existan aguas libres y es de esperarse por lo tanto que el flujo se realice más prontamente; al contrario de un suelo con poca agua, en donde es de esperarse que existan capas de agua débilmente adheridas en donde haya que vencer primero a una fuerza electromolecular de atracción. Los resultados de estas experiencias vienen dados en las siguientes gráficas 12, 13, 14, 15 y 16.

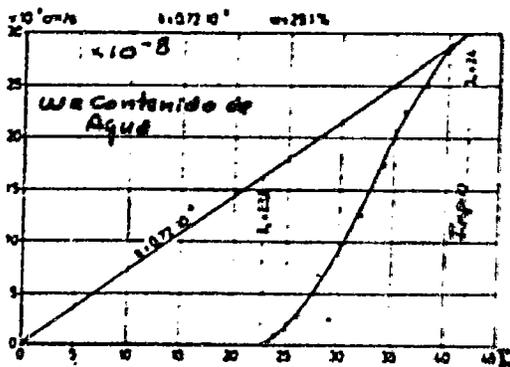


Fig. 12

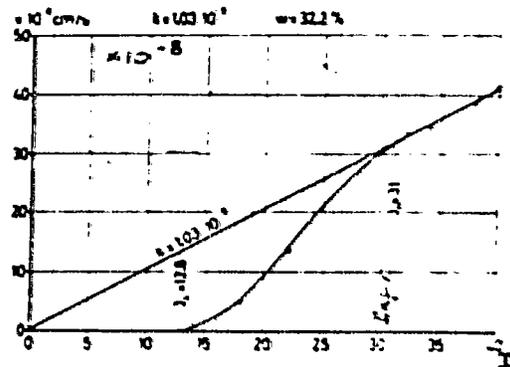


Fig. 13

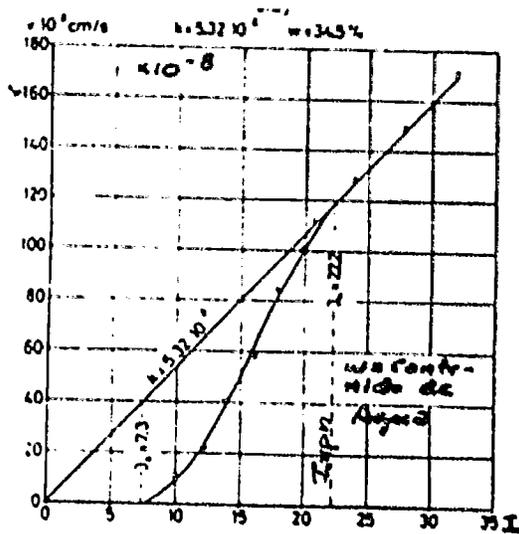


Fig. 14

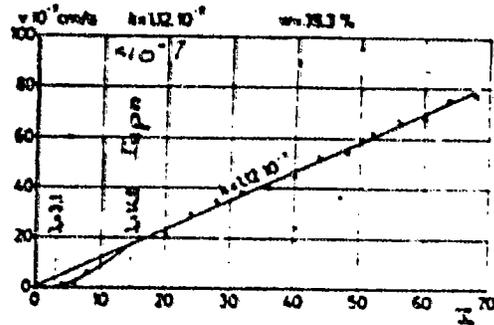


Fig. 15

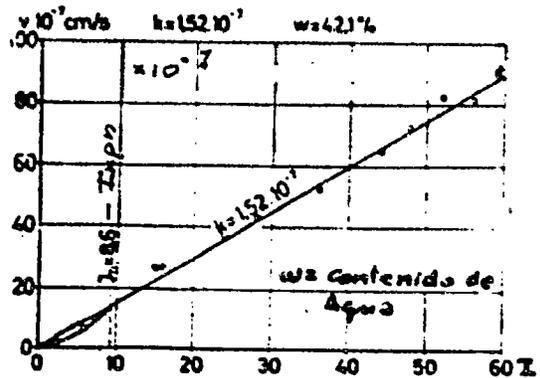


Fig. 16

Observamos de estas gráficas varios aspectos interesantes: 1) a medida que aumenta el contenido de agua, los gradientes hidráulicos críticos I_{xpn} van disminuyendo, también los gradientes hidráulicos I_k que representan el inicio del movimiento de las capas de agua débilmente adheridas; 2) la velocidad crítica v_{xpn} generalmente va siendo cada vez mayor.

3.6 Discusión y Conclusiones.

Preocupémonos ahora por comparar los resultados de estos investigadores, aunque reconociendo de antemano que Karadi y Nagy solamente se preocuparon por obtener resultados cualitativos mientras que Slepicka trató de obtener resultados cuantitativos. Veamos primeramente el fenómeno de la turbulencia, para ésto, nos referiremos a las gráficas 5, 6 y 7 de Slepicka y la gráfica 10 de Karadi y Nagy. De la figura 10 deducimos que mientras menor sea el diámetro, más rápidamente se realizará la turbulencia; la figura 5, sin embargo nos dice que a medida que aumenta la conductividad más bajo será el gradiente hidráulico crítico I_{xnm} . Aparentemente hay una contradicción, ya que el coeficiente de conductividad crece con el diámetro. Recordemos sin embargo que la inestabilidad definida por Karadi y Nagy está en función del número de Reynolds y no de un gradiente crítico. Para poder hacer una comparación real, tomemos dos puntos en las figuras 5, 6 y 7 correspondientes a dos conductividades distintas, $K = 10^0 = 1$ cm/s y $K = 10^2 = 100$ cm/s. Se trata por lo tanto de dos suelos con diámetros efectivos distintos, en donde el mayor corresponde a la conductividad mayor, o sea $K = 100$ cm/s. Los valores sacados de la gráficas mencionadas son los siguientes:

De la gráfica 5:

para $K = 1$ cm/s se tiene

$$I_{xnm} = 0.2$$

De la gráfica 6:

$$K_m = 0.9$$

De la gráfica 7:

$$m = 0.65$$

para $K = 100$ cm/s se tiene

$$I_{xnm} = 0.008$$

$$K_m = 30$$

$$m = 0.55$$

Los valores correspondientes de sus velocidades críticas serán por lo tanto:

$$v = 0.9 \times 0.2^{0.65} = 0.317 \text{ cm/s} \quad \text{y} \quad v = 30 \times 0.008^{0.55} = 2.1 \text{ cm/s}$$

Como el diámetro efectivo para la conductividad igual a 1 cm/s será menor que el correspondiente a la conductividad igual a 100 cm/s, nos queda que los números de Reynolds críticos serán por consiguiente:

$$Re_{K=1} = 0.317 \times d/0.01 \quad \text{y} \quad Re_{K=100} = 2.1 \times d/0.01$$

o sea,

$$Re_{K=1} < Re_{K=100}$$

Quiere decir que mientras menor sea el diámetro efectivo, se necesita un número de Reynolds menor para llegar a la turbulencia.

Las gráficas 7 y 8 nos indican que m oscila entre 0.5 y 1, esto está en perfecta concordancia con la ecuación (3.4.1) ó la (3.4.2).

Como señalamos anteriormente, de las figuras 12, 13, 14, 15 y 16 de Karadi y Nagy, se deduce que a medida que aumenta la conductividad por aumento del contenido de agua, disminuye el gradiente hidráulico crítico I_{xpn} y generalmente aumenta la velocidad crítica v_{xpn} . De acuerdo con Slepicka al aumentar la conductividad disminuye también este gradiente hidráulico crítico, de manera que existe concordancia entre ambos en este aspecto. Comparemos a continuación las velocidades críticas utilizando dos puntos en las figuras 4 y 9 de Slepicka, tomemos por ejemplo los correspondientes a $K=10^{-1}$ cm/s y a $K=10$ cm/s, recordemos además la observación que nos hace este investigador respecto al coeficiente de conductividad en régimen microscópico en la cual nos advierte que él observó que éste era prácticamente igual al coeficiente de conductividad en régimen laminar, o sea que $K_p = K_n$.

Para $K = 1 \text{ cm/s}$

$$I_{xpn} = 0.22$$

$$p = 1.80$$

$$v_{xpn} = 1 \times 0.22^{1.80} = 0.066 \text{ cm/s}$$

Para $K = 10 \text{ cm/s}$

$$I_{xpn} = 0.07$$

$$p = 2.0$$

$$v_{xpn} = 10 \times 0.07^2 = 0.049 \text{ cm/s}$$

o sea que

$$v_{xpn-K=1} > v_{xpn-K=10}$$

Tomemos otros puntos sobre las mismas gráficas, digamos para $K = 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} y hagamos los mismos cálculos anteriores; de acuerdo con éstos obtenemos:

$$v_{xpn-K=10^{-3}} = 0.0499, \quad v_{xpn-K=10^{-2}} = 0.187, \quad v_{xpn-K=10^{-1}} = 0.10$$

Parece ser que estas velocidades críticas comienzan primero a aumentar y luego a disminuir, a medida que se aumenta el contenido de agua:

$$v_{xpn-K=10^{-3}} < v_{xpn-K=10^{-2}} > v_{xpn-K=10^{-1}} > v_{xpn-K=10^0} > v_{xpn-K=10^1}$$

Obsérvese que en las gráficas de Karadi y Nagy (12, 13, 14, 15 y 16) también van aumentando estas velocidades críticas y luego al final, en la figura 16, disminuye. Otra cuestión importante es el rango de las conductividades utilizadas, Karadi y Nagy utilizaron predominantemente arcillas, mientras que Slepicka, de acuerdo con sus gráficas, parece ser que las experiencias registradas en dichas gráficas corresponden a arenas y gravas. A pesar de todas estas limitaciones, nos atrevemos a dar nuestra opinión, creemos que no existe ninguna contradicción entre los dos estudios, primero por la concordancia que existe con respecto al gradiente crítico y segundo por la forma semejante de variación que tiene la velocidad crítica.

Otra cuestión que nos llama la atención es el hecho que resulta al comparar los gradientes críticos en las figuras 4 y 5, de que hay un rango muy pequeño de valores del gradiente para el régimen laminar. Un proceso práctico para tomar en cuenta la posibilidad de que un flujo de filtración se salga del régimen laminar, sería el de estar revisando para las conductividades que se estén presentando de acuerdo con el grado de saturación, los valores de los gradientes críticos correspondientes, y comprobar si el gradiente hidráulico que se presenta en ese momento está entre esos dos valores críticos.

El objeto de este capítulo ha sido solamente el de señalar que en el régimen de filtraciones se pueden presentar distintos regímenes y que nuestros valores tradicionales de la conductividad y coeficiente de difusividad podrían ser afectados

por la presencia de distintos regímenes de flujo. Como veremos en el último capítulo, no hemos querido introducir esta posibilidad, por un lado debido a la complicación matemática y por el otro debido a la incertidumbre de ciertos resultados, ya que estos estudios apenas están en sus inicios. Creemos que para nuestro caso, es más viable de que se nos presente un régimen microscópico especialmente en aquellas condiciones en que tenemos un ascenso brusco del nivel del embalse.

Bibliografía

- 1.- Enzo Levi - "Mecánica de los líquidos" - U.N.A.M.
- 2.- G.Karadi y I.V.Nagy - "Investigations into the validity of the linear seepage law" - Inter. Assoc. for Hydr. Res. - Ninth Convention - Dubrovnik - (1961)
- 3.- Polubarinova Kochina - "Theory of Ground Water movement" - Princeton University Press - (1962)
- 4.- Forchheimer, Ph. - "Hydraulik" - Leipzig - (1922)
- 5.- Frantisek Slepicka - "The laws of filtration and limits of their validity" - Inter. Assoc. for Hydr. Res. - Ninth Convention - Dubrovnik - (1961)

Parte II

Soluciones Matemáticas de la Difusión.

Capítulo IV

Soluciones numéricas de la ecuación diferencial de la Difusión de Calor.

4.1 Métodos iterativos. 1,2

Recordemos nuevamente la ecuación diferencial que nos ocupa, o sea la ecuación de la difusión de calor,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(H,x) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (4.1.1)$$

donde H es la altura de la curva de infiltración en cualquier punto y en cualquier tiempo, t es la variable tiempo, x es la variable distancia horizontal, D(H,x) es el coeficiente de difusividad igual a $\frac{KH}{nS}$, K es el coeficiente de conductividad, S es el grado de saturación y n es la porosidad. Recordemos que en el segundo capítulo señalamos como varía S con la distancia horizontal y con la altura, también para K.

Imaginemos un problema con las siguientes condiciones de frontera y condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} H &= H_0 & , & & x &= 0 & , & & t &> 0 \\ H &= H_1 & , & & t &= 0 & , & & x &> 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

en donde $H_0 > H_1$ y $0 < x < \infty$. Según vemos estamos estudiando el caso de un material poroso seminfinito con pared vertical en $x = 0$ y con un nivel freático inicial de altura H_1 . Se trata por lo tanto de un proceso de imbibición.

Sigamos un método que fue utilizado por Boltzmann, introduciendo una nueva variable que lleva su nombre:

$$\eta = \frac{x}{2(D_0 t)^{1/2}} \quad (4.1.3)$$

en donde D_0 es el coeficiente de difusividad aguas arriba, o sea en $x = 0$.

Derivemos parcialmente la variable de Boltzmann con respecto al tiempo y con respecto a la distancia,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{4D_0^{1/2} t^{3/2}} ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{x}{4D_0^{1/2} t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2(D_0 t)^{1/2}} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2(D_0 t)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.1.5)$$

Sustituyendo (4.1.4) y (4.1.5) en la ecuación (4.1.1) obtenemos,

$$\begin{aligned} -\frac{x}{4D_0^{1/2} t^{3/2}} \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \frac{1}{4(D_0 t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(H, x) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) \\ -\frac{D_0^{1/2} x}{t^{1/2}} \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D(H, x) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Introduzcamos las nuevas variables adimensionales:

$$h = \frac{H}{H_0} ; \quad D = \frac{D(H, x)}{D_0} \quad (4.1.7)$$

Si derivamos las dos expresiones anteriores con respecto a η , obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = H_0 \frac{\partial h}{\partial \eta} ; \quad \frac{\partial (D(H, x))}{\partial \eta} = D_0 \frac{\partial D}{\partial \eta}$$

Sustituyendo las dos derivadas anteriores en la ecuación (4.1.6) obtenemos finalmente

$$-2\eta \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \quad (4.1.8)$$

Obsérvese que mediante la transformación de Boltzmann hemos cambiado una ecuación diferencial parcial de segundo grado en una ecuación diferencial ordinaria, ya que como h depende solamente de η , la ecuación (4.1.8) se puede escribir en la siguiente manera:

$$-2\eta \frac{dh}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{dh}{d\eta} \right) \quad (4.1.9)$$

Las condiciones de frontera (4.1.2) también se transforman, quedando simplificadas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h = 1 & \quad \eta = 0 \\ h = h_1 & \quad \eta = \infty \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

La ecuación (4.1.9) es fácilmente resoluble; para esto introduzcamos una variable más:

$$u = D \frac{dh}{d\eta} \quad (4.1.11)$$

Sustituyendo la variable u en la ecuación diferencial (4.1.9) obtenemos la solución a la ecuación, quedando

$$h = 1 - A \int_0^{\eta} \frac{1}{D} e^{-\sqrt{\frac{2\eta}{D}} d\eta} d\eta \quad (4.1.12)$$

donde A es una constante de integración que se obtiene por las condiciones de frontera. Reemplacemos la segunda condición de frontera (4.1.10) por la siguiente:

$$h = h_1 \quad , \quad \eta = \eta_{lim} \quad ,$$

donde η_{lim} es un valor suficientemente grande y además finito, de manera que para ese valor $\frac{dh}{d\eta} \approx 0$. De esta manera nos quitamos el problema de una integración hasta infinito por un valor lo suficientemente grande, sin incurrir en un error grave. Nos queda entonces que la constante A de integración está definida por la siguiente expresión:

$$A = \frac{1 - h_1}{\int_0^{\eta_{lim}} \frac{1}{D} e^{-\sqrt{\frac{2\eta}{D}} d\eta} d\eta} \quad (4.1.13)$$

En el caso de que el coeficiente de difusividad fuera constante y además recordando la propiedad siguiente de esta función de error:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{D^2}} e^{-\eta^2/D} d\eta = 1 \quad ,$$

obtenemos la solución para este caso:

$$h = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{D^2}} e^{-\eta^2/D} d\eta \quad (4.1.14)$$

Si el valor constante de D corresponde a una $D(H,x)$ igual a D_0 , entonces $D = \frac{D(H,x)}{D_0} = 1$, simplificándose la solución

(4.1.14):

$$h = 1 - \operatorname{erf} \eta \quad (4.1.15)$$

en donde

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

Los valores de la integral anterior (función de error) vienen dados en el cuadro No. 2.

Como decíamos anteriormente, el caso de nuestro coeficiente de difusividad es aquél que depende de dos variables: la distancia horizontal x y la altura de la curva de infiltración H . Un coeficiente de difusividad de este tipo hace que sea menos que imposible integrar la ecuación (4.1.12) mediante un proceso iterativo; es por ésto que simplificamos de un coeficiente de difusividad dependiente de dos variables a un coeficiente de difusividad que depende de una sola variable H . La transformación se logra considerando valores promedios en el sentido horizontal x tal como veremos posteriormente. Podemos entonces pensar que tenemos una función de $D = D(H)$ de manera que,

$$D = \frac{D(h)}{D_0} = 1 - f(H) \quad (4.1.16)$$

El tipo de función de la expresión (4.1.16) puede ser de cualquier tipo de función. Aclarado lo anterior, podemos pensar en un proceso iterativo de la siguiente forma:

1.- De un cierto valor de $D(h)$, calcular D mediante la ecuación (4.1.16). Graficar o tabular D contra h , donde $h = H/H_0$.

2.- Tabular valores de η que estén convenientemente espaciados, probablemente cada 0.1η , en un rango tal que el valor de h dado por la ecuación (4.1.15) sea prácticamente cero o h_1 en el límite superior de η .

3.- Calcular h por la ecuación (4.1.15) para cada valor de η .

4.- De la gráfica o cuadro con los valores de D vs h , sáquese los valores correspondientes de D a los valores de h calculados en el paso 3.

Cuadro No. 2 - Valores de la función de error
y de funciones asociadas

z	$\text{erfc } z$	$\text{erfc } z^2$	$\text{erfc } z^3$	$\text{erfc } z^4$	$\text{erfc } z^5$	$\text{erfc } z^6$	$\text{erfc } z^7$	$\text{erfc } z^8$	$\text{erfc } z^9$	$\text{erfc } z^{10}$	$\text{erfc } z^{11}$	$\text{erfc } z^{12}$
0	1.0	0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.05	0.9460	0.05372	0.94328	1.0284	1.0312	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.1	0.8905	0.2234	0.88737	1.0312	1.0396	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.15	0.8349	0.3210	0.83104	1.0338	1.0507	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.2	0.7793	0.4336	0.77498	1.0364	1.0716	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.25	0.7237	0.5610	0.71637	1.0390	1.0964	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.3	0.6681	0.7046	0.65776	1.0416	1.1352	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.35	0.6125	0.8646	0.60318	1.0442	1.1892	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.4	0.5569	1.0410	0.55382	1.0468	1.2596	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.45	0.5013	1.2354	0.50318	1.0494	1.3484	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.5	0.4457	1.4580	0.44768	1.0520	1.4568	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.55	0.3901	1.7106	0.39323	1.0546	1.5860	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.6	0.3345	1.9946	0.33856	1.0572	1.7372	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.65	0.2789	2.3106	0.28426	1.0598	1.9124	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.7	0.2233	2.6594	0.23097	1.0624	2.1128	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.75	0.1677	3.0426	0.17868	1.0650	2.3384	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.8	0.1121	3.4510	0.12710	1.0676	2.5904	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.85	0.0565	3.8854	0.07724	1.0702	2.8696	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.9	0.0009	4.3462	0.03008	1.0728	3.1772	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
0.95	0.0000	4.8342	0.00712	1.0754	3.5144	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.0	0.0000	5.3496	0.00000	1.0780	3.8812	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.1	0.0000	5.8934	0.00000	1.0806	4.2884	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.2	0.0000	6.4656	0.00000	1.0832	4.7368	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.3	0.0000	7.0674	0.00000	1.0858	5.2272	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.4	0.0000	7.7006	0.00000	1.0884	5.7616	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.5	0.0000	8.3662	0.00000	1.0910	6.3400	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.6	0.0000	9.0654	0.00000	1.0936	6.9644	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.7	0.0000	9.8000	0.00000	1.0962	7.6368	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.8	0.0000	10.5714	0.00000	1.0988	8.3584	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
1.9	0.0000	11.3806	0.00000	1.1014	9.1212	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.0	0.0000	12.2286	0.00000	1.1040	9.9264	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.1	0.0000	13.1166	0.00000	1.1066	10.7744	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.2	0.0000	14.0454	0.00000	1.1092	11.6664	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.3	0.0000	15.0162	0.00000	1.1118	12.6032	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.4	0.0000	16.0300	0.00000	1.1144	13.5864	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.5	0.0000	17.0878	0.00000	1.1170	14.6172	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.6	0.0000	18.1906	0.00000	1.1196	15.6968	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.7	0.0000	19.3394	0.00000	1.1222	16.8264	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.8	0.0000	20.5342	0.00000	1.1248	18.0072	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
2.9	0.0000	21.7760	0.00000	1.1274	19.2400	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800
3.0	0.0000	23.0658	0.00000	1.1300	20.5248	0.9921	0.9442	0.8940	0.8424	0.7895	0.7353	0.6800

$\text{erfc } z = 1 - \text{erf } z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$
 $\text{erfc } z^2 = 1 - \text{erf } z^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^2} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^3 = 1 - \text{erf } z^3 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^3} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^4 = 1 - \text{erf } z^4 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^4} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^5 = 1 - \text{erf } z^5 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^5} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^6 = 1 - \text{erf } z^6 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^6} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^7 = 1 - \text{erf } z^7 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^7} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^8 = 1 - \text{erf } z^8 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^8} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^9 = 1 - \text{erf } z^9 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^9} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^{10} = 1 - \text{erf } z^{10} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^{10}} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^{11} = 1 - \text{erf } z^{11} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^{11}} e^{-t} dt$
 $\text{erfc } z^{12} = 1 - \text{erf } z^{12} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z^{12}} e^{-t} dt$

5.- Con los valores de D calculados en el paso anterior, calcular h por medio de la ecuación (4.1.12). La constante A se calcula por medio de la ecuación (4.1.13), o sea para las condiciones de que $h = 0$ (ó a h_1) cuando $\eta = \eta_{lim.}$, donde $\eta_{lim.}$ es el valor máximo de η .

6.- Interpolar ya sea gráficamente o numéricamente valores de D correspondientes a cada h calculada en el paso 5. Utilizando estos nuevos valores de de D, repita el paso 5 hasta que valores sucesivos de h para un valor dado de η concuerde dentro de los límites de un error permitido.

4.2 Una mejor primera aproximación a la solución.

Se ha visto que para funciones de D(h) que tienen una fuerte variación, el proceso iterativo explicado en el inciso anterior es de lenta convergencia; o sea, se ve la necesidad de una mejor primera aproximación a la solución. En la ecuación (4.1.1), sabemos que para régimen estable el término $(D(H) \frac{\partial H}{\partial x})$ es igual a una constante en todos los puntos del sistema. En flujo no-estable, por el contrario, este producto no es constante; sin embargo puede ser suficientemente cercano a una constante, de manera que los resultados tomen una forma más sencilla en término de una variable que incluya tal producto. Definimos la nueva variable s en la siguiente forma:

$$s = \frac{\int_0^h D dh}{\int_0^1 D dh} \quad (4.2.1)$$

de manera que

$$\begin{aligned} s = 1 & , h = 1 & , \eta = 0 \\ s = 0 & , h = 0 & , \eta = \infty \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Llamaremos D_I a la integral que aparece en el denominador de la ecuación (4.2.1): $\int_0^1 D dh$.

Desarrollando la ecuación (4.2.1):

$$\frac{ds}{d\eta} = \frac{D}{D_I} \frac{dh}{d\eta}$$

o sea

$$\frac{dh}{d\eta} = \frac{D_I}{D} \frac{ds}{d\eta} \quad (4.2.3)$$

Sustituyendo (4.2.3) en (4.1.9), obtenemos

$$-2 \eta \frac{D_I}{D} \frac{ds}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{D D_I}{D} \frac{ds}{d\eta} \right)$$

simplificando,

$$-2 \eta \frac{ds}{d\eta} = D \frac{d^2 s}{d\eta^2} \quad (4.2.4)$$

Utilizando la variable $u = \frac{ds}{d\eta}$ obtenemos la solución de la ecuación diferencial (4.2.4):

$$s = 1 - A \int_0^\eta e^{-\int \frac{2\eta}{D} d\eta} d\eta \quad (4.2.5)$$

Si comparamos la ecuación (4.2.5) con la ecuación (4.1.12) vemos que la primera (4.2.5) es bastante más sencilla por el hecho de no tener dentro de la integral el término $1/D$. Otra ventaja que observaron Crank y Henry^{3,4} consiste en que todas las curvas $s-\eta$ tienen formas semejantes. Fundamentalmente estas son líneas rectas y dentro de los valores de s de 0.2 a 1 se observó una pendiente aproximada de $-2/\sqrt{\pi D_I}$; precisamente ésta es la pendiente que tendrían las curvas en $\eta = 0$ si D tuviera valores constantes iguales a D_I .

Se visualiza por lo tanto, una primera aproximación de h con s de gran utilidad. Si consideramos a $D=D_I$, valores constantes, la solución de la ecuación (4.2.4), tal como en el inciso anterior, sería

$$s = 1 - \text{erf } \eta / D_I^{1/2} \quad (4.2.6)$$

que es precisamente la expresión que nos da los primeros valores de s con respecto a η . Obsérvese la simplicidad del asunto, ya que una vez obtenido el valor de D_I , se determina la pendiente $-2/\sqrt{\pi D_I}$, se traza una recta del eje vertical s en el punto $s=1$ con la pendiente calculada hasta que interseque el eje horizontal η . De esta manera se determina el valor límite de η y para cualquier valor de η el valor de s correspondiente.

El proceso iterativo es semejante al del párrafo anterior; veamos su secuela:

- 1.- Como conocemos $D = D(h)$ y $h = f(s)$, tabúlense o gráfiquense los valores de D vs. s .
- 2.- Tabúlense los valores de s convenientemente espaciados (0.1η) en un rango tal, que el valor de s obtenido por la ecuación (4.2.6) sea prácticamente cero en el límite superior de η .
- 3.- Calcúlense los valores de s correspondientes a cada η por la ecuación (4.2.6)
- 4.- Encuéntrense los valores correspondientes de D a los valores de s calculados en el paso anterior mediante la relación D vs. s .
- 5.- Utilizando los valores de D anteriores, calcúlense las s por medio de la ecuación (4.2.5)
- 6.- Interpóllense gráficamente o numéricamente los valores de D correspondientes a cada s calculada en el paso 5. Utilizando los nuevos valores de D , repítase el paso 5 hasta que valores sucesivos de s para un valor de η concuerden dentro de los límites de un error permisible.
- 7.- Cuando los valores de s concuerdan razonablemente, es mejor convertirlos a h y terminar la iteración en términos de esta variable.

4.3 Forma de integración para nuestro caso.

Mencionábamos en el segundo capítulo, la condición peculiar que tiene nuestro coeficiente de difusividad ($D = \frac{KH}{nS}$) de tener un valor máximo para un valor intermedio de la altura de la curva de infiltración y tener por otro lado valores nulos para las alturas máximas y mínimas de dicha curva. La altura máxima corresponde a la altura del espejo de agua del embalse y la altura mínima puede ser cero o un valor inicial determinado (h_1) si hubiera existido anteriormente un nivel freático. Decíamos que tanto la conductividad como la saturación crecían de valores mínimos ($K=0$, $S=S_0$) en la altura máxima a valores máximos en la altura mínima, o sea un crecimiento completamente opuesto al de la altura de la curva de infiltración. De acuerdo con lo anterior, existen en nuestro caso, dos tramos en la curva, el primero que corresponde a un crecimiento del coeficiente de difusividad y el segundo que corresponde a un decrecimiento.

Obsérvese que en los dos encisos anteriores se tomaron como parámetros de referencia los valores de la altura máxima H_0 , cuyo desplazamiento x es nulo, y el valor correspondiente del coeficiente de difusividad D_0 . Hemos visto que para nuestro caso, D_0 vale cero; quiere decir que al dividir entre este parámetro, siempre tendríamos valores infinitos. Debido a lo anterior, tomaremos como referencia la altura de la curva de infiltración correspondiente a la difusividad máxima; estos valores los llamaremos H_x , D_x y a su parámetro de Boltzmann correspondiente lo llamaremos η_x . De acuerdo con esto el parámetro de Boltzmann en cualquier punto estará definido por la expresión siguiente:

$$\eta = \frac{x}{2(Dxt)^{1/2}} \quad (4.3.1)$$

La integración de la ecuación (4.1.9) la haremos por consecuencia a lo largo de dos tramos. El primer tramo tendría una disminución de la altura de la curva de infiltración desde el valor máximo H_0 hasta la altura H_x , variando los valores correspondientes del coeficiente de difusividad entre cero y un valor máximo respectivamente. La solución de esta ecuación diferencial para este tramo es la siguiente:

$$h = \frac{H_0}{H_x} - A \int_0^{\eta} \frac{1}{D} e^{-\int \frac{2\eta}{D} d\eta} d\eta \quad (4.3.2)$$

y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} h &= \frac{H_0}{H_x} & \eta &= 0 \\ h &= 1 & \eta &= \eta_x \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Utilizando las condiciones de frontera podemos determinar la constante de integración A :

$$A = \frac{H_0/H_x - 1}{\int_0^{\eta_x} \frac{1}{D} e^{-\int \frac{2\eta}{D} d\eta} d\eta} \quad (4.3.4)$$

La solución aproximada para el caso en que se considere al coeficiente de difusividad constante es:

$$h = \frac{H_0}{Hx} - B \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (4.3.5)$$

Utilizando nuevamente las condiciones de frontera (4.3.3) obtenemos la constante de integración B:

$$B = \frac{\frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{H_0}{Hx} - 1 \right)}{\text{erf } \eta_x} \quad (4.3.6)$$

o sea que podemos transformar (4.3.5) en

$$h = \frac{H_0}{Hx} - \left(\frac{H_0}{Hx} - 1 \right) \frac{\text{erf } \eta}{\text{erf } \eta_x} \quad (4.3.7)$$

Igualmente la solución exacta del segundo tramo es la siguiente:

$$h = 1 - A \int_{\eta_x}^{\eta} \frac{1}{D} e^{-\int \frac{2\eta}{D} d\eta} d\eta \quad (4.3.8)$$

y sus condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} h &= 1 & \eta &= \eta_x \\ h &= h_1 \text{ ó } 0 & \eta &= \infty \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

de donde la constante de integración A vale:

$$A = \frac{1}{\int_{\eta_x}^{\eta_{lim}} \frac{1}{D} e^{-\int \frac{2\eta}{D} d\eta} d\eta} \quad (4.3.10)$$

La solución aproximada del segundo tramo es

$$h = 1 - B \int_{\eta_x}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (4.3.11)$$

$$B = \frac{2/\pi^{1/2}}{\text{erf } \eta_{lim} - \text{erf } \eta_x} \quad (4.3.12)$$

finalmente,

$$h = 1 - \frac{\text{erf } \eta - \text{erf } \eta_x}{\text{erf } \eta_{lim} - \text{erf } \eta_x} \quad (4.3.13)$$

4.4 Difusividad promedio en el sentido x y problemas.

Decíamos en el inciso 4.1 que nuestro coeficiente de difusividad depende tanto de x como de H ; esta doble dependencia dificulta, por tanto, la solución matemática. Para evitar lo anterior, nos vemos en la necesidad de simplificar nuestro coeficiente de difusividad, haciéndolo que dependa solamente de la altura de la curva de infiltración H . Consideraremos, por tanto, una difusividad promedio en el sentido horizontal x . Partiremos de lo estudiado en el inciso 2.6, considerando una distribución de la saturación y de las cargas de acuerdo con la siguiente figura 1:

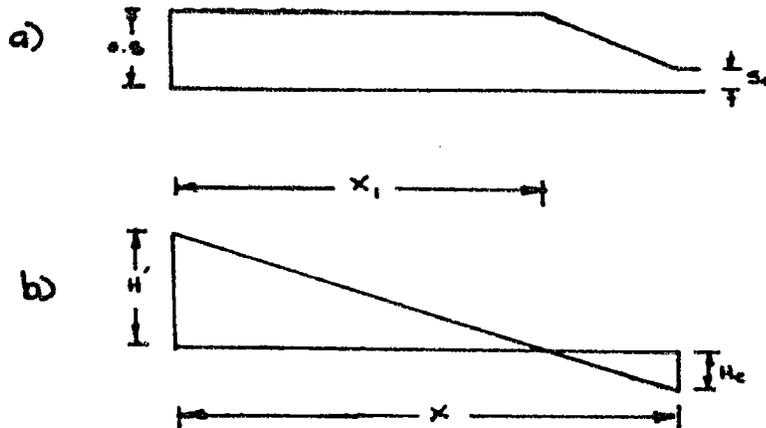


Fig. 1

Consideraremos para el coeficiente de conductividad la función $K = K(S)$ de acuerdo con la ecuación (2.8.18):

$$\frac{K_L}{K'_L} = \frac{(S - S_0)^3}{(1 - S_0)^3}$$

Utilizaremos también la ecuación (2.6.4):

$$x = \sqrt{\frac{2K}{nS} \cdot (H' + H_c) \cdot t} \quad ,$$

donde S tiene una variación de acuerdo con la figura 1, n es la

porosidad que la consideraremos constante, H' es la carga hidráulica que actúa sobre el tubo capilar hipotético ($H' = H_0 - H$), H_0 es la carga total o el nivel del embalse, H es la altura de la curva de infiltración, H_c es la carga capilar correspondiente a una altura H y t es el tiempo.

Para la realización de nuestro estudio haremos dos hipótesis:

1.- La carga capilar es constante y actúa normalmente al frente de agua. Consideraremos que en el movimiento horizontal, solamente influye la componente horizontal de dicha carga capilar.

2.- Con el objeto de obtener dicha componente horizontal, supondremos una distribución a lo largo de una elipse de radio menor igual a H_0 y radio mayor igual a $1.5H_0$, obteniendo la siguiente expresión:

$$H_c = H_{cmax} \cdot \sqrt{\frac{H_0^2 - H^2}{H_0^2 + 1.25H^2}}, \quad (4.4.1)$$

obsérvese que para $H=H_0$, $H_c=0$ y para $H=0$, $H_c=H_{cmax}$. H_{cmax} es el valor obtenido con la saturación original, en nuestro caso para $S_0 = 0.20$. Este valor se obtiene de la ecuación (2.4.1) y de la gráfica 2 del capítulo II, teniendo que

$$H_{cmax} = \frac{P_c}{\gamma} = \frac{\sigma f(\theta) J(S)}{\gamma} \left(\frac{n}{K}\right)^{1/2},$$

donde $f(\theta)$ es una función del ángulo de contacto entre el agua y material sólido en presencia del aire, supusimos que esta función valía 0.985, σ es el valor de la tensión superficial agua-aire normal que vale 73.5×10^{-6} kg/cm, $J(S)$ se obtiene de la gráfica 2 y k es la verdadera permeabilidad (L^2). Con el objeto de trabajar con las conductividades K , recurrimos a la ecuación (1.1.4): $k = 1.02 \times 10^{-5} K$. Sustituyendo todos los valores anteriores en la ecuación (2.4.1), obtenemos finalmente la siguiente expresión:

$$H_{cmax} = 11.6 \left(\frac{n}{K}\right)^{1/2} \quad (4.4.2)$$

Aclarado todo lo anterior, describiremos a continuación el proceso o método para obtener la saturación promedio,

por consiguiente la conductividad promedio, a final de cuentas la difusividad promedio en el sentido x:

1.- Se le da a H valores de 0 a H_0 igualmente incrementados.

2.- Se obtiene para cada H el valor de H' mediante la expresión: $H' = H_0 - H$.

3.- Se obtiene el valor de H_{cmax} mediante la ecuación (4.4.2).

4.- De acuerdo con la ecuación (4.4.1) se obtiene las distintas cargas capilares correspondientes a cada H.

5.- Se considera una conductividad, como primer paso, correspondiente a una saturación igual al 80%, de acuerdo con la ecuación (2.8.18). Siendo K'_L la conductividad correspondiente a una saturación total (100 %) y K_L la correspondiente a la saturación de 80%.

6.- Se sustituyen los valores de H' , H_c , K, n y S en la ecuación (2.6.4), obteniendo así x en función de la raíz del tiempo t.

7.- Haciendo una relación de triángulos, de acuerdo con la figura 1-b, se obtiene que x_1 está expresada en la siguiente forma:

$$x_1 = \left(\frac{H'}{H' + H_c} \right) x ,$$

obteniéndose así x_1 que queda también en función de la raíz del tiempo t.

8.- Se obtiene la diferencia $(x - x_1)$.

9.- Se obtiene la saturación promedio en la siguiente forma:

$$S = \frac{0.8x_1 + 1/2(0.8 + S_0)(x-x_1)}{x}$$

10.- Con este nuevo valor de S se obtiene una nueva K mediante la ecuación (2.8.18).

11.- Con los nuevos valores de K y S, se obtiene nuevamente x, si no concuerdan razonablemente, se obtiene nuevamente x_1 , luego otros valores de K y S y finalmente x. Esto se repite hasta obtener la concordancia debida entre las x anterior y siguiente.

Nos plantearemos a continuación una serie de problemas, donde variaremos la carga H_0 , la conductividad K y la porosidad n ; esta variación representa para nosotros la solución de 64 problemas. La conductividad la variaremos en la siguiente forma: $K = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ cm/s. La porosidad tendrá los siguientes valores: $n = 0.3, 0.40, 0.50$, finalmente la carga H_0 la variaremos con los siguientes valores: $H_0 = 100, 500, 1,000, 2,000, 4,000$. Quiere decir, por ejemplo, que para una $K = 1$ cm/s, le corresponderá valores de la porosidad de $0.3, 0.4$ y 0.5 y para cada n de éstas habrán los cinco valores de H_0 . Hemos intentado así lograr una visión más completa del fenómeno, para lo cual la computadora digital se convirtió en la principal herramienta de trabajo.

Todos los problemas planteados se refieren al caso de un ascenso rápido, de acuerdo con las condiciones de frontera descritas en el inciso 4.1 .

En las figuras 2, 3, 4, presentamos el programa utilizado en lenguaje Fortran para la solución del problema en la computadora digital IBM-709. En las figuras 5, 6 y 7 aparecen los valores del coeficiente de difusividad máximo (D_x) con respecto a distintas cargas H_0 ; se puede observar que para cada valor de la relación de la porosidad entre la conductividad (n/K) tenemos una curva distinta. El parámetro n/K representa en realidad una carga capilar al cuadrado, de acuerdo con la ecuación (4.4.2). En la figura 8 aparecen graficados como parámetros las relaciones H_0/H_x y H_c/H_0 , es decir, aparece nuevamente la carga capilar. En la figura 9 se representa la variación $h = H/H_x$ con respecto a \sqrt{h} para distintos valores de H_c/H_0 . Finalmente en la figura 10 hacemos una comparación con dos curvas de infiltración teóricas, una dada por Polubarinova Kochina ⁵ y la otra por G.K. Mihailov. Ambas soluciones son considerando la conductividad y la saturación constantes; la solución de Kochina es realizada mediante un desarrollo en serie para el caso de un nivel freático inicial nulo:

F	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
u	1	0.936	0.687	0.794	0.716	0.635	0.549	0.458	0.363
F	0.9	1.0	1.1	1.143					
u	0.263	0.058	0.0487	0					

donde $\eta = F/\sqrt{2}$ y $\eta = \frac{x\sqrt{n}}{2\sqrt{KH_0t}}$. Recuérdese que D_0 , precisamente vale KH_0/n . La solución de Mihailov consiste en considerar tubos capilares independientes agregándole un coeficiente que multiplica a la expresión (2.6.4), considerando además la conductividad constante y la saturación igual al 100%. El coeficiente está en concordancia con los encontrados para distintas velocidades por Vitalie Pietraru⁶; las velocidades se refieren a velocidades de ascenso del nivel del embalse y los estudios de dicho investigador fueron puramente experimentales. Obsérvese, por tanto, que nuestra solución está dentro del rango experimental, ya que según dice Kochina, todas las curvas que se han encontrado en el laboratorio caen entre las dos soluciones anteriores.

Es importante hacer la observación que tanto la solución de Kochina como la de Mihailov son exclusivamente para el caso de ascenso rápido y sin ningún nivel freático inicial; lo de dicho nivel, nos parece, que no tiene gran importancia, sin embargo el hecho de que solamente se pueda aplicar a un ascenso rápido limita grandemente dichas soluciones. Nuestra solución, en cambio, presenta la ventaja de que se puede aplicar a ascensos con distintas velocidades y también a descensos del nivel del embalse, basta con cambiar las condiciones de frontera. En el caso de que el ascenso o descenso no sea brusco, habría que asimilar el hidrógrafo, que sería una recta inclinada (H_0 vs t), a pequeños escalonamientos considerando pequeños incrementos de H_0 y de t (t =tiempo).

Mediante las gráficas 5, 6, 7, 8 y 9 se puede encontrar para un amplio rango, la variación h vs η . Los datos de rigor de un problema son K_L' , n y H_0 ; con n/K_L' y H_0 podemos encontrar en las figuras 5, 6 y 7 el valor del coeficiente de difusividad máximo D_x , también con n/K_L' podemos encontrar H_{cmax} , con H_c/H_0 podemos encontrar también H_0/H_x en la figura 8, es decir H_x . Finalmente, mediante la figura 9 y con el valor de H_{cmax}/H_0 encontramos la curva $h = H/H_x$ vs η , la cual nos da los valores de H con respecto a x para cualquier tiempo.

```

*80028      S . R . H .          *060* REDES DE INFILTRACION
DIMENSION H1(100),H2(100),D(100),F(100),V(100),MH(100)
1000 FORMAT(120H      ETA      H      D      D      ETA      H      D      )
1      ETA      H      D      D      ETA      H      D      )
100 FORMAT(6F10.0)
200 FORMAT(12F10.4)
300 FORMAT(2I3)
READ INPUT TAPE 5,300,NN,LL
READ INPUT TAPE 5,100,(HH(II),II=1,NN)
READ INPUT TAPE 5,100,SO,DELTE
DO 75 IL=1,LL
READ INPUT TAPE 5,100,CKL,CN
HCMAX=11.5*SQRTF(CN/CKL)
DO 75 II=1,NN
HO=MH(II)
H=.99*HO
CALL DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
101 DIP=DI
H=M-.01*HO
CALL DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
IF(DIP-DI)101,102,103
103 H=H+.001*HO
CALL DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
IF(DIP-DI)103,102,102
102 HX=H
DX=DI
EX=.5*X/SQRTF(DX)
K=100.*EX
EYX=X
EYX=EYX/100.
IF(EX-EYX-.005)104,104,105
105 EYX=EYX+.01
104 EX=EYX
H=0.99*HO
CALL DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
EINI=.5*X/SQRTF(DX)
KEFINI=100.*EINI
EEFINI=KEFINI
EEFINI=EEFINI/100.
IF(EFINI-EEFINI-.005)106,106,107
107 EFINI=EEFINI+.01
106 EINI=EEFINI
D(1)=DI/DX
EFIN=EX
H1(1)=0.99*HO/HX
HFIN=1.
CALL ACHIS(EFIN,EINI,D,H1,HX,H2,E,HFIN,HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO,N
1,DX)
WRITE OUTPUT TAPE 6,1000
WRITE OUTPUT TAPE 6,200,(F(I+1),H2(I+1),D(I+1),I=1,N)
EINI=EY
D(1)=1.
H=0.01*HO
CALL DIFUS (HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
D(N+1)=DI/DX
EFIN=.5*X/SQRTF(DX)
KEFIN=100.*EFIN
EEFIN=KEFIN
EEFIN=EEFIN/100.
IF(EEFIN-EEFIN-.005)108,108,109
109 EEFIN=EEFIN+.01
108 EFIN=EEFIN

```

FIGURA "2"

```

H1(1)=1.
HFIN=0.01*HO/HX
CALL ACHIS(EFIN,EINI,D,H1,HX,H2,E,HFIN,HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO,N
1,DX)
WRITE OUTPUT TAPE 6,200,(EX,HX,DX)
WRITE OUTPUT TAPE 6,200,(E(I+1),H2(I+1),D(I+1),I=1,N)
75 CONTINUE
CALL EXIT
END
SUBROUTINE DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
300 FORMAT(13)
13 HP=HO-H
HC=HCMAX*SQRT((HO*HO-H*H)/(HO*HO+1.25*H*H))
S=0.8
CK=CKL*((S-SO)/(1.-SO))**3
X=SQRT(2.*CK*(HP+HC)/CN/S)
12 X1=HP/(HP+HC)*X
S=(.8*X1+0.5*(.8+SO)*(X-X1))/X
CK=CKL*((S-SO)/(1.-SO))**3
XC=SQRT(2.*CK*(HP+HC)/CN/S)
IF(ABS(XC-X)-0.001*X)10,11,11
11 X=XC
GO TO 12
10 DI=CK*H/CN/S
RETURN
END
SUBROUTINE ACHIS(EFIN,EINI,D,H1,HX,H2,E,HFIN,HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,
IH,SO,N,DX)
DIMENSION H1(100),H2(100),D(100),E(100),VI3(100)
300 FORMAT(13)
DELTE=.01
N=(EFIN-EINI)*100.
A1=0.
E(1)=EINI
H2(1)=H1(1)
DO 88 I=1,N
E(I+1)=E(I)+DELTE
88 A1=A1+(EXP(-E(I)**2)+EXP(-E(I+1)**2))*5*DELTE
A=(H1(1)-HFIN)/A1
DO 89 I=1,N
89 H1(I+1)=H1(I)-A*5*DELTE*(EXP(-E(I)**2)+EXP(-E(I+1)**2))
25 ACD=0.
VI3(1)=0.
ACH=0.
ACI2=0.
DO 90 I=1,N
H=H1(I+1)*HX
CALL DIFUS(HO,HCMAX,CN,CKL,DI,X,H,SO)
D(I+1)=DI/DX
ACI2=ACI2+DELTE*(E(I)/D(I)+E(I+1)/D(I+1))
90 VI3(I+1)=VI3(I)+EXP(-ACI2)*DELTE/D(I+1)
DO 91 I=1,N
H2(I+1)=H1(I)-VI3(I+1)/VI3(N+1)*(H1(I)-HFIN)
ACD=ACD+ABS(H2(I+1)-H1(I+1))
91 ACH=ACH+H1(I+1)
IF(ACD/ACH-0.01)22,22,21
21 DO 92 I=1,N
92 H1(I+1)=H2(I+1)

```

FIGURA 3

```

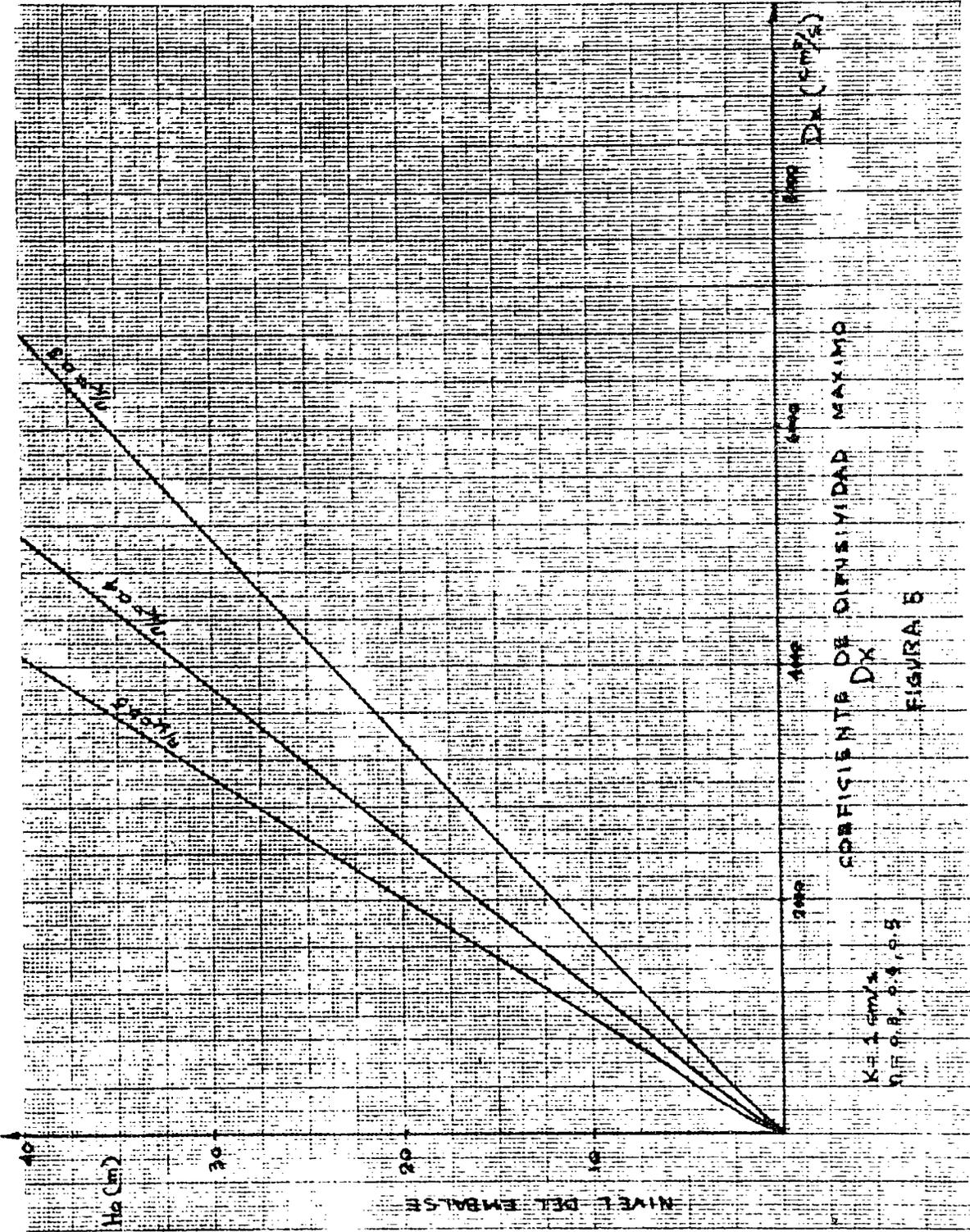
      GO TO 25
22 CONTINUE
      RETURN
      END
* DATA
5 12
100.    500.    1000.    2000.    4000.
.2      .01
1.      .30
1.      .4
1.      .5
.1      .3
.1      .4
.1      .5
.01     .3
.01     .4
.01     .5
.001    .3
.001    .4
.001    .5

```

0141* PROFILE

FIGURA 4

141 002



COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD MAXIMO

FIGURA 5

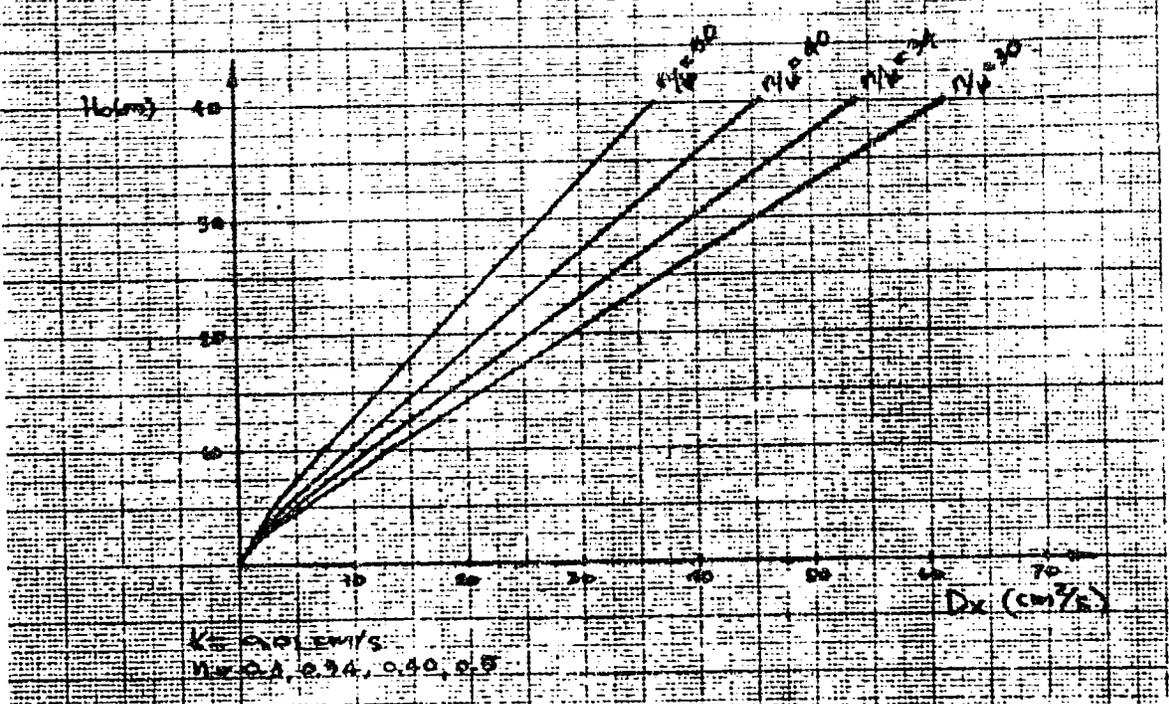
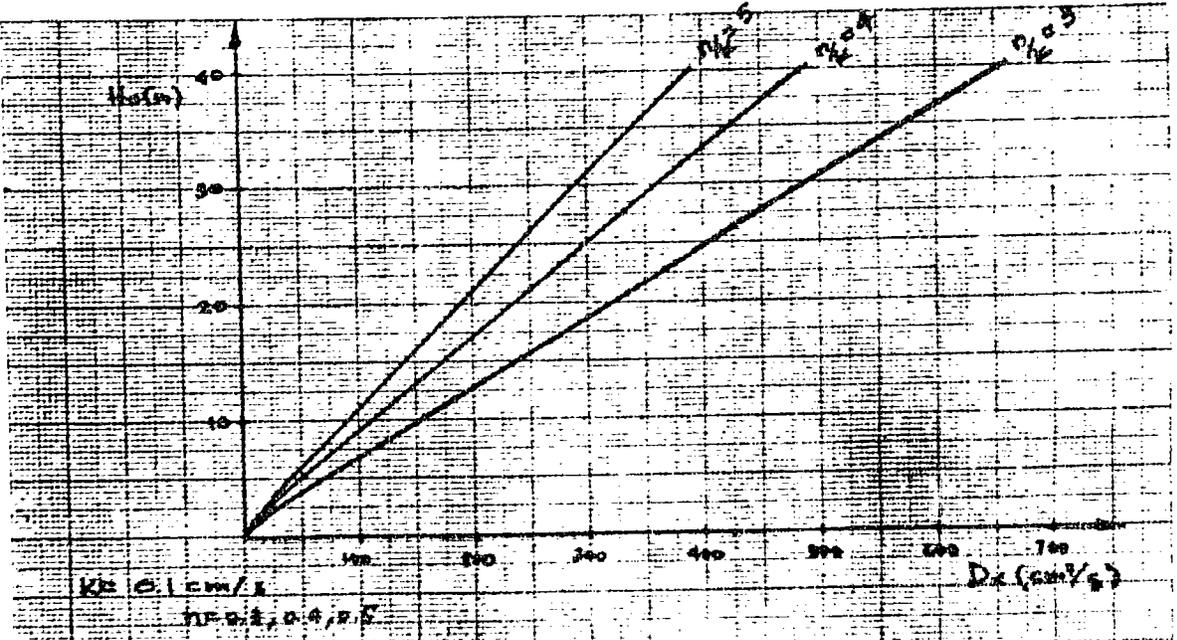
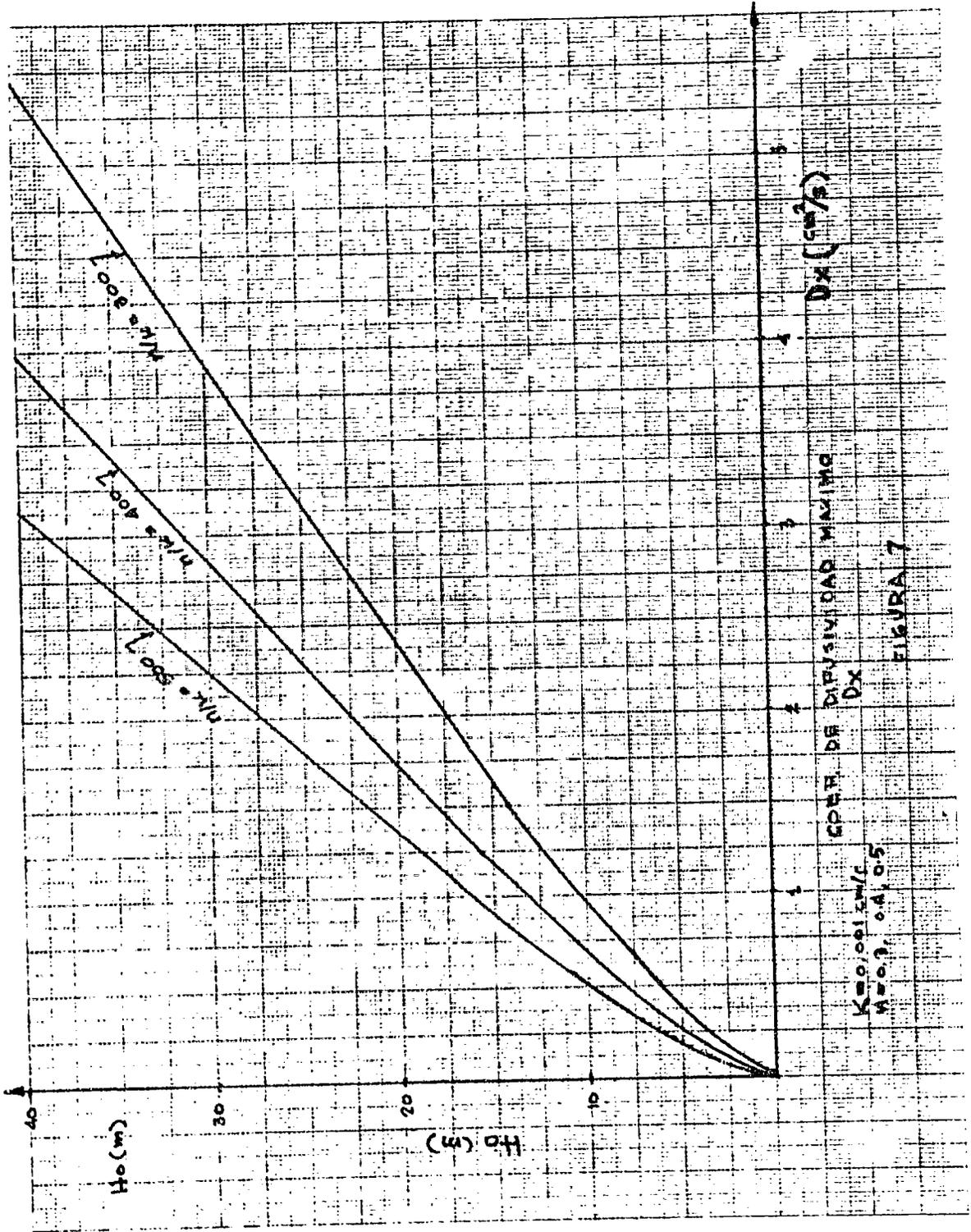


FIGURA 6



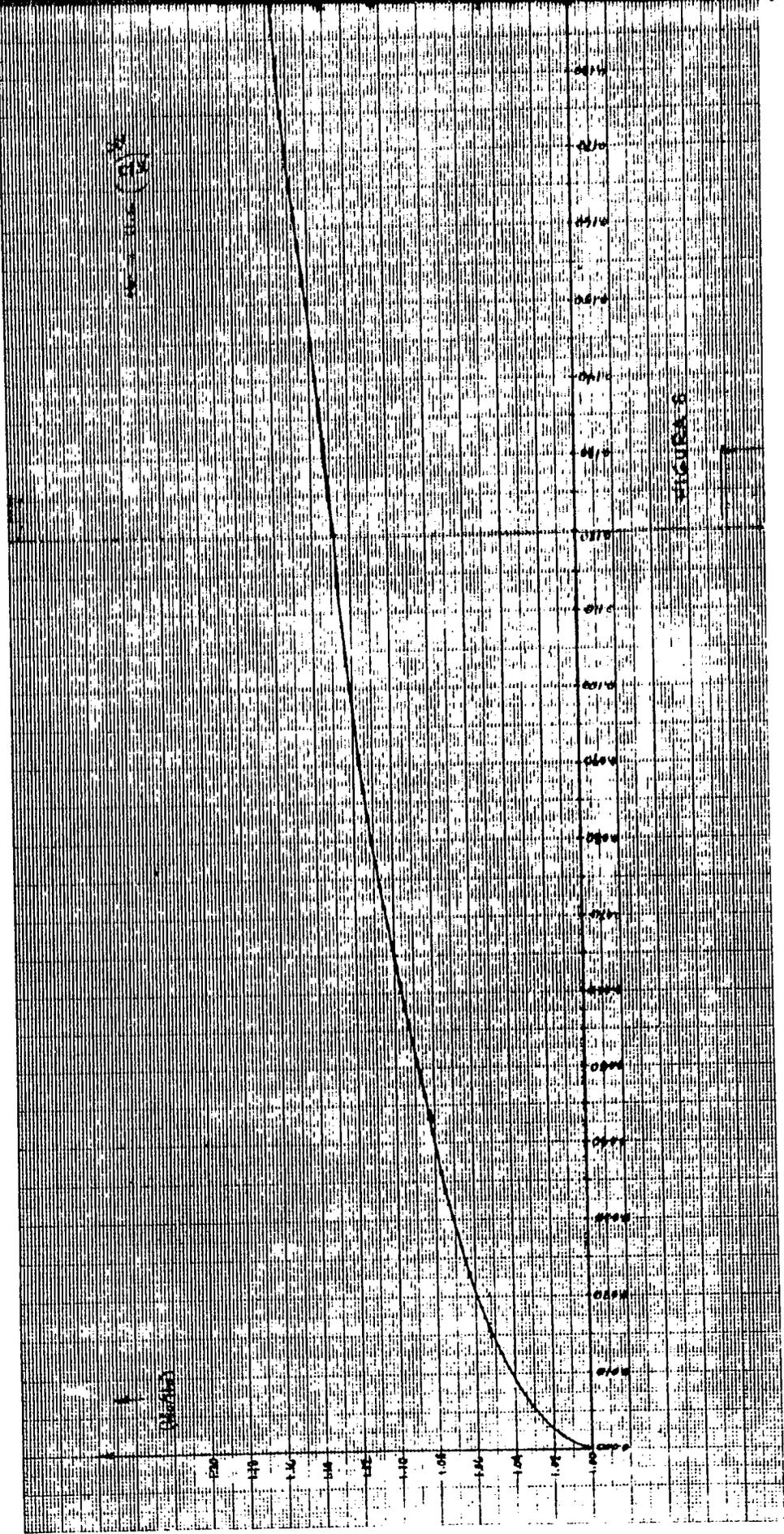


FIGURA 8

FIGURA 8

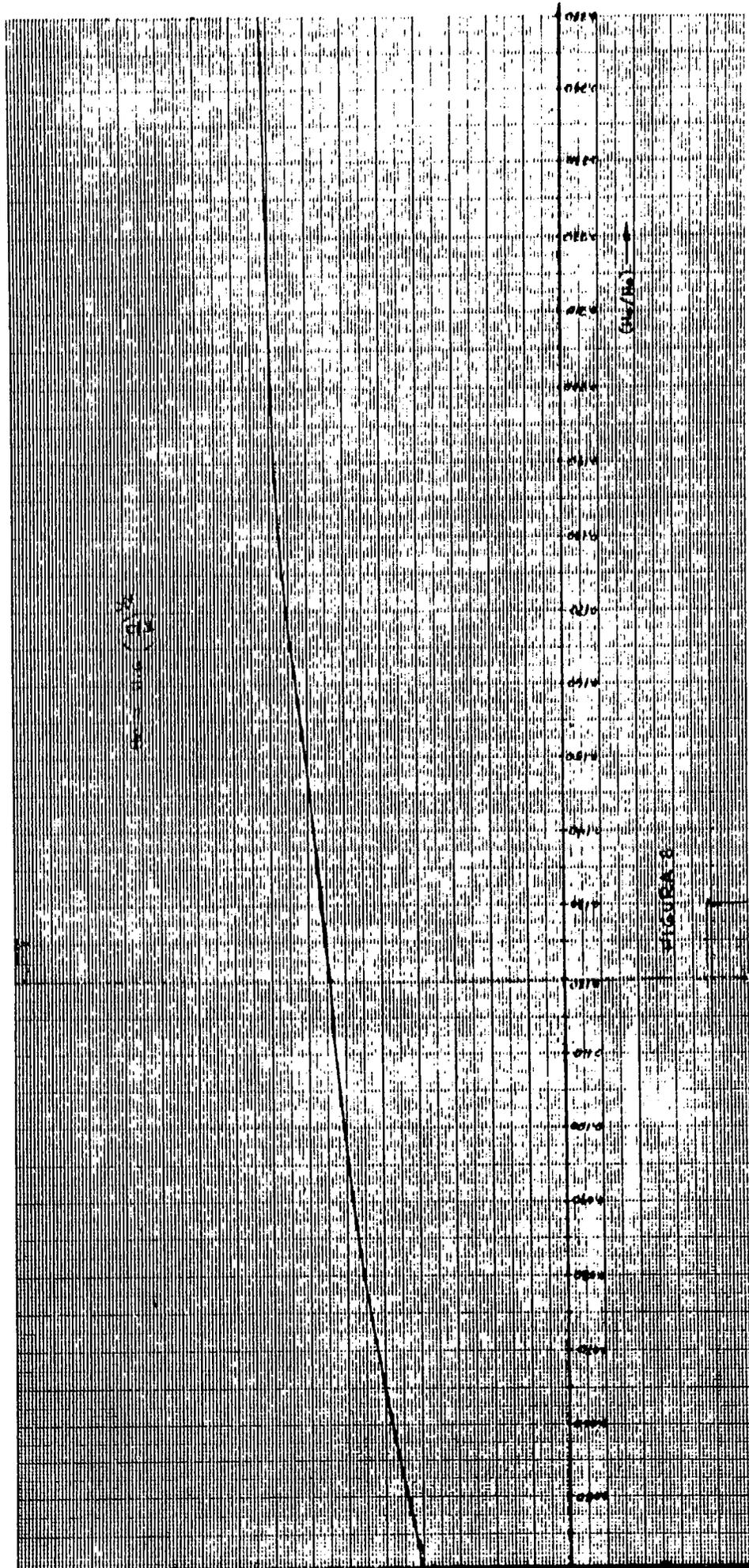
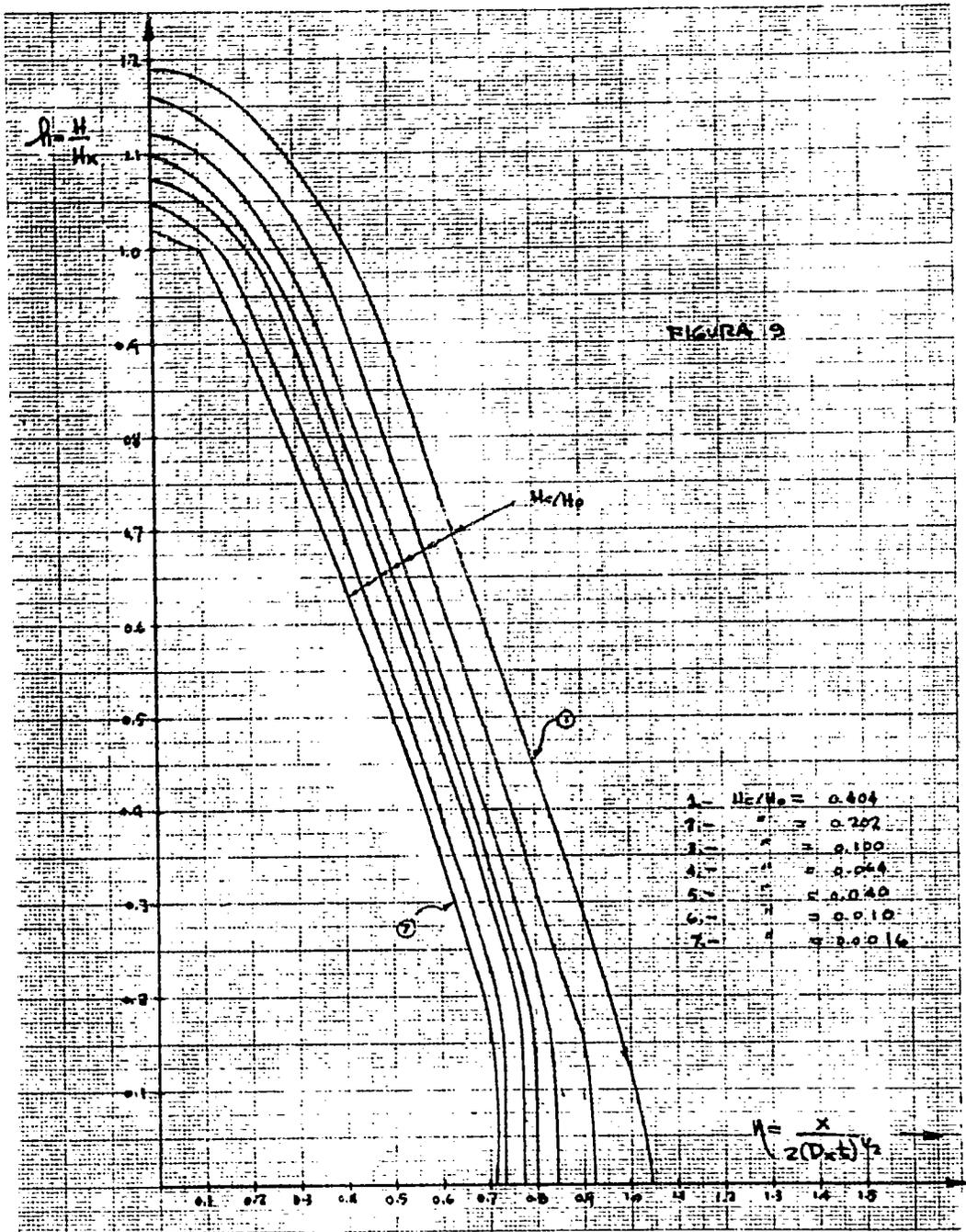
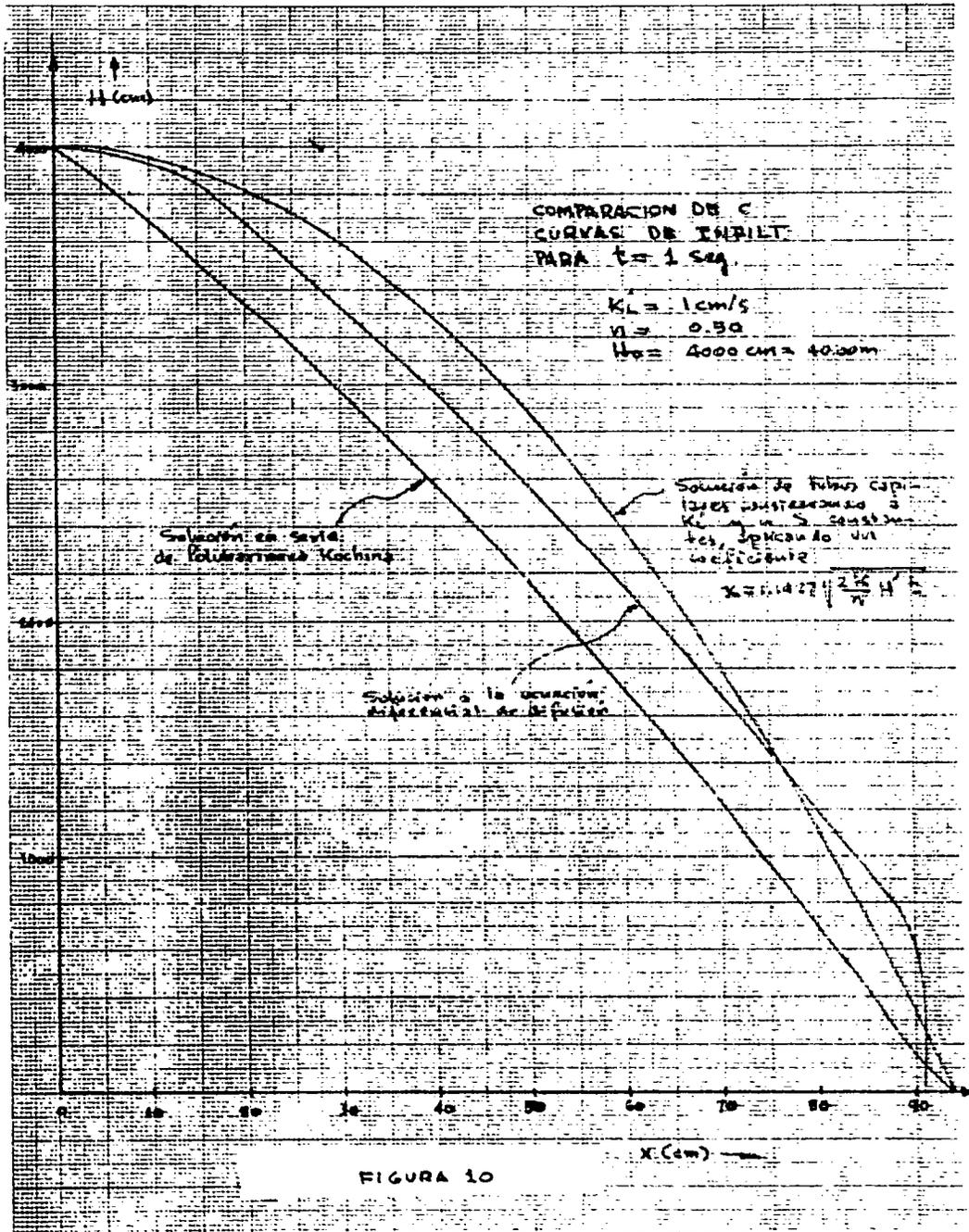


FIGURE 8





BIBLIOGRAFIA.-

- 1.- Arnold Klute - Soil Science - V.73 - (1952)
- " " - Soil Science Soc. Of Am. Proc. - V.16 - (1952)
- 2.- J. Crank - "The mathematics of Diffusion" -
- 3.- J. Crank y M.E. Henry - "Diffusion in media with variable
properties." - Part I - Trans. Faraday Soc. - V.45 - (1949)
- 4.- " " " " - " " "
- " " - Part II - Trans. Faraday Soc. - V.45-(1949)
- 5.- Polubarinova Kochina - "Theory of ground water movement" -
Princeton University Press - (1962)
- 6.- Vitalie Pietraru - "Contributions a l'etude des infiltra-
tions non permanentes a niveau libre" - Int. Assoc. for
Hydr. Res. - Ninth Convention - Dubrovnik - (1961)