

01170
8

Facultad de Ingeniería División de Estudios de Posgrado

Tesis de maestría.

Ingeniería Eléctrica

**Control de frenado de emergencia con base en
modelos de fricción llanta-pavimento.**

Luis Olmos González

Director de tesis:
Dr. Luis Álvarez Icaza L.

2014830



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En este trabajo se proponen varios esquemas de control, diseñados para el frenado de emergencia de vehículos. Estos esquemas están basados en modelos para representar la interacción llanta-pavimento. Para el desarrollo se utiliza un modelo de un cuarto de vehículo que es utilizado ampliamente en la literatura especializada que trata estos problemas. Los modelos de fricción los podemos agrupar en dos grandes categorías, los modelos pseudoestáticos y los modelos dinámicos, siendo estos últimos los más recientes y completos. Se presentan las características de dichos modelos y la relación entre sí. Se discuten las ventajas que se tendrían al emplear modelos dinámicos sobre los pseudoestáticos.

En la primera parte de la tesis se presenta el diseño de un par de conjuntos controlador-observador basados en modelos pseudoestáticos de fricción que pretenden seguir una trayectoria de frenado de máxima fricción, lo que intuitivamente proporciona un frenado óptimo, así como identificar el estado del sistema, (velocidad y velocidad relativa) estos controladores utilizan además un esquema adaptable que identifica en línea los parámetros que caracterizan al modelo de fricción y utilizan estos datos para el control. La salida del sistema de control es la presión en el cilindro maestro del sistema de frenado calculada de tal manera que se obtenga la máxima desaceleración durante todo el proceso de frenado. Este sistema está diseñado para trabajar en conjunto con un sistema antibloqueo dando dos ventajas, menos conmutaciones de alta frecuencia en la señal de control y una fuente de información a priori para calcular el espaciamiento seguro entre vehículos. En esta parte del trabajo se plantean dos esquemas, en el primero se tiene sólo datos de velocidad y aceleración angular, con ciertas limitaciones. En el segundo esquema se considera que además de estos datos se cuenta con la aceleración lineal del vehículo.

En la última parte de esta tesis se trabaja con modelos dinámicos de fricción, se propone un control basado en técnicas de Lyapunov que tiene nuevamente como objetivo el llevar al vehículo a través de una trayectoria que garantice el frenado con máxima fricción. Por otro lado se propone un control utilizando técnicas del control óptimo que el utilizar la curva de máxima fricción como la trayectoria óptima. En ambos esquemas se obtienen muy buenos resultados y muy similares, por lo que en la implantación práctica es posible utilizar el esquema basado en técnicas de Lyapunov. Además se propone un esquema adaptable que identifica en línea algunos parámetros del modelo dinámico.

Abstract

In this thesis control schemes for emergency braking control in automated vehicles are proposed. These schemes are based on models that represents the tire-road friction. For developing these controls a quarter vehicle models is used as is normally made in specialized literature about these problems. The friction models can be group in two big categories, pseudostatic models and dynamic models, being the last the more complete. The characteristics of both kinds of models and the issue of how the dynamic models can represent the behavior of the pseudostatic models is addressed. It's also mentioned the advantages of using dynamic models instead of pseudostatic.

In the first part of this thesis two sets of observer-controller designs using pseudostatic models of friction that follow a trajectory for braking in which the maximum friction is attained, that intuitively is the optimum braking are presented. The observer identifies the state of the system, (velocity and relative velocity). Furthermore, these controllers use an adaptive scheme for an on-line identification of the friction model parameters. The control output is the pressure of the master cylinder of the braking system calculated in such a way that the maximum deceleration is obtained during the braking process. These systems are designed for working in addition to an anti-block system (ABS) with two advantages, less chattering and a source of a priori information for calculating safe spacing between vehicles. The first scheme of control uses only angular velocity and acceleration data for the estimation and control. The second one uses the linear acceleration information too.

In the last part of this thesis a controller based on Lyapunov techniques is proposed with the goal of tracking the maximum friction trajectory using a dynamic friction model. On the other hand, using a dynamic model too, an optimal control is designed. This part justifies the use of maximum friction curves as the optimal trajectories. Similar good results for both schemes are obtained, so it is possible to use in practice the controller designed with Lyapunov techniques. In addition, an adaptive scheme is used to identify some of the parameters of the dynamic model.

Índice General

1	Introducción	2
2	Modelado del vehículo y par de frenado	4
2.1	Modelado del vehículo	4
2.2	Par de frenado	6
3	Modelos de fricción	8
3.1	Modelos pseudoestáticos de fricción	8
3.2	Modelo dinámico de fricción	12
3.3	Relación entre modelos de fricción pseudoestáticos y modelos dinámicos	17
4	Control y observación con modelos pseudoestáticos de fricción	22
4.1	Diseño del controlador-observador con datos de velocidad y aceleración angular	22
4.1.1	Observador	22
4.1.2	Controlador	25
4.1.3	Resultados de simulación	29
4.2	Diseño del controlador-observador con datos de velocidad angular y aceleración lineal	37
4.2.1	Observador	37
4.2.2	Controlador	38
4.2.3	Resultados de simulación	41
5	Control y observación con modelos dinámicos de fricción	49
5.1	Control para lograr máxima fuerza de fricción	49
5.1.1	Trayectoria de máxima fricción	49
5.1.2	Controlador	51
5.1.3	Resultados de simulación	60
5.2	Control óptimo para el frenado de emergencia usando modelos dinámicos de fricción	65
5.2.1	Modelado del sistema	65
5.2.2	Optimización del tiempo (tiempo mínimo)	65
5.2.3	Máxima fricción	68
5.2.4	Resultados de simulación	68
5.3	Observador del modelo dinámico de fricción y adaptación de parámetros	73
5.3.1	Resultados de simulación del observador-estimador	75
6	Conclusiones	79
7	Referencias	81

Capítulo 1

Introducción

La fricción es un fenómeno no lineal que es especialmente difícil de modelar y no muy bien comprendido. El control de la fricción es un importante aspecto a considerar en sistemas que requieren un alto desempeño, tales como servo mecanismos, robots, máquinas herramientas y sistemas hidráulicos o neumáticos, por citar algunos ejemplos. De no tratarse adecuadamente la fricción puede causar deterioro en el desempeño del sistema, llevar a errores de seguimiento y deslizamientos indeseables, entre otros problemas.

Las estrategias de control que intentan compensar el efecto de la fricción sin utilizar altas ganancias en el lazo de control necesariamente requieren de un modelo conveniente para la fricción. Para este tipo de esquemas, denominados técnicas de compensación basadas en modelos, es necesario un buen modelo para describir el fenómeno, analizar estabilidad, predecir ciclos límites, encontrar ganancias de controladores, realizar simulaciones, etcétera. En la mayoría de los esquemas de compensación basados en modelo se emplean modelos de fricción clásicos como la fricción de Coulomb y la fricción viscosa. En las aplicaciones en donde se necesita alta precisión en el posicionamiento y baja velocidad de seguimiento los resultados no son siempre satisfactorios. Es necesario una mejor descripción de los fenómenos principalmente a bajas velocidades, especialmente cuando ésta cambia de signo.

Los modelos de fricción más usados en la actualidad son descritos por mapas estáticos entre la velocidad y la fuerza de fricción; ejemplos típicos son diferentes combinaciones de la fricción de Coulomb, fricción viscosa, y el efecto Stribeck, (Armstrong y Hélobry 1991). Estos modelos proporcionan una buena descripción de la fricción, pero tienen carencias ya que, por ejemplo, no explican los fenómenos de histéresis cuando se trabaja en un régimen no estacionario de velocidad, las variaciones en la fuerza de ruptura (break-away force) o los pequeños desplazamientos que ocurren en la superficie de contacto cuando se aplica cierta fuerza (Stiction force)¹.

Para mejorar estas carencias en los modelos clásicos se trabaja con nuevos modelos dinámicos que intentan explicar y predecir con mayor precisión todos los fenómenos mencionados. Existe un nuevo modelo dinámico para la fricción propuesto por Canudas, Aström y Olsson (1995). Este modelo supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y que cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente.

Este trabajo se restringe a analizar la fuerza de fricción en la interfase llanta-pavimento a través de distintos modelos. Este es un fenómeno de gran importancia e interés pues el control de tracción, frenado y, por tanto, la maniobrabilidad de los vehículos depende única y exclusivamente

¹Canudas, Aström y Olsson (1995).

de la fuerza que puede ser aplicada por el auto al exterior, que ocurre precisamente a través de la interfase entre las llantas y el pavimento.

El objetivo principal de los nuevos sistemas de control vehicular es aumentar significativamente su seguridad y mejorar la capacidad de los sistemas de transporte. De acuerdo con la clasificación propuesta por Lygeros, Godbole, y Broucke (1996) la acción a seguir una vez detectada alguna falla severa en los sistemas de autopistas automatizadas (SAA), es el frenado de emergencia de los vehículos.

La seguridad durante el frenado de emergencia está muy relacionada con la capacidad de frenado de los vehículos. Esta capacidad cambia con la degradación en el desempeño del sistema debido a condiciones ambientales adversas, al desgaste de los componentes y a la topología de las carreteras (Lygeros, Godbole, y Broucke 1996).

Desde el punto de vista del frenado de emergencia, existen dos factores principales que determinan la capacidad de frenado: la fricción entre la llanta y el pavimento y el par de frenado disponible. Es difícil determinar con precisión estos factores ya que su comportamiento es complejo y las variables asociadas son difíciles de medir. En este trabajo se presenta el análisis y diseño de esquemas de control para el frenado de emergencia bajo la perspectiva del control de la fuerza de fricción durante la maniobra de desaceleración.

La velocidad longitudinal del vehículo normalmente no es medida directamente; se calcula con base en la velocidad angular de las ruedas o en la velocidad del motor. Durante el frenado de emergencia, sin embargo, el deslizamiento entre las llantas y el pavimento no es despreciable y es necesario tener un procedimiento independiente para calcular la velocidad longitudinal del vehículo.

Este trabajo tiene como uno de los objetivos investigar los modelos de fricción llanta-pavimento existentes, tanto pseudoestáticos como dinámicos. Dentro de las aportaciones de este trabajo con respecto a los modelos pseudoestáticos de fricción están el presentar el diseño de controladores para el frenado de emergencia basados en un esquema que estime en línea la velocidad longitudinal del vehículo y los parámetros que determinan el modelo de fricción llanta-pavimento² correspondiente. Con el conocimiento de las características de la fricción entre la llanta-pavimento, los vehículos pueden ajustar su espacio de seguridad y transmitir esta información a la infraestructura a un lado del camino, que como resultado puede modificar las condiciones generales del tráfico, si es necesario. Aunque la metodología presentada aquí es diseñada para las autopistas automatizadas, puede también ser usada en carreteras normales. Las aportaciones con respecto a los modelos dinámicos de fricción están el producir un controlador con base en técnicas de Lyapunov que lleva al sistema a través de la trayectoria de máxima fricción, por otro lado se presenta un control óptimo en tiempo de frenado que justifica de alguna manera el usar la trayectoria de fricción máxima como la óptima. Además se presenta un esquema adaptable para algunos parámetros que representan el modelo dinámico de fricción utilizado.

Este trabajo se divide en seis capítulos. El capítulo 2 presenta un modelo simplificado de la dinámica del vehículo. En el capítulo 3 se explican las características de los modelos de fricción, tanto los modelos pseudoestáticos como las mejoras que se pretenden con los modelos dinámicos. El capítulo 4 describe el procedimiento para la obtención del controlador empleando un modelo pseudoestático. El capítulo 5 presenta el correspondiente control empleando un modelo dinámico, utilizando técnicas de optimización (tiempo mínimo para el frenado). Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos, así como algunas recomendaciones y direcciones para trabajos futuros.

²Alvarez y Yi (1999).

Capítulo 2

Modelado del vehículo y par de frenado

En este trabajo se emplea un modelo vehicular simplificado que sólo considera la dinámica longitudinal del vehículo y una sola llanta (ver Fig. 2.1). El principal motivo por el cual se utiliza este tipo de modelo es su simplicidad. A pesar de que este modelo no describe el comportamiento del vehículo en un giro ni la disparidad en la distribución de fuerzas en las llantas delanteras y traseras debido al momento de inercia del auto, para los propósitos de este trabajo el modelo de un cuarto de vehículo es suficiente. Este modelo es de uso común en el estudio del control de tracción o frenado, por ejemplo en Kiencke y Daiss (1994), Kiencke (1993), Liu y Sun (1995).

2.1 Modelado del vehículo

La intención del modelo es doble: desarrollar expresiones dinámicas para usarse después con propósitos de control y obtener el coeficiente de fricción llanta-pavimento como una función de la dinámica del vehículo.

El movimiento longitudinal del vehículo puede expresarse por

$$m\dot{v} = 4F_x - F_{ax}, \quad (2.1)$$

en donde v es la velocidad longitudinal del vehículo, m es la masa del vehículo, F_x es la fuerza en la llanta y F_{ax} es la fuerza aerodinámica de arrastre. Esta ecuación asume que la fuerza en las llantas está distribuida igualmente.

La fuerza aerodinámica de arrastre F_{ax} es normalmente expresada como¹

$$F_{ax} = C_{ax}v^2, \quad (2.2)$$

con C_{ax} una constante que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo.

La fuerza en la llanta tiene una dirección negativa durante el frenado y positiva durante la aceleración, la fuerza en la llanta puede expresarse como una función de la carga normal y del coeficiente de fricción

¹Alvarez, Yi, Horowitz y Olmos (2000).

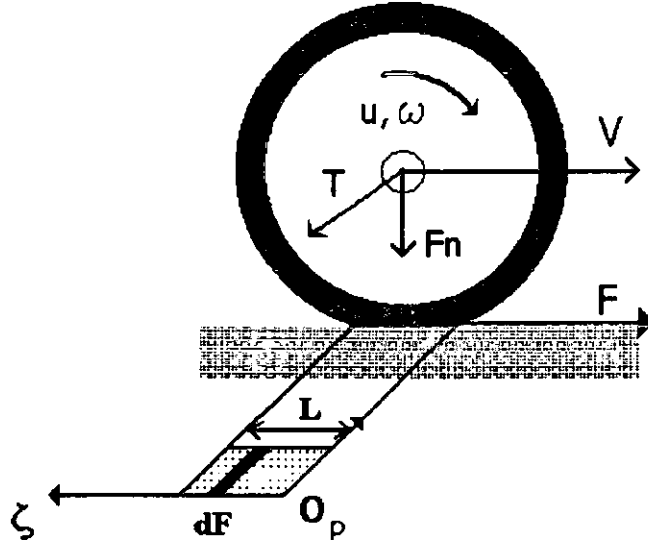


Figura 2.1: Modelo simplificado de un cuarto de vehículo.

$$F_x = -\mu F_N = -\mu \frac{mg}{4} \quad (2.3)$$

donde μ es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y $F_N = mg/4$ es la fuerza normal en cada llanta. En este trabajo se considera un camino plano, si el camino tiene pendiente, la carga normal puede ser ajustada apropiadamente.

La dinámica rotacional en la llanta está descrita por

$$I\dot{\omega} = \tau_d - \tau_b - F_x R, \quad (2.4)$$

donde ω es la velocidad angular, I es el momento de inercia de la rueda, τ_d es el par de impulso, τ_b es el par de frenado, el cual se definirá un poco más adelante, y R el radio de efectivo de la rueda.

En las Ecs. (2.1) y (2.4), se asume que la velocidad longitudinal v y la velocidad angular ω están relacionadas a través de la velocidad relativa s definida por

$$s = v - R\omega. \quad (2.5)$$

Durante el frenado la velocidad relativa s está relacionada con el deslizamiento λ por $\lambda = s/v$. Se puede introducir a s como variable de estado, en vez de ω . Se toma la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (2.5)

$$\dot{s} = \dot{v} - R\dot{\omega} \quad (2.6)$$

y se sustituyen las Ecs. (2.1) y (2.4) en la Ec. (2.6) se obtiene

$$\dot{s} = -\frac{R}{I}\tau_d + \frac{R}{I}\tau_b + \frac{R^2}{I}F_x + \frac{4}{m}F_x - \frac{F_{ax}}{m}. \quad (2.7)$$

Substituyendo Ecs. (2.2) y (2.3) en Ecs. (2.1) y (2.7) la dinámica del vehículo se puede expresar como

$$\dot{v} = -c\mu - d v^2, \quad (2.8)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - b - d v^2 + e\tau_b, \quad (2.9)$$

con $a = R^2 mg/4I$, $b = R\tau_d/I$, $c = g$, $d = C_{ax}/m$ y $e = R/I$. La velocidad v y la velocidad relativa s serán consideradas como funciones uniformemente continuas, esta consideración es cierta y además es necesaria para posteriores demostraciones. Es conveniente aclarar que el par de impulso $\tau_d = 0$, ya que el caso de estudio es el frenado.

2.2 Par de frenado

Para el frenado de emergencia se busca maximizar la fuerza de frenado, para ello se debe conocer el valor pico del coeficiente de fricción llanta-pavimento, (μ_{max}). Una suposición complementaria importante en el procedimiento para estimar el valor pico del coeficiente de fricción, es que los frenos pueden aplicar el par requerido para alcanzar este valor. En muchos de los diseños de controladores para frenado como en Gerdes y Hedrick (1995), Maciuca (1997), no se considera el deslizamiento entre la llanta y el pavimento para derivar las ecuaciones dinámicas del vehículo. La implicación de esta simplificación es que el par de frenado está siempre dentro de los límites de la capacidad de la llanta para transmitirlo y que el deslizamiento es despreciable.

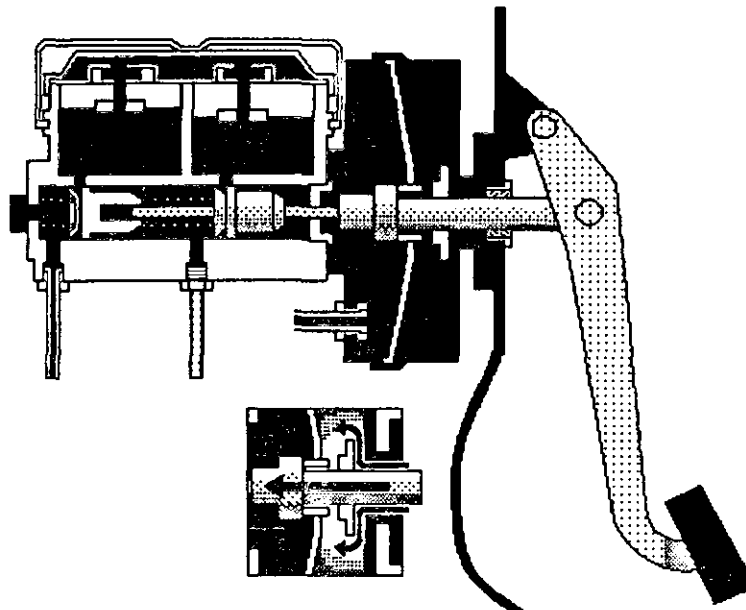


Figura 2.2: Cilindro maestro de un sistema estándar de frenado.

Cuando se requiere frenar de emergencia, el conocimiento de la ganancia del sistema de frenado es muy importante. Esta ganancia es incierta debido a la variación de la temperatura de los frenos,

la velocidad del vehículo, el desgaste físico de los elementos mecánicos y otros parámetros. Si esta ganancia es conocida o estimada apropiadamente, el control en el sistema de frenado puede realizarse usando la presión del cilindro maestro del sistema de frenado (ver Fig. 2.2) como la señal de salida del control.

Para este propósito considere las relaciones propuestas en Gerdes y Hedrick (1995) y Maciuca y Hedrick (1995) entre la presión de frenado P_b y el par de frenado de la rueda τ_b .

$$\tau_b = K_b P_b \quad (2.10)$$

donde K_b es la ganancia del sistema de frenado.

En Maciuca (1997) y Maciuca y Hedrick (1995) se diseñaron controladores robustos para solucionar las incertidumbres en K_b y en Maciuca (1997) se usa un esquema adaptable para estimar la ganancia en línea.

Con base en estas importantes ecuaciones que describen aproximadamente el comportamiento dinámico de un vehículo se desarrollará todo el trabajo subsecuente.

Capítulo 3

Modelos de fricción

La fricción es un fenómeno natural que es ciertamente difícil de modelar. Los modelos clásicos de fricción no explican ciertos fenómenos que se han experimentado en la práctica como los ciclos de histéresis, variaciones en la fuerza de ruptura (break-away force) o los pequeños desplazamientos en la superficie de contacto que se presentan experimentalmente al momento de aplicar cierta fuerza. Es evidente que la fricción es un importante aspecto en muchos sistemas de control que requieren un alto desempeño, ya es bien sabido que produce errores y deterioro en el desempeño. Por esto es necesario encontrar un modelo que describa mejor el fenómeno de fricción para bajas velocidades y especialmente cuando se cruza el cero, además de que nos permita analizar estabilidad, predecir ciclos límite, encontrar ganancias adecuadas para los controladores y realizar simulaciones.

3.1 Modelos pseudoestáticos de fricción

La literatura que trata sobre modelos pseudoestáticos de fricción es abundante. Se revisaron algunos de los estudios relevantes para la elaboración de este trabajo. Bakker, Nyborg, y Pacejka (1987) y Burckhardt (1993) describen dos modelos analíticos para el comportamiento de la interfase llanta-pavimento que son usados intensivamente para investigación en este campo. En estos dos modelos el coeficiente de fricción, μ , es principalmente función del deslizamiento de la llanta $\lambda = s/v$ y algunos otros parámetros como la velocidad y la carga normal. La Fig. 3.1 presenta una curva, obtenida de Harned, Johnston, y Scharpf (1969), que representa el comportamiento típico de μ vs λ .

La expresión dada por Bakker, Nyborg, y Pacejka (1987), también conocida como “fórmula mágica”, es derivada heurísticamente de datos experimentales para producir un buen ajuste¹. Esta ecuación proporciona el coeficiente de fricción μ entre la llanta y el pavimento como función del deslizamiento λ . La expresión en Burckhardt (1993) es obtenida por una metodología similar. La gráfica final expresa a μ como una función de λ , la velocidad del vehículo v y la fuerza normal en la llanta, F_N .

El coeficiente de fricción llanta-pavimento, o coeficiente de adhesión al pavimento, μ es principalmente una función del deslizamiento longitudinal, de la velocidad del vehículo y de la fuerza normal.

Se ha mostrado, por ejemplo en Tan y Tomizuka (1990) y Lee y Tomizuka (1995), que el comportamiento del coeficiente de fricción es inestable² en la región de la curva μ vs λ en donde

¹En estos experimentos se controla independientemente la velocidad de rotación de la llanta y la de una superficie para rodamiento de la misma, de tal forma que se pueden producir valores arbitrarios de deslizamiento.

²Inestable en el sentido de que al sostener el mismo par de frenado conduce inevitablemente a bloquear la rueda.

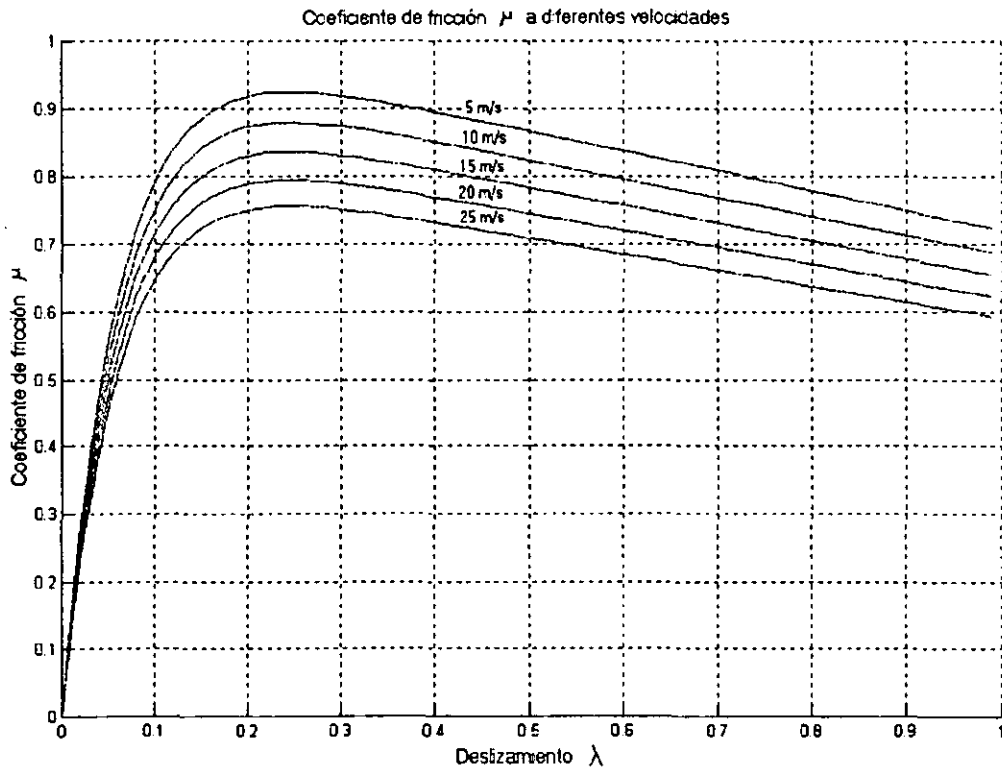


Figura 3.1: Variaciones del coeficiente de fricción μ con respecto al deslizamiento longitudinal λ , a diferentes velocidades del vehículo.

$d\mu/d\lambda < 0$ (ver Fig. 3.1). Es por esta razón que los controladores de tracción o frenado están normalmente diseñados para regular el deslizamiento longitudinal λ de tal manera que el coeficiente de adhesión μ nunca exceda su valor pico μ_{max} durante la tracción o el frenado.

El modelo propuesto por Burckhardt (1993) para el coeficiente de fricción llanta-pavimento es de la forma

$$\mu = \left(C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u}) - C_3\lambda_u \right) e^{-C_4v}, \quad (3.1)$$

donde $\lambda_u = |\lambda|$, C_1, \dots, C_4 son constantes y la carga normal en la llanta es mantenida constante³.

Kiencke y Daiss (1994) desprecian el término de la dependencia de la velocidad en la Ec. (3.1) y aproximan esta curva por

$$\mu = K_\lambda \frac{\lambda_u}{p_1\lambda_u^2 + p_2\lambda_u + 1}, \quad (3.2)$$

donde K_λ es la pendiente de la curva μ vs λ_u cuando $\lambda_u = 0$, p_1 y p_2 son parámetros escogidos apropiadamente. Nóte que la Ec. (3.2) depende solamente del deslizamiento λ_u . El valor de K_λ se

³En la Ec. (3.1) se considera que la fricción llanta-pavimento tiene el mismo comportamiento durante la tracción y el frenado y que el coeficiente de fricción es positivo en ambos casos.

considera conocido y Kiencke y Daiss (1994) escogen un valor de pendiente alrededor de 30° para él. Mientras que en el modelo propuesto por Burckhardt (1993) está escalado por el término que depende de la velocidad del vehículo, (ver Fig. 3.1) el modelo propuesto por Kiencke y Daiss (1994) genera una curva única, independiente de la velocidad del auto.

Esta aproximación y otras sugeridas en Kiencke (1993) tienen la desventaja que cuando el término de velocidad en la Ec. (3.1) se incluye, el estimador se convierte en no lineal en los parámetros. Para sortear este inconveniente, en este trabajo se propone la siguiente aproximación a la Ec. (3.1), la cual resuelve el problema, ya que es posible linealizar la ecuación en los parámetros e incluir el término que depende de la velocidad del vehículo.

$$\mu = p_1 e^{-p_2 \lambda_u} \lambda_u^{(p_3 \lambda_u + p_4)} e^{-p_5 v}, \quad (3.3)$$

donde p_1 , p_2 , p_3 , p_4 y p_5 son parámetros a determinar (Alvarez y Yi 1999). Después de aplicar logaritmo a ambos lados de la Ec. (3.3) esta se puede expresar como

$$y = \ln \mu = p'_1 - p_2 \lambda_u + p_3 \lambda_u \ln \lambda_u + p_4 \ln \lambda_u - p_5 v, \quad (3.4)$$

$p'_1 = \ln p_1$. Si se arregla la Ec. (3.4) en forma vectorial se convierte en:

$$y = [1, -\lambda_u, \lambda_u \ln \lambda_u, \ln \lambda_u, -v] \begin{bmatrix} p'_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\Theta. \quad (3.5)$$

Un estimado $\hat{\Theta}$ del vector Θ se puede obtener a través de un algoritmo estándar de gradiente (Slotine y Li 1991) el cual será introducido con el diseño del controlador más adelante.

Si la velocidad se mantiene constante, el valor pico de μ_{max} puede obtenerse de la Ec. (3.3), evaluada a una velocidad constante v_0 , derivando e igualando a cero.

$$\mu_{max} \Big|_{v=v_0} = p_1 e^{-p_2 \lambda_m} \lambda_m^{(p_3 \lambda_m + p_4)} e^{-p_5 v_0}, \quad (3.6)$$

donde λ_m es el valor del deslizamiento para el cual se alcanza el valor pico de μ y está dado por la solución de

$$p_3 \lambda_m (\ln \lambda_m + 1) = p_2 \lambda_m - p_4. \quad (3.7)$$

Nótese que el valor de λ_m del valor pico μ_{max} no depende de la velocidad en el modelo propuesto en la Ec. (3.1).

Considere el modelo de un cuarto de vehículo introducido en la sección 2.1. Para obtener una expresión para el coeficiente de fricción llanta-pavimento se combinan las ecuaciones (2.4), (2.3) y (2.10) para tener

$$\mu = \frac{I \dot{\omega}}{f} - \frac{\tau_d}{f} + \frac{K_b P_b}{f}, \quad (3.8)$$

con $f = mgR/4$, lo que permite obtener μ asumiendo que la aceleración angular en la rueda puede ser medida (o estimada correctamente) y que el coeficiente C_{ax} de la fuerza aerodinámica de arrastre F_{ax} es conocido.

Se usaron datos de Schuring (1976) para aprobar las aproximaciones presentadas en esta sección a la curva μ vs λ y v . Los datos usados corresponden a un mismo tipo de llanta. Todas las pruebas fueron realizadas bajo las mismas condiciones del terreno, la misma presión de la llanta (24psi), misma velocidad (30 mph) y la misma fuerza normal. Las curvas nominales μ vs λ y la curva ajustada para esta llanta se muestran en la Fig. 3.2.

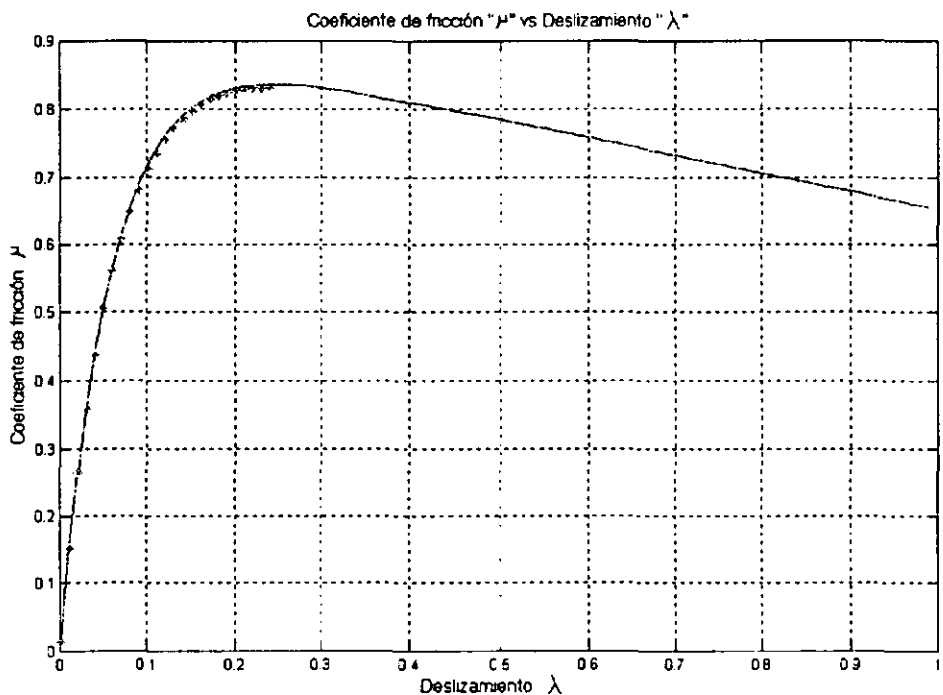


Figura 3.2: Coeficiente de fricción μ nominal curva ajustada '*'.

La Fig. 3.2 muestra que la aproximación propuesta en la Ec. (3.3) ajusta muy bien la fórmula nominal de la fricción μ dada por la Ec.(3.1) ya que el error es menor al 2% en la región de $[0, \lambda_c]$, la cual es la región de interés, λ_c es un valor para el deslizamiento escogido apropiadamente de tal forma que la aproximación abarque todo el rango de operación. En la tabla 3.1 se presentan los parámetros de la curva de referencia, Ec.(3.1), y los parámetros ajustados, p_1, \dots, p_5 .

Modelo de Burck	Modelo propuesto
$C_1 = 1.0645$	$p_1 = 3.16$
$C_2 = 16.6462$	$p_2 = 3.3$
$C_3 = 0.3065$	$p_3 = 2.64$
$C_4 = 0.01$	$p_4 = 1.05$
	$p_5 = 0.01$

Tabla 3.1: Parámetros para la aproximación en Ec. (3.3) y Ec. (3.1).

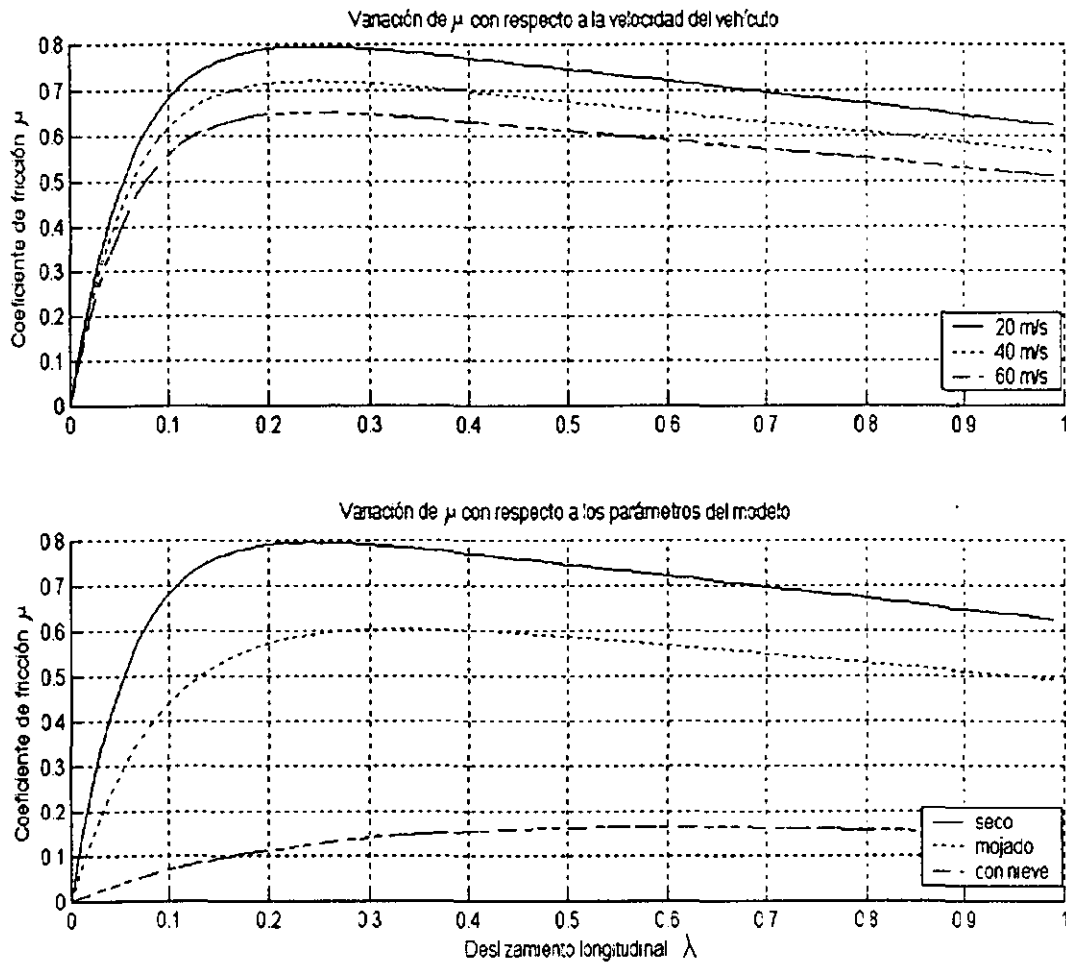


Figura 3.3: Variación del coeficiente de fricción con respecto a la velocidad y las condiciones del pavimento.

Los modelos pseudoestáticos son obtenidos empíricamente a partir de experimentos en estado estacionario. Los mapas pseudoestáticos más comunes son como los de la Fig. 3.3 que son funciones del coeficiente de fricción μ contra el deslizamiento longitudinal λ , donde

$$\lambda = 1 - \frac{r\omega}{v} \quad \text{si } v > r\omega \quad (\text{Frenado}) \quad (3.9)$$

$$\lambda = 1 - \frac{v}{r\omega} \quad \text{si } v < r\omega \quad (\text{Aceleración}) \quad (3.10)$$

3.2 Modelo dinámico de fricción

En esta parte del capítulo se presenta en primera instancia un modelo dinámico de fricción con parámetros concentrados. Posteriormente se presenta el modelo análogo con parámetros distribuidos y cómo es posible utilizar un modelo con parámetros concentrados como una buena aproximación a estos. Finalmente se utiliza el modelo con parámetros concentrados con la modificación de un signo (se explicará más tarde) para mostrar cómo haciendo ciertas simplificaciones al modelo

dinámico es posible capturar los fenómenos que se representan en los modelos pseudoestáticos.

Existe un nuevo modelo dinámico para la fricción propuesto por Canudas, Aström y Olsson (1995). Este modelo asume que las superficies de contacto son muy irregulares a nivel microscópico y que por ello el contacto ocurre entre un número variable de asperezas. Este contacto se puede visualizar de manera simplificada como el que sucede entre dos cuerpos rígidos cuyas superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas. Cuando se aplica una fuerza tangencial, las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente; si la fuerza aumenta lo suficiente algunas de estas cerdas se deformarán tanto que se deslizarán, obviamente este fenómeno es bastante aleatorio debido a la irregularidad de las superficies Fig. 3.4.

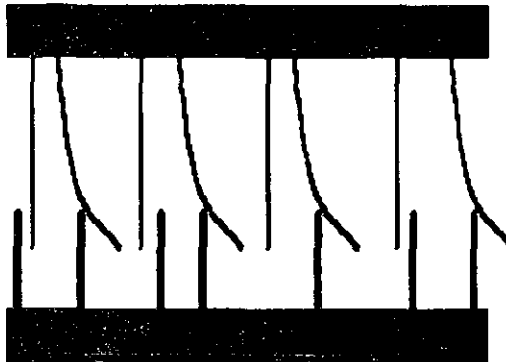


Figura 3.4: Interfase entre dos superficies a través del contacto de cerdas erizadas.

El modelo que se presenta está basado en la deformación promedio de las cerdas z y está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} z \quad (3.11)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (3.12)$$

donde s es la velocidad relativa entre las superficies y z es un estado que representa la deformación promedio de las cerdas. Los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 representan, respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies.

El modelo en las Ecs. (3.11) y (3.12) está caracterizado por los parámetros σ_0 , σ_1 , σ_2 y la función $g(s)$. Esta función $g(s)$ pretende modelar y describir el efecto "Stribeck". Este efecto se puede apreciar claramente cuando a un objeto en reposo se le aplica una fuerza. En un principio la fuerza no es suficiente para moverlo, pero si aumenta la fuerza se llega al punto de ruptura en que el objeto comienza a moverse. Ya en movimiento la fuerza resistente para seguir moviéndolo es menor que la fuerza necesaria para iniciar su movimiento. La fuerza para iniciar el movimiento del objeto es la fuerza de fricción estática máxima (Stiction Force), " F_s " y la fuerza necesaria para mantener el movimiento del objeto es la fuerza de Coulomb " F_c ". La manera tradicional de modelar este transitorio es con un cambio instantáneo en el valor de la fuerza, pero en la realidad esto no es cierto ya que existe cierta dinámica en este cambio. Una parametrización de $g(s)$ que se propone para describir este fenómeno tiene la siguiente forma:

$$g(s) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{s}{v_s}\right)^2} \quad (3.13)$$

donde “ F_C ” es la fuerza de Coulomb, “ F_S ” es el nivel de la fuerza de fricción estática y v_s es la velocidad de “Stribeck”⁴, este último parámetro juega el papel de la constante de tiempo del sistema (si pudiera considerarse un sistema de primer orden). En la Fig. 3.5 se presenta un diagrama de bloques en donde se representa el modelo dinámico de fricción propuesto.

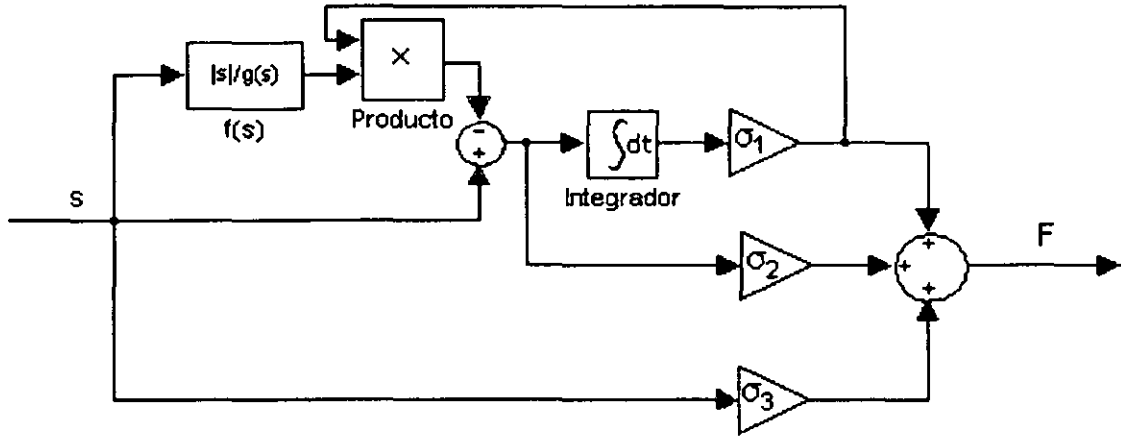


Figura 3.5: Diagrama de bloques que representa el modelo dinámico de fricción.

Este nuevo modelo captura más fenómenos de fricción que podrían ser de interés para control; la caracterización a bajas velocidades es particularmente importante para altos desempeños en posicionamiento y seguimiento. Este modelo puede predecir fenómenos de histéresis, fenómenos similares a los del comportamiento del resorte y da una fuerza de ruptura (break-away) que depende de la tasa de cambio de la fuerza aplicada. Al emplear un modelo dinámico se intenta capturar mejor los fenómenos presentes.

Canudas y Tsiotras (1999) utilizan este modelo dinámico de fricción como modelo para la interacción llanta-pavimento. Una suposición muy común en este tipo de modelos de fricción es que el coeficiente de fricción es una función normalizada μ

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \frac{\text{Fuerza de fric.}}{\text{Fuerza normal}} \quad (3.14)$$

no lineal de la velocidad relativa normalizada entre la velocidad del pavimento y la velocidad de la llanta. Y debe entenderse que μ depende también de la velocidad del vehículo y de las condiciones del pavimento, entre otros factores.

El modelo representado en las Ecs.(3.11), (3.12) y (3.13) es un modelo con parámetros concentrados y tiene como hipótesis que la interfase llanta-pavimento es puntual. Por otro lado, existen modelos de fricción con parámetros distribuidos. Los modelos con parámetros distribuidos consideran la existencia de un área de contacto o huella entre la llanta y el pavimento, como se muestra en la Fig. 3.6 y son de la forma

$$\frac{d\delta z(\zeta, t)}{dt} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \delta z(\zeta, t) \quad (3.15)$$

$$\delta F(\zeta, t) = [\sigma_0 \delta z(\zeta, t) + \sigma_1 \delta \dot{z}(\zeta, t) + \sigma_2 s] \delta F_n(\zeta, t) \quad (3.16)$$

$$F = \int_0^L \delta F(\zeta, t) d\zeta \quad (3.17)$$

⁴Canudas, Aström y Olsson (1995).

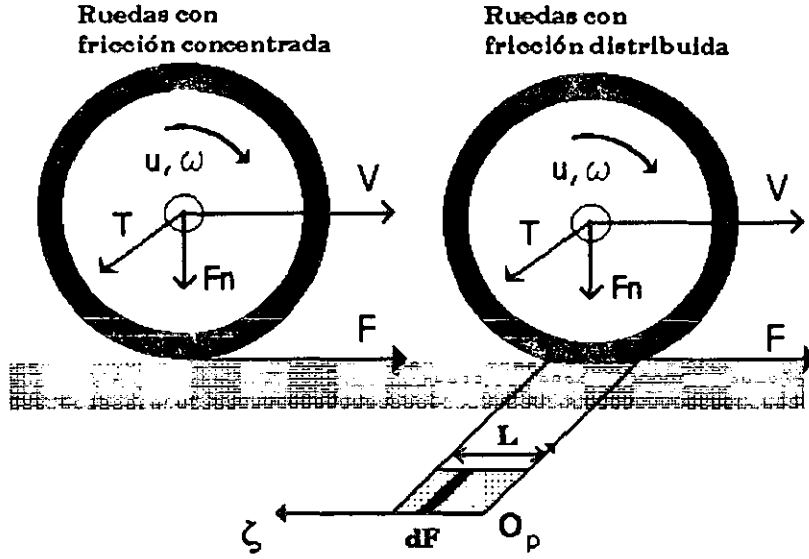


Figura 3.6: Modelo agrupado (izquierda) y distribuido (derecha).

con $g(s)$ definida como antes y donde δF es la diferencial de la fuerza de fricción y $\delta F_n = F_n/L$ es la diferencial de la fuerza normal, s es la velocidad relativa y δz es la diferencial del estado interno de fricción. Aquí los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 se expresan ahora por unidad de longitud y se considera que el ancho de la zona de contacto es constante. En este modelo se considera que la fuerza normal F_n está uniformemente distribuida a lo largo del área de contacto y que la velocidad de cada elemento diferencial δz es igual a la velocidad relativa s . Nótese que las Ecs. (3.15) describe una ecuación diferencial parcial que debe resolverse para el tiempo y el espacio como.

$$\frac{d\delta z}{dt}(\zeta, t) = \frac{\partial \delta z}{\partial \zeta}(\zeta, t)r\omega + \frac{\partial \delta z}{\partial t} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \delta z \quad (3.18)$$

Bajo las consideraciones hechas en el párrafo anterior es posible relacionar ambos modelos, el modelo de parámetros concentrados y el modelo de parámetros distribuidos, para esto es posible aproximar el modelo en las Ecs. (3.15) y (3.16) por un arreglo de n ecuaciones diferenciales ordinarias a través de una discretización espacial. Para esto se divide el área de contacto en N puntos igualmente espaciados y a cada uno se le asocia una deformación promedio "discreta" δz_i , por ejemplo $\delta z_i = \delta z(iL/N, t) \forall i = 0, 1, \dots, N - 1$. Entonces la función escalar de espacio-tiempo $\delta z(\zeta, t)$ es aproximada por un vector N -dimensional δz

$$\delta z(\zeta, t) \approx \delta z = [\delta z_0(t), \delta z_1(t), \dots, \delta z_{N-1}(t)]. \quad (3.19)$$

De manera similar

$$\frac{\delta z}{d\zeta}(t) = \left[\frac{\delta z_0}{d\zeta}(t), \frac{\delta z_1}{d\zeta}(t), \dots, \frac{\delta z_{N-1}}{d\zeta}(t) \right]^T \quad (3.20)$$

donde cada elemento de este vector, $\frac{\delta z_i}{d\zeta}(t)$, puede ser aproximado usando diferencias hacia adelante.

$$\frac{\delta z_i}{d\zeta}(t) = \begin{cases} \frac{\delta z_{i+1} - \delta z_i}{L/N} & i = 0, 1, \dots, N-2 \\ 0 & i = N-1 \end{cases} \quad (3.21)$$

Entonces para cada i -ésimo elemento se tiene

$$\delta \dot{z}_i = -\frac{\delta z_{i+1} - \delta z_i}{L/N} r\omega + s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \delta z_i \quad (3.22)$$

De manera análoga se puede aproximar la fuerza en cada elemento $\Delta F_{n,i} = F_n/L \forall i$ y $\Delta \zeta = L/N$, entonces F puede ser aproximada como

$$F = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta F_i = \sum_{i=0}^{N-1} (\sigma_0 \delta z_i + \sigma_1 \delta \dot{z}_i) \Delta F_{n,i} \Delta \zeta + \sigma_2 s F_n \quad (3.23)$$

que se simplifica a

$$F = F_n \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\sigma_0 \delta z_i + \sigma_1 \delta \dot{z}_i) + \sigma_2 s F_n. \quad (3.24)$$

Si se introduce la variable \bar{z} como el valor medio de todas las δz_i

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta z_i \quad (3.25)$$

de la Ec. (3.22) se tiene

$$\dot{\bar{z}} = -\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{N-1} (\delta z_{i+1} - \delta z_i) r\omega + s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \delta \bar{z} \quad (3.26)$$

Nótese que

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\delta z_{i+1} - \delta z_i) = \delta z_0 \quad (3.27)$$

al tomar $\delta z_N = \delta z_0$ es posible llegar a

$$\dot{\bar{z}} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} \bar{z} \quad (3.28)$$

$$F = (\sigma_0 \bar{z} + \sigma_1 \dot{\bar{z}} + \sigma_2 s) F_n \quad (3.29)$$

Las Ecs. (3.28) y (3.29) describen el comportamiento aproximado de la Ec. (3.22) en términos del valor medio de \bar{z} . Cuando se comparan estas ecuaciones con las Ecs. (3.15) y (3.16), indica que los modelos de parámetros concentrados pueden ser usados como una buena aproximación a los

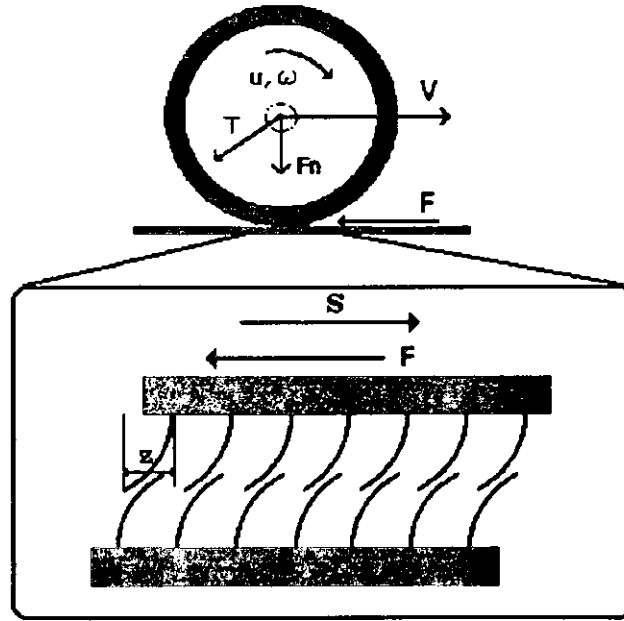


Figura 3.7: Diagrama de cuerpo libre a nivel microscópico de la interfase de fricción.

modelos de parámetros distribuidos (Canudas y Tsiotras 1999). Es por ello que en este trabajo se utiliza un modelo de fricción con parámetros concentrados, (3.11) y (3.12).

Finalmente con base en todas las ideas mostradas anteriormente, el modelo dinámico de fricción en las Ecs.(3.11) y (3.12) fue modificado en un signo, ya que se analizó el sentido de las fuerzas en el parche de contacto (ver Fig. 3.7), y se empleó un modelo con parámetros concentrados como el que se describe a continuación:

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (3.30)$$

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} - \sigma_2 s \quad (3.31)$$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-1 \frac{s}{v_s}} |s|^{1/2} \quad (3.32)$$

3.3 Relación entre modelos de fricción pseudoestáticos y modelos dinámicos

En este punto del capítulo se establece una relación entre los modelos de fricción mencionados, los modelos pseudoestáticos, que son los modelos utilizados comúnmente para diferentes propósitos de control y los modelos dinámicos, que pretenden dar una representación menor del fenómeno, el objetivo es mostrar que si se emplea un modelo dinámico de fricción como sustituto a los modelos tradicionales no se pierde nada, por el contrario se gana una mejor representación de la fricción y por lo tanto la posibilidad de obtener un mejor desempeño del sistema con menos esfuerzo de control.

Para mostrar esto se utiliza el modelo pseudoestático propuesto por (Burckhardt 1993) para la interfase llanta-pavimento a una velocidad constante y por otro lado se hacen ciertas simplificaciones

al modelo dinámico resolviendolo bajo algunas consideraciones que lo hacen derivar en una curva muy similar a la curva generada por el modelo pseudoestático.

La ecuación diferencial parcial Ec. (3.18) se puede resolver explícitamente en algunos casos si $\omega = cte$ y que $\lambda \in [0, 1]$; (Canudas y Tsiotras 1999) entonces se tiene la ecuación

$$F(\lambda) = sgn(s)F_n g(s) \left[1 + \gamma \frac{g(\lambda)}{\sigma_0 L |\lambda|} \left(e^{-\frac{\sigma_0 L |\lambda|}{g(\lambda)}} - 1 \right) \right] + F_n \sigma_2 r \omega \lambda \quad (3.33)$$

con

$$\gamma = 1 - \frac{\sigma_1 |s|}{g(\lambda)} \quad (3.34)$$

$$g(\lambda) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-\left| \frac{r \omega \lambda}{v_s} \right|^{1/2}} \quad (3.35)$$

Las incertidumbres en el conocimiento de $g(s)$ pueden ser modeladas introduciendo el parámetro θ como

$$\bar{g}(s) = \theta g(s) \quad (3.36)$$

donde $g(s)$ es la función nominal conocida.

Con la Ec. (3.33) se puede verificar que las curvas generadas ajustan razonablemente bien los datos experimentales de las curvas estáticas generadas por la formula mágica de Bakker, Nyborg, y Pacejka (1987) ya que el parámetro θ describe correctamente los cambios en las condiciones del pavimento, y los parámetros σ_0 , σ_1 , σ_2 no cambian cuando la llanta está dada (ver Fig. 3.8).

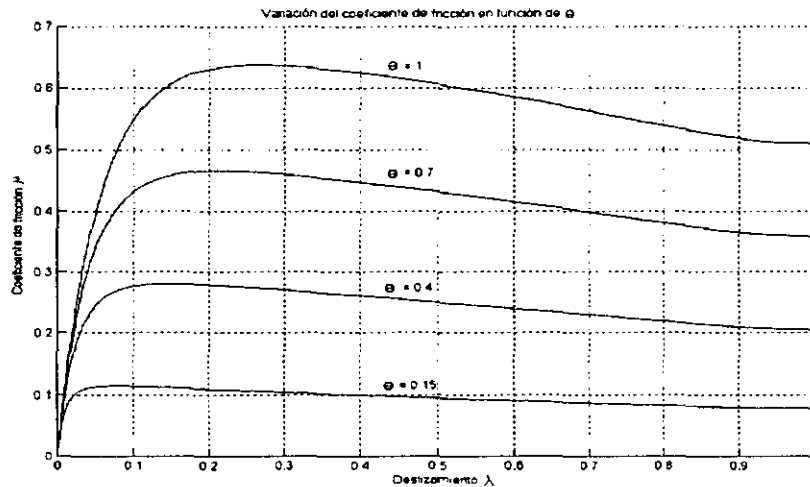


Figura 3.8: Coeficiente de fricción μ en función de las condiciones del pavimento θ .

Este es un resultado muy importante ya que permite encontrar una relación de los parámetros que caracterizan un modelo estático y los parámetros dinámicos. Además, una vez identificados todos los parámetros que caracterizan el modelo, es posible adaptar un sólo parámetro θ en caso de emergencia.

En este punto es importante encontrar una relación entre los modelos pseudoestáticos y los dinámicos de fricción. La intención es mostrar que el modelo dinámico, que pretende ser un modelo más general, abarca y representa todas las características de un modelo pseudoestático. Para este propósito se emplea la fórmula de Burckhardt (1993).

El modelo dinámico de fricción es el que se presenta en las Ecs. (3.30) a (3.32). Se considera que la fuerza de fricción se distribuye a lo largo de todo el parche de contacto, que la fuerza normal es homogénea y que la velocidad del parche de contacto es igual a la velocidad del vehículo, (ver Fig. 3.6). Así es posible hacer ciertas simplificaciones:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt}; \quad \frac{d\zeta}{dt} = |v| \quad (3.37)$$

Con esta idea la Ec. (3.30) puede ser expresada en términos del deslizamiento λ y de la función $g(s)$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \text{sign}(s)|\lambda| - \frac{\sigma_0|\lambda|}{g(s)}z \quad (3.38)$$

una solución de la Ec. (3.38) es

$$z(\zeta) = \text{sign}(s) \frac{g(s)}{\sigma_0} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_0|\lambda|}{g(s)}\zeta} \right) \quad (3.39)$$

Sustituyendo la Ec. (3.39) y su derivada con respecto a ζ en la Ec. (3.31) se tiene

$$\mu = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{d\zeta} - \sigma_2 s \quad (3.40)$$

$$\mu = \text{sign}(s)g(s) \left(1 - e^{-\frac{\sigma_0|\lambda|}{g(s)}\zeta} \right) + \sigma_1 \text{sign}(s)|\lambda||v|e^{-\frac{\sigma_0|\lambda|}{g(s)}\zeta} - \sigma_2 s \quad (3.41)$$

La ecuación de Burckhardt que describe un mapa estático entre el coeficiente de fricción y el deslizamiento tiene la forma de la Ec. (3.42) en donde existe un término que depende de la velocidad del vehículo.

$$\mu = \left(C_1(1 - e^{-C_2\lambda}) - C_3\lambda \right) e^{-C_4v}, \quad (3.42)$$

Si se considera que $v = cte$ podemos llegar a la Ec. (3.43).

$$\mu = K_1(1 - e^{-C_2\lambda}) - K_2\lambda; \quad (3.43)$$

$$v = cte \quad K_1 = C_1e^{-C_4v} \quad K_2 = C_3e^{-C_4v} \quad (3.44)$$

Si se aproxima la función $g(s) = G1$, en la Ec. (3.41) por un valor constante que es el valor esperado de esa función en el intervalo $[0, 1]$ considerando la $v = cte$ y como $s = \lambda v$ esta ecuación se puede escribir como

$$\mu = G_1(1 - e^{-\varpi_2 \lambda}) - G_4 \lambda + G_3 \lambda e^{-\varpi_2 \lambda}; \quad (3.45)$$

$$\varpi_2 = \frac{\sigma_0 L}{G_1}; \quad G_3 = \sigma_1 |v|; \quad G_4 = \sigma_2 |v| \quad (3.46)$$

Como se puede ver la única diferencia en la estructura de la Ec. (3.43) y Ec. (3.45) es el último término en la Ec. (3.45), $G_3 \lambda e^{-\varpi_2 \lambda}$, éste es un término que representa cierta dinámica del sistema. Si se considera que los experimentos para obtener los mapas pseudoestáticos no reflejan precisamente la dinámica de ciertos fenómenos es posible eliminar este término, de donde la igualdad en la estructura de las ecuaciones (3.43) y (3.45) es directa. Por otro lado, si este término no es eliminado, es posible encontrar una serie de valores para las constantes (G_1, \dots, G_4) que hacen que la gráfica obtenida con las simplificaciones hechas al modelo dinámico, Ec. (3.45), ajusten casi perfectamente al modelo propuesto en la ecuación de Burckhardt (1993) con un error entre los modelos de monos del 1%. Los valores de los parámetros empleados para el modelo en la Ec. (3.43) se presentan en la tabla 3.2 así como los parámetros ajustados correspondientes al modelo en la Ec. (3.45). En la Fig. 3.9 se tienen tres gráficas, una que es la gráfica generada con el modelo pseudoestático, la segunda con el modelo dinámico y una tercera gráfica del error entre ambos modelos. Estos resultados fueron obtenidos a una velocidad de 30 m/s y una longitud del parche de contacto de $L = 0.2$ m y permiten garantizar que, al emplear un modelo dinámico como sustituto a los modelos pseudoestáticos tradicionales, no se pierde ninguna propiedad con respecto a estos últimos.

M. Pseudoestático	M. Dinámico
$C_1 = 1.0645$	$G_1 = 0.7886$
$C_2 = 16.6462$	$G_2 = 14.1$
$C_3 = 0.3065$	$G_3 = 1.65$
$C_4 = 0.01$	$G_4 = 0.2270$

Tabla 3.2: Parámetros para la aproximación en Ec. (3.43) y Ec. (3.45).

En este capítulo se presentan los modelos de fricción con los que se trabaja a lo largo de esta tesis. Se presentan varios modelos pseudoestáticos, se mencionan sus ventajas y desventajas. Se presenta una aproximación al modelo de Burckhardt (1993) que es posible linealizar en los parámetros en una región de interés. Se mencionan los modelos dinámicos explicando sus hipótesis así como ciertas simplificaciones posibles. Para finalizar se presenta la relación que existe entre los modelos de fricción pseudoestáticos y dinámicos.

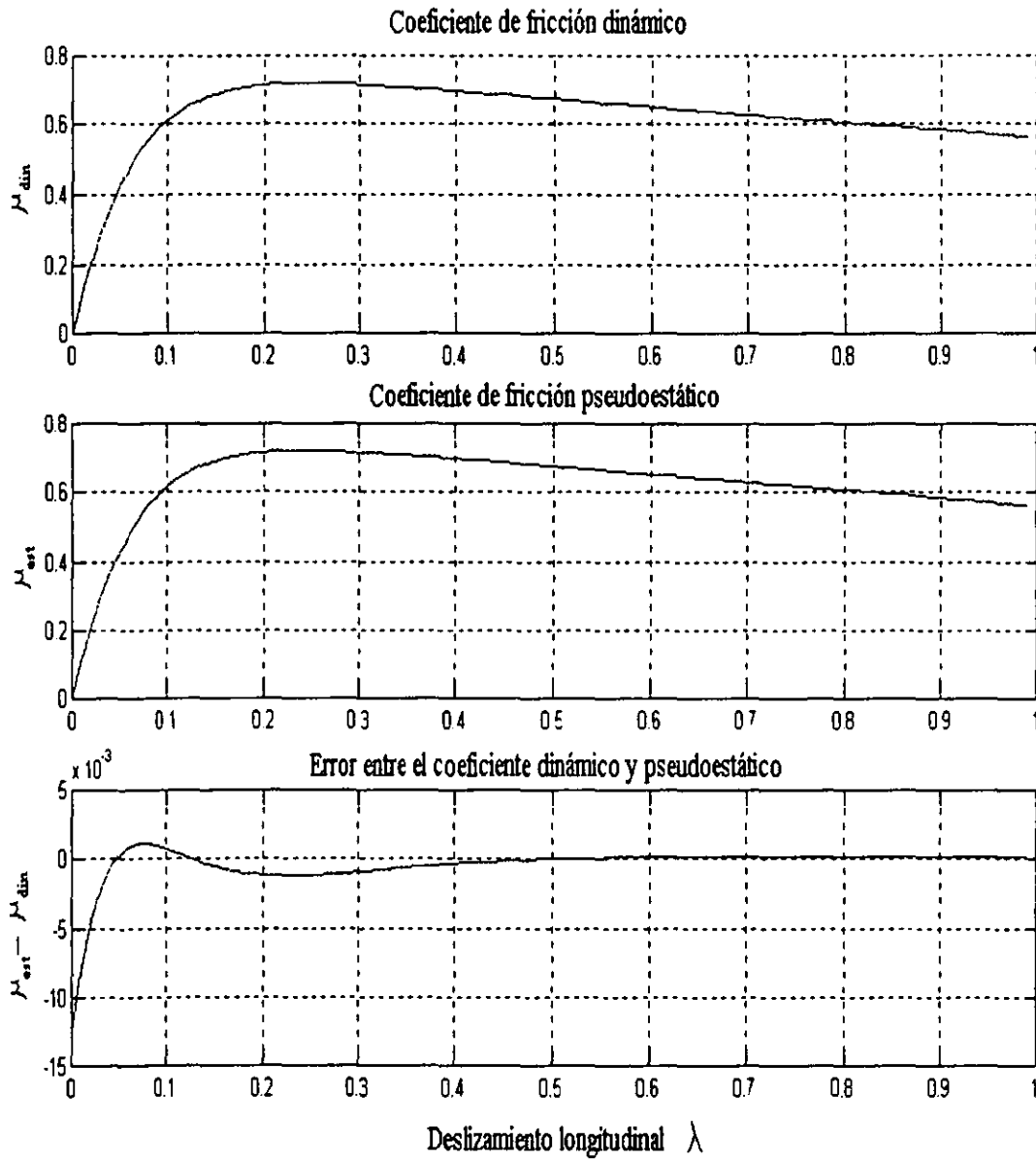


Figura 3.9: Comparación entre el modelo pseudoestático Ec. (3.43) y las simplificaciones hechas al modelo dinámico, Ec. (3.45).

Capítulo 4

Control y observación con modelos pseudoestáticos de fricción

En este capítulo se presenta el diseño de dos esquemas controlador-observador para el frenado de emergencia con diferentes datos de entrada hacia el sistema de control. El primer conjunto considera que se dispone de información de velocidad y aceleración angular; en este esquema se estima en línea la velocidad longitudinal y la fricción llanta-pavimento a través de un mapa pseudoestático. El segundo esquema es para el mismo objetivo, pero en este caso se tienen datos de velocidad angular y aceleración longitudinal. La aceleración angular se calcula con base en la velocidad angular.

4.1 Diseño del controlador-observador con datos de velocidad y aceleración angular

Para el diseño de este conjunto controlador-observador se utilizan sólo datos de velocidad angular ω y aceleración angular $\dot{\omega}$. El objetivo es llevar al vehículo de la velocidad inicial a cero lo más pronto posible. En este conjunto se observa el estado del sistema, es decir, la velocidad del vehículo y la velocidad relativa de la llanta y el pavimento. También se propone un esquema adaptable para la identificación en línea de los parámetros del modelo de fricción. (ver Fig. 4.1) En el control, para frenar lo más rápido posible se intenta llevar al sistema a través de la trayectoria de máxima fricción utilizando la presión del sistema de frenado como la variable a controlar.

Para la demostración se utiliza teoría de Lyapunov de sistemas acoplados, en donde se demuestra la estabilidad de todos los subsistemas de manera independiente al proponer funciones de Lyapunov para cada una de las señales de error y al final agrupar éstas en una función candidata a Lyapunov que es una combinación lineal de las anteriores; entonces es posible demostrar la estabilidad del sistema completo.

4.1.1 Observador

Para diseñar un controlador en el frenado de emergencia es necesario diseñar primero un observador para la velocidad longitudinal y un estimador para los parámetros que determinan la interacción llanta-pavimento, para esto se utiliza un observador impropio de alta ganancia. Se considerará que la velocidad y aceleración angular son medibles en cada rueda y que la ganancia general del sistema de frenado es conocida.

Para el observador se propone la siguiente estructura:

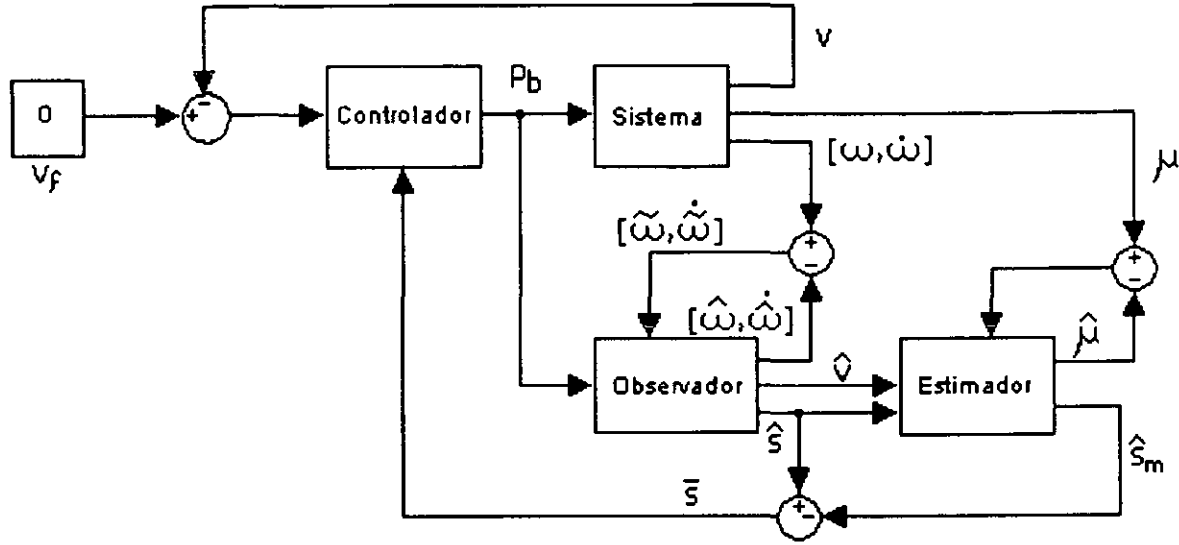


Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema.

$$\dot{\hat{v}} = -c \hat{\mu} - d \hat{v}^2 + L_{11} \tilde{\omega} + L_{12} \tilde{\dot{\omega}} \quad (4.1)$$

$$\dot{\hat{s}} = -(a+c) \hat{\mu} - b - d \hat{v}^2 + e K_b P_b + L_{21} \tilde{\omega} + L_{22} \tilde{\dot{\omega}}, \quad (4.2)$$

donde \hat{v} , \hat{s} y $\hat{\mu}$ son los valores estimados para v , s y μ , respectivamente, $\tilde{\omega}$ es el error de estimación para la velocidad angular definido por

$$\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega} \quad (4.3)$$

$$\tilde{\dot{\omega}} = \dot{\omega} - \dot{\hat{\omega}}, \quad (4.4)$$

$\tilde{\dot{\omega}}$ es el error de estimación para la aceleración angular, definido como

$$\tilde{\dot{\omega}} = \dot{\omega} - \dot{\hat{\omega}} \quad (4.5)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = \frac{\tau_d}{I} - \frac{K_b P_b}{I} + \frac{\hat{\mu} R f}{I} \quad (4.6)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = \frac{R f}{I} \hat{\mu} \quad (4.7)$$

L_{11} , L_{12} , L_{21} y L_{22} son ganancias, todas ellas a determinarse posteriormente.

Se definen los errores de estimación

$$\tilde{s} = s - \hat{s}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{v} = v - \hat{v}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu} = e^{u\theta} - e^{\hat{u}\hat{\theta}}, \quad (4.10)$$

donde \hat{U} corresponde con U en Ec. (3.5) usando los valores estimados de \hat{v} y \hat{s} en lugar de v y s , respectivamente y Θ como el vector de parámetros estimados de la Ecs. (3.5).

Combinando las Ecs. (2.8)-(2.9) y (4.1)-(4.2), la dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{\tilde{v}} = -c \tilde{\mu} - d \tilde{v}(v + \hat{v}) - L_{11} \tilde{\omega} - L_{12} \dot{\tilde{\omega}} \quad (4.11)$$

$$\dot{\tilde{s}} = -(a + c) \tilde{\mu} - d \tilde{v}(v + \hat{v}) - L_{21} \tilde{\omega} - L_{22} \dot{\tilde{\omega}} \quad (4.12)$$

donde

$$v^2 - \hat{v}^2 = (v - \hat{v})(v + \hat{v}) = \tilde{v}(v + \hat{v}) \quad (4.13)$$

Se define la siguiente candidata a función de Lyapunov para el subsistema \tilde{v}

$$W_1 = \frac{1}{2} \tilde{v}^2 \quad (4.14)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.14) y usando (4.11)

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \tilde{v} \dot{\tilde{v}} \\ &= \tilde{v} \left(-c \tilde{\mu} - d \tilde{v}(v + \hat{v}) - \frac{L_{11}}{R} (\tilde{v} - \tilde{s}) - \frac{L_{12}}{I} R f \tilde{\mu} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

reagrupando términos la Ec. (4.15) puede escribirse como

$$\dot{W}_1 = - \left(d(v + \hat{v}) + \frac{L_{11}}{R} \right) \tilde{v}^2 - \left(c + \frac{L_{12}}{I} R f \right) \tilde{\mu} \tilde{v} + \frac{L_{11}}{R} \tilde{s} \tilde{v} \quad (4.16)$$

si se escoge

$$L_{12} = - \frac{cI}{Rf} \quad (4.17)$$

la Ec. (4.16) se puede agrupar como sigue

$$\dot{W}_1 = -\alpha_1 \phi_1^2(\tilde{v}) + \gamma_{12} \phi_1(\tilde{v}) \phi_2(\tilde{s}) \quad (4.18)$$

donde $\alpha_1 = d(v + \hat{v}) + \frac{L_{11}}{R}$, $\gamma_{12} = \frac{L_{11}}{R}$, $\phi_1(\tilde{v}) = \tilde{v}$ y $\phi_2(\tilde{s}) = \tilde{s}$.

Definiendo la función candidata de Lyapunov del siguiente subsistema \tilde{s}

$$W_2 = \frac{1}{2} \tilde{s}^2 \quad (4.19)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de Ec. (4.19) y usando (4.12)

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= \tilde{s} \dot{\tilde{s}} \\ &= \tilde{s} \left(-(a + c) \tilde{\mu} - d \tilde{v}(v + \hat{v}) - L_{21} \tilde{\omega} - L_{22} \dot{\tilde{\omega}} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

reagrupando términos la Ec. (4.20) puede escribirse como

$$\dot{W}_2 = \frac{L_{21}}{R} \dot{s}^2 - \left(d(v + \hat{v}) + \frac{L_{21}}{R} \right) \dot{s} \hat{v} - \left((a + c) + \frac{L_{22}}{I} Rf \right) \mu \dot{s} \quad (4.21)$$

si se escoge

$$L_{22} = -\frac{I(a + c)}{Rf} \quad (4.22)$$

la Ec. (4.21) se puede agrupar como sigue

$$\dot{W}_2 = -\gamma_{21} \phi_2(\dot{s}) \phi_1(\hat{v}) + \alpha_2 \phi_2^2(\dot{s}) \quad (4.23)$$

donde $\alpha_2 = \frac{L_{21}}{R}$, $\gamma_{21} = d(v + \hat{v}) + \frac{L_{21}}{R}$.

4.1.2 Controlador

Para el diseño del controlador es necesario ajustar el valor de la presión en el cilindro maestro P_b . En este controlador se pretende seguir $\hat{s}_m = \hat{\lambda}_m \hat{v}$ corresponde con el estimado del deslizamiento en donde se obtiene la máxima fricción a la velocidad actual. Para obtener los datos de velocidad y velocidad relativa se emplea el observador diseñado en la sección 4.1.1. Para el controlador se define una función de error

$$\bar{s} = \hat{s} - \hat{\lambda}_m \hat{v} = \hat{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\omega \quad (4.24)$$

para la velocidad relativa deseada en el proceso de frenado. En esta expresión $\hat{s} = \hat{v} - R\omega$, $\hat{\lambda}_m$ es el valor estimado de λ_m basado en la estimación actual de $\hat{\Theta}$. Tomando la derivada temporal de la Ec. (4.24)

$$\dot{\bar{s}} = \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\dot{\omega} - \hat{v}\dot{\hat{\lambda}}_m \quad (4.25)$$

$$= \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - \frac{Rf}{I}\mu + \frac{RK_b P_b}{I} - \hat{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}} \dot{\hat{v}} - \hat{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega} \dot{\omega} \quad (4.26)$$

Las derivadas parciales de λ_m pueden ser calculadas de Ec. (3.7). Se escoge

$$P_b = \frac{I}{RK_b} \left(-\dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) + \frac{Rf}{I}\mu + \hat{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}} \dot{\hat{v}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega} \dot{\omega} - \zeta \bar{s} \right), \quad (4.27)$$

y se sustituye en la Ec. (4.26)

$$\dot{\bar{s}} = -\zeta \dot{\bar{s}}. \quad (4.28)$$

Definiendo la función candidata de Lyapunov para el subsistema \bar{s}

$$W_3 = \frac{1}{2}\bar{s}^2 \quad (4.29)$$

tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.29) y usando la Ec. (4.28), se tiene

$$\dot{W}_3 \leq -\alpha_3\phi_3^2(\bar{s}) \leq 0 \quad (4.30)$$

con $\alpha_3 = \zeta > 0$ y $\phi_3(\bar{s}) = \bar{s}$, se obtiene la estabilidad exponencial para $\bar{s} = 0$.

El siguiente paso en la construcción del controlador es examinar el comportamiento de la velocidad del vehículo y del estimador de los parámetros que caracterizan la interfase llanta-pavimento. Para esto se define la siguiente función candidata de Lyapunov de la velocidad del vehículo v

$$W_4 = \frac{1}{2}v^2 \quad (4.31)$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.31) y usando la Ec. (2.8) se tiene

$$\dot{W}_4 = -v(c\mu + dv^2) \leq -\alpha_4\phi_4^2(v) \leq 0 \quad (4.32)$$

con $\alpha_4 = d > 0$ y $\phi_4(v) = v^{3/2} \geq 0$, se obtiene la estabilidad exponencial $v = 0$.

Ahora consideremos la siguiente ley de adaptación de parámetros tipo gradiente para el modelo de la llanta-pavimento

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma\hat{U}^T\tilde{y} \quad (4.33)$$

donde $\tilde{y} = \ln \mu - \ln \hat{\mu} = U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta}$, empleando el modelo aproximado al modelo de la Ec. (3.1) propuesto en la Ec. (3.3). Si se define la función candidata de Lyapunov del último subsistema ($\tilde{\Theta}$) como:

$$W_5 = \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\Theta} \quad (4.34)$$

se toma la derivada temporal de Ec. (4.34) y usando la Ec. (4.33)

$$\dot{W}_5 = -\tilde{\Theta}^T\hat{U}^T(U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta} + \hat{U}\Theta - \hat{U}\Theta) \quad (4.35)$$

$$= -\tilde{\Theta}^T\hat{U}^T(\hat{U}\tilde{\Theta} + \tilde{U}\Theta) \quad (4.36)$$

$$= -\tilde{\Theta}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^T\hat{U}^T\tilde{U}\Theta \quad (4.37)$$

$$\leq -\alpha_5\phi_5^2(\tilde{\Theta}) - \tilde{\Theta}^T\hat{U}^T\tilde{U}\Theta \quad (4.38)$$

donde $\tilde{U} = U - \hat{U}$, $\alpha_5 = K_e$ y $\phi_5(\tilde{\Theta}) = \sqrt{\tilde{\Theta}^T\tilde{\Theta}}$. El valor de K_e es el mínimo valor singular del producto $\hat{U}^T\tilde{U}$.

El último término de la Ec. (4.38) no se puede garantizar que sean negativos semidefinidos, para tratar este problema es posible acotar ese término. Considere primero que para toda $v \geq v_{min}$

$$\tilde{U}\Theta \leq K_1|\tilde{v}| \quad (4.39)$$

En efecto primero nótese que Θ es acotado por hipótesis y el otro término \tilde{U} es

$$\tilde{U} = [1, -\lambda, \lambda \ln \lambda, \ln \lambda, -v] - [1, -\hat{\lambda}, \hat{\lambda} \ln \hat{\lambda}, \ln \hat{\lambda}, -\hat{v}] \quad (4.40)$$

$$= [0, -\lambda + \hat{\lambda}, \lambda \ln \lambda - \hat{\lambda} \ln \hat{\lambda}, \ln \lambda - \ln \hat{\lambda}, -\tilde{v}] \quad (4.41)$$

el segundo elemento en \tilde{U} puede ser expresado como

$$-\lambda + \hat{\lambda} = -1 + \frac{R\omega}{v} + 1 - \frac{R\omega}{\hat{v}} = -\frac{R\omega}{v\hat{v}}\tilde{v} \quad (4.42)$$

el tercer elemento en \tilde{U} se reduce a

$$\lambda \ln \lambda - \hat{\lambda} \ln \hat{\lambda} = \frac{v - R\omega}{v} (\ln(v - R\omega) - \ln v) - \frac{\hat{v} - R\omega}{\hat{v}} (\ln(\hat{v} - R\omega) - \ln \hat{v}) \quad (4.43)$$

$$= R\omega \left[-\frac{R^2\omega^2 + 4R\omega}{2v\hat{v}} + 1 \right] \tilde{v} \quad (4.44)$$

si se emplean los primeros dos términos de una expansión en serie de Taylor de $\ln(v - R\omega)$ y $\ln v$ y sus correspondientes estimados. De manera similar el cuarto término de \tilde{U} se simplifica a

$$\ln \lambda - \ln \hat{\lambda} = (\ln(v - R\omega) - \ln v) - (\ln(\hat{v} - R\omega) - \ln \hat{v}) = -R\omega\tilde{v} \quad (4.45)$$

Se define

$$K_1 = \max_i \{\theta_i\} = \max \left\{ \frac{R\omega_{max}}{v_{min}^2}, \frac{4R^3\omega_{max}^3}{v_{min}^2}, R\omega_{max} \right\} \quad (4.46)$$

entonces $\tilde{U}\Theta \leq K_1|\tilde{v}|$. En esta expresión θ_i es el i -ésimo elemento de Θ y ω_{max} es la cota superior de la velocidad angular QED.

Con este resultado es posible acotar el último término de la Ec. (4.38)

$$\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \Theta \leq \gamma_{15} \phi_1(\tilde{v}) \phi_5(\tilde{\Theta}) \quad (4.47)$$

con $\gamma_{15} = K_1|\ln \lambda_{min}|$. De la Ec. (4.39) y Ec. (4.47), la Ec. (4.36) puede ser escrita como

$$\dot{W}_5 \leq -\alpha_5 \phi_5^2(\tilde{\Theta}) - \gamma_{15} \phi_1(\tilde{v}) \phi_5(\tilde{\Theta}), \quad (4.48)$$

Ahora se propone una función compuesta como candidata a función de Lyapunov.

$$W = \sum_{i \in \{1,2,3,4,5\}} d_i W_i \quad (4.49)$$

donde $d_i > 0$ son factores de escala a determinar posteriormente. La derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.49) satisface

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & d_1(-\alpha_1\phi_1^2(\bar{v}) + \gamma_{12}\phi_1(\bar{v})\phi_2(\bar{s})) - d_2(\gamma_{21}\phi_2(\bar{s})\phi_1(\bar{v}) + \alpha_2\phi_2^2(\bar{s})) \\ & - d_3\alpha_3\phi_3^2(\bar{s}) - d_4\alpha_4\phi_4^2(v) - d_5(-\alpha_5\phi_5^2(\bar{\Theta}) - \gamma_{15}\phi_1(\bar{v})\phi_5(\bar{\Theta})) \end{aligned} \quad (4.50)$$

La Ec. (4.50) es una forma cuadrática que puede ser escrita en la forma:

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2}\Phi^T(DS + S^T D)\Phi \quad (4.51)$$

donde $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_5]^T$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_5)$ y la matriz S se define como

$$S_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \gamma_{ij} & \text{si } i = j \\ -\gamma_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.52)$$

La forma cuadrática de la Ec. (4.51) es negativa definida si y sólo si la matriz $DS + S^T D$ es positiva definida. El siguiente lema, tomado de (Khalil 1996), garantiza la existencia de la matriz D si se satisfacen algunas condiciones en S .

Lema 2: *Existe una matriz positiva diagonal D tal que $DS + S^T D$ es positiva semi-definida si y sólo si S es una M -matriz; esto es, los menores principales de S son no negativos.*

La matriz S en este caso es

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ \gamma_{15} & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Haciendo $L_{21} = -L_{11}$ y que L_{11} satisfaga

$$L_{11} > Rdv_{max}, \quad (4.54)$$

donde v_{max} es la cota de velocidad máxima, es posible mostrar que los menores principales de la matriz S no son negativos.

Efectivamente, el elemento α_1 es positivo. Al sustituir el valor de α_1 , α_2 , γ_{12} y γ_{21} , el determinante de segundo orden es

$$\begin{aligned} & -\alpha_1\alpha_2 + \gamma_{12}\gamma_{21} \\ & \left(\frac{L_{11}}{R} + d(v + \hat{v})\right) \left(\frac{L_{11}}{R}\right) + \left(\frac{L_{11}}{R}\right) \left(d(v + \hat{v}) - \frac{L_{11}}{R}\right) \\ & 2d(v + \hat{v}) > 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

El determinante de orden tres y cuatro, utilizando la técnica de cofactores, también son positivos ya que α_3 y α_4 son positivos y los demás elementos de la columna o renglón correspondiente son

cero. Entonces los primeros cuatro determinantes son positivos. Al incluir el quinto estado ($\tilde{\Theta}$) en la función compuesta de Lyapunov, Ec. (4.49), y emplear la Ec. (4.38), el determinante de orden cinco es no negativo, pues cabría la posibilidad que éste sea cero, en cuyo caso es posible mostrar sólo estabilidad del sistema global. En este punto es posible citar el lema de Barbalat y mostrar estabilidad asintótica del punto $\tilde{v} = \tilde{s} = \tilde{v} = v = 0$.

Para la adaptación de parámetros, este resultado muestra sólo que ese subsistema es estable con el punto de equilibrio $\tilde{y} = 0$, lo que no necesariamente implica que $\tilde{\Theta} = 0$, si no hay excitación persistente. Del análisis en la simulación se encontraron valores apropiados de d_i , tal que las condiciones para la estabilidad se satisfacen.

Con las Ecs. (4.14)-(4.23) y (4.55) se garantiza que $\dot{W}_1 + \dot{W}_2 < 0$. Sin embargo del análisis analítico y en simulación se sigue que $\dot{W}_1 + \dot{W}_2 \approx 0$ cuando $\tilde{s} = \tilde{v}$, cuando esto sucede, el término $-d(v + \hat{v})\tilde{v}^2$ es el único que fuerza $\dot{W}_1 + \dot{W}_2$ hacia cero, pero d es en magnitud muy pequeño por lo que la convergencia es muy lenta, y para fines prácticos el controlador converge a la curva donde $\tilde{s} = \tilde{v}$.¹

Con este diseño del observador se obtienen muy buenos resultados, sin embargo es necesario conocer con precisión las condiciones iniciales de las variables a observar, es por ello que se proponen algunas mejoras al observador en la sección 4.2.1 en donde además de la velocidad angular se mide la aceleración lineal.

4.1.3 Resultados de simulación

Para verificar el diseño del observador-controlador diseñado en la sección anterior se realizó una simulación del frenado de emergencia en un automóvil estándar en donde se comienza la maniobra de frenado a una velocidad de 30 m/s.

En la Fig. 4.2 y 4.3 se muestra la evolución y convergencia del observador de velocidad y velocidad relativa, respectivamente. En estas gráficas se puede apreciar que el error de convergencia tiende rápidamente a $\tilde{v} = \tilde{s}$ y es alcanzado al rededor de 0.6 segundos; a partir de ahí se mantiene razonablemente constante, en este punto el error es de 1% y porcentualmente aumenta en el proceso cuando la velocidad tiende a cero, a pesar de que el error en magnitud es aproximadamente constante 0.25. Cabe mencionar que la simulación se realizó con errores iniciales grandes (17% para velocidad, v y más del 100% para velocidad relativa, s). Sin embargo cuando se conocen mejor las condiciones iniciales los errores son muy pequeño en ambos casos, v y s , con relación a sus magnitudes y es posible lograr errores menores al 2%.

La convergencia paramétrica de la Ec. 3.3 de las características llanta-pavimento se presenta en la Fig. 4.4. Estos parámetros convergen a valores constantes. La curva ajustada en línea durante el frenado de emergencia se presenta en la Fig. 4.5, en esta gráfica se muestran dos curvas, la curva truncada es el valor final de μ Vs λ resultado de la estimación y la curva de referencia. Los "parámetros verdaderos" para la aproximación de la Ec. (3.3) que se obtuvieron en una prueba fuera de línea y se muestran en la tabla 3.1

La Fig. 4.6 contiene las gráficas de la evolución del error de \tilde{y} , donde $y = \ln \mu$ y $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$. La Fig. 4.7 muestra el error durante el tiempo de la maniobra de \tilde{s} . que es el error de seguimiento de la trayectoria de referencia, es decir la velocidad relativa en donde se logra el valor del deslizamiento que corresponde con la máxima fricción en el estimado actual del valor de μ (\hat{s}_m). La segunda gráfica dentro de esta misma figura corresponde con el error de seguimiento teórico, este error es el que se obtiene en la realidad, considerando la velocidad relativa deseada real (s_m) y no la estimada. Finalmente la Fig. 4.8 muestra el par de frenado y la desaceleración alcanzadas durante

¹Nótese en las Figs. 4.2 y 4.3 como los errores \tilde{v} y \tilde{s} convergen rápidamente a cero hasta el punto en que $\tilde{v} = \tilde{s}$.

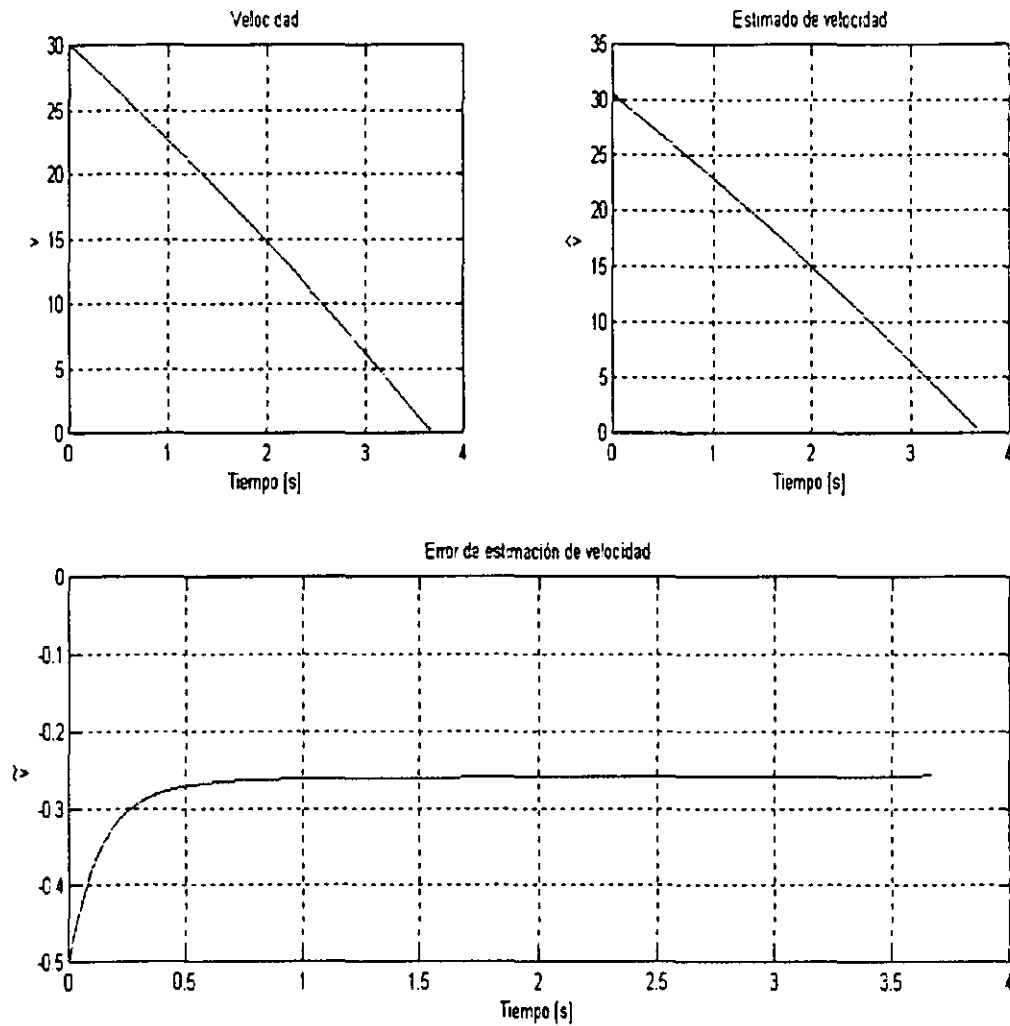


Figura 4.2: Simulación de los resultados del frenado de emergencia: Velocidad, estimado de la velocidad y error de estimación.

este proceso. Es claro en esta figura que la desaceleración es más grande a velocidades pequeñas que a velocidades grandes. Esto resulta lógico debido a la influencia de la velocidad en el coeficiente de fricción. Estas gráficas indican un buen desempeño del controlador. Es importante hacer notar que la trayectoria impuesta para el frenado de emergencia no garantiza la convergencia paramétrica. La razón reside en la ausencia de excitación persistente para esta trayectoria. Sin embargo, la simulación muestra errores en la convergencia que están por debajo del 10% de los valores reales lo que para términos prácticos es bueno.

Existen varios puntos importantes en los resultados de la simulación. La aproximación usada de la Ec. (3.3) a Ec. (3.1) presenta algunas ventajas sobre la aproximación sugerida por Kiencke y Daiss (1994) presentada en la Ec. (3.2) que está relacionada a su comportamiento cuando no existe la suficiente excitación en la trayectoria de referencia. Si el valor del deslizamiento en la trayectoria de referencia está por debajo del máximo deslizamiento, la Ec. (3.2) produce valores de μ_{max} y λ_m

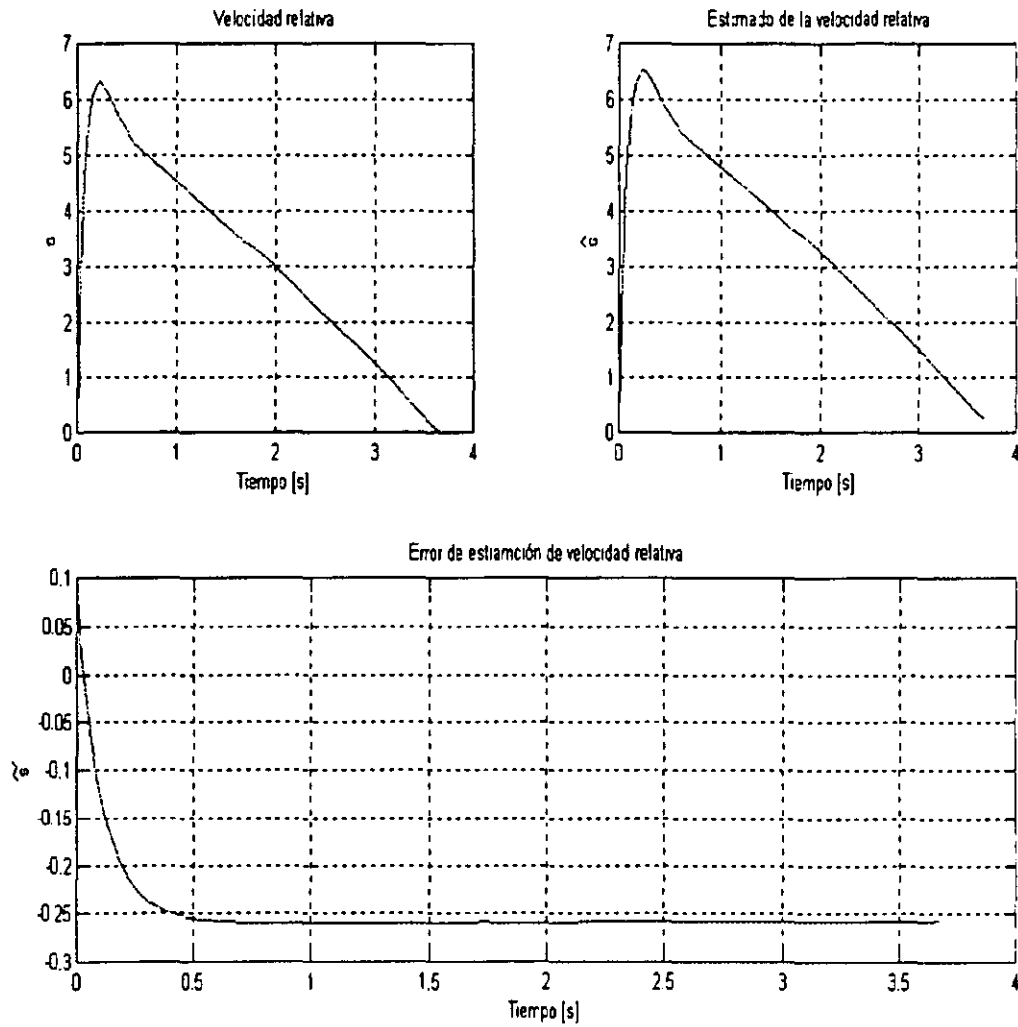


Figura 4.3: Simulación de los resultados del frenado de emergencia: Velocidad relativa, estimado de la velocidad relativa y error de estimación.

que son mayores que los verdaderos. Por otro lado la aproximación en la Ec. (3.3) produce valores de μ_{max} y λ_m que están muy cerca a los verdaderos y que subestiman la curva real. Esta diferencia es importante para el cálculo del espaciamiento seguro entre autos. En el primer caso la distancia será estimada más pequeña que la distancia que es necesaria para evitar colisiones en el caso de frenado de emergencia.

De acuerdo con los resultados de la simulación, cuando no existe convergencia paramétrica, el controlador presentado en este trabajo subestima los valores de μ_{max} y λ_m . Esto es ilustrado en la Fig. 4.5 que muestran la curva de fricción de referencia a $15m/s$ y la aproximación obtenida que se muestra como la curva que no cubre el rango completo del deslizamiento. Esta subestimación implica que para cualquier cálculo del espaciamiento basado en la Ec. (3.3) será conservador, un hecho muy importante cuando es necesario garantizar la seguridad. Los errores introducidos por

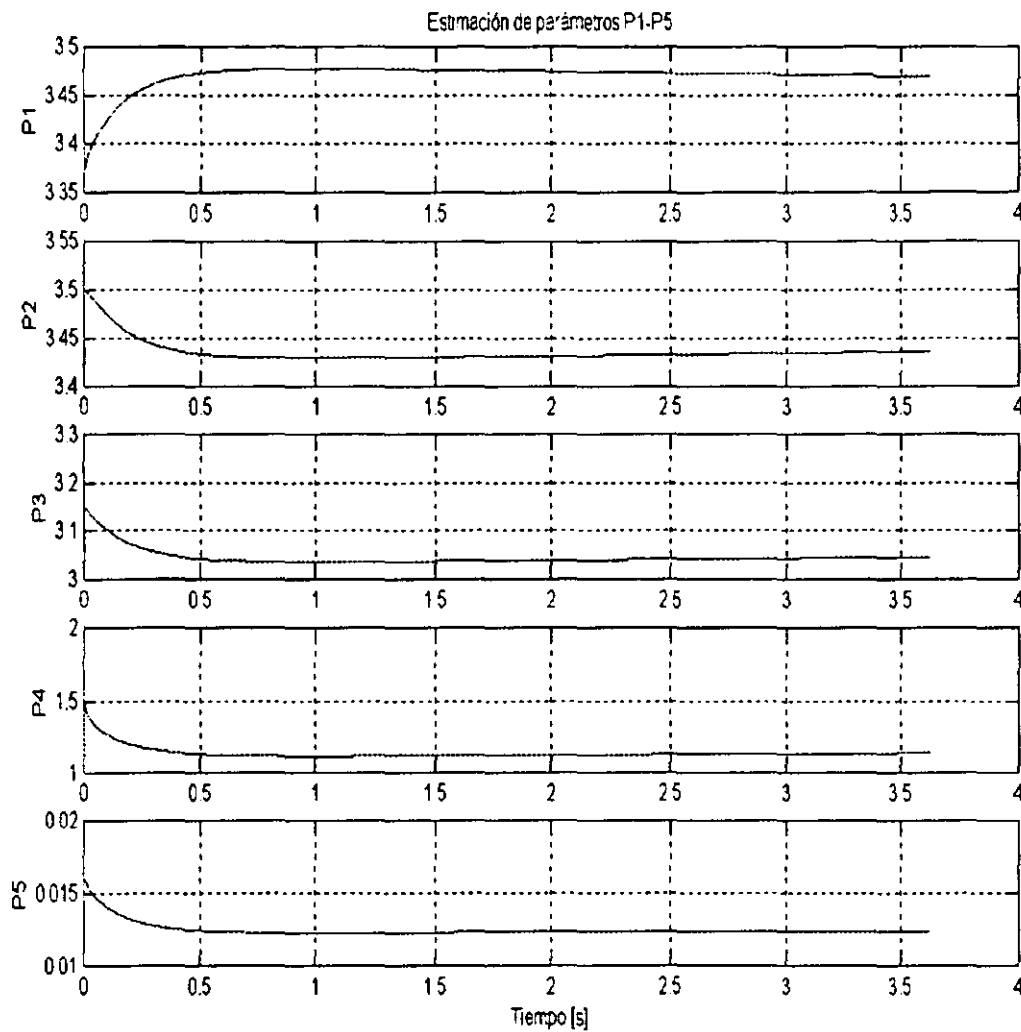


Figura 4.4: Evolución de los parámetros $P_1 - P_5$.

estas subestimación de μ son pequeños, del orden de 3%. La trayectoria de referencia para el frenado de emergencia es de difícil uso para propósitos de excitación, sin embargo el controlador tiene un buen desempeño incluso considerando que las características de fricción de la llanta-pavimento cambien un instante antes de intentar el frenado de emergencia.

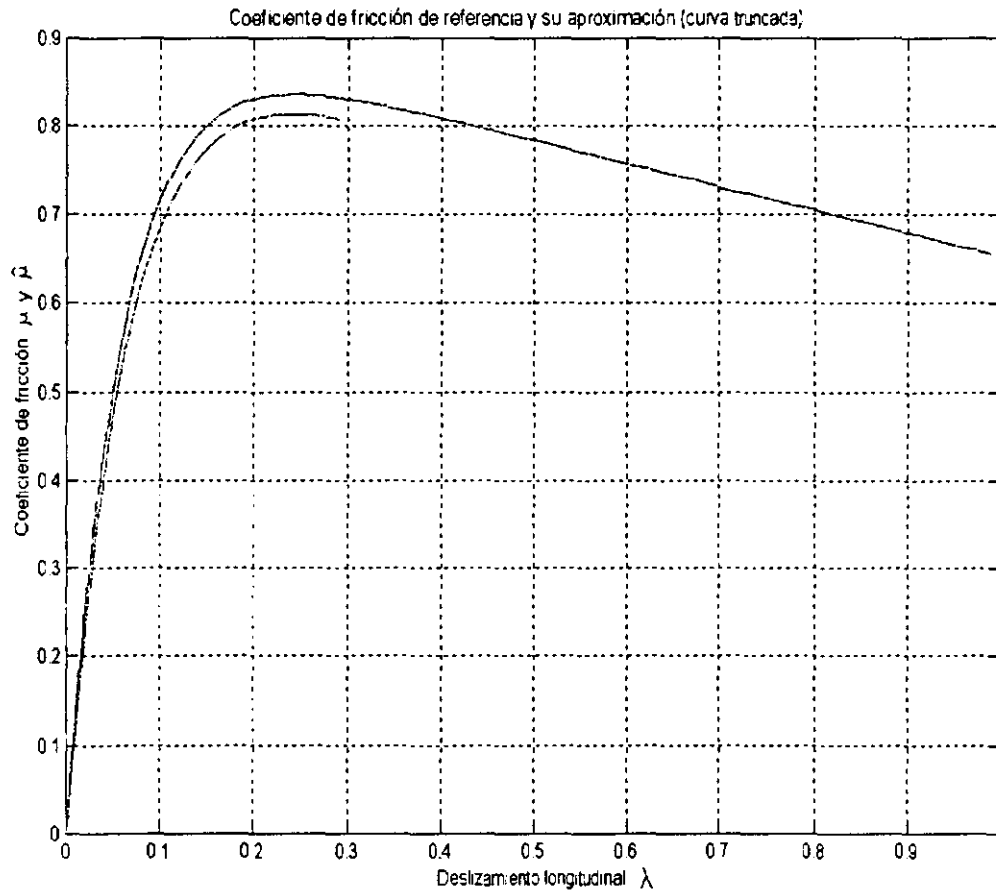


Figura 4.5: Ajuste de la curva de las características de fricción llanta-pavimento.

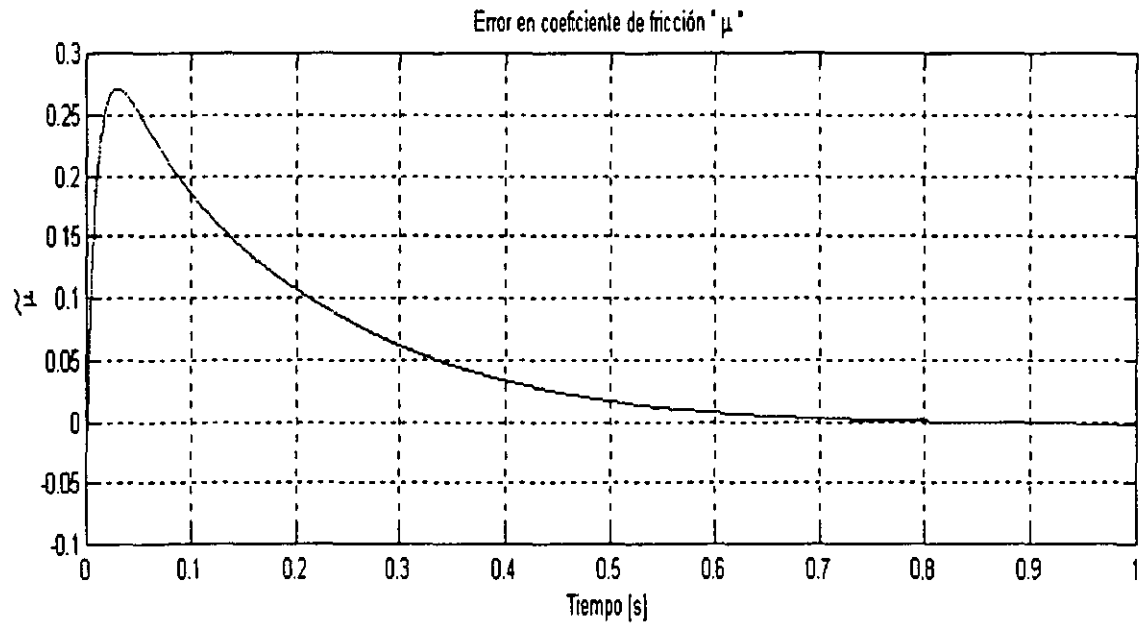
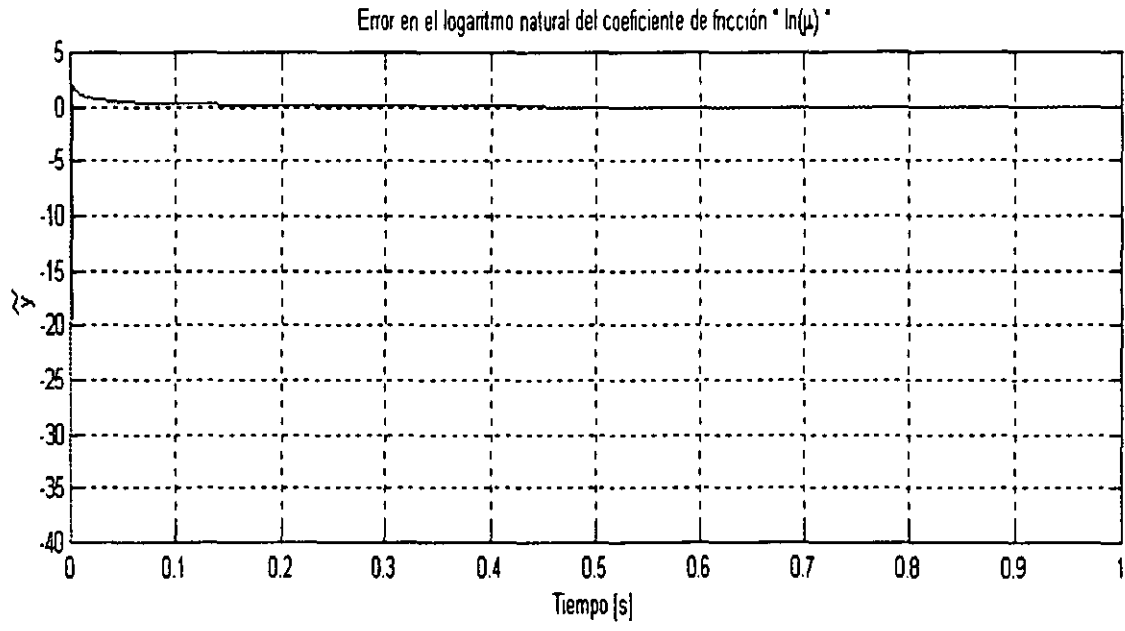


Figura 4.6: Errores en el ajuste de μ y $y = \ln \mu$.

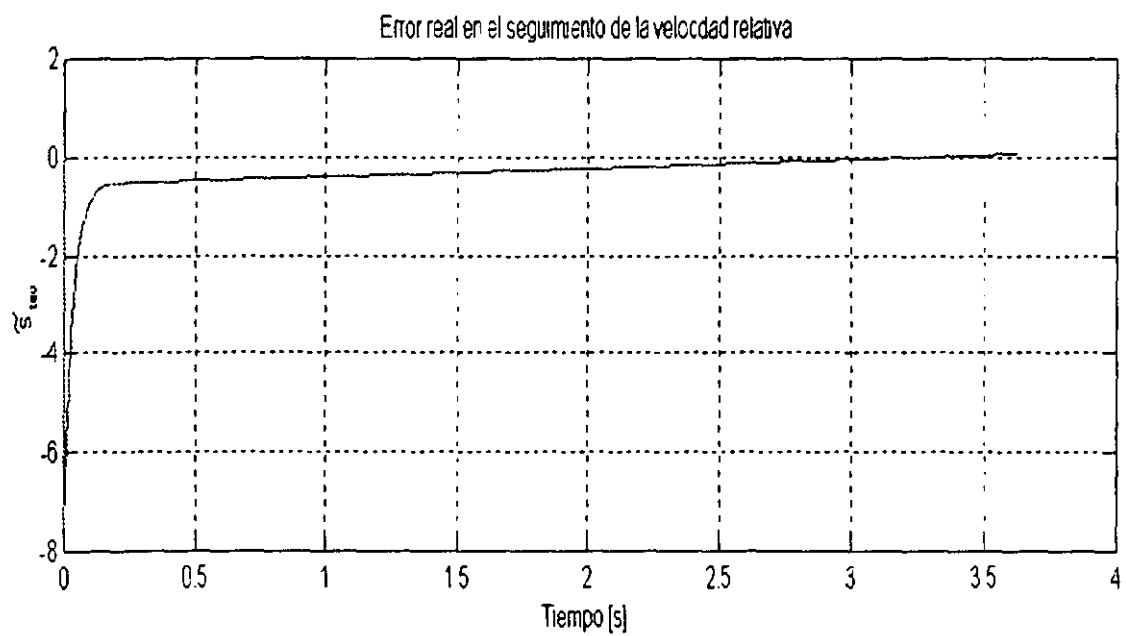
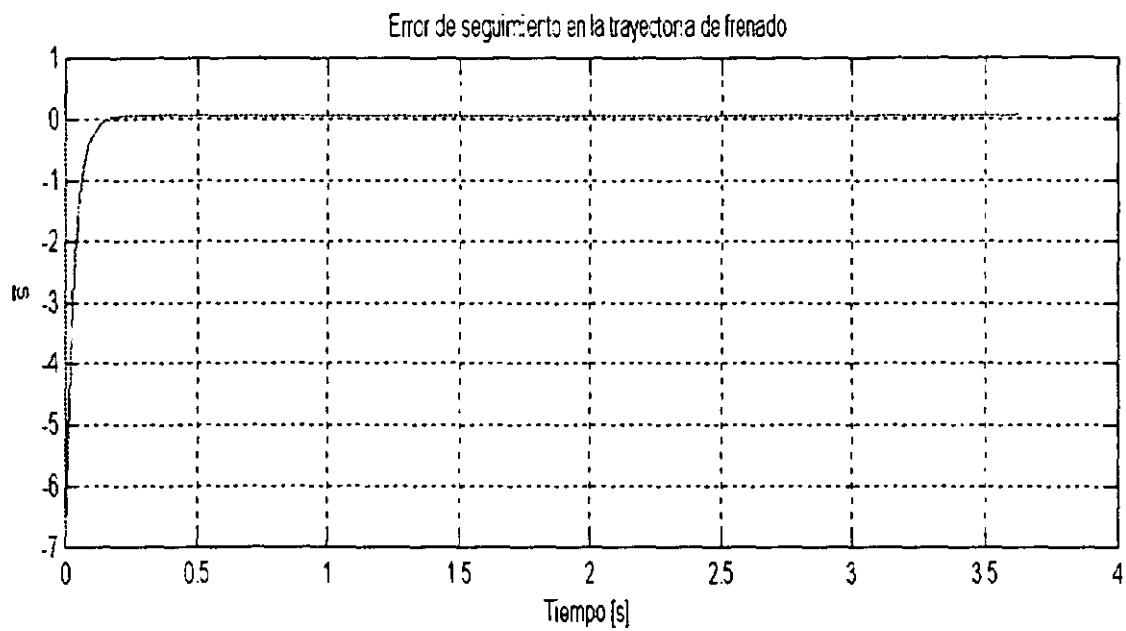


Figura 4.7: Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia s_m .

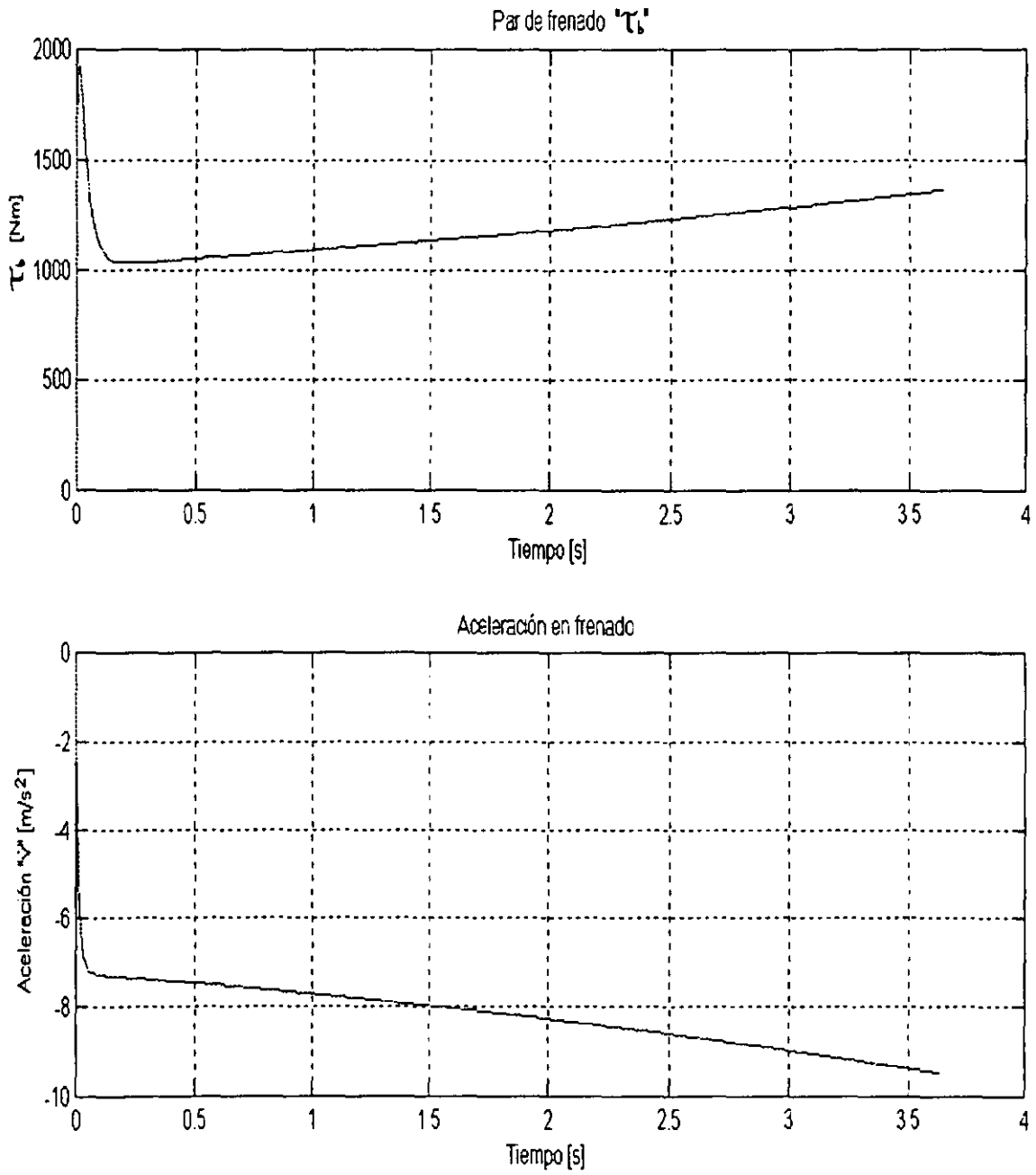


Figura 4.8: Par de frenado y aceleración durante la maniobra de frenado τ_b y $\dot{\gamma}$.

4.2 Diseño del controlador-observador con datos de velocidad angular y aceleración lineal

Para el diseño de este nuevo conjunto controlador-observador se introduce un nuevo observador en donde se considera que hay datos disponibles de velocidad angular (ω) y aceleración longitudinal (\dot{v}), y que la aceleración angular se calcula a partir de la velocidad angular ($\dot{\omega}$). El objetivo es también llevar al vehículo de la velocidad inicial a cero lo más pronto posible. En este esquema también se observa el estado del sistema y se estima la interfase llanta-pavimento. Para frenar lo más rápido posible se intenta llevar al sistema a través de la trayectoria de máxima fricción. Para la demostración se utiliza nuevamente teoría de Lyapunov de sistemas acoplados. En la Fig. 4.9 se muestra un diagrama de bloques simplificado que representa la interacción de los diferentes elementos del sistema.

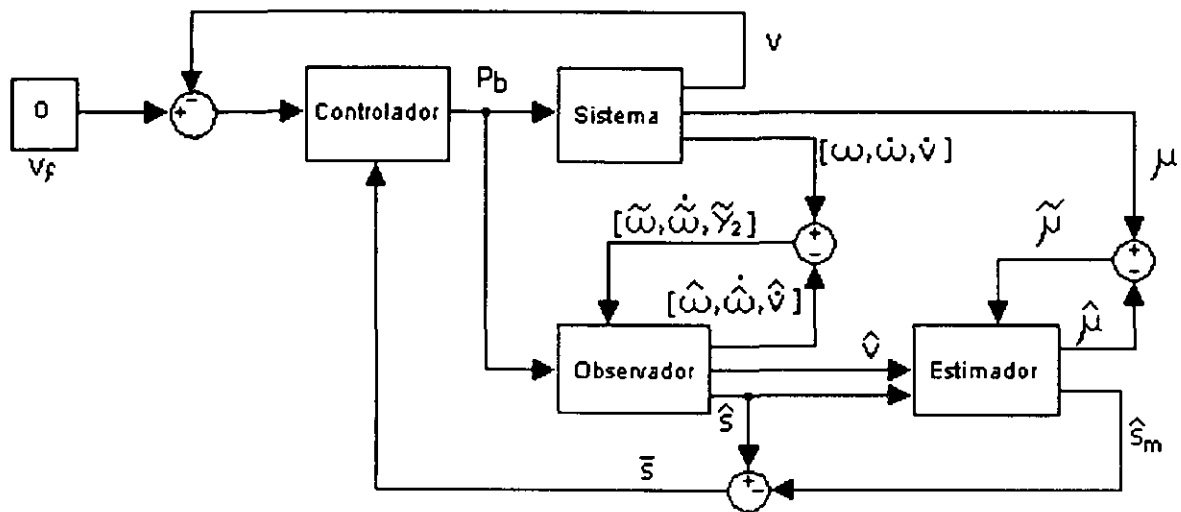


Figura 4.9: Diagrama de bloques del sistema.

4.2.1 Observador

En esta sección se introduce un nuevo observador en donde se considera que hay datos disponibles de velocidad angular y aceleración longitudinal, y que la aceleración angular se calcula a partir de la velocidad angular. Nuevamente se utiliza un observador impropio de alta ganancia.

Para el observador de la velocidad longitudinal se propone la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{v}} = -c \mu - d\hat{v}^2 + L\tilde{y}_2 \quad (4.56)$$

donde \hat{v} es el valor estimado de v y el coeficiente de fricción se deduce de

$$\mu = -\frac{I\dot{\omega} + K_b P_b}{f} \quad (4.57)$$

con $f = mgR/4$ y \tilde{y}_2 esta dada por

$$\tilde{y}_2 = \dot{v} - \hat{\dot{v}} = (-c\mu - dv^2) - (-c\mu - d\hat{v}^2) = -d\tilde{v}(v + \hat{v}) \quad (4.58)$$

y la ganancia L , se determinara posteriormente. Es importante notar que la definición de $\hat{\dot{v}}$ es diferente de la introducida en la Ec. (4.56).

De las Ecs. (2.8) y (4.56) la dinámica del error de estimación de la velocidad del vehículo es

$$\dot{\tilde{v}} = -dv^2 + d\hat{v}^2 - L\tilde{y}_2 = -d\tilde{v}(v + \hat{v})(1 - L) \quad (4.59)$$

donde de manera obvia v y \hat{v} son funciones del tiempo.

Una propiedad importante de la Ec. (4.59) es que el signo de \tilde{v} no cambia, esta propiedad está plasmada en el siguiente lema:

Lema 1: *si $\tilde{v}(0) < 0$ entonces $\tilde{v}(t) < 0 \forall t \geq 0$*

Prueba: Para cualquier par de valores de v y \hat{v} la solución de la Ec. (4.59) es de la forma

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}(0)e^{-d(1-L)\int_0^t (v(\tau) + \hat{v}(\tau))d\tau} \quad (4.60)$$

Este término nunca cambiará de signo, es por ello que si $\tilde{v}(0) < 0 \Rightarrow \tilde{v}(t) < 0 \forall t \geq 0$. QED.

Se define la siguiente función candidata de Lyapunov para el subsistema \tilde{v}

$$W_a = \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \quad (4.61)$$

al tomar la derivada con respecto al tiempo de Ec. (4.61) y utilizar Ec. (4.59)

$$\dot{W}_a = \tilde{v}\dot{\tilde{v}} = -d\tilde{v}^2(v + \hat{v})(1 - L) \quad (4.62)$$

donde se escoge $L < 0$ se garantiza que

$$\dot{W}_a \leq -\alpha_a \phi_a^2(\tilde{v}) \leq 0 \quad (4.63)$$

con $\alpha_a = d(1 - L)v_{min} > 0$ y $\phi_a(\tilde{v}) = \tilde{v}$. v_{min} es la cota mínima en la velocidad longitudinal del vehículo de tal manera que la maniobra de frenado se puede considerar completa cuando $v \rightarrow v_{min}$.

4.2.2 Controlador

Para el diseño del controlador es necesario determinar el valor de la presión en el cilindro maestro P_b . En este controlador se emplea el observador diseñado en la sección 4.2.1 en donde se tienen datos de velocidad angular y aceleración lineal. Para el controlador se define una función de error

$$\bar{s} = \hat{s} - \hat{\lambda}_m \hat{v} = \hat{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\omega \quad (4.64)$$

para la velocidad relativa deseada en el proceso de frenado. En esta expresión $\hat{s} = \hat{v} - R\omega$, $\hat{\lambda}$ es el valor estimado de λ_m basado en la estimación actual de $\hat{\Theta}$. Tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.64)

$$\dot{\hat{s}} = \dot{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\dot{\omega} - \dot{v}\hat{\lambda}_m \quad (4.65)$$

$$= \dot{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - \frac{Rf}{I}\mu + \frac{RK_b P_b}{I} - \dot{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}} \dot{v} - \dot{v} \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega} \dot{\omega} \quad (4.66)$$

Las derivadas parciales de $\hat{\lambda}_m$ se pueden calcular de la Ec. (3.7). Si se selecciona P_b

$$P_b = \frac{I}{RK_b} \left(-\dot{v}(1 - \hat{\lambda}_m) + \frac{Rf}{I}\mu + \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}} \dot{v} + \frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega} \dot{\omega} - \zeta \bar{s} \right), \quad (4.67)$$

y se sustituye en la Ec. (4.66) se tiene

$$\dot{\hat{s}} = -\zeta \hat{s} \quad (4.68)$$

Definiendo la función candidata de Lyapunov para el subsistema \bar{s}

$$W_b = \frac{1}{2} \bar{s}^2 \quad (4.69)$$

Al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.69) y usar la Ec. (4.68)

$$\dot{W}_b \leq -\alpha_b \phi_b^2(\bar{s}) \leq 0 \quad (4.70)$$

con $\alpha_b = \zeta > 0$ y $\phi_b(\bar{s}) = \bar{s}$, se obtiene la estabilidad exponencial de $\bar{s} = 0$.

El siguiente paso en la construcción del controlador es examinar el comportamiento del estimador de los parámetros que caracterizan la interfase llanta-pavimento y la velocidad del vehículo. Para esto se define la siguiente función candidata de Lyapunov para v

$$W_c = \frac{1}{2} v^2 \quad (4.71)$$

Al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.71) y usar la Ec. (2.8) se tiene

$$\dot{W}_c = -v(c\mu + dv^2) \leq -\alpha_c \phi_c^2(v) \leq 0 \quad (4.72)$$

con $\alpha_c = d > 0$ y $\phi_c(v) = v^{3/2} \geq 0$, se obtiene la estabilidad exponencial de $v = 0$.

Ahora considere la siguiente ley de adaptación de parámetros tipo gradiente para el modelo de la llanta-pavimento

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\Gamma \hat{U}^T \tilde{y} \quad (4.73)$$

donde $\tilde{y} = \ln \mu - \ln \hat{\mu} = U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta}$. Si se define la función candidata de Lyapunov para $\hat{\Theta}$ y \hat{v} como

$$W_d = \frac{1}{2} \hat{\Theta}^T \Gamma^{-1} \hat{\Theta} + \frac{1}{2} \hat{v}^2 \quad (4.74)$$

la derivada temporal de Ec. (4.74) al usar la Ec. (4.56) y (4.73)

$$\dot{W}_d = \hat{v}(-c\mu - d\hat{v}^2 + Ldv^2 - Ld\hat{v}^2) - \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T (U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta} + \hat{U}\Theta - \hat{U}\hat{\Theta}) \quad (4.75)$$

$$\leq -\alpha_d \phi_d^2(\hat{v}) - \alpha_e \phi_e^2(\tilde{\Theta}) + Ldv^2 \hat{v} + \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \Theta \quad (4.76)$$

donde $\hat{U} = U - \hat{U}$, $\alpha_d = dv_{min}(1 - L) > 0$, $\alpha_e = K_e$, $\phi_d(\hat{v}) = \hat{v}$ y $\phi_e(\tilde{\Theta}) = \sqrt{\tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta}}$. El valor de K_e satisface $K_e \leq |\lambda_{min}|^2$, con λ_{min} como un valor mínimo aceptable para λ durante el proceso de frenado.

En los dos últimos términos de la Ec. (4.76) no se puede garantizar que sea negativa semidefinida, para tratar este problema se emplea un resultado de Khalil (1996) y que se presentó en la sección 4.1.2. En donde se demostró que para toda $v \geq v_{min}$

$$\hat{U}\Theta \leq K_1 |\tilde{v}| \quad (4.77)$$

Con v_{min} una velocidad suficientemente pequeña escogida apropiadamente para evitar singularidades cuando en el proceso de frenado $v \rightarrow 0$, por otro lado

$$Ldv^2 \leq \gamma_{cd} \phi_c(v) \quad (4.78)$$

con $\gamma_{cd} = Ldv_{max}^2$. Al usar las Ecs. (4.77) y (4.78), la Ec. (4.76) puede ser escrita como

$$\dot{W}_d \leq -\alpha_d \phi_d^2(\hat{v}) - \alpha_e \phi_e^2(\tilde{\Theta}) + \gamma_{cd} \phi_c(v) \phi_d(\hat{v}) + \gamma_{ae} \phi_a(\tilde{v}) \phi_e(\tilde{\Theta}), \quad (4.79)$$

con $\gamma_{ae} = K_1$.

Ahora se propone una función compuesta como candidata a función de Lyapunov.

$$W = \sum_{i \in \{a, b, c, d\}} d_i W_i \quad (4.80)$$

donde $d_i > 0$ son factores de escala a determinar posteriormente. La derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4.80) satisface, de las ecuaciones Ecs. (4.63), (4.70), (4.72) y (4.79)

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -d_a \alpha_a \phi_a^2(\tilde{v}) - d_b \alpha_b \phi_b^2(\tilde{s}) - d_d (-\alpha_d \phi_d^2(\hat{v}) + \gamma_{cd} \phi_c(v) \phi_d(\hat{v})) \\ & + d_e (-\alpha_e \phi_e^2(\tilde{\Theta}) + \gamma_{ae} \phi_a(\tilde{v}) \phi_e(\tilde{\Theta})) \end{aligned} \quad (4.81)$$

La Ec. (4.81) es una forma cuadrática que puede ser escrita de la forma:

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2} \Phi^T (DS + S^T D) \Phi \quad (4.82)$$

donde $\Phi = [\phi_a, \dots, \phi_e]^T$, $D = \text{diag}(d_a, \dots, d_e)$ y la matriz S se define como

$$S_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \gamma_{ij} & \text{si } i = j \\ -\gamma_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.83)$$

donde $\gamma_{ij} \forall ij \neq cd, ae$. La forma cuadrática de la Ec. (4.82) es negativa definida si y sólo si la matriz $DS + S^T D$ es positiva definida, pues existe una matriz D tal que $DS + S^T D$ es positiva definida si todos los menores principales de S son positivos².

En este caso, como en el esquema anterior, se construye la matriz S con base en α_{ij} y γ_{ij} , definidos antes. La prueba de que los menores principales de S son positivos es directa, esto prueba la estabilidad asintótica del punto de equilibrio $\bar{v} = v = \hat{v} = \bar{s} = 0$. Para la adaptación de parámetros este resultado muestra sólo que $\bar{y} = 0$, lo que no necesariamente implica que $\hat{\Theta} = 0$, si no hay excitación persistente.

4.2.3 Resultados de simulación

Para verificar este nuevo diseño de observador-controlador presentado en la sección anterior se realizó una simulación del frenado de emergencia en un automóvil estándar en donde se comienza la maniobra de frenado a una velocidad de 30 m/s.

En la Fig. 4.10 y 4.11 se muestra la evolución y convergencia del observador de velocidad y velocidad relativa, respectivamente. En estas gráficas se puede apreciar que el error es muy pequeño en ambos casos.

La convergencia paramétrica de la Ec. (3.3) de la característica llanta-pavimento, se presenta en la Fig. 4.12, los parámetros convergen a valores constantes, y la curva ajustada en línea durante el frenado de emergencia se presenta en la Fig. 4.13, en esta gráfica se muestran dos curvas, la curva truncada es el valor final de μ Vs λ resultado de la estimación y la curva de referencia. Los "parámetros verdaderos" para la aproximación en la Ec. (3.3) se obtuvieron en una prueba fuera de línea y se muestran en la tabla 3.1

La Fig. 4.14 contiene las gráficas de la evolución del error de \bar{y} , donde $y = \ln \mu$ y $\bar{\mu} = \mu - \hat{\mu}$. La Fig. 4.15 muestra el error \bar{s} , durante el tiempo de la maniobra. \bar{s} es el error de seguimiento de la trayectoria de referencia para la velocidad relativa. Esta se ubica en el punto donde se logra el valor del deslizamiento que corresponde con la máxima fricción en el estimado actual del valor de μ (\hat{s}_m). La segunda gráfica dentro de esta misma figura corresponde a el error de seguimiento teórico, este error es el obtenido en realidad, al considerar la velocidad relativa deseada real (s_m) y no la estimada, la tercera gráfica dentro de esta figura muestra la evolución del error de estimación de la aceleración longitudinal del vehículo \bar{y}_2 . Finalmente la Fig. 4.16 muestra el par de frenado y la desaceleración alcanzadas durante este proceso. Es claro en esta figura que la desaceleración es más grande a velocidades pequeñas que a velocidades grandes. Esto resulta lógico debido a la influencia de la velocidad en el coeficiente de fricción. Estas gráficas indican un buen desempeño del controlador. Es importante hacer notar que la trayectoria impuesta para el frenado de emergencia no garantiza la convergencia paramétrica. La razón reside en la ausencia de excitación persistente para esta trayectoria de referencia. Sin embargo, la simulación muestra errores en la convergencia que están por debajo del 10% de los valores reales; lamentablemente a diferencia del observador-controlador diseñado en la sección 4.1.1 con este conjunto no se logra subestimación paramétrica.

Existen varios puntos importantes en los resultados de la simulación. El más importante es que en este diseño no es necesario un conocimiento preciso de las condiciones iniciales para lograr buenos resultados; esto se puede apreciar en la Fig. 4.10, donde la condición inicial del estimado de la velocidad no corresponde con el de la velocidad real. Nuevamente se puede ver que la aproximación usada de la Ec. (3.3) a la Ec. (3.1) sigue siendo válida con todas las ventajas citadas en su momento.

Como ya se mencionó en la sección 4.1.3 la trayectoria seguida en el frenado de emergencia no tiene excitación persistente por lo que es de difícil uso para la identificación de parámetros, sin

²Khalil (1996).

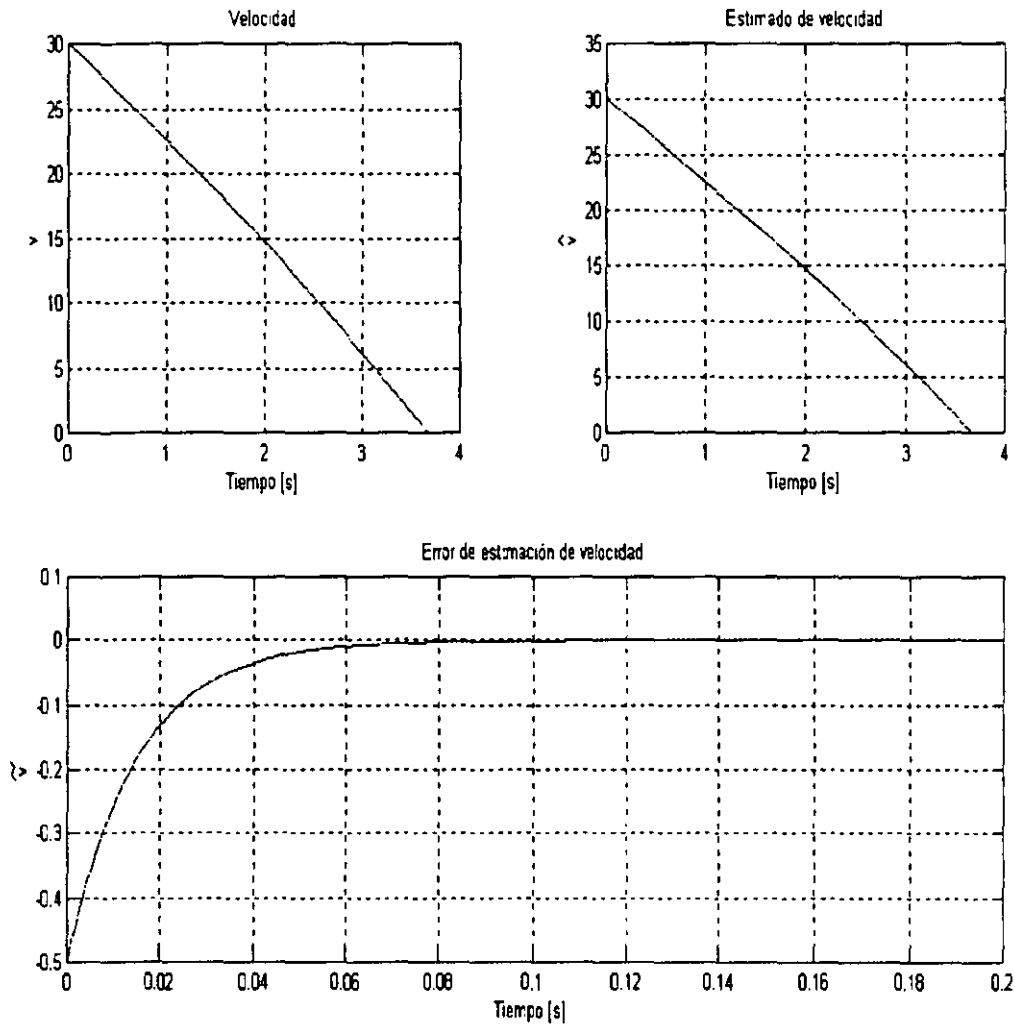


Figura 4.10: Simulación de los resultados del frenado de emergencia: Velocidad, estimado de la velocidad y error de estimación.

embargo este controlador también tiene un buen desempeño incluso considerando que las características de fricción de la llanta-pavimento puedan cambiar de un momento a otro; los errores de estimación de la curva de fricción μ son pequeños, aproximadamente del orden de 3%.

En este capítulo se presentó el diseño de dos esquemas controlador-observador para el frenado de emergencia, ambos utilizando un modelo pseudoestático para el fenómeno de fricción llanta-pavimento. Se propone una aproximación al modelo de (Burckhardt 1993) de tal manera que esta aproximación considera el efecto de la velocidad del vehículo en el coeficiente de fricción y que además es posible linealizar en sus parámetros. Dentro del esquema se propone una ley de adaptación paramétrica para este modelo propuesto. Para cada esquema se propone un observador para el estado del sistema, en el primer esquema se requiere conocer muy bien en estado inicial del sistema para un mejor desempeño, pero sólo utiliza datos de velocidad y aceleración angular. El

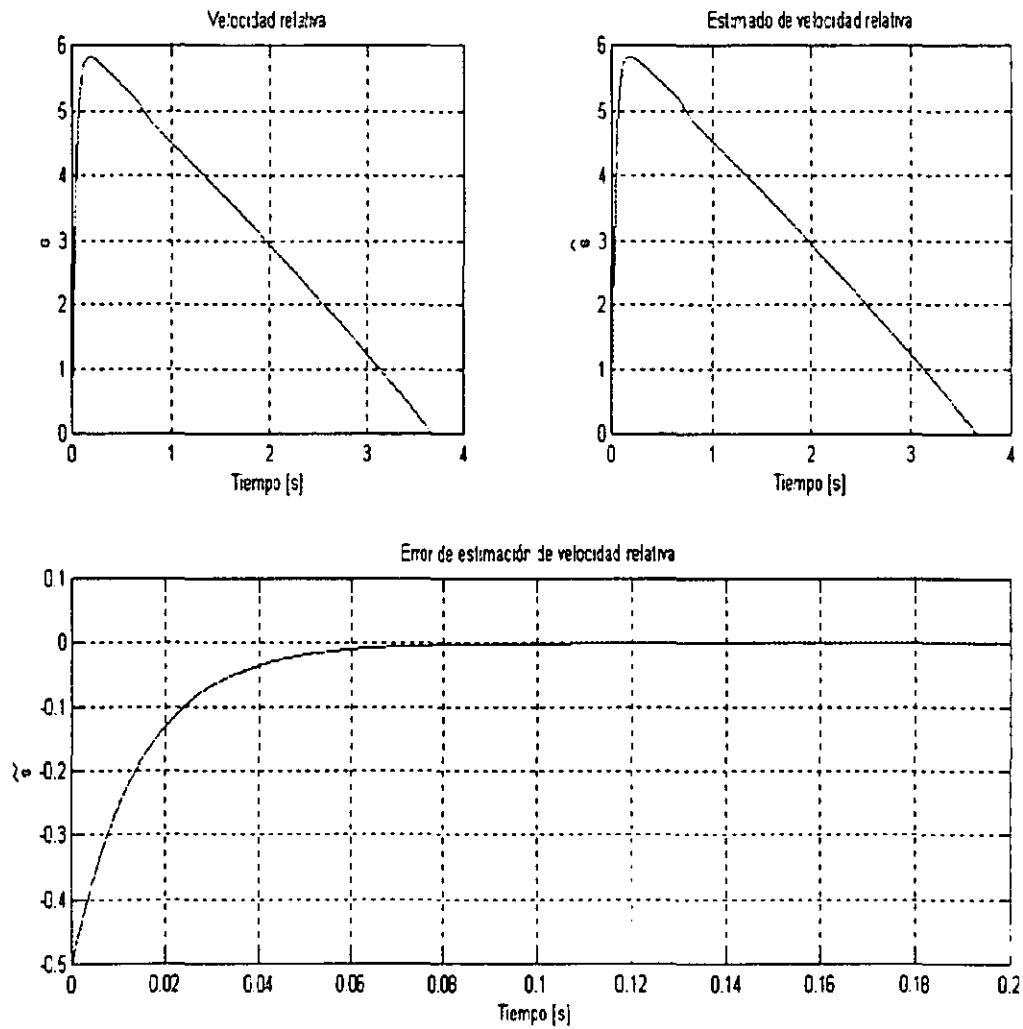


Figura 4.11: Simulación de los resultados del frenado de emergencia: Velocidad relativa, estimado de la velocidad relativa y error de estimación.

segundo esquema no tiene este problema para obtener un buen desempeño, pero requiere además de la velocidad y aceleración angular la aceleración lineal del vehículo. El control propuesto tiene como objetivo, en ambos casos, llevar al auto por la trayectoria de máxima fricción utilizando el estimado actual de la curva de fricción. La demostración de la estabilidad de los esquemas se hace con técnicas de Lyapunov de sistemas acoplados

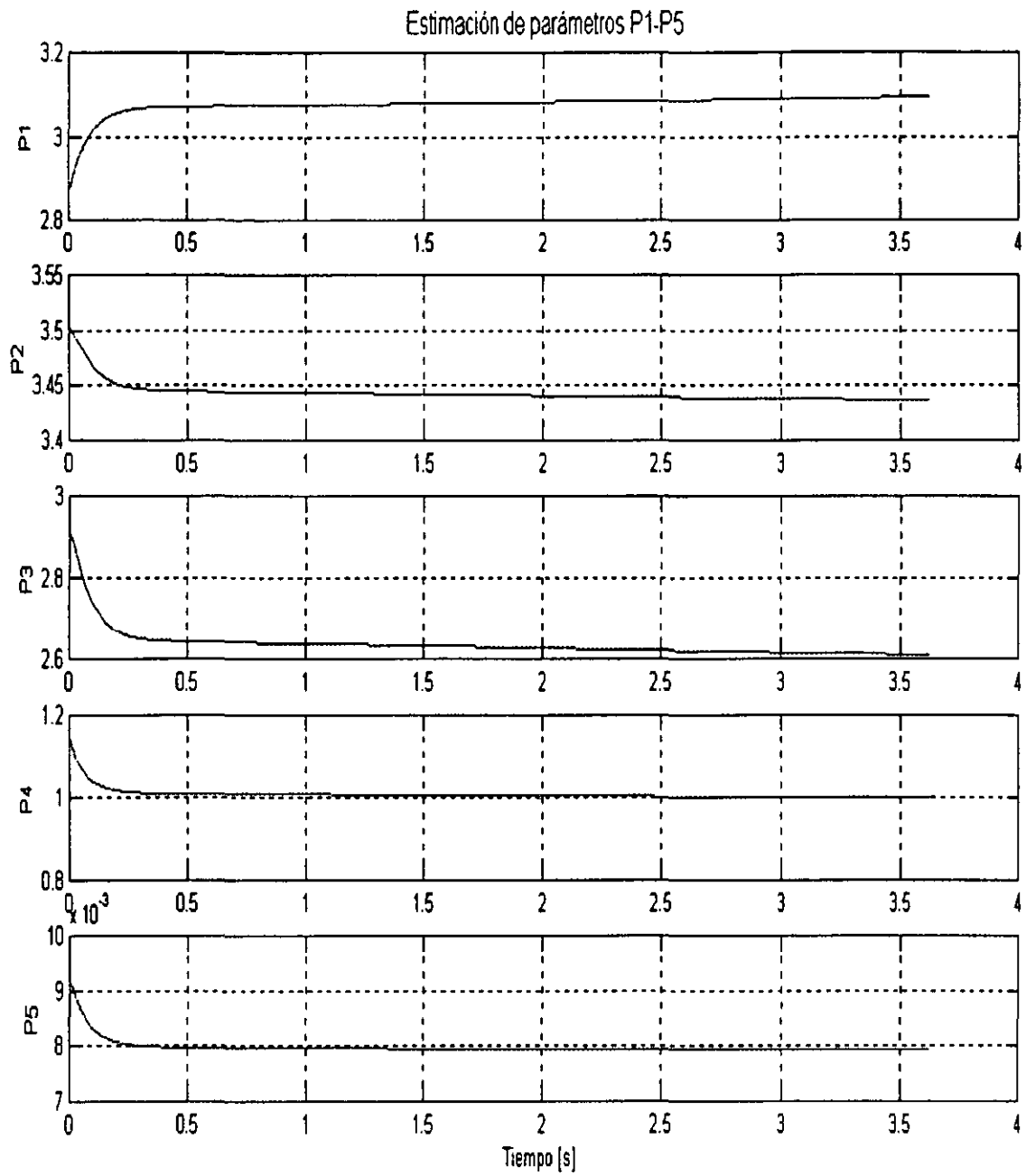


Figura 4.12: Evolución de los parámetros $P_1 - P_5$.

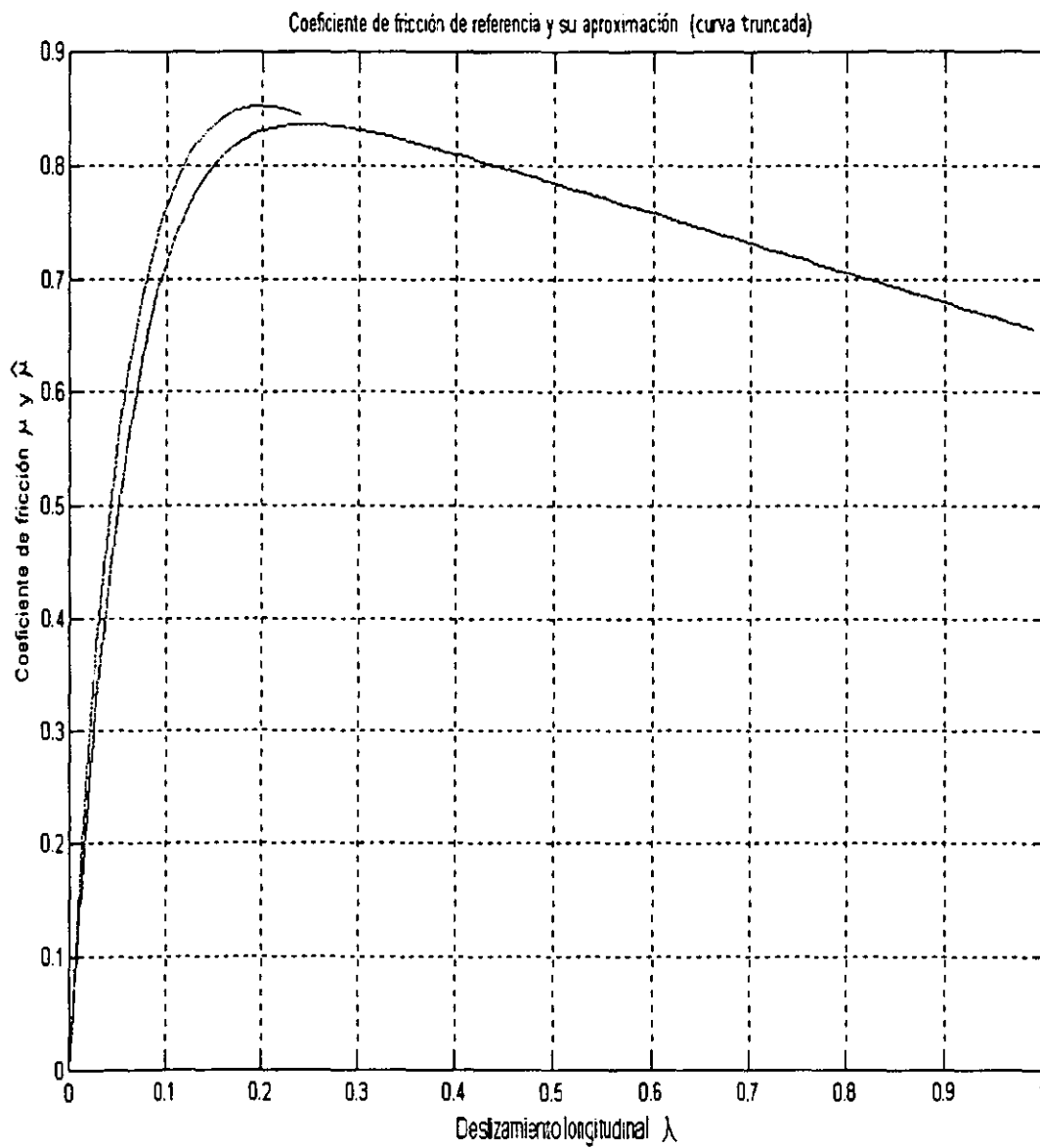


Figura 4.13: Ajuste de la curva de las características de fricción llanta-pavimento.

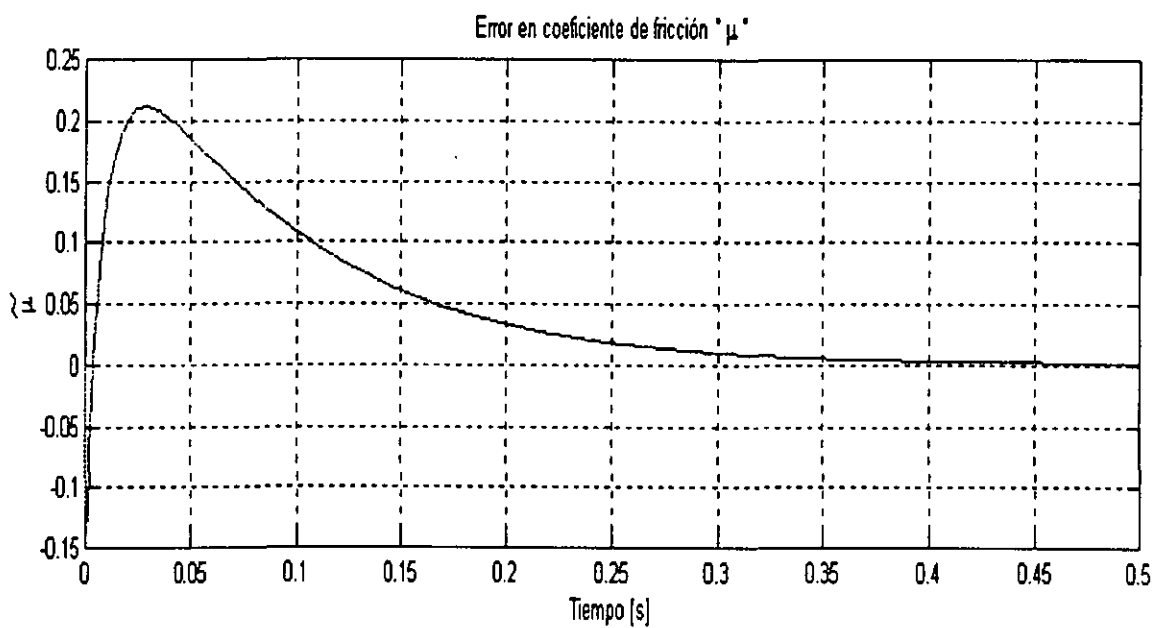
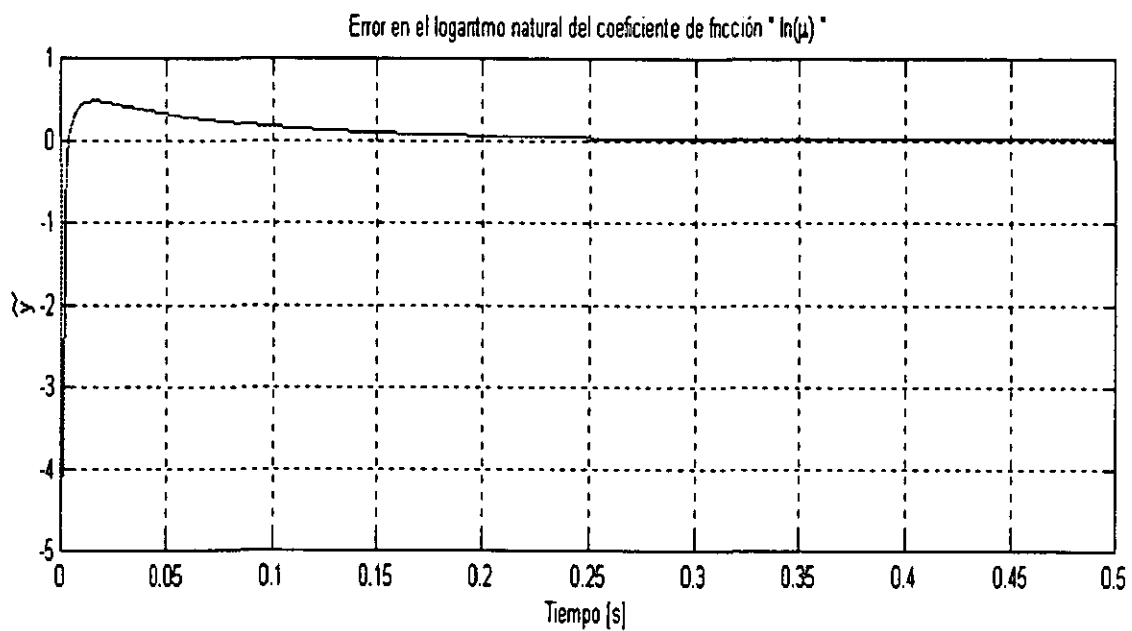


Figura 4.14: Errores en el ajuste de μ y $y = \ln \mu$.

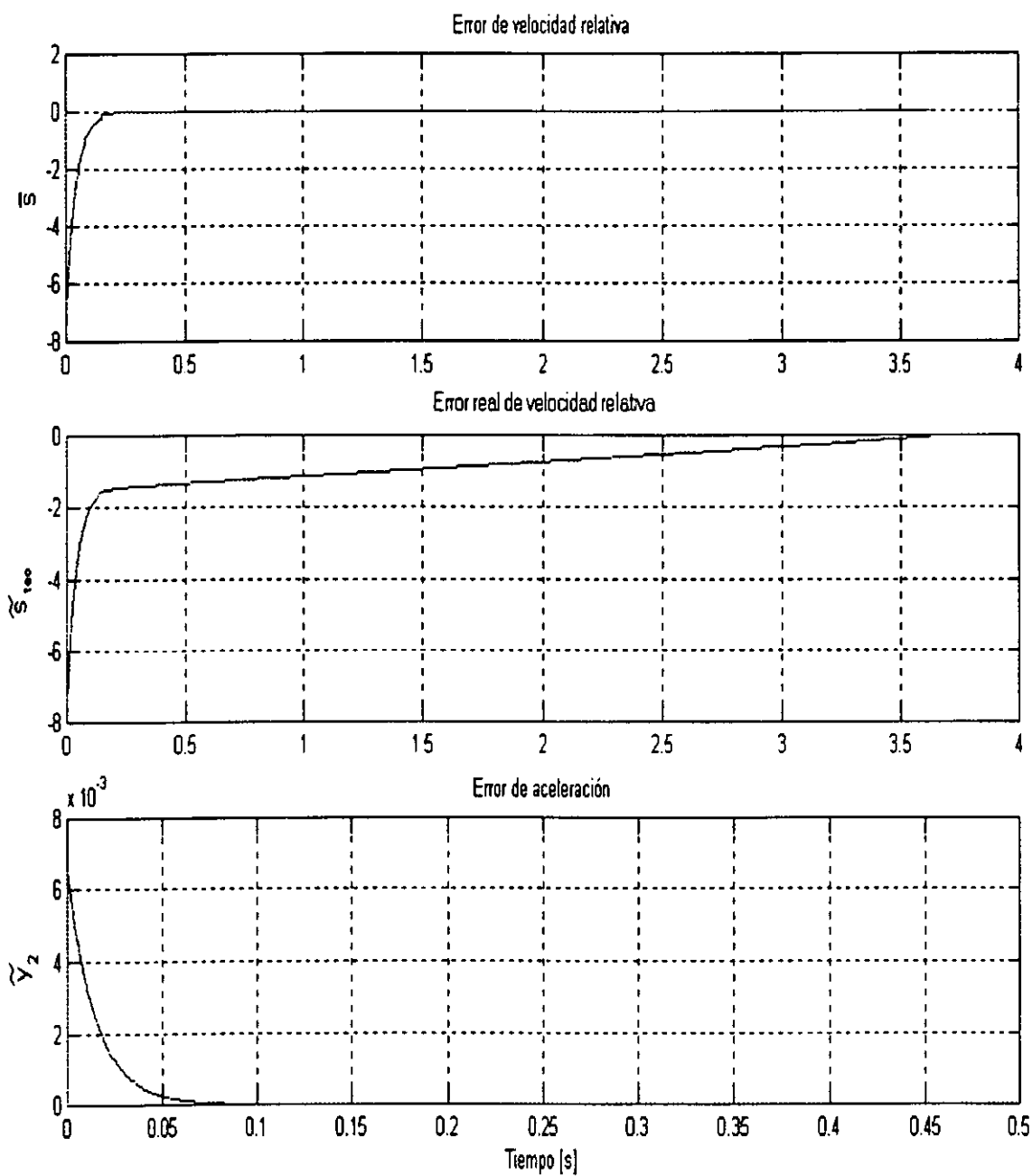


Figura 4.15: Error en el seguimiento de la trayectoria de referencia s_m y error en la estimación de la aceleración \tilde{y}_2 .

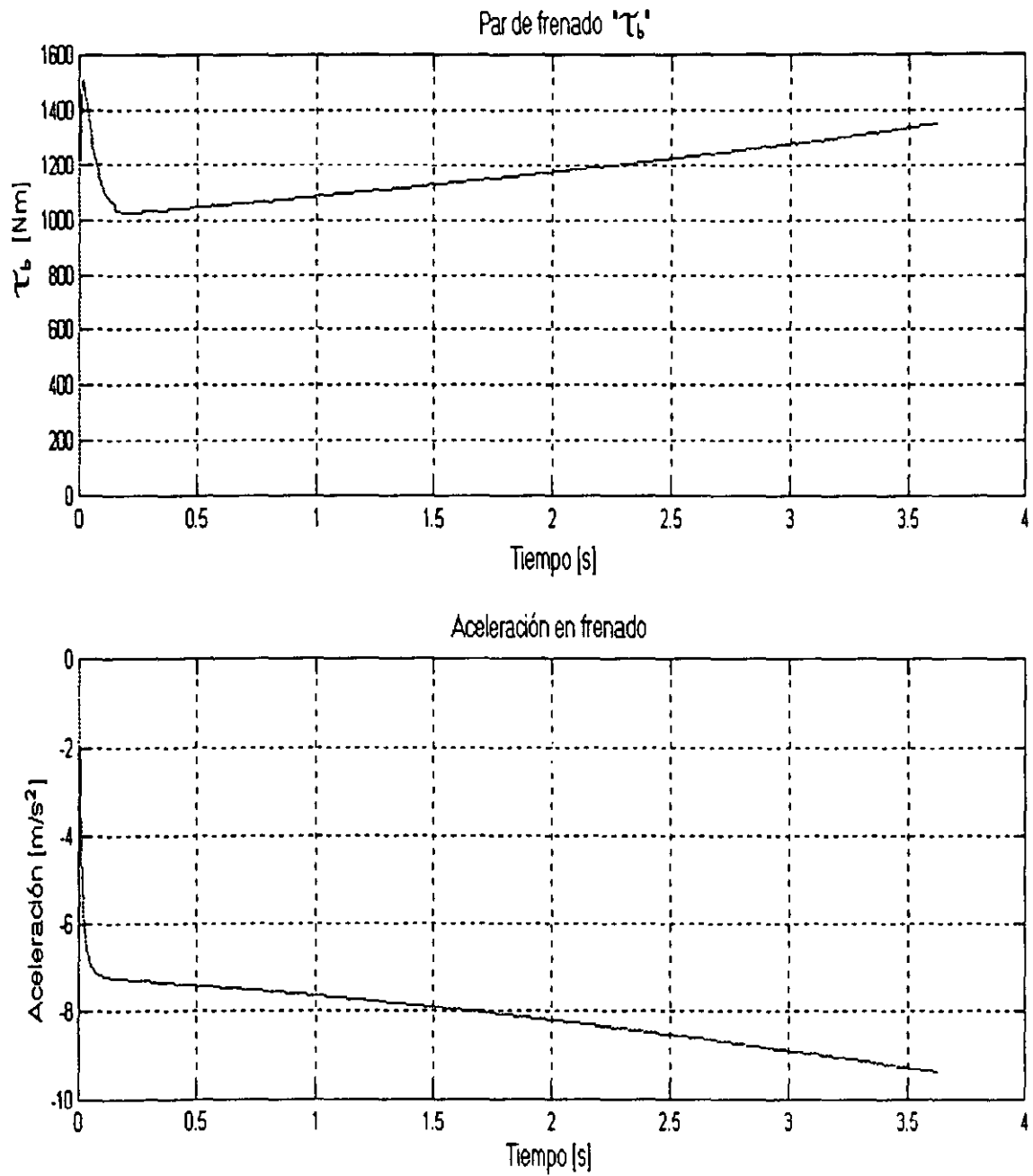


Figura 4.16: Par de frenado y aceleración durante la maniobra de frenado τ_b y \dot{v} .

Capítulo 5

Control y observación con modelos dinámicos de fricción

En este capítulo, de manera análoga al capítulo 4, se presenta el diseño de un controlador que emplea un modelo dinámico para la característica de la fricción llanta-pavimento y se presenta un controlador que sigue una trayectoria deseada, en donde se obtiene el máximo coeficiente de fricción. También se presenta el diseño de un controlador empleando técnicas de control óptimo y se muestra cómo el control óptimo corresponde a llevar al sistema al punto donde se alcanza la máxima fricción. En la última parte se presenta un esquema para estimar el estado interno del modelo dinámico propuesto y un esquema adaptable para algunos parámetros de dicho modelo. Se presentan resultados de simulación tanto de los controladores como del observador-estimador.

5.1 Control para lograr máxima fuerza de fricción

En el caso de los controladores que utilizan modelos pseudoestáticos se buscaba llegar al punto de máxima fricción durante el proceso de frenado. En estos casos se cuenta con una expresión analítica que permite obtener dicho punto y con base en eso se realizaba el control. Para el modelo dinámico se tiene el mismo objetivo, pero se desea explotar las características de los modelos dinámicos para alcanzar la máxima fuerza de fricción.

5.1.1 Trayectoria de máxima fricción

De manera similar al caso pseudoestático es necesario encontrar una expresión con base en el modelo dinámico que permita encontrar una trayectoria de referencia en la maniobra de frenado que garantice aplicar la máxima fuerza de fricción. Para lograr esto se utiliza el modelo presentado en la sección 3.2 y un resultado planteado en la 3.3, en donde se obtiene una expresión del coeficiente de fricción μ que reparametriza el estado interno del modelo z como una solución en términos del deslizamiento λ y la velocidad relativa entre la llanta y pavimento s .

$$\mu = \text{sign}(s)g(s) \left(1 - e^{-\frac{\sigma_0 \lambda}{g(s)}L} \right) + \sigma_1 \text{sign}(s)|\lambda||v|e^{-\frac{\sigma_0 |\lambda|}{g(s)}L} - \sigma_2 s \quad (5.1)$$

La Fig. 5.1 muestra una gráfica de la función $\mu = f(s, \lambda)$, en la Fig. 5.2 una vista de las curvas (μ vs s) donde se aprecia claramente el efecto “Stribeck”, que es modelado gracias a la inclusión de la función $g(s)$. En la Fig. 5.3 se muestran las gráficas de (μ vs λ), donde se ve que estas curvas

son similares a los mapas pseudoestáticos, en ellos el coeficiente de fricción comienza a aumentar a medida que el deslizamiento aumenta hasta llegar al máximo, de donde disminuye cuando el deslizamiento aumenta y se presenta el derrapamiento de la llanta.

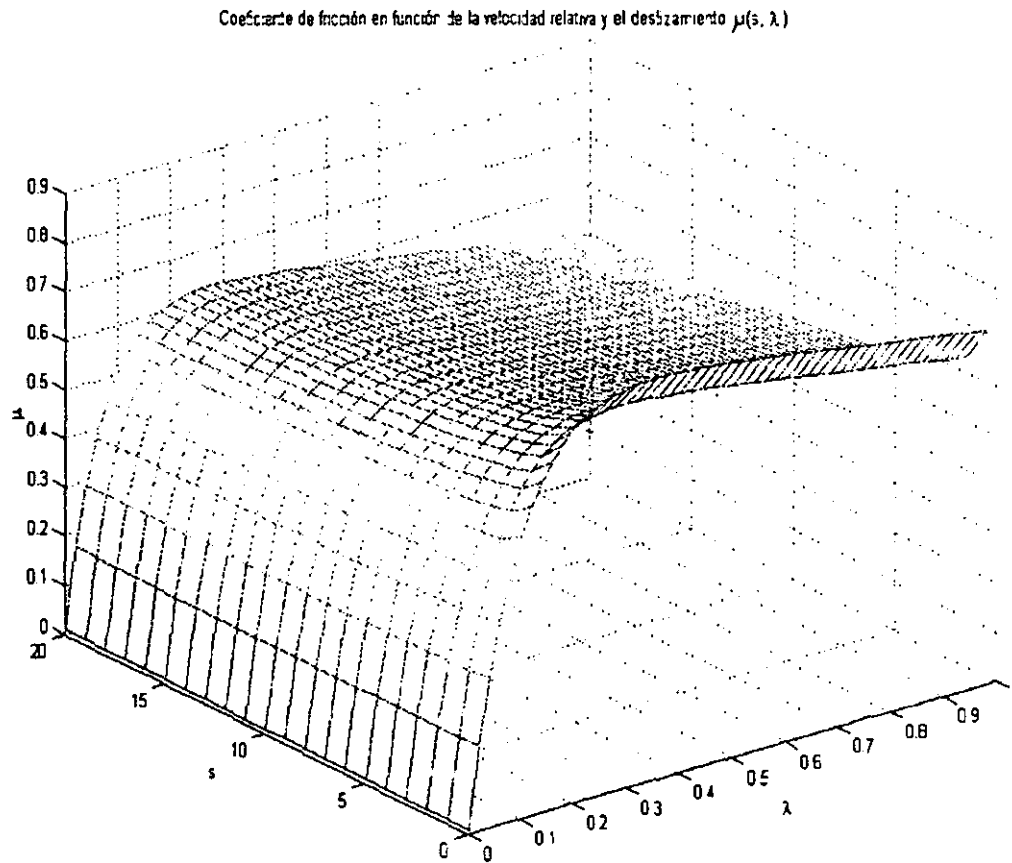


Figura 5.1: Gráfica en tercera dimensión de μ en función de la velocidad relativa s y del deslizamiento λ .

Si se sustituye el valor del deslizamiento $\lambda = s/v$ en la Ec. (5.1) y se considera que la velocidad relativa es positiva durante el frenado, $s > 0$, se llega a una expresión de μ en función de la velocidad del vehículo y de la velocidad relativa entre las superficies.

$$\mu = g(s) + (\sigma_1 s - g(s)) e^{-\frac{\sigma_0 f(s) L}{v}} - \sigma_2 s \quad (5.2)$$

$$(5.3)$$

donde

$$f(s) = \frac{|s|}{g(s)} \quad (5.4)$$

Para el caso en estudio lo que interesa es llevar al sistema a una velocidad relativa deseada s_d , que garantice que para cada velocidad se logra la máxima fricción posible, esto es posible resolviendo la siguiente ecuación

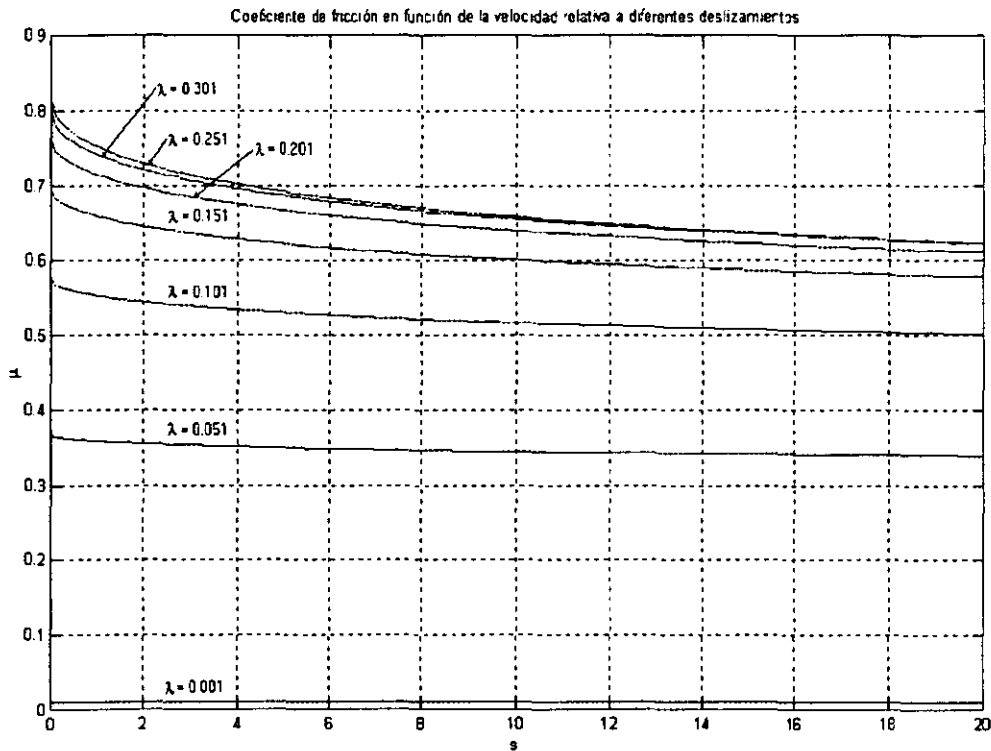


Figura 5.2: Vista de μ en función de la velocidad relativa s .

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = g'(s) + e^{-\frac{\sigma_0 f(s)L}{v}} \left[(\sigma_1 - g'(s)) - \frac{\sigma_0 f'(s)L}{v} (\sigma_1 s - g(s)) \right] = 0 \quad (5.5)$$

donde

$$g'(s) = \frac{\partial g(s)}{\partial s} \qquad f'(s) = \frac{\partial f(s)}{\partial s} \quad (5.6)$$

La Fig. 5.4 muestra una gráfica de la función $\mu = f(s, v)$, Ec. (5.2), donde se muestra también la solución de la Ec. (5.5), la trayectoria s_d de máxima fricción a través de la superficie. En la Fig. 5.5 se muestra el valor de la velocidad relativa deseada en función de la velocidad del vehículo $s_d = h(v)$.

5.1.2 Controlador

Una vez encontrada la trayectoria deseada que logra el frenado más eficiente y en el menor tiempo y distancia posible. El controlador a diseñar obviamente tiene como objetivo el llevar al sistema a través de esa trayectoria durante el proceso de frenado. Para esto se introduce el modelo dinámico presentado en la sección 3.2, Ecs. (3.30)-(3.32), que es un modelo en parámetros concentrados, en donde es lógico que el orden del sistema aumente, por lo que el nuevo sistema es

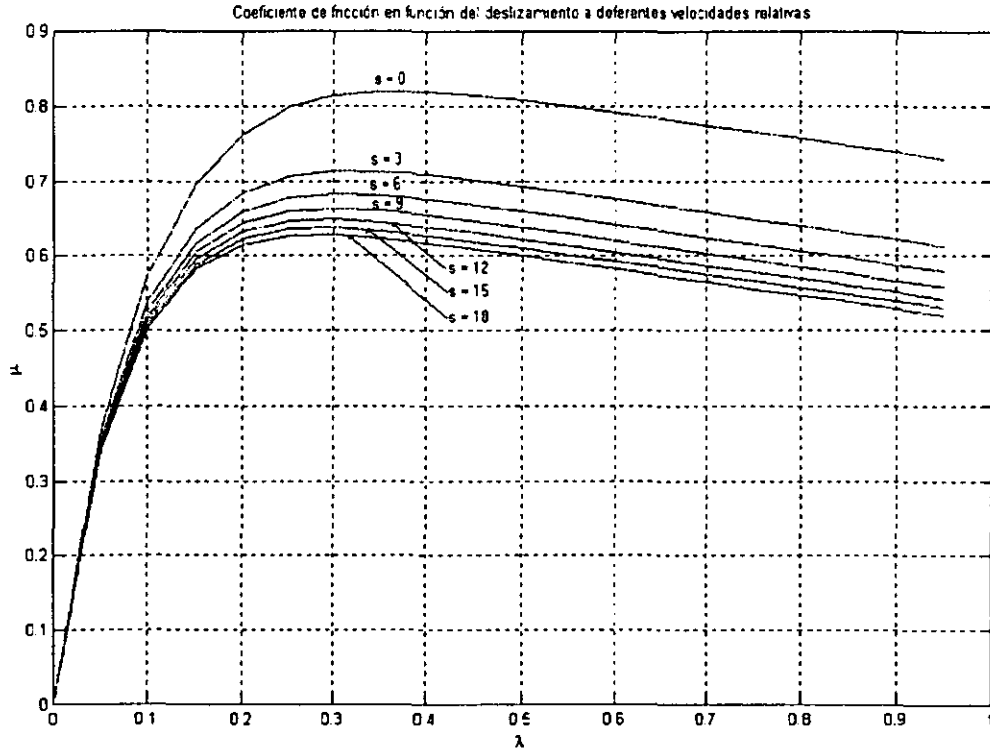


Figura 5.3: Vista de μ en función del deslizamiento λ .

$$\dot{z} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} z \quad (5.7)$$

$$\dot{v} = -c \mu - d v^2 \quad (5.8)$$

$$\dot{s} = -(a + c) \mu - b - d v^2 + e K_b P_b, \quad (5.9)$$

con $a = R^2 mg/4I$, $b = R\tau_d/I$, $c = g$, $d = C_{ax}/m$ y $e = R/I$. La velocidad v y la velocidad relativa s serán consideradas como funciones uniformemente continuas, así como z , que es el estado interno del modelo de fricción, es decir, la deformación promedio de las cerdas. Esta consideración es necesaria para garantizar existencia de la solución. Es conveniente aclarar que el par de impulso $\tau_d = 0$ ya que el caso de estudio es el frenado. Además se tiene

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|\frac{s}{v_s}|^{1/2}}, \quad (5.10)$$

$$\mu = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} - \sigma_2 s. \quad (5.11)$$

Los parámetros del modelo dinámico de fricción fueron definidos en las sección 3.2.

Un poco más adelante se mostrará que la dinámica interna del modelo de fricción, z , es mucho más rápida que el resto del sistema, por lo que el sistema completo se puede reducir de orden, reparametrizando la solución del sistema más rápido en términos de los demás estados. Para que esto suceda es necesario que el sistema cumpla con ciertas características que garanticen que

Coefficiente de fricción en función de "s" y "v", $\mu(s,v)$

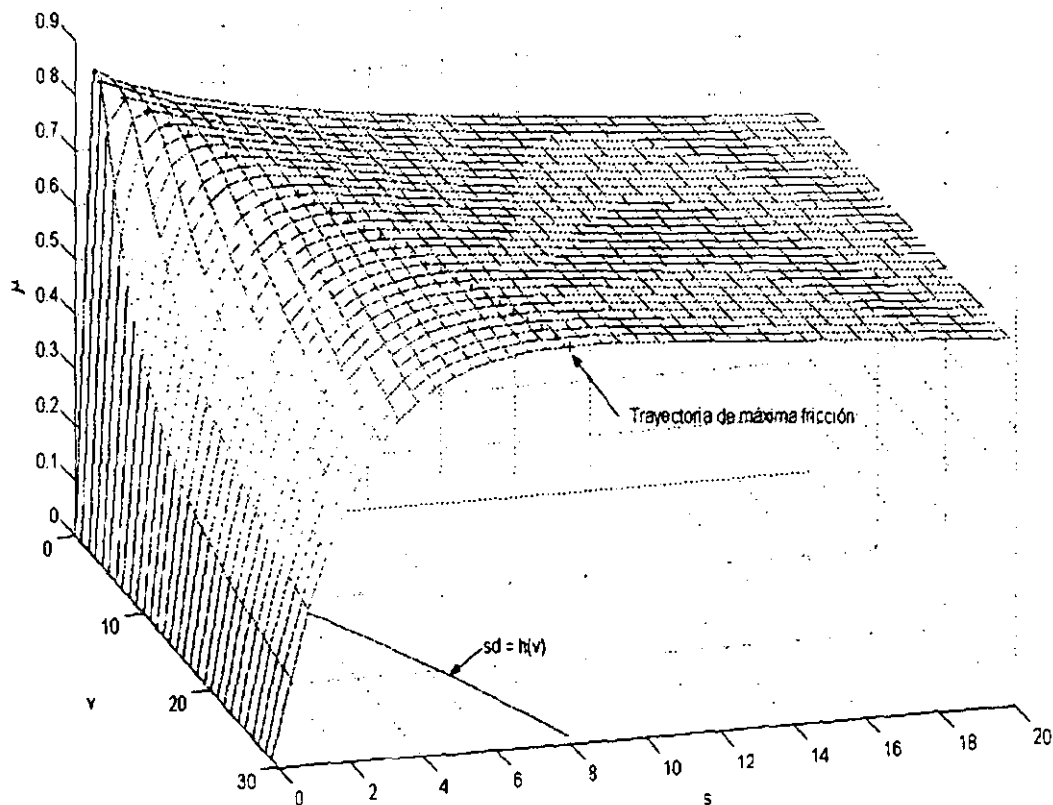


Figura 5.4: Gráfica en tercera dimensión de μ en función de la velocidad relativa y la velocidad del vehículo $\mu = f(s, v)$, así como de la trayectoria de máxima fricción '+'.¹

la solución del sistema completo y la solución del sistema reducido permanecerán dentro de un conjunto acotado $O(\epsilon)$, como se explicará posteriormente. Estas características están plasmadas en un teorema¹ que trata sobre el problema de los sistemas singularmente perturbados por medio del cual es posible demostrar que el sistema presentado en esta sección es susceptible de ser reducido. Esto es lógico pues el estado interno del modelo de fricción (z) alcanza rápidamente un valor y permanece razonablemente constante durante todo el proceso (ver la Fig. 5.9)

El problema general de un sistema perturbado se puede ver como sigue:

$$\dot{x} = F(t, x, z, \epsilon), \quad x(t_0) = \xi(\epsilon) \quad (5.12)$$

$$\epsilon \dot{z} = k(t, x, z, \epsilon), \quad z(t_0) = \eta(\epsilon) \quad (5.13)$$

donde $\xi(\epsilon)$ y $\eta(\epsilon)$ dependen suavemente de ϵ y $t_0 \in [0, t_1)$, $x(t, \epsilon)$ y $z(t, \epsilon)$ denotan la solución del sistema completo. Cuando se presenta el caso en que $\epsilon \rightarrow 0$, la dimensión del sistema se reduce de orden, ya que la Ec. (5.13) se simplifica a

¹Teorema 9.1 (Khalil 1996).

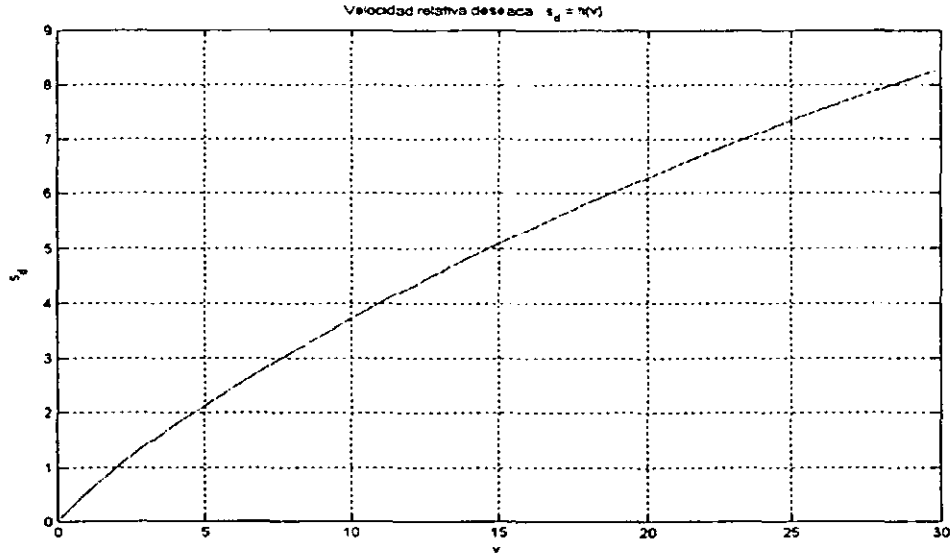


Figura 5.5: Gráfica de la velocidad relativa deseada en función de la velocidad del vehículo $s_d = h(v)$.

$$0 = k(t, x, z, 0) \quad (5.14)$$

considere que $z = h(t, x)$ son las soluciones de Ec. (5.14). Al sustituir estas soluciones en el sistema completo, el nuevo sistema reducido es de la forma

$$\dot{x} = F(t, x, h(t, x), 0), \quad x(t_0) = \xi_0 \equiv \xi(0) \quad (5.15)$$

la solución de la Ec. (5.15) es $\bar{x}(t)$. Debido a que la variable z ha sido excluida del modelo reducido y sustituida por sus valores “cuasi-estacionarios”, $h(t, x)$, la única información que podemos obtener de z es calcular

$$\bar{z}(t) \equiv h(t, \bar{x}(t)) \quad (5.16)$$

la cual describe el comportamiento cuasi-estacionario de z cuando $x(t) = \bar{x}(t)$. El estado inicial de z pertenece a un conjunto $\eta(\epsilon)$. Por el contrario, el estado inicial del estado cuasi-estacionario no es libre y puede haber grandes discrepancias entre estos valores iniciales. Es por ello que $\bar{z}(t)$ no puede ser una aproximación uniforme de $z(t)$. Lo mejor que se puede esperar es que el estimado, $\bar{z}(t)$, cumpla con

$$z(t, \epsilon) - \bar{z}(t) = O(\epsilon) \quad (5.17)$$

en un intervalo excluyendo t_0 , esto es para $t \in [t_b, t_1]$ donde $t_b > t_0$. Por otro lado es razonable esperar que el estimado $\bar{x}(t)$ cumpla con

$$x(t, \epsilon) - \bar{x}(t) = O(\epsilon) \quad (5.18)$$

uniformemente para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Teorema: Considere el sistema singularmente perturbado de las Ecs. (5.12)-(5.13), sea $z = h(t, x)$ una solución de la Ec. (5.14) y considere que se cumplen los siguientes puntos.

- Las funciones F , k y sus primeras derivadas parciales con respecto a (x, z, ϵ) son continuas. La función $h(t, x)$ y el Jacobiano $\partial k(t, x, z, 0)/\partial z$ tienen primeras derivadas continuas con respecto a sus argumentos. Las condiciones iniciales que pertenecen a los conjuntos $\xi(\epsilon)$ y $\eta(\epsilon)$ son funciones suaves de ϵ .
- El sistema reducido, Ec. (5.15) tiene solución única $\bar{x}(t)$, definida en $[t_0, t_1]$, y $\|\bar{x}(t)\| \leq r_1 < r$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.
- El modelo de capa límite, es decir

$$\frac{dy}{d\tau} = k(t, x, y + h(t, x), 0) \quad (5.19)$$

donde $y = z - h(t, x)$ y $\tau = (t - t_0)/\epsilon$, es exponencialmente estable, uniformemente en (t, x) .

Entonces existen constantes positivas γ y ϵ^* de tal manera que para todo $\|\eta(0) - h(t_0, \xi(0))\| < \gamma$ y $0 < \epsilon < \epsilon^*$, el problema de perturbaciones singulares, Ecs. (5.12)-(5.13), tiene solución única $x(t, \epsilon)$ y $z(t, \epsilon)$ en $[t_0, t_1]$ y

$$x(t, \epsilon) - \bar{x}(t) = O(\epsilon) \quad (5.20)$$

$$z(t, \epsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\epsilon) = O(\epsilon) \quad (5.21)$$

se satisface uniformemente para $t \in [t_0, t_1]$, donde $\hat{y}(t/\epsilon)$ es la solución a la Ec. (5.19). Más aún, dados cualquier $t_b > 0$, existe $\epsilon^{**} \leq \epsilon^*$ tal que

$$z(t, \epsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\epsilon) \quad (5.22)$$

se satisface uniformemente para $t \in [t_b, t_1]$ siempre que $\epsilon < \epsilon^{**}$.

◇

El sistema propuesto en este trabajo, Ecs. (5.7)-(5.11), se puede escribir en términos de perturbaciones singulares y cumple con las condiciones impuestas por el teorema anterior. Se propone un cambio de variable

$$z_1 = \sigma_0 z \quad (5.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{dz_1}{dt} \quad (5.24)$$

entonces es posible escribir el sistema

$$\dot{v} = F_1(x, z_1, \epsilon) = -c \mu - d v^2 \quad (5.25)$$

$$\dot{s} = F_2(x, z_1, \epsilon) = -(a + c) \mu - b - d v^2 + e K_b P_b \quad (5.26)$$

$$\epsilon \dot{z}_1 = k(x, z_1, \epsilon) = s - \frac{|s|}{g(s)} z_1 \quad (5.27)$$

con $\epsilon = 1/\sigma_0$ y $x = [v \ s]'$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|s|/\nu_s^{1/2}}, \quad (5.28)$$

$$\mu = z_1 + \sigma_1 \epsilon \dot{z}_1 - \sigma_2 s \quad (5.29)$$

$$\mu = (1 - \sigma_1 f(s)) z_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) s. \quad (5.30)$$

donde y $f(s) = |s|/g(s)$. Una raíz de la Ec. (5.27) es

$$z_1 = g(s) \quad (5.31)$$

El punto uno en el teorema exige continuidad en F y k , lo cual se cumple por construcción y por hipótesis, también pide continuidad en las primeras derivadas con respecto a (x, z, ϵ) . Cabe mencionar nuevamente la definición de la función $f(s) = \frac{|s|}{g(s)}$ y que la función $g(s)$ es continua y acotada $\mu_s \leq g(s) \leq \mu_c$, por lo que $f(s)$, $g'(s)$ y $f'(s)$ también lo son.

Las derivadas parciales con respecto a z_1 del sistema completo son

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_1} = -c \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} = -(a + c) \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z_1} = -f(s) \quad (5.34)$$

donde

$$\frac{\partial \mu}{\partial z_1} = 1 - \sigma_1 f(s) \quad (5.35)$$

en este punto se puede ver que las parciales con respecto a z_1 son continuas.

Las derivadas parciales con respecto a v son

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -2dv \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v} = -2dv \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial k}{\partial v} = 0 \quad (5.38)$$

Las derivadas parciales con respecto a s son

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = -c \frac{\partial \mu}{\partial s} = -c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} = -(a+c) \frac{\partial \mu}{\partial s} = -(a+c)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 1 - f'(s)z_1 \quad (5.41)$$

también estas parciales con respecto a v y s , (vector x), son continuas.

Por otro lado se tiene que

$$\frac{\partial F_1}{\partial \epsilon} = -c \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon} = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \epsilon} = -(a+c) \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon} = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \epsilon} = 0 \quad (5.44)$$

por lo que se satisface la condición de que las primeras derivadas parciales sean continuas con respecto a los argumentos (x, z_1, ϵ) .

También es necesario que $z_1(t, x)$, y el Jacobiano, $\partial k(t, x, z_1, 0)/\partial z_1$, tengan primeras derivadas parciales continuas con respecto a sus argumentos.

$$\frac{\partial z_1}{\partial s} = g'(s) \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = 0 \quad (5.46)$$

estas funciones son continuas, ya que $g'(s)$ es una función continua y acotada.

El Jacobiano tiene las siguientes derivadas parciales con respecto a sus argumentos.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial k}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial v} (-f(s)) = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial k}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (-f(s)) = -f'(s) \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial k}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial z_1} (-f(s)) = 0 \quad (5.49)$$

se puede apreciar que todas estas primeras derivadas con respecto a los argumento tanto de la función $z_1(t, x)$, como del Jacobiano son funciones continuas. Además se puede considerar que las condiciones iniciales de $z_1(t_0) = \eta(\epsilon)$ y $s(0) = \xi(\epsilon)$ son funciones suaves que dependen de ϵ ; es posible hacer esta consideración ya que $\epsilon = 1/\sigma_0$ y σ_0 es la rigidez del hule, una condición física del material. Entonces es posible considerar que el sistema depende continuamente de los parámetros físicos, lo cual es una suposición lógica.

El punto número dos del teorema citado exige que el problema reducido tenga solución única definida en el intervalo. Para fines prácticos lo que impone este punto es que el sistema sea

localmente Lipschitz. Para comprobar esta condición es posible auxiliarse de un lemma² que dice que si el sistema, Ec. (5.15), es continuo y satisface

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L \quad (5.50)$$

entonces el sistema satisface la condición de Lipschitz, lo que demuestra la unicidad de su solución. El sistema reducido es de la forma

$$\dot{v} = -c \mu - d v^2 \quad (5.51)$$

$$\dot{s} = -(a + c) \mu - b - d v^2 + e K_b P_b \quad (5.52)$$

$$\mu = \mu(s, v) \quad (5.53)$$

gracias a la reparametrización en términos de la raíz de la Ec. (5.14) el coeficiente de fricción, μ , es ahora una función de v y s únicamente. La matriz Jacobiana, en este caso es de la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} -c \frac{\partial \mu}{\partial v} - 2dv & -c \frac{\partial \mu}{\partial s} \\ -(a + c) \frac{\partial \mu}{\partial v} - 2dv & -(a + c) \frac{\partial \mu}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

utilizando la Ec. (5.31) es posible encontrar que

$$\mu = g(s) - \sigma_2 s \quad (5.55)$$

la derivada parcial de μ con respecto a s y v es

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = g'(s) - \sigma_2 \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = 0 \quad (5.57)$$

debido a que $g'(s)$ es posible acotarla por $C_g/\sqrt{s_{min}}$, donde $C_g = (\mu_S - \mu_C)/2\sqrt{V_s}$ y s_{min} es una velocidad relativa mínima escogida apropiadamente para evitar singularidades. Entonces es posible satisfacer la condición de la Ec. (5.50) y por tanto se concluye que el sistema es Lipschitz, ya que en el punto número uno se demostró la continuidad del sistema.

El punto tres dentro del teorema exige que la solución del modelo de capa límite, Ec. (5.19), tenga solución exponencialmente estable uniformemente en (t, x) . La función $k(t, x, z_1, \epsilon)$ y $z_1(t, x)$ son

$$k(x, z_1, \epsilon) = s - f(s)z_1 \quad (5.58)$$

$$z_1(x) = g(s) \quad (5.59)$$

al sustituir las condiciones de la Ec. (5.19) en las funciones anteriores se tiene

²Lemma 2.2 Khalil (1996).

$$\frac{dy}{d\tau} = s - f(s)(y + g(s)) \quad (5.60)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -f(s)y \quad (5.61)$$

para demostrar su estabilidad asintótica se propone

$$w = \frac{1}{2}y^2; \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = y \frac{dy}{d\tau} = -f(s)y^2 \quad (5.63)$$

por lo que se demuestra que la solución es asintóticamente estable ya que $f(s) > 0$.

◇

La Ec. (3.39) en la sección 3.3 muestra una parametrización (solución) del estado interno de la fricción en términos de la velocidad del vehículo v , de la velocidad relativa s y de la longitud del parche de contacto entre la llanta y el pavimento L .

$$z = \text{sign}(s) \frac{g(s)}{\sigma_0} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} L} \right) \quad (5.64)$$

Esta parametrización permite predecir muy bien el comportamiento del estado interno y nos lleva a una función de fricción Ec. (5.2), que permite encontrar una trayectoria de máxima fricción. Entonces para el caso de estudio se retoman las ecuaciones del sistema con la parametrización propuesta.

$$\dot{v} = -c\mu - d v^2 \quad (5.65)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - b - d v^2 + e K_b P_b, \quad (5.66)$$

con

$$\mu = g(s) + (\sigma_1 s - g(s)) e^{-\frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} L} - \sigma_2 s \quad (5.67)$$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|\frac{s}{v_s}|^{1/2}} \quad (5.68)$$

El objetivo de este controlador es hacer que el sistema siga una trayectoria de referencia que está dada por la solución de la Ec. (5.5), s_d , (ver Fig. 5.5) y llevar la velocidad del vehículo a cero lo más rápido posible. Para esto se propone la siguiente señal de error

$$\bar{s} = s - s_d \quad (5.69)$$

$$\dot{\bar{s}} = \dot{s} - \dot{s}_d \quad (5.70)$$

ahora proponiendo la función candidata de Lyapunov

$$W(t) = \frac{1}{2}\bar{s}^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{K}{2} \left(\int_0^{t_f} \bar{s} dt \right)^2 \quad (5.71)$$

donde $K > 0$. Al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.71) y sustituir las Ecs. (5.8), (5.9) y (5.70) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \bar{s}\dot{\bar{s}} + v\dot{v} + K\bar{s} \int_0^{t_f} \bar{s} dt \\ &= \bar{s} [-(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_b P_b - \dot{s}_d] + v [-c\mu - d v^2] + K\bar{s} \int_0^{t_f} \bar{s} dt\end{aligned}\quad (5.72)$$

se propone una ley de control P_b de la forma

$$P_b = \frac{1}{eK_b} \left[(a+c)\mu + dv^2 + \dot{s}_d + H\bar{s} + K_i \int_0^{t_f} \bar{s} dt \right] \quad (5.73)$$

y se sustituye esta ley de control, Ec. (5.73), en la Ec. (5.72) entonces la derivada de la Ec. (5.71) se escribe de la forma

$$\dot{W} = -c\mu v - dv^3 + H\bar{s}^2 + (K_i + K)\bar{s} \int_0^{t_f} \bar{s} dt \quad (5.74)$$

al analizar la última ecuación, si se escoge K_i de tal manera que el último término sea negativo y $H < 0$ la Ec. (5.74) es negativa definida, pues $\int \bar{s} dt$ sólo es cero cuando $\bar{s} \equiv 0$, por lo que es posible citar el lema de Barablat y concluir que el punto $\bar{s} = 0$ y $v = 0$ es asintóticamente estable, ya que por restricciones físicas tanto v como μ son positivos en todo momento, además c y d son constantes positivas.

5.1.3 Resultados de simulación

Las simulaciones se realizaron con base en un juego de parámetros para caracterizar un modelo de llanta que propone en Canudas y Tsiotras (1999), con los datos de un vehículo estándar y bajo las consideraciones citadas en el capítulo anterior. La Fig. 5.6 muestra la velocidad relativa deseada s_d , que es la trayectoria ideal para el frenado de emergencia, a un lado se muestra la trayectoria seguida por el sistema y en la parte inferior se muestra el error de seguimiento. La Fig. 5.7 muestra el desarrollo de la velocidad en la maniobra y la aceleración alcanzada en el proceso; es claro en esta gráfica que es posible alcanzar mayores aceleraciones a velocidades bajas. En la Fig. 5.8 se puede apreciar el par de frenado aplicado τ_b y el coeficiente de fricción μ alcanzado en el proceso. Es claro que este último aumenta a medida que la velocidad disminuye. Finalmente en la Fig. 5.9 se aprecia que la velocidad del estado interno z es muy rápida con respecto al resto de los estados, z alcanza un valor y se mantiene aproximadamente constante durante todo el proceso y su derivada muestra el transitorio dentro de la primera décima de segundo y de ahí en adelante su valor es aproximadamente cero.

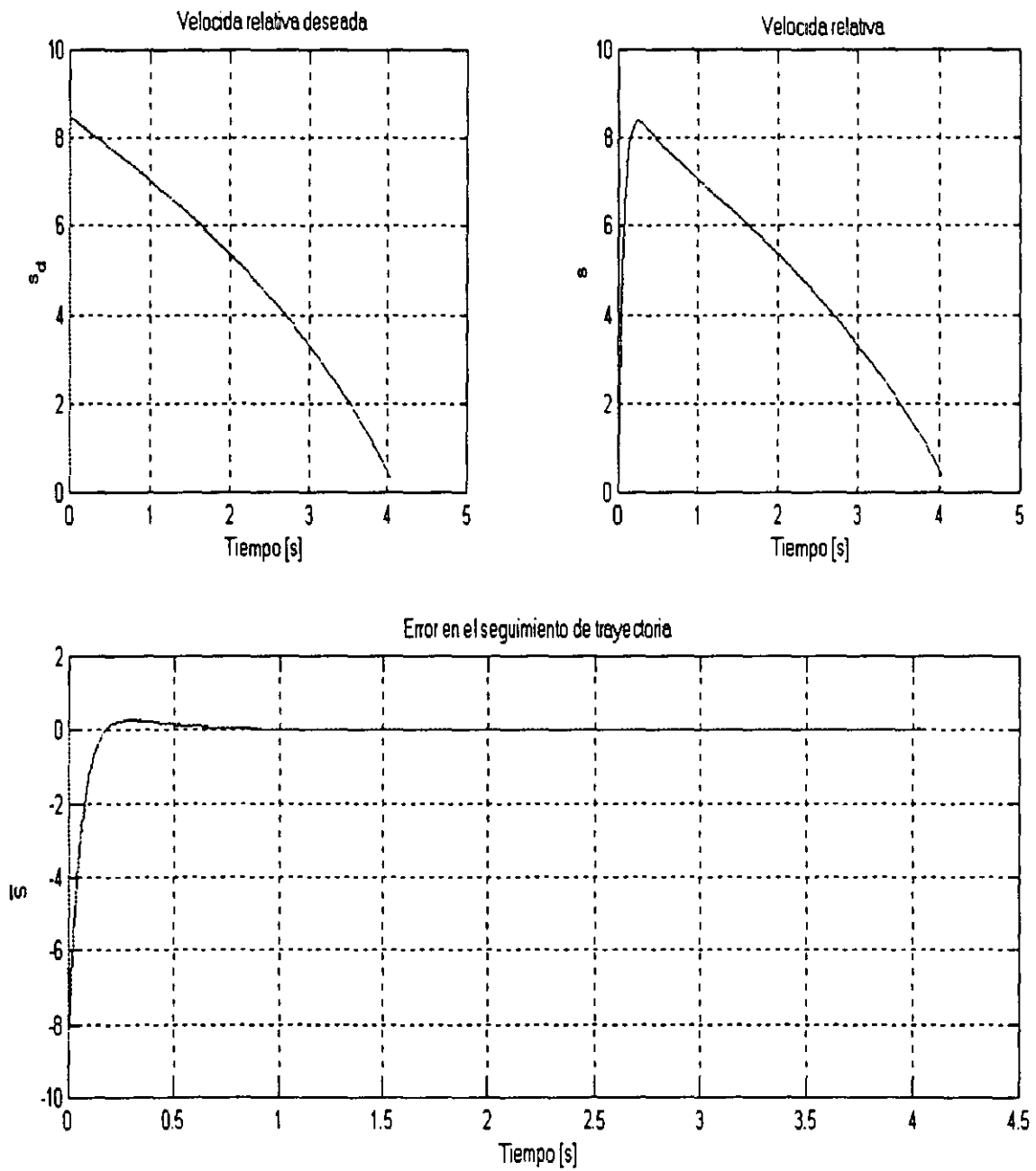


Figura 5.6: Gráfica de la trayectoria deseada, la trayectoria seguida en el proceso y el error de seguimiento.

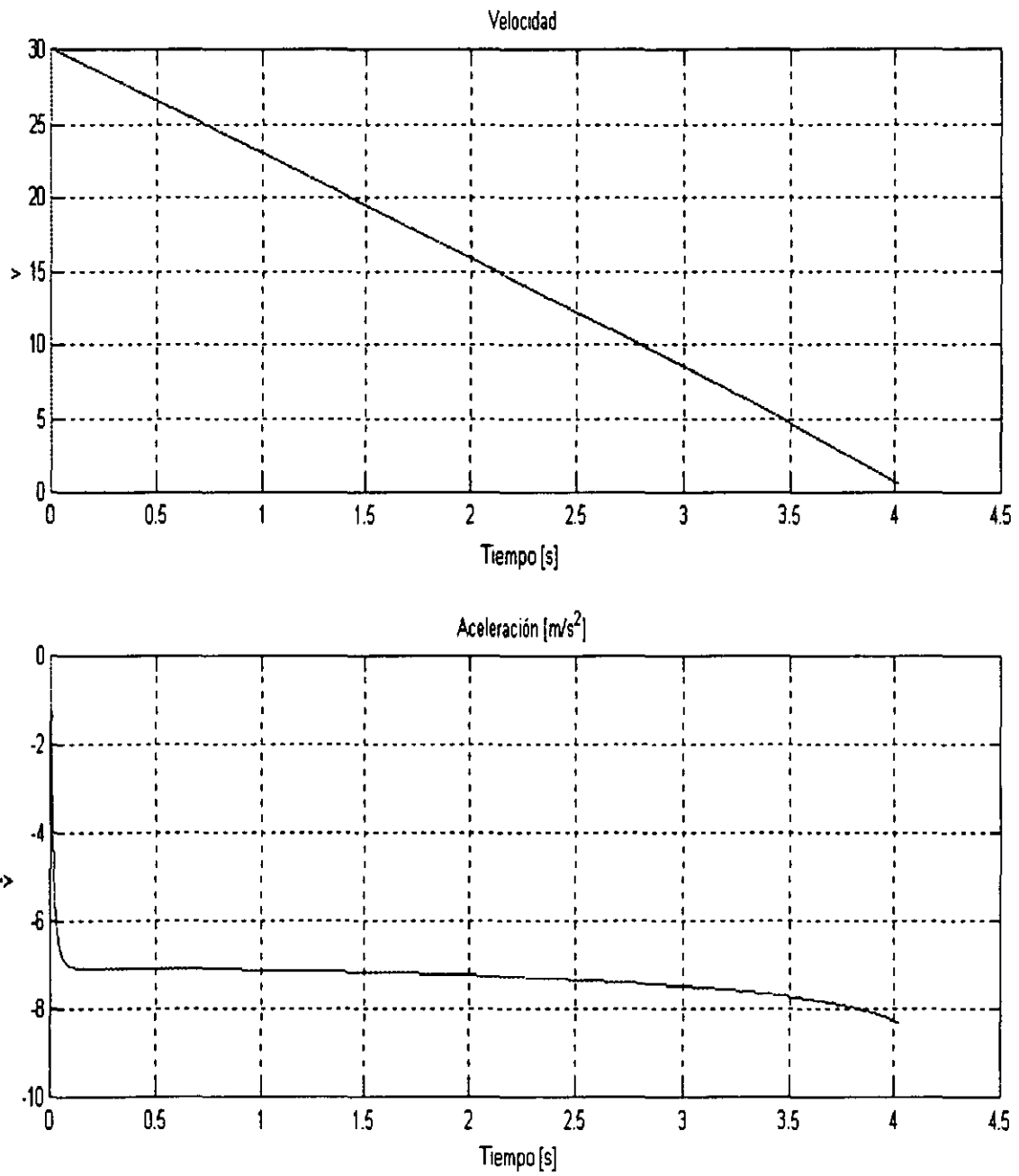


Figura 5.7: Velocidad y la aceleración alcanzada en la maniobra.

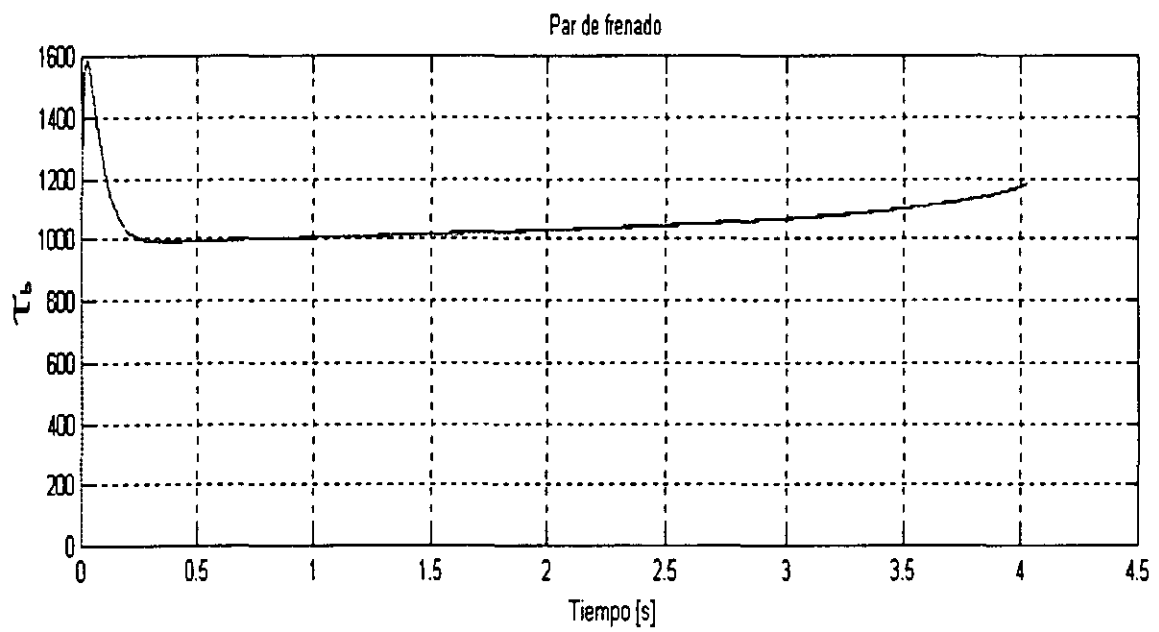
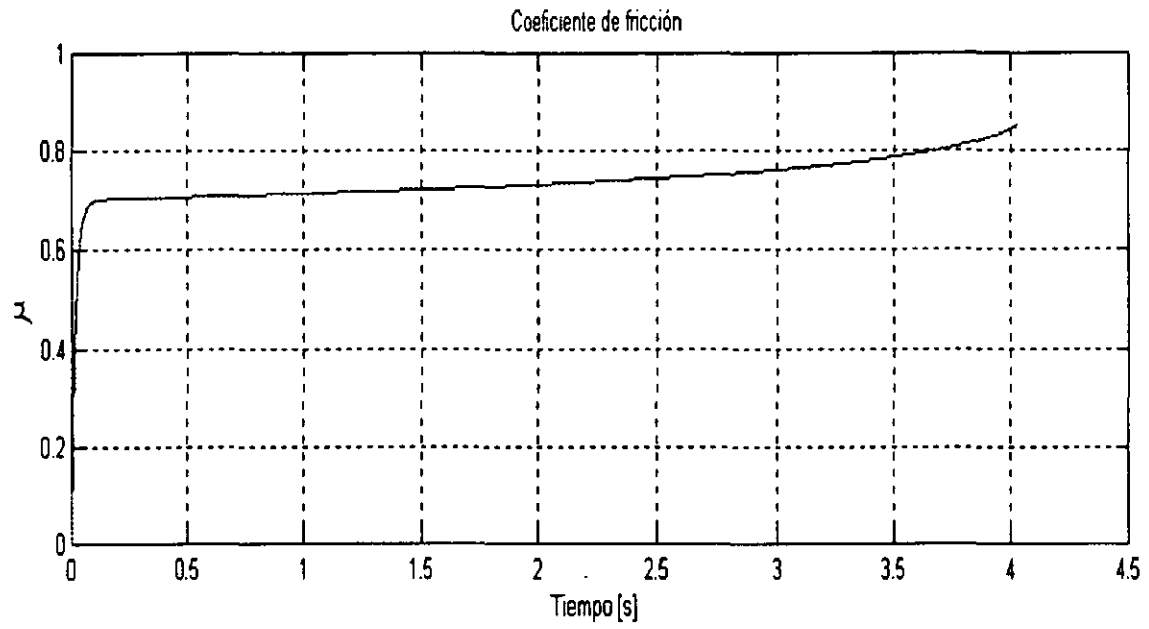


Figura 5.8: Par de frenado aplicado τ_b y coeficiente de fricción μ .

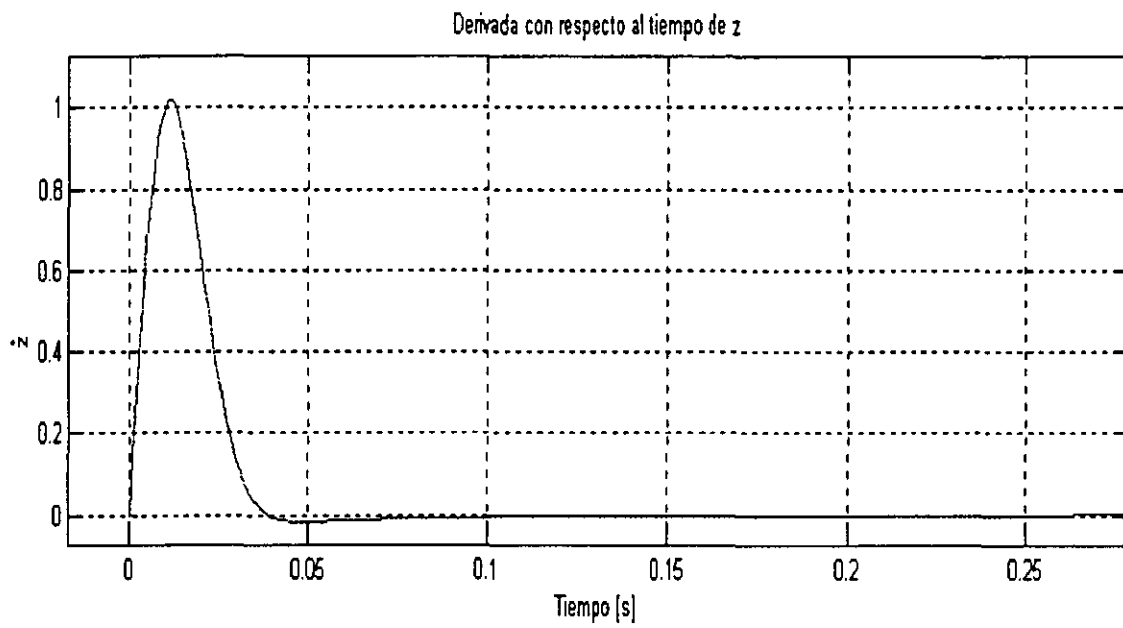
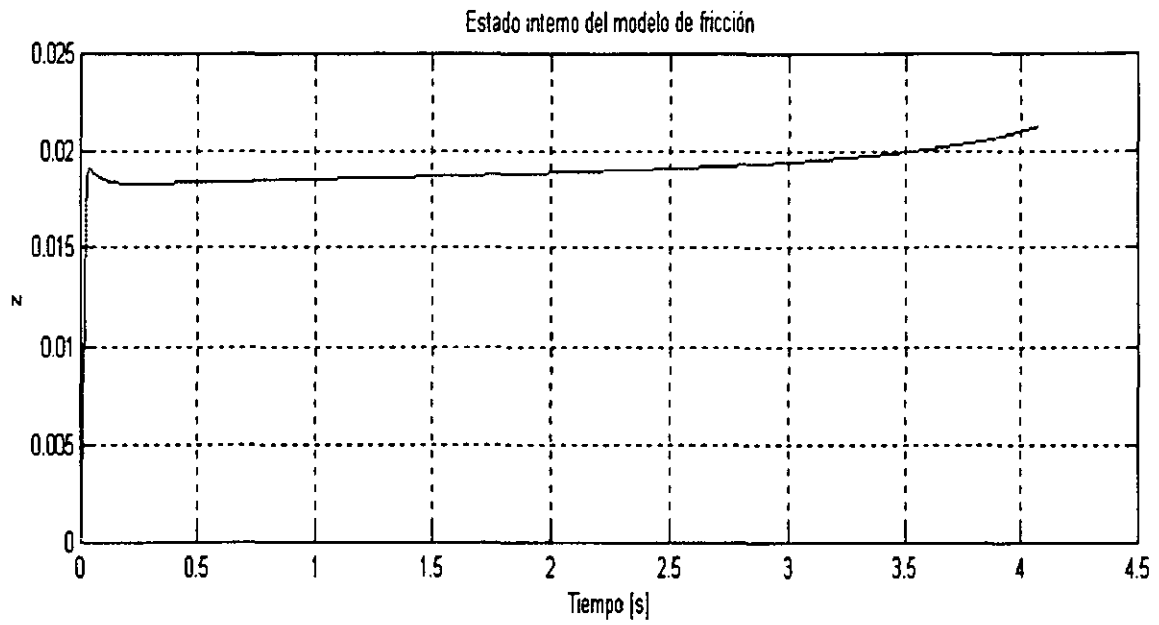


Figura 5.9: Evolución del estado interno de fricción z y su derivada con respecto al tiempo \dot{z} .

5.2 Control óptimo para el frenado de emergencia usando modelos dinámicos de fricción

Una de las estrategias de frenado de emergencia (distancia mínima) más empleada es operar en el máximo de la fuerza de fricción. En este punto se emplea teoría del control óptimo para formalizar esta práctica. En esta sección se desarrollan las ecuaciones que modelan el vehículo, la fuerza de fricción y dadas las condiciones de frontera lograr el frenado en el tiempo mínimo.

5.2.1 Modelado del sistema

Retomando las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema, Ecs. (2.8) y (2.9) así como la Ec. (5.2) que modela la fricción

$$\dot{v} = -c\mu - dv^2 \quad (5.75)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_b P_b \quad (5.76)$$

donde:

$$\mu = g(s) + (\sigma_1 s - g(s))e^{-\frac{\sigma_0 f(s)L}{v}} - \sigma_2 s \quad (5.77)$$

$$f(s) = \frac{|s|}{g(s)} \quad (5.78)$$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-|s/v_s|^{1/2}} \quad (5.79)$$

Las condiciones de frontera para el caso de análisis son: $v_0 = v_0$, $v_f = 0$, $s_0 = 0$ y $s_f = 0$.

5.2.2 Optimización del tiempo (tiempo mínimo)

La teoría del control óptimo se basa en minimizar un índice de desempeño del sistema, el cual normalmente se expresa de la forma

$$J = \int_0^{t_f} L dt \quad (5.80)$$

Para minimizar el tiempo necesario en llevar al sistema de un estado arbitrario a un estado deseado se tiene que $L = 1$ y $J = t_f$. Entonces es necesario resolver³

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) \text{ dado} \quad (5.81)$$

$$\dot{\lambda} = -(f_x)^T \lambda \quad x_j(t_f) \text{ dado}; \quad j = 1, \dots, q \quad (5.82)$$

$$\lambda_j(t_f) = 0 \quad j = q + 1, \dots, n \quad (5.83)$$

$$0 = f_u^T \lambda \quad C.O. \quad (5.84)$$

$$(\lambda^T f)_{t=t_f} = -1 \quad C.T. \quad (5.85)$$

donde x es el vector de estados del sistema en cuestión, λ es el vector de estados del sistema adjunto, n es el orden del sistema, q es el número de estados conocidos en el tiempo final, (condiciones

³Bryson y Ho (1969).

de frontera conocidas) esto es por que en los problemas de optimización no siempre todas las condiciones finales están especificadas, para manejar esto se incluye la Ec. (5.83). Las Ecs. (5.84) y (5.85) corresponden con las condiciones de optimalidad (C.O.) y la condición de transversalidad (C.T.), respectivamente. En este trabajo se utiliza el principio del mínimo de Pontryagin⁴, el cual proporciona las condiciones necesarias para que exista una solución que minimice algún criterio. Sin embargo, no garantiza que esta solución sea única. Para el caso de estudio es posible verificar que la solución es única en el rango de interés. El Hamiltoniano del sistema está dado por

$$H(x, \lambda, P_b) = \lambda_v (-c\mu - dv^2) + \lambda_s (-(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_b P_b) + 1 \quad (5.86)$$

La estructura analítica del Hamiltoniano incluye una función exponencial cuyo argumento es negativo, debido a la función $\mu(s, v)$ y una función cuadrática de la velocidad, v^2 . La solución es única en el rango de interés pues ni la exponencial, ni la cuadrática de velocidad existen para valores negativos de sus argumentos, de tal forma que estas funciones sólo tienen un máximo en el intervalo de trabajo, por lo que se puede decir que la solución que aquí se presenta es la óptima.

El sistema adjunto está entonces descrito por:

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\left[\lambda_v(-c\frac{\partial\mu}{\partial v} - 2dv) + \lambda_s(-(a+c)\frac{\partial\mu}{\partial v} - 2dv) \right] \quad (5.87)$$

$$\dot{\lambda}_s = -\frac{\partial H}{\partial s} = -\left[-\lambda_v c\frac{\partial\mu}{\partial s} - \lambda_s((a+c)\frac{\partial\mu}{\partial s}) \right] \quad (5.88)$$

Al simplificar las Ecs. (5.87)-(5.88) se tiene

$$\dot{\lambda}_v = \lambda_v(c\frac{\partial\mu}{\partial v} + 2dv) + \lambda_s((a+c)\frac{\partial\mu}{\partial v} + 2dv) \quad (5.89)$$

$$\dot{\lambda}_s = \lambda_v c\frac{\partial\mu}{\partial s} + \lambda_s(a+c)\frac{\partial\mu}{\partial s} \quad (5.90)$$

Debido a que el tiempo final t_f no está especificado, la condición de transversalidad, Ec. (5.85), se puede ver como $H(t_f) = 0$ y en forma explícita para este problema es

$$[\lambda_v (-c\mu - dv^2) + \lambda_s (-(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_b P_b)]_{t=t_f} + 1 = 0 \quad (5.91)$$

Como el Hamiltoniano no es una función explícita del tiempo, se cumple que

$$H(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.92)$$

a través de la trayectoria óptima. Entonces el control óptimo esta dado por

$$P_{b_{opt}} = \arg \min H(x, \lambda, P_b). \quad (5.93)$$

La derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de control (la función de conmutación) es

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial P_b} = \lambda_s K_b e \quad (5.94)$$

⁴Bryson y Ho (1969).

Es posible encontrar el control óptimo exigiendo consistencia en $H_1 \equiv 0$ y $\dot{H}_1 \equiv 0$. Cuando esta ecuación es cero indica que el sistema están en un punto máximo, un mínimo o un punto singular, entonces al utilizar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.94) y considerando que se realiza una maniobra de frenado es posible proponer la siguiente ley de control, tomando en cuenta que la señal de control físicamente está acotada $Pb_{max} \geq Pb \geq 0$.

$$Pb_{opt} = \begin{cases} Pb_{max} & \text{si } \dot{H}_1 > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{H}_1 < 0 \\ Pb_{sing} & \text{si } \dot{H}_1 \equiv 0 \end{cases} \quad (5.95)$$

Al despejar la señal de control de la Ec. (5.86) se identifica la existencia de un arco singular. La Ec. (5.94) debe permanecer en cero sobre la trayectoria singular, por lo que también su derivada con respecto al tiempo lo debe hacer. Al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.94) y sustituir el valor de $\dot{\lambda}_s$

$$\dot{H}_1 = eK_b \dot{\lambda}_s \quad (5.96)$$

$$\dot{H}_1 = eK_b \left[\lambda_v c \frac{\partial \mu}{\partial s} + \lambda_s (a + c) \frac{\partial \mu}{\partial s} \right] \quad (5.97)$$

El caso de interés es el caso singular cuando $H_1 \equiv 0$, lo que implica que $\lambda_s \equiv 0$; al sustituir esta condición se tiene

$$\dot{H}_1 = eK_b \left[\lambda_v c \frac{\partial \mu}{\partial s} \right] = 0 \quad (5.98)$$

La Ec. (5.98) es muy importante por que muestra que en la trayectoria óptima se debe cumplir que $\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0$ o $\lambda_v = 0$. Si esto último sucede el vector adjunto sería idénticamente cero en el subarco singular y esto es una contradicción ya que el vector adjunto no se puede desvanecer bajo ninguna circunstancia⁵. Por ello necesariamente $\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0$ en el arco singular, independiente de los demás estados del sistema (v).

Para garantizar que $\dot{H}_1 = 0$ y encontrar una Pb_{sing} se toma la segunda derivada con respecto al tiempo de H_1 y se sustituye el valor de $\dot{\lambda}_v$

$$\ddot{H}_1 = cK_b e \left\{ \left[\lambda_v \left(c \frac{\partial \mu}{\partial v} + 2dv \right) + \lambda_s \left((a + c) \frac{\partial \mu}{\partial v} + 2dv \right) \right] \frac{\partial \mu}{\partial s} + \lambda_v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right) \right\} \quad (5.99)$$

por lo que el análisis se reduce a

$$\ddot{H}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right) = 0 \quad (5.100)$$

para satisfacer la Ec. (5.100) es necesario que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right) &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} \dot{s} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v \partial s} \dot{v} = 0 \\ &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} (-(a + c)\mu - b - dv^2 + eK_b Pb) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v \partial s} (-c\mu - dv^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.101)$$

⁵Tsiotras y Canudas (2000).

despejando P_b de la Ec. (5.101) se obtiene la ley de control singular $P_{b_{sing}}$

$$P_{b_{sing}} = \frac{1}{eKb} \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial v \partial s} (c\mu + dv^2) \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} \right)^{-1} + (a + c)\mu + dv^2 \right] \quad (5.102)$$

5.2.3 Máxima fricción

Dadas las características del sistema dinámico, el control de velocidad v , se hace a través de controlar la velocidad relativa s . El objetivo es entonces encontrar una función $s_d = f(v)$ que esté en la trayectoria de máxima fricción en cada momento, es decir, para cada velocidad existe una velocidad relativa en donde se alcanza la fricción máxima a cada instante.

Por otro lado, el coeficiente de fricción depende tanto de la velocidad relativa como de la velocidad del vehículo. El punto de máxima fricción, dadas la características de un par de superficies es un punto $v = 0$ y $s = 0$. De manera evidente el objetivo es llegar a este punto, sin embargo es necesario seguir una trayectoria ($s_d = f(v)$) para alcanzarlo.

La función que describe la fricción entre dos superficies dadas es de la forma $\mu(s, v)$ por lo que la trayectoria deseada para lograr máxima fuerza de fricción, dada una v , está dada por la solución a la ecuación siguiente de manera similar a lo realizado en la sección 5.1

$$s_d = \arg \frac{\partial \mu}{\partial s}(s, v) = 0 \quad (5.103)$$

Resumiendo, el problema de control óptimo se reduce a exigir consistencia en $H_1 = 0$ y $\dot{H}_1 = 0$ lo que finalmente se reduce a satisfacer la Ec. (5.103) que como se ha visto es la condición de fricción máxima.

5.2.4 Resultados de simulación

Los resultados de simulación para esta sección se obtuvieron con el mismo vehículo y con el mismo juego de parámetros del modelo de fricción presentado en la sección (5.1).

En la Fig. 5.10 se aprecia la evolución de los estados del sistema, v y s y como la velocidad disminuye de su condición inicial a cero. La Fig. 5.11 muestra la aceleración alcanzada en el proceso de frenado y la presión aplicada. En la gráfica de la presión de frenado se aprecia como para llevar al sistema al arco singular es necesario aplicar la presión máxima y una vez alcanzado esta superficie la ley de conmutación cambia al control singular el cual es aplicado de ahí en adelante la mayor parte del tiempo, salvo algunas conmutaciones hacia cero, que se pueden atribuir a errores numéricos en la simulación. En la Fig. 5.12 se muestra la evolución de H_1 y su derivada con respecto al tiempo, que como muestra claramente permanecen razonablemente en cero. Finalmente la Fig. 5.13 muestra dos gráficas, en la primera se grafican a la par el control empleado en la sección (5.1) y el control óptimo desarrollado en esta sección en donde se puede apreciar que la presión singular $P_{b_{sing}}$ ajusta casi perfectamente la presión desarrollada en la sección anterior y la segunda gráfica es el error entre ambas presiones.

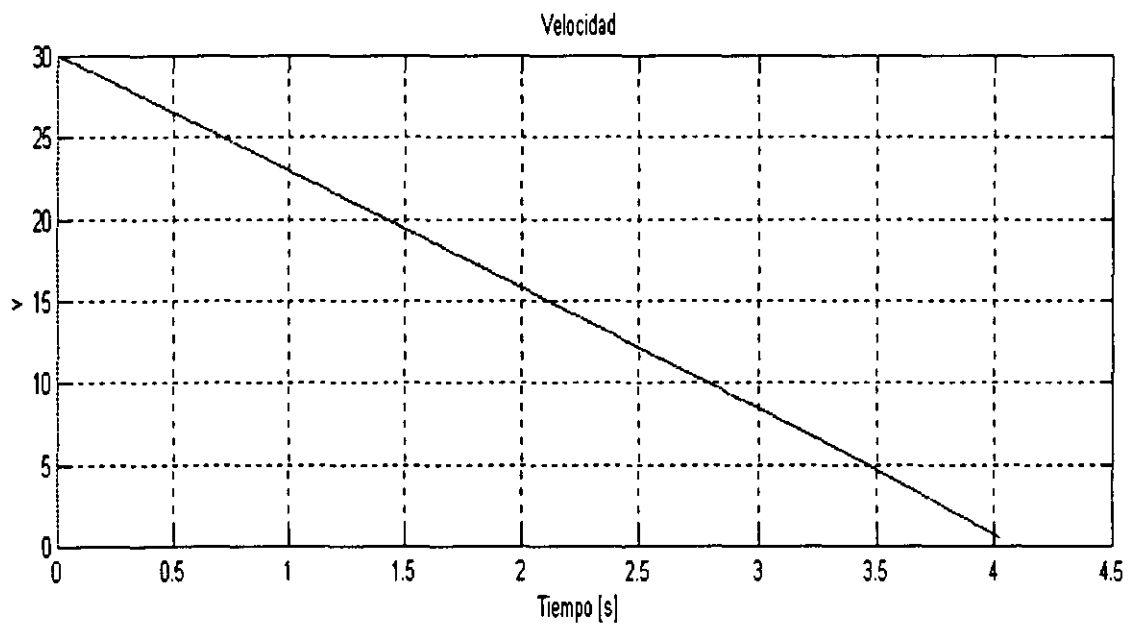
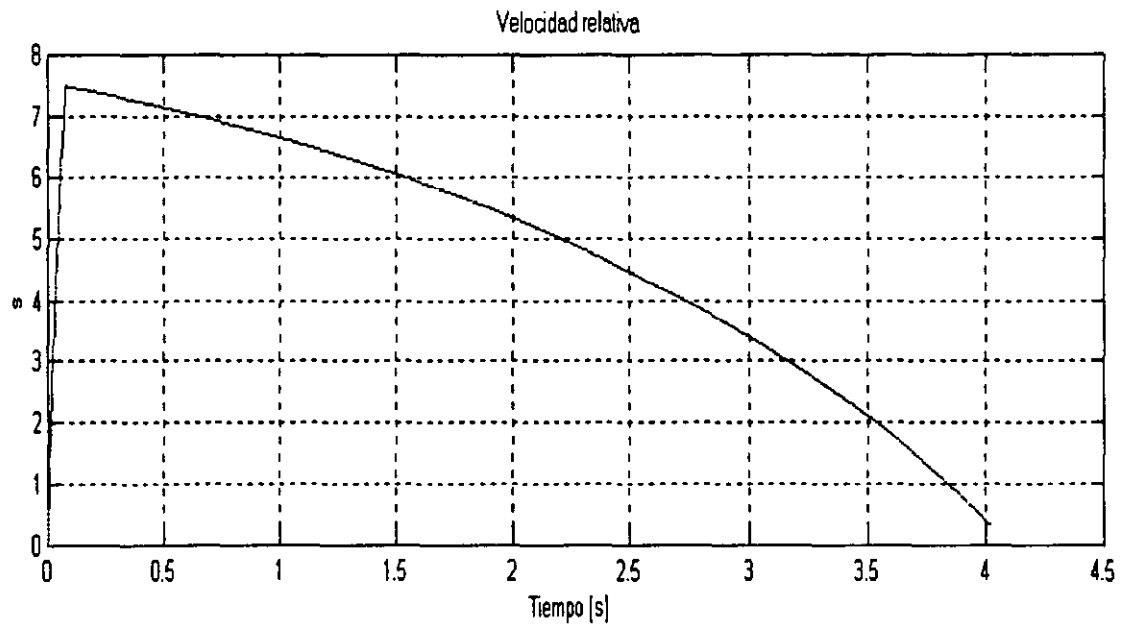


Figura 5.10: Evolución de los estados del sistema v y s .

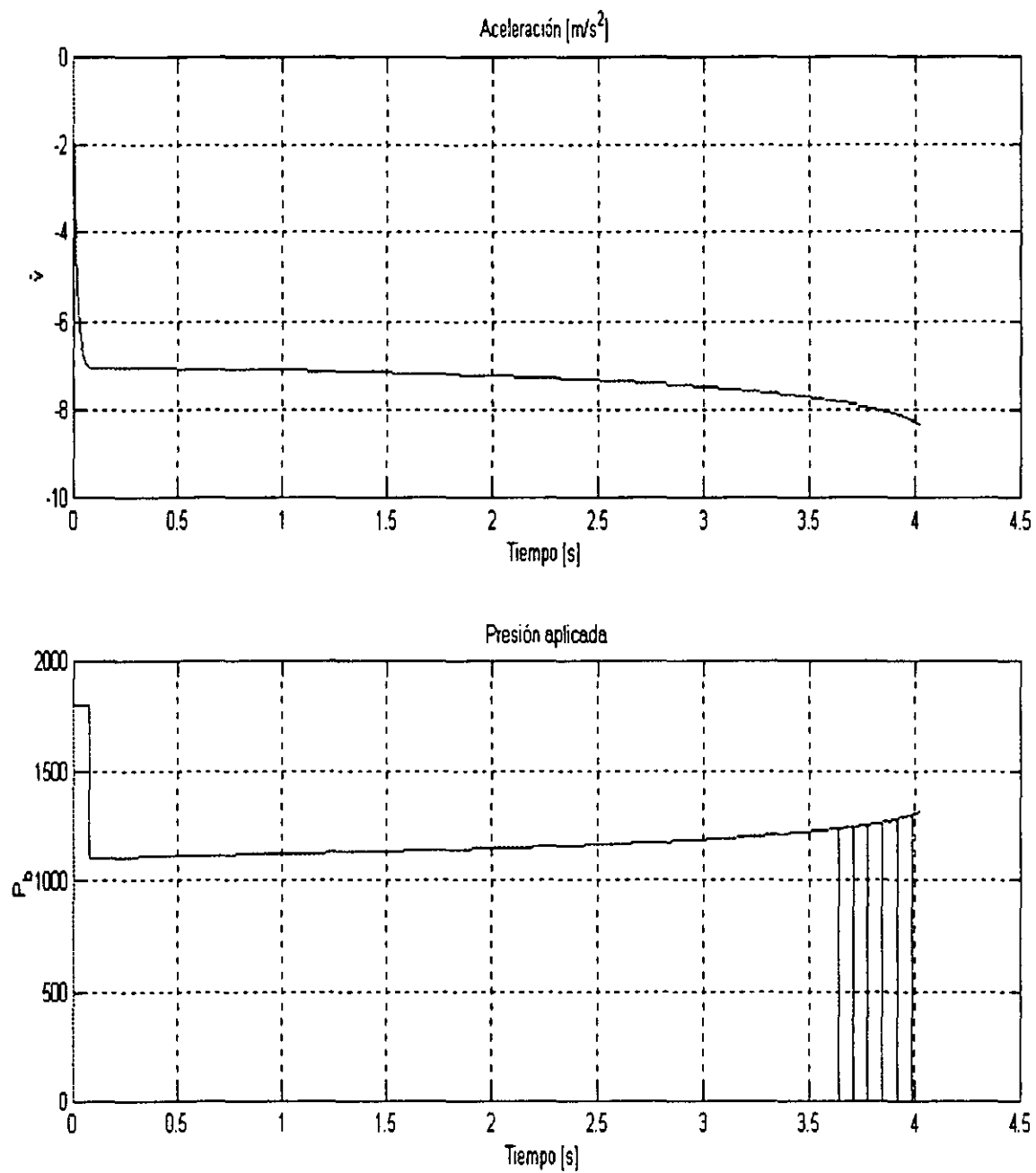


Figura 5.11: Aceleración alcanzada en el proceso de frenado \ddot{v} y la presión aplicada P_b .

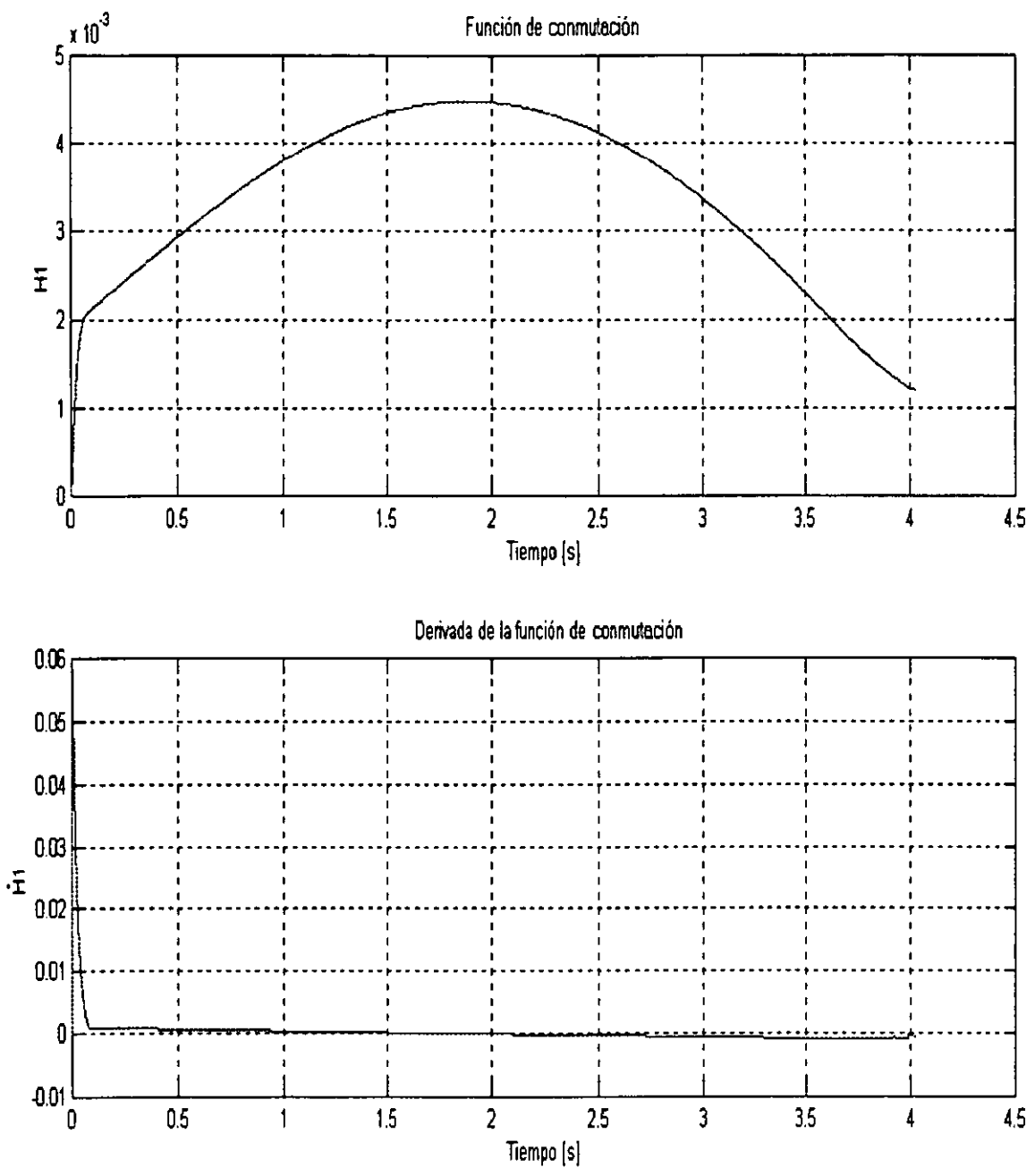


Figura 5.12: Evolución de H_1 y \dot{H}_1 .

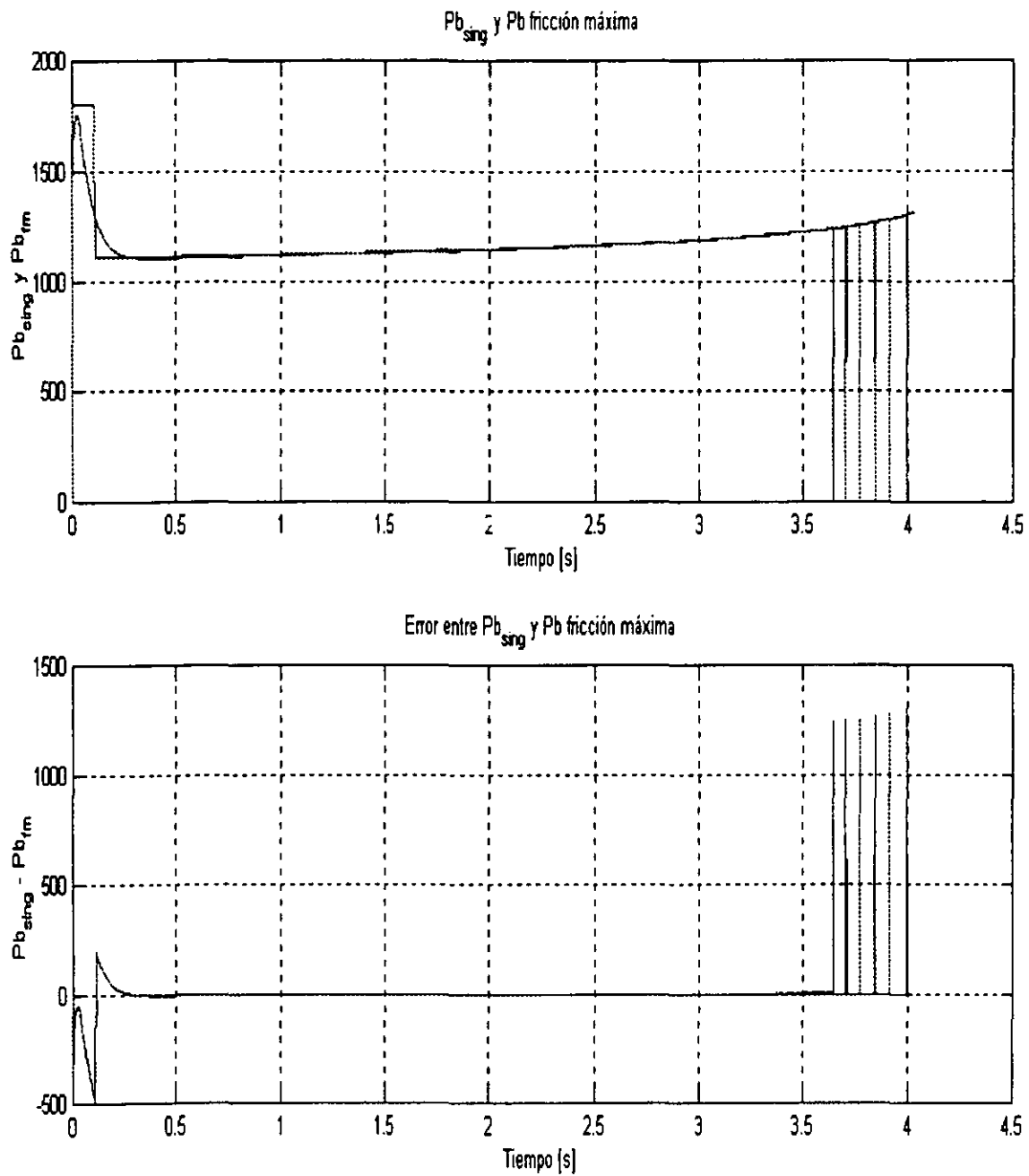


Figura 5.13: Presión de frenado óptimo, Presión de máxima fricción y la diferencia entre ambas.

5.3 Observador del modelo dinámico de fricción y adaptación de parámetros

Al igual que los modelos pseudoestáticos, los modelos dinámicos dependen de ciertas constantes para caracterizar la fricción en un par de superficies específicas. Además, al tratar con un modelo dinámico es necesario estimar convenientemente el estado interno del mismo ya que en este caso particular es difícil medirlo.

Recordando las ecuaciones del modelo dinámico que se introdujo en el capítulo 3

$$\dot{z} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (5.104)$$

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} - \sigma_2 s \quad (5.105)$$

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|\frac{s}{v_s}|^{1/2}} \quad (5.106)$$

se propone la siguiente estructura para el observador del estado interno y una ley de adaptación para los parámetros de dicho modelo, es decir un observador adaptivo.

Sea

$$\dot{\hat{z}} = s - \hat{\sigma}_0 f(s) \hat{z} \quad (5.107)$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \hat{\sigma}_0 \hat{z} + \hat{\sigma}_1 \dot{\hat{z}} - \hat{\sigma}_2 s \quad (5.108)$$

Sustituyendo la Ec. (5.107) en la Ec. (5.108), esta se puede escribir como

$$\dot{\hat{\mu}} = \hat{\sigma}_0 \hat{z} - \hat{\sigma}_3 f(s) \hat{z} + \hat{\sigma}_4 s \quad (5.109)$$

donde $\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_4 = \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$.

Esta última ecuación puede ser escrita en forma vectorial

$$\dot{\hat{\mu}} = [\hat{z} \quad -f(s)\hat{z} \quad s] \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_0 \\ \hat{\sigma}_3 \\ \hat{\sigma}_4 \end{bmatrix} = \hat{U} \hat{\Theta} \quad (5.110)$$

$$\dot{\hat{\mu}} = U \Theta - \hat{U} \hat{\Theta} = \bar{U} \theta + \hat{U} \tilde{\Theta} \quad (5.111)$$

$$\dot{\hat{\mu}} = \tilde{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) + \hat{z}(\bar{\sigma}_0 - f(s)\bar{\sigma}_3) + \bar{\sigma}_4 s \quad (5.112)$$

se propone una ley de adaptación tipo gradiente para los parámetros

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma \hat{U}^T \tilde{\mu} \quad (5.113)$$

donde Γ es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son $\Gamma_0 > 0$, $\Gamma_3 < 0$ y $\Gamma_4 > 0$. La dinámica de los errores, de las Ecs. (5.104), (5.107), (5.112) y (5.113)

$$\dot{\tilde{z}} = -\sigma_0 f(s) \tilde{z} - \hat{z} f(s) \bar{\sigma}_0 \quad (5.114)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_0 = -\Gamma_0 \hat{z} [\tilde{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) + \hat{z}(\bar{\sigma}_0 - f(s)\bar{\sigma}_3) + \bar{\sigma}_4 s] \quad (5.115)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_3 = -\Gamma_3 \hat{z} f(s) [\tilde{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) + \hat{z}(\bar{\sigma}_0 - f(s)\bar{\sigma}_3) + \bar{\sigma}_4 s] \quad (5.116)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_4 = -\Gamma_4 s [\tilde{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) + \hat{z}(\bar{\sigma}_0 - f(s)\bar{\sigma}_3) + \bar{\sigma}_4 s] \quad (5.117)$$

Se proponen las siguientes funciones candidatas de Lyapunov

$$W_1 = \frac{k}{2} \bar{z}^2 \quad (5.118)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \Gamma_0^{-1} \bar{\sigma}_0^2 \quad (5.119)$$

$$W_3 = \frac{1}{2} |\Gamma_3^{-1}| \bar{\sigma}_3^2 \quad (5.120)$$

$$W_4 = \frac{1}{2} \Gamma_4^{-1} \bar{\sigma}_4^2 \quad (5.121)$$

al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.118) y sustituir el valor de $\dot{\bar{z}}$ es posible expresar esta ecuación como

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= -k\sigma_0 f(s) \bar{z}^2 - kf(s) \bar{z} \bar{\sigma}_0 \bar{z} \\ \dot{W}_1 &= -\alpha_1 \Phi_1^2(\bar{z}) - \gamma_{12} \beta_1 \Phi_1(\bar{z}) \Phi_2(\bar{\sigma}_0) \end{aligned} \quad (5.122)$$

donde $\alpha_1 = k\sigma_0 f(s)$, $\beta_1 = k$, $\gamma_{11} = 0$, $\gamma_{12} = f(s)\bar{z}$, $\gamma_{13} = 0$, $\gamma_{14} = 0$, $\Phi_1(\bar{z}) = \bar{z}$ y $\Phi_2(\bar{\sigma}_0) = \bar{\sigma}_0$.

De manera similar al tomar la derivada temporal de la Ec. (5.119) y sustituir el valor de $\dot{\bar{\sigma}}_0$ es

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= -\hat{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) \bar{\sigma}_0 \bar{z} - \hat{z}^2 \bar{\sigma}_0^2 + \hat{z}^2 f(s) \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_3 - \hat{z} s \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_4 \\ \dot{W}_2 &= -\gamma_{21} \beta_2 \Phi_1(\bar{z}) \Phi_2(\bar{\sigma}_0) - \alpha_2 \Phi_2^2(\bar{\sigma}_0) + \gamma_{23} \beta_2 \Phi_2(\bar{\sigma}_0) \Phi_3(\bar{\sigma}_3) - \gamma_{24} \beta_2 \Phi_2(\bar{\sigma}_0) \Phi_4(\bar{\sigma}_4) \end{aligned} \quad (5.123)$$

donde $\alpha_2 = \hat{z}^2$, $\beta_2 = 1/\Gamma_0$, $\gamma_{21} = \Gamma_0 \hat{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3)$, $\gamma_{22} = 0$, $\gamma_{23} = \Gamma_0 \hat{z}^2 f(s)$, $\gamma_{24} = \Gamma_0 \hat{z} s$, $\Phi_3(\bar{\sigma}_3) = \bar{\sigma}_3$ y $\Phi_4(\bar{\sigma}_4) = \bar{\sigma}_4$.

Nuevamente se emplea el mismo procedimiento, al tomar la derivada temporal de la Ec. (5.120) y sustituir el valor de $\dot{\bar{\sigma}}_3$, entonces es posible expresar la ecuación como

$$\begin{aligned} \dot{W}_3 &= -\frac{\Gamma_3}{|\Gamma_3|} \hat{z} f(s) (\sigma_0 - f(s)\sigma_3) \bar{\sigma}_3 \bar{z} - \frac{\Gamma_3}{|\Gamma_3|} \hat{z}^2 f(s) \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_0 + \frac{\Gamma_3}{|\Gamma_3|} \hat{z}^2 f^2(s) \bar{\sigma}_3^2 - \frac{\Gamma_3}{|\Gamma_3|} \hat{z} f(s) s \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 \\ \dot{W}_3 &= -\gamma_{31} \beta_3 \Phi_3(\bar{\sigma}_3) \Phi_1(\bar{z}) - \gamma_{32} \beta_3 \Phi_3(\bar{\sigma}_3) \Phi_2(\bar{\sigma}_0) - \alpha_3 \Phi_3^2(\bar{\sigma}_3) - \gamma_{34} \beta_3 \Phi_3(\bar{\sigma}_3) \Phi_4(\bar{\sigma}_4) \end{aligned} \quad (5.124)$$

donde $\alpha_3 = \hat{z}^2 f^2(s)$, $\beta_3 = 1/|\Gamma_3|$, $\gamma_{31} = \Gamma_3 \hat{z} f(s) (\sigma_0 - f(s)\sigma_3)$, $\gamma_{32} = \Gamma_3 \hat{z}^2 f(s)$, $\gamma_{33} = 0$, $\gamma_{34} = \Gamma_3 \hat{z} f(s) s$.

Finalmente al tomar la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.121) y sustituir el valor de $\dot{\bar{\sigma}}_4$

$$\begin{aligned} \dot{W}_4 &= -s(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) \bar{\sigma}_4 \bar{z} - s \hat{z} \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_0 + s \hat{z} f(s) \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_3 - s^2 \bar{\sigma}_4^2 \\ \dot{W}_4 &= -\gamma_{41} \beta_4 \Phi_4(\bar{\sigma}_4) \Phi_1(\bar{z}) - \gamma_{42} \beta_4 \Phi_4(\bar{\sigma}_4) \Phi_2(\bar{\sigma}_0) - \gamma_{43} \beta_4 \Phi_4(\bar{\sigma}_4) \Phi_3(\bar{\sigma}_3) - \alpha_4 \Phi_4^2(\bar{\sigma}_4) \end{aligned} \quad (5.125)$$

donde $\alpha_4 = s^2$, $\beta_4 = 1/\Gamma_4$, $\gamma_{41} = \Gamma_4 s(\sigma_0 - f(s)\sigma_3)$, $\gamma_{42} = \Gamma_4 \hat{z} s$, $\gamma_{43} = \Gamma_4 \hat{z} f(s) s$, $\gamma_{44} = 0$.

Ahora se propone una función compuesta como candidata a función de Lyapunov.

$$W_t = \sum_{i \in \{1,2,3,4\}} h_i W_i \quad (5.126)$$

donde $h_i > 0$ son factores de escala a determinar posteriormente. La derivada con respecto al tiempo de la Ec. (5.126) satisface

$$\dot{W}_t \leq \sum_{i=1}^4 h_i \left[-\alpha_i \Phi_i^2 + \sum_{j=1}^4 \gamma_{ij} \beta_i \Phi_i \Phi_j \right] \quad (5.127)$$

La Ec. (5.127) es una forma cuadrática que puede ser escrita de la forma:

$$\dot{W}_t \leq -\frac{1}{2} \Phi^T (HS + S^T H) \Phi \quad (5.128)$$

donde $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_4]^T$, $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_4)$ y la matriz S se define como

$$S_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i \gamma_{ii} & \text{si } i = j \\ -\beta_i \gamma_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.129)$$

La forma cuadrática de la Ec. (5.128) es negativa definida si y sólo si la matriz $HS + S^T H$ es positiva definida, esto es si y solo si S es una M-matriz; esto es, los menores principales de S son positivos (Khalil 1996). La matriz S es

$$S = \begin{bmatrix} k\sigma_0 f(s) & -kf(s)\hat{z} & 0 & 0 \\ -\hat{z}(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) & \hat{z}^2 & -\hat{z}^2 f(s) & -\hat{z}s \\ \hat{z}f(s)(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) & \hat{z}^2 f(s) & \hat{z}^2 f^2(s) & \hat{z}f(s)s \\ -s(\sigma_0 - f(s)\sigma_3) & -\hat{z}s & -\hat{z}f(s)s & s^2 \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

La prueba de que los menores principales de S son positivos es directa del análisis de estos y dentro de la simulación se encontraron valores apropiados de h_i , tal que esta condición se satisface; es por esto que se demuestra la estabilidad del punto de equilibrio $\hat{z} = 0$, $\hat{\mu} = 0$ y para poder garantizar que $\hat{\Theta} = 0$ es necesario excitación persistente.

5.3.1 Resultados de simulación del observador-estimador

La simulación de resultados se realizó con base en un juego de parámetros para caracterizar un modelo de llanta que propone Canudas y Tsiotras (1999), con los datos de un vehículo estándar en el proceso de frenado utilizando el controlador para lograr máxima fuerza de fricción (Sec. 5.1). La Fig. 5.14 muestra la evolución del estado interno y su derivada así como de los estimados correspondientes y el error de observación para ambos. La Fig. 5.15 muestra la evolución de los parámetros y el valor real de estos, la última gráfica de esta figura muestra el error en el coeficiente de fricción, $\hat{\mu}$. Finalmente en la Fig. 5.16 se muestra la evolución de la derivada de las funciones de Lyapunov propuestas Ecs. (5.122)-(5.125) y la derivada de la función compuesta, Ec. (5.126).

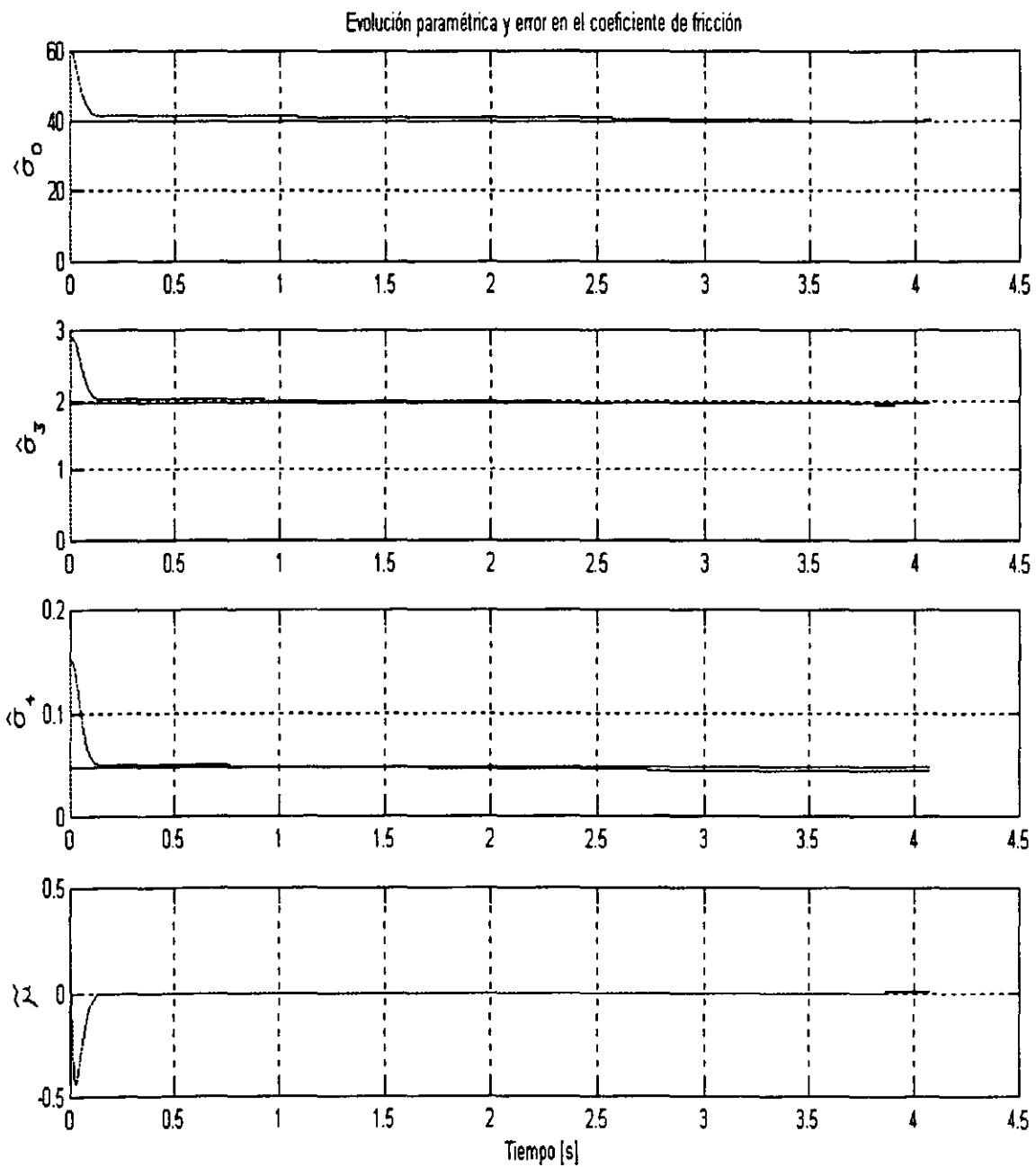


Figura 5.15: Evolución paramétrica.

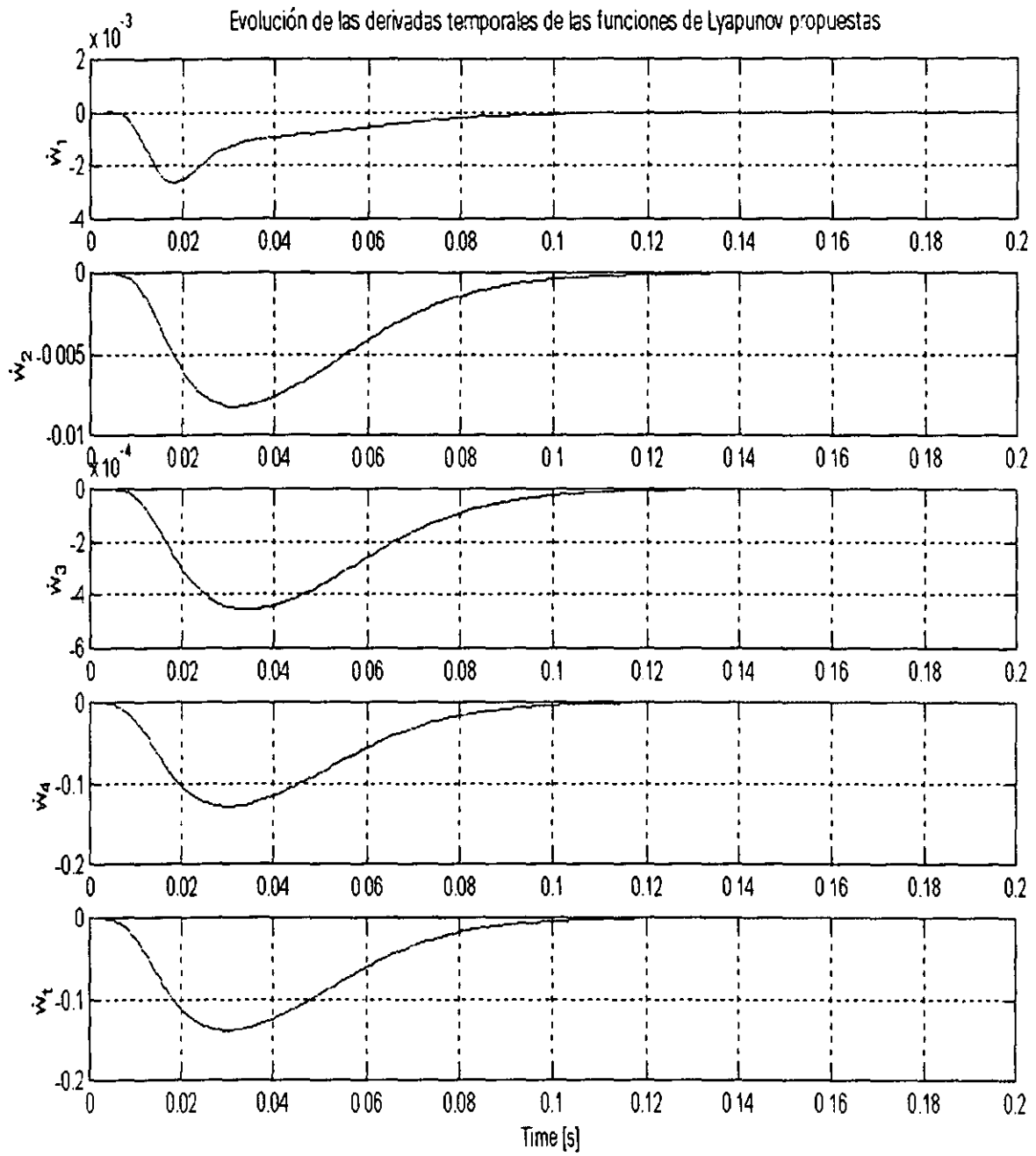


Figura 5.16: Derivadas con respecto al tiempo de las funciones de Lyapunov propuestas.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se ha trabajado con modelos de fricción pseudoestáticos y modelos dinámicos y se han propuesto algoritmos globalmente convergentes para la adaptación de los parámetros de ambos modelos. Se diseñaron controladores para el frenado en alguna situación de emergencia utilizando los modelos de fricción introduciendo el diseño de observadores de los estados del sistema. De manera adicional se han utilizado técnicas de control óptimo para formalizar ciertas prácticas estándar en el diseño de controladores para el frenado e impulso de los vehículos. En el planteamiento del problema se ha considerado que las características llanta-pavimento pueden variar de un momento a otro. El desempeño de los algoritmos, controladores y observadores se ilustra mediante ejemplos de simulación.

En el capítulo 2 se presenta el modelo matemático del vehículo con ciertas simplificaciones propuestas por algunos expertos en el área que no son significativos para invalidar los resultados obtenidos. El capítulo 3 presenta los dos tipos de modelos de fricción utilizados, los modelos pseudoestáticos y los modelos dinámicos. En esta parte se muestra la generalidad de los modelos dinámicos que abarca y representa también a los modelos pseudoestáticos.

El capítulo 4 presenta el diseño de dos controladores para el frenado de emergencia utilizando una aproximación al modelo pseudoestático, la cual muestra ser una buena aproximación pues ajusta razonablemente bien las curvas del modelo original. La formulación del problema se hace en el campo de los sistemas continuos en el tiempo. En este campo se cuenta con herramientas de análisis y diseño suficientemente desarrolladas para demostrar la estabilidad de los algoritmos de adaptación, control y estimación. El esquema de estudio propuesto está basado en la teoría de Lyapunov. El primer conjunto controlador-observador considera que sólo se cuenta con datos de velocidad y aceleración angular y que se conoce la ganancia general del sistema de frenado. Para la adaptación de parámetros se emplea una ley de adaptación tipo gradiente. En este diseño es importante mencionar que los parámetros del modelo proporcionan una subestimación del modelo de fricción, esto es bueno para el cálculo conservador de la distancia de frenado, por otro lado el observador de los estados converge rápidamente a $\tilde{s} = \tilde{v}$ y a partir de ahí tiende a cero muy lentamente y para fines prácticos converge a esa superficie. A pesar de esto el controlador muestra un buen desempeño, pero es conveniente conocer con cierta precisión el valor inicial de los estados. En el segundo diseño se considera que se mide velocidad angular y aceleración lineal. Para este diseño se mejora el desempeño del estimador de los estados logrando convergencia de los errores a cero, aun sin conocer bien los estados iniciales, como en el primer esquema, por otro lado la convergencia paramétrica del modelo de fricción ya no subestima los parámetros, pero su error es pequeño (menor al 3%). En ambos casos a pesar de las carencias mencionadas, el desempeño de los controladores es muy bueno como se puede apreciar en los resultados de simulación.

El capítulo 5, de manera análoga al capítulo 4, se presenta el diseño de algoritmos de adaptación y control empleando ahora los modelos dinámicos de fricción. En este capítulo se propone un algoritmo para la estimación de los parámetros del modelo y además un observador para el estado interno garantizando su estabilidad empleando nuevamente técnicas de la teoría de Lyapunov. Además, se presenta un controlador para la maniobra de frenado de emergencia presentando buenos resultados de seguimiento de la trayectoria de máxima fricción. Por otro lado, se presenta el diseño de otro controlador basado en técnicas de control óptimo y la justificación de por qué la trayectoria óptima corresponde con la trayectoria de máxima fricción. Finalmente los resultados de simulación en este capítulo muestran un buen desempeño de los algoritmos y los controladores.

Parte de los trabajos futuros están enfocados en diseñar una ley de adaptación de la ganancia general del sistema de frenado (K_b) o plantear algoritmos robustos con respecto a ese parámetro. Otra mejora para este trabajos sería introducir un modelo dinámico del vehículo en donde se considere la dinámica rotacional del auto en el proceso de frenado. Es obvio que los modelos dinámicos de fricción requieren más investigación, principalmente en la identificación de todos los parámetros involucrados en el modelo.

Dentro de las aportaciones de este trabajo están el presentar el diseño de controladores para el frenado de emergencia basados en un esquema que estime en línea la velocidad longitudinal del vehículo y los parámetros que determinan el modelo de fricción llanta-pavimento¹, esto es con respecto a los modelos pseudoestáticos de fricción. Con el conocimiento de las características de la fricción entre la llanta-pavimento, los vehícu. Las aportaciones con respecto a los modelos dinámicos de fricción están el producir un controlador con base en técnicas de Lyapunov que lleva al sistema a través de la trayectoria de máxima fricción, por otro lado se presenta un control óptimo en tiempo de frenado que justifica de alguna manera el usar la trayectoria de fricción máxima como la óptima. Además se presenta un esquema adaptable para algunos parámetros que ajustan a un caso particular el modelo dinámico de fricción utilizado.

¹Alvarez y Yi (1999).

Referencias

- Alvarez, L. Olmos, L. (2001) Observador y adaptación paramétrica de un modelo dinámico de fricción llanta/pavimento. Memorias del Segundo Taller Nacional de Observación y estimación en sistemas no lineales. C. Verde y J. Moreno Eds. Series del Instituto de ingeniería. 2001.
- Alvarez, L. Yi, J. (1999) Adaptive emergency braking in automated highway systems. Proceedings of the Conference on Decision and Control. p.p. 3740-3745 Phoenix, Arizona. 1999.
- Alvarez, L. Yi, J. y Horowitz, R. (2001) Observer based emergency braking control in automated highway systems. Proceedings of the American Control Conference. p.p. 2093-2098. Arlington, Virginia. 2001.
- Alvarez, L. Yi, J. Horowitz, R. y Olmos, L. (2000) Emergency braking in automated highway systems with underestimation of the friction coefficient. Proceedings of the American Control Conference. p.p. 574-579. Chicago Illinois. 2000.
- Alvarez, L. Yi, J. Horowitz, R. y Olmos, L. (2000) Control para el frenado de emergencia en autopistas automatizadas. Memorias del Primer Taller Nacional de Observación y estimación en sistemas no lineales. C. Verde y J. Moreno Eds. Series del Instituto de ingeniería. p.p. 177-196. 2000.
- Armstrong, B. y Hélobry (1991). *Control of machines with friction*. Boston MA: Kluwer.
- Bakker, E. Nyborg, L. y Pacejka, H. (1987). Tyre modelling for use in vehicle dynamic studies. Society of Automotive Engineers Paper # 870421.
- Bliman P.A. Bonald, T. y Sorine M. (1995) Hysteresis Operatos and Tyre Friction Models Application to Vehicle Dynamic Simulation. Proc. of ICIAM, Hamburg, Germany, 3-7 July 1995.
- Bryson, A.E. y. Ho Y.C. (1969) *Applied optimal control*. USA: Blaisdell Publishing Company.
- Burckhardt, M. (1993). *Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme*. Germany: Vogel-Verlag.
- Canudas de Wit, C., Olsson, K., Aström, K.S., et al. (1995). A new model for control of systems with friction. IEEE. Transaction on automatic control, Vol. 40, No 3, March 1995.
- Canudas de Wit, C. y Ge, S.S. (1997). Adaptive Friction Compensation for Systems with Generalized Velocity/Position Friction Dependency. Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, San Diego, California USA. December 1997.
- Canudas de Wit, C. y Horowitz, R. (1999). Observers for tire/road contact friction using only wheel angular velocity information. IEEE. Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control Phoenix, Arizona USA. December 1999.
- Canudas de Wit, C. y Lischinsky, P. (1996) Adaptive Friction Compensation with Dynamic Friction Models. IFAC 13th Triennial World Congress. San Francisco. Usa. 1996.

- Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control. IEEE. Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control Phoenix, Arizona USA. December 1999.
- Gerdes, J. y Hedrick K. (1995, June). Brake System Requirements for Platooning on an Automated Highway. In *The American Control Conference*, Seattle, Washington, pp. 165–169.
- Gustafsson, F. (1997). Slip-based tire-road friction estimation. *Automatica* 33(6), 1087–1099.
- Harned, J., Johnston, L. y Scharpf, G. (1969). Measurement of Tire Brake Force Characteristics as Related to Wheel Slip (Antilock) Control System Design. *SAE Transactions* 78(690214), 909–25.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems* (Second ed.). USA: Prentice-Hall.
- Kiencke, U. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Volume 1.
- Kiencke, U. y Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. In *Proceedings of the AVEG'94*.
- Lee, H. y Tomizuka, M. (1995). Adaptive Traction Control. PATH Technical Report UCB-ITS-PRR-95-32, Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley.
- Liu, Y. y Sun, J. (1995, June). Target Slip Tracking Using Gain-Scheduling for Antilock Braking Systems. In *The American Control Conference*, Seattle, Washington, pp. 1178–82.
- Lygeros, J., Godbole, D. y Broucke, M. (1996). Towards a Fault Tolerant AHS Design Part I: Extended Architecture. PATH Technical Report UCB-ITS-PRR-96-14, Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley.
- Maciuca, D. y Hedrick, K. (1995). Advanced Nonlinear Brake Control for Vehicle Platooning. In *The 3rd European Control Conference (ECC '95)*, Rome, Italy.
- Maciuca, D. B. (1997). *Nonlinear Robust and Adaptive Control with Application to Brake Control for Automated Highway Systems*. Ph. D. thesis, Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley.
- Olmos, L. Alvarez, L. (2001) Control óptimo de frenado de emergencia en vehículos automatizados. Memorias del Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático. San Luis Potosí, México. 2001.
- Ray, L. R. (1997). Nonlinear tire force estimation and road friction identification: simulation and experiments. *Automatica* 33(10), 1819–1833.
- Schuring, D. J. (1976). Tire Parameter Determination. DOT HS-802 089, Calspan Corporation.
- Slotine, J.-J. E. y Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. USA: Prentice-Hall.
- Szostak, H. T., Allen, R.W. y Rosenthal, T.J. (1988). Analytical modeling of driver response in crash avoidance maneuvering. volume ii: An interactive tire model for driver/vehicle simulation. Report no. DOT HS 807-271, U.S. Department of Transportation.
- Tan, H. y Tomizuka, M. (1990, May). An Adaptive Sliding Mode Vehicle Traction Controller Design. In *The American Control Conference*, San Diego, California, pp. 1156–61.
- Tsiotras, P. y Canudas de Wit, C. (2000) On the Optimal Braking of Wheeled Vehicles Proceedings of the American Control Conference, Chicago Illinois, June 2000.
- Varaiya, P. (1993). Smart Cars on Smart Roads: Problems of Control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38(2), 195–207.

- Yi, J. Alvarez, L. Claeys, X. Horowitz, R. y Canudas, C. (2001) Adaptive Observer-based Emergency Braking/Traction Control using Dynamic Tire/Road Friction Model. Proceedings of the American Control Conference. p.p. 19-24 Arlington, Virginia. 2001.
- Yi, J. Alvarez, L. Horowitz, R. y Canudas, C. (2000) Adaptive Emergency Braking Control Based on a Tire/Road Friction Dynamic Model. Proceedings of the Conference on Decision and Control. p.p. 456-461. Sydney. Australia. 2000
- Yi, K. y Jeong, T. (1998). Observer based estimation of tire-road friction for collision warning algorithm adaptation. *JSME International Journal* 41(1), 116-124.