

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

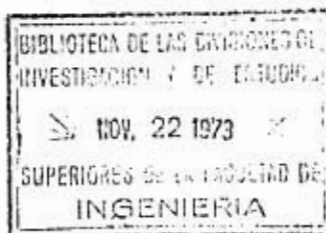
Facultad de Ingeniería

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

01149

144

**TRANSFERENCIA DE CALOR Y DISTRIBUCION DE
TEMPERATURAS EN YACIMIENTOS DE ACEITE
SOMETIDOS A INYECCION DE VAPOR
DESPLAZADO POR AGUA**



T E S I S

EN INGENIERIA PETROLERA

PRESENTADA POR

BENITO TERAN DE LA GARZA

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA - FISICA DE YACIMIENTOS

1973

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

29 45 68



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposa MARY con gran amor.

A mis hijos
Yadira Enith
Edgar Adrián.

A G R A D E C I M I E N T O S

El autor expresa su más sincero agradecimiento al Dr. S. M. Farouq Ali, Profesor Asociado de The Penn State University, por su valiosa guía y cooperación en el desarrollo del presente trabajo.

Se agradecen al Ing. Celestino Pérez Rosales, Jefe del Departamento de Yacimientos del Instituto Mexicano del Petróleo, las facilidades prestadas para llevar a cabo este estudio.

C O N T E N I D O

	Página
RESUMEN	1
INTRODUCCION	3
ENUNCIADO DEL PROBLEMA	10
MODELO MATEMATICO DEL PROCESO DE INYECCION DE UN BACHE DE VAPOR	12
Período de inyección de vapor	13
Período de inyección de agua	16
Solución numérica de las ecuaciones	18
PROCEDIMIENTO DE CALCULO	24
APLICACIONES DEL MODELO MATEMATICO	34
Efecto de la temperatura del vapor	42
Efecto del tamaño del bache de vapor	52
Efecto del ritmo de inyección de vapor	54
Efecto del ritmo de inyección de agua	58
Efecto del espesor del yacimiento	62
EFICIENCIA TERMICA	66

	Página
CONCLUSIONES	68
NOMENCLATURA	70
REFERENCIAS	73
APENDICE I	79
Deducción de la ecuación de Marx y Langenheim para el cálculo del área calentada durante la inyección del vapor	79
Pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora	80
Balance de calor durante la inyección de vapor y cálculo del área calentada	86
APENDICE II	93
Derivación de la ecuación general de conducción de calor	93
APENDICE III	96
Deducción de la ecuación que describe la transferencia de calor durante la inyección de agua	96
APENDICE IV	99
Ecuaciones para calcular la temperatura de los nodos en las fronteras donde no existe flujo de calor.	99

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Malla de celdas cuadradas que se utiliza para la simulación numérica del problema.	24
2	Distribución de temperaturas en la formación productora para la corrida I.	38
3	Pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora, para la corrida I.	39
4	Distribución de temperaturas en los estratos adyacentes durante la inyección de vapor para la corrida I.	43
5	Distribución de temperaturas en los estratos adyacentes durante la inyección de agua para la corrida I.	44
6	Distribución de temperaturas en la formación productora para la corrida II.	45
7	Pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora, para la corrida II.	46
8	Efecto de la temperatura del vapor en la distribución de temperaturas adimensionales de la formación productora.	48
9	Efecto de la temperatura del vapor en la distribución de temperaturas reales de la formación productora.	50
10	Efecto de la temperatura del vapor en las pérdidas de calor.	51
11	Efecto del tamaño del bache en la distribución de temperaturas.	53

Figura		Página
12	Efecto del ritmo de inyección de vapor en las pérdidas de calor.	56
13	Efecto del ritmo de inyección de vapor en la distribución de temperaturas.	57
14	Efecto del ritmo de inyección de agua en la distribución de temperaturas.	60
15	Efecto del ritmo de inyección de agua en las pérdidas de calor.	61
16	Efecto del espesor del yacimiento en las pérdidas de calor.	64
17	Efecto del espesor del yacimiento en la distribución de temperaturas.	65

R E S U M E N

En este trabajo se presenta un modelo matemático que permite estudiar el comportamiento térmico de un yacimiento de aceite sometido a la inyección de un bache de vapor a alta temperatura, desplazado con agua fría. El modelo considera flujo lineal de vapor en el medio poroso, y se probó su validez tratando de reproducir los resultados obtenidos experimentalmente por Mudafar M. El-Saleh con un modelo físico construido por él en los laboratorios de yacimientos de The Pennsylvania State University, en Estados Unidos de Norteamérica.

El modelo matemático está basado en la solución numérica de la ecuación de difusión de calor en dos dimensiones, para calcular la distribución de temperaturas en los estratos adyacentes a la formación productora, y en la solución de una ecuación diferencial parcial de primer orden de convección-conducción, para obtener las temperaturas en el yacimiento durante la etapa de inyección de agua. Durante la inyección del bache de vapor se utilizó la ecuación de Marx y Langenheim para calcular la magnitud del área calentada y el tiempo que tarda el vapor en invadir esa área.

La solución numérica de la ecuación de conducción de calor en los estratos adyacentes se obtuvo aplicando el esquema explícito de Barakat-Clark, del cual se presenta una descripción detallada; mientras que la ecuación de convección-conducción se resolvió utilizando diferencias regresivas espaciales y progresivas en el tiempo.

Por medio del modelo matemático se pudieron investigar los efectos en el comportamiento térmico del sistema de los cambios en las condiciones de operación; haciéndose estudios sobre el efecto del tamaño del bache, temperatura y ritmo de inyección de vapor; ritmo de inyección de agua, y espesor del yacimiento.

Se incluye también una descripción detallada del procedimiento de cálculo que se siguió para resolver el problema, y se anexan cuatro apéndices que ilustran el desarrollo de las ecuaciones principales utilizadas en los cálculos.

I N T R O D U C C I O N

La necesidad, cada vez más grande, de explotar los yacimientos de aceite viscoso en los diferentes países, ha dado lugar al desarrollo de los métodos de recuperación térmica de aceite y a su incorporación a la tecnología petrolera mundial. El objetivo fundamental de estos métodos es el proporcionar energía calorífica al aceite con el fin de disminuir su viscosidad y por tanto, facilitar su flujo hacia los pozos productores.

Aun cuando la aplicación de calor a los yacimientos de aceite data de hace mucho tiempo, ésta sólo se hacía con fines de limpieza, para eliminar bitúmenes o parafinas depositadas en las paredes de los pozos que disminuían su productividad. Fue hasta hace unos 10 ó 15 años que adquirieron un gran impulso los métodos de recuperación térmica de aceite viscoso. Estos métodos pueden clasificarse en tres grupos diferentes, de acuerdo a la forma en que se genera y proporciona el calor al yacimiento : (1) aquéllos que incluyen el uso de calentadores en el fondo del pozo; (2) los que originan la formación de un frente de combustión que se desplaza lentamente a -

través del yacimiento por un suministro continuo de aire (combustión in situ), y (3) la inyección de fluidos calientes, agua o vapor.

Los calentadores de fondo de pozo se han usado en operaciones de campo en la industria petrolera norteamericana desde 1865,¹ escasos seis años después de la perforación del pozo Drake; tienen la ventaja de que son fáciles de operar para el ritmo de generación de calor (100 000 - 150 000 Btu/hr) es relativamente pequeño, comparado con el que se proporciona al yacimiento en un proyecto de inyección de vapor, el cual sobrepasa normalmente las 20 000 000 Btu/hr.

La combustión in situ es un método en el que la energía calorífica que se utiliza para aumentar la recuperación de aceite es generada en el seno del yacimiento. Este método de recuperación térmica consiste esencialmente en lograr la combustión del aceite en el medio poroso, ya sea en forma natural o por medio de un calentador de fondo, y desplazar un frente de combustión a través del yacimiento mediante inyección de aire. El uso de una combustión subterránea para recuperar hidrocarburos data desde 1888, cuando un científico ruso propuso una gasificación de carbón para producir gases combustibles. Fue en el período de 1932 a 1938 cuando se hicieron los primeros intentos, también en Rusia, para mantener frentes de combustión en --

yacimientos con el fin de aumentar la recuperación de aceite viscoso. Sin embargo, estas pruebas no fueron del todo exitosas y fue hasta en la década de los 50's cuando recibió un serio impulso este método de recuperación térmica.

La inyección de fluidos calientes constituye otra forma, probablemente la más efectiva, de explotar un yacimiento de aceite viscoso. En este caso, a diferencia de la combustión in situ, el calor es generado en la superficie e inyectado al yacimiento a través de pozos inyectoros. En la actualidad los fluidos calientes comúnmente utilizados con ese propósito son el agua caliente y el vapor de agua.

El agua caliente se empleó por primera vez en proyectos de recuperación secundaria para aumentar los gastos de inyección en operaciones -- convencionales de inyección de agua. En 1953 Breston y Pearman² la utilizaron con este fin, obteniendo incrementos hasta del 35% en las inyectividades. En la literatura técnica aparecen algunos datos sobre aplicaciones de campo de inyección de agua caliente como agente desplazante^{3,4,5} es frecuente la aparición de publicaciones que presentan resultados de experimentos efectuados en el laboratorio⁶⁻¹⁰, o de modelos matemáticos que permiten calcular el comportamiento térmico del proceso y la recuperación de hidrocarburos.¹¹⁻¹⁶

De los métodos de recuperación térmica, el que ha sido aplicado con mayor éxito es la inyección de vapor, que puede ser empleada en la recuperación de aceite tanto de alta como de baja viscosidad, según el método usado. Básicamente, existen dos procesos, inyección continua e inyección cíclica de vapor.

La inyección continua es un proceso de desplazamiento de aceite por vapor a alta temperatura, (150-260°C), el cual se inyecta en forma continua a la formación productora por uno o varios pozos inyectoros. Esta variante en la inyección de vapor, aunque no es la más utilizada actualmente, ha sido la que más atención ha tenido por parte de los investigadores; habiéndose publicado a la fecha una cantidad considerable de literatura acerca de los aspectos teóricos ¹⁷⁻²² y de experimentos de laboratorio ^{6,24-27} relacionados con este método de recuperación térmica.

La inyección cíclica de vapor es la versión más atractiva desde el punto de vista económico de la inyección de fluidos calientes para la explotación de yacimientos de aceite viscoso y, por tanto, el método que mayor aplicación ha tenido en el campo. Se puede considerar como una técnica de estimulación a los pozos ya que, además de incrementarse la recuperación

de aceite al reducir su viscosidad, se logra una limpieza en las paredes de la formación al eliminarse algunos bitúmenes o parafinas que se adhieren en el fondo del pozo; con lo que se disminuye, por tanto, el factor de daño de la formación. La inyección cíclica de vapor consta de tres etapas: La primera corresponde a la fase de inyección, en la cual se inyecta una cantidad -- predeterminada de vapor; la segunda es la etapa de condensación del vapor, en la cual se cierra el pozo para permitir que el vapor inyectado se condense y ceda su calor latente al aceite y disminuya su viscosidad, y la tercera -- es la etapa en que se pone el pozo a producción. También se ha publicado una gran cantidad de material acerca de este método de recuperación de aceite, tanto de aplicaciones de campo ²⁷⁻⁴⁰, como de modelos matemáticos. ⁴¹⁻⁴⁸ La simulación de este proceso en el laboratorio ofrece serios problemas y debido a ello se ha publicado muy poco al respecto. ^{49,50}

* Es posible también hacer algunas combinaciones con estos métodos de recuperación secundaria para incrementar el factor de recuperación de aceite. Por ejemplo, actualmente se está utilizando en los campos de Kern River en California y Chetopa en Kansas un proceso de inyección continua de vapor, después de que los pozos han sido estimulados varias veces con este fluido mediante operaciones de inyección cíclica. Con relación a esto ya existen algunos estudios teóricos que permiten valuar el comportamiento del --

yacimiento y el incremento en la recuperación final para este tipo de operaciones.²¹

También se han propuesto algunas combinaciones de combustión in situ con inyección de diferentes tipos de fluidos. En 1952 apareció la -- primera patente con tendencias a mejorar el proceso de combustión in situ directa mediante la inyección de una mezcla de aire, agua y gases de combustión⁵¹. Posteriormente se publicaron otras ideas con el mismo propósito, basadas principalmente en una combinación de un proceso de combustión in situ y una inyección de agua; las que finalmente dieron origen al método conocido -- como "COFCAW"^{52,58} (Combination Of Forward Combustion And Waterflooding). Este método, según los investigadores que lo han estudiado, ofrece algunas -- ventajas sobre el método de combustión in situ convencional como son : menores requerimientos de aire para mantener los frentes de combustión, menor cantidad de aceite quemado como combustible y mayor recuperación de aceite.

Otra variante posible en los métodos de recuperación térmica -- es el uso de baches de vapor desplazados con agua fría. Este es un nuevo -- método cuya aplicación parece ofrecer grandes ventajas económicas en la explotación de yacimientos de aceite viscoso. Ofrece la efectividad de un proceso de inyección continua de vapor mediante el cual se obtienen altas --

eficiencias de desplazamiento, pero con menores costas de operación. Tiene - la ventaja de que el agua fría inyectada después del vapor recupera una gran cantidad de calor almacenado en el yacimiento, en las zonas previamente invadidas por el vapor, y en los estratos adyacentes a la formación productora; transformando el proceso en una equivalente a la inyección de agua caliente. En este caso, se forma un banco de aceite durante la inyección de vapor que es desplazada con efectividad durante la inyección del agua fría. En 1968 - se hizo un estudio teórico y experimental de este mecanismo de desplazamiento en la Universidad de Pennsylvania con diferentes tipos de aceites.¹⁰

En este trabajo se presenta un modelo matemático que simula el comportamiento térmico en este tipo de operaciones, tanto en el yacimiento - como en sus formaciones adyacentes, el cual permite obtener las distribuciones de temperaturas, las tasas de pérdidas de calor y la eficiencia térmica en las diferentes etapas del proceso.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

El propósito de este trabajo es elaborar un modelo matemático - para estudiar el mecanismo del flujo de calor que opera durante la inyección - de un bache de vapor al yacimiento, seguido por una inyección de agua fría. Este modelo permite calcular la distribución de temperaturas en el yacimiento y en las formaciones adyacentes, el ritmo de pérdidas de calor en diferentes puntos del yacimiento y la eficiencia térmica de esta nueva variante en los métodos de recuperación térmica de aceite.

El trabajo teórico que se desarrolla es conducido con el fin de - investigar el efecto de ciertos parámetros del yacimiento y diferentes condiciones de operación sobre el comportamiento térmico del proceso.

Los parámetros investigados son :

1. Temperatura del vapor.
2. Tamaño del bache de vapor.

3. Ritmo de inyección de vapor.
4. Ritmo de inyección de agua.
5. Espesor del yacimiento.

MODELO MATEMATICO DEL PROCESO DE INYECCION DE UN BACHE DE VAPOR

El modelo matemático que se ha desarrollado en este trabajo tiene -- por objeto simular el flujo de calor en el yacimiento y en los estratos adyacentes, -- durante un proceso de inyección de un bache de vapor, seguido por una inyección -- continua de agua fría en la formación productora de aceite. El modelo da la distribución de temperaturas en el yacimiento y en las formaciones adyacentes, como una función del tiempo, durante las etapas de inyección de vapor y de agua fría. Asimismo, permite obtener el ritmo de pérdidas verticales de calor y la eficiencia térmica del proceso.

El modelo propuesto consiste de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas, cuya solución encadenada permite obtener la distribución de temperaturas que se pretende.

A continuación se citan las suposiciones que se hicieron para desarrollar este modelo; suposiciones que se considera no limitan su utilidad, a pesar de las simplificaciones involucradas en el esquema computacional.

1. El yacimiento es homogéneo y de espesor constante.
2. Las formaciones supra e infra-adyacentes son homogéneas y tienen las mismas propiedades.
3. El flujo de calor en el yacimiento es por convección solamente.
4. Existe equilibrio térmico instantáneo en la dirección vertical.
5. El flujo de calor en las formaciones adyacentes es por conducción y en dos dimensiones.
6. La distribución de temperaturas en la zona invadida por el vapor es una función escalón.
7. Las propiedades térmicas de la roca y de los fluidos son constantes e independientes de la temperatura.
8. Los ritmos de inyección de vapor y de agua fría son constantes.

PERIODO DE INYECCION DE VAPOR.

Para obtener la distribución de temperaturas en la formación productora durante este período, se emplea la ecuación de Marx y Langenheim⁷. Tomando en cuenta que se ha supuesto una función escalón para la distribución de temperaturas en la zona invadida por el vapor (suposición No. 6), la ecuación de Marx y Langenheim, permite obtener, más que la distribución de temperaturas, la variación con el tiempo de la magnitud de la región calentada por ese fluido.

La ecuación mencionada es la siguiente:

$$A(t) = \frac{H_o M h_w}{4 K^2 (T_s - T_y)} \left[e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \right] \quad (1)$$

Donde

$\operatorname{erfc} = 1 - \operatorname{erf}$ = función error complementaria

$$x = \frac{2 K}{M h} \left(\frac{T}{w} \right)^{1/2}$$

En el apéndice I se presenta con todo detalle la deducción de la ecuación (1).

Al mismo tiempo es necesario determinar también la distribución de temperaturas en las formaciones adyacentes al yacimiento, a medida que el vapor -- está avanzando en este último. Esta distribución de temperaturas será útil en la -- evaluación de las pérdidas del calor que se inyecta y de la eficiencia térmica del proceso.

El problema en este caso consiste en resolver la ecuación (2) (ver deducción en el apéndice II).

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

para un medio semi-infinito con las siguientes condiciones inicial y de frontera.

- a) $T(X, Y, 0) = T_y$
- b) $T(X, 0, t) = T_s, \quad X \leq X_s$ (X_s = posición del frente de vapor)
- c) $T(X, 0, t) = T_y, \quad X > X_s$
- d) $T(X, L, t) = T_y$
- e) $\left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{0, y, t} = 0$
- f) $\left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{L, y, t} = 0$

La condición (a) establece que en el momento de iniciar la inyección del vapor, tanto el yacimiento como las formaciones adyacentes se encuentran a una temperatura uniforme igual a T_y .

Las condiciones (b), (c), (d), (e) y (f), son las condiciones de frontera que definen el problema y representan lo siguiente:

Las condiciones (b) y (c) establecen que después de un tiempo de inyección t_i , la formación productora tiene una temperatura T_s , igual a la temperatura del vapor, en la región invadida por el vapor ($0 \leq X \leq X_s$), y una temperatura T_y , igual a la que tenía originalmente el yacimiento, en la región no afectada por el vapor ($X_s < X < L$).

La condición (d) es una condición de frontera con la cual se trata de representar el hecho de que las formaciones adyacentes son lo suficientemente potentes, de tal manera que no ocurre calentamiento alguno en los puntos más -- alejados de la formación productora.

Las condiciones (e) y (f) indican que las formaciones adyacentes -- están constituidas por un sistema aislado térmicamente en sus extremos $X = 0$ y $X = L$; es decir, no hay flujo de calor a través de ellos, independientemente del valor de Y .

PERIODO DE INYECCION DE AGUA.

En esta etapa se supone que se inyecta agua a una velocidad constante, y de tal forma que para cualquier paso de tiempo la temperatura en la cara de entrada es también un valor fijo e igual a T_w (temperatura del agua).

La ecuación que describe la distribución de temperaturas en la formación productora, incluyendo convección de calor por el flujo del agua, la transferencia de calor hacia los estratos adyacentes y el calentamiento de la formación es la siguiente:

$$-\rho_w C_w V_w \frac{\partial T^*}{\partial X} + 2 \frac{q}{h} = M \frac{\partial T^*}{\partial t} \quad (3)$$

Donde q representa el flujo unitario de calor de la formación productora hacia las formaciones adyacentes (o viceversa) y está dado por

$$q = K_y \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (4)$$

En las ecuaciones (3) y (4), T^* y T corresponden a las temperaturas en la formación productora y en las formaciones adyacentes, respectivamente. Esta última se obtiene de la solución a la ecuación (2).

En el apéndice III se presenta en forma detallada la derivación de la ecuación (3).

SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES

Esquema de Barakat Clark.

La solución numérica de la ecuación de difusión de calor que describe el comportamiento térmico del sistema durante la etapa de inyección de vapor se obtuvo usando el esquema explícito de Barakat-Clark.⁵⁹

El esquema de Barakat-Clark es una variante del llamado "procedimiento explícito de dirección alternante" (ADEP), y consiste en dividir cada una de las segundas derivadas en dos mitades, una al nivel n y la otra al nivel $n + 1$. Después de esto se escribe una segunda ecuación en diferencias con los niveles de tiempo intercambiados. Se resuelven cada una de las ecuaciones y se obtiene la solución final promediando aritméticamente los valores calculados con esas ecuaciones.

Aplicando este esquema computacional a la ecuación (2) se tiene lo siguiente :

Primera ecuación en diferencias.

$$[K_{x_{i+1/2,j}} (T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - K_{x_{i-1/2,j}} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})] / (\Delta X)^2 +$$

$$[K_{y_{i,j+1/2}} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - K_{y_{i,j-1/2}} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})] / (\Delta Y)^2 = \rho C \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5)$$

Si se hace :

$$E_{ij}^- = \frac{K_{x_{i-1/2,j}}}{(\Delta X)^2} + \frac{K_{y_{i,j-1/2}}}{(\Delta Y)^2}$$

$$E_{ij}^+ = \frac{K_{x_{i+1/2,j}}}{(\Delta X)^2} + \frac{K_{y_{i,j+1/2}}}{(\Delta Y)^2}$$

$$E_{tij} = - \frac{\rho C}{\Delta t}$$

$$B_{ij} = \frac{K_{y_{i,j-1/2}}}{(\Delta Y)^2}$$

$$D_{ij} = \frac{K_{x_{i-1/2,j}}}{(\Delta X)^2}$$

$$F_{ij} = \frac{K_{x_{i+1/2,j}}}{(\Delta X)^2}$$

$$H_{ij} = \frac{K_{y_{i,j+1/2}}}{(\Delta Y)^2}$$

se tendrá :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{E_{ij} - E_{1ij}} [B_{ij} T_{i,j-1}^{n+1} + D_{ij} T_{i-1,j}^{n+1} - (E_{ij} + E_{1ij}) T_{i,j}^n + F_{ij} T_{i+1,j}^n + H_{ij} T_{i,j+1}^n] \quad (6)$$

Con esta ecuación se calculan las temperaturas en todos los nodos de la malla, incrementando los subíndices i, j en el orden siguiente : $i = 1, 2, 3, \dots, N_x$; $j = 1, 2, 3, \dots, N_y$, donde i cambia más rápidamente que j . Siguiendo este ordenamiento de índices se logra que todo el lado derecho de la ecuación (6) sea conocido en el momento de calcular $T_{i,j}^{n+1}$, ya que los términos que involucran el exponente $n+1$ ($T_{i,j-1}^{n+1}$, $T_{i-1,j}^{n+1}$) ocurren "atrás" del nodo (i, j) ; mientras que los términos en los nodos "adelante" del nodo (i, j) , ($T_{i+1,j}^n$, $T_{i,j+1}^n$), corresponden al nivel de tiempo n .

Segunda ecuación en diferencias.

Se escribe en diferencias la ecuación (5), intercambiando los niveles de tiempo n y $n+1$.

$$\begin{aligned} [K_{x_{i+1/2,j}} (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - K_{x_{i-1/2,j}} (T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)] / (\Delta X)^2, \\ [K_{y_{i,j+1/2}} (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - K_{y_{i,j-1/2}} (T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] / (\Delta Y)^2 - \rho C \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (7)$$

Esta ecuación puede escribirse como sigue :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{E_{ij}^+ + E_{ij}^-} [B_{ij} T_{i,j-1}^n + D_{ij} T_{i-1,j}^n - (E_{ij}^- + E_{ij}^+) T_{i,j}^n + F_{ij} T_{i+1,j}^{n+1} + H_{ij} T_{i,j+1}^{n+1}] \quad (8)$$

En esta ecuación los términos con el exponente $n+1$, $(T_{i+1,j}^{n+1}, T_{i,j+1}^{n+1})$, ocurren adelante del nodo (i, j) , de tal manera que si se quieren tener como conocidos estos valores en el momento de calcular $T_{i,j}^{n+1}$, se necesita invertir el sentido de recorrido de la malla; es decir, variar j e i como sigue : --
 $J = Ny, Ny-1, \dots, 2, 1 \quad i = Nx, Nx-1, \dots, 2, 1$; donde j cambia más rápidamente que i .

La solución deseada es un promedio aritmético de los resultados obtenidos con las ecuaciones (6) y (8).

Si el medio poroso es homogéneo e isotrópico y se cumple que --
 $K_x = K_y = K$, se tiene, para el caso en que $\Delta x = \Delta y$:

$$E_{ij}^- = E_{ij}^+ = \frac{2K}{(\Delta X)^2}$$

$$E_{ij} = - \frac{\rho C}{\Delta t}$$

$$B_{ij} = D_{ij} = F_{ij} = H_{ij} = \frac{K}{(\Delta X)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (6) :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^n + T_{i,j+1}^n) - \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (9)$$

Similarmente, la ecuación (8) se transforma en :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) son las que se utilizan en este trabajo para calcular la distribución de temperaturas en las formaciones adyacentes a la formación productora.

La distribución de temperaturas en el yacimiento durante la etapa de inyección de agua se obtiene resolviendo numéricamente la ecuación (3), la cual, escrita en diferencias finitas, adquiere la forma siguiente :

$$-\rho_w C_w V_w \frac{T_i^{*n+1} - T_{i-1}^{*n+1}}{\Delta X} + 2 \frac{q_i}{h} - M \frac{T_i^{*n+1} - T_i^{*n}}{\Delta t}$$

De donde

$$T_i^{*n+1} = \frac{\frac{\rho_w V_w C_w}{\Delta X} T_{i-1}^{*n+1} + \frac{M}{\Delta t} T_i^{*n} + 2 \frac{q_i}{h}}{\frac{\rho_w V_w C_w}{\Delta X} + \frac{M}{\Delta t}} \quad (11)$$

El flujo de calor hacia los estratos adyacentes (q_i) se obtiene en forma aproximada con la siguiente ecuación :

$$q_i = K_v \frac{T_{i,1} - T_{i,2}}{\Delta Y} \quad (12)$$

Donde ($T_{i,1} - T_{i,2}$) es la diferencia de temperaturas en la dirección vertical entre un punto i del yacimiento y otro punto alejado una distancia ΔY del mismo.

PROCEDIMIENTO DE CALCULO

Para calcular la distribución de temperaturas en los estratos adyacentes a la formación productora se construye una malla como la mostrada - en la figura 1.

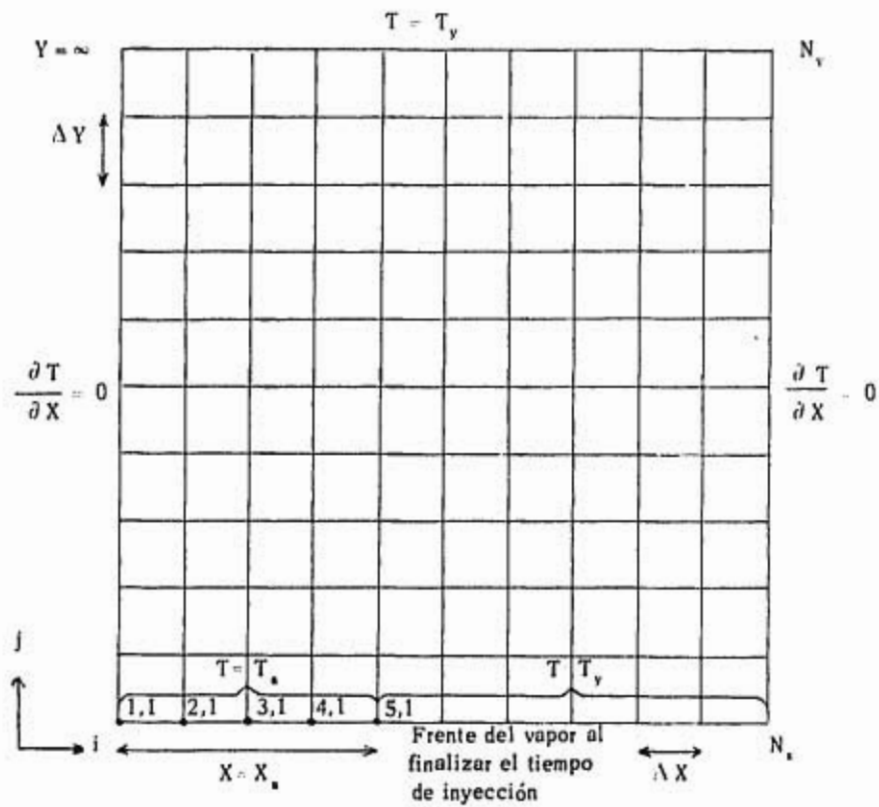


Fig. 1.- Malla de celdas cuadradas, que se utiliza en la simulación numérica del problema.

Se divide esta malla en $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ celdas de volumen $X \cdot Y \cdot W$, cuyos nodos se identifican con los subíndices i, j , donde $i = 1, 2, 3 \dots N_x$ y $j = 1, 2, 3, \dots N_y$.

Al iniciar la inyección de vapor todos los nodos de la malla - tienen la temperatura T_y (condición inicial (a) de la ecuación (2)).

Usando la malla de la figura 1 y las condiciones de frontera - indicadas en el dibujo, excepto que la condición en el eje x (para $y = 0$) depende del tiempo, se procede a calcular el comportamiento térmico del sistema como sigue :

1. Se avanza el frente de vapor una distancia ΔX (del nodo (1,1) al (2,1)) y se calcula el tiempo que transcurre para que suceda eso, como se explica enseguida :

De la ecuación (1) se despeja

$$\left| e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) + \frac{2X}{\sqrt{\pi}} - 1 \right| = \frac{4K^2(T_s - T_y)A(t)}{H_o M h =}$$

Conociendo $A(t)$, ($A(t) = W \wedge X$ para el primer paso) y las demás características del yacimiento y del vapor se puede calcular $\left| e^{-x^2} \operatorname{erfc}(x) + \frac{2X}{\sqrt{\pi}} - 1 \right|$. Este factor se encuentra tabulado contra X para un rango de valores de 1 a 10 de esta variable.¹⁷

Una vez conocido el valor de $\left| e^{-x^2} \operatorname{erfc}(x) + \frac{2X}{\sqrt{\pi}} - 1 \right|$ se calcula X interpolando entre los valores de la tabla. En este caso se usa el método de interpolación de Lagrange, el cual se programó como una subrutina para ser utilizado en los cálculos de X .

De la ecuación

$$X = \frac{2K}{Mh} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{1/2}$$

se despeja el tiempo y se calcula con la expresión:

$$t = \frac{X^2 M^2 h^2 \alpha}{4 K^2}$$

2. Con las condiciones de frontera $T_{1,1} = T_{2,1} = T_S$ y $T_{3,1} = T_{4,1} = \dots = T_{N_x} = T_Y$ se calculan las temperaturas en cada uno de los nodos interiores de la malla por medio de las ecuaciones (9) y (10). Para los

nodos exteriores $(1, j)$ y (N_x, j) , donde $j = 2, 3, \dots, N_y - 1$, se utilizan --
 las siguientes ecuaciones, que representan las condiciones de cero flujo de ca-
 lor $\frac{\partial T}{\partial X} = 0$ en los extremos $X = 0$ y $X = L$ ($1 < j < N_y$).

Para $X = 0$ (frontera izquierda).

Cuando se barre la malla de izquierda a derecha se usa :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i+1,j}^n + T_{i,j+1}^n) - \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (13)$$

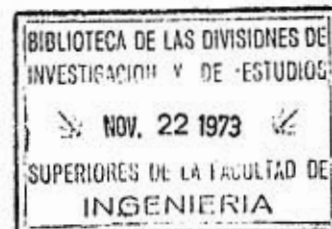
Cuando el barrido se hace de derecha a izquierda :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^n + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (14)$$

En las ecuaciones (13) y (14), $i=1$ y $j = 2, 3, 4, \dots, N_y-1$.

Para $X = L$ (frontera derecha).

si el barrido se hace de izquierda a derecha :



$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^n) - \left(\frac{K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (15)$$

si el barrido se hace de derecha a izquierda :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} - \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad (16)$$

En las ecuaciones (15) y (16), $i = Nx$ y $j = 2, 3, 4, \dots, Ny-1$.

Para calcular los valores definitivos de las temperaturas en los nodos de la frontera $X=0$, se promedian los resultados obtenidos con las ecuaciones (13) y (14). Lo mismo se hace con las ecuaciones (15) y (16) para las temperaturas en la frontera $X = L$.

La deducción de las ecuaciones (13), (14), (15) y (16) se presenta detalladamente en el apéndice IV.

3. Se calcula el ritmo de flujo de calor hacia los estratos adyacentes (o viceversa) en cada uno de los nodos que están en contacto con la formación productora. Esto se hace utilizando una ecuación de dos puntos como se

Indica a continuación.

$$q_i = K_y \frac{T_{i,1} - T_{i,2}}{\Delta Y} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N_x)$$

4. Se calcula la cantidad de calor almacenada en el yacimiento - multiplicando el volumen del yacimiento invadido por vapor, por su capacidad calorífica volumétrica y por la diferencia de temperaturas ($T_s - T_y$).

$$Q_y = n \Delta X W H M (T_s - T_y) \quad (17)$$

n = número de celdas invadidas por el vapor.

5. Se calcula la cantidad de calor almacenada en los estratos adyacentes multiplicando su capacidad calorífica volumétrica por el volumen de cada una de las celdas de la malla, y por la diferencia de temperaturas - - ($T_{i,j} - T_y$). Después se suma el calor almacenado en cada celda para dar - el total de los estratos adyacentes.

$$Q_{ca} = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x-1} \rho C W \Delta X \Delta Y (T_{i,j} - T_y) \quad (18)$$

Para $i = 1$ e $i = N_x$, el volumen de cada celda es $W \Delta X \Delta Y/2$ de tal manera que

$$Q_{sa} = \sum_{j=1}^{N_y} \rho C \frac{W \Delta X \Delta Y}{2} (T_{1,j} - T_y); (i = 1, N_x) \quad (19)$$

El calor total en los estratos adyacentes al tiempo t es la suma de las ecuaciones (18) y (19).

6. Se calcula el error en el balance de calor como un porcentaje del calor inyectado.

Error en el balance de calor =

$$\frac{|\text{calor inyectado al tiempo } t - (\text{calor en el yac.} + \text{calor en los estratos ady.})| \times 100}{\text{calor inyectado al tiempo } t.}$$

El calor total inyectado al tiempo t durante la etapa de inyección de vapor se calcula multiplicando simplemente el gasto de inyección de calor, H_0 , por el tiempo transcurrido desde el inicio de la inyección.

7. Se calcula la eficiencia térmica del proceso dividiendo el calor almacenado en el yacimiento entre el calor total inyectado.

8. Se avanza el frente de vapor al nodo (3, 1) y se calcula el tiempo acumulado desde que empezó la inyección de vapor, determinando un nuevo valor de X como se explicó en el paso número 1. En este caso $\Lambda(t) = 2 W \Delta X$.

9. Con las condiciones de frontera $T_{1,1} = T_{2,1} = T_{3,1} = T_s$ y $T_{4,1} = T_{5,1} = \dots = T_{N_x} = T_Y$ y con la distribución de temperatura -- previamente calculada para los estratos adyacentes, (paso 2), se calculan nuevos valores de temperatura en esa zona, en la forma indicada en el paso número 2.

10. Se repiten los pasos anteriores avanzando cada vez el frente de vapor una distancia ΔX hasta alcanzar un tiempo prefijado de inyección o -- calentar una cierta área alrededor del pozo.

11. Una vez terminada la inyección de vapor se inicia la inyección de agua a una velocidad constante y se escoge un incremento de tiempo Δt adecuado para calcular la distribución de temperaturas en la formación productora durante esta etapa.

12. Se calcula la distribución de temperaturas en la formación por -- medio de la ecuación (11)

$$T_i^{*n+1} = \frac{\frac{\rho_w C_w V_w}{\Delta X} T_{i-1}^{*n+1} + \frac{M}{\Delta t} T_i^{*n} + 2q_i^n \frac{W}{A}}{\frac{\rho_w V_w C_w}{\Delta X} + \frac{M}{\Delta t}}$$

Para llevar a cabo este cálculo se utiliza como condición inicial: $T^* = T_w$ en la cara de entrada, $T^* = T_s$ para todos los nodos en $X \leq X_s$ ($X_s =$ última posición del frente de vapor) y $T^* = T_y$ para los nodos restantes.

El flujo de calor de los estratos adyacentes hacia la formación productora, q_i , se calcula con una ecuación de dos puntos

$$q_i = K_y \frac{T_{i,1} - T_{i,2}}{\Delta Y}; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N_x)$$

En este caso, como puede observarse en la ecuación para calcular la temperatura en cada nodo al tiempo $(n+1)$, se utiliza el flujo de calor al nivel de tiempo anterior (q_i^n) .

13. Se calcula la distribución de temperatura en los estratos adyacentes con las ecuaciones (9), (10), (13), (14), (15) y (16), utilizando como condición de frontera en $Y = 0$ las temperaturas calculadas en el paso 12.

14.- Se calcula la cantidad de calor almacenada en el yacimiento

$$Q_y = \sum_{i=2}^{N_x-1} W \Delta X H M (T_i - T_y) \quad (20)$$

El calor almacenado en las celdas de la frontera ($X = 0$ y $X = L$, se calcula con la ecuación siguiente y se agrega al resultado obtenido con la ecuación (20).

$$Q_y = \frac{W \Delta X H M}{2} (T_i - T_y) ; \quad (i = 1, N_x) \quad (21)$$

15.- Se calcula la cantidad de calor almacenado en los estratos adyacentes, el balance de calor y la eficiencia térmica del proceso como se explicó en los pasos 5, 6 y 7, pero en este caso el calor inyectado durante el tiempo Δt se obtiene con la siguiente ecuación :

$$\Delta Q_{iny} = \left[\frac{M}{\Delta t} (T_w - T_i^{*n}) - \frac{\rho_w V_w C_w}{\Delta X} (T_{2,1}^{n+1} - T_w) - \frac{2K}{\Delta X H} (T_{1,2} - T_w) \right] \frac{\Delta t \Delta X W H}{2}$$

16.- Se incrementa el tiempo en Δt y se repiten los pasos 12, 13, 14 y 15, hasta que se alcance un tiempo límite prefijado para la predicción del comportamiento térmico del yacimiento.

APLICACIONES DEL MODELO MATEMATICO

Se hicieron varias aplicaciones del modelo matemático utilizando los datos publicados por Mudafar M. El-Saleh¹⁰, quien hizo algunos estudios teóricos y experimentales con baches de vapor desplazados con agua a temperatura ambiente. El medio poroso utilizado por él fue un tubo rectangular de acero empacado con perlititas de vidrio, cuyos diámetros variaban de 0.0021 a 0.0029 μg . El tubo tenía una longitud de 4 pies y unas dimensiones interiores de 1.5 x 3.5 μg . Para simular los estratos adyacentes utilizó dos cajas de madera de 4 pies de longitud, 2.5 pies de alto y 3.5 de ancho, llenas con arena seca, no consolidada, de grano fino a medio y provistas con agujeros en varios puntos para la colocación de termómetros o termopares para registrar temperaturas. Con respecto a los fluidos, empleó mezclas de isooctano, Drakeol 15 y Drakeol 33 en varias proporciones para simular hidrocarburos con diferentes propiedades de destilación.

Con el modelo físico anterior, El-Saleh condujo varios experimentos

para diferentes tipos de aceite, saturaciones iniciales de fluidos y tamaños de bache. En este trabajo se trataron de simular, con el modelo matemático que se propone, algunas de las corridas experimentales efectuadas por este investigador. En la Tabla I se presentan los datos empleados en la simulación de algunos de los experimentos.

Para llevar a cabo esta simulación se dividió el medio poroso - donde se inyecta el vapor en 40 celdas de 0,1 pies de longitud cada una, y en los estratos adyacentes se superpuso una malla de 600 celdas cuadradas de 0,1 pie por lado (40 en la dirección de las X y 15 en la dirección de las - Y).

Las corridas I y II se hicieron con el fin de investigar la validez del modelo matemático, tratando de reproducir los resultados obtenidos experimentalmente.

La corrida I corresponde al caso de inyección de un bache pequeño de vapor (aproximadamente 20 % del volumen poroso), con una

TABLA I

DATOS UTILIZADOS PARA LA SIMULACION DE LAS DIFERENTES CORRIDAS

DATOS	CORRIDA No.								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Temperatura del vapor, °F	358	358	580	312	400	358	358	358	358
Temperatura del medio poroso, °F	80	80	80	80	80	80	80	80	80
Temperatura del agua de inyección, °F	80	80	80	80	80	80	80	80	80
Ritmo de inyección de calor con el vapor, Btu/hr	986	1650	986	986	986	2000	986	986	986
Velocidad del agua de inyección, pie/hr	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	1.30	2.60	2.00
Porosidad	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398	0.398
Saturación de aceite	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722
Saturación de agua	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278	0.278
Conductividad térmica de los estratos adyacentes, Btu/hr-pie-°F	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50
Difusividad térmica de los estratos adyacentes, pie ² /hr	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428	0.0428
Calor específico de los estratos adyacentes, Btu/lb-°F	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
Densidad de los estratos adyacentes, lb/pie ³	167	167	167	167	167	167	167	167	167
Densidad de los sólidos de la formación productora, lb/pie ³	167	167	167	167	167	167	167	167	167
Densidad del aceite, lb/pie ³	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5
Densidad del agua, lb/pie ³	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4	62.4
Calor específico de los sólidos de la formación productora, Btu/lb-°F	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
Calor específico del aceite, Btu/lb-°F	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
Calor específico del agua, Btu/lb-°F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Espesor de la formación productora, pie	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.33
Ancho de la formación productora, pie	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333
Duración de la etapa de inyección de vapor, horas	1.68	2.29	1.68	1.48	1.39	0.52	1.68	1.68	2.63
Número de celdas invadidas durante la inyección de vapor.	9	18	5	10	7	9	9	9	9

temperatura de 358 °F, que se inyecta en un medio poroso saturado con - -
72.2 % de aceite y 27.8 % de agua.

En la primera columna de la Tabla 1 se listan los datos empleados en la simulación de esta corrida. El gasto promedio de calor inyectado al cuerpo durante la etapa de inyección de vapor (986 BTU/hr), se calculó previamente con el método de Marx y Langenheim¹⁷, de tal manera que se pudiera inyectar el bache deseado de vapor en un tiempo de aproximadamente 1.6 horas. Por razones de exactitud del procedimiento empleado, este tiempo resultó de 1.68 horas. Para calcular la distribución de temperaturas durante la etapa de inyección de agua con la ecuación (11), se utilizó un incremento de tiempo $\Delta t = 0.05$ horas.

En las figuras 2 y 3 se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del modelo matemático en el cálculo de la distribución de temperaturas y de los ritmos de pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes. En la figura 2 se incluyen también las distribuciones de temperaturas obtenidas por El-Saleh tanto teórica como experimentalmente. Debido a que este investigador definió una temperatura adimensional como $T_D = (T^* - T_y) / (T_s - T_y) -$

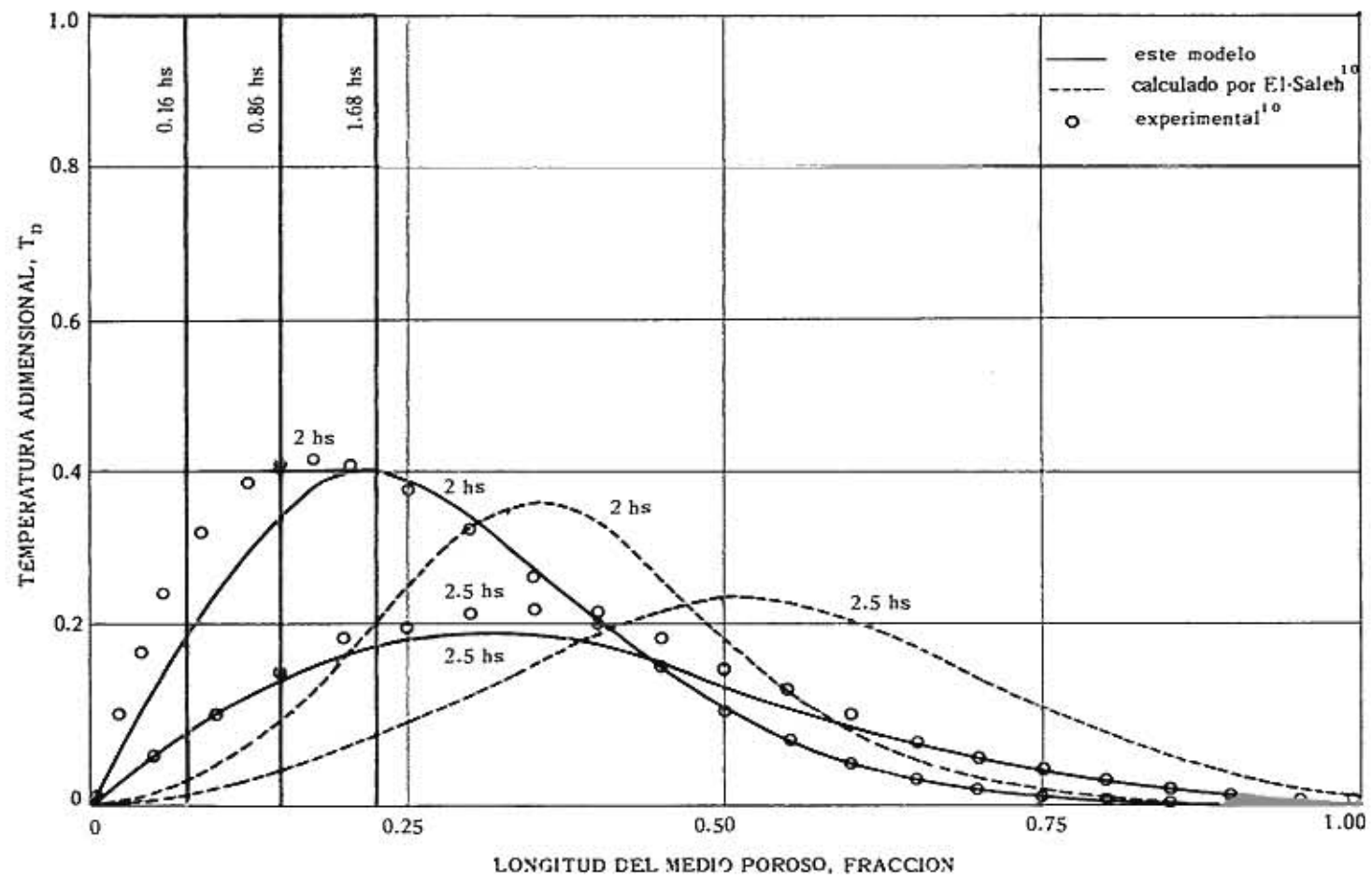


Fig. 2.- Distribución de temperaturas en la formación productora para la corrida 1.

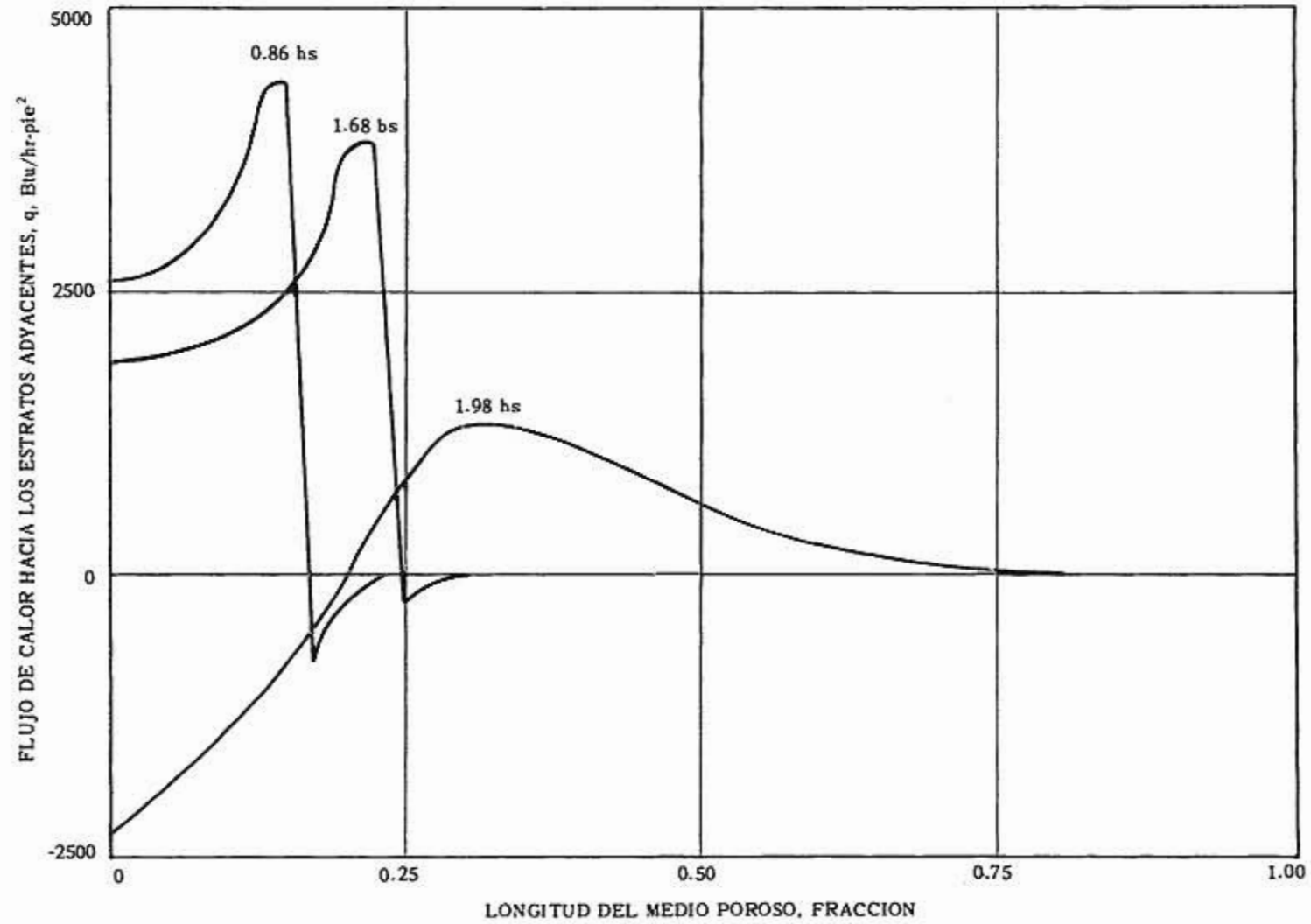


Fig. 3.- Pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora, para la Corrida I.

y publicó sus resultados para esa temperatura, en este trabajo se presentan en la misma forma para poder hacer comparaciones.

Esa figura muestra el comportamiento típico de un proceso de esa naturaleza. En primer lugar se observa que el ritmo de avance del frente del vapor es decreciente y que al iniciar la inyección de agua la temperatura en la zona invadida originalmente por vapor cae bruscamente. Al principio se forma un perfil de temperaturas en forma de "meseta" con una temperatura casi constante para esa zona. (Esta propiedad se nota mejor cuando se inyectan baches grandes de vapor). Esa forma del perfil de temperaturas corresponde a un período de transición en el cual el bache de vapor se está disipando en el agua inyectada, cuya duración termina cuando desaparece la forma de meseta en el perfil de temperaturas.

A medida que transcurre el tiempo se percibe una difusión de energía a ambos lados del banco de agua caliente que se formó durante el período de transición. Este banco de agua caliente se va enfriando conforme avanza dentro del medio poroso.

La figura 3 muestra la variación, con el tiempo y la distancia, del ritmo de pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes. Se observa que

durante la inyección de vapor el flujo de calor en un mismo punto de la zona invadida disminuye con el tiempo. Por otro lado, en esa misma etapa de inyección, se crea un gradiente en el ritmo de pérdidas de calor que va creciendo a medida que se avanza a partir de la cara de inyección, hasta alcanzar un máximo en el frente del vapor. Más allá de este punto existe una declinación brusca en el flujo de calor hacia los estratos adyacentes. En el caso del modelo matemático que se presenta, los resultados obtenidos señalan -- una recuperación de calor en los puntos inmediatamente adelante del frente de vapor, representada por la parte negativa de la curva de flujo de calor. Esta forma de la curva se debe a que el modelo matemático sólo considera flujo horizontal de calor en los estratos adyacentes, mientras que en la formación productora supone una función escalón para la distribución de temperaturas.

Al terminar la inyección de vapor e iniciar la de agua fría, se invierte el intercambio de calor entre la formación productora y sus estratos adyacentes, en las partes cercanas a la cara de inyección, lo que queda representado por la parte negativa de la curva correspondiente a 1.98 horas, de la figura 3.

El flujo vertical de calor depende, obviamente, de la distribución de temperaturas en los estratos adyacentes. Las figuras 4 y 5 muestran

como varía la temperatura en esa zona en las diferentes etapas del proceso. - Durante la inyección de vapor se crea una onda de calor que avanza tanto -- horizontal como verticalmente, dando lugar, entre otras, a las isothermas que se presentan en la figura 4, cuya forma depende preponderantemente de la posición del vapor en la formación productora.

Al iniciar la etapa de inyección de agua, las zonas más calientes de los estratos adyacentes (porciones más cercanas al punto de inyección) empiezan a enfriarse paulatinamente, dando origen a la formación de un "banco de temperaturas" que se va enfriando a medida que transcurre el tiempo, - (ver figura 5).

En la corrida II se simuló el desplazamiento de aceite con un bache de vapor de aproximadamente el 50% del volumen poroso. En las figuras 6 y 7 se exponen los resultados obtenidos con el modelo matemático para el comportamiento térmico del sistema y se comparan con los de El-Saleh.

EFFECTO DE LA TEMPERATURA DEL VAPOR.

Para investigar el efecto de la temperatura del vapor en el comportamiento térmico del sistema se simularon cuatro corridas variando la temperau

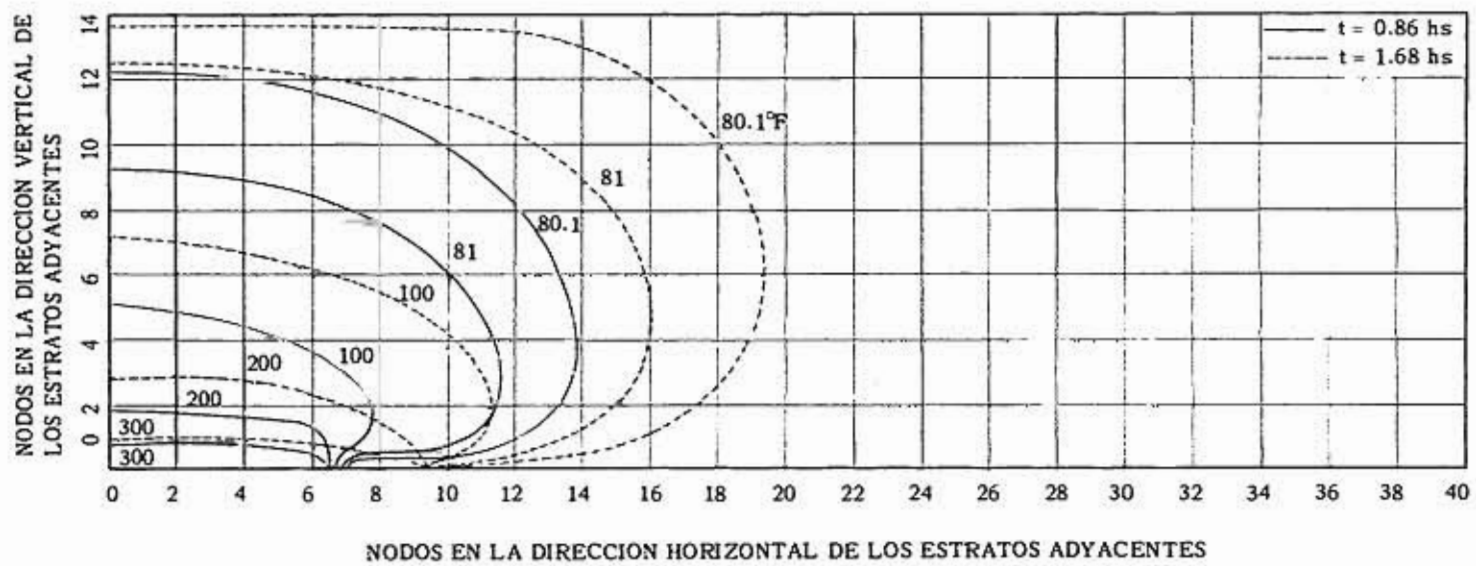


Fig. 4.- Distribución de temperaturas en los estratos adyacentes durante inyección de vapor, para la corrida 1.

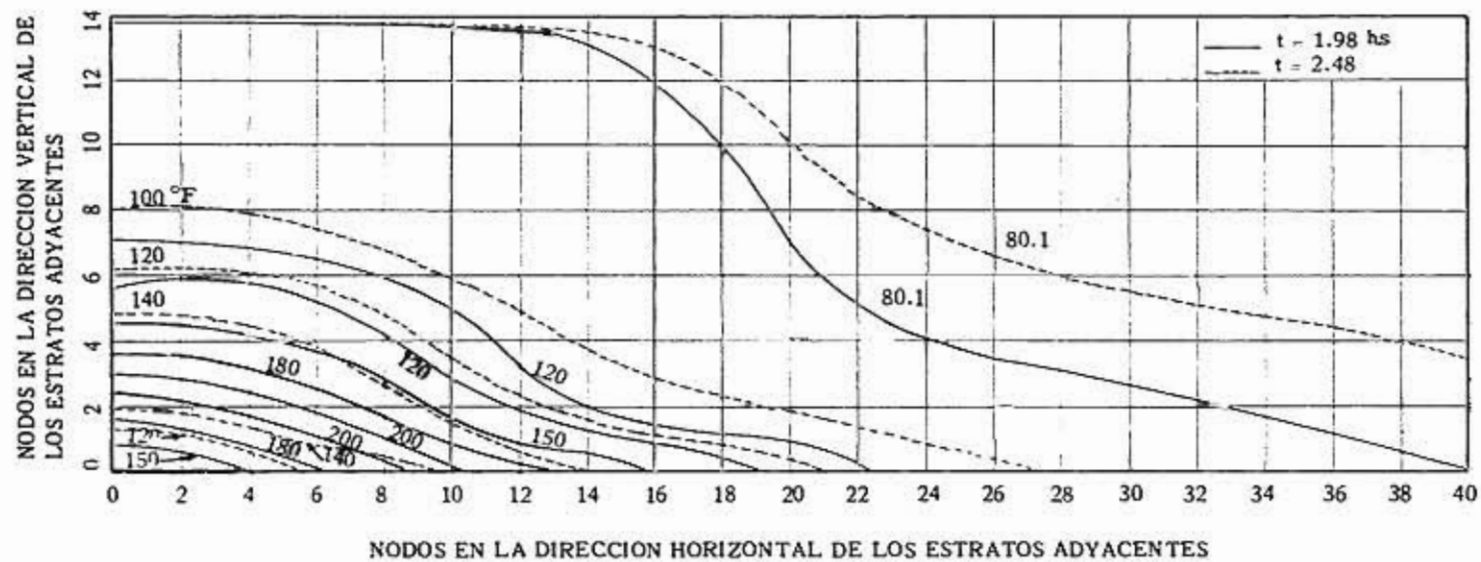


Fig. 5.- Distribución de temperaturas en los estratos adyacentes durante la inyección de agua, para la corrida 1.

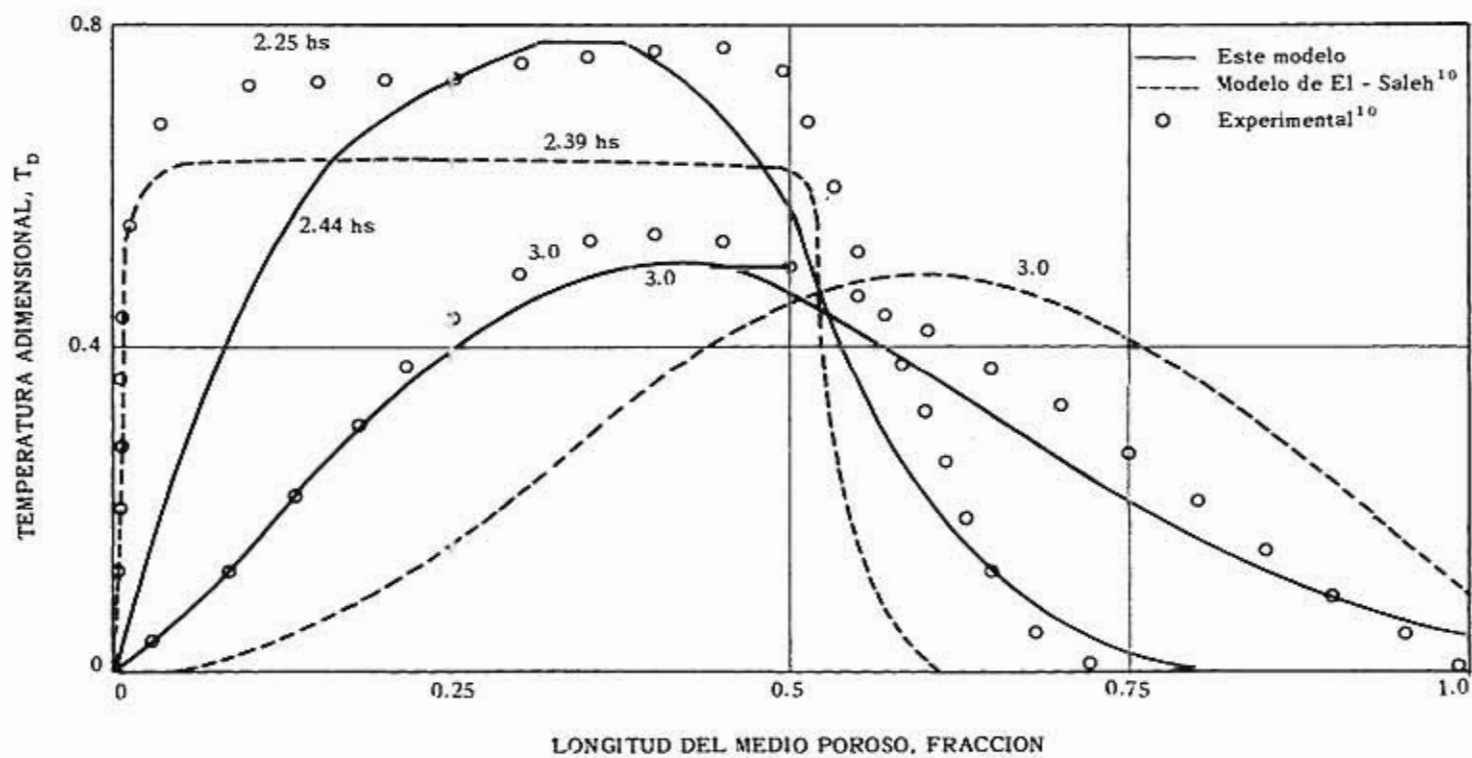


Fig. 6.- Distribución de temperaturas en la formación productora para la corrida II.

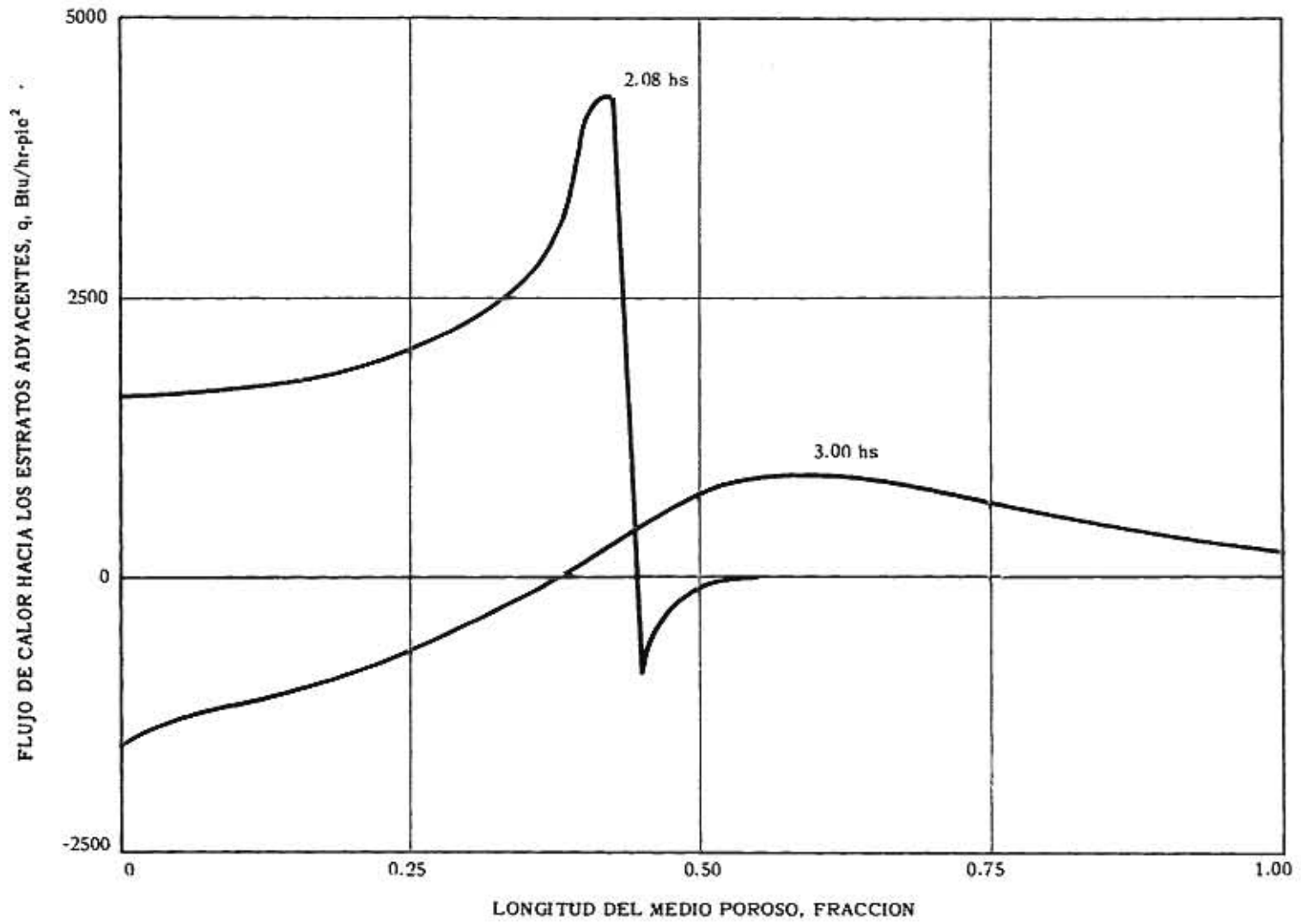


Fig. 7.- Pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora, para la corrida II.

tura del bache de 312 a 580 °F y permaneciendo constantes las demás variables que intervienen en el proceso. Los datos utilizados en estas simulaciones son los correspondientes a las corridas I, III, IV y V de la tabla I . Los resultados obtenidos para la distribución de temperaturas y las pérdidas de calor, se presentan en las figuras 8, 9 y 10.

Debe hacerse notar en primer lugar que para un mismo ritmo de inyección de calor, (986 BTU/hr. en este caso), se requiere más tiempo para calentar, a la temperatura del vapor, un cierto volumen poroso, a medida que aumenta la temperatura del vapor. Por ejemplo, para una temperatura del bache de 312°F se calculó un tiempo de 0.64 horas para calentar seis celdas del medio poroso a esa temperatura, y este tiempo aumentó a 0.85 y 1.07 horas, conforme la temperatura del vapor se incrementó a 358 y 400 °F respectivamente.

En la figura 8 se comparan las distribuciones de temperaturas que se calcularon para cada caso después de 18 minutos (0.30 horas) de haber iniciado la inyección agua. En los últimos renglones de la tabla I están anotadas las duraciones de las etapas de inyección de vapor para cada corrida y el número de celdas invadidas por el vapor durante esos periodos.

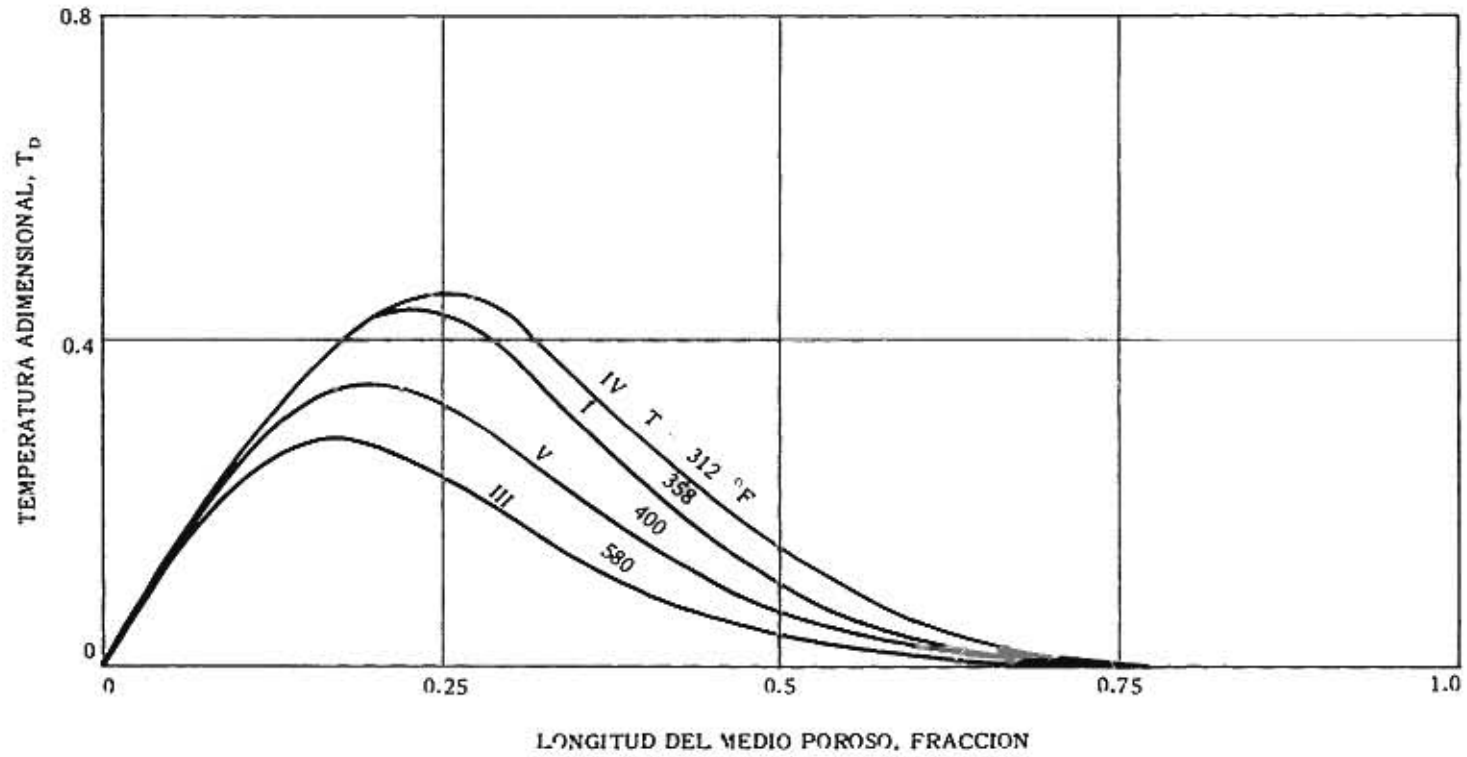


Fig. 8.- Efecto de la temperatura del vapor en la distribución de temperaturas adimensionales de la formación productora, 18 minutos después de iniciada la inyección de agua. Corridas I, III, IV y V.

En la figura citada se aprecia que para un mismo tiempo después de haber iniciado la inyección de agua, la temperatura adimensional máxima de la onda de calor es menor a medida que aumenta la temperatura del bache de vapor. Sin embargo esto no sucede siempre para el caso de temperaturas reales. En la figura 9 se observa que recién iniciada la inyección de agua, (0.05 hr. después de terminar la inyección de vapor), el valor máximo de la temperatura en el pico se alcanzó con la corrida V en la cual se utilizó vapor de 400°F, comparado con los valores obtenidos para las corridas I y IV donde se empleó vapor a 358 y 312°F, respectivamente. Para tiempos grandes de inyección de agua no se puede hacer ninguna generalización al respecto ya que al comparar algunos casos como los de las corridas I y V, cuyos resultados obtenidos para media hora después de iniciar la inyección de agua se presentan graficados en la figura 9; se observa que para ese tiempo se obtiene una temperatura mayor en el pico para el caso de la corrida I ($T_s = 358^\circ\text{F}$) comparado con el que se obtiene para la corrida V ($T_s = 400^\circ\text{F}$). Sin embargo, esto generalmente no se cumple, teniéndose, en la mayoría de los casos, que a medida que aumenta la temperatura del bache, -- aumenta la temperatura de la onda de calor que se forma durante la inyección de agua. Las distribuciones de temperaturas de las figuras 8 y 9 se encuentran afectadas por las diferentes posiciones del vapor en el medio poroso al terminar su inyección, cuyo efecto se analizará más adelante.

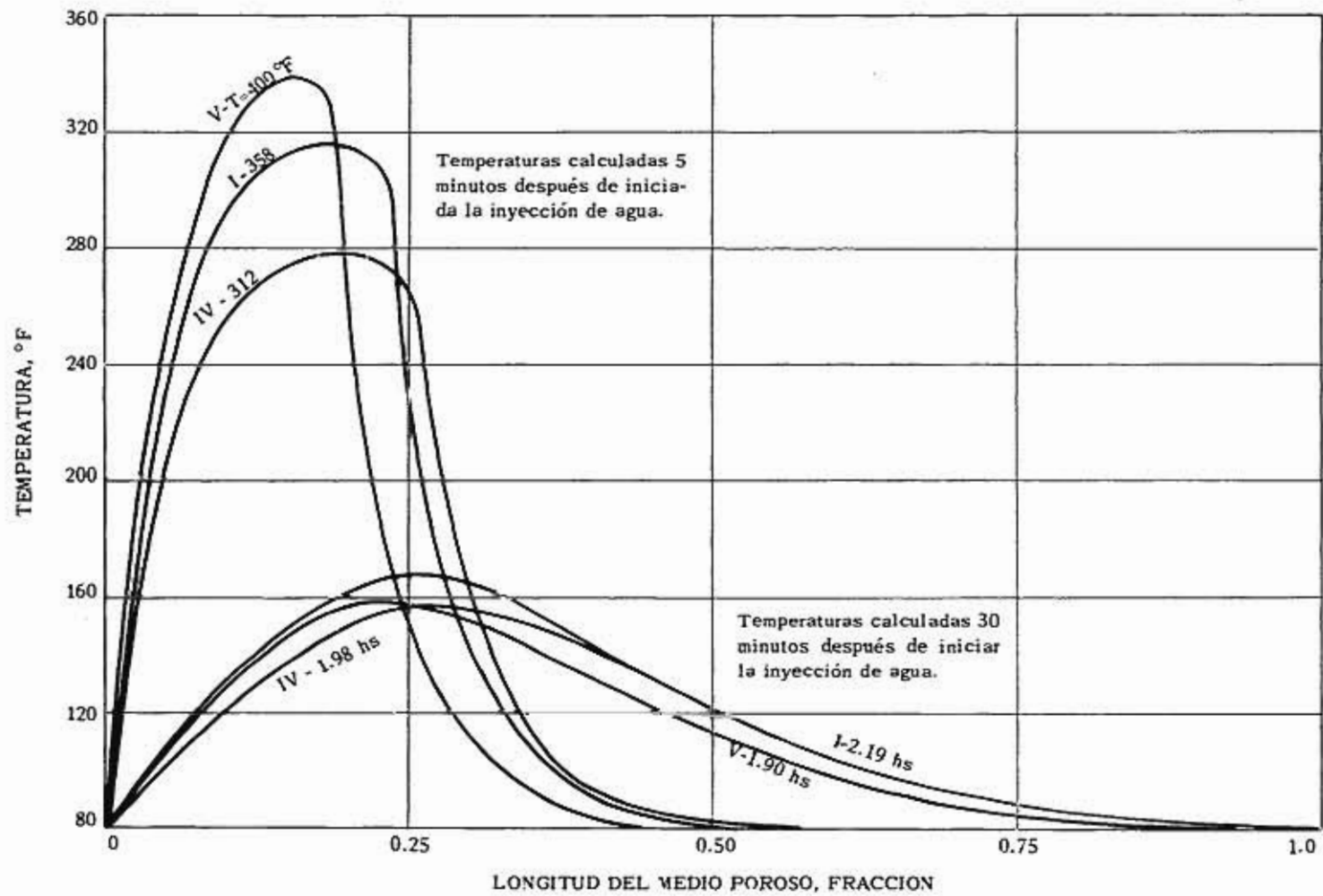


Fig. 9.- Efecto de la temperatura del vapor en la distribución de temperaturas de la formación productora. Corridas I, IV y V.

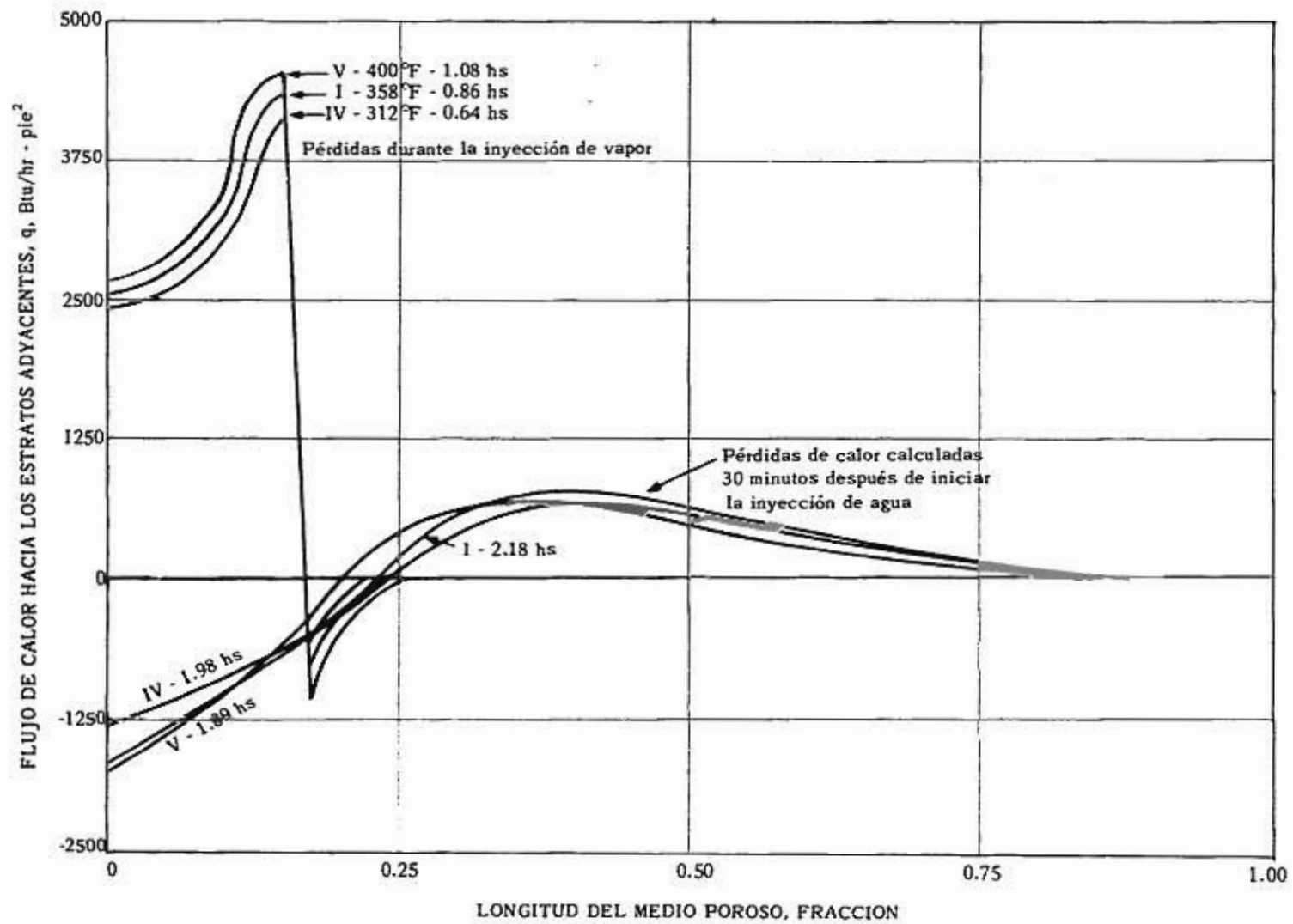


Fig. 10.- Efecto de la temperatura del vapor en las pérdidas de calor. Corridas I, IV y V.

Respecto a las pérdidas de calor de la formación productora hacia los estratos adyacentes, se puede concluir que durante la etapa de inyección de vapor el flujo de calor es mayor a medida que aumenta la temperatura del bache; pero el ritmo de recuperación de este calor durante la inyección de agua es también mayor para ese caso, principalmente en las partes cercanas a la cara de inyección. En la figura 10 se presenta gráficamente la variación en el flujo vertical de calor durante los periodos de inyección de vapor y de agua fría para diferentes condiciones de operación.

EFFECTO DEL TAMAÑO DEL BACHE DE VAPOR

La figura 11 muestra las distribuciones de temperaturas calculadas con las corridas I y II para tiempos de 0.3 y 0.8 horas después de haber iniciado la inyección de agua.

En la corrida I se ha simulado la inyección de un bache de vapor a 358°F el cual al cabo de 1.68 horas ha invadido nueve celdas del medio poroso. El gasto de inyección de vapor es tal que trae consigo la inyección de calor a un ritmo de 986 BTU/hr, de tal manera que al terminar la inyección del bache se han inyectado 1656 BTU en el medio poroso.

En la corrida II al terminar la inyección del bache de vapor -

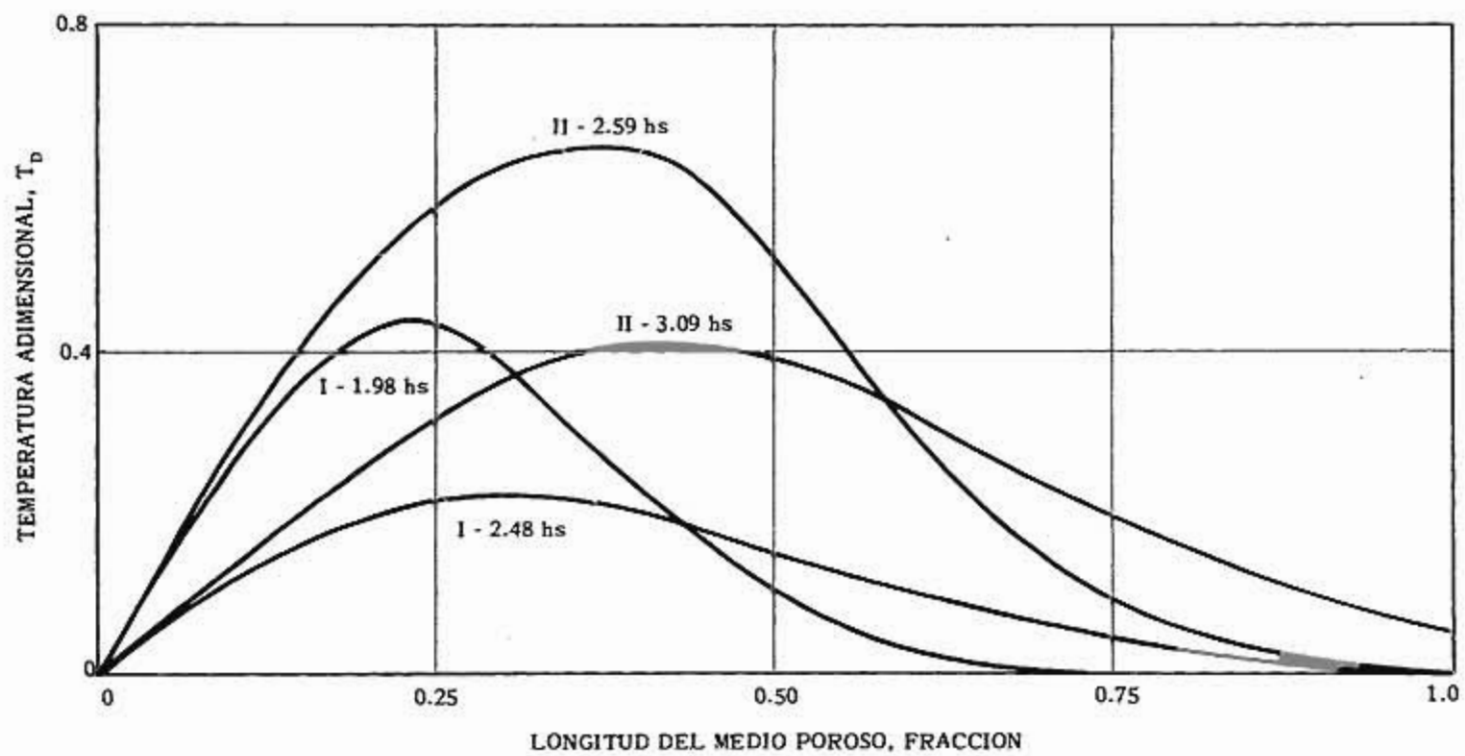


Fig. 11.- Efecto del tamaño del bache de vapor en la distribución de temperaturas. Corridas I y II.

(2.29 horas) se han invadido 18 celdas, habiéndose inyectado hasta ese momento 3778 BTU a un ritmo de 1650 BTU/hr.

El hecho de que se haya inyectado una mayor cantidad de vapor en la corrida II, origina que tanto la temperatura en el pico como la magnitud de la onda de calor que se forma durante la inyección de agua, sean mayores para ese caso. En forma general se concluye que a medida que aumenta el tamaño del bache de vapor, mayor será la temperatura que logra alcanzar la onda de calor que se desplaza en la formación productora cuando se inyecta el agua fría para desplazar ese bache.

EFFECTO DEL RITMO DE INYECCION DE VAPOR

El efecto del gasto de inyección de vapor sobre el comportamiento térmico del sistema se estudió mediante las corridas I y VI, en las cuales se simuló la inyección de vapor a unos gastos tales que dieran lugar a inyecciones de calor de 986 y 2000 BTU/hora, respectivamente.

Es obvio que a un mismo tiempo después de iniciar la inyección de vapor, se invada un volumen de poros más grande cuando este fluido se inyecta más rápidamente. En las corridas I y VI se ha simulado la inyección -

de baches de vapor de la misma magnitud, de tal manera que en ambos casos, al terminar la etapa de inyección de este fluido, se han invadido nueve celdas del medio poroso. En el caso de la corrida I, donde el ritmo de inyección de calor fue de 986 BTU/hr., la invasión de las nueve celdas se logró en -- 1.68 horas, mientras que en la corrida VI, con un ritmo de inyección de calor de 2000 BTU/hr., se alcanzaron las mismas condiciones en sólo 0.52 horas.

Lo anterior dio lugar a que, al terminar el período de inyección de vapor, la distribución de temperaturas en los estratos adyacentes fuera diferente en ambos casos; teniéndose, por supuesto, temperaturas mayores en esa zona en el caso donde la inyección del vapor ha sido más lenta (corrida I). En la corrida VI, por el hecho de que los estratos adyacentes presentan temperaturas más bajas al terminar la inyección de vapor, el ritmo de pérdidas de calor en cada celda es mayor que en la corrida I, como se puede observar en la figura 12. En la misma figura se ve que durante la inyección de agua, el ritmo de recuperación de calor en las zonas cercanas a la cara de inyección (celdas 1 a 9) es mayor en la corrida I, como consecuencia de las temperaturas más altas que se tienen en los estratos adyacentes. Esta mayor recuperación de calor en la corrida I origina que la temperatura máxima de la onda de calor que se genera durante la inyección de agua, sea mayor que en el caso de la corrida VI, como se aprecia en los resultados consignados en la - figura 13.

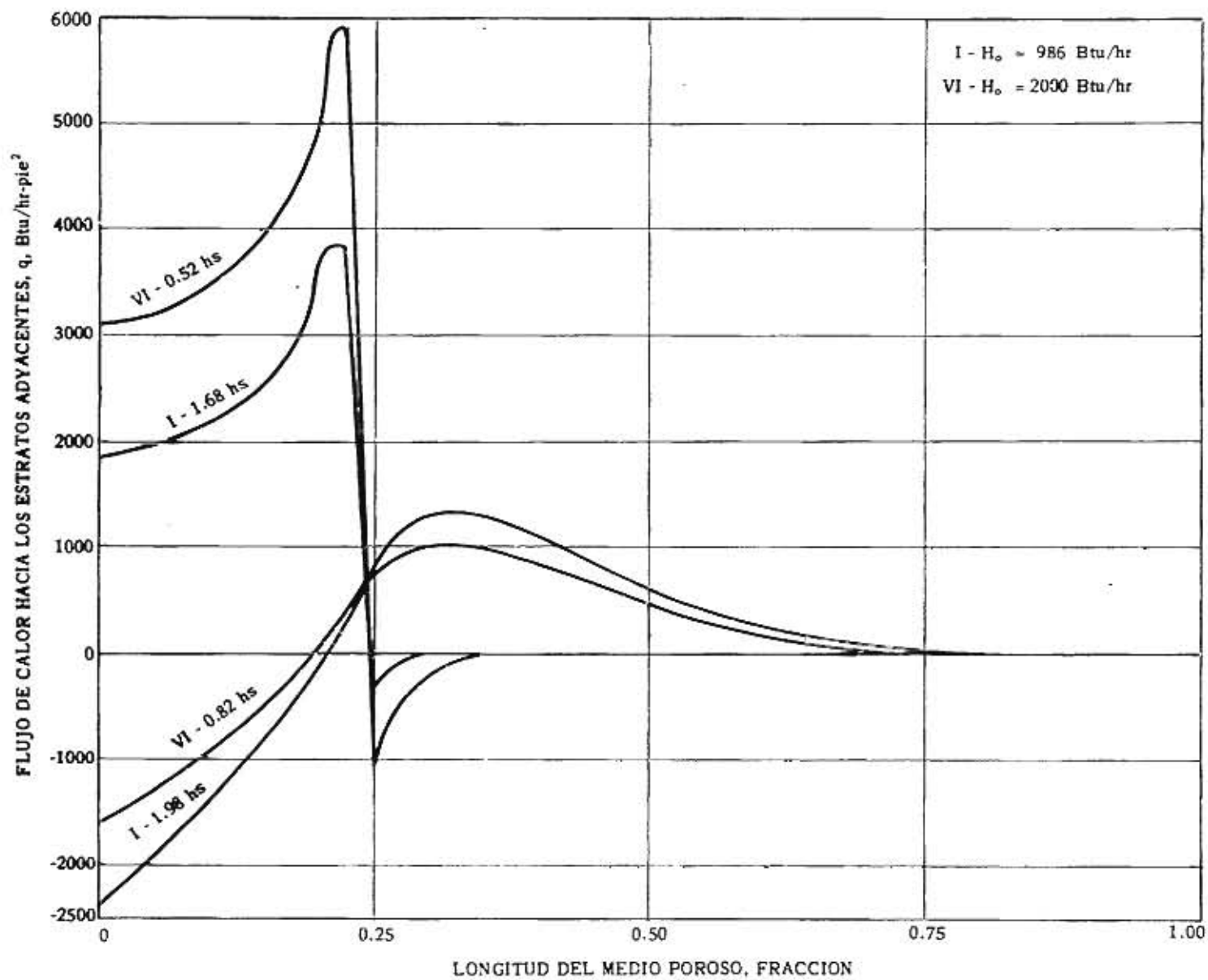


Fig. 12.- Efecto del ritmo de inyección de vapor en las pérdidas de calor. Corridas I y VI.

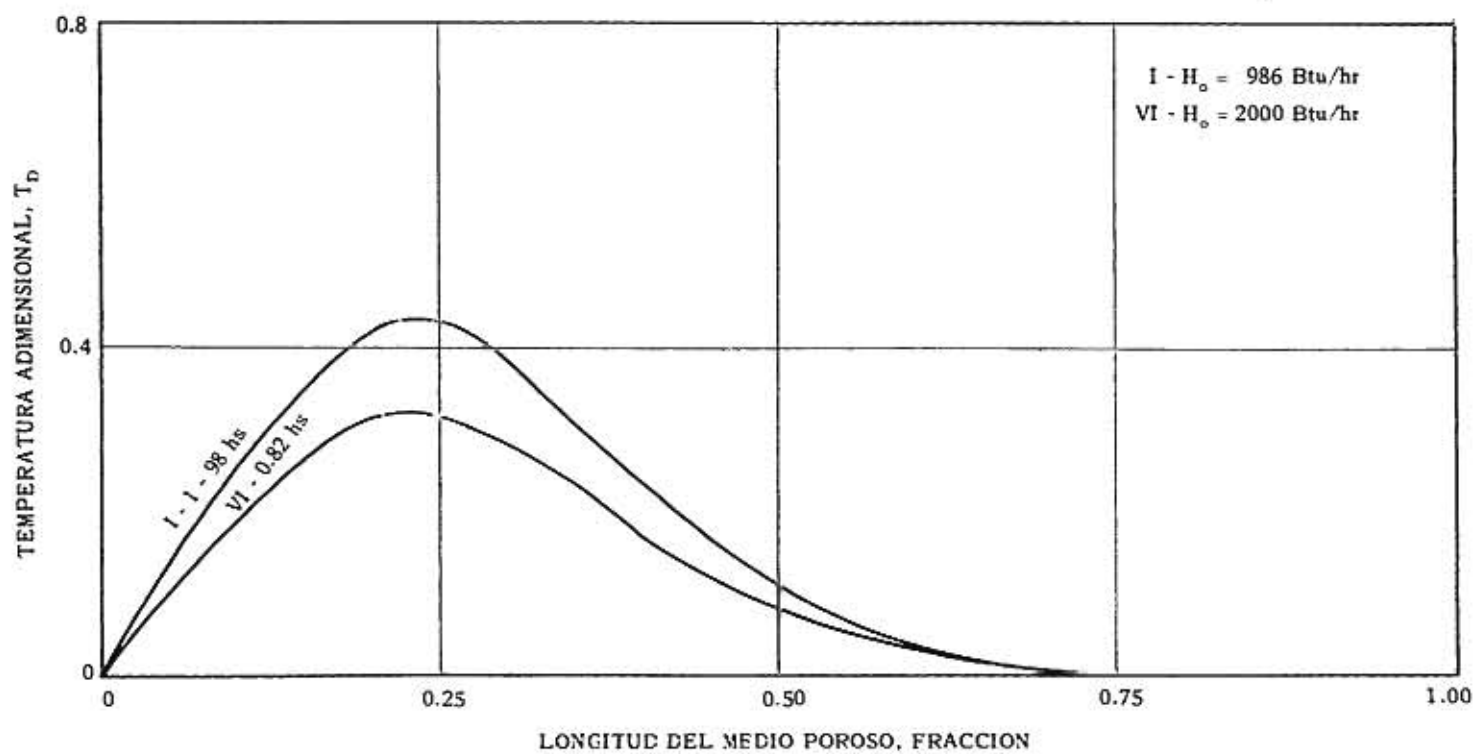


Fig. 13.- Efecto del ritmo de inyección de vapor en la distribución de temperatura, 18 minutos después de iniciada la inyección de agua. Corridas I y VI.

EFFECTO DEL RITMO DE INYECCION DE AGUA

El gasto de inyección de agua fría afecta la distribución de -- temperaturas y por tanto el ritmo de flujo de calor entre la formación productora y sus estratos adyacentes. En el modelo matemático que se presenta en este estudio se trabaja con la velocidad de desplazamiento del agua en vez - del gasto de inyección.

Para analizar el efecto de la velocidad del agua sobre el comportamiento térmico del proceso, se simularon tres corridas utilizando velocidades de 2.0, 1.3 y 2.60 pies / hora (corridas I, VII, y VIII de la tabla 1).

Las figuras 14 y 15 muestran respectivamente las distribuciones - de temperatura y pérdidas de calor calculadas para las corridas citadas, para un tiempo de 1.98 horas contado desde el inicio de la inyección de vapor, (0.3 hr. a partir de la inyección de agua).

En la figura 14 se observa que después de haber inyectado un mismo bache de vapor para todos los casos, la temperatura en el pico de la onda de calor que se forma durante la inyección de agua, es mayor cuando - este fluido se desplaza más lentamente en el medio poroso. Sin embargo, -

la distancia que ha viajado a un tiempo dado esa onda de calor, es más grande si aumenta la velocidad del agua de inyección. En el ejemplo de la figura 14 se aprecia que después de 0.3 horas de haber iniciado la inyección de agua, (la inyección del bache de vapor duró 1.68 horas), la onda de calor ha afectado solamente 25 celdas del medio poroso, cuando la velocidad del agua es de 1.30 pies/hora. Por otro lado, si la velocidad con que fluye el agua aumenta a 2.0 y 2.6 pies/hora, las ondas de calor que se generan afectarán, en ese mismo tiempo, a 31 y 38 celdas respectivamente.

Concordando con lo obtenido en la figura 14, se calcularon las pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes a la formación productora, cuyos resultados se presentan gráficamente en la figura 15. En esta figura se observa que el ritmo de flujo vertical de calor en un punto depende obviamente del valor de su temperatura. Por ejemplo en las partes cercanas a la cara de inyección, donde se está recuperando parte del calor almacenado en los estratos adyacentes, el ritmo de recuperación de calor crece cuando la velocidad del agua de inyección es mayor. Esto se debe a que en esas zonas la formación productora se enfría más rápidamente cuando aumenta la velocidad del agua de inyección, como puede verse en la figura 14. Por otro lado, en las partes alejadas a la cara de entrada (después de la celda No. 14), donde la temperatura es más alta para velocidades mayores, es obvio que se tengan --

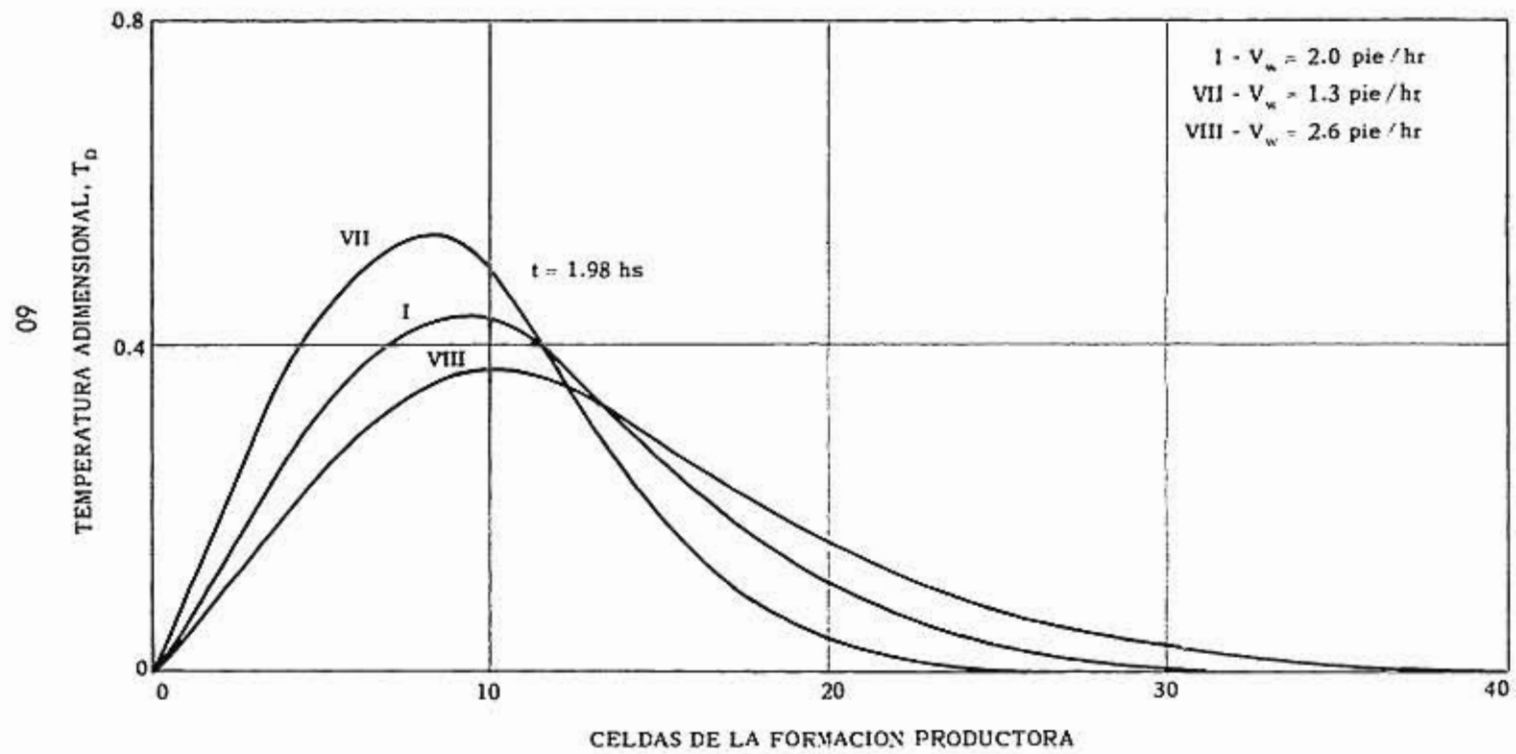


Fig. 14.- Efecto del ritmo de inyección de agua en la distribución de temperaturas. Corridas I, VII y VIII.

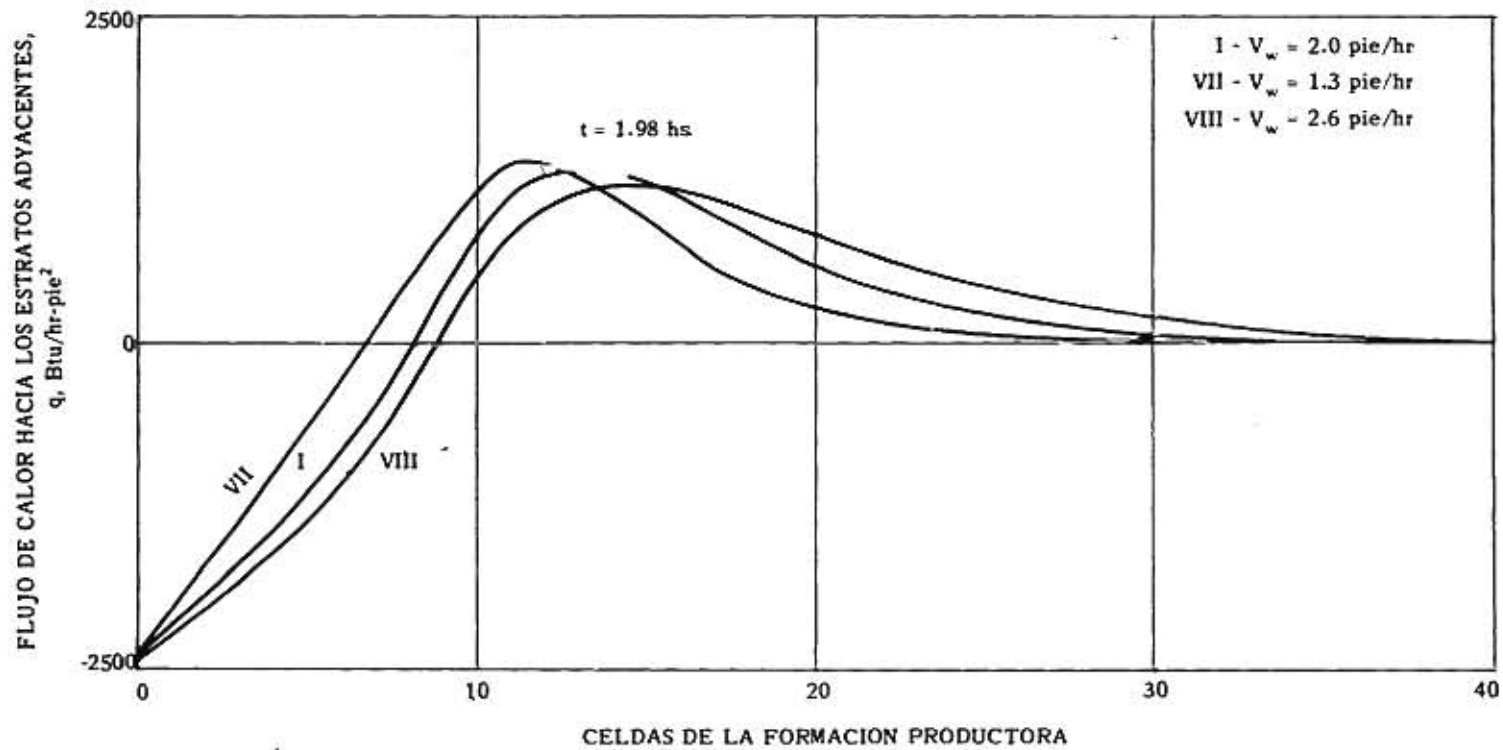


Fig. 15.- Efecto del ritmo de inyección de agua en las pérdidas de calor. Corridas I, VII y VIII.

pérdidas de calor más grandes conforme aumenta la velocidad del agua.

EFFECTO DEL ESPESOR DEL YACIMIENTO

Las figuras 16 y 17 muestran el efecto del espesor de la formación productora en las pérdidas de calor durante las etapas de inyección de vapor y de agua fría, y en la forma de la onda de calor durante esta última etapa.

Los resultados graficados en esas figuras son los obtenidos al simular las corridas I y IX de la tabla I, en las cuales sólo se ha cambiado el espesor de la formación de 0.11 a 0.33 pies.

Dos de las curvas de la figura 16 ($t = 1.68$ y 2.63 hs.) corresponden a las pérdidas de calor calculadas para los dos espesores mencionados al finalizar la inyección del bache de vapor. En ambos casos se ha inyectado el vapor a un mismo gasto hasta lograr la invasión de una misma extensión areal (9 celdas de la formación productora), y obviamente el tiempo necesario para conseguir esa condición será mayor en el caso de la formación con espesor de 0.33 pies. Del análisis de esas curvas se deduce que durante la inyección de vapor el ritmo de pérdidas de calor es mayor en presencia de formaciones más delgadas. Esto se debe a que, para una misma área

invasión, las temperaturas en los estratos adyacentes son más altas cuando es - el espesor de la formación productora es mayor, lo que origina, para ese caso, una reducción en el flujo vertical de calor. Si se hace el análisis para tiempos iguales, contados a partir del inicio de la inyección del bache, se observa que las temperaturas en los estratos adyacentes son más altas cuando la formación productora es más delgada y, por tanto, el ritmo de pérdidas de calor será menor.

En la misma figura se presentan las curvas de pérdidas de calor que se calcularon para un tiempo de 0.3 horas después de iniciar la inyección de agua. De esas curvas se deduce que a medida que aumenta el espesor de la formación, aumenta también el ritmo de recuperación del calor almacenado en los estratos adyacentes, en las partes cercanas a la cara de inyección.

En lo que se refiere a la distribución de temperaturas en la formación productora durante el período de inyección de agua (ver figura 17) se concluye que para tiempos iguales a partir de la iniciación de esta etapa, existe una mayor difusión de la onda de calor cuando la formación es más gruesa, y la temperatura máxima de la onda es mayor, comparada con la que se obtiene en presencia de formaciones delgadas.

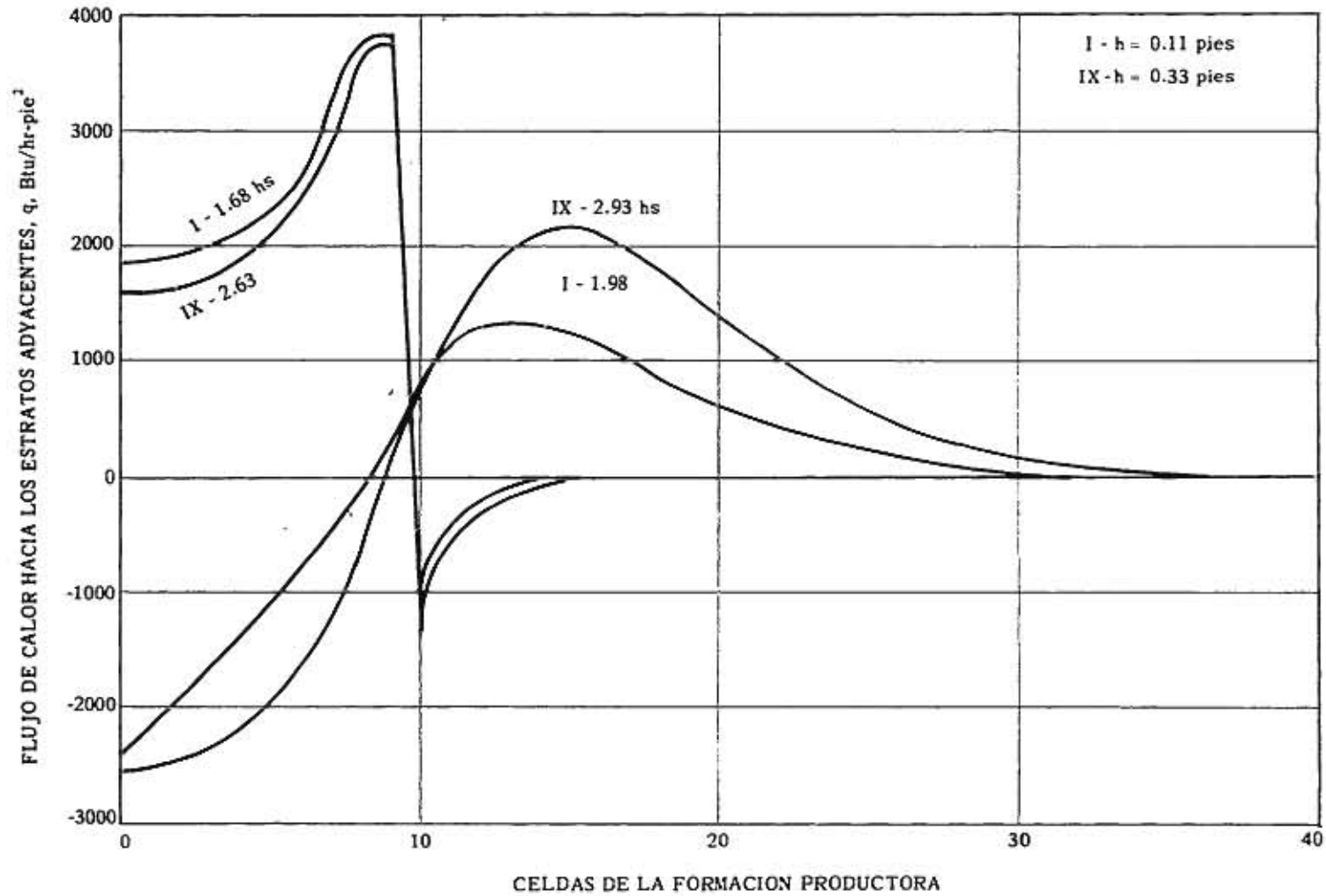


Fig. 16.- Efecto del espesor del yacimiento en las pérdidas de calor. Corridas I y IX.

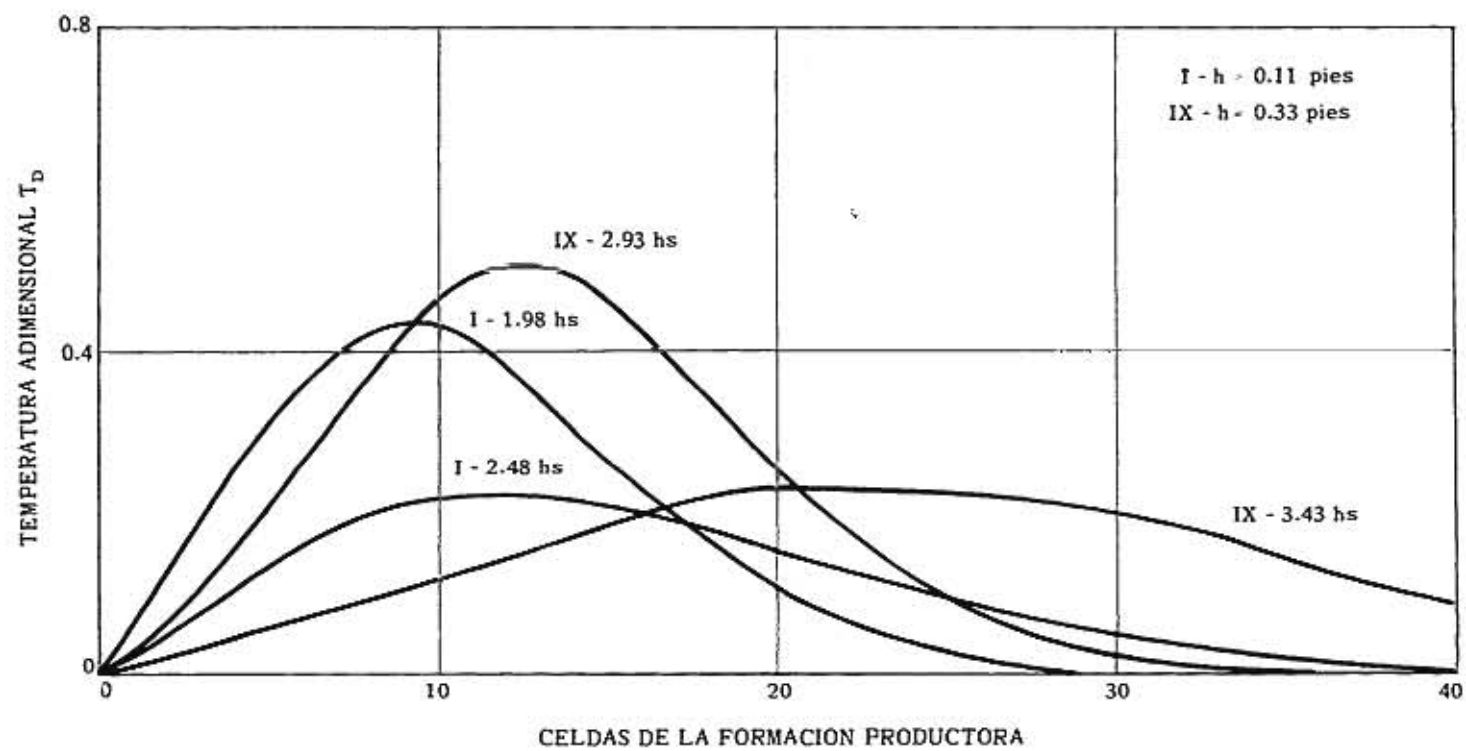


Fig. 17.- Efecto del espesor del yacimiento en la distribución de temperaturas. Corridas I y IX.

E F I C I E N C I A T E R M I C A

La eficiencia térmica en cualquier proceso de inyección de fluidos calientes se obtiene dividiendo el calor que se ha quedado en el yacimiento en un tiempo t , entre el calor total inyectado hasta ese tiempo. Para el caso que se estudia en este trabajo, el cálculo del calor inyectado durante el período de inyección de vapor no ofrece ningún problema, ya que esta cantidad de calor se cuantifica multiplicando, simplemente, el ritmo de inyección de calor, H_0 , (constante en este caso) por el tiempo transcurrido desde el inicio de la inyección. La cantidad de calor almacenada en la formación productora durante esta etapa, se obtiene multiplicando el volumen del yacimiento invadido por vapor, por la capacidad calorífica volumétrica de la roca y los fluidos que contiene y por la diferencia de temperaturas entre el vapor y el yacimiento - antes de calentarlo.

El cálculo de la eficiencia térmica durante el período de inyección de agua difiere un poco del anterior. En este caso, el calor almacenado en el yacimiento se obtiene haciendo una suma del calor contenido en cada -

celda en que se ha dividido la formación productora, el cual a su vez se calcula multiplicando el volumen de la celda por su capacidad calorífica volumétrica y por la diferencia que existe entre la temperatura de la celda y la original del yacimiento. El calor inyectado durante este período se calcula resolviendo, para cada celda, la ecuación de convección-conducción que se utiliza para obtener la distribución de temperaturas en la formación productora, como se ilustra en el paso No. 15 del capítulo "Procedimiento de Cálculo".

La eficiencia térmica del proceso depende, obviamente, de las características del yacimiento y sus estratos adyacentes, y de las condiciones de operación.

C O N C L U S I O N E S

La aplicación del modelo matemático desarrollado en este trabajo conduce a las siguientes conclusiones :

1.- Para un mismo ritmo de inyección de calor se requiere más tiempo para calentar, a la temperatura del vapor, un cierto volumen poroso, a medida que aumenta la temperatura del vapor inyectado.

2.- Para un tiempo dado, medido a partir del inicio de la inyección de agua, la máxima temperatura adimensional que alcanza la onda de calor que se forma durante esa etapa, es mayor a medida que disminuye la temperatura del bache de vapor. Esto no sucede siempre en el caso de temperaturas reales.

3.- El flujo de calor hacia los estratos adyacentes durante la inyección del bache de vapor es mayor a medida que aumenta la temperatura del bache. Durante la inyección del agua fría, el ritmo de recuperación de calor es también mayor en ese caso, sobretodo en las partes cercanas a la cara de inyección.

4.- A medida que aumenta el tamaño del bache de vapor, aumentan la temperatura en el pico y la magnitud de la onda de calor formada durante la inyección de agua.

5.- La distribución de temperaturas en los estratos adyacentes depende del ritmo de inyección de calor. Cuando se ha invadido con vapor un mismo volumen poroso del yacimiento, se tienen temperaturas más altas en los estratos adyacentes en el caso donde la inyección de vapor ha sido más lenta.

6.- La temperatura máxima de la onda de calor que se genera durante la inyección de agua depende de los ritmos de inyección del vapor y del agua. Se puede concluir que esta temperatura disminuye conforme aumentan los ritmos de inyección de estos fluidos.

7.- Para una misma extensión areal invadida por vapor, el ritmo de -- pérdidas de calor durante la inyección de ese fluido aumenta a medida que -- disminuye el espesor de la formación productora. Sin embargo, tomando en cuenta que para invadir una misma área con vapor se consume más tiempo en el caso en que la formación productora es más gruesa; si se hace un análisis -- para tiempos iguales, contados a partir del inicio de la inyección del bache, se observa que las temperaturas en los estratos adyacentes son más altas cuando la formación productora es más delgada y, por tanto, el ritmo de pérdidas de calor será menor.

N O M E N C L A T U R A

A (t)	Area calentada al tiempo t, pie ²
C	Calor específico de la roca de los estratos adyacentes, Btu/lb-°F
C _o	Calor específico del aceite, Btu/lb-°F
C _r	Calor específico de la roca seca, Btu/lb-°F
C _w	Calor específico del agua, Btu/lb-°F
h	Espesor de la formación, pie
H _o	Calor inyectado por unidad de tiempo durante la inyección de vapor, Btu/hr
i, j	Subíndices que indican posición
K	Conductividad térmica de los estratos adyacentes a la formación productora, Btu/hr-pie-°F
L	Longitud de la formación productora, pie
M	Capacidad calorífica volumétrica de la roca saturada, Btu /pie ³ -°F
M _{o,b}	Capacidad calorífica volumétrica del material de las formaciones adyacentes, Btu/pie ³ -°F
n	Superíndice que indica nivel de tiempo

N_x	Número de nodos de la malla en la dirección X
N_y	Número de nodos de la malla en la dirección Y
q	Flujo de calor de la formación productora hacia las formaciones adyacentes o viceversa, Btu/hr-pie ²
q_w	Gasto de inyección de agua, pie ³ /hr
q_x	Flujo horizontal de calor en una celda de los estratos adyacentes, Btu/hr-pie ²
q_y	Flujo vertical de calor en una celda de los estratos adyacentes, Btu/hr-pie ²
Q_{ca}	Calor almacenado en los estratos adyacentes, Btu
Q_y	Calor almacenado en el yacimiento, Btu
S_o	Saturación de aceite
S_w	Saturación de agua
t	Tiempo, hr
T	Temperatura en los estratos adyacentes a la formación productora, °F
T'	Temperatura en la formación productora durante la inyección de agua, °F
T_D	Temperatura adimensional : $T_D = (T' - T_y) / (T_x - T_y)$
T_v	Temperatura del vapor, °F
T_y	Temperatura original del yacimiento, °F
V_w	Velocidad del agua, pie/hr

W	Ancho de las formaciones, pie
X_v	Posición del frente de vapor
α	Difusividad térmica de los estratos adyacentes pie^2/hr
ϕ	Porosidad
ρ	Densidad de la roca de los estratos adyacentes, lb/pie^3
ρ_o	Densidad del aceite, lb/pie^3
ρ_r	Densidad de los granos de la formación productora, lb/pie^3
ρ_w	Densidad del agua, lb/pie^3
ΔQ_{iny}	Calor inyectado en un lapso Δt durante la inyección de agua, Btu
ΔX	Longitud horizontal de una celda, pie
ΔY	Longitud vertical de una celda, pie

R E F E R E N C I A S

1. Perry, G.T., Warner, W. S.: U. S. Patent No. 48584. (Jul-4,1865).
2. Breston, J.N., Pearman, B.R.: "Hot Water Injection Treatment of Wells to Increase Water Intake Rates", Producers Monthly, 17 (11): (Nov, 1953).
3. Bursell, C.G., Taggart, H.J., De Mirjian, H. A.: "Thermal Displacement Tests and Results, Kern River Field, California". Producers Monthly, 30 (9) : 18 (Sept., 1966).
4. Martin, W. L., Dew, J.N., Powers, M. L., Steves, H. B.: "Results of a Tertiary Hot Waterflood in a Thin Sand Reservoir". SPE Paper 1918, presentado en 42nd Annual Meeting of the Soc. of Petrol. Engrs., Houston, Tex. (Oct. , 1967).
5. Dietrich, W. K., Willhite, G.P. : "Steam Soak Results, Sisquac Pool - Cat Canyon Field, Santa Barbara County " Trabajo presentado en Petroleum Industry Conference on Thermal Oil Recovery, Los Angeles, Calif. (Junio, 1966)
6. Willman, B.T., Valleroy, V.V., Runberg, G. W., Cornelius, A. J., Powers, L.W. : "Laboratory Studies of Oil Recovery by Steam Injection," Trans. AIME, 222 : 681 (1961).
7. Edmondson, T.A. : "Effect of Temperature on Water-flooding". Trabajo presentado en Heavy Oil Recovery Seminar, Calgary, Canada (Mayo, 1965).
8. Malofeev, G.E. "Experimental Study of Formation Heating When Injecting Hot Water ", Neft i Gaz, 1 (12) : 77 (1958).

9. Tolstov, L. A. : "Effect of Temperature on Oil Recovery in Waterflooding", *Neftyanoe Khoz.*, 43 (6) : 38 (1965).
10. Mudafar M. El-Saleh. : "A Theoretical and Experimental Study of the Steam Slug Process", Ph.D. Thesis (1968), The Pennsylvania State University.
11. Lawerier, H. A. : "The Transport of Heat in an Oil Layer Caused by Injection of a Hot Fluid," *Appl. Sci. Res.*, 5 (A) : 145 (1955).
12. Malofeev, G.E. : "Calculation of Temperature Distribution in a Formation When Pumping Hot Fluid into a Well", *Neft i Gaz*, 3:59 (1960).
13. Rubinshtein, L. I. : "The Total Heat Losses in Injection of a Hot Liquid into a Stratum ", *Neft i Gaz*, 2:41 (1959).
14. Spillete, A.G. : "Heat Transfer During Hot Fluid Injection into an Oil Reservoir", *J. Can. Petrol*, 4 (4) : 213 (Oct-Dec., 1965).
15. Fayers, F.J. : "Some Theoretical Results Concerning The Displacement of a Viscous Oil by a Hot Fluid in a Porous Medium ", *J. Fluid Mech.*, 13 (1) : 65 (1962)
16. Fournier, K. P.: "A Numerical Method for Computing Recovery of Oil by Hot Injection in a Radial System," *Trans. AIME*, 234 (II).
17. Marx, J. W., Langenheim, R.H. : "Reservoir Heating by Hot Fluid Injection", *Trans. AIME*, 216 (1959).
18. Ramey, H.J., Jr. : "Reservoir Heating by Hot Fluid Injection, Discussion", *Trans. AIME*, 216: 364 (1959).
19. Farouq Ali, S.M.: "Effects of Differences in the Overburden and Underburden on Steamflood Performance", *Prod. Monthly*, 30 (12) : 8 (DIC., 1966).
20. Landrum, B.L., Smith, J.E., Crawford, P. B.: "Calculation of Crude - Oil Recoveries by Steam Injection", *Trans. AIME*, 219 : 250 (1960).

21. Albornoz J.: " Simulación de Inyección Continua de Vapor Después de Estimulación", M.S. Thesis (1969), The Pennsylvania State University.
22. Shuttler, N.D.: "Numerical, Three-Phase Simulation of the Linear Steam Flood Process", Soc. of Petrol. Eng. Journal, 232 (Jun-1969).
23. Ozen A. S., Farouq Ali, S.M.: "An Investigation of the Recovery of the Bradford Crude by Steam Injection", Journal of Pet. Tech., 692(Jun-1969).
24. Baker, P.E., : "An Experimental Study of Heat Flow in Steam Flooding", Soc. of Petrol. Eng. Journal, 89 (Mar. 1969).
25. Myal, E.R., Farouq Ali, S.M., Harding, R.W.: "Recovery of Penn Grade Crude Oils by Steam", Paper SPE 2360 presentado en Eastern Regional Meeting of the SPE of AIME (Nov. 7-8, 1968).
26. Rincón A.C., Díaz Muñoz, J., Farouq Ali, S.M. : "Sweep Efficiency in Steam Flooding", Paper No. 7032 presentado en 21st Annual Technical Meeting of the Petroleum Society of CIM, Calgary, (Mayo 6-8, 1970).
27. Moss, J.T. White, P.D., : "How to Calculate Temperature Profiles in a Water-Injection Well", The Oil and Gas Journal, (Mar 9, 1959).
28. Fazio, P.J., Banderob, L.D. : " Steaming Pays off at Midway-Sunset", The Oil and Gas Journal (Jul. 11, 1966).
29. Long, R.J.: "Case History of Steam Soaking in the Kern River Field, - California", Journal of Pet. Tech. (Sept., 1965).
30. Payne, R.W., Zambrano, G. : "Alternate Steam Injection in Quiriquire". Trabajo presentado en el Simposium de Métodos de Recuperación Térmica de la Sociedad Venezolana de Ingenieros Petroleros, Caracas, Ven. (Mar. 5, 1965).
31. Schenk, L.: " Results of Laboratory Experiments and First Field Tests in Mene Grande, Venezuela", Bataafse Internationale Petroleum Maatschappij N.V. - The Hague. (Ene., 1965).

32. Lieb, H.P.: "Methods of Vapor Recovery in the Permian Basin", Producers Monthly (Mayo, 1966).
33. Long, R.J. : "Techniques of Oil Recovery Using Steam, Kern River Field, California", Paper SPE 1168 presentado en 40th Fall Meeting of the SPE of AIME en Denver, Colo (Oct. 3-6, 1965).
34. Petroleum Publishers Inc. : " Thermal Recovery at Wilmington", California Oil World (Sept., 1966).
35. Dietrich, W.K., Willhite, G.P. : "Steam Soak Results. Sisquoc Pool-Cot Canyon Oil Field. Santa Bárbara County California, Trabajo presentado en Petroleum Industry Conference on Thermal Oil Recovery, Los Angeles, Cal. (Jun. 6, 1966).
36. Teberg, J.A., Kemp, P.B.: " Cyclic Steam Injection Successful at Wilmington", Petroleum Engineer (Abril, 1966).
37. De Haan , H. J., Van Lookeren, J. : "Early Results of the first Large Scale Steam Soak Project in the Tia Juana Field, Western Venezuela". Paper SPE 1913 presentado en 42 nd Annual Fall Meeting of the SPE of AIME, Houston, Tex. (Oct. 1-4, 1967).
38. Bott R.C. : " Cyclic Steam Project in a Virgin Tar Reservoir", Journal of Pet. Tech . (Mayo, 1967).
39. Greer, F.C.: " New Technique Improves Steam Stimulation Completions", Journal of Pet. Tech. (Jul., 1968).
40. Bowman, C.H., Gilbert, S. : " A Successful Cyclic Steam Injection Project in the Santa Bárbara Field, Eastern Venezuela", (Tech. Paper), Journal of Pet. Tech. (Dic., 1969).
41. Boberg, T.C., Lantz, R.B.: "Calculation of the Production Rate of a Thermally Stimulated Well", Journal of Pet. Tech., (Dic. 1966).
42. Martin, J.C. : " A Theoretical Analysis of Steam Stimulation", Journal of Pet. Tech., (Mar., 1967).

43. Davidson, L.B., Miller, F.G., Muller, T.D.: " A Mathematical Model of Reservoir Response During The Cyclic Injection of Steam", Soc. of Petrol. Eng. Journal. (Jun., 1967).
44. Seba, R.D., Jr., Perry, G.E. : " A Mathematical Model of Repeated Steam Soak of Thick Gravity Drainage Reservoirs", Journal of Pet. Tech., (Ene., 1969).
45. Clossman, P.J., Ratliff, N.W., Truitt, N.E.: " A Steam-Soak Model for Depletion-Type Reservoirs", Journal of Pet. Tech., (Jun., 1970).
46. Kuo, C.H., Shain, S.A., Phocas, D.M.: " A Gravity Drainage Model for the Steam-Soak Process", Soc. of Pet. Eng. Journal (Jun., 1970).
47. Bentsen, R.G., Donohue, D.A.T.: "A Dynamic Programming Model of the Cyclic Steam Injection Process", Journal of Pet. Tech. (Dic., 1969).
48. De Swaan Oliva, A. : "Improved Numerical Model of Steam - Soak Process", The Oil and Gas Journal (Ene., 1972).
49. Bogart, A.: "Laboratory Studies of Oil Recovery by Cyclic Steam Injection", PhD Thesis (1967) University of Southern California.
50. Niko, H., Troost, P.J.P.M. : " Experimental Investigation of Steam Soaking in a Depletion-Type Reservoir, Journal of Pet. Tech. (Ago., 1971).
51. Merriam, Edmund S., Squires, Frederick : " Thermal Drive Method for Recovery of Oil", U.S. Patent 2 584 606 (Feb., 5, 1952).
52. Parrish, D.R., Craig, F.F., Jr. : " Method of Forward In Situ Combustion Utilizing Air-Water Injection Mixtures", U.S. Patent 3 171 479 (Mar., 2, 1965).
53. Craig, F.F., Jr., Husak, K.L., Parrish, D.R. : " Method of Forward In Situ Combustion with Water Injection, U.S. Patent 3 196 945 (Jul. 27, 1965).
54. Dietz, D.N., Weijdemans, J. : "Wet and Partially Quenched Combustion", Journal of Pet. Tech. (Abr., 1968).

55. Lagnes, G.L., Beeson, C.M.: " In Situ Combustion Combined with Waterflooding", Pet. Eng. Part. 1 (Jul., 1965).; Part. 2 (Ago., 1965).
56. Smith, M.W. : "Simultaneous Underground Combustion with Water - Injection in the Carlyle Pool, Iola Field, Kansas - A Progress Report", Journal of Pet. Tech. (Ene., 1966).
57. Heinemann, Z. : " Examination of Underground Combustion and Water Injection Employed in Succession ", Banyaszati Lapos (Mar., 1967).
58. Parrish, D.R., Craig F.F., Jr. "Laboratory Study of a Combination of Forward Combustion and Waterflooding - The COFCAW Process", Journal of Pet. Tech. (Jun., 1969).
59. Barakat, H.Z., Clark, J.A. " On The Solution of the Diffusion Equations by Numerical Methods", Trans. AIME 188, 421 (1966).
60. Farouq Ali, S.M. : " Marx and Langenheim's Model of Steam Injection", Producers Monthly (Nov., 1966).
61. Abramowitz, M., Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, (Nov., 1964).
62. Farouq Ali, S. M. "Numerical Reservoir Simulation" Penn State University (1971), 3.23

A P E N D I C E I

DEDUCCION DE LA ECUACION DE MARX Y LANGENHEIM PARA EL CALCULO DEL AREA CALENTADA DURANTE LA INYECCION DEL VAPOR

Para llevar a cabo una predicción de comportamiento de un yacimiento sometido a inyección de vapor es indispensable conocer, además de las características de la roca y de los fluidos que contiene, el fenómeno de difusión de calor en el yacimiento; es decir, se necesita identificar el mecanismo de transferencia de calor imperante, evaluar las cantidades de calor que se aprovechan para calentar la formación productora y el calor que se pierde a los estratos adyacentes, la distribución de temperaturas en el medio poroso y en forma muy especial la magnitud de la región calentada por el vapor.

En este apéndice se presentan en forma detallada los desarrollos matemáticos relacionados con los aspectos citados en el párrafo anterior. Se han tomado como base para estos desarrollos los lineamientos establecidos por S. M. Farouq Ali en la referencia 60.

PERDIDAS DE CALOR HACIA LOS ESTRATOS ADYACENTES A LA FORMACION PRODUCTORA.

Durante la inyección de vapor existe un flujo vertical continuo - de calor hacia los estratos adyacentes, los que pueden considerarse como medios infinitamente gruesos, de una conductividad térmica dada. Es necesario, por - tanto, desarrollar una expresión para las pérdidas instantáneas de calor por uni - dad de área hacia estas formaciones. Para ello, considérese que la cara de - estos cuerpos, en contacto con el yacimiento donde se está inyectando el va - por, se mantienen a una temperatura constante, T_s , (temperatura del vapor) y que su temperatura inicial es la temperatura del yacimiento T_y .

Si se denota como y a las distancias medidas en la dirección - vertical a partir de la cara de la formación productora (donde se inyecta el - vapor); por t al tiempo medido a partir de que se inicia la inyección y $T(y,t)$ a la temperatura a cualquier altura y tiempo dados. Además, si α es la di - fusividad térmica del material de las formaciones adyacentes, dada por

$$\alpha = \frac{K}{M_{ob}} \quad A-1$$

donde

k = conductividad térmica del material de las formaciones adyacentes

Mob = capacidad calorífica del material de las formaciones adyacentes,

la ecuación de conducción de calor que permitirá conocer la distribución vertical de temperaturas en ese medio será :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad A-2$$

cuyas condiciones inicial y de frontera son

$$T(y, 0) = T_y \quad 0 \leq y \leq \infty$$

$$T(0, t) = T_s \quad t > 0$$

las cuales simplemente establecen el hecho de que la temperatura inicial en toda la formación es T_y , y que la temperatura en la frontera con el yacimiento se mantiene constante e igual a la temperatura del vapor, T_s .

SOLUCION DE LA ECUACION DE CONDUCCION DE CALOR.

La solución de la ecuación (A-2) con las condiciones inicial y

de frontera anotadas se obtiene aplicando la transformada de Laplace.

Si se designa por $\Delta T = T(y, t) - T_y$ a la diferencia entre la temperatura en un punto y , a un tiempo t y la temperatura inicial T_y , la ecuación (A-2) se transforma entonces en

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad \text{A-3}$$

con las siguientes condiciones

$$\Delta T(y, 0) = 0 \quad 0 \leq y \leq \infty \quad \text{A-4}$$

$$\Delta T(0, t) = \phi(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (A-3), y haciendo uso de la propiedad de la derivada que establece:

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = S \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$, se obtiene

$$\frac{d^2 \overline{\Delta T}}{dy^2} - \frac{S}{\alpha} \overline{\Delta T} = 0 \quad \text{A-5}$$

Donde $\overline{\Delta T}$ es la función ΔT en el plano de la transformada.

La solución a la ecuación (A-5) que cumple con las condiciones

(A-4) es de la forma :

$$\Delta T = \bar{\Phi}(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} y} \quad (A-6)$$

En este caso la condición de frontera $\Phi(t)$, para $y = 0$, está dada por la constante $(T_s - T_y)$. Por tanto, la transformada $\bar{\Phi}(s)$ será :

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{T_s - T_y}{s} \quad (A-7)$$

Sustituyendo (A-7) en la solución (A-6) se obtiene :

$$\Delta T = \frac{T_s - T_y}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} y} \quad (A-8)$$

Puesto que ⁶¹

$$\mathcal{L}^{-1} \left| \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} y}}{s} \right| = \text{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}} \right)$$

se deduce que

$$\Delta T = (T_s - T_y) \text{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad A-9$$

Donde $\operatorname{erfc}(x)$ es la función error complementaria de x , cumpliéndose que

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Siendo

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{A-10}$$

Por último

$$\Delta T = T(y, t) - T_y = (T_s - T_y) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right]$$

De donde

$$T(y, t) = T_s - (T_s - T_y) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad \text{A-11}$$

Esta es la solución de la ecuación (A-2) con las condiciones inicial y de frontera que definen el problema.

Tomando en cuenta que $\operatorname{erf}(0) = 0$ y $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ se puede comprobar fácilmente que la ecuación (A-10) verifica las condiciones iniciales y -

de frontera de la ecuación (A-2).

$$T(0,t) = T_s - (T_s - T_y) \operatorname{erf}(0) = T_s$$

$$T(y,0) = T_s - (T_s - T_y) \operatorname{erf}(\infty) = T_y$$

Ahora bien, el calor conducido en la dirección vertical en la frontera del yacimiento ($y=0$), a cualquier tiempo será :

$$H_t = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (A-12)$$

Por otro lado, de la ecuación (A-11) y tomando en cuenta la definición de la función error dada por (A-10), se tiene :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - (T_s - T_y) \frac{\partial}{\partial y} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right]$$

si se hace

$$\xi = \frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{erf}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{erf}(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Por tanto

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = - \frac{(T_u - T_v)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad A-13$$

Sustituyendo (A-13) en (A-12) :

$$H_1 = \frac{K (T_u - T_v)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad A-14$$

BALANCE DE CALOR DURANTE LA INYECCION DE VAPOR Y CALCULO DEL AREA CALENTADA

Supóngase que el vapor se está inyectando a un ritmo H_0 (BTU/hr) en una formación que contiene petróleo, limitada arriba y abajo por formaciones infinitamente gruesas con difusividad térmica α . Sea h el espesor del yacimiento y M su capacidad calorífica volumétrica, dada por :

$$M = (1 - \phi) \rho_r C_r + \phi S_w \rho_w C_w + \phi S_o \rho_o C_o \quad A-15$$

Entonces, el ritmo de pérdidas de calor a los estratos adyacentes será :

$$Q = 2 \int_0^{h(t)} H_1 dA \quad A-16$$

donde $A(t)$ es el área calentada al tiempo t .

Las pérdidas de calor a un tiempo u ($u < t$) correspondientes a un elemento dA están dadas por :

$$\frac{K(T_s - T_r)}{\sqrt{\pi \alpha (t-u)}} \quad A-17$$

como $A(t)$ es una función del tiempo :

$$dA = \frac{dA}{du} du \quad A-18$$

De acuerdo con las ecuaciones (A-16), (A-17) y (A-18), las pérdidas totales de calor a los estratos adyacentes a un tiempo t están dadas por

$$Q = 2 \int_0^t \frac{K(T_s - T_r)}{\sqrt{\pi \alpha (t-u)}} \frac{dA}{du} du \quad A-19$$

El calor utilizado en calentar el yacimiento al mismo tiempo t es :

$$U = (\text{Vol. del yacimiento}) (\text{Densidad}) (\text{Capacidad calorífica}) (T_s - T_r)$$

$$U = h \frac{d\Lambda}{dt} M (T_s - T_y)$$

A-20

De acuerdo con lo anterior, puede establecerse el siguiente balance de calor .

Calor inyectado = calor perdida + calor utilizado.

$$H_o = Q + U = 2 \int_0^t \frac{K (T_s - T_y)}{\sqrt{\pi \alpha (t-u)}} \frac{d\Lambda}{du} du + Mh (T_s - T_y) \frac{d\Lambda}{dt} \quad A-21$$

Esta ecuación puede resolverse usando transformadas de Laplace, para la condición inicial $A(0) = 0$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación (A-21) :

$$\frac{H_o}{S} = 2K (T_s - T_y) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha (t-u)}} \frac{d\Lambda}{du} du + Mh (T_s - T_y) \int \frac{d\Lambda}{dt} \quad A-22$$

Debe observarse en la ecuación anterior que la integral

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha (t-u)}} \frac{dA}{du} du$$

es precisamente la convolución de $\frac{1}{\sqrt{t}}$ y $A'(t)$. Por tanto, aplicando el teorema de la convolución en la ecuación (A-22) que dice:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(r)g(t-r)dr \right\} = \mathcal{L} \{ f(t) \} \cdot \mathcal{L} \{ g(t) \}$$

se obtiene lo siguiente:

$$\frac{H_o}{S} = 2K(T_s - T_v) \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} \mathcal{L} \left\{ \frac{dA}{dt} \right\} + Mh(T_s - T_v) \mathcal{L} \left\{ \frac{dA}{dt} \right\} \quad \text{A-23}$$

Dado que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{H_o}{S} = 2K(T_s - T_v) \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} + Mh(T_s - T_v) \mathcal{L} \left\{ \frac{dA}{dt} \right\}$$

De donde :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dA}{dt} \right\} = \frac{\frac{H_0}{T_s - T_y}}{\sqrt{s} \left(\frac{2K}{\sqrt{\alpha}} + Mh \sqrt{s} \right)}$$

Dividiendo entre Mh :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dA}{dt} \right\} = \frac{\frac{H_0}{Mh (T_s - T_y)}}{\sqrt{s} \left(\frac{2K}{Mh \sqrt{\alpha}} + \sqrt{s} \right)} \quad \text{A-24}$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{s} (\sqrt{s} + a)} = \mathcal{L} \left\{ e^{-a^2 t} \operatorname{erfc}(a \sqrt{t}) \right\}$$

se obtiene la siguiente antitransformada de la ecuación (A-24)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{H_0}{Mh (T_s - T_y)} e^{-X^2} \operatorname{erfc}(X) \quad \text{A-25}$$

$$\text{Donde } X = \left[\frac{2K}{Mh \sqrt{\alpha}} \right] \sqrt{t}$$

La solución de esta ecuación para $A(t)$ se obtiene utilizando nuevamente la transformada de Laplace y la propiedad de la derivada que dice:

$$\mathcal{L} \{ f'(t) \} = s \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0)$$

A-26

Aplicando (A-26) en (A-25) y considerando la condición inicial

$$A(0) = 0$$

$$s \mathcal{L} \{ A(t) \} - A(0) = \frac{H_0}{Mh(T_s - T_y)} \frac{1}{\sqrt{s} \left[\frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}} + \sqrt{s} \right]}$$

$$\mathcal{L} \{ A(t) \} = \frac{H_0}{Mh(T_s - T_y)} \frac{1}{s^{3/2} \left[\frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}} + \sqrt{s} \right]}$$

$$\mathcal{L} \{ A(t) \} = \frac{H_0}{Mh \Delta T} \left(\frac{Mh\sqrt{\alpha}}{2K} \right)^2 \frac{\left(\frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}} \right)^2}{s^{3/2} \left[\frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}} + \sqrt{s} \right]} \quad \text{A-27}$$

El área calentada $A(t)$ se obtiene a partir de la antitransformada de la expresión anterior sabiendo que (De Abramowitz y Stegun, pág. 1024)⁶¹

$$\frac{b^2}{s^{3/2}(\sqrt{s} + b)} = \mathcal{L} \left\{ b \frac{2\sqrt{t}}{\pi} - 1 + e^{b^2 t} \operatorname{erfc}(b\sqrt{t}) \right\} \quad \text{A-28}$$

En este caso :

$$b = \frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}}$$

Por tanto :

$$A(t) = \frac{H_0}{Mh\Delta t} \left(\frac{Mh\sqrt{\alpha}}{2K} \right)^2 \left[\frac{2K}{Mh\sqrt{\alpha}} \frac{2\sqrt{t}}{\pi} - 1 + e^{-\frac{4K^2 t}{M^2 h^2 \alpha}} \operatorname{erfc} \left(\frac{2K\sqrt{t}}{Mh\sqrt{\alpha}} \right) \right]$$

Por último, haciendo operaciones se obtiene :

$$A(t) = \frac{H_0 h \lambda}{4K(T_s - T_y)} \left[e^{-\frac{t_D}{\lambda^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{t_D}}{\lambda} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{t_D}}{\lambda} - 1 \right) \right] \quad A-29$$

$\operatorname{erfc} = 1 - \operatorname{erf} =$ función error complementaria

$$t_D = \frac{4 \alpha t}{h^2} \quad \text{tiempo adimensional, (t en horas)}$$

$$\lambda = \frac{M}{M_{ob}}, \quad M_{ob} = \frac{K}{\alpha}$$

La ecuación (A-29) puede escribirse como sigue, si se sustituyen en ella las expresiones anteriores de t_D , λ y M_{ob} .

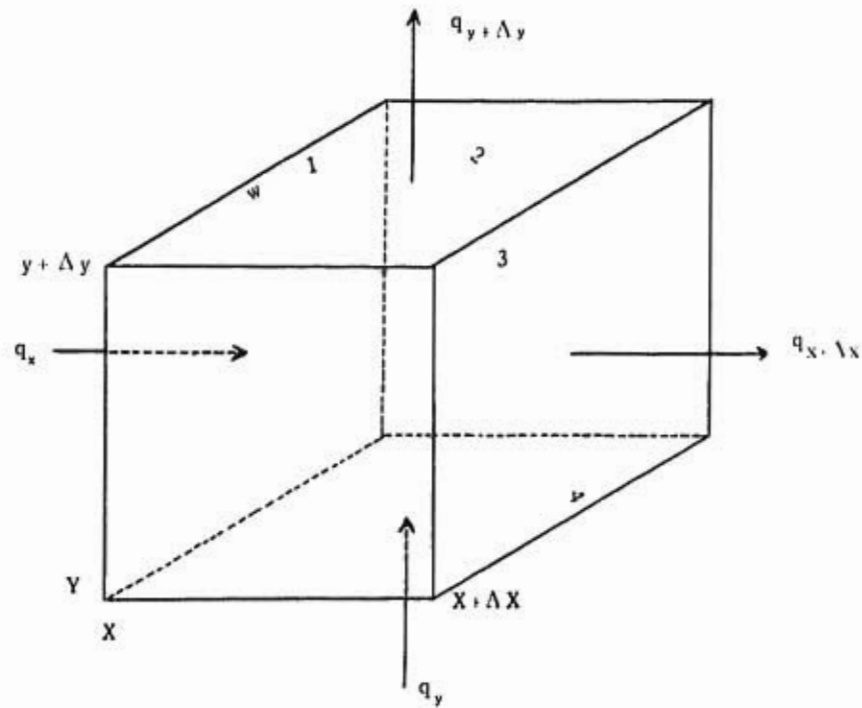
$$A(t) = \frac{H_0 M h \alpha}{4K^2(T_s - T_y)} \left[e^{X^2} \operatorname{erfc}(X) + \frac{2X}{\sqrt{\pi}} - 1 \right]$$

$$X = \frac{2K}{Mh} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{1/2}$$

A P E N D I C E II

DERIVACION DE LA ECUACION GENERAL DE CONDUCCION DE CALOR

La figura que se presenta enseguida corresponde a una celda de los estratos adyacentes a la formación productora, que se ha seleccionado para estudiar el problema de conducción vertical y horizontal de calor en esa zona.



Según la ley de Fourier, la cantidad de calor transferido por conducción por unidad de área es :

$$\text{Dirección } x : \quad q_x = -K_x \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_x ; \quad q_{x+\Delta x} = -K_{x+\Delta x} \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x+\Delta x}$$

$$\text{Dirección } Y : \quad q_y = -K_y \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_y ; \quad q_{y+\Delta y} = -K_{y+\Delta y} \frac{\partial T}{\partial Y} \Big|_{y+\Delta y}$$

Haciendo un balance de calor para un intervalo de tiempo Δt , se puede escribir lo siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calor que entra por las} \\ \text{caras (1) y (4) en el} \\ \text{tiempo } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{calor que sale por las caras} \\ \text{(2) y (3) en el tiempo } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio en el con-} \\ \text{tenido de calor en} \\ \text{el elemento duran-} \\ \text{te } \Delta t \end{array} \right\}$$

$$\text{Calor que entra por la cara 1} = q_x W \Delta Y \Delta t$$

$$\text{Calor que entra por la cara 4} = q_y W \Delta X \Delta t$$

$$\text{Calor que sale por la cara 3} = q_{x+\Delta x} W \Delta Y \Delta t$$

$$\text{Calor que sale por la cara 2} = q_{y+\Delta y} W \Delta X \Delta t$$

$$\text{Cambio en el contenido de calor} = (\Delta X \Delta Y W \rho) C (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

Sustituyendo valores :

$$\begin{aligned} q_x W \Delta Y \Delta t + q_y W \Delta X \Delta t - (q_{x+\Delta x} W \Delta Y \Delta t + q_{y+\Delta y} W \Delta X \Delta t) \\ = (\Delta X \Delta Y W \rho) C. (T_{t+\Delta t} - T_t) \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\Delta X \Delta Y W \Delta t$ se tiene :

$$-\frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta X} - \frac{q_{y+\Delta y} - q_y}{\Delta Y} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Tomando límites cuando $\Delta X, \Delta Y, \Delta t \rightarrow 0$:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial X} - \frac{\partial q_y}{\partial Y} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sustituyendo los valores de q_x y q_y se obtiene, finalmente:

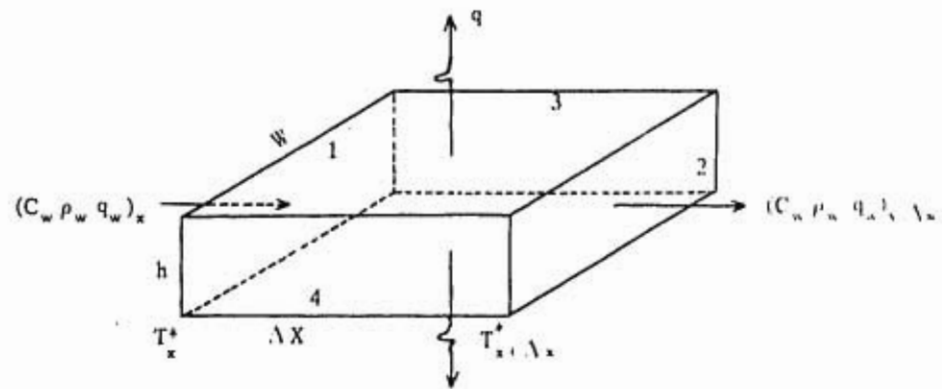
$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ecuación de conducción de calor en dos dimensiones, (ver ecuación 2 en el cuerpo del trabajo)

A P E N D I C E III

DEDUCCION DE LA ECUACION QUE DESCRIBE LA TRANSFERENCIA DE CALOR DURANTE LA INYECCION DE AGUA

La siguiente figura es una representación esquemática de una de las celdas en que se ha dividido la formación productora para estudiar el mecanismo de transferencia de calor durante la etapa de inyección de agua fría.



La ecuación que describe el flujo de calor en el medio poroso en el período de inyección de agua, se obtiene considerando un balance de -

energía en un incremento espacial ΔX , durante un intervalo de tiempo Δt .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calor que entra a} \\ \text{través del área (1)} \\ \text{en el tiempo } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{calor que sale a} \\ \text{través del área (2)} \\ \text{en el tiempo } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo de calor hacia los} \\ \text{estratos adyacentes a tra-} \\ \text{vés de las áreas (3) y (4)} \\ \text{en el tiempo } \Delta t \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio en el contenido de calor} \\ \text{en el elemento durante el tiem-} \\ \text{po } \Delta t \end{array} \right\}$$

$$\text{Calor que entra a través del área (1) durante } \Delta t = (q_w \rho_w C_w T^*)_x \Delta t,$$

$$\text{Calor que sale a través del área (2) durante } \Delta t = (q_w \rho_w C_w T^*)_{x+\Delta x} \Delta t,$$

$$\text{Calor que fluye hacia los estratos adyacentes} \\ \text{a través de las áreas (3) y (4) durante } \Delta t = 2 q W \Delta x \Delta t$$

$$\text{Donde } q = K_y \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{y=0}$$

Cambio en el contenido de calor en el elemento

$$\text{durante el tiempo } \Delta t = (M_w W h \Delta x) (T^*_{t+\Delta t} - T^*_t)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene :

$$[(q_w \rho_w C_w T^*)_x - (q_w \rho_w C_w T^*)_{x+\Delta x} - 2qW\Delta x] \Delta t = (M_w h \Delta x) (T^*_{t+\Delta t} - T^*_t)$$

Dividiendo entre $\Delta X, \Delta t$:

$$\frac{(q_w \rho_w C_w T^*)_{x+\Delta x} - (q_w \rho_w C_w T^*)_x}{\Delta X} - 2q_w = MWh \frac{T^*_{t+\Delta t} - T^*_t}{\Delta t}$$

Tomando lmites cuando $\Delta X, \Delta t \rightarrow 0$:

$$-\frac{\partial}{\partial X} (q_w \rho_w C_w T^*) - 2q_w = MWh \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

Si q_w, ρ_w, C_w, M son constantes se obtiene :

$$-q_w \rho_w C_w \frac{\partial T^*}{\partial X} - 2q_w = MWh \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

Dividiendo entre Wh y tomando en cuenta que $V_w = \frac{q_w}{Wh}$

se deduce, finalmente, la siguiente expresión que corresponde a la ecuación (3) de este trabajo.

$$-V_w C_w \rho_w \frac{\partial T^*}{\partial X} - \frac{2q}{h} = M \frac{\partial T^*}{\partial t}$$

A P E N D I C E I V

ECUACIONES PARA CALCULAR LA TEMPERATURA DE LOS NODOS EN LAS FRONTERAS DONDE NO EXISTE FLUJO DE CALOR

Es bien sabido que una frontera cerrada, o frontera de cero flujo, puede tratarse desde el punto de vista matemático de dos maneras diferentes: por medio de nodos de reflexión o haciendo la transmisibilidad igual a cero en la frontera. Aun cuando la técnica de reflexión da mayor aproximación, es frecuentemente más conveniente usar la técnica de transmisibilidad cero⁶².

En el caso de flujo de calor en un medio poroso, donde la distribución de temperaturas se obtiene a partir de la solución de la ecuación de difusión de calor, representada por las ecuaciones (6) y (8) de este trabajo; las condiciones de cero flujo de calor en la frontera se simulan como se indica enseguida :

En la ecuación (6)

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{E_{ij}^- - E_{ij}} [B_{ij} T_{i,j-1}^{n+1} + D_{ij} T_{i-1,j}^{n+1} - (E_{ij}^+ + E_{ij}) T_{i,j}^n + F_{ij} T_{i+1,j}^n + H_{ij} T_{i,j+1}^n]$$

se hace, para los nodos de la frontera izquierda ($i = 1$) :

$$E_{ij}^- = \frac{K_{x,i-1/2,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{K_{y,i,j-1/2}}{(\Delta Y)^2} - \frac{K}{(\Delta X)^2} \quad (K_x = K_y = K; \Delta X = \Delta Y)$$

$$D_{ij} = \frac{K_{x,i-1/2,j}}{(\Delta X)^2} = 0$$

De donde :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[-\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n) + \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad \text{IV-1}$$

Para los nodos de frontera derecha ($i = N_x$) :

$$E_{ij}^+ = \frac{K_{x,i+1/2,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{K_{y,i,j+1/2}}{(\Delta Y)^2} - \frac{K}{(\Delta X)^2}; \quad (K_x = K_y = K; \Delta X = \Delta Y)$$

$$F_{ij} = \frac{K_{x,i+1/2,j}}{(\Delta X)^2} = 0$$

$$E_{ij}^- = \frac{2K}{(\Delta X)^2}$$

$$B_{ij} = D_{ij} = H_{ij} = \frac{K}{(\Delta X)^2}$$

Por tanto

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{i,j}^n \right] \quad \text{IV-2}$$

Tomando como base la ecuación (8) :

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{E_{ij} + E_{tij}} \left[B_{ij} T_{i,j-1}^n + D_{ij} T_{i-1,j}^n + (E_{ij} + E_{tij}) T_{i,j}^n + F_{ij} T_{i+1,j}^{n+1} + H_{ij} T_{i,j+1}^{n+1} \right]$$

se deducen las siguientes expresiones para los nodos de la frontera :

Frontera izquierda ($i = 1$) :

$$T_{1,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{1,j-1}^n + T_{1+1,j}^{n+1} + T_{1,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{1,j}^n \right] \quad \text{IV-3}$$

Frontera derecha ($i = N_x$) :

$$T_{N_x,j}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t}} \left[\frac{K}{(\Delta X)^2} (T_{N_x,j-1}^n + T_{N_x-1,j}^n + T_{N_x,j+1}^{n+1}) - \left(\frac{2K}{(\Delta X)^2} + \frac{\rho C}{\Delta t} \right) T_{N_x,j}^n \right] \quad \text{IV-4}$$