

0209 15

01190

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

RESPUESTA DINAMICA DE PILOTES DE PUNTA SUJETOS A SISMOS
=====

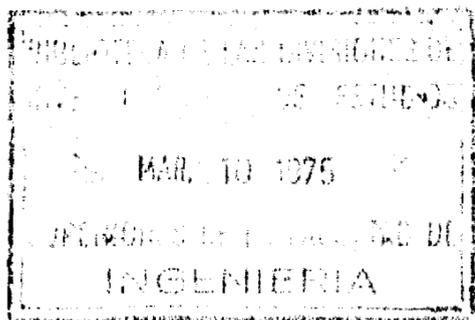
T E S I S

Que para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERIA

P r e s e n t a:

JOSE RAUL FLORES BERRONES



2-14625

México, D. F.

1 9 7 4

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Abstracto

RESPUESTA DINAMICA DE PILOTES DE PUNTA SUJETOS A SISMOS

Se revisaron los resultados teóricos y experimentales referentes a la respuesta de estructuras piloteadas sujetas a movimientos sísmicos, y se analizaron los factores que intervienen en los fundamentos de la dinámica del pilote. En este análisis se encontró que existen dos frecuencias que, en ausencia de amortiguamiento, producen resonancia: 1) la frecuencia natural del sistema suelo-pilote, y 2) la frecuencia fundamental del estrato de suelo.

Se estudiaron las implicaciones que resultan de aplicar teorías estáticas al diseño sísmico de pilotes, y se encontró que el más grave error que se comete es no tomar en cuenta la acción ejercida por el movimiento dinámico del suelo sobre los pilotes.

Se establecieron los rangos en los cuales los pilotes se pueden considerar flexibles, y aquellos donde la presencia de los mismos influye considerablemente en la respuesta dinámica de la estructura que soportan.

Utilizando la Teoría de Tajimi, se determinó el amortiguamiento radial y la llamada masa efectiva de suelo en pilotes hincados dentro de un medio elástico. Finalmente, se utilizó el método del elemento finito para estudiar la efectividad que se logra al tratar de disminuir, o anular las fuerzas laterales, mediante encajonamiento de la cimentación dentro del suelo.

Agradecimientos

El autor agradece profundamente al profesor Robert V. Whitman la dirección del presente trabajo. Su continuo apoyo y supervisión, en cada parte de la tesis se recordará siempre con gran afecto.

El autor agradece también la gran ayuda que el profesor José --- Roesset le proporcionó en varias partes de la tesis.

Un agradecimiento muy particular se debe a las autoridades de la Secretaría de Obras Públicas por su ilimitado apoyo en los estudios doctorales del autor. En especial, se dan las gracias al se ñor Secretario Luis E. Bracamontes, al señor Subsecretario Rodolfo Félix Valdés, y a los señores Ingenieros Juan Durán Romano y Gustavo del Río San Vicente.

También un agradecimiento especial al señor Ingeniero José Rivera y a la señorita Magdalena Francis de la Asociación Mexicana - de Caminos, por su valiosa ayuda para que esta tesis se pudiera - efectuar en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Se agradece muy sinceramente al señor Dr. Sergio Covarrubias, su desinteresada cooperación prestada durante los trabajos de adaptación de la tesis al español. Gracias a sus sugerencias se hicieron notables mejoras al trabajo original escrito en inglés.,

Este trabajo no hubiera podido efectuarse sin la ayuda económica proporcionada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología -- (1971-1972), y por la Organización de los Estados Americanos - - (1972-1974). El autor está profundamente agradecido con estas - dos Organizaciones.

Por su apoyo y entusiasmo, se agradece la valiosa colaboración - de la Doctora Beatriz Cervantes.

CONTENIDO

| | PAGINA |
|---|--------|
| Título | I |
| Abstracto..... | II |
| Agradecimientos..... | III |
| Tabla de Contenidos..... | IV |
| Lista de Figuras..... | IX |
| Lista de Tablas..... | XV |
| CAPITULO I.- INTRODUCCION | |
| 1.1 <u>Antecedentes</u> | 1 |
| 1.2 <u>Propósito y Alcance de la Tesis</u> | 2 |
| CAPITULO II.- REVISION DE LA LITERATURA | |
| 2.1 <u>Introducción</u> | 4 |
| 2.2 <u>Uso de las Teorías Estáticas</u> | 4 |
| 2.2.1 Teoría de Winkler..... | 5 |
| 2.2.2 Comportamiento de pilotes lateral- mente cargados trabajando dentro de un medio elástico..... | 6 |
| 2.3 <u>Uso de las Teorías Dinámicas</u> | 8 |
| 2.3.1 Método basado en fuerzas que se --- aplican en la cabeza de los pilotes | 8 |
| 2.3.2 Métodos basados en análisis dinámi- cos del sistema pilote-suelo..... | 10 |
| 2.4 <u>Datos Experimentales</u> | 15 |
| 2.4.1 En Modelos..... | 15 |

| | |
|---|----|
| a) Pruebas estáticas | |
| b) Pruebas dinámicas | |
| 2.4.2 En Casos Históricos..... | 20 |
| 2.5 <u>Conclusiones</u> | 24 |
| CAPITULO III.- TEORIAS DE TAJIMI Y DE OGATA-KOTSUBO | |
| 3.1 <u>Introducción</u> | 42 |
| 3.2 <u>Teoría de Tajimi</u> | 42 |
| 3.3 <u>Teoría de Ogata-Kotsubo</u> | 47 |
| 3.4 <u>Discusión</u> | 52 |
| 3.5 <u>Conclusiones</u> | 55 |
| CAPITULO IV.- APLICACION DE LA TEORIA DE OGATA-KOTSU BO AL ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DE - UN PILOTE | |
| 4.1 <u>Introducción</u> | 61 |
| 4.2 <u>Análisis de las Condiciones de Resonancia.</u> | 61 |
| 4.3 <u>Límites de Flexibilidad y Efecto del Des-- plazamiento del Suelo</u> | 64 |
| 4.4 <u>Efecto de la Masa Soportada por el Pilote.</u> | 71 |
| 4.5 <u>Conclusiones</u> | 72 |
| CAPITULO V.- SOLUCION SIMPLIFICADA PARA EL ANALISIS- DINAMICO DE UN PILOTE | |

| | | |
|--|---|-----|
| 5.1 | <u>Introducción</u> | 90 |
| 5.2 | <u>Separación de Efectos</u> | 90 |
| 5.3 | <u>Solución Simplificada</u> | 92 |
| CAPITULO VI.- APLICACION DE LA TEORIA DE TAJIMI PARA DETERMINAR EL AMORTIGUAMIENTO RADIAL | | |
| 6.1 | <u>Introducción</u> | 99 |
| 6.2 | <u>Estimación del Amortiguamiento Radial y Ma sa Efectiva</u> | 100 |
| 6.3 | <u>Conclusiones</u> | 106 |
| CAPITULO VII.- GRUPOS DE PILOTES | | |
| 7.1 | <u>Introducción</u> | 114 |
| 7.2 | Respuesta de Pilotes en Grupo..... | 114 |
| CAPITULO VIII.- EFECTO DEL ENCAJONAMIENTO EN LA RES- PUESTA DINAMICA DE CIMENTACIONES PI- LOTEADAS | | |
| 8.1 | <u>Introducción</u> | 119 |
| 8.2 | <u>Método de Kausel para Determinar la Res- puesta de Pilotes Aislados</u> | 120 |
| 8.3 | <u>Método de Waas para Analizar la Respuesta- de Grupos de Pilotes y el Efecto de Encajo namiento en Cimentaciones Piloteadas</u> | 124 |
| 8.4 | <u>Conclusiones</u> | 127 |
| CAPITULO IX.- CONCLUSIONES..... | | |
| | Nomenclatura..... | 141 |

| | |
|---|-----|
| Lista de Referencias..... | 148 |
| Apéndice II-1..... | 153 |
| Factores que intervienen en el Análisis de Pilotes Sujetos a Fuerzas Sísmicas Horizontales. | |
| Apéndice III-1..... | 170 |
| Desplazamiento de Pilotes Usando la Ecuación -- Tridimensional de Onda (Teoría de Tajimi) | |
| Apéndice III-2..... | 184 |
| Determinación de los Coeficientes A, B, C y D - de la Ecuación Obtenida en el Modelo de Winkler . (Teoría de Ogata - Kotsubo) | |
| Apéndice IV-1..... | 190 |
| Derivación de las Frecuencias Naturales del Sistema Pilote - Suelo | |
| Apéndice IV-2 | 197 |
| Determinación de la Respuesta de Un Pilote Sin-Carga Vertical Sujeto a Sismo | |
| Apéndice V-1..... | 204 |
| Determinación de los Coeficientes A_1 , A_2 , A_3 , - y A_4 Para el Modelo de Winkler con Excitación - Desde la Cabeza del Pilote | |
| Apéndice VII-1 | 209 |

Aplicación de los Resultados del Análisis de -
Un Pilote Individual a un Grupo de Pilotes

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Diagramas de Cuerpo Libre del Suelo y el Pilote..... | 27 |
| 2.2 | Relación de Fuerza-Desplazamiento en el Modelo de Hayashi..... | 27 |
| 2.3 | Curvas Típicas para Obtener los Parámetros K y α de Hayashi..... | 28 |
| 2.4 | Efecto de los Pilotes en la Respuesta de Una Estructura Durante el Temblor Taft, 1952,N.S.. | 29 |
| 2.5 | Modelo del Sistema Pilote-Suelo (Sugimura, --- 1972)..... | 30 |
| 2.6 | Modelo del Sistema Pilote - Suelo - Estructura (Sugimura, 1972)..... | 31 |
| 2.7 | Configuración de la Estructura y el Suelo para Diferentes Tiempos Relativos al Inicio del Temblor El Centro, 1940 N.S. (Sugimura,1972)..... | 32 |
| 2.8 | Modelo Tipo Armadura (Minami y Sakurai,1973).. | 33 |
| 2.9 | Reacción del Suelo VS.Deflexión del Pilote en Pruebas de Campo..... | 34 |
| 2.10 | Módulo del Suelo VS. Profundidad en Pruebas de Campo..... | 35 |
| 2.11 | Comparación Entre los Momentos Flexionantes Experimentales y Teóricos..... | 36 |
| 2.12 | Comparación de los Espectros de Respuesta Registrados y Calculados, en un Edificio de 5 Niveles con Pilotes..... | 37 |
| 2.13 | Influencia de la Resistencia a la Penetración del Pilote Respecto a la Extensión de Daños... | 38 |

| | | |
|--------|--|----|
| 2.14 | Rango de la Resistencia a la Penetración en la Zona muy Dañada..... | 39 |
| 2.15a) | Espectros Normalizados de Aceleración para: ... Suelos Blandos Estratificados | |
| | b) Espectros Normalizados de Aceleración Para Cimentaciones Piloteadas en Suelos Blandos | 40 |
| 2.16a) | Espectros de Aceleración Normalizada de Cimentaciones Rígidas en Suelos Blandos..... | |
| | b) Espectros de Aceleración Normalizada Para Rocas y Suelos Duros | 41 |
| 3.1 | Modelo Tipo Winkler con Resortes Laterales.... | 56 |
| 3.2 | Datos del Problema Usado como Ejemplo..... | 57 |
| 3.3 | Amplitud de Desplazamientos en el Extremo Superior del Pilote Usando las Teorías de Tajimi y Ogata..... | 58 |
| 3.4 | Respuesta del Pilote Alrededor de la Frecuencia Natural del Sistema Suelo-Pilote cuando se Aplican las Teorías de Tajimi y Ogata-Kotsubo. | 59 |
| 3.5 | Comparación Entre las Teorías de Tajimi y de Yamamoto-Seki, para las frecuencias naturales del Sistema Suelo-Pilote, como función del módulo de Young del Suelo..... | 60 |
| 4.1 | Efecto de la Masa del Pilote y de la Resistencia del Suelo, en la Frecuencia Natural del Sistema Para Un Cilindro de 2 metros de Diámetro. | 76 |
| 4.2 | Influencia de la Resistencia del Suelo en la Frecuencia Natural del Sistema Suelo-Pilote, -- Cuando la Masa Soportada es igual a la Máxima- | |

| | | |
|------|--|----|
| | Permisible de Acuerdo con el Reglamento de Los Angeles, California..... | 77 |
| 4.3 | Efecto de la Longitud de un Pilote y la Resistencia del Suelo en la Frecuencia Natural del Sistema Suelo-Pilote..... | 73 |
| 4.4 | Influencia de la Relación Diámetro/Longitud de un Pilote en la Frecuencia Natural del Sistema Suelo-Pilote..... | 79 |
| 4.5 | Valores del Parámetro Adimensional "Relación de Masas", en Función de la Longitud del Pilote..... | 80 |
| 4.6 | Valores de la Frecuencia Adimensional del Sistema Suelo-Pilote, en Función de la Relación de Rigideces..... | 81 |
| 4.7 | Comparación de las Amplitudes de Desplazamiento en la Superficie del Suelo entre un Pilote sin Carga Vertical y el Suelo (Cuando $\bar{\lambda}=200$). | 82 |
| 4.8 | Comparación de las Amplitudes de Desplazamiento en la Superficie del Suelo entre un Pilote sin Carga Vertical y el Suelo (Cuando $\bar{\lambda} = 20$). | 83 |
| 4.9 | Comparación de las Amplitudes de Desplazamiento en la Superficie del Suelo entre un Pilote sin Carga Vertical y el Suelo (cuando $\bar{\lambda}=4.86$) | 84 |
| 4.10 | Comparación de las Amplitudes de desplazamiento en la Superficie del Suelo entre un Pilote sin Carga Vertical y el Suelo (cuando $\bar{\lambda}=0.16$). | 85 |
| 4.11 | Efecto de la Frecuencia de Excitación en la Amplitud del Desplazamiento del Pilote sin Carga a diferentes profundidades..... | 86 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.12 | Efecto de la Frecuencia de Excitación en la Amplitud del Desplazamiento del Pilote a Diferentes profundidades..... | 87 |
| 4.13 | Amplitudes de Desplazamiento en la Cabeza del Pilote, en Función de la Relación de Frecuencias ω / ω_g | 88 |
| 4.14 | Amplitud de Desplazamiento del Pilote en Función de la Relación de Frecuencias ω / ω_g , para Diferentes Cargas Verticales en el Pilote Descrito en la Fig. 3.2..... | 89 |
| 5.1a) | Variación de la Amplitud de Desplazamientos con la Frecuencia, en un Pilote sin Carga Axial..... | 95 |
| b) | Variación de los Momentos Flexionantes Máximos con la Frecuencia, en Un Pilote Sin Carga Axial..... | 95 |
| 5.2a) | Variación de la Amplitud de Desplazamientos con la Frecuencia, en un Pilote Sujeto a una Carga Dinámica Aplicada en la Cabeza..... | 96 |
| b) | Variación de los Momentos Flexionantes Máximos con la Frecuencia, en un Pilote Sujeto a Una Fuerza Dinámica Aplicada en la Cabeza..... | 96 |
| 5.3a) | Amplitudes Totales de Desplazamiento y su Comparación con la Suma de los Efectos Causados por el Movimiento Dinámico del Suelo y los de la Superestructura..... | 97 |

| | | |
|-----|---|-----|
| b) | Momentos Flexionantes Totales Máximos y su Comparaci3n con la suma de los Efectos Causados - por el Movimiento Dinámico del Suelo y los de la Superestructura..... | 98 |
| 6.1 | Relaci3n de la Amplitud de Desplazamientos en Funci3n de la Frecuencia, para Un Sistema Amortiguado de Masa-Resorte..... | 108 |
| 6.2 | Fuerzas Actuando en la Masa Sobre la Cabeza -- del Pilote..... | 109 |
| 6.3 | Variaci3n de la Funci3n f_1 con la Relaci3n de Frecuencias..... | 110 |
| 6.4 | Variaci3n de las Funciones g_1 y g_2 Con respecto a la Relaci3n de Frecuencias..... | 111 |
| 6.5 | Valores de $(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}$ En Funci3n de la Relaci3n de Frecuencias..... | 112 |
| 6.6 | Variaci3n del Amortiguamiento Equivalente(h_s) - en Funci3n de la Relaci3n de Amortiguamientos - (D_r)..... | 112 |
| 6.7 | Valores de la Funci3n χ_2 | 113 |
| 7.1 | Relaci3n de los Desplazamientos Inicial y Final En Pilotes Cargados Lateralmente Con Fuerzas Estáticas..... | 118 |
| 8.1 | Representaci3n del Estrato de Suelo de Acuerdo con Kausel (1974), Para analizar la Respuesta - Dinámica de Una Estructura Cilíndrica..... | 128 |
| 8.2 | Malla utilizada para Obtener El Modelo de Elemento Finito Tridimensional, que proporciona la Misma Respuesta Estática a Cargas Laterales -- que el Método de Chang..... | 129 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 8.3 | Desplazamiento del Suelo y el Pilote Cuando La Frecuencia de Excitación en La Base es de ---- 1 rad/seg..... | 130 |
| 8.4 | Desplazamiento del Suelo y el Pilote Cuando La Frecuencia de Excitación en la Base del Estrato es de 3 rad/seg..... | 131 |
| 8.5a) | Determinación del Area Equivalente (A_1), y el Módulo al Cortante Equivalente (G_1)..... | 132 |
| | b) Malla Empleada en el Modelo de Elemento Finito Con Deformación Plana, Para Un Grupo de 6 Pilotes @ 6 D..... | 132 |
| 8.6 | Desplazamientos obtenidos Usando el Método del Elemento Finito Con Deformación Plana(Grupo de 6 Hileras de Pilotes)..... | 133 |
| 8.7 | Malla Utilizada en el Modelo de Elemento Finito (Deformación Plana) Para un Grupo de Pilotes (6 Hileras @ 6 D), Con 4 metros de Encajonamiento..... | 134 |
| 8.8 | Efecto del Encajonamiento en los Desplazamientos del Grupo de Pilotes, Cuyo Modelo se Muestra en la Fig. 8.7..... | 135 |
| 8.9 | Efecto de la Fricción en la Base de la Cimentación Piloteada Correspondiente a la Fig.8.7... | 136 |
| 8.10 | Respuesta Dinámica de Un Grupo de Pilotes Con Encajonamiento de 4 metros en la Cimentación, Para Frecuencias de Excitación Igual a - - - - 1 y 3 rad/seg..... | 137 |

LISTA DE TABLAS

| | | |
|------|--|-----|
| 2.1 | Porcentaje del Daño Causado Durante un Temblor a Estructuras con Diferente Tipo de Cimentación - - - - (Seed, 1969)..... | 25 |
| 2.2 | Porcentaje de Daños en Puentes (Tada, 1968)..... | 26 |
| II-1 | Factores de Seguridad Para Capacidades de Carga de Pilotes Sujetos a Sismos | 169 |
| II-2 | Factores de Seguridad Para la Resistencia a la Extracción de Pilotes Sujetos a Sismos | 170 |
| II-3 | Factores de Seguridad Para Resistencia Horizontal de Pilotes Durante Sismos | 171 |
| II-4 | Valores Típicos del Factor n_h , en Kg/cm ³ | 172 |
| II-5 | Valores de k_D para Arcillas Sobreconsolidadas - - - (Kg/cm ²) | 173 |
| II-6 | Reducción de Factores Para Pilotes Trabajando como Columnas | 174 |
| 4.1 | Valores de ω_0 En rad/seg, Para Diferentes Tipos de Pilotes | 74 |
| 4.2 | Valores del Parámetro $\bar{\lambda}$ | 75 |

CAPITULO I

I N T R O D U C C I O N

1.1 Antecedentes

Existen en la literatura varios estudios sobre la respuesta dinámica de pilotes sujetos a fuerzas sísmicas, sobresaliendo entre otros muchos: Ogata y Kotsubo, 1966; Yamamoto y Kometani, -- 1968; Tajimi, 1969; Penzien, 1970; Hayashi, et.al., 1966 y Otha et.al., 1973. Sin embargo, en la práctica común, los pilotes se continúan diseñando suponiendo fuerzas estáticas laterales o -- fuerzas dinámicas equivalentes aplicadas en la cabeza de los pi- lotes; ésto ocasiona que factores muy importantes, tales como el desplazamiento y los momentos flexionantes ocasionados por las - deformaciones que sufre el suelo durante un sismo, no sean toma- dos en cuenta.

Algunas de las alternativas usadas en el diseño consisten en em- potrar la estructura dentro del estrato de suelo, para que las - fuerzas sísmicas sean resistidas por los empujes pasivos que se desarrollan a lo largo de las paredes de la cimentación empotra- da, o simplemente absorbidas por fuerzas de fricción en la base de la cimentación. Otra solución ha sido soportar las cargas la- terales del sismo a través de pilotes inclinados.

El resultado de aplicar cualquiera de estos procedimientos usa- dos comunmente, es el que las cimentaciones resultan inseguras a

consecuencia de no considerar el efecto de la deformación del suelo que ocurre durante el sismo, o bien resultan muy caras -- cuando las cargas sísmicas tienen que tomarse a través de empotramiento de la estructura o de pilotes inclinados. Además, la efectividad de estas dos últimas soluciones es aún un tanto dudosa.

1.2 Propósito y Alcance de la Tesis

Los objetivos primordiales que se persiguen en este trabajo son:

- 1o. Determinar los factores que intervienen en el comportamiento dinámico de los pilotes y establecer el rango de los factores para el cual la acción de los pilotes --- afecta la respuesta de la estructura que soportan.
- 2o. Proporcionar un método simplificado para el diseño de pilotes individuales que están sujetos a fuerzas sísmicas.
- 3o. Analizar la interacción entre los pilotes que trabajan en grupo y presentar un método que tome en cuenta dicha interacción en problemas dinámicos.
- 4o. Deducir el amortiguamiento radial, a partir de la teoría que considera al pilote trabajando dentro de un medio continuo.
- 5o. Analizar la efectividad que se logra al encajonar, den

tro de un medio continuo, parte de la estructura de la cimentación, así como la fricción en la base de la misma con el fin de disminuir las fuerzas laterales en los pilotes provenientes de la superestructura.

En términos generales, este trabajo se limita a estudiar el caso particular de pilotes que trabajan por punta, se apoyan en un manto rocoso y atraviesan primeramente un estrato homogéneo de arcilla. Sin embargo, los conceptos que se exponen pueden extenderse a problemas diferentes al que aquí se analiza, siempre y cuando se hagan las modificaciones correspondientes a las hipótesis consideradas.

Puesto que en este tipo de cimentación, por medio de pilotes, los desplazamientos verticales son relativamente despreciables cuando se comparan con los horizontales, únicamente se analizarán las teorías que dan la respuesta horizontal de pilotes en suelos blandos. Además de lo anterior, y considerando que el movimiento de cabeceo (el cual está usualmente acoplado con el movimiento horizontal) es comparativamente insignificante con el modo horizontal, en pilotes sujetos a fuerzas sísmicas (aunque las fuerzas axiales causadas por el cabeceo pueden ser muy importantes), en este estudio dicho movimiento será también omitido.

CAPITULO II

Revisión de la Literatura

2.1 Antecedentes

El propósito que se persigue en este capítulo es establecer algunas de las bases que se requieren en capítulos subsecuentes, y exponer brevemente el estado del arte en el tema de la tesis.

La revisión de la literatura que aquí se hace, referente a las teorías que tratan la interacción de pilote-suelo, incluye un estudio de las teorías estáticas y dinámicas que consideran las fuerzas sísmicas horizontales actuando en el pilote, así como un examen de los resultados experimentales de pruebas efectuadas en prototipos y modelos. Además, se describe el comportamiento de estructuras piloteadas durante sismos y se revisan las especificaciones que los reglamentos de construcción de varios países imponen en materia de pilotes bajo cargas de sismo. Los factores que intervienen en el análisis de pilotes, sujetos a fuerzas de sismo, están dados en el Apéndice II-1.

2.2 Uso de Teorías Estáticas

Uno de los procedimientos usados en el diseño de pilotes -- contra fuerzas sísmicas, consiste en que la aceleración de una onda sísmica se considera como un porcentaje de la aceleración de la gravedad (usualmente 10%). Considerando esta aceleración, la fuerza horizontal de diseño se hace igual al producto de di--

cho porcentaje multiplicado por la correspondiente carga vertical del pilote (Cummings 1947).

Otro procedimiento consiste en obtener la fuerza cortante en la base de la superestructura (calculada de acuerdo con el reglamento de construcción local), y distribuir dicha fuerza entre los pilotes de la cimentación. Una vez que se tiene la fuerza correspondiente a cada pilote, se aplica una de las teorías que da la respuesta del pilote sujeto a una carga horizontal aplicada en su cabeza.

Básicamente son dos las teorías que dan este tipo de respuesta; la primera, basada en el modelo de Winkler, supone que el suelo puede ser sustituido por una serie de resortes elásticos independientes, y la segunda, considera al suelo como un medio continuo elástico en el cual el pilote trabaja como una viga continua. Los principios en que se apoyan estas dos teorías se exponen a continuación:

2.2.1 Teoría de Winkler

La teoría de Winkler está representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = - p = - ky \dots\dots\dots(2-1)$$

donde

El = rigidez del pilote

y = desplazamiento del pilote a la profundidad x

##

p = reacción del suelo

k = módulo horizontal de reacción

La solución de esta ecuación, para el caso en que k sea constante con la profundidad, está dada por Chang (1937), Broms (1964, 1965) y Bergfettl (1952).

Para casos en que k varíe lineal, o no linealmente con la profundidad, se pueden encontrar soluciones dadas por Reese y Matlock (1956), Gaul (1958), Mc Clelland y Focht (1958) y Mironov (1971), entre otros muchos.

La Teoría de Winkler es la más simple y conocida entre los ingenieros y su aplicación se ha extendido para el caso de comportamiento no lineal de cimentaciones (Haliburton, 1971).

Esta teoría, sin embargo, tiene el serio inconveniente de considerar al suelo como un medio no continuo, cuando en realidad se sabe que es continuo.

Por otro lado, el valor de k debe determinarse de una manera muy precisa a través de pruebas de campo, y su valor depende no solamente de las propiedades del suelo, sino también de las propiedades del pilote y de la intensidad y forma de aplicación de la carga.

2.2.2 Comportamiento de pilotes lateralmente cargados trabajando dentro de un medio elástico

La teoría que considera al pilote dentro de un me-

dio continuo y elástico fue primeramente estudiado por Spillers y Stoll (1964), y posteriormente por Matthewson (1969) y Poulos (1971a, 1972, 1973). Esta teoría supone que el suelo es un medio ideal, elástico, homogéneo e isotrópico, el cual tiene dos parámetros constantes; el módulo de Young (E_s) y la relación de Poisson (ν_s).

La reacción del suelo se supone que consiste de "n" fuerzas puntuales horizontales, igualmente espaciadas, que se denominan " P_i ". (Estas fuerzas actúan en los centros de los segmentos, con longitud L/n , como se puede observar en la Fig. 2-1). Las ecuaciones de Mindlin se utilizan para determinar los desplazamientos en cualquier punto del suelo, en términos de las fuerzas P_i ; utilizando la teoría de vigas se pueden obtener los desplazamientos del pilote, en cualquier punto, en términos de las fuerzas P_i y de los desplazamientos del pilote en sus dos extremos. Ahora bien, al igualar las expresiones de desplazamiento del suelo en cada punto, con los desplazamientos correspondientes al pilote en este mismo punto, se obtienen $n-2$ ecuaciones independientes; si se consideran además las dos ecuaciones de equilibrio, todas las fuerzas P_i se pueden determinar. Esta teoría también se ha extendido para los casos en que el módulo de Young varía linealmente con la profundidad (Poulos, 1973), así como a problemas elastoplásticos (Poulos, 1971a; Spillers y Stoll, 1964).

Las ventajas más importantes de esta teoría son:

- 1.- Considera más realísticamente al suelo, el cual queda representado por sus constantes elásticas.

2.- Se puede estudiar mejor la importancia relativa de algunas variables que intervienen en el problema, tales como el ancho del pilote y la relación de Poisson.

Ahora bien, como ya se mencionó anteriormente, el principal inconveniente de utilizar teorías estáticas en el análisis sísmico de pilotes, es el de no considerar el efecto producido por el suelo cuando éste experimenta movimientos relativos al de la roca. En los Capítulos IV y V de la Tesis se analiza la respuesta producida sobre el pilote por tal efecto.

2.3 Uso de las Teorías Dinámicas

Dos métodos se han utilizado en la solución de problemas dinámicos para el caso de pilotes cargados horizontalmente. Uno consiste en obtener la respuesta de pilotes sujetos a cargas sinusoidales o transitorias, aplicadas en la cabeza del pilote; el otro consiste en un análisis dinámico completo, que determina la respuesta del pilote sujeto a cualquier tipo de excitación horizontal.

Los dos métodos mencionados en el párrafo anterior se discuten en las siguientes sub-secciones.

2.3.1 Método Basado en Fuerzas que se Aplican en la Cabeza de los Pilotes

Este método obtiene la respuesta de pilotes sujetos a cargas dinámicas que la superestructura trasmite en la cabeza-

de los pilotos. El método fue utilizado inicialmente para los casos donde se tenían fuerzas periódicas, como las producidas por ondas oceánicas en plataformas marinas (Newmark, 1956), pero actualmente también se utiliza para los casos de fuerzas sinusoidales o transitorias aplicadas en la parte superior de los pilotos (Gaul, 1958; Hayashi, 1973; Agarwal, 1973).

Como ejemplo de este tipo de teorías, se describirá brevemente la presentada por Hayashi et.al. (1966). Su análisis está basado en la suposición de que la curva F-y (Fuerza-Deformación en el pilote) de la Fig. 2-2, se puede expresar por medio de la ecuación:

$$F = K y^\alpha \dots\dots\dots(2.2)$$

donde:

K y α = parámetros que se pueden considerar constantes para un rango dado de la fuerza F

y = desplazamiento del pilote

Los parámetros K y α se determinan para el modelo de un pilote que se excita en el mismo tipo de suelo al que se tiene en el prototipo; los valores así obtenidos son dibujados en curvas como los que aparecen en la Fig. 2-3, y los valores de K y α del prototipo son calculados posteriormente mediante factores de conversión y relaciones geométricas entre modelo y prototipo.

Hayashi y sus asociados realizaron una serie de pruebas estáti-

cas y dinámicas a gran escala, utilizando pilotes de acero como modelos y compararon los resultados teóricos con los experimentales; su comparación los orilló a concluir que, con este método, se pueden determinar valores aproximados de la respuesta dinámica de pilotes de acero. Dos serios inconvenientes tiene este procedimiento: 1o. que está limitado a dar la respuesta en la cabeza del pilote y no proporciona dato alguno referente a lo que pasa a lo largo del mismo, y 2o. no toma en cuenta el efecto de los desplazamientos del suelo sobre el pilote.

2.3.2 Métodos Basados en Análisis Dinámicos del Sistema Pilote - Suelo

Existen varias teorías que tratan de explicar el comportamiento dinámico de pilotes trabajando bajo sollicitaciones sísmicas: en este trabajo se presentarán, en forma breve, las bases de estas teorías y las conclusiones más importantes a las que se llegan a través de su estudio.

La teoría más simple es la presentada por Ogata y Kotsubo(1964); basada en el modelo de Winkler, dicha teoría representa la solución de la ecuación diferencial para el caso de un pilote sujeto a una fuerza sísmica, aplicada en la base del estrato de suelo blando. Esta teoría está descrita ampliamente en el Capítulo III de la tesis.

Parmelee et.al. (1964) y Penzien (1970), analizaron una serie de

masas discretas ligadas por conexiones, que consideran, además - de las propiedades elásticas y de amortiguamiento de la estructura, las propiedades elasto-plásticas de amortiguamiento y de flujo plástico del suelo (Creep). Estos autores analizaron el problema en dos partes:

1a. Parte:

Determinaron la respuesta dinámica del medio arcilloso

2a. Parte:

Determinaron la interacción de todo el sistema

Para la segunda parte el modelo idealizado es excitado, simultáneamente, en su base por la aceleración horizontal u_g , y a cada nivel 'i' por una aceleración conocida que representa la aceleración del medio continuo a ese nivel (obtenido en la parte primera). Para este análisis se consideraron válidas las siguientes dos suposiciones.

- 1) Los desplazamientos y los esfuerzos elásticos dentro del medio arcilloso se pueden determinar perfectamente usando una teoría estática, v.gr. la teoría de Mindlin.
- 2) El uso de la teoría de Winkler es válida en la interacción del pilote con el suelo.

Estos autores aplicaron su método a una estructura de puente cimentada con pilotes, y las conclusiones a las que llegaron -

fueron las siguientes:

- 1) La rigidez del pilote tiene poca influencia en la respuesta de la superestructura. Basados en esta observación, ellos afirman que, si se está interesado exclusivamente en los efectos del sismo en la superestructura, el movimiento superficial del estrato de arcilla (sin la presencia del puente) podría utilizarse como la excitación de entrada en la base de las pilas del puente.
- 2) Un temblor como el registrado en 1940 en el Centro, California, puede producir curvaturas sobre los pilotes de la magnitud de aquellas donde se tienen puntos de fluencia.
- 3) La estabilidad lateral de pilotes no representa problema alguno durante el corto período de duración de un sismo.

Es importante hacer notar que Parmelee et.al. estudiaron un problema particular donde los pilotes eran relativamente flexibles ($D=36''$ y $L=120'$) y el suelo era una arcilla blanda con una resistencia a la compresión simple promedio = 0.6 Kg/cm^2 ; o sea, que sus resultados son válidos solamente para el problema que estudiaron.

Yamamoto y Seki (1971a, 1971b) presentaron un método similar al de Parmelee, pero lo extendieron a casos generales. En varios casos obtuvieron la respuesta dinámica de edificios altos con y sin pilotes. En sus investigaciones, estos autores encontraron que los desplazamientos máximos para estructuras soportadas en

pilotes no eran muy diferentes a los correspondientes a estructuras sin pilotes. La Fig. 2.4 muestra los desplazamientos máximos de una estructura cuando se considera que la cimentación es con, o sin pilotes: en ella se puede observar que la diferencia en dichos desplazamientos disminuye a medida que el módulo del suelo es mayor.

Sugimura (1972), trabajando con el modelo mostrado en la Fig. 2.5 (que es parecido al de Parmelee, pero más simple), encontró que los factores más importantes en el diseño de pilotes son las curvaturas y los momentos flexionantes. La Fig. 2.6 muestra un modelo del sistema pilote-suelo-estructura y la Fig. 2.7 da la respuesta de dicho modelo al temblor de "El Centro '40 NS" (normalizado a una aceleración máxima de 100 gal.).

Staanitzer y Shekhter (1971) utilizaron un sistema discreto de múltiples masas para determinar las vibraciones producidas por ondas sísmicas en pilotes. Las fuerzas concentradas por conocer en cada masa, se determinan de manera similar a la usada por Poulos (1971a) para el problema estático, sólo que para el cálculo de estas fuerzas, en el caso dinámico, es necesario resolver también el problema dinámico de la teoría de la elasticidad referente a la interacción entre las ondas armónicas longitudinales y un segmento de longitud L/n del pilote (L =longitud de pilote y n = número de masas concentradas).

En su cálculo analítico, estos dos últimos autores encontraron que las vibraciones en la mitad inferior del pilote son práctica

mente las mismas que las del suelo sin pilotes, y que las mayores diferencias ocurren en la parte superior donde se tiene el efecto de la inercia de la superestructura. También observaron que los valores máximos de la presión dinámica del suelo sobre el pilote, así como las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, ocurren en la parte superior del pilote donde éste se une con la superestructura.

H. Tajimi (1969) obtuvo los esfuerzos y los desplazamientos del suelo usando la ecuación de onda en tres dimensiones y determinó la respuesta de los pilotes igualando el desplazamiento del pilote (desarrollado en series de Fourier) con el movimiento del suelo. En el Capítulo III se describe con más detalle el método de Tajimi.

Minami y Sakurai (1973) estudiaron los efectos "de encajonamiento" y "de pilotes" en edificios sujetos a movimientos sísmicos, mediante el análisis de un prototipo de suelo-estructura como el presentado en la Fig. 2.8. En este modelo, los pilotes quedan representados por elementos flexibles que están fijos en su base y en su cabeza. Entre las conclusiones de Minami y Sakurai están las siguientes:

- 1) Cuando existen pilotes en las cimentaciones, "los períodos de vibración en todos los modelos tienden a ser menores que el caso de no tener pilotes". Esta tendencia fue más evidente para suelos blandos que para suelos duros.
- 2) La presencia de pilotes reduce los movimientos horizontales y de cabeceo, y tiende a cambiar el modo vertical hacia modos

más altos de vibración. Ellos observaron que "los pilotes y encajonamiento", son más efectivos en disminuir el movimiento de cabeceo que los horizontales, y este efecto parece ser más importante en el caso de suelos compactos".

- 3) Los pilotes tienden a incrementar los coeficientes sísmicos del cortante en la base para edificios de cualquier altura.

Se observa que los estudios basados en análisis dinámicos completos, de sistemas que consideran la acción conjunta de pilote-suelo-estructura, han arrojado a la luz muy valiosos resultados que desde luego ayudan a visualizar mejor el problema. Sin embargo, falta aún definir los rangos en que las predicciones de las teorías se cumplan, y donde la acción de los pilotes es importante en la respuesta sísmica de las estructuras. En el Capítulo IV de la Tesis se establecen estos rangos y además se analizan varios aspectos importantes del comportamiento dinámico de pilotes aislados.

2.4 Datos Experimentales

2.4.1 En Modelos

A fin de obtener ciertos parámetros, o verificar los resultados obtenidos al aplicar las teorías, varios investigadores han efectuado pruebas de carga en pilotes que están sujetos a fuerzas laterales dinámicas o estáticas; muchas de estas pruebas se han llevado a cabo en modelos de laboratorio, pero existen otras que se han efectuado en pilotes prototipo.

Aunque el interés de la tesis se refiere al comportamiento dinámico de pilotes, existen algunos datos obtenidos en pruebas estáticas que son aplicables, en cierta medida, a problemas dinámicos. Por esta razón, a continuación se exponen algunos resultados encontrados en pruebas estáticas y posteriormente se expondrán - - aquéllos obtenidos en pruebas dinámicas.

a) Pruebas Estáticas

Al efectuar pruebas a escala natural en pilotes hincados en arenas, Gleser (1953) observó que la deflexión de un pilote con cabeza restringida es mucho menor que la de un pilote de cabeza libre. Palmer y Brown (1953) compararon los resultados de una prueba efectuada también a escala natural en arenas con las soluciones del método de diferencias finitas, encontrando que el punto de momento máximo es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada, aunque desde luego, la magnitud de dicho momento es proporcional a dicha fuerza.

Mc Clelland y Focht (1958) llevaron a cabo unas pruebas de carga en un pilote tubular, de 24 pulgadas de diámetro, que fué hincado 75 pies en un estrato de arcilla blanda que subyaca 33 pies de agua; del estudio de los resultados que obtuvieron y que se muestran en las Figs. 2-9-a y 2-10-a, los autores concluyeron que el módulo del suelo, " E_s ", es variable con la profundidad y con el nivel de las deflexiones; en la fig. 2-9 están dibujadas las curvas-Reacción del suelo (a diferentes profundidades) Vs Deflexión máxima-para diferentes -

magnitudes de carga, y la Fig. 2-10 las curvas Módulo del suelo Vs Profundidad.

Reese y Matlock (1956) compararon los datos reportados por McClelland y Focht con varias soluciones elásticas estáticas. En la Fig. 2-11, donde se puede ver esta comparación, se muestra la curva experimental de los momentos flexionantes junto con las de los siguientes cuatro métodos:

Método No. 1.- Considera a " E_s " constante y ajusta el valor teórico máximo de la deflexión, al nivel superficial del suelo, con el valor experimental correspondiente.

Método No. 2.- Considera a " E_s " constante y ajusta el valor calculado del momento máximo con el correspondiente valor experimental.

Método No. 3.- Considera que E_s varía linealmente con la profundidad ($E_s = kx$) y hace el mismo ajuste que en el método No. 1.

Método No. 4.- Considera que $E_s = kx$ y hace el mismo ajuste que en el método No. 2.

Reese y Matlock concluyeron en su estudio que, en ningún caso, las curvas de los momentos calculados coincidían exactamente con las curvas experimentales, pero el uso del módulo elástico del suelo, que varía linealmente con la profundidad, proporcionaba mejores resultados que el uso de un módulo elástico constante.

b) Pruebas Dinámicas

Los datos sobre pruebas dinámicas que aquí se indican, se refieren a pruebas que han servido para conocer el efecto de -- cargas dinámicas aplicadas en la cabeza. tales como las producidas por la superestructura cuando ésta se mueve como consecuencia de un sismo. Prácticamente nada se ha publicado sobre resultados obtenidos en pruebas que traten de reproducir el efecto que produce, sobre el pilote, un estrato de suelo cuando se deforma por la acción de un sismo.

Además de las pruebas estáticas antes mencionadas, Mc Clelland y Focht (1958) realizaron también unas pruebas dinámicas en el mismo pilote tubular descrito anteriormente; dichas pruebas consistieron en aplicar cargas con duración de 5 seg (las estáticas duraron 10 min.). La comparación de los módulos entre una y otra prueba, según se puede observar de las Figs. - 2-10a y 2-10b, indica que el llamado módulo dinámico es siempre mayor que el módulo estático.

Moore e Irwin (1970) estudiaron los efectos de las vibraciones en el pandeo de pilotes esbeltos, vibrando un pilote de - 31.81" de largo, 1.31" de ancho y 1/16" de grueso, el cual fué hincado en un limo-arcilloso ligeramente orgánico. Sus observaciones indicaron que, hasta velocidades máximas de partícula de 0.4 pulgadas/seg, la capacidad de carga vertical del pilote prácticamente no cambia.

La carga vertical máxima contra el pandeo está dado por:

$$P_{ult} \sim \sqrt{kDEI}$$

donde

k = módulo de reacción lateral

E = módulo elástico del material del pilote

I = segundo momento del área alrededor del eje de pandeo

D = ancho del pilote.

Estos autores afirman que para vibraciones horizontales más severas, el valor de k disminuye, y por tanto, "cuando la severidad de vibración excede la velocidad de 0.4 pulgadas/seg, es de esperarse alguna reducción en la capacidad de carga"

Alpan (1973) reportó algunos resultados de pruebas dinámicas vibratorias, efectuadas en un pilote de concreto de 30 x 30 cm. de sección transversal, e hincado en una arcilla plástica de consistencia firme, y sus conclusiones fueron las siguientes:

- a) Las pruebas oscilatorias de pilotes in-situ resultan adecuadas para proporcionar los datos requeridos en la obtención de la respuesta dinámica de pilotes. La frecuencia natural con amortiguamiento de un pilote para una oscilación horizontal, así como el decremento logarítmico como medida del amortiguamiento del sistema, pueden determinarse satisfactoriamente.
- b) El módulo elástico en suelos cohesivos, tal como se obtiene con la técnica de un medidor de presión (penetrómetro o presiómetro), puede ser utilizado con razonable confianza en el análisis de problemas dinámicos.

c) El uso de la teoría de vigas en un medio elástico (el llamado modelo de Winkler), parece ser suficiente para el análisis dinámico de pilotes lateralmente cargados.

2.4.2 En casos Históricos

Hasta aquí se han visto algunos datos experimentales obtenidos mediante pruebas de campo y laboratorio; se verá ahora la forma cómo se han utilizado algunos datos que han sido obtenidos a partir de las observaciones del comportamiento de cimentaciones piloteadas durante sismos.

Hisada et.al. (1973), a fin de verificar la exactitud de su método, utilizaron los registros obtenidos en sismógrafos de tres edificios, que fueron sacudidos por temblores, para ponerlos como excitación de entrada en sus cálculos analíticos de estructuras similares. En la Fig. 2-12 se indican los espectros de respuesta para una estructura de 5 niveles; en ella se ve que existe buena concordancia entre los valores registrados y calculados.

Seed (1969) menciona el caso de varios edificios piloteados que fueron seriamente dañados por los sismos de Japón y Alaska. La influencia que tienen las condiciones del terreno en el daño de estructuras, se puede ver en las Figs. 2-13 y 2-14; la Fig. 2-13 muestra la influencia, en la extensión de daños, de la resistencia a la penetración de las puntas de los pilotes, y la Fig. 2-14 indica que los pilotes de 30 a 40 pies de longitud están influenciados por el cambio en la resistencia que ocurre alrededor de la profundidad de 30 pies. La tabla 2-1 muestra que las cimenta

ciones piloteadas tienen solamente un 9% de daño menos que las cimentaciones por superficie.

Ohsaki (1969) publicó los espectros de aceleración de varias estructuras cimentadas con diferente tipo de cimentación y apoyadas en diferente tipo de suelo; estos espectros se reproducen en las Figs. 2-15 y 2-16. La Fig. 2-15a, correspondiente a una cimentación apoyada en losa sobre suelos estratigráficos blandos, muestra que el rango de períodos donde ocurren los valores máximos del espectro de aceleración está entre 0.3 y 1.3 segundos, y que el período crítico (período a partir del cual la amplificación es menor de 1) es siempre mayor de 1 segundo; la Fig. 2-15b señala que la mayoría de los valores máximos de las curvas de espectro, correspondientes a cimentaciones con pilotes en suelos blandos, caen dentro de 1 segundo, pero los llamados períodos críticos son también siempre mayores a 1 segundo. Si se observa ahora la Fig. 2-16-a, correspondiente a cimentaciones con pilas en suelos blandos, se puede observar que la mayor parte de los valores máximos caen sobre un rango pequeño de períodos y que casi todos los períodos críticos se encuentran por abajo de 1 segundo; esta figura se asemeja más a la Fig. 2-16b que indica la respuesta de cimentaciones a base de zapatas, en suelos duros, y donde los períodos críticos son siempre menor a 1 segundo.

Desafortunadamente, en el artículo de Ohsaki, la única referencia que se hace sobre las características de los pilotes y las pilas es que, en los primeros, los diámetros variaban de 0.35 a 0.50 m. y los de las pilas variaban entre 1.4 y 3.2 m. Sin em-

bargo, Ohsaki muestra a través de sus figuras la diferencia, en la respuesta sísmica de estructuras, entre cimentaciones profundas a base de elementos flexibles (pilotes) y aquellas a base de elementos rígidos (pilas).

Tada et.al. (1966) efectuaron una investigación de 93 puentes con diferentes tipos de cimentación, que fueron dañados por sismos. Como se puede observar en la tabla 2-2, las diferencias en el porcentaje de daños, para las distintas clases de estructuras y cimentaciones, no fue muy grande, pero el porcentaje de daños en puentes sobre pilotes resultó ser mayor que el de puentes sobre zapatas. Nótese sin embargo, que en esta tabla no se indica el tipo de suelo de cimentación y resulta muy difícil interpretar correctamente los resultados presentados.

Kishida (1966) reportó varios tipos de daños en cimentaciones piloteadas ocasionados por el temblor de Niigata (inclinación de pilotes, separación entre pilotes y zapatas, agrietamiento de pilotes, y agrietamiento entre las juntas de pilotes y zapatas). Kishida atribuye los daños al fenómeno de licuación o cambio de densidad en los depósitos de arena. Los daños sísmicos ocasionados a puentes con cimentaciones piloteadas, casi todos construidos en suelos muy blandos, fue estudiado por Duke (1960) quien cree que dichos daños son causados por los excesivos desplazamientos longitudinales o transversales que ocurren en el suelo. La falla por pandeo de un pilote tubular, y los agrietamientos producidos en varios pilotes de concreto durante el temblor de Niigata, fueron publicados por Fukuoka (1966).

Los datos experimentales aquí señalados indican lo siguiente:

- 1.- Las pruebas efectuadas en modelos de laboratorio y a escala-natural han proporcionado valiosos resultados referentes a la respuesta de pilotes sometidos a fuerzas horizontales dinámicas (o estáticas), aplicadas en la cabeza de los pilotes, pero prácticamente no se tienen datos que indiquen la respuesta debida exclusivamente al movimiento que el suelo tiene durante sismos. Una razón de la falta de este tipo de datos es que no se ha establecido claramente, en forma analítica, la aportación de los efectos primordiales que producen la respuesta de un pilote sujeto a sismos: la originada por la aceleración de la masa que va unida a la cabeza del pilote, y la del movimiento del estrato de suelo durante un sismo. Uno de los objetivos de la tesis consiste en distinguir claramente la respuesta causada por cada uno de los dos efectos señalados; esta distinción se analiza en el capítulo IV.
- 2.- Las inspecciones realizadas en estructuras piloteadas, sometidas a sismos, han mostrado los daños causados por el efecto debido a los fuertes desplazamientos del suelo; este hecho, enfatiza más la importancia de estudiar y determinar analíticamente tal efecto. Además, las diferencias entre las respuestas de cimentaciones en pilas y pilotes sobre suelos blandos, señaladas por Ohsaki, indican la importancia de establecer los rangos en los cuales la rigidez de los pilotes puede alterar la respuesta sísmica de las estructuras.

Dichos rangos se establecen también en el capítulo IV de la tesis.

2.5 Conclusiones

El análisis de los resultados teóricos y experimentales publicados hasta ahora dan idea de la importancia y complejidad de los factores que intervienen en el problema. Falta, sin embargo, determinar en forma más exacta la importancia relativa de estos factores, y obtener a través de un modelo simple, los fundamentos de la dinámica del pilote. Los siguientes dos capítulos de esta tesis se refieren precisamente a estos dos aspectos que se acaban de mencionar.

Existen en la literatura varios casos de pilotes que han fallado cuando el suelo a sufrido licuación o deformación excesiva, pero nada se ha publicado referente al daño causado por las fuerzas dinámicas que la superestructura trasmite a los pilotes. Para lograr esto último, es importante desarrollar métodos de instrumentación que permitan registrar el movimiento de los pilotes durante un sismo, e inspeccionar el daño en éstos inmediatamente después de haber ocurrido el mismo.

Ohsaki demostró que existen algunas cimentaciones profundas, en especial las pilas, que afectan la respuesta en la base de las estructuras. Falta por investigar bajo qué condiciones de suelo y pilote se pueden tener tal efecto. (En el Capítulo IV de la Tesis se determinan estas condiciones).

TABLA 2.1

PORCIENTO DE DAÑO CAUSADO DURANTE UN TEMBLOR A ESTRUCTURAS CON
DIFERENTE TIPO DE CIMENTACION

(Seed, 1969)

| Tipo de Cimentación | Sin o con ligero daño | Con daño intermedio o fuerte |
|------------------------------|-----------------------|------------------------------|
| Por superficie(63 edificios) | 36% | 64% |
| Pilotes (122 edificios) | 45% | 55% |

TABLA 2.2
PORCENTAJE DE DAÑOS EN PUENTES

(Tada, et.al., 1968)

| | Porcentaje de Daños | Tipos de Estructura | | Porcentaje de Daños (No. de Claros) |
|----------------------------------|---------------------|---|--|-------------------------------------|
| Superestructuras (530 claros) | 12% | Puentes de Acero (168 claros) | | 11.3% (19 claros) |
| | | Puentes de Concreto Reforzado (222) | | 14.9% (33 claros) |
| | | Puentes de Concreto Pre-Esforzado (132) | | 8.3% (11 claros) |
| | | Puentes de Madera (8) | | 100% (8 claros) |
| Estribos (172) | 20.4% | Cimentación por Zapatas (24) | | 16.7% (4) |
| | | Cimentación por Pilotes (99) | | 19.2% (9) |
| | | Cimentación por Cilindros (29) | | 24.0% (7) |
| Sub- estructuras | 8% | Cimentación por Zapatas (40) | | 0% |
| Pilas (444) | | Cimentación por Pilotes (214) | | 9.8% (21) |
| | | Cimentación por Cilindros (180) | | 8.3% (15) |

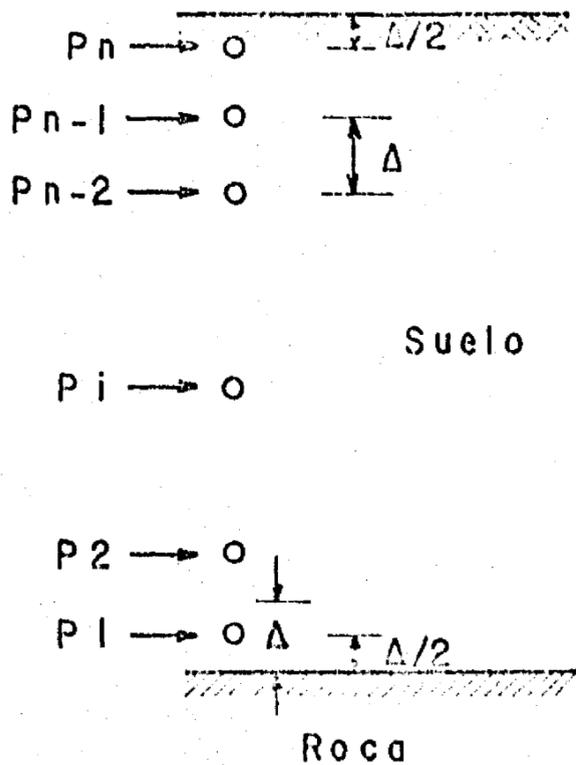


FIG. 2.1 a)
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE
DE LA MASA DE SUELO

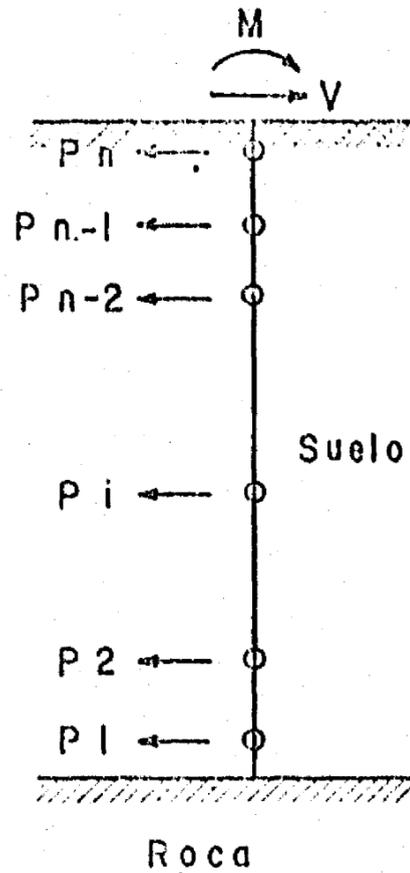


FIG. 2.1 b)
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE
DEL PILOTE

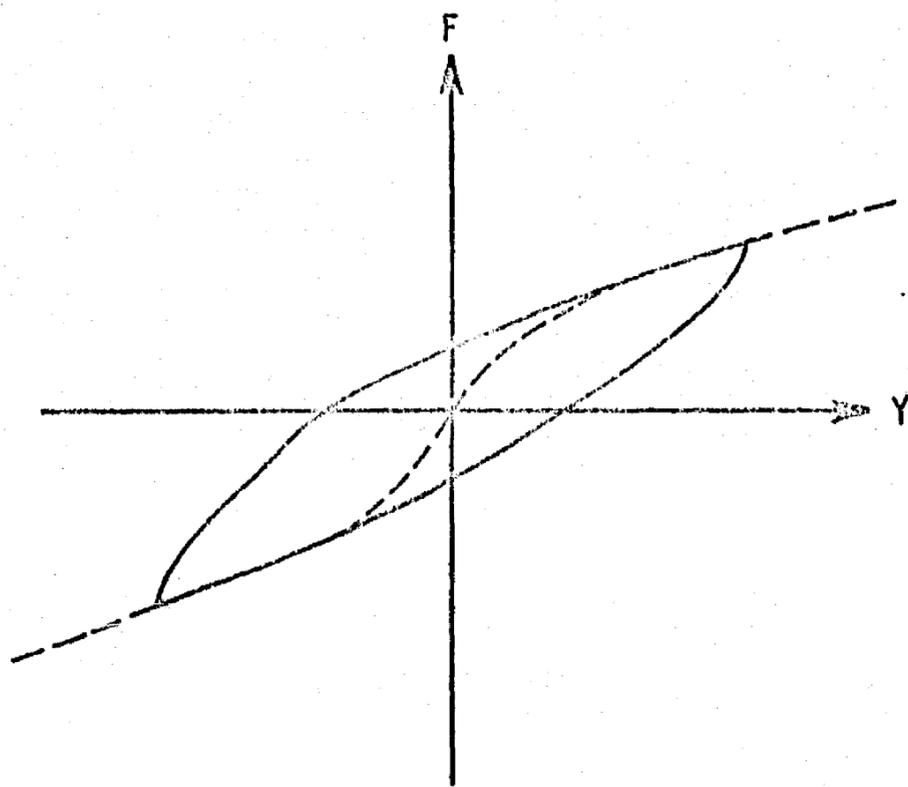
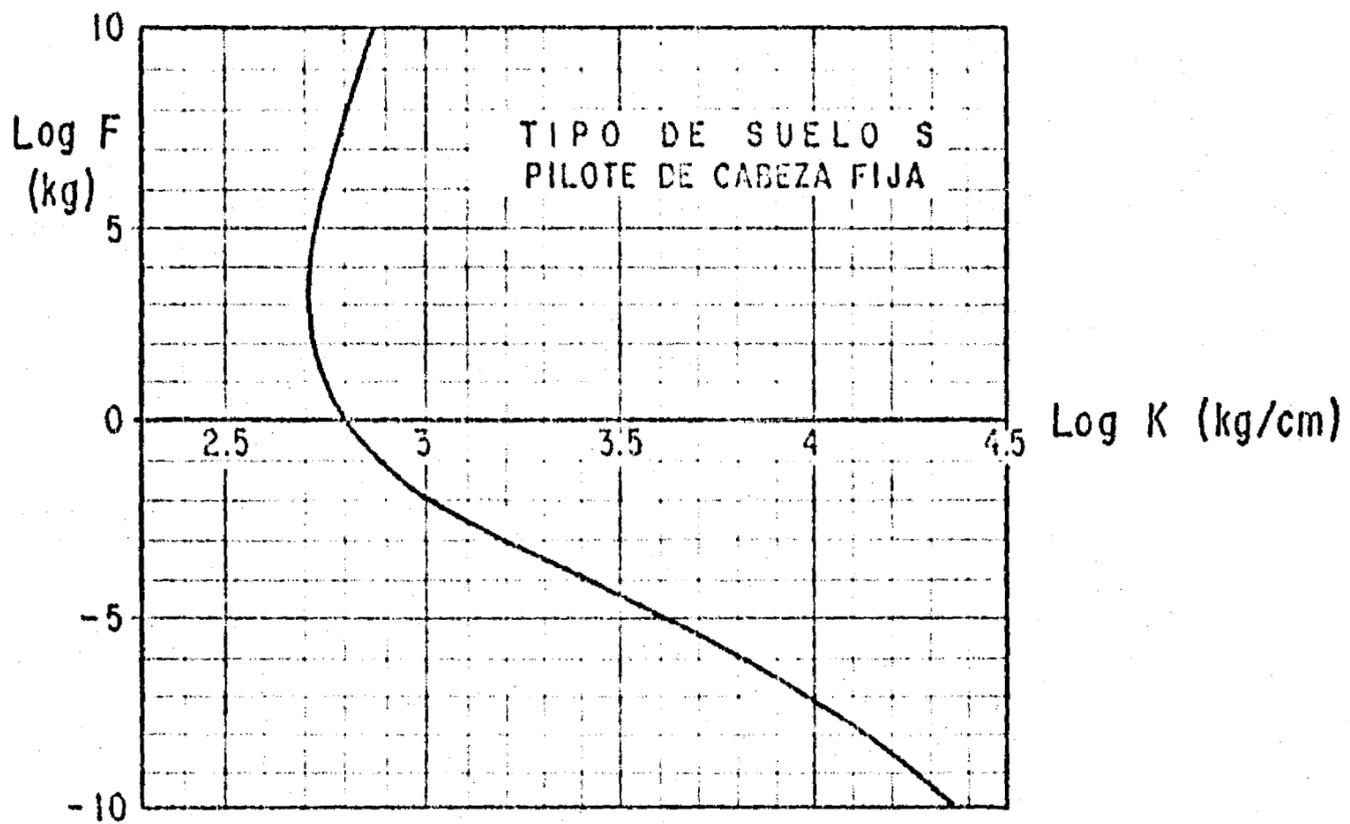
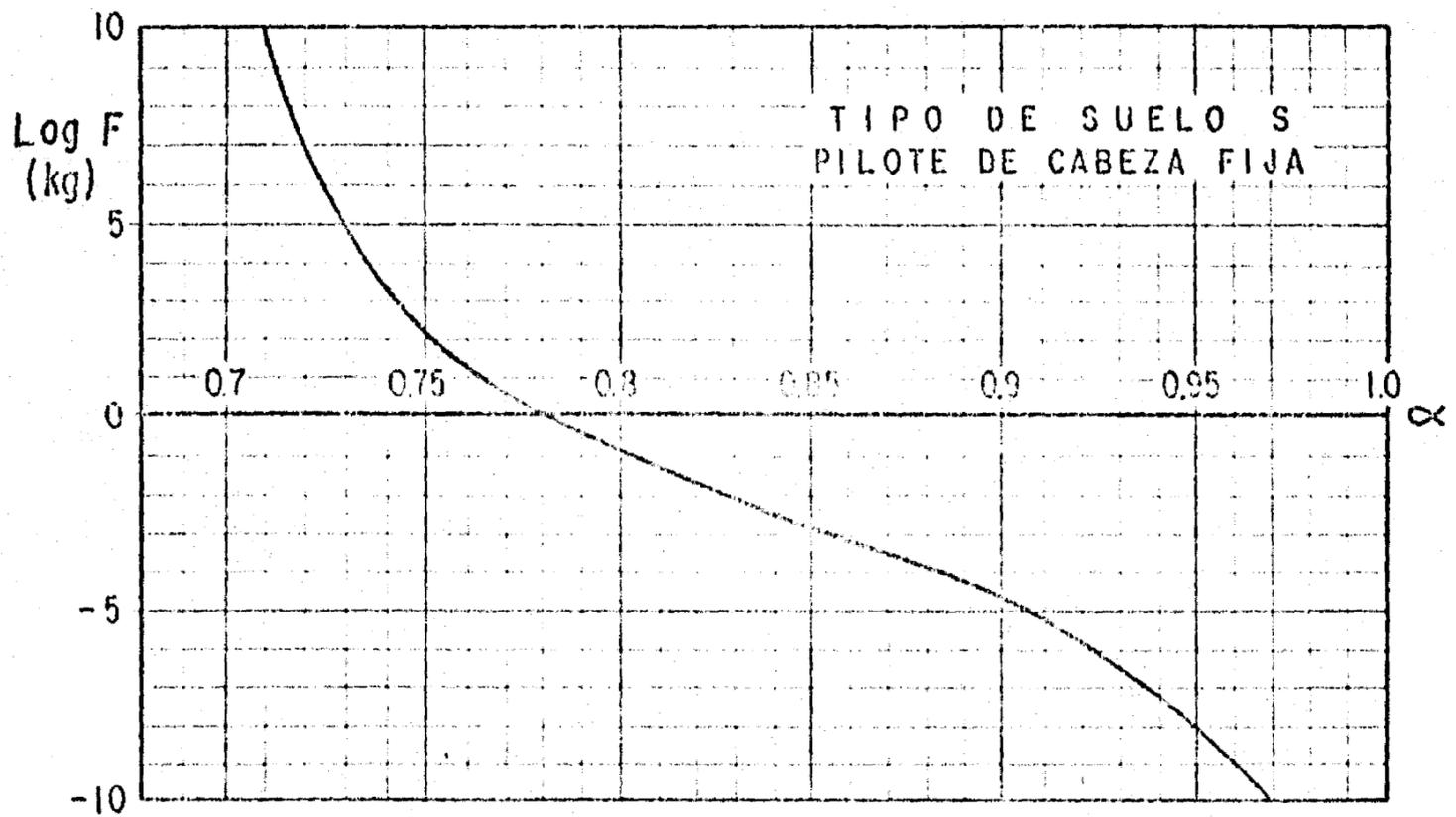


FIG. 2.2 RELACION FUERZA-DESPLAZAMIENTO
EN LA TEORIA DE HAYASHI.

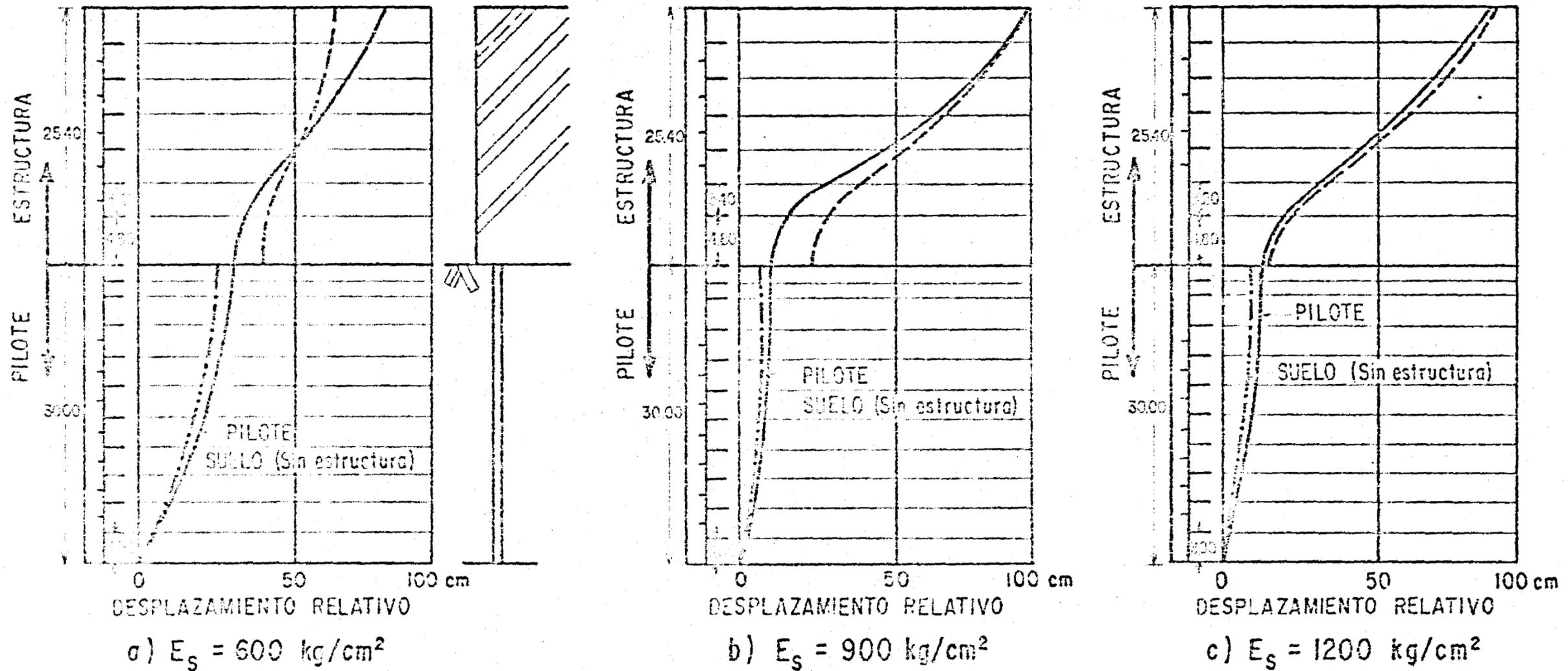


a) VALORES DE K



b) VALORES DE α

FIG. 2.3 CURVAS TÍPICAS PARA OBTENER LOS PARÁMETROS K y α , EN LA TEORÍA DE HAYASHI.



NOTA. Las configuraciones de desplazamiento corresponden a un cierto tiempo donde la máxima amplitud ocurre en la parte superior de la estructura.

FIG. 2.4 EFECTO DE LOS PILOTES EN LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA DURANTE EL TEMBLOR TAFT, 1952 N.S.
(YAMAMOTO Y SEKI, 1963)

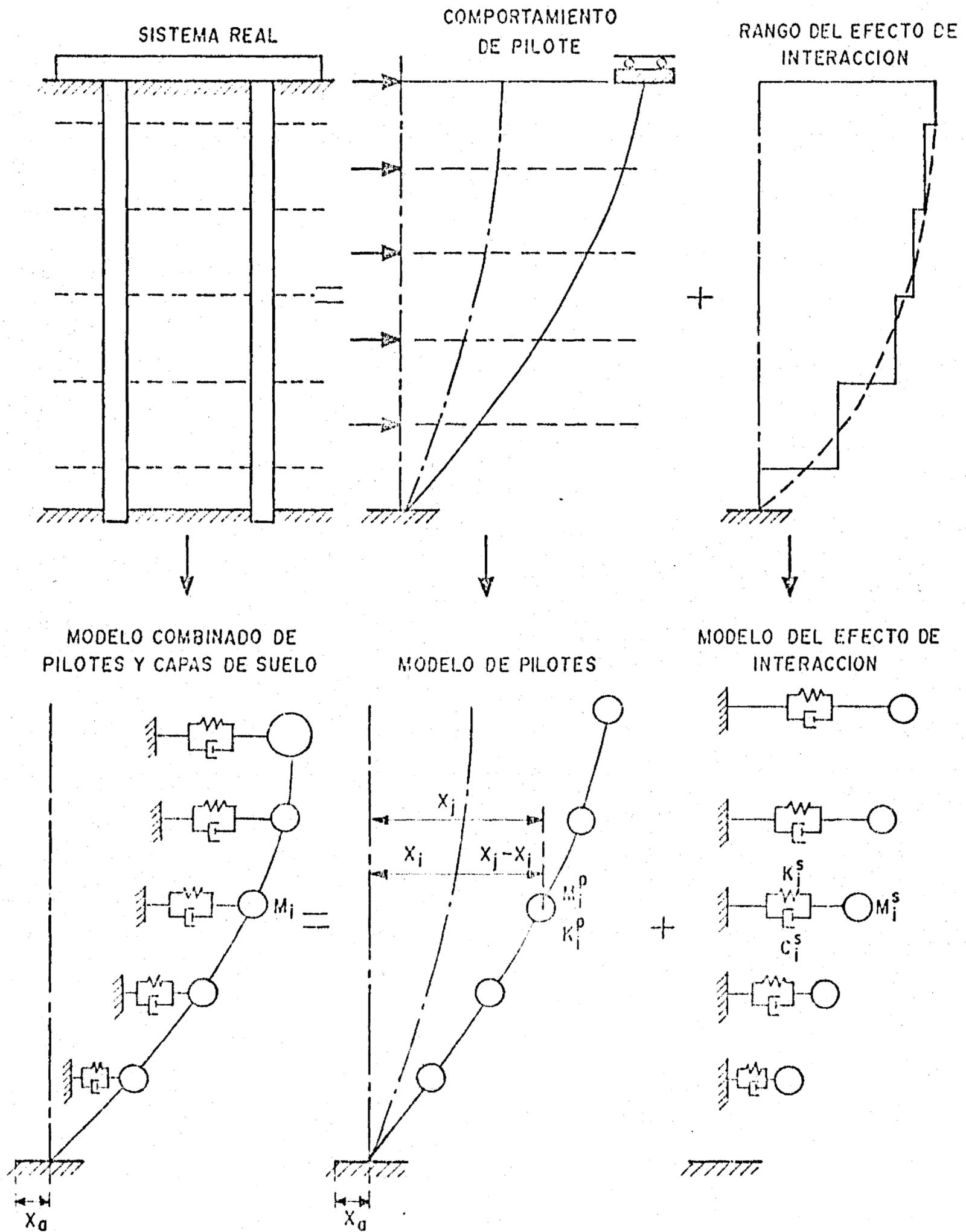


FIG.2.5 MODELO DEL SISTEMA PILOTE-SUELO.
(SUGIMURA, 1972.)

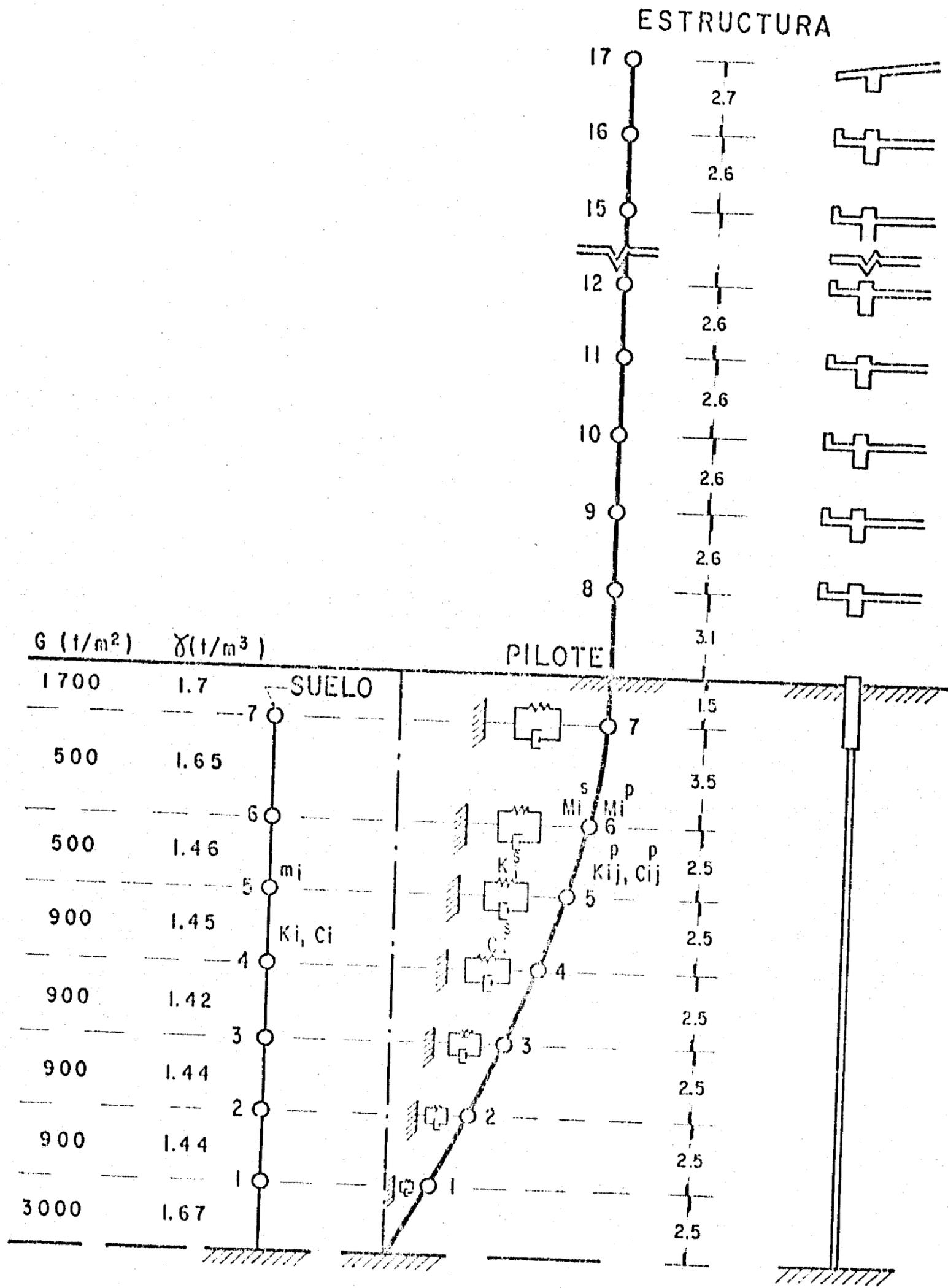


FIG. 2.6 MODELO DEL SISTEMA PILOTE - SUELO - ESTRUCTURA.
(SUGIMURA, 1972)

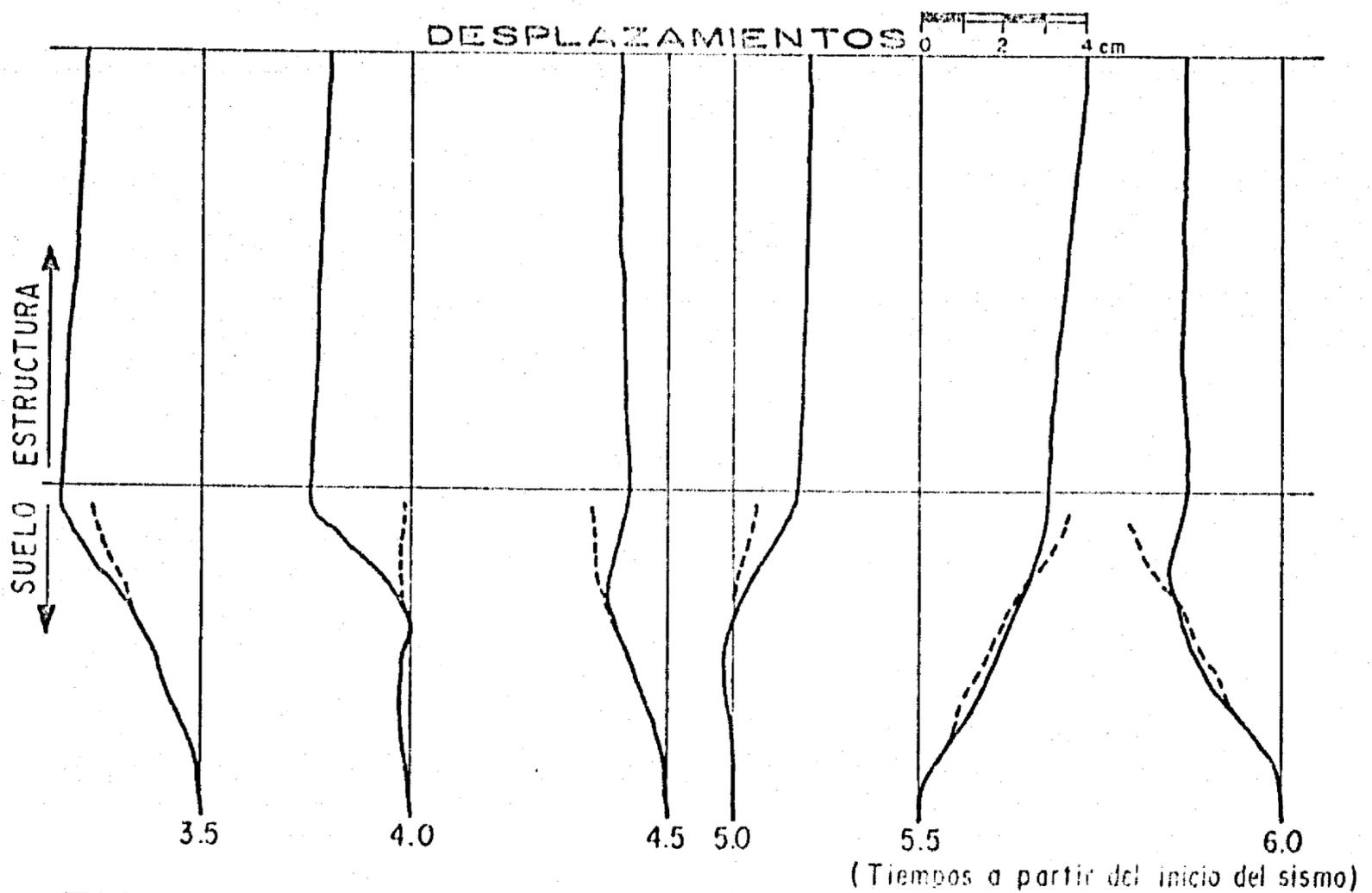
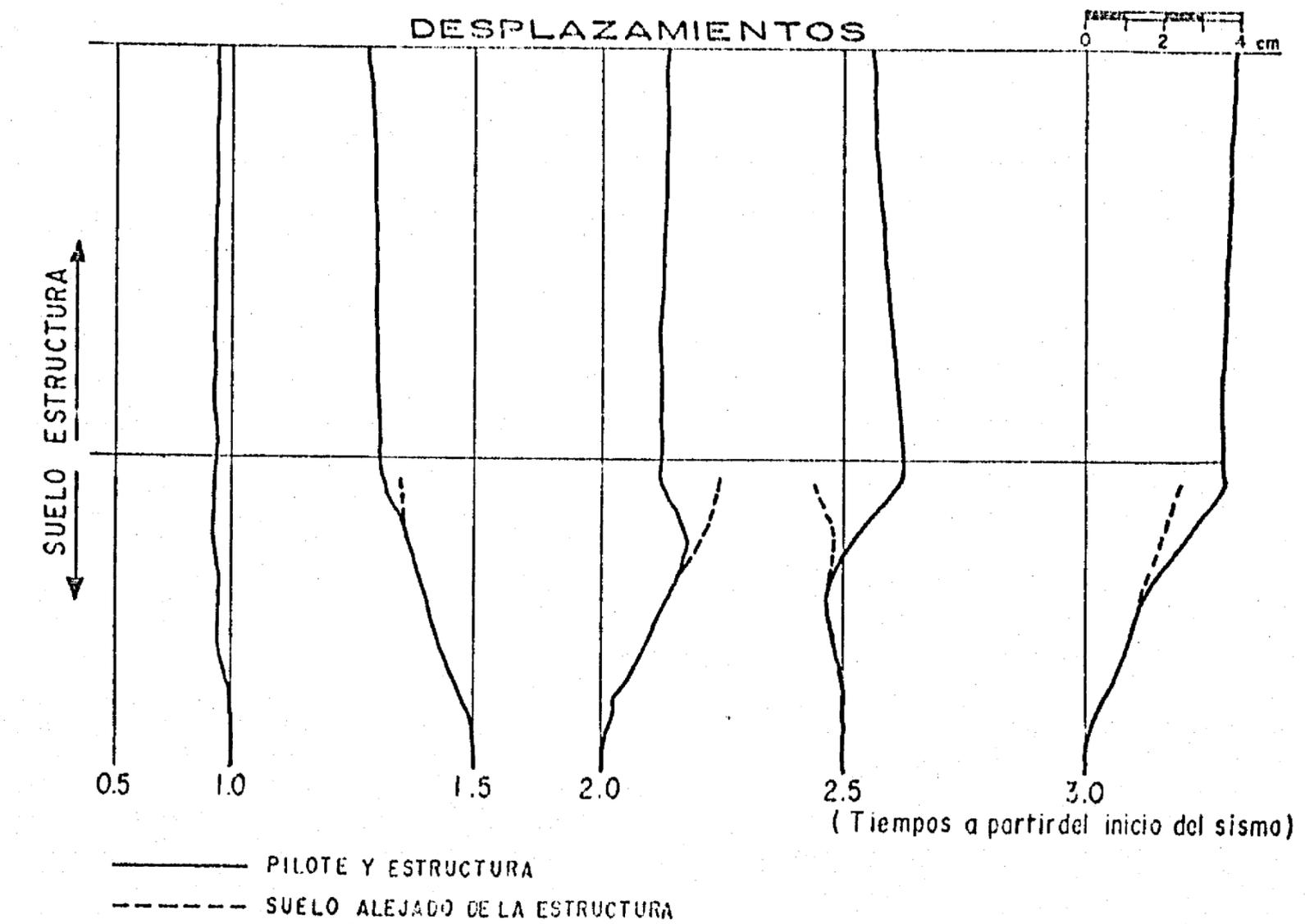


FIG. 2.7 CONFIGURACION DE LA ESTRUCTURA Y EL SUELO PARA DIFERENTES TIEMPOS RELATIVOS AL INICIO DEL TEMBLOR - EL CENTRO, 1940 N.S. (SUGIMURA, 1972)

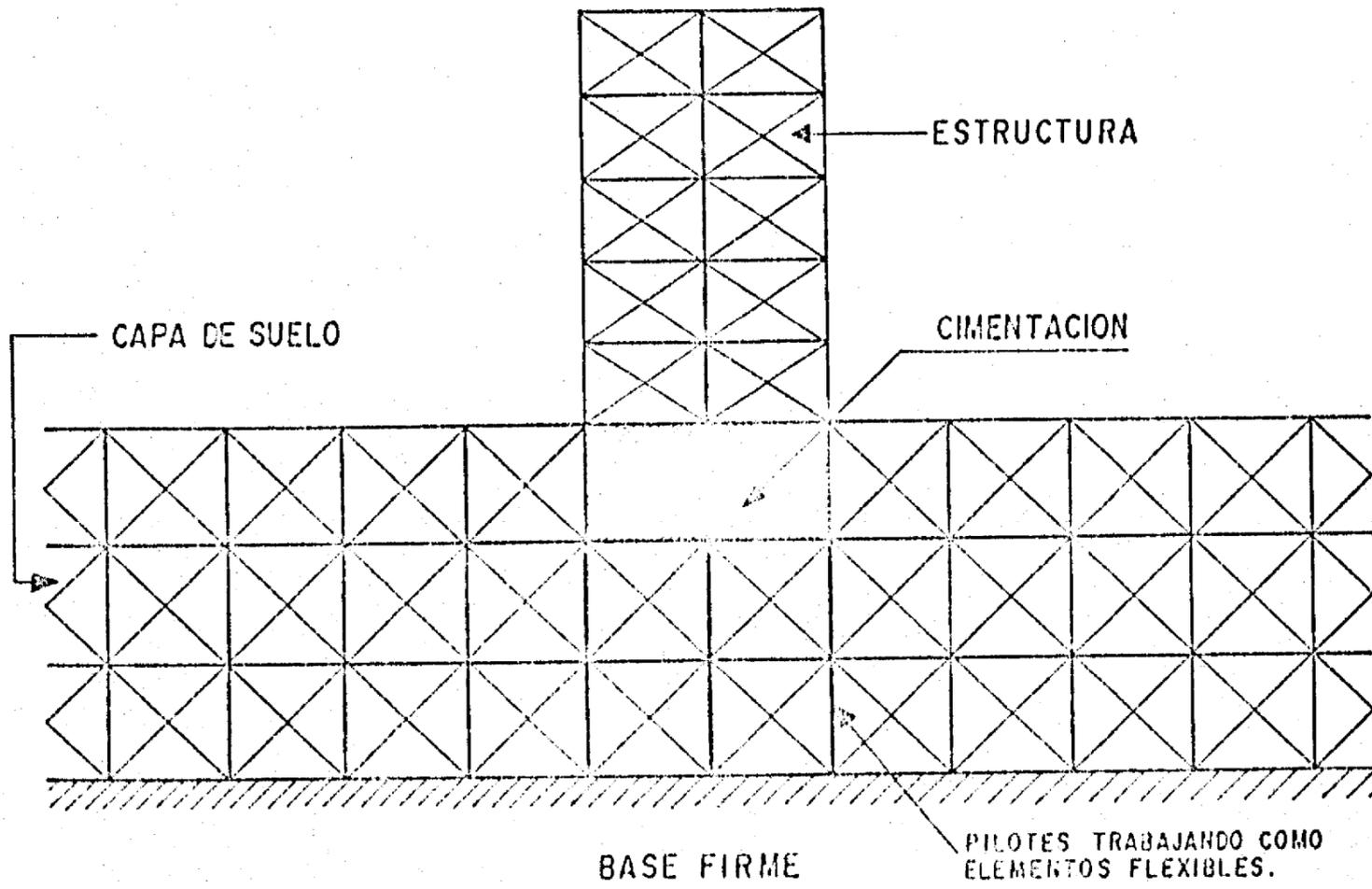
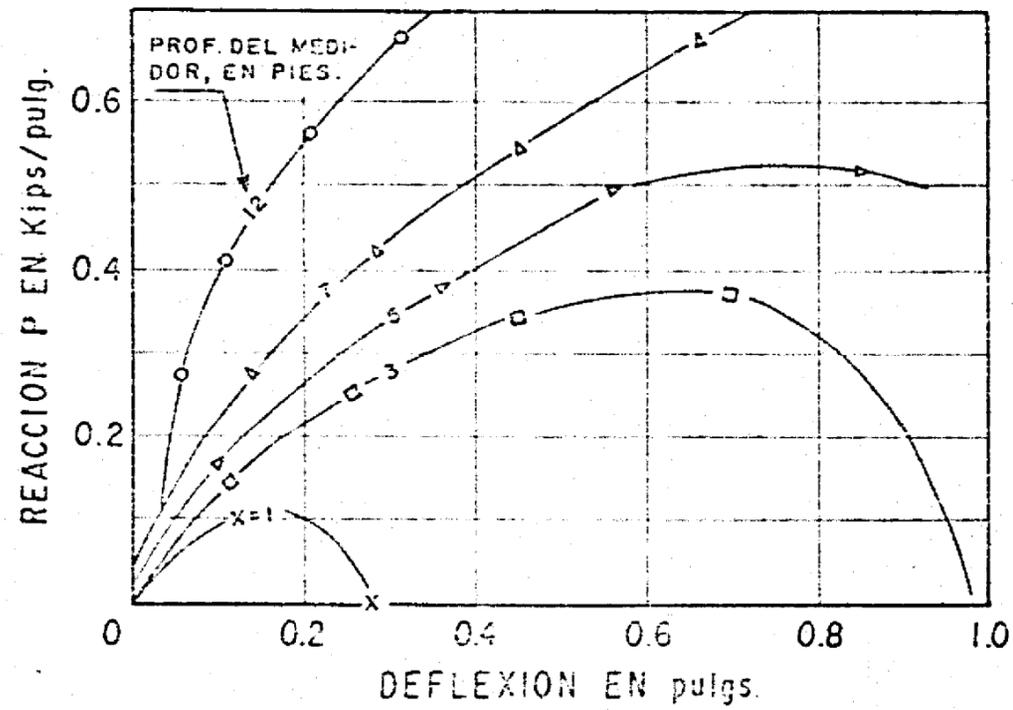
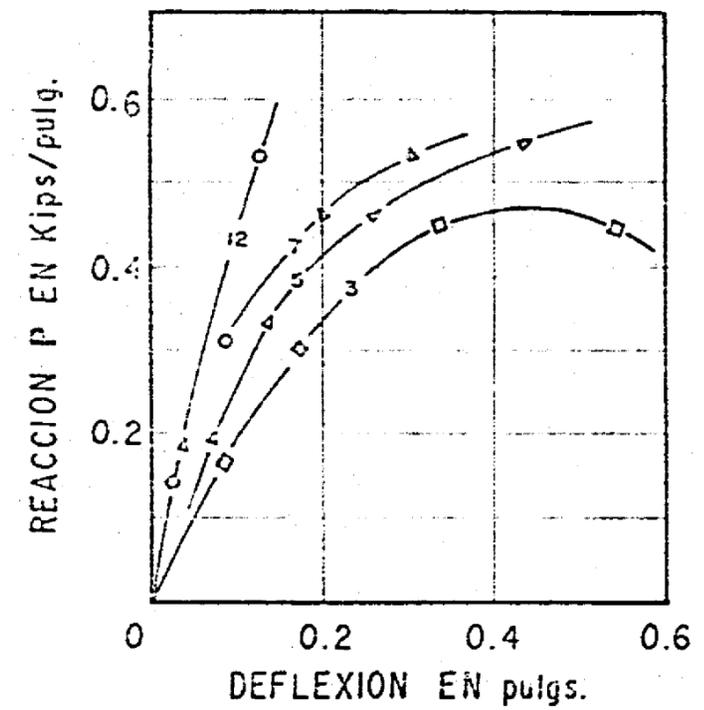


FIG. 2.8 MODELO TIPO ARMADURA .
(MINAMI Y SAKURAI, 1973)

a) CARGAS ESTATICAS



b) CARGAS DINAMICAS

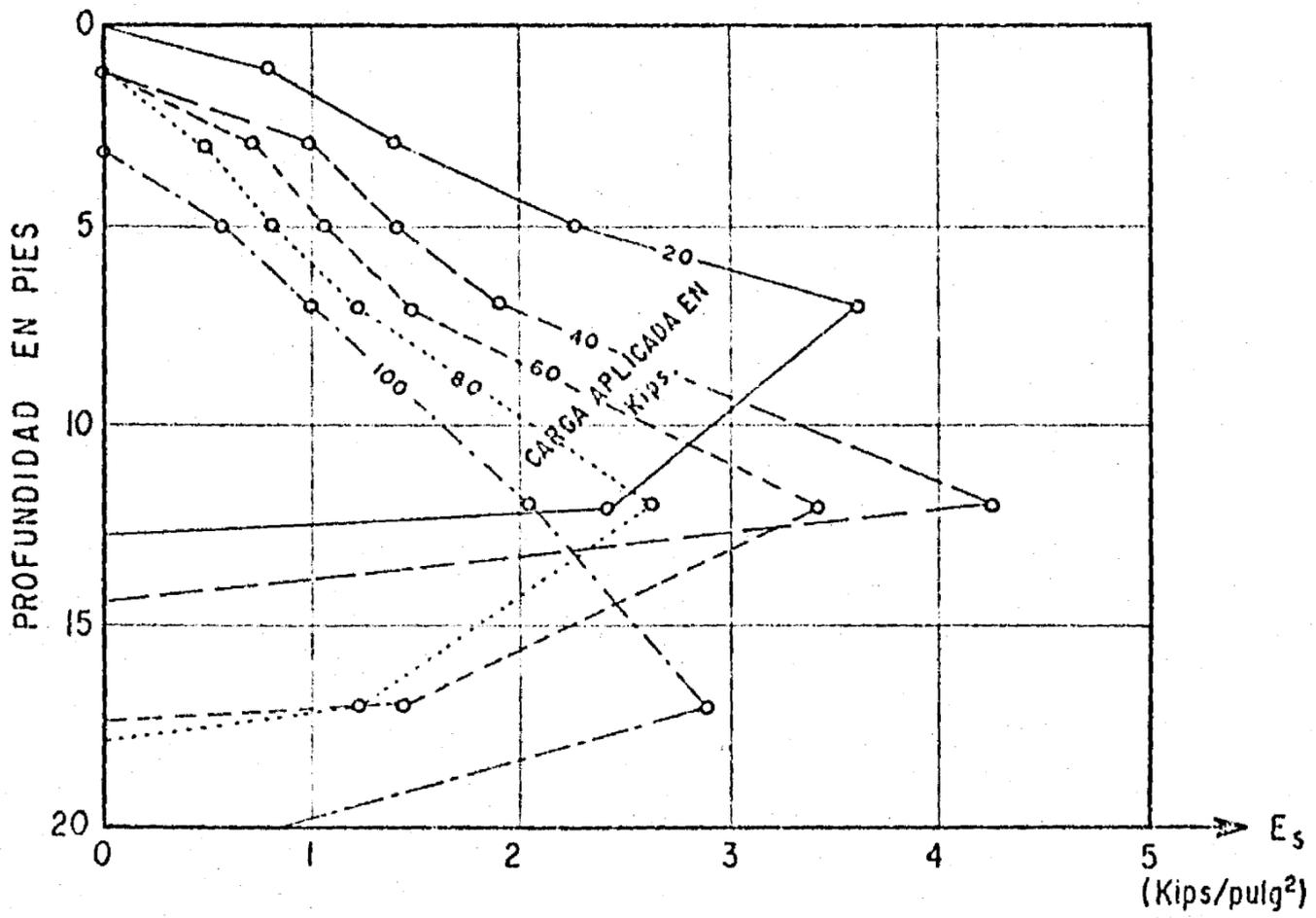


NOTA: La deflexión se refiere al punto donde se localiza el medidor de fuerza.

FIG. 2.9 REACCION DEL SUELO VS. DEFLEXION DEL PILOTE EN PRUEBA DE CAMPO.

(Mc CLELLAND & FOCHT, 1958)

a) CARGAS ESTATICAS



b) CARGAS DINAMICAS

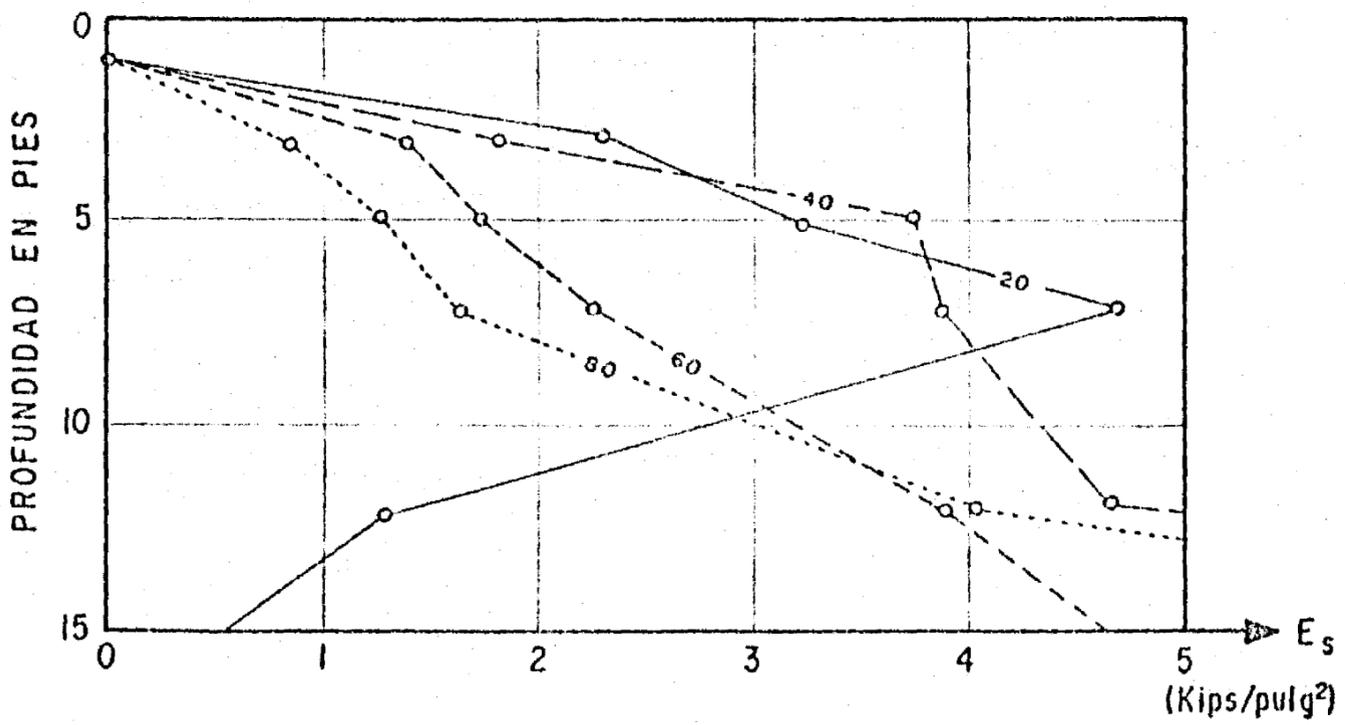


FIG. 2.10 MODULO DEL SUELO vs. PROFUNDIDAD EN PRUEBAS DE CAMPO.
(Mc CLELLAND & FOCHT, 1958)

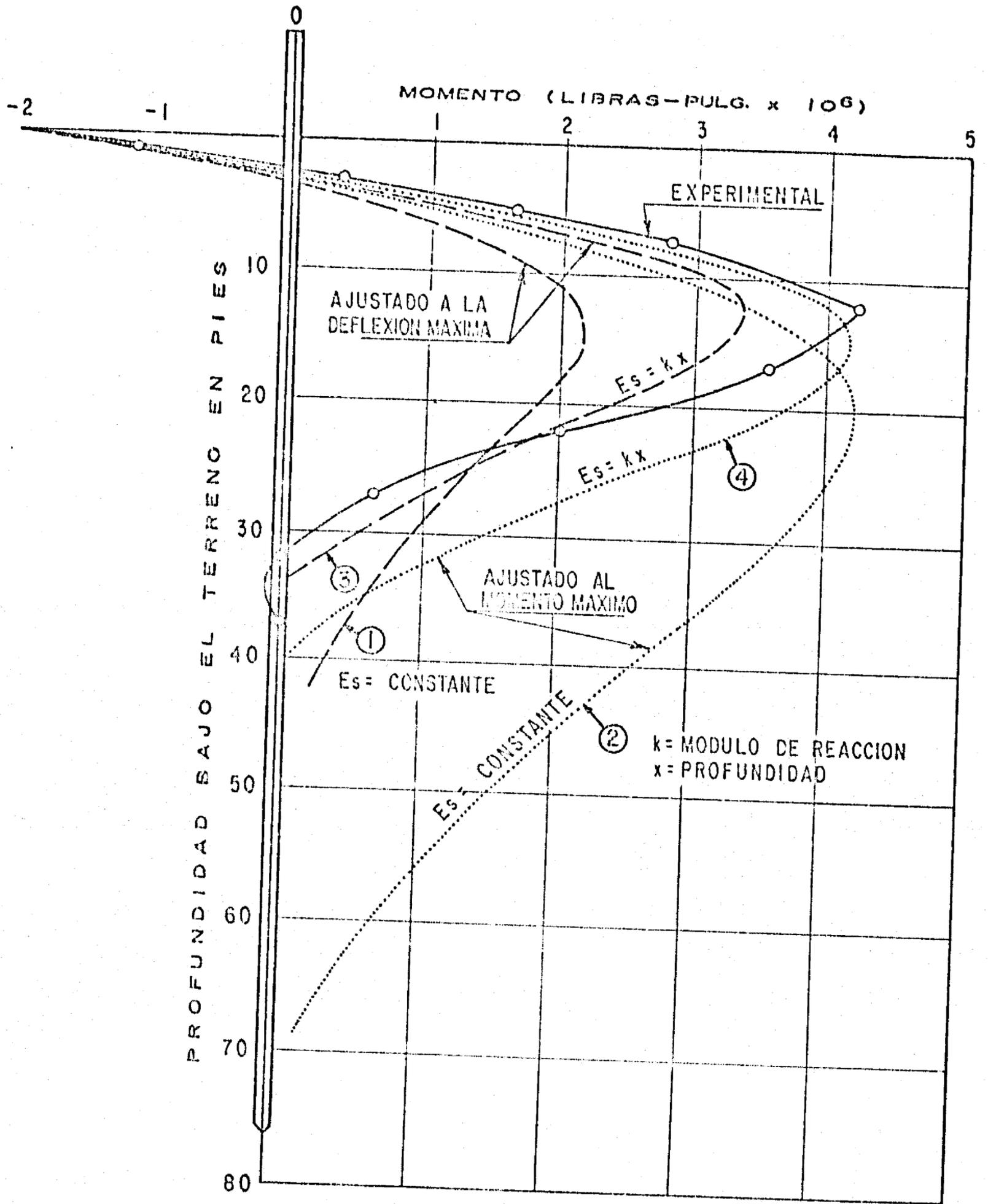


FIG. 2.II COMPARACION ENTRE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES TEORICOS Y EL EXPERIMENTAL. (REESE Y MATLOCK, 1956)

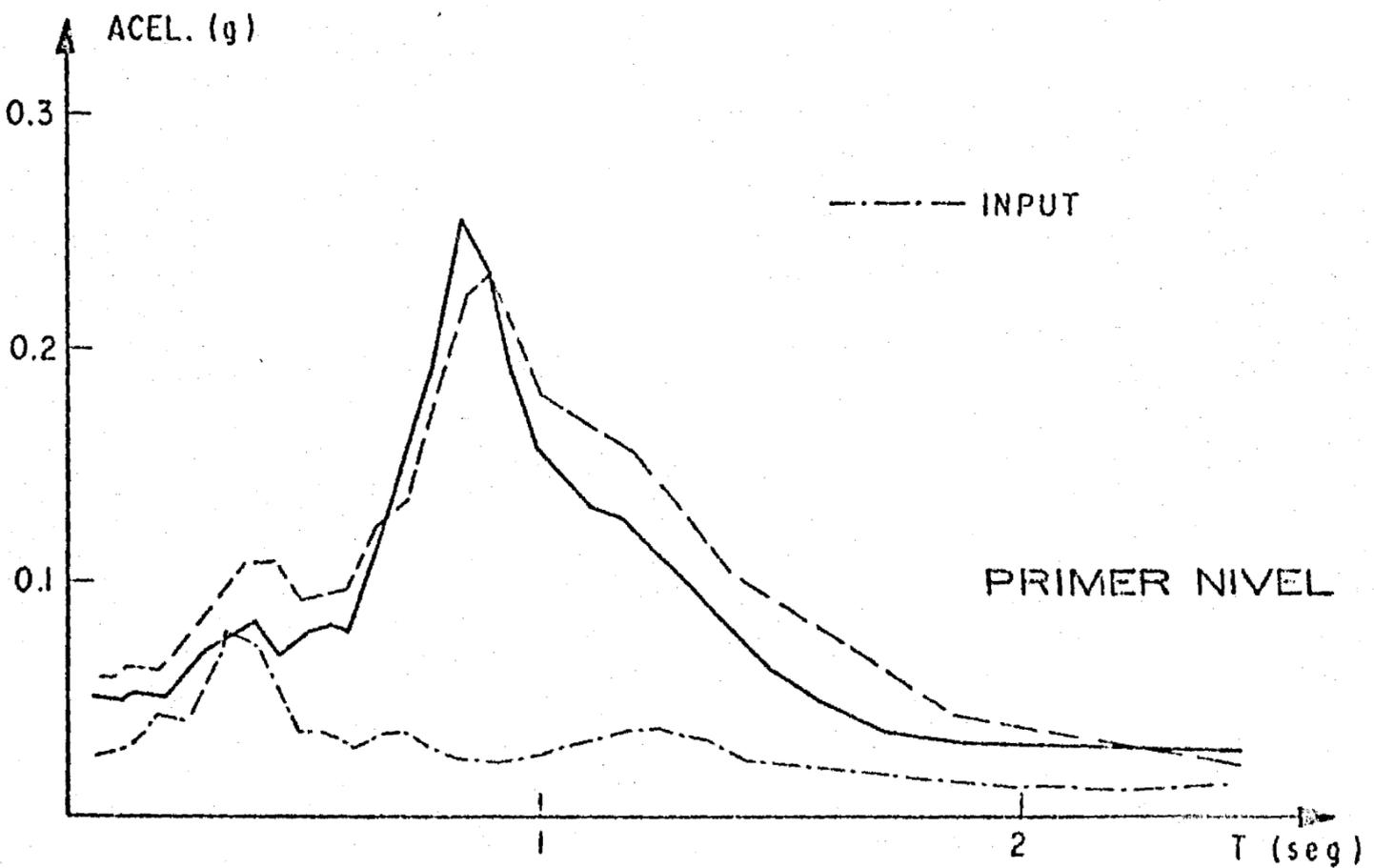
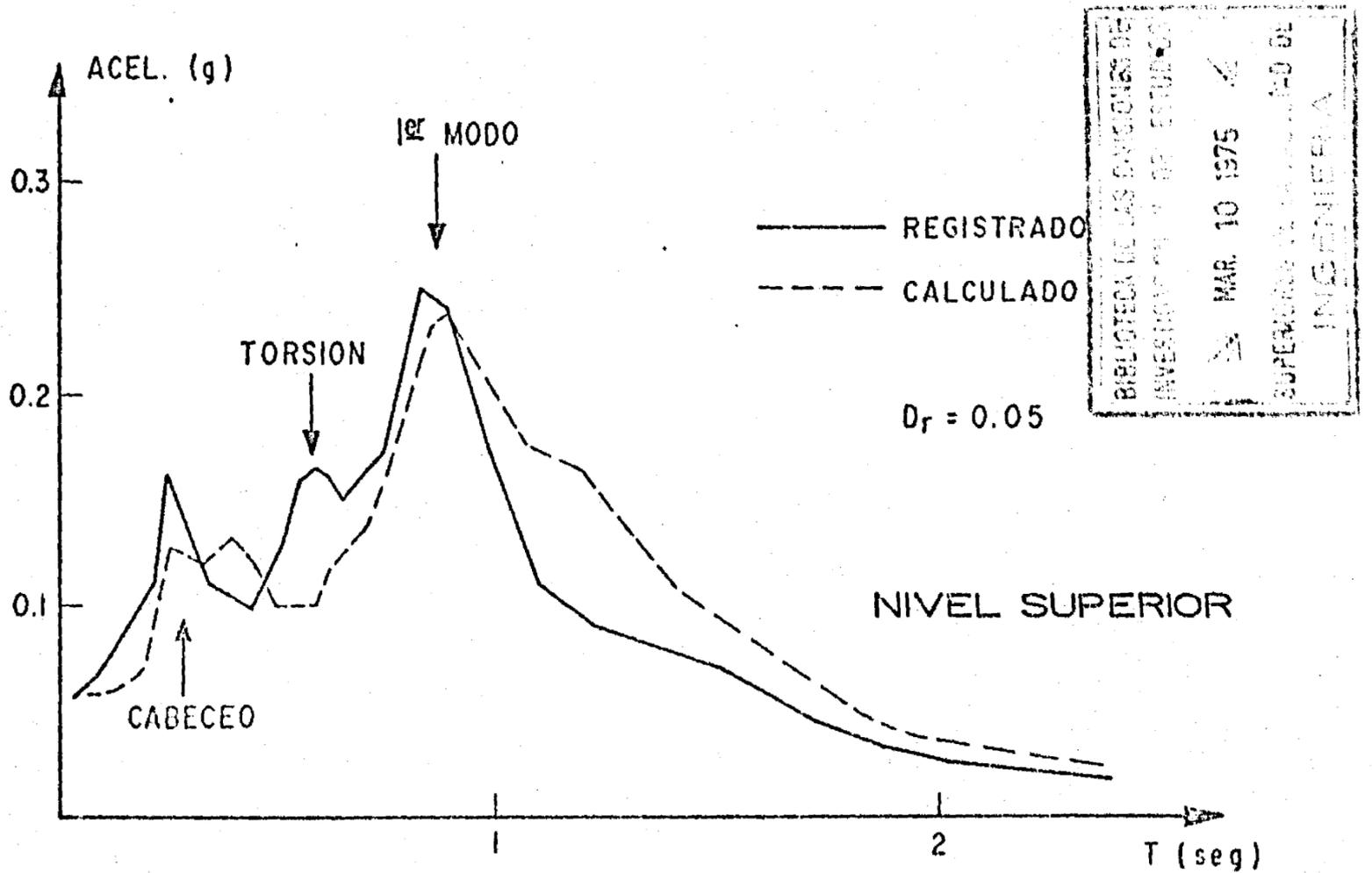
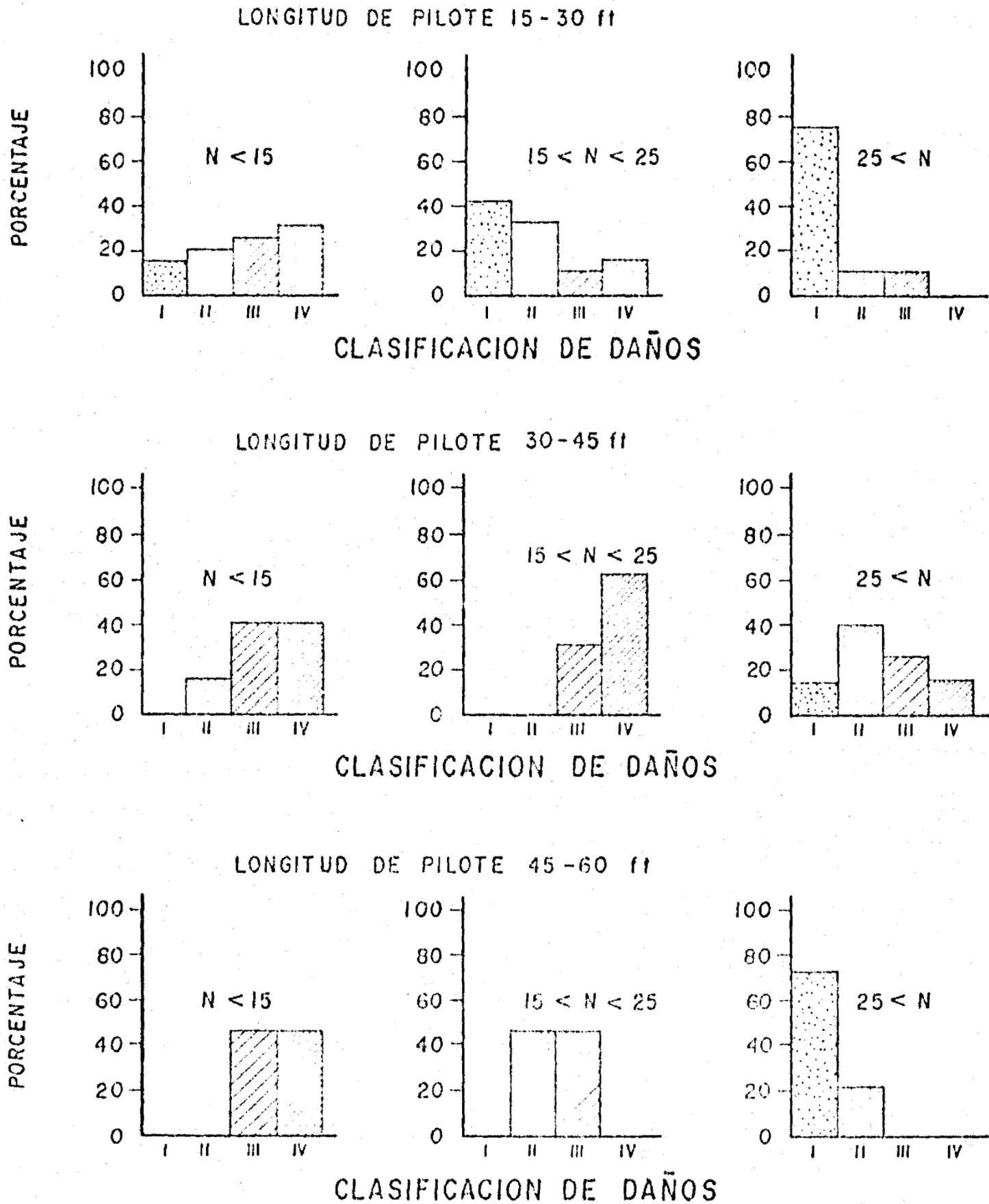


FIG. 2.12 COMPARACION DE LOS ESPECTROS DE RESPUESTA, REGISTRADOS Y CALCULADOS, EN UN EDIFICIO DE 5 NIVELES CON PILOTES.

(HISADA ET AL, 1973)



[LA CLASIFICACION DE DAÑOS VARIA DE I (LIGERO) A IV (PESADO)]

FIG. 2.13 INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA A LA PENETRACION DEL PILOTE, RESPECTO A LA EXTENSION DE DAÑOS.

(SEED, 1969)

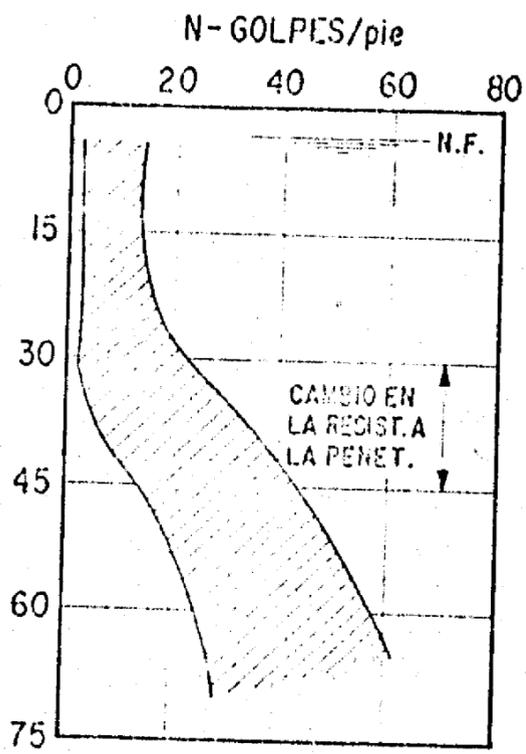


FIG. 2.14 RANGO DE LA RESISTENCIA A LA PENETRACION EN LA ZONA MUY DAÑADA.

(SEED, 1969)

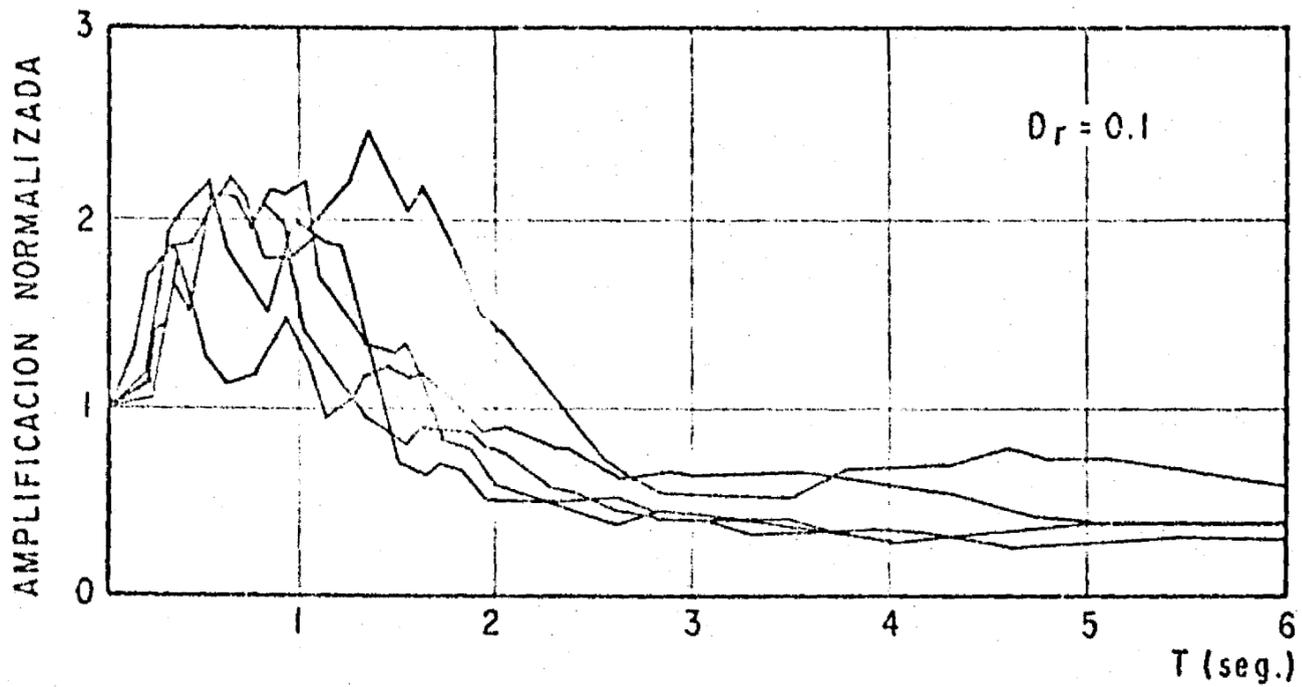


FIG. 2.15 a ESPECTRO NORMALIZADO DE ACELERACION PARA CIMENTACIONES PILOTEADAS EN SUELOS BLANDOS. (OHSAKI, 1969)

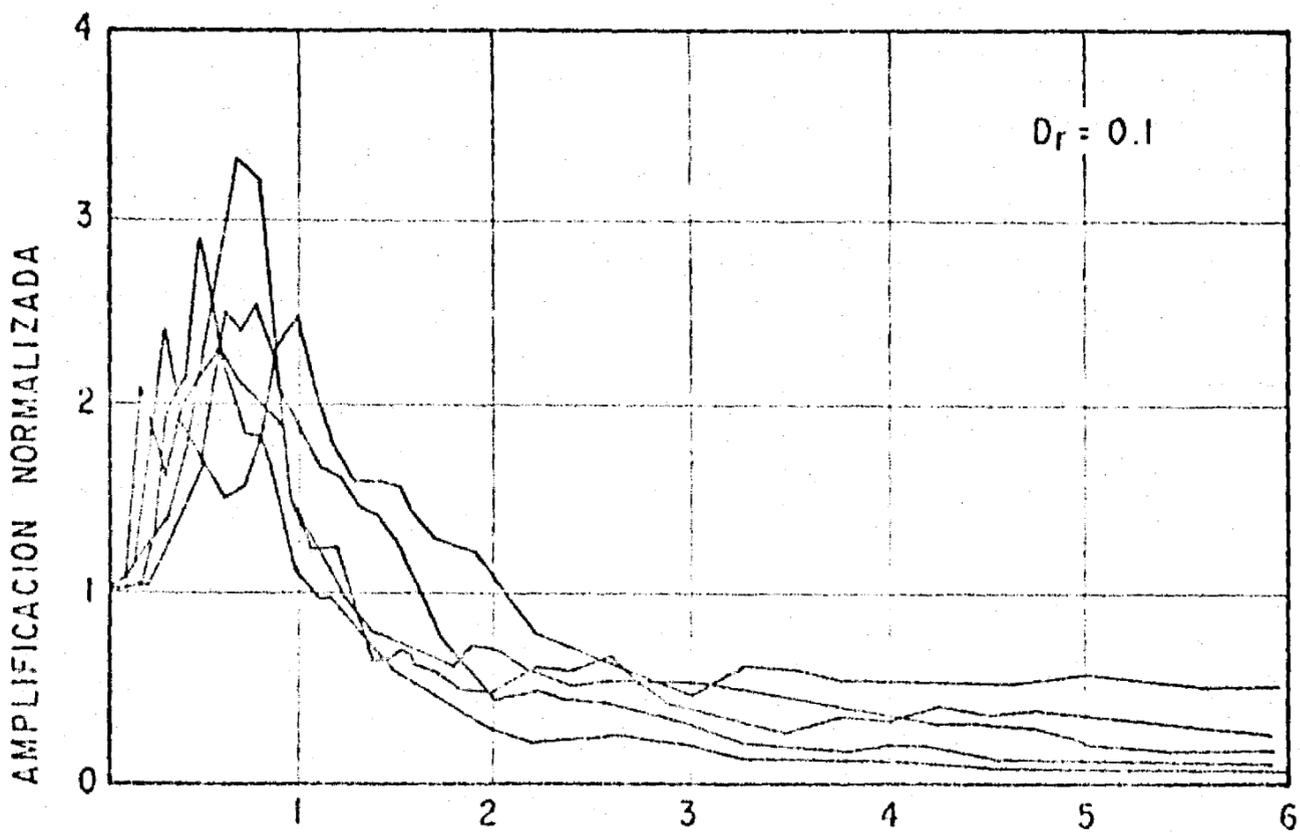


FIG. 2.15 b ESPECTRO NORMALIZADO DE ACELERACION PARA SUELOS BLANDOS ESTRATIFICADOS. (OHSAKI, 1969)

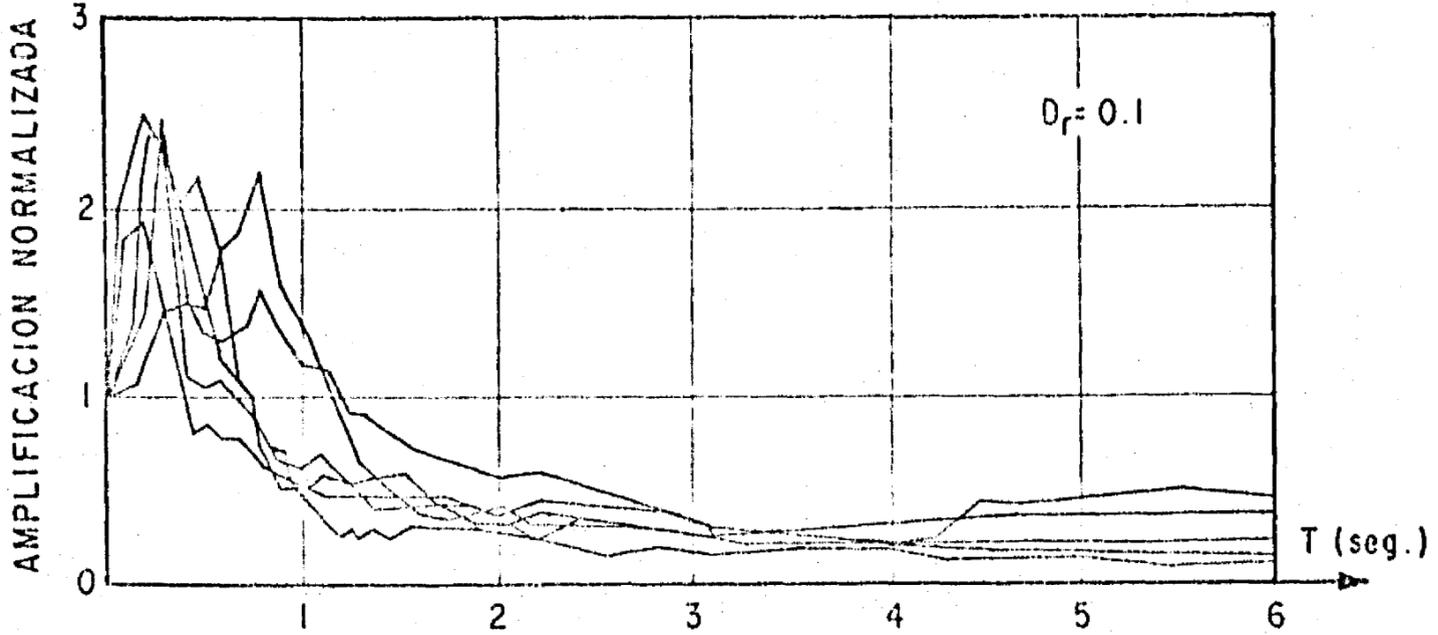


FIG. 2.16 a ESPECTROS DE ACELERACION NORMALIZADA DE CIMENTACIONES RIGIDAS EN SUELOS BLANDOS . (OHSAKI, 1969)

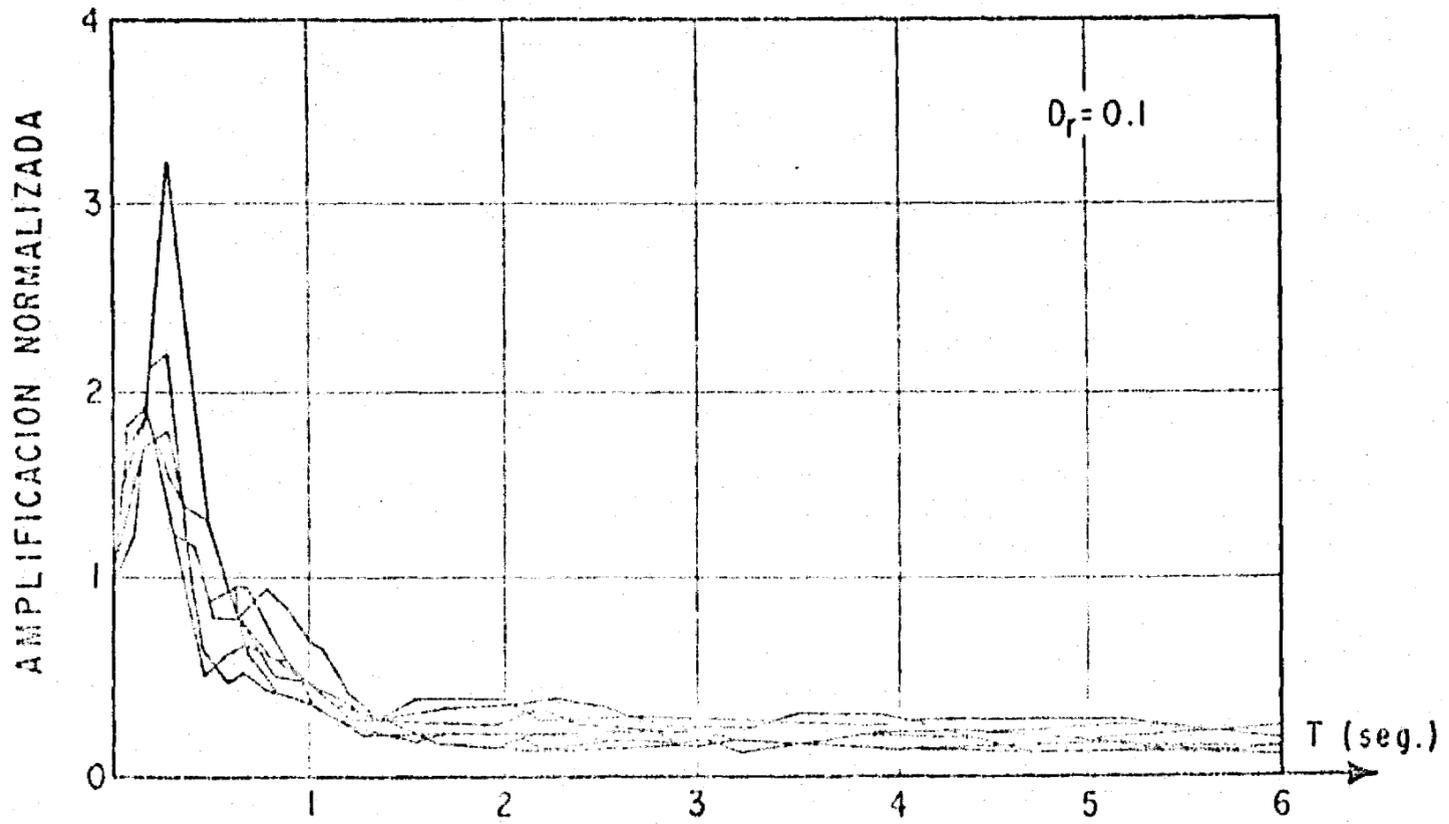


FIG. 2.16 b ESPECTROS DE ACELERACION NORMALIZADA PARA ROCAS Y SUELOS DUREOS . (OHSAKI, 1969)

CAPITULO III

TEORIAS DE TAJIMI Y DE OGATA - KOTSUBO

3.1 Introducción

En el Capítulo II se describieron brevemente varias de las teorías dinámicas que existen en la literatura, y se mencionó -- que el estudio de las mismas ayudan a comprender mejor el comportamiento dinámico de los pilotes. En este capítulo se describen más ampliamente la teoría de Tajimi (1969), que considera el análisis de un pilote dentro de un medio elástico homogéneo, y la de Ogata y Kotsubo (1966) que usan el modelo de Winkler para el estudio de la respuesta sísmica de pilotes individuales.

El objeto del estudio de estas dos teorías es hacer un análisis detallado del problema relacionado a la respuesta dinámica de pilotes de punta sujetos a sismos, y a través de él, determinar -- los aspectos más importantes que gobiernan el diseño de los pilotes.

3.2 Teoría de Tajimi

El planteamiento general al problema del comportamiento dinámico de un pilote aislado, que atraviesa un medio elástico homogéneo apoyado sobre un estrato rígido, ha sido presentado por Tajimi (1969). Las hipótesis utilizadas por Tajimi, en su modelo, son las siguientes:

- a) El suelo es un medio elástico lineal, caracterizado por G y ν

(módulo al cortante y relación de Poisson), y sobreyace a una roca rígida.

- b) El suelo tiene un amortiguamiento viscoso para las ondas de cortante que viajan verticalmente.
- c) Los desplazamientos verticales de la capa de suelo se desprecian.
- d) El pilote es de sección cilíndrica, de radio a y longitud H , y se apoya sobre la roca rígida.
- e) La cabeza del pilote está empotrada en la superestructura, que se mueve horizontalmente, y su punta está articulada.
- f) La fuerza cortante total de la superestructura actúa únicamente sobre la cabeza del pilote.

La ecuación de equilibrio dinámico del pilote se puede expresar como:

$$\rho_p \pi a^2 \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \ddot{u}_g \right) + EI \frac{\partial^4 u_p}{\partial z^4} = \left[p(z) + q(z) \right] e^{i\omega t} \quad \dots\dots(3-1)$$

donde:

ρ_p = masa específica (o densidad de masa) del pilote

u_p = desplazamiento lateral del eje del pilote

u_0 = amplitud de desplazamiento en la roca

$\ddot{u}_g = -u_0 \omega^2 e^{i\omega t}$, aceleración horizontal de la roca

E = módulo de Young del pilote

I = momento de inercia del pilote

$p(z)e^{i\omega t}$ = reacción del suelo en la superficie lateral del pilote a la profundidad z , y en la dirección horizontal x , causada por la respuesta del suelo a una excitación en su base.

$q(z)e^{i\omega t}$ = reacción del suelo en la superficie lateral del pilote a una profundidad z , y en la dirección horizontal x , debida a la fuerza cortante V concentrada sobre la cabeza del pilote.

Las funciones $p(z)$ y $q(z)$ se obtienen proyectando, sobre un eje x , los valores de los esfuerzos σ_r y $\tau_{r\theta}$ en cada caso.

En el apéndice III-1 se presentan los desarrollos matemáticos elaborados por Tajimi para obtener, mediante el uso de las ecuaciones de onda en tres dimensiones, la expresión de la función $p(z)$ que está dada por la siguiente ecuación:

$$p(z) = \rho_s \pi a \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \xi_n \omega_g \left[A_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) + B_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{2H} \right] \dots\dots\dots(3-2)$$

donde:

ρ_s = masa específica del suelo

$$\xi_n = \left[n^2 (1 + i 2 D_r) - (\omega / \omega_g)^2 \right]^{1/2}$$

$$\omega_g = \frac{\pi}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho_s}}, \text{ frecuencia fundamental del estrato de suelo}$$

A_n y B_n son constantes que dependen de las condiciones de frontera

K_1 = función de Bessel modificada

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho_s} \right)^{1/2}, \text{ velocidad de onda longitudinal}$$

$$c_s = \left(\frac{G}{\rho_s} \right)^{1/2}, \text{ velocidad de onda transversal}$$

G = módulo de elasticidad al cortante, = μ

λ y μ = son las constantes de Lamé

La función q(z) se puede expandir en serie como sigue:

$$q(z) = - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} \dots\dots\dots(3-3)$$

Ahora bien, suponiendo que la solución de la ecuación (3-1) se puede descomponer en series de Fourier, se tiene

$$u_p = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} U_n \text{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} e^{i\omega t}, \dots\dots\dots(3-4)$$

y que hay continuidad de desplazamientos del suelo al pilote, es decir:

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u_r \text{ para } r = a \text{ y } \theta = 0 \\ u_p &= -u_\theta \text{ para } r = a \text{ y } \theta = \frac{\tilde{\pi}}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-5)$$

la forma de la solución es:

$$u_p = \frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\tilde{\pi}} \right)^4 \frac{2V}{H} F(z, \omega) + u_0 G(z, \omega) \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 e^{i\omega t} \dots(3-6)$$

donde:

$$F(z, \omega) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 - \alpha_2 \frac{\rho_p}{\rho_s} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + \alpha_2 \xi_n \Omega_n} \text{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H}$$

$$G(z, \omega) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_2 (\Omega_n + 1) \frac{4}{\pi^2}}{n^4 - \alpha_2 \frac{c_p}{\rho_s} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + \alpha_2 \xi_n \Omega_n} \text{sen} \frac{n\pi z}{2H}$$

$$\alpha_2 = \pi \rho_s a^2 \omega_g^2 \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{1}{EI}$$

$$\Omega_n = \frac{1}{Z_n} \left[4K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) \right]$$

$$Z_n = \left[K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) \right] \left[K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) \right] - K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right)$$

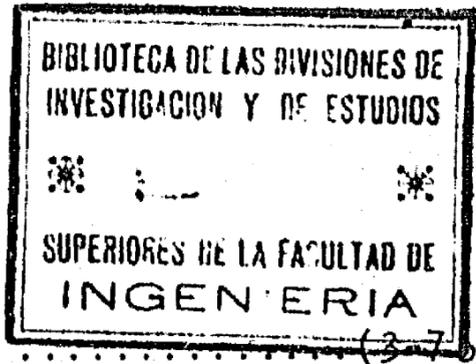
y K_0 es también función de Bessel modificada de orden cero.

La derivación de la solución dada por la ecuación 3-6 es muy extensa para ser presentada en el texto; sin embargo, dicha derivación es también incluida en el Apéndice III-1

El primer término de la ecuación 3-6 representa el efecto de la fuerza concentrada V_1 , aplicada en la cabeza del pilote; esto indica que, para $\omega = 0$ y $z = H$, la relación V/u_p es el valor de la constante estática de lo que sería el resorte horizontal para el sistema pilote - suelo; o sea:

$$k_h = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{2}{H} F(H, 0) \right]^{-1} \dots\dots\dots(3-7a)$$

Si se denomina con M la masa soportada por el pilote, la frecuencia natural del sistema será entonces:



$\omega^2 M = k$
 $F = u \cdot k$
 $u_0 \omega^2 M = F$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_b}{M}} = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^4 \frac{2M}{H} F (H, 0) \right]^{-1/2}$$

El segundo término, da el desplazamiento del pilote cuando, sin tener la fuerza cortante V en la cabeza, el manto de roca vibra con una aceleración horizontal igual a $-u_0 \omega^2 e^{i\omega t}$.

3.4 Teoría de Ogata y Kotsubo

La Fig. 3-1 muestra el modelo de un pilote que fué analizado por Ogata y Kotsubo (1966). Este modelo consiste en un pilote vertical que soporta una masa M, y se encuentra apoyado lateralmente por una serie infinita de resortes, los cuales representan la masa del suelo que rodea al pilote: o sea, se trata del modelo de Winkler.

Suponiendo nuevamente un pilote hincado en un estrato blando de suelo, que sobreyace a una roca rígida con un espesor H, el movimiento en la base puede representarse matemáticamente por:

$$u_g = u_0 e^{i\omega t}$$

Ogata y Kotsubo establecen la siguiente ecuación de equilibrio:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = - \left[m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + kD (y - \bar{u}) \right] \dots\dots\dots(3-8)$$

donde:

m = masa específica del pilote por unidad de longitud (más el suelo adherido si se desea incluir)

y = desplazamiento relativo del pilote con respecto al movimiento de la roca.

\bar{y} = desplazamiento total del pilote

\bar{u} = desplazamiento total del suelo

u_g = desplazamiento de la superficie del manto rocoso

u = desplazamiento relativo del suelo = $\bar{u} - u_g$

k = módulo de reacción del suelo

D = diámetro del pilote

El significado de las demás variables (E, I) es el mismo al dado anteriormente en la sección 3-2.

Como la derivación de la solución a la ecuación 3-8, es relativamente simple, la obtención de la misma se presenta a continuación.

El valor de \bar{u} se puede calcular a partir de la ecuación de onda en una dimensión, siendo:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{G} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \dots\dots\dots(3-9)$$

La solución de la ecuación 3-9, es de la forma:

$$\bar{u} = (A_1 \operatorname{sen} \frac{\omega z}{c_s} + A_2 \operatorname{cos} \frac{\omega z}{c_s}) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(3-10)$$

donde A_1 y A_2 son coeficientes que se determinan tomando en consideración las condiciones de frontera del problema; para este caso, estas condiciones son:

$$(\bar{u})_{z=0} = u_g \quad (\text{lo cual implica que no existe deslizamiento relativo en la superficie de contacto entre la roca y el estrato de suelo}) \dots\dots(3-11)$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_z = H = 0 \quad \text{(lo que implica que no hay esfuerzo cortante en la superficie del suelo)} \quad \dots\dots\dots(3-12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3-11) y (3-12), en la ecuación(3-10), se tiene:

$$A_2 = u_0$$

$$A_1 = u_0 \tan \frac{\omega H}{c_s}$$

Por tanto, la solución para el desplazamiento del suelo es:

$$\bar{u} = u_0 \left(\cos \frac{\omega z}{c_s} + \tan \frac{\omega H}{c_s} \sin \frac{\omega z}{c_s} \right) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(3-13)$$

Volviendo a la expresión (3-3), y considerando que:

$$\bar{y} = y + u_g$$

y

$$\bar{u} = u + u_g,$$

la ecuación (3-8) se puede escribir:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + kD (y - u) + m \frac{\partial^2 (y + u_g)}{\partial t^2} = 0$$

o expresarse mediante:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + kDy = kDu - m \frac{\partial^2 u_g}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots(3-14)$$

Puesto que la ecuación (3-14) es una ecuación diferencial con operadores lineales, su solución es igual a la solución general de la ecuación homogénea (vibraciones libres), más una solución particular que satisfaga la ecuación (3-14) (vibraciones forzadas).

Primeramente se contemplará la solución particular, suponiendo - que la misma puede ser expresada mediante:

$$y = Y(z) e^{i\omega t}$$

donde:

$$Y = A + B \cos \delta z + C \sin \delta z \dots\dots\dots(3-15)$$

$$\delta = \omega/c_s$$

Suponiendo también, por simplificación, que k y G son constantes con la profundidad z, y sustituyendo la ecuación (3-15) en la -- ecuación (3-14), y al mismo tiempo considerando que $u_g = u_0 e^{i\omega t}$, se tendrá:

$$EI (B\delta^4 \cos \delta z + C\delta^4 \sin \delta z) + kD (A+B \cos \delta z + C \sin \delta z) - m\omega^2 (A+B \cos \delta z + C \sin \delta z) = kD u_0 (\cos \delta z + \tan \delta H \sin \delta z - 1) + m u_0 \omega^2$$

Comparando los términos constantes y los coeficientes de - - - - cos δz y sen δz , de ambos lados en esta ecuación, se encuentra que los coeficientes A, B, y C son:

$$A = -u_0$$

$$B = \frac{kD u_0}{EI \delta^4 + kD - m \omega^2}$$

$$C = \frac{kD u_0 \tan \delta H}{EI \delta^4 + kD - m \omega^2}$$

Por lo tanto, la parte correspondiente a las vibraciones fuerza--

das en la solución de la ecuación (3-14), es:

$$Y = u_0 \left[\frac{kD (\cos \delta z + \tan \delta H \operatorname{sen} \delta z)}{EI \delta^4 + kD - m\omega^2} - 1 \right] \dots\dots\dots(3-16)$$

Considerando ahora la solución general a la ecuación homogénea - proveniente de la igualdad (3-14), y haciendo $y = Y(z) e^{i\omega t}$, - dicha expresión puede expresarse de la siguiente manera:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} = - (kD - m\omega^2) Y$$

La solución a esta ecuación es:

$$Y = e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \operatorname{sen} \beta z) + e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \operatorname{sen} \beta z) \dots\dots\dots(3-17)$$

donde:

$$\beta = \left[\frac{1}{4EI} (kD - m\omega^2) \right]^{1/4} \dots\dots\dots(3-18)$$

La solución de la ecuación (3-14), será entonces la suma de las - soluciones correspondientes a las vibraciones libres y a las for_z - zadas, por lo que dicha solución es:

$$Y(z) = e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \operatorname{sen} \beta z) + e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \operatorname{sen} \beta z) - u_0 \left[1 + \frac{kD (\cos \frac{\omega z}{C_s} + \tan \frac{\omega H}{C_s} \operatorname{sen} \frac{\omega z}{C_s})}{m\omega^2 - kD - EI (\frac{\omega}{C_s})^4} \right] \dots\dots\dots(3-19)$$

A, B, C y D, son coeficientes que dependen de las condiciones de frontera del pilote. Por ejemplo, los valores de estos coeficien_t - tes se obtienen en el Apéndice III-2 para las siguientes condicio_n - nes del pilote:

- 1) $(\gamma)_{z=0} = u_g$ } el pilote se mueve en su base junto-
con la roca

$$\begin{array}{l}
 2) \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{z=0} = 0 \\
 3) \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \right)_{z=H} = 0 \\
 4) \left(EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right)_{z=H} = \left(M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{z=H}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{pilote articulado en la base} \\
 \text{pilote con cabeza fija} \\
 \text{cortante transferido a la cabeza}
 \end{array} \right\} \quad (3-20)$$

Es conveniente aclarar que la ecuación 3-19, es válida solamente para $\beta > 0$. Para frecuencias muy altas, o valores muy grandes de m , el valor de β dado en la ecuación (3-18) puede convertirse en negativo y la solución a la ecuación (3-14) está dada por:

$$Y(z) = E e^{\xi z} + F e^{-\xi z} + G \operatorname{sen} \xi z + J \operatorname{cos} \xi z$$

$$-u_0 \left[1 + \frac{kD \left(\operatorname{cos} \frac{\omega z}{C_s} + \tan \frac{\omega H}{C_s} \operatorname{sen} \frac{\omega z}{C_s} \right)}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \right] \dots\dots\dots (3-21)$$

donde:

$$\xi = \left[- \frac{1}{EI} (kD - m\omega^2) \right]^{1/4} \dots\dots\dots (3-22)$$

y

$$Y(z) = y / e^{i\omega t}$$

E, F, G y J, son constantes determinadas por las condiciones de frontera.

3.5 Discusión

Del planteamiento presentado en las dos secciones anteriores, sobre las bases en las que cada una de estas dos teorías se apoya, se puede deducir que las modalidades de las mismas son las siguientes:

- a) Modelo de Tajimi.- Es un modelo que representa al suelo con sus propiedades elásticas (E_s y ν), y lo considera como un medio continuo. Sin embargo, la solución que se obtiene resulta relativamente compleja y difícil de ser aplicada fácilmente en la determinación de los factores más importantes que rigen el comportamiento dinámico de pilotes aislados.
- b) Modelo de Winkler.- Es un modelo simple y de fácil manejo. Además, ha sido utilizado ampliamente en problemas estáticos y su validez ha sido estudiada en base a numerosas pruebas de campo y laboratorio, permitiendo contar con un marco de referencia bien establecido cuando se desee comparar las respuestas dinámicas con las estáticas.

Ahora bien, con objeto de visualizar mejor la diferencia o similitud práctica entre las dos teorías presentadas, se determinó la respuesta del pilote mostrado en la Fig. 3.2 con cada una de ellas. Gráficamente, las curvas de respuesta que representan las ecuaciones 3-6 y 3-19, para este ejemplo, se muestran en la Fig. 3-3. En esta figura se observan dos aspectos importantes:

- 1o. De acuerdo con ambas teorías, ocurre resonancia en el sistema suelo-pilote cuando la frecuencia de excitación es igual a cualquiera de las frecuencias de resonancia del suelo; es decir, cuando $\omega = n \times \omega_g$ ($n = 1, 3, 5 \dots$). En este ejemplo, ω_g resultó igual a 5.5 radianes/seg.

- 2o. De acuerdo con la Teoría de Ogata y Kotsubo, existe también-

resonancia cuando ω adquiere un cierto valor, ω_s , que según se demuestra en el siguiente capítulo, corresponde a la frecuencia natural del sistema. En el ejemplo analizado el valor de esta ω_s fué de 8.5, es decir: $\omega_s/\omega_g = 1.54$.

El valor de ω_s , obtenido de acuerdo con la teoría de Tajimi - - (Ec.3-7b), resultó igual a 40 radianes/seg, o sea: $\omega_s/\omega_g = 7.27$. Como este último valor está muy por arriba de los comprendidos - en la Fig. 3-3, no fué posible dibujar, en la misma, la respuesta para tal frecuencia. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en la teoría de Ogata y Kotsubo, cuando ω es igual a ω_s no se produce resonancia debido al amortiguamiento radial que existe - en la teoría de Tajimi. Esta diferencia se muestra en la Fig. - 3-4, donde se indican las respuestas dadas por estas dos teorías, alrededor de ω_s , cuando el valor de esta frecuencia es la misma para ambas. (Para hacer que el valor de ω_s fuera la misma en - las dos teorías, fue necesario cambiar algunos de los datos del ejemplo; se aumentó el valor de k en la teoría de Ogata-Kotsubo y se disminuyó la rigidez E_I del pilote en ambas teorías).

De lo anterior, se puede deducir que la frecuencia natural del - sistema pilote-suelo, ω_s , resulta mucho mayor aplicando la teoría de Tajimi, que cuando se aplica la de Ogata-Kotsubo (aproximadamente 5 veces más grande). La razón de ello, es que en la Teoría de Tajimi no se considera la disminución del módulo E_s en las cercanías del pilote, como consecuencia de las grandes deformaciones que se producen en esa región*, mientras que con la - -

* Por esta misma razón, Yamamoto y Seki (1971-a y 1971-b, obtu--

vieron, en pruebas experimentales, valores de las frecuencias naturales muy por abajo de las predichas por la teoría. Estos dos autores utilizan un método similar al de Penzien (1970), pero -- desprecian la tensión del suelo en la parte posterior del pilote que Tajimi considera en su análisis; como se puede observar en la Fig. 3-5, la frecuencia obtenida por Yamamoto y Seki resulta igual a $1/\sqrt{2}$ el valor obtenido con la Teoría de Tajimi.

teoría de Ogata y Kotsubo se utilizan los valores de k obtenidos en pruebas experimentales de pilotes, donde las cargas aplicadas son de la magnitud de las de proyecto.

3.6 Conclusiones

- a) Para analizar los factores más importantes que intervienen en el comportamiento dinámico de un pilote (condiciones de resonancia, límites de flexibilidad, etc.), conviene hacerlo a través del modelo de Winkler, el cual, además de ser muy simple, su validez ha sido ampliamente estudiada.
- b) La Teoría de Tajimi puede utilizarse para determinar el amortiguamiento radial que se produce en el sistema pilote-suelo.

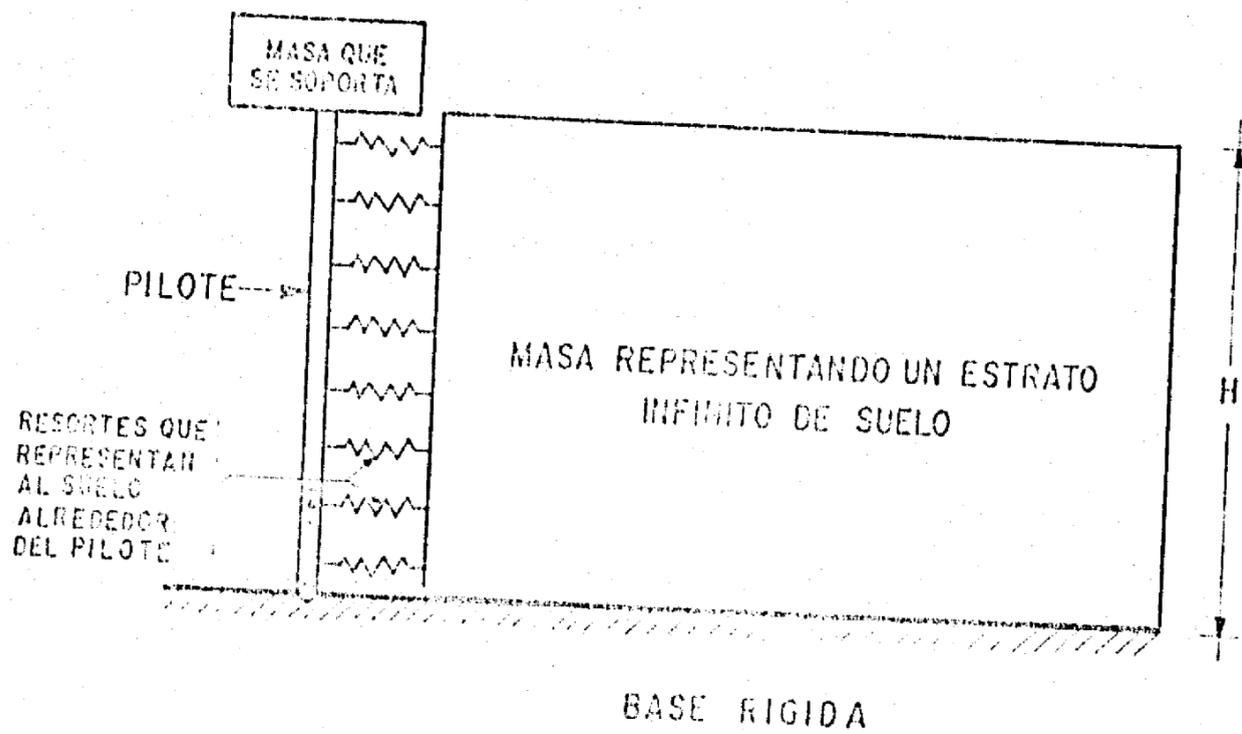
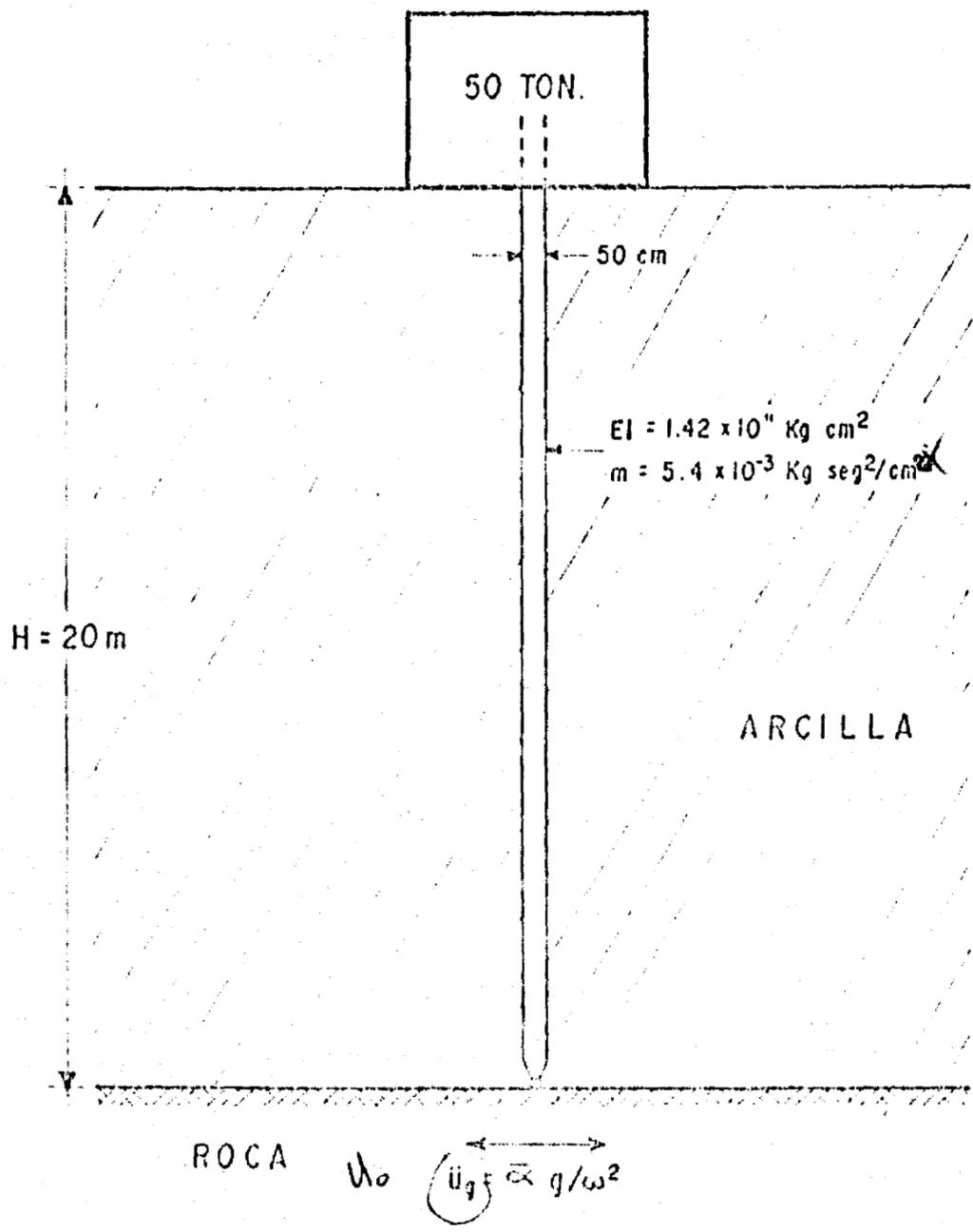


FIG. 3.1 MODELO TIPO WINKLER CON RESORTES LATERALES.



$S_u = 0.1 \text{ kg/cm}^2$

$G = 1000 S_u^*$ PARA $\epsilon = 10^{-4} = 100 \text{ kg/cm}^2$

$\gamma_m = 2 \text{ Ton/m}^3 = 0.002 \text{ Kg/cm}^3$

$kD = 72 S_u^{**} = 7.2 \text{ kg/cm}^2$

$C_s = \sqrt{\frac{g}{e_m}} = 7003.6 \text{ cm/seg.}$

g = ACELERACION DE LA GRAVEDAD

e_m = COEFICIENTE CONSTANTE USADO PARA SEÑALAR UNA FRACCION DE g .

* Este valor de $G = 1000 S_u$ lo recomienda Seed y Idriss (1970) para cargas dinámicas.

** Este valor de $kD = 72 S_u$, se dedujo de valores reportados por Broms (1965) en varias pruebas de pilotes.

FIG. 3.2 DATOS DEL PROBLEMA USADO COMO EJEMPLO.

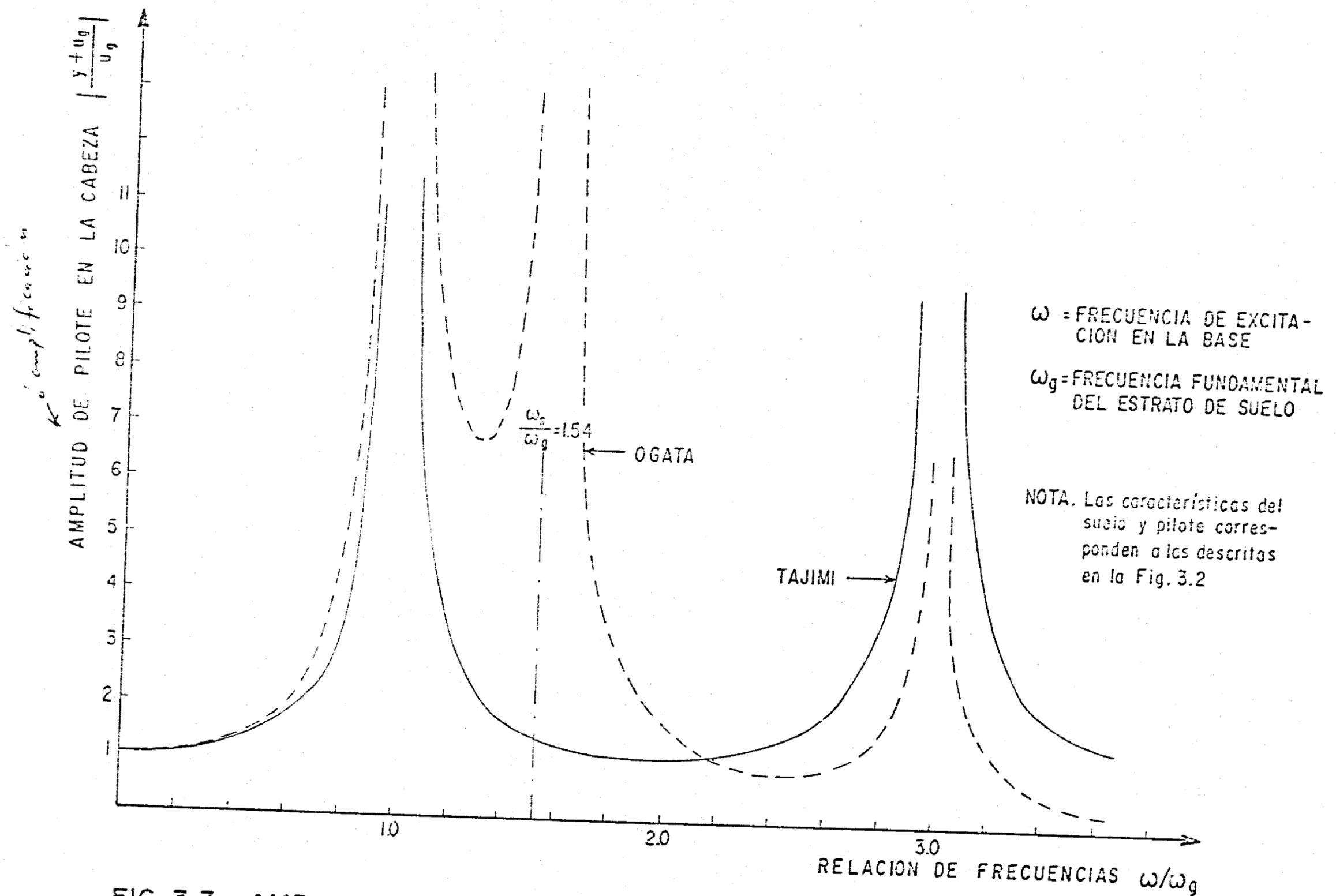


FIG. 3.3 AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO EN EL EXTREMO SUPERIOR DEL DEL PILOTE, USANDO LAS TEORIAS DE TAJIMI Y OGATA.

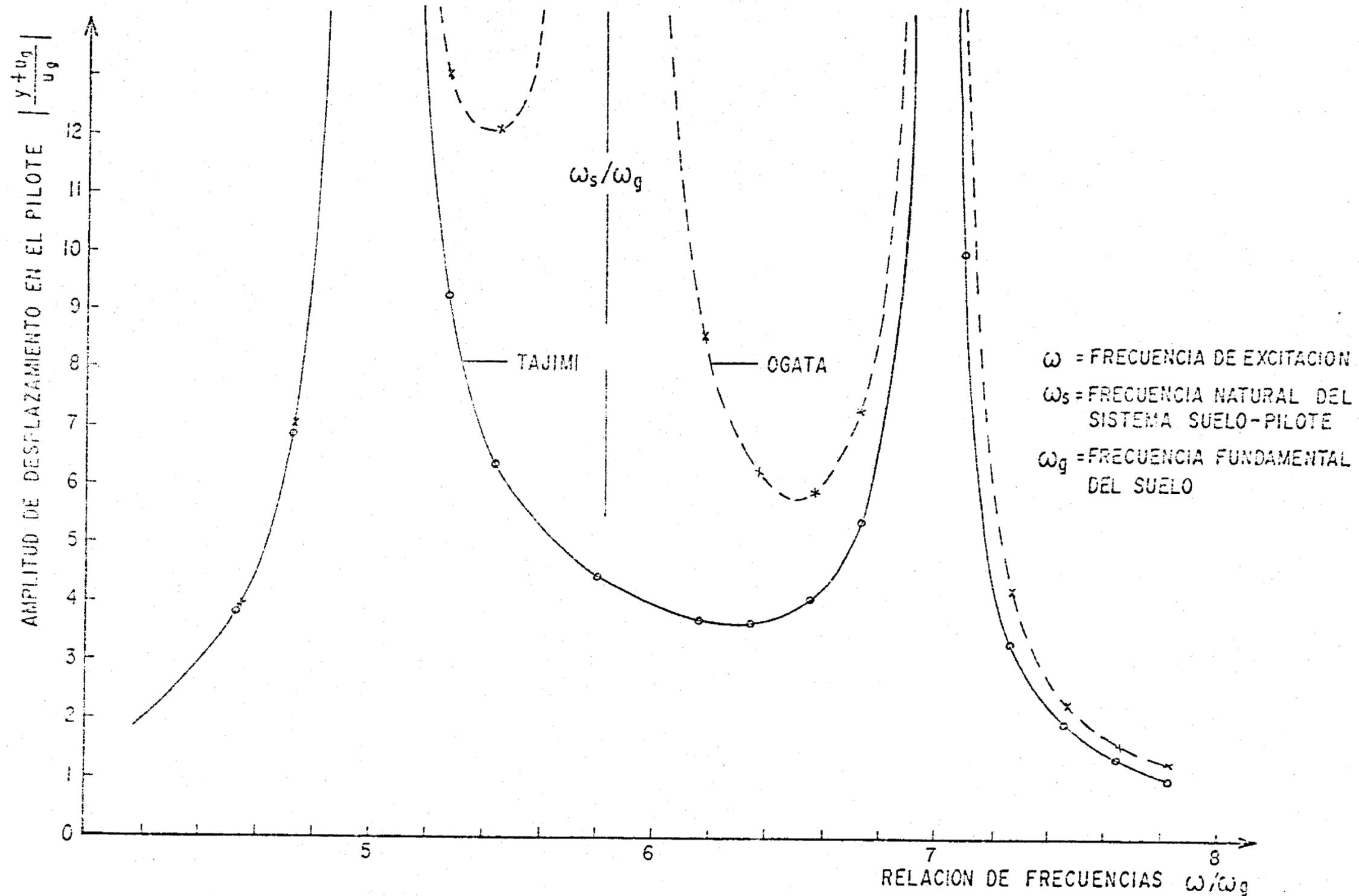


FIG. 3.4 RESPUESTA DEL PILOTE ALREDEDOR DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA SUELO-PILOTE, CUANDO SE APLICAN LAS TEORIAS DE TAJIMI, OGATA - KOTSUKO .

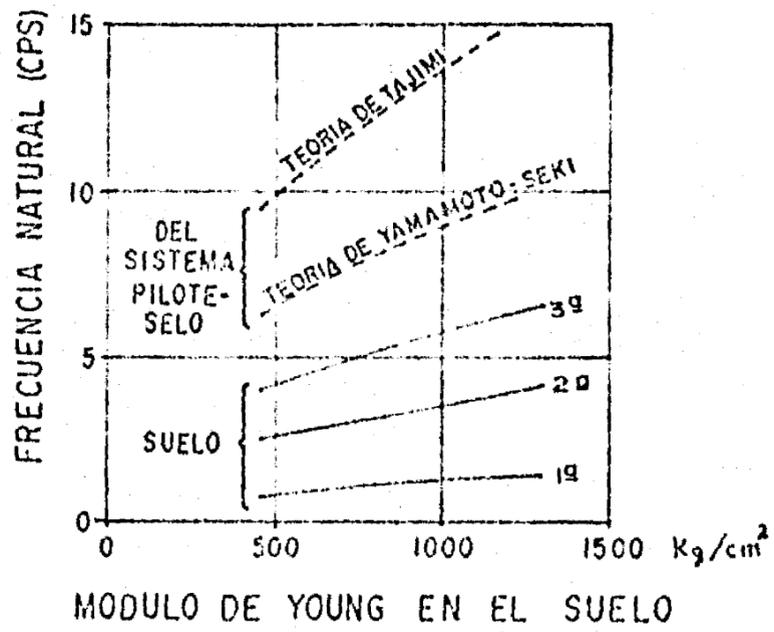


FIG. 3.5 COMPARACION ENTRE LAS TEORIAS DE TAJIMI Y DE YAMAMOTO-SEKI, PARA LAS FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA SUELO-PILOTE COMO FUNCION DEL MODULO DE YOUNG DEL SUELO.

CAPITULO IV

APLICACION DE LA TEORIA DE OGATA-KOTSUBO AL ANALISIS DEL COMPOR- TAMIENTO DE UN PILOTE

4.1 Introducción

En los dos capítulos anteriores se han expuesto, en forma breve, los datos que hasta la fecha se han publicado en materia del comportamiento de pilotes individuales. Se señaló también, la necesidad de determinar claramente el efecto producido por el desplazamiento del suelo sobre un pilote y establecer el rango, o los rangos, en los cuales se puede considerar que el suelo y el pilote, desprovisto de su carga vertical, tienen el mismo movimiento durante un sismo.

En este capítulo se emplea la Teoría de Ogata-Kotsubo, para hacer un análisis detallado de las condiciones en las cuales puede ocurrir resonancia en ausencia del amortiguamiento, y se estudia el efecto producido en el pilote por el desplazamiento del suelo. Se analiza también el efecto de la masa soportada por el pilote y se fijan los límites de flexibilidad del mismo.

4.2 Análisis de las Condiciones de Resonancia

De acuerdo con la forma como se plantea el problema del comportamiento dinámico del pilote, en el modelo mostrado por la -- Fig. 3.1, se puede tener resonancia en las siguientes dos condiciones:

- a) cuando el estrato de suelo donde el pilote se encuentra hincado entra en resonancia.
- b) cuando el sistema formado por el pilote-masa-suelo tiene resonancia.

El caso (a) se presenta cuando la frecuencia de excitación, ω , es igual a la frecuencia de resonancia del estrato de suelo, es decir, cuando

$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{C_s}{H} (2n - 1) \dots\dots\dots(4-1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

La influencia de esta frecuencia se puede ver en el término correspondiente a las vibraciones forzadas de la ecuación (3-19), o (3-21), el cual está dado por la siguiente expresión:

$$-u_0 \left[1 + \frac{kD (\cos \frac{\omega z}{C_s} + \tan \frac{\omega H}{C_s} \text{sen} \frac{\omega z}{C_s})}{m\omega^2 - kD - EI (\frac{\omega}{C_s})^4} \right] \dots\dots\dots(4-2)$$

En efecto, al sustituir la ecuación (4-1) en la expresión anterior, se puede ver que el numerador de la misma se vuelve infinito.

Para determinar la frecuencia de excitación bajo la cual puede ocurrir el caso (b), bastará con evaluar la frecuencia natural del sistema. Dicha frecuencia se puede obtener a partir de la solución de la ecuación diferencial correspondiente a las vibraciones libres de un pilote (Ec. 3-17), y aplicando las condiciones de frontera que se tengan en el problema bajo estudio.

Para las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones 3-20, - el Apéndice IV-1 muestra que, para $\beta > 0$ (ver Ec. # 11 en dicho - apéndice), la frecuencia natural del sistema pilote-suelo-masa - es igual a:

$$\omega_s = \left[\frac{4EI \beta^3}{M} \frac{(\sin^2 \beta H + \cos^2 \beta H)}{\sinh \beta H \cosh \beta H - \sin \beta H \cos \beta H} \right]^{1/2} \dots (4-3)$$

En el caso de que $\xi > 0$ ($\beta < 0$), la frecuencia natural viene dada por:

$$\omega_s = \left[\frac{2EI \xi^3}{M} \left(\frac{\cosh \xi H \cos \xi H}{\sin \xi H \cosh \xi H - \sinh \xi H \cos \xi H} \right) \right]^{1/2} \dots (4-4)$$

Tomando en cuenta que en los problemas prácticos muy rara vez se presenta el caso de que $\xi > 0$, de aquí en adelante sólo se considerará el caso correspondiente a $\beta > 0$.

Nótese que ω_s , en la ecuación 4-3, es trascendente ya que el valor de β es función de ω_s ; su solución se puede obtener mediante un proceso iterativo o mediante un procedimiento gráfico.

Sin embargo, exceptuando para muy altas frecuencias, el término - conteniendo ω en la ecuación 3-18 (donde se define β), es generalmente muy pequeño; ésto indica que, para fines prácticos, se puede tener una buena estimación de ω_s considerando como - - - $\beta = (kD/4EI)^{1/4}$, o lo que es lo mismo, haciendo $m = 0$.

Designando como ω_{st} a la frecuencia natural del pilote, calculada considerando a $m = 0$, en la Fig. 4-1 se muestra que aún para cilindros hasta de dos metros de diámetro, el error que se comete, al hacer $\omega_s = \omega_{st}$, es menor de 4%. (Para el caso de pilo-

tes comunmente usados, este error es en general menor de 1%).

Tanto en esta última figura como en las subsecuentes, la carga en los pilotes es aquella que corresponde a los esfuerzos máximos permisibles. Según el reglamento de construcción de Los Angeles, Calif., los esfuerzos permisibles para pilotes de concreto es de 63 Kg/cm^2 (900 psi) y para pilotes de acero de 840 Kg/cm^2 (12,000 psi) . La finalidad de este criterio consiste en establecer un marco de referencia para estudiar el comportamiento de pilotes que soportan masas, pero que tienen diferentes secciones transversales o distintas rigideces. Más adelante, se estudia el efecto que tiene la variación de la carga axial en el comportamiento de un mismo pilote.

4.3 Límites de Flexibilidad y Efecto del Desplazamiento del Suelo

a) Límites de Flexibilidad

La Fig. 4-2 da la relación de ω_{st} Vs S_u , siendo S_u la resistencia no drenada de arcillas saturadas, para diferentes tipos de pilotes; en esta figura se puede ver que ω_{st} aumenta cuando S_u crece. Por otro lado, la Fig. 4-3 muestra que esta relación es prácticamente independiente de H , excepto para los casos en que S_u es muy bajo y/o el diámetro del pilote muy grande y/o H es relativamente pequeña. (Obsérvense que todos estos últimos casos corresponden en realidad a la condición de pilotes rígidos) Es importante observar en la Fig. 4-2 que ω_{st} aumenta,

no solamente cuando S_u crece, sino que también cuando la rigidez (EI) del pilote disminuye. A fin de clarificar esta aparente contradicción, resulta conveniente analizar los valores de EI , β y M , en la ecuación 4-3, cuando se varía el diámetro del pilote D .

Se sabe que:

$$\begin{aligned} EI & \quad (\text{rigidez del pilote}) & \sim D^4 \\ M & \quad (\text{masa sobre el pilote}) & \sim D^2 \\ \beta & \quad (\text{según Ec. 3-18}) & \sim 1/D^{3/4} \quad (\text{para } m = 0) \end{aligned}$$

Para valores grandes de H , el término de la ecuación 4-3, entre paréntesis, es igual a la unidad (los valores de las funciones senh y cosh son iguales para argumentos mayores de 3, y el producto de sen x cos es despreciable). Por consecuencia, se tiene que:

$$\omega_s^2 \sim \frac{D^4}{D^2 D^{3/4}} = \frac{1}{D^{1/4}}$$

Nótese que se está suponiendo un pilote sin peso propio; sin embargo, si se considera a $m \neq 0$, el valor de β disminuiría aún más a medida que se aumenta D , y por consiguiente, la frecuencia natural también disminuiría cuando se aumenta el diámetro del pilote.

Para valores pequeños de βH , el término entre paréntesis de la ecuación 4-3, no solamente deja de ser igual a

la unidad, sino que es muy significativo en el valor de ω_s^2 .

La Fig. 4-4 muestra la variación de ω_s^2 con la relación D/H (ω_s^2 se calcula usando la fórmula 4-3). Esta figura deja ver tres importantes zonas; la primera corresponde a valores de $D/H < 0.084$ y en ella se tiene que ω_s^2 disminuye cuando D aumenta. Es también importante señalar que en esta zona, el término entre paréntesis de la ecuación 4-3 es el único que contiene H y es constante; por lo tanto, ω_s es independiente de la longitud H . Esta es precisamente la zona donde se puede considerar que los pilotes se comportan como flexibles, o lo que es lo mismo, como pilotes infinitamente largos.

Existe una segunda zona, en la Fig. 4-4, correspondiente a valores de $D/H > 0.2$, donde ω_s^2 aumenta con D y deja de ser independiente de H ; esta es la zona donde los pilotes se comportan como cuerpos rígidos. Finalmente hay una tercera zona que se le puede llamar de transición, la cual corresponde a $0.084 \leq D/H \leq 0.2$; aquí, ω_s^2 es prácticamente independiente de D y varía ligeramente con H ; en esta tercera zona es donde quedarían localizados los llamados pilotes intermedios.

Con el objeto de establecer resultados más generales, y facilitar el manejo de los factores que intervienen en el comportamiento de los pilotes, se definieron los si--

güentes parámetros adimensionales:

$$b = \frac{Hm}{M} = \text{relación de masas}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{kDH^4}{4EI} = \text{relación de rigideces}$$

Considerando nuevamente la suposición de que los pilotes soportan un peso igual al que produce los esfuerzos máximos permisibles en el material del pilote, los valores típicos del parámetro b se dan en la Fig. 4-5, y los de $\bar{\lambda}$ en la tabla 4-2.

Un uso inmediato de estos dos parámetros, está en el cálculo de la frecuencia natural del sistema pilote-suelo, cuando el peso propio del pilote es nulo ($b=0$). Para este caso,

$$\beta = \frac{\bar{\lambda}^{1/4}}{H} \dots\dots\dots(4-5)$$

y la relación adimensional $\omega_s^2 / (4EI/H^3M)$ es solamente función de $\bar{\lambda}$. La Fig. 4-6 da valores de $\bar{\lambda}$ contra la relación mencionada. En esta figura se muestran nuevamente las tres zonas identificadas en la Fig. 4-4; la zona "1" es donde $\bar{\lambda} < 0.316$ y corresponde a la zona donde los pilotes se comportan como cuerpos rígidos ($D/H > 0.2$ en la Fig. 4-4). La zona "2" es aquella donde $0.316 \leq \bar{\lambda} \leq 5$ y corresponde exactamente a la localizada en la Fig. 4-4, entre los valores de $D/H = 0.084$ y 0.2 . Finalmente, la zona "3" ocurre cuando $\bar{\lambda} > 5$, y existe una relación li--

neal en la escala doblemente logarítmica entre $\bar{\lambda}$ y $\omega_s^2/(4EI/H^3M)$; esta es la zona donde los pilotes se comportan como elementos flexibles o infinitamente largos.

b) Efecto del Desplazamiento del Suelo

Se analizará ahora, con cierto detalle, el efecto causado por el movimiento del suelo sobre el pilote y se establecerán los rangos en los cuales un pilote sin carga sigue el desplazamiento del suelo. Para ello se estudiará el comportamiento de un pilote sin masa en su parte superior y se analizará su desplazamiento relativo respecto al suelo.

La respuesta de un pilote sin masa en su cabeza y sujeto a un movimiento dinámico en su base, se obtiene siguiendo el mismo procedimiento usado en el capítulo III para obtener la solución dada por la Ec. (3-19); es decir, dicha solución es también aplicable para este caso, sólo que en la determinación de los coeficientes de integración se deberá tomar en cuenta que la cuarta condición de borde, dada por la Ec. 3-20, se debe cambiar por la siguiente expresión:

$$(EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3})_{z=H} = 0 \dots\dots\dots(4-6)$$

(esta expresión significa que la fuerza cortante en la cabeza = 0)

En el Apéndice IV-2 se obtienen los valores de los coeficientes A, B, C y D correspondientes a este caso.

Ahora bien, la ecuación que da la respuesta de un pilote en su parte superior ($z = H$) es:

$$Y = \frac{u_0}{\cos 2\beta H + \cosh 2\beta H} (1 + \chi) \cosh \beta H (1 + \cos 2\beta H + \text{sen } 2\beta H) + \iota \chi \text{senh } \beta H (1 - \cos 2\beta H + \text{sen } 2\beta H) - \left(u_0 + \frac{\chi u_0}{\cos \beta H} \right) \dots \dots \dots (4-7)$$

donde:

$$\iota = \delta / 2 \beta^2$$

$$\chi = \frac{kD}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \dots \dots \dots (4-8)$$

El Apéndice IV-2 muestra también, que a medida que el pilote tiende a ser más flexible, éste sigue el desplazamiento del suelo [$\beta H \rightarrow \infty$, o lo que es lo mismo, cuando $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ (ver Ec. 4-5)]; por el contrario, a medida que el pilote es más rígido ($\bar{\lambda} \rightarrow 0$), éste tiende a permanecer inmóvil mientras que el suelo se mueve alrededor de él. Este efecto se muestra gráficamente en las Figs. 4-7 a 4-10.

Examinando estas últimas figuras se puede observar que, para valores de $\bar{\lambda} > 5$, los pilotes siguen muy de cerca el movimiento del suelo, y puesto que la mayor parte de los pilotes que se utilizan en la práctica caen en esta categoría (véase la Tabla 4-2), la suposición de que los pilotes siguen el desplazamiento del suelo es correcta en la mayoría de los problemas prácticos.

La expresión que da la diferencia entre los desplazamientos del suelo y pilote, en la parte superior del sistema, es la siguiente:

$$y - u = u_0 \left\{ - \frac{X+1}{\cos \beta H} + \frac{1}{\cos 2\beta H + \cosh 2\beta H} \left[(1+X) \cosh \beta H (1 + \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) + X \senh \beta H (1 - \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) \right] \right\}$$

En base a lo anterior, se puede decir lo siguiente:

1o. Los desplazamientos causados en el pilote, debidos al movimiento del suelo, tienen generalmente el mismo orden de magnitud de los desplazamientos relativos que el estrato de suelo experimenta, con respecto a la roca, durante un sismo. La Fig. 4-11 muestra los desplazamientos correspondientes al pilote del ejemplo dado por la Fig. 3-2, para diferentes frecuencias de excitación; el valor de $\bar{\lambda}$, para dicho ejemplo, fue de 200.

2o. El rango en el cual se puede considerar que los pilotes se comporten como elementos flexibles, y siguen el desplazamiento del suelo, corresponde a $\bar{\lambda} > 5$.

Conviene señalar que el valor frontera de $\bar{\lambda}$, correspondiente al valor que las teorías estáticas dan para pilotes flexibles, es de $2.25^4 = 25.8$ [el valor de 2.25 es el recomendado por Broms (1964) para BH , donde $B = \sqrt[4]{KD/4EI}$]. Como este valor de $\bar{\lambda}$ (25.8), es mucho ma-

yor que el valor frontera que se acaba de obtener para problemas dinámicos ($\bar{\lambda} = 5$), es correcto suponer que si un pilote se comporta flexible, bajo carga estática, también lo hace bajo carga dinámica.

4.4 Efecto de la Masa Soportada por el Pilote

Para evaluar el efecto de la masa soportada en la respuesta de un pilote, conviene comparar los desplazamientos y los momentos flexionantes del pilote con y sin carga vertical.

Esta comparación puede hacerse con el ejemplo de la Fig. 3-2.

Considerando nuevamente la Fig. 4-11, que muestra el desplazamiento del pilote sin masa por soportar, y la Fig. 4-12, que muestra el desplazamiento para una carga de 50 toneladas, se puede observar que el efecto de dicha carga es grande en el extremo superior y prácticamente insignificante en la base.

Resulta también interesante observar el comportamiento del pilote trabajando bajo frecuencias cercanas a la natural del sistema pilote-suelo (ω_s); este comportamiento se puede apreciar claramente en la Fig. (4-13), en la cual aparece el desplazamiento en la cabeza del pilote para frecuencias alrededor de ω_g y ω_s ; en la misma figura se aprecia el efecto de la segunda frecuencia de resonancia del estrato de suelo.

La respuesta del pilote, en cualquiera de las frecuencias de resonancia, es infinita si el amortiguamiento es igual a cero. Sin embargo, debido a que el denominador del término de las vibracio

nes forzadas aumenta muy rápidamente con ω , aún para frecuencias muy cercanas a la de resonancia la respuesta disminuye muy rápidamente.

Ahora bien, si se hace variar la masa soportada por el pilote, se obtendrá una variación en ω_s (véase la ecuación 4-3). La Fig. 4-14, donde se dibuja la amplitud de desplazamiento en la cabeza Vs ω/ω_g , muestra que a medida que la masa sobre el pilote disminuye, la frecuencia natural del sistema pilote-suelo aumenta y se aleja de la frecuencia fundamental del suelo. Esto significa que ω_s puede coincidir o estar cerca de una de las frecuencias de resonancia del suelo, y por tanto, llegar a lo que pudiera llamarse una resonancia doble.

4.5 Conclusiones

Las conclusiones principales en este capítulo son:

1a. Las frecuencias en las cuales puede ocurrir resonancia a un pilote son:

a) Las frecuencias de resonancia del suelo, dadas por -

$$\text{la ecuación: } \omega = \frac{\pi}{2} \frac{C_s}{H} (2n - 1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

b) La frecuencia natural del sistema pilote-suelo, dada por la Ec. 4-3 ó 4-4.

2a. Los desplazamientos causados en el pilote, debidos al movimiento del suelo, tienen generalmente el mismo orden de magnitud de los desplazamientos relativos que el

estrato de suelo experimenta, con respecto a la roca, - durante un sismo.

- 3a. El rango en el cual se puede considerar que los pilotes siguen el desplazamiento del suelo, y en el que por tan to se comportan como elementos flexibles, corresponde a $\bar{\lambda} > 5$, donde $\bar{\lambda} = kDH^4/4EI$.
- 4a. La masa soportada por el pilote influye muy significativa mente en el valor de la frecuencia natural del sistema pilote-suelo; ésto da lugar a que dicha frecuencia - pueda estar muy cerca o coincidir con una de las fre--- cuencias de resonancia del suelo, causando así una "doble" resonancia.

T A B L A 4 - 1

VALORES DE ω_0 EN RAD/SEG, PARA DIFERENTES TIPOS DE PILOTES

| Tipo de Pilote S_u (Kg/cm ²) | ACERO H BP 14-89 | Concreto $\emptyset = 16''$ | Concreto $\emptyset = 24''$ | Concreto $\emptyset = 2m$ |
|---|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 0.1 | 74.5 | 48.5 | 32.4 | 8.7 |
| 0.5 | 166 | 109 | 72.5 | 19.4 |
| 1.0 | 235 | 154 | 102 | 27.5 |
| 2.0 | 333 | 217 | 145 | 39 |
| 5.0 | 526 | 344 | 229 | 61.5 |

$\frac{4EI}{mH^4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ para H=20m

81.5

13.6

31.3

436

VALORES DEL PARAMETRO " $\bar{\lambda}$ "

| | S_u | H = 10m | H = 15m | H = 20m | H = 30m | H = 40m |
|---|-------|---------------|-------------|-------------|---------|---------|
| Concreto 16" diam. | | | | | | |
| $EI = 28.5 \times 10^9 \text{ Kg cm}^2$ | 0.1 | 63.2 | 320 | 1010 | 5110 | 16200 |
| | 0.5 | 316 | 1605 | 5060 | 25600 | 83500 |
| | 1.0 | 632 | 3200 | 10100 | 51100 | 162000 |
| | 2.0 | 1264 | 6400 | 20200 | 102200 | 324000 |
| | 5 | 3160 | 16050 | 50600 | 256000 | 835000 |
| Acero BP - 14 | 0.1 | 24.8 | 126 | 397 | 2010 | 6350 |
| 89 | 0.5 | 124 | 630 | 1975 | 10050 | 31800 |
| $EI = 72.5 \times 10^9 \text{ Kg cm}^2$ | 1.0 | 248 | 1260 | 3970 | 20100 | 63500 |
| | 2.0 | 496 | 2520 | 7940 | 40200 | 127000 |
| | 5 | 1240 | 6300 | 19750 | 100500 | 318000 |
| Concreto 24" diam. | 0.1 | 12.2 | 62 | 195 | 988 | 3070 |
| $EI = 147 \times 10^9 \text{ kg cm}^2$ | 0.5 | 61.2 | 310 | 978 | 4940 | 15700 |
| | 1 | 122 | 620 | 1950 | 9880 | 30700 |
| | 2 | 244 | 1240 | 3900 | 19760 | 61400 |
| | 5 | 612 | 3100 | 9780 | 49400 | 157000 |
| Pila de concreto | 0.1 | <u>0.1065</u> | <u>0.54</u> | <u>1.70</u> | 8.63 | 27.2 |
| 6.56 ft. diam. | 0.5 | <u>0.5355</u> | <u>2.7</u> | 8.5 | 43.15 | 136 |
| | 1 | <u>1.065</u> | <u>5.4</u> | 17.0 | 86.29 | 272 |
| | 2 | <u>2.130</u> | 10.8 | 34 | 172.6 | 544 |
| | 5 | <u>5.355</u> | 27.0 | 85 | 431.5 | 1360 |

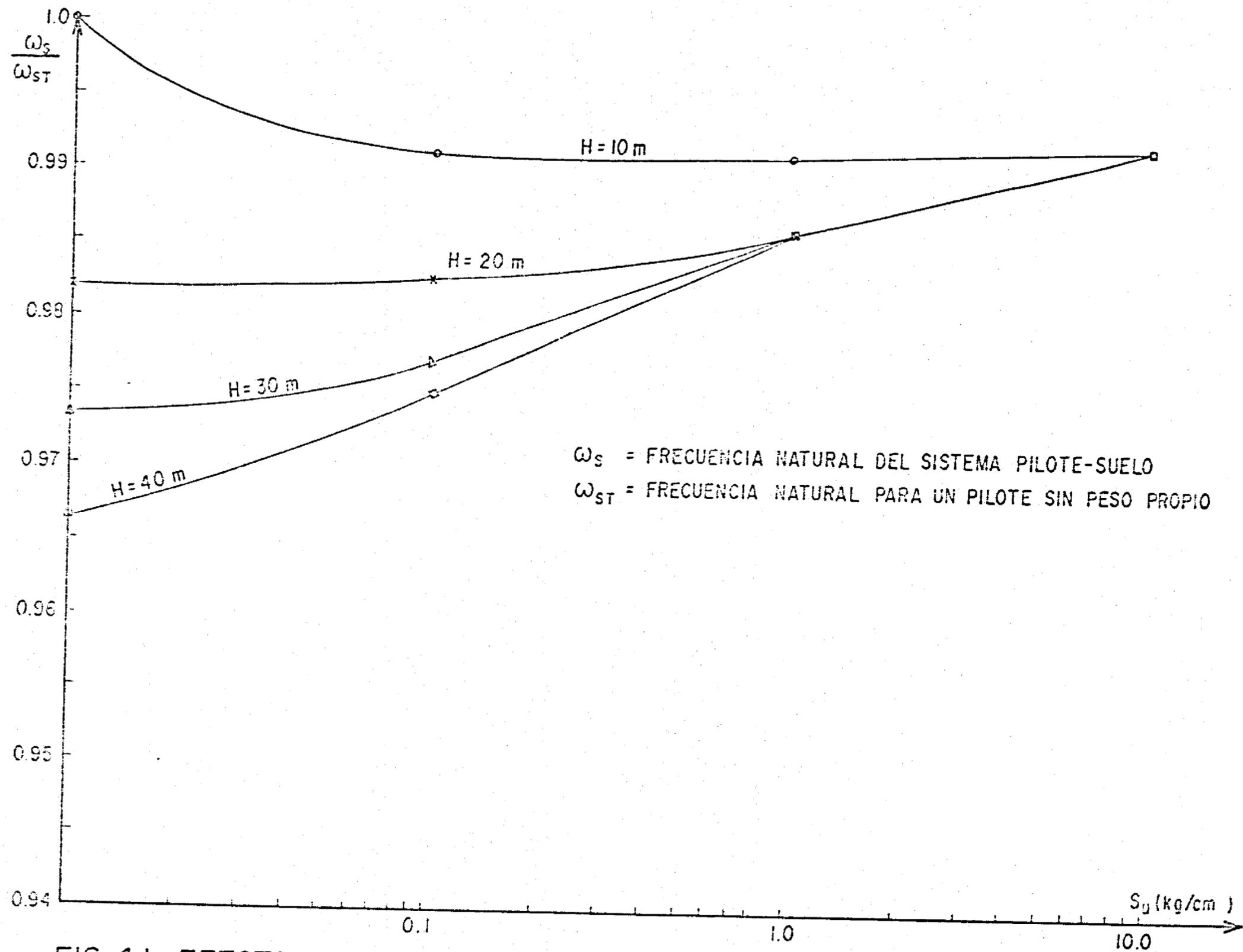


FIG. 4.1 EFECTO DE LA MASA DEL PILOTE Y DE LA RESISTENCIA DEL SUELO EN LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA, PARA UN CILINDRO DE 2 METROS DE DIAMETRO.

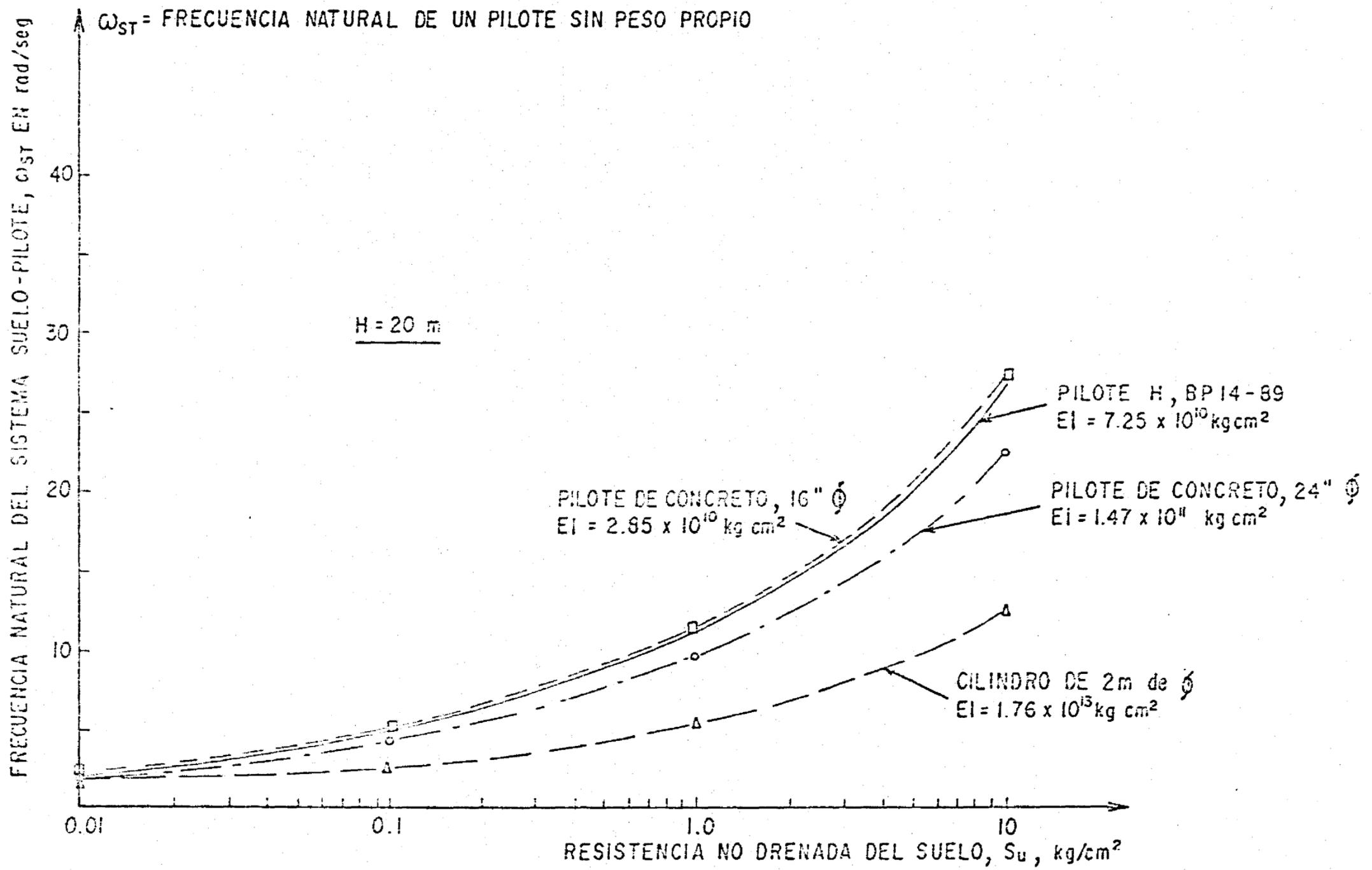


FIG.4.2 INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA DEL SUELO EN LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA SUELO-PILOTE, CUANDO LA MASA SOPORTADA ES IGUAL A LA MAXIMA PERMISIBLE DE ACUERDO CON EL REGLAMENTO DE LOS ANGELES, CALIF.

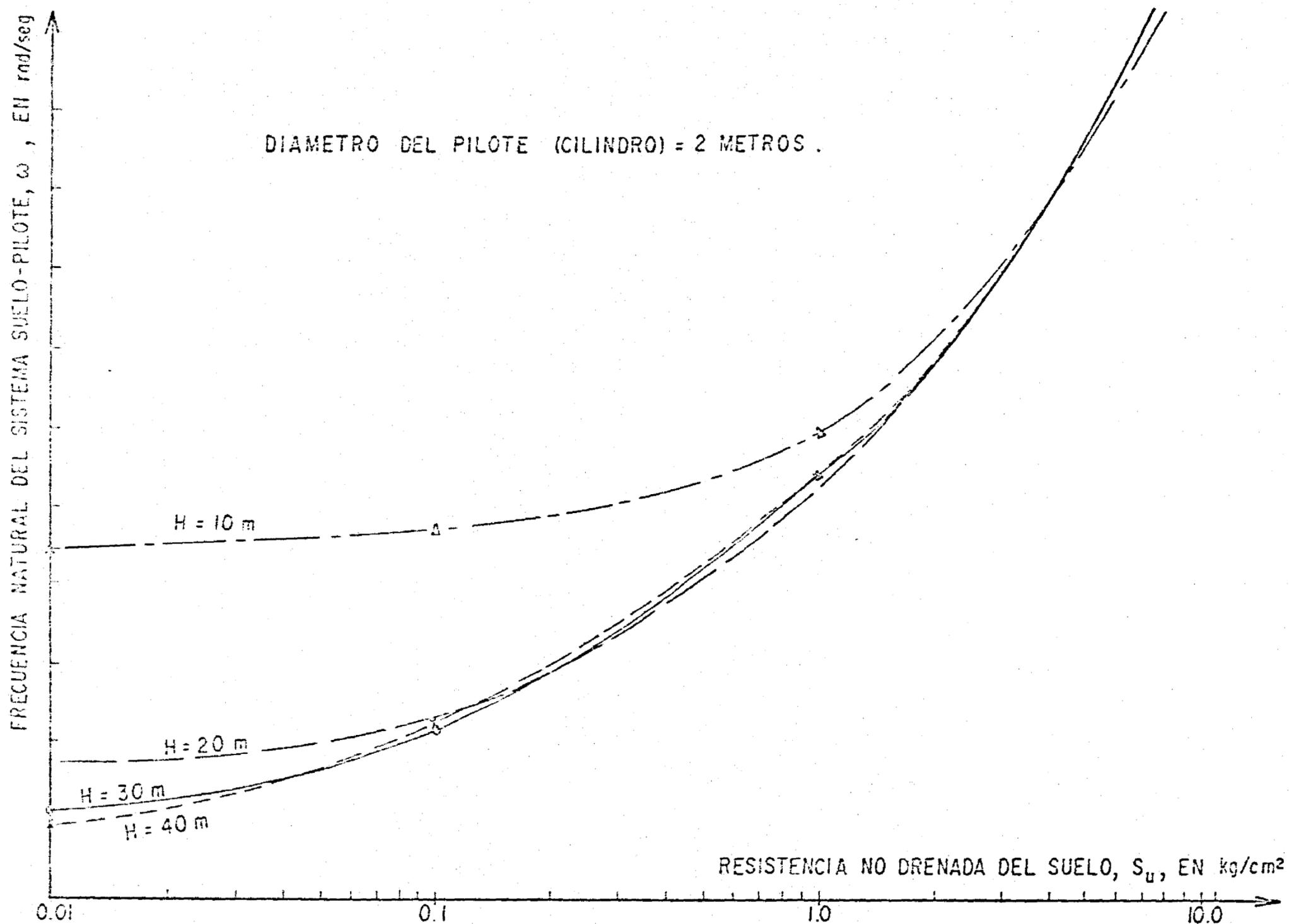


FIG. 4.3 EFECTO DE LA LONGITUD DE UN PILOTE Y LA RESISTENCIA DEL SUELO, EN LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA - SUELO-PILOTE.

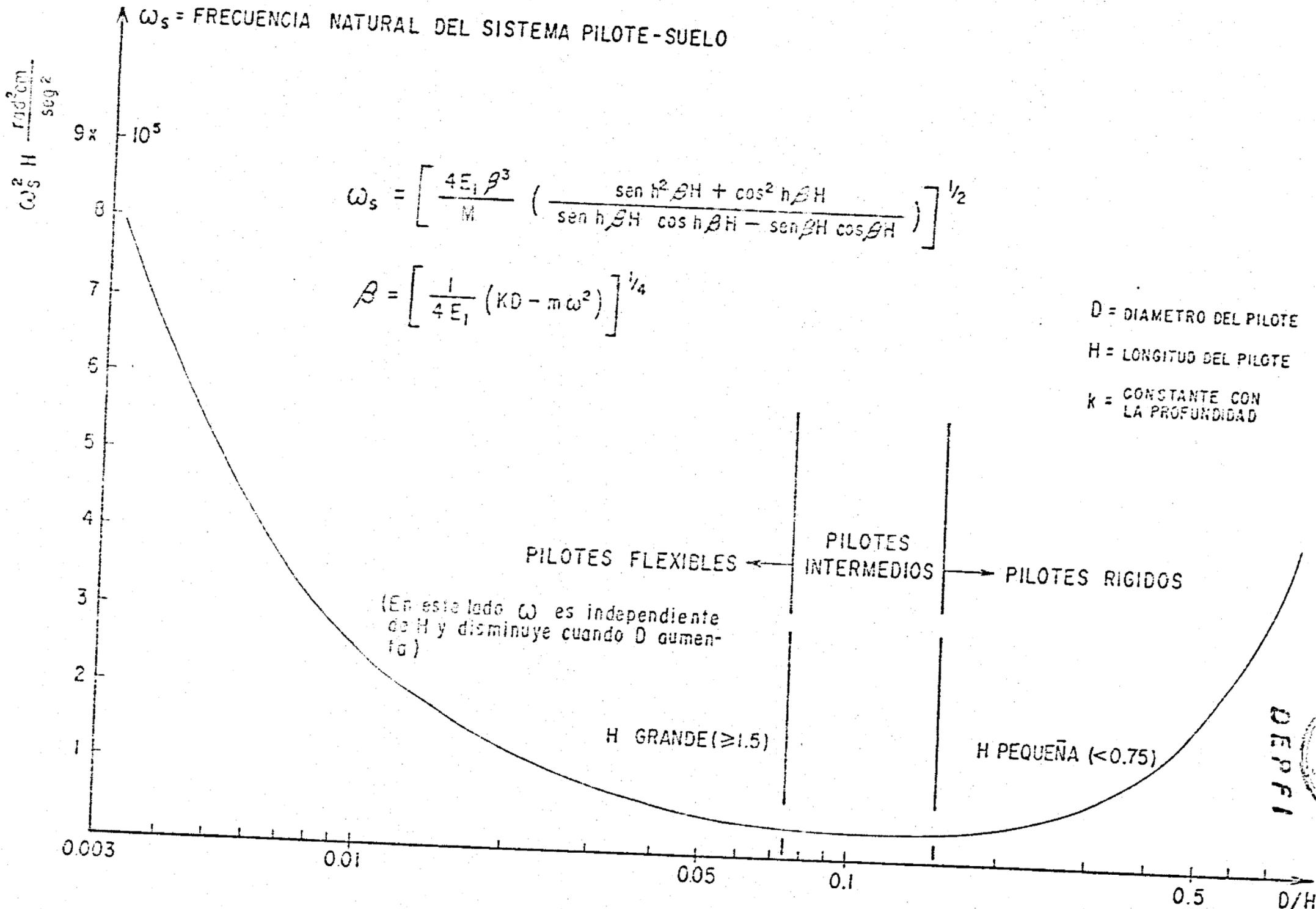


FIG. 4.4 INFLUENCIA DE LA RELACION DIAMETRO/LONGITUD DE UN PILOTE EN LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA SUELO-PILOTE.

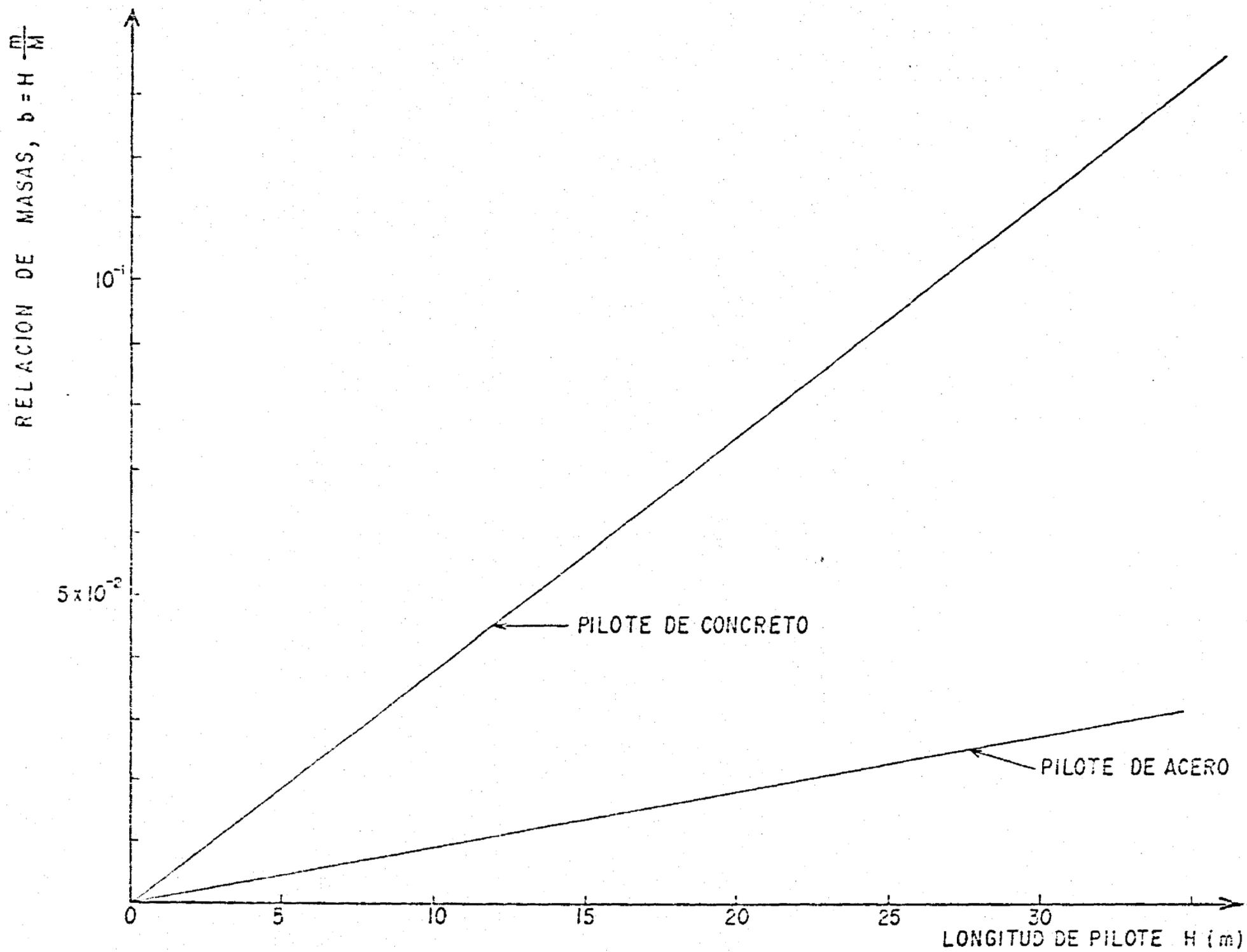


FIG. 4.5 VALORES DEL PARAMETRO ADIMENSIONAL "RELACION DE MASAS", EN FUNCION DE LA LONGITUD DEL PILOTE.

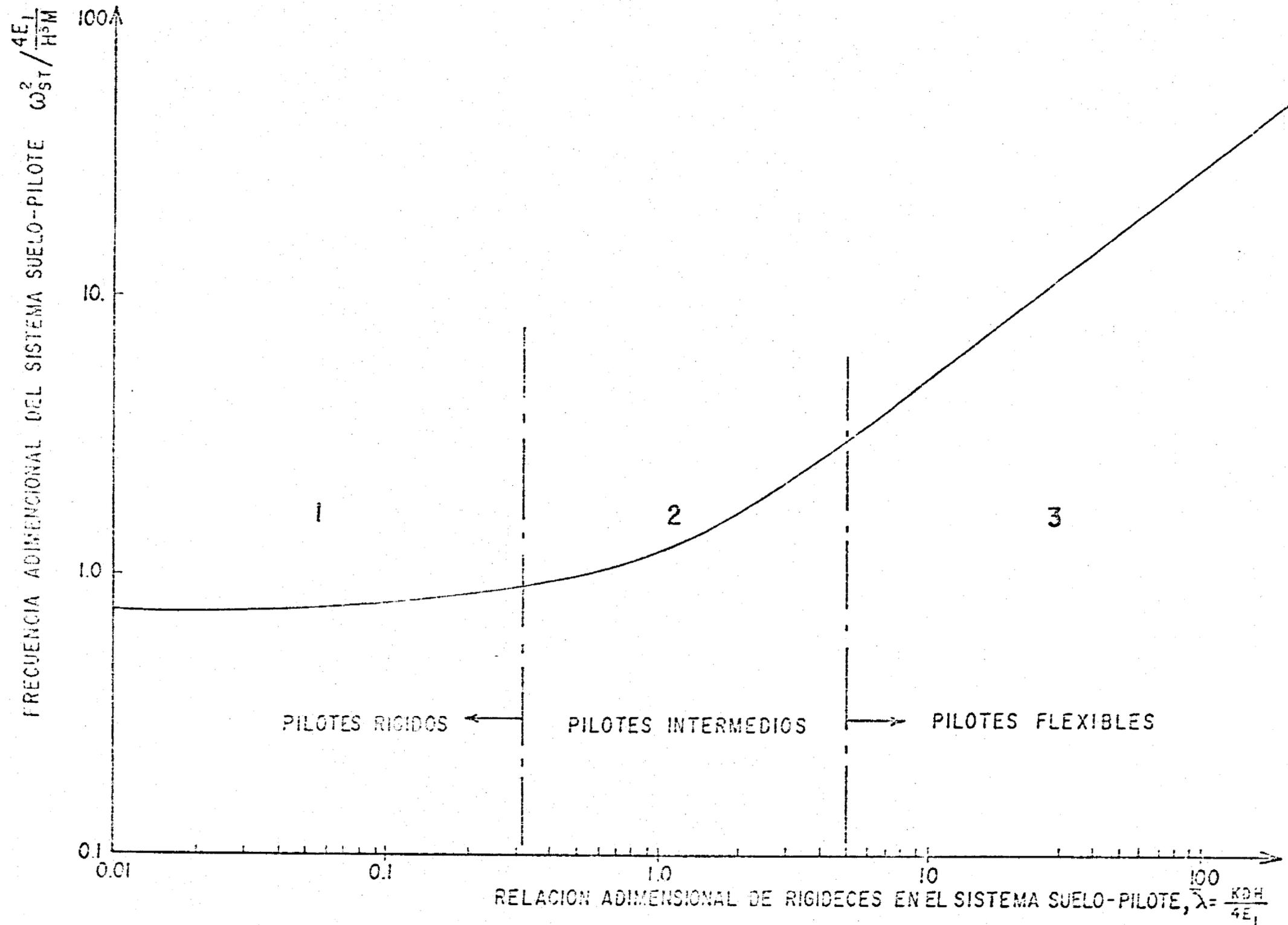


FIG. 4.6 VALORES DE LA FRECUENCIA ADIMENSIONAL DEL SISTEMA SUELO-PILOTE, EN FUNCION DE LA RELACION DE RIGIDECEZ SUELO-PILOTE.

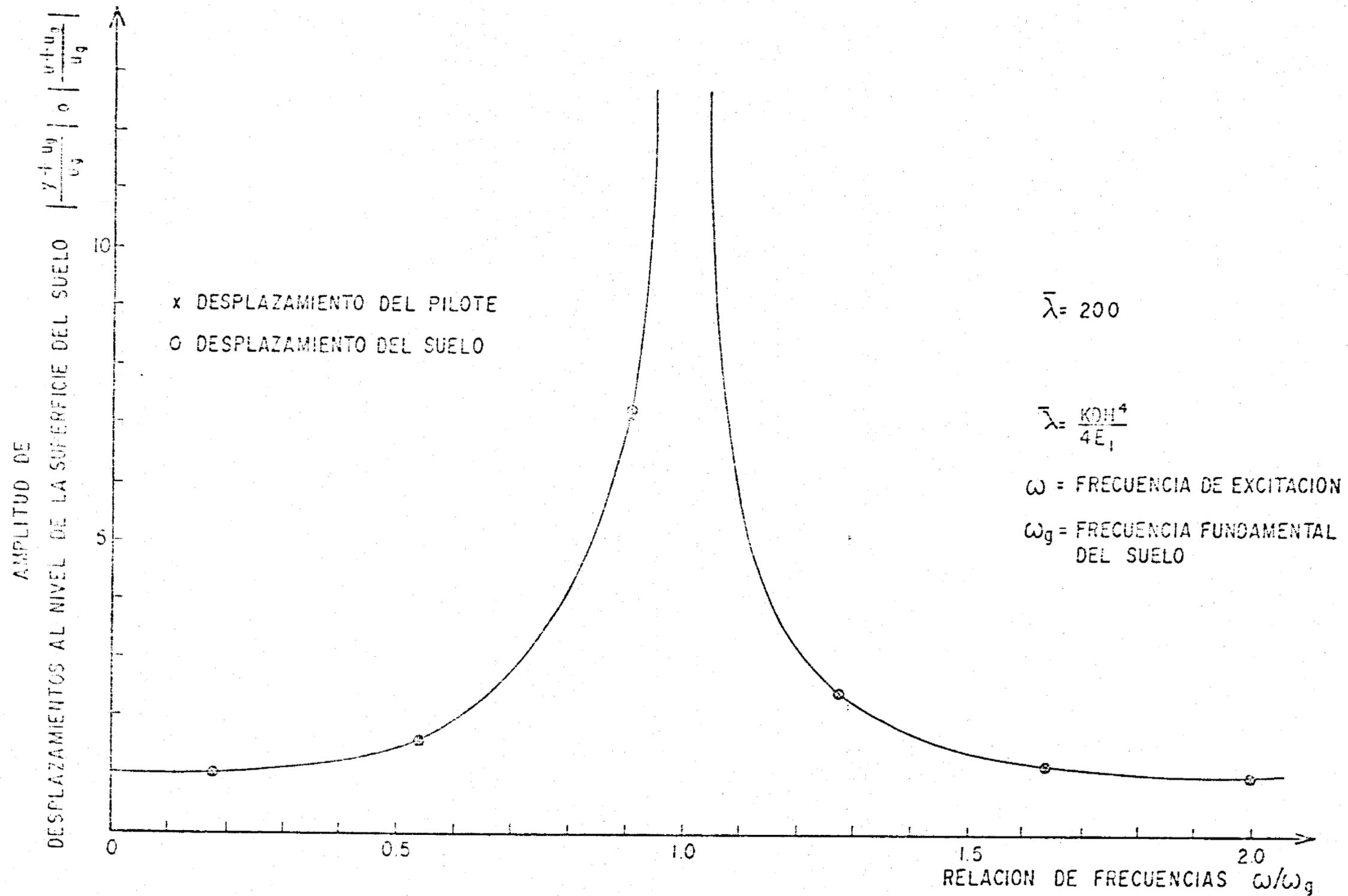


FIG. 4.7 COMPARACION DE LAS AMPLITUDES DE DESPLAZAMIENTO EN LA SUPERFICIE DEL SUELO, ENTRE UN PILOTE SIN CARGA VIRTUAL Y EL SUELO, CUANDO $\bar{\lambda}=200$

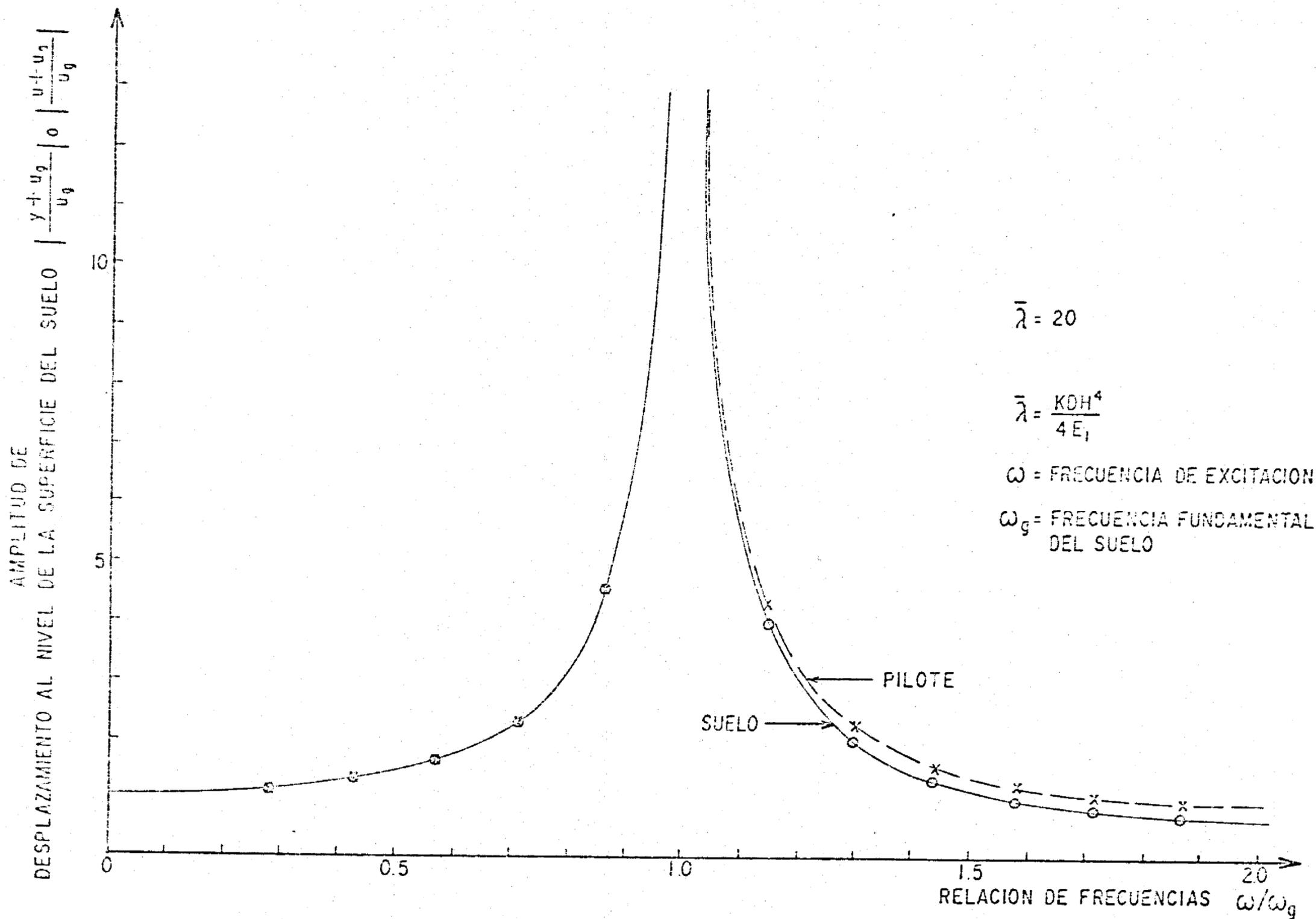


FIG. 4.8 COMPARACION DE LAS AMPLITUDES DE DESPLAZAMIENTO EN LA SUPERFICIE DEL SUELO, ENTRE UN PILOTE SIN CARGA VERTICAL Y EL SUELO, CUANDO $\bar{\lambda} = 20$

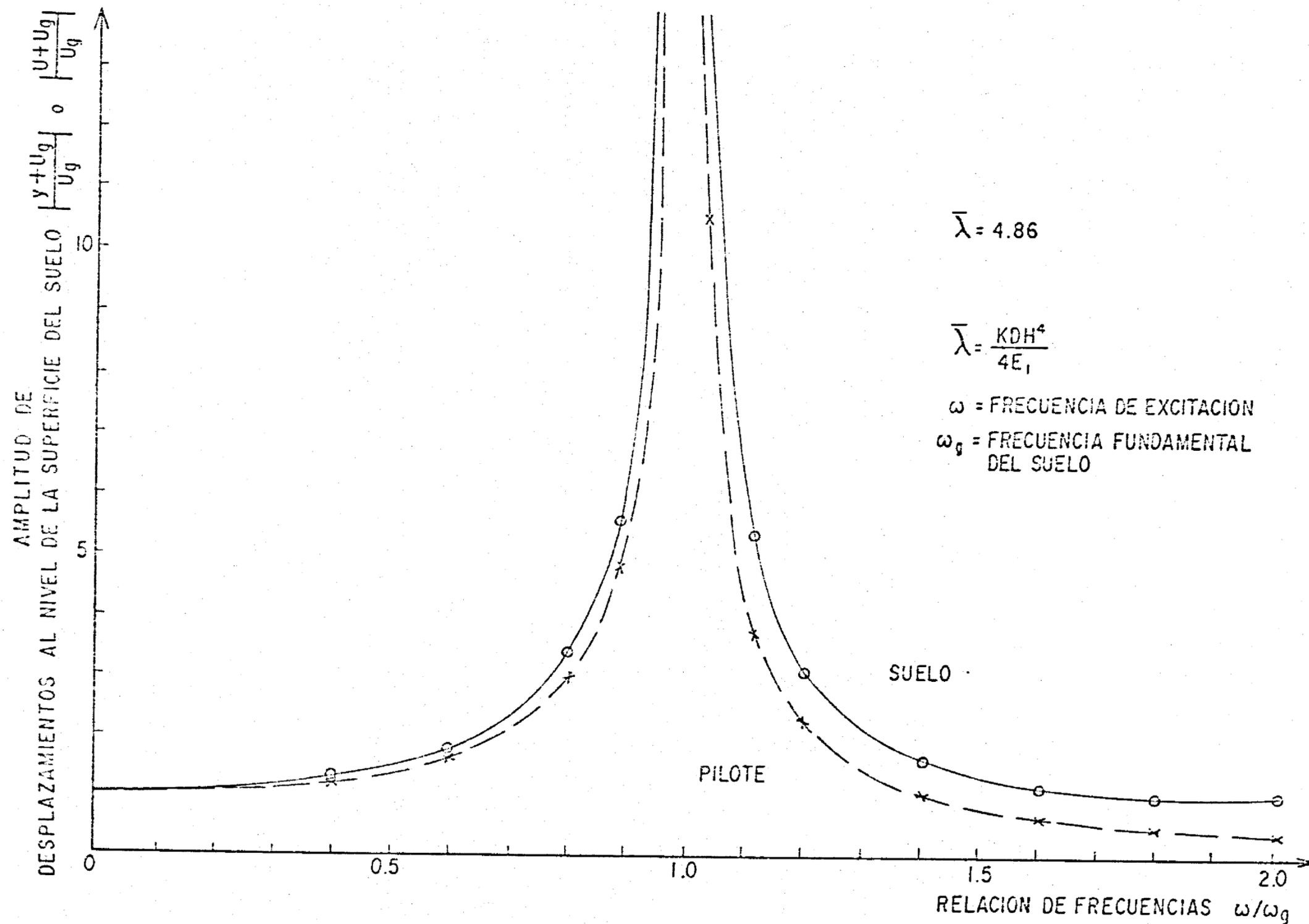


FIG. 4.9 COMPARACION DE LAS AMPLITUDES DE DESPLAZAMIENTO DE EN LA SUPERFICIE DEL SUELO, ENTRE UN PILOTE SIN CARGA VERTICAL Y EL SUELO, CUANDO $\bar{\lambda} = 4.86$

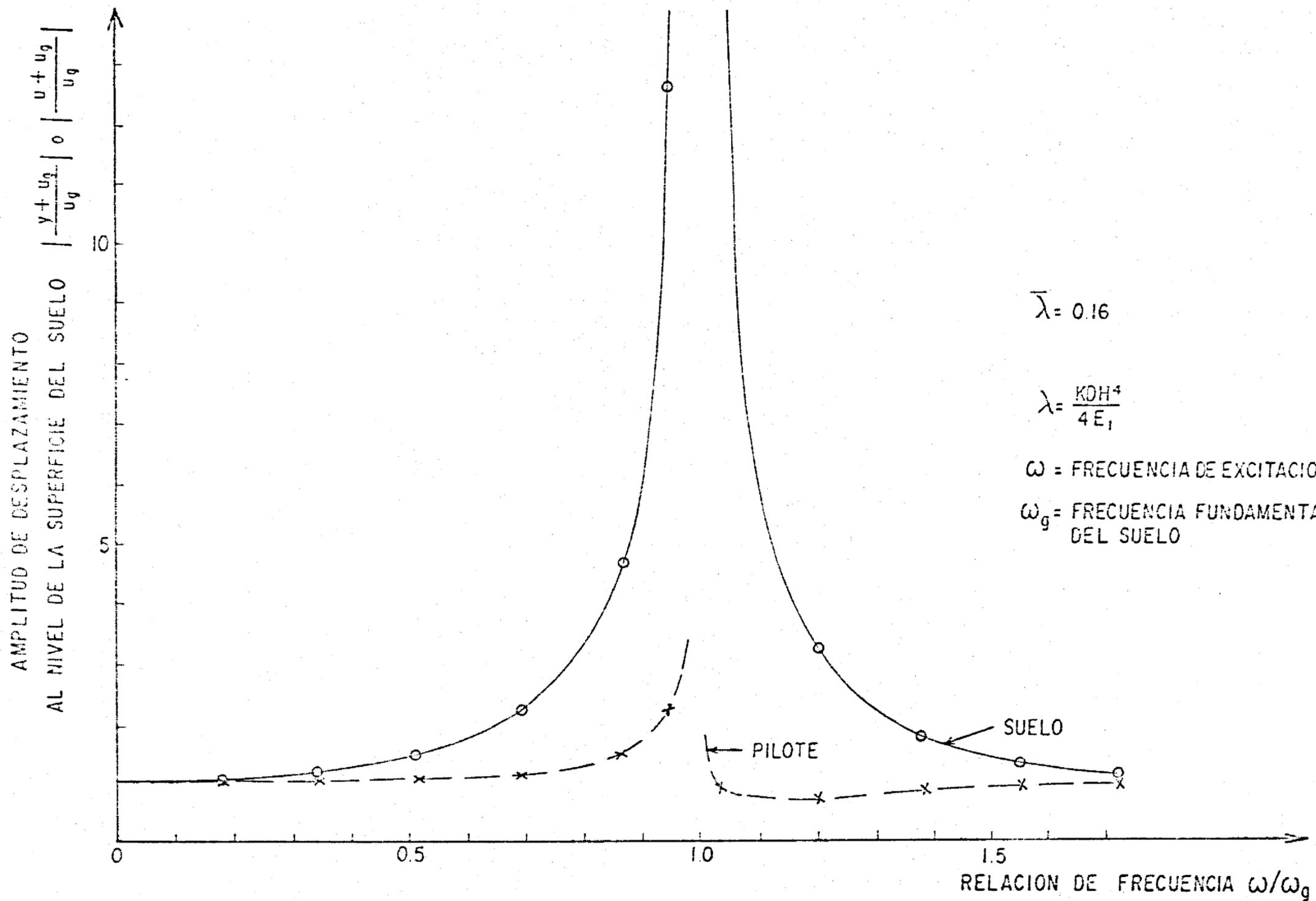


FIG. 4.10 COMPARACION DE LAS AMPLITUDES DE DESPLAZAMIENTO EN LA SUPERFICIE DEL SUELO, ENTRE UN PILOTE SIN CARGA VERTICAL Y EL SUELO, CUANDO $\bar{\lambda} = 0.16$

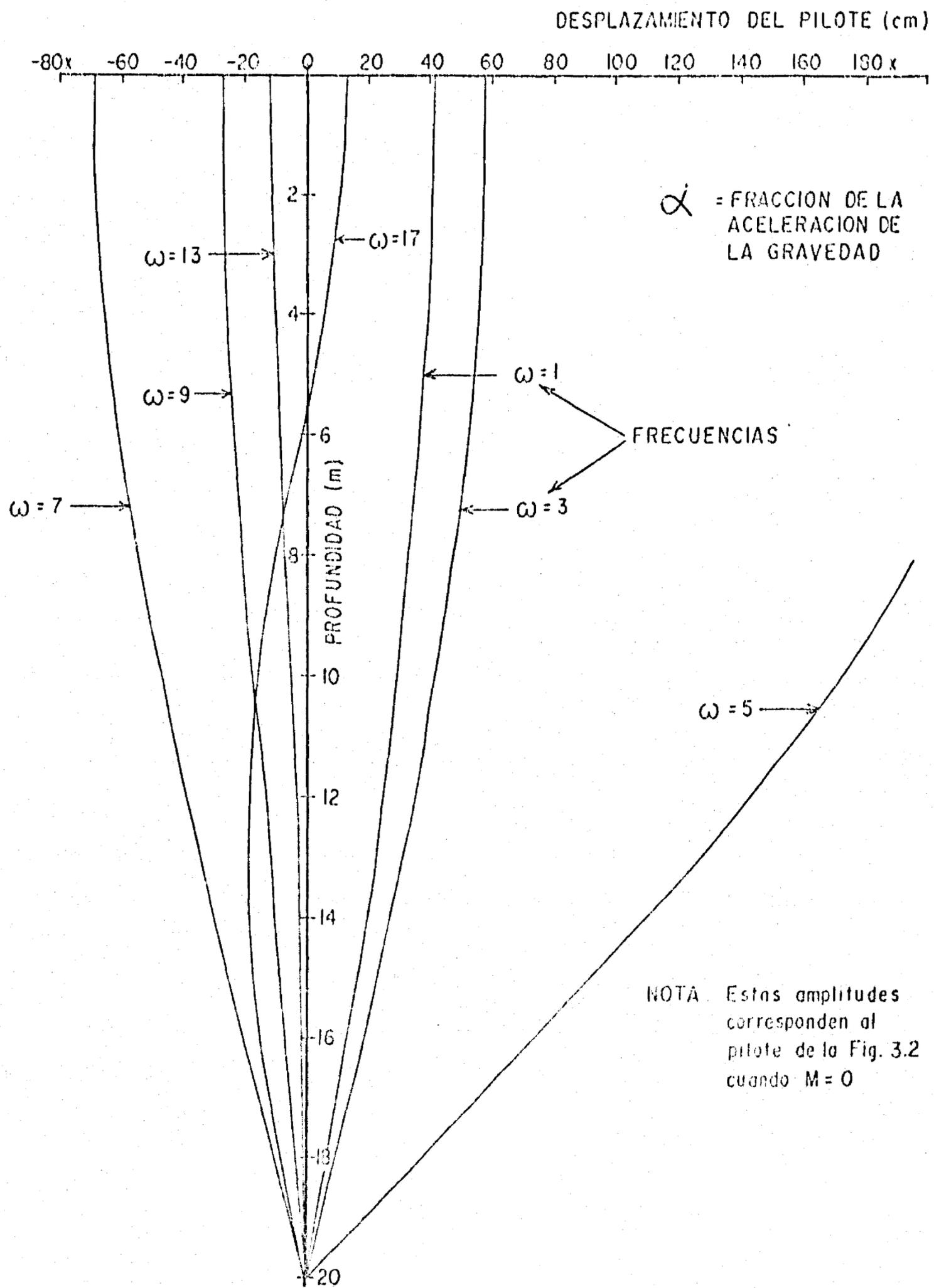


FIG. 4.11 EFECTO DE LA FRECUENCIA DE EXCITACION EN LA AMPLITUD DEL DESPLAZAMIENTO DEL PILOTE SIN CARGA, A DIFERENTES PROFUNDIDADES.

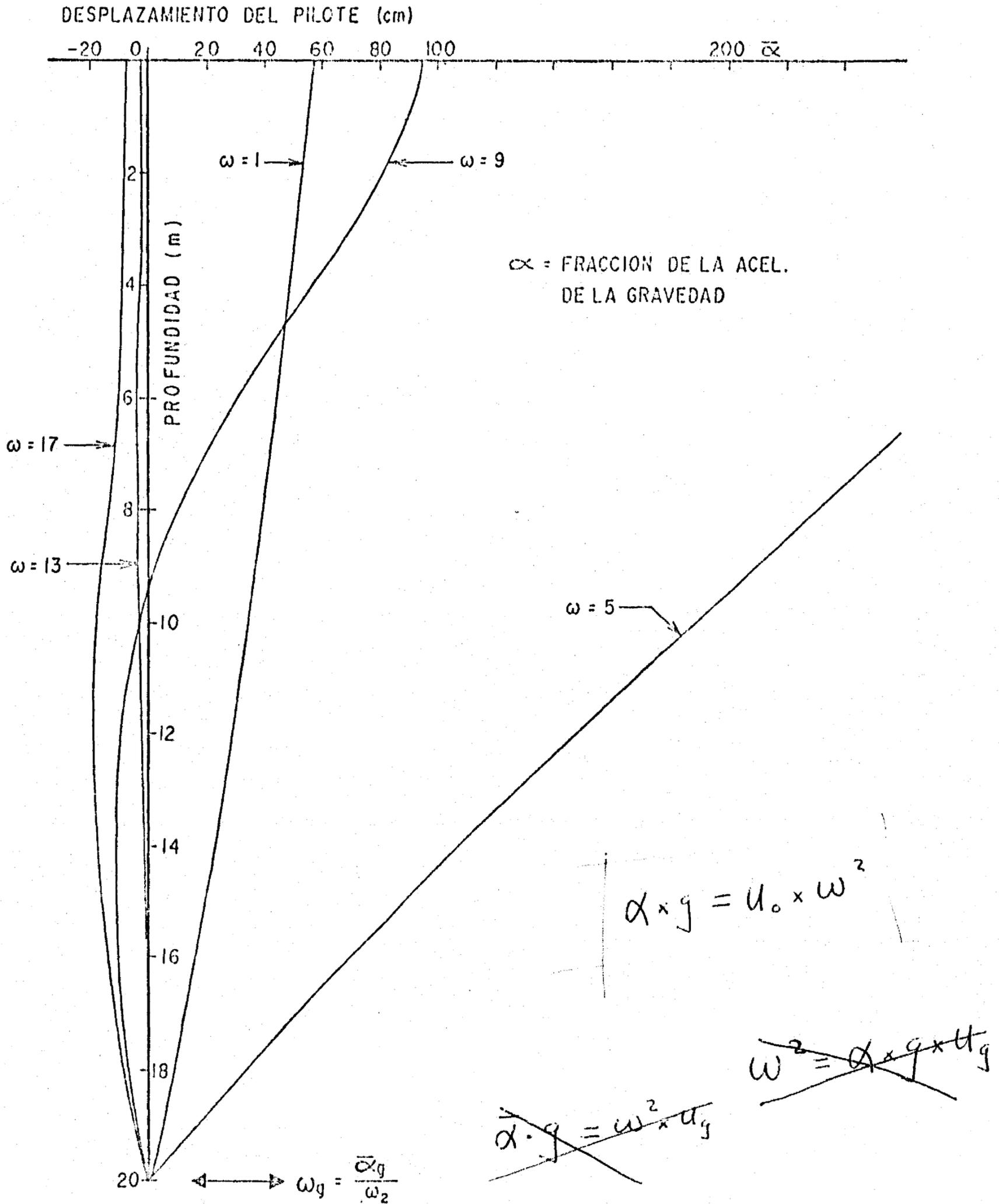


FIG. 4.12 EFECTO DE LA DIFERENCIA DE EXITACION EN LA AMPLITUD DEL DESPLAZAMIENTO DEL PILOTE A DIFERENTES PROFUNDIDADES, PARA UNA CARGA DE 50 Ton.

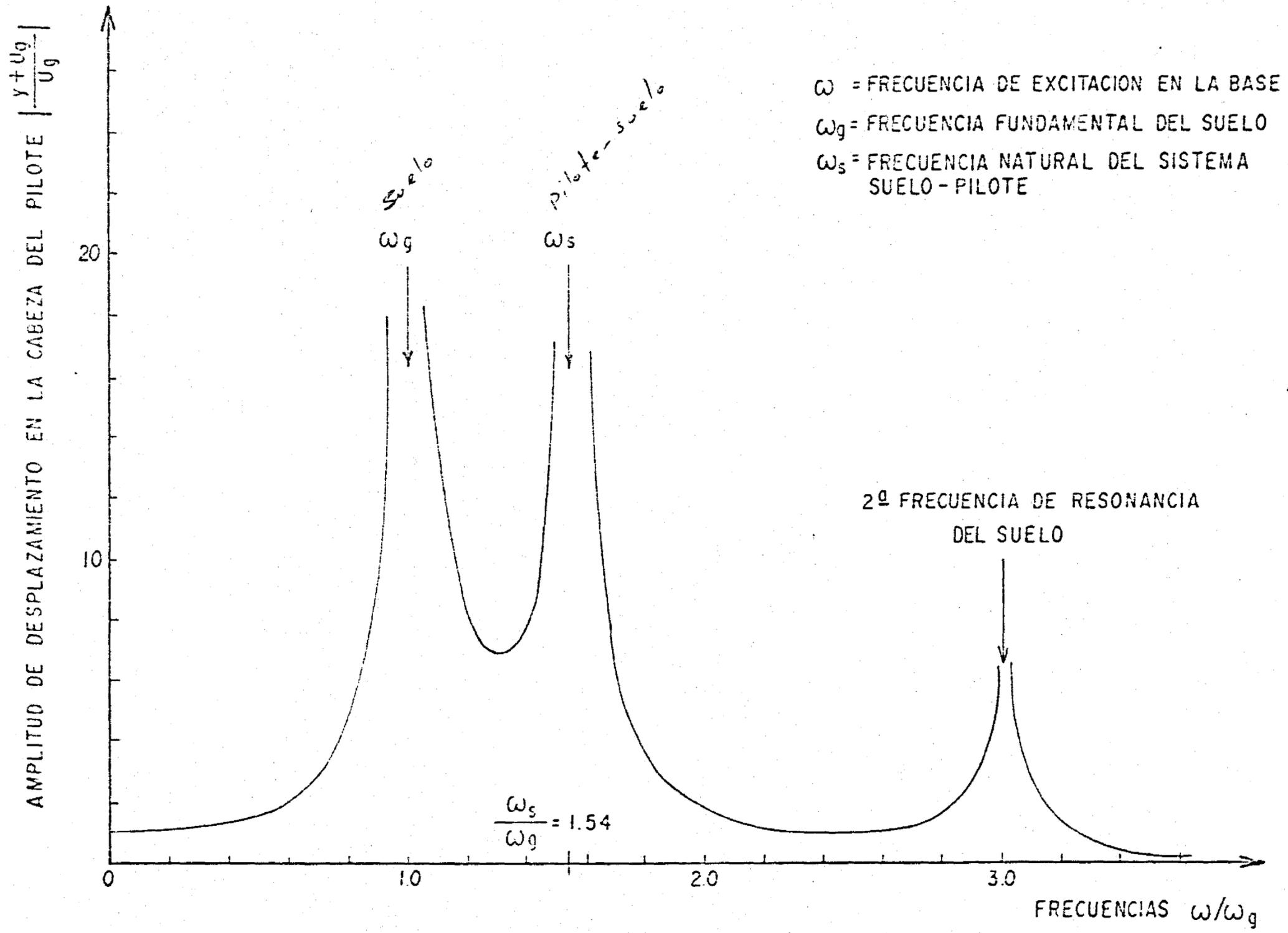


FIG. 4.13 AMPLITUDES DE DESPLAZAMIENTO EN LA CABEZA DEL PILOTE, EN FUNCION DE LA RELACION DE FRECUENCIAS ω/ω_g

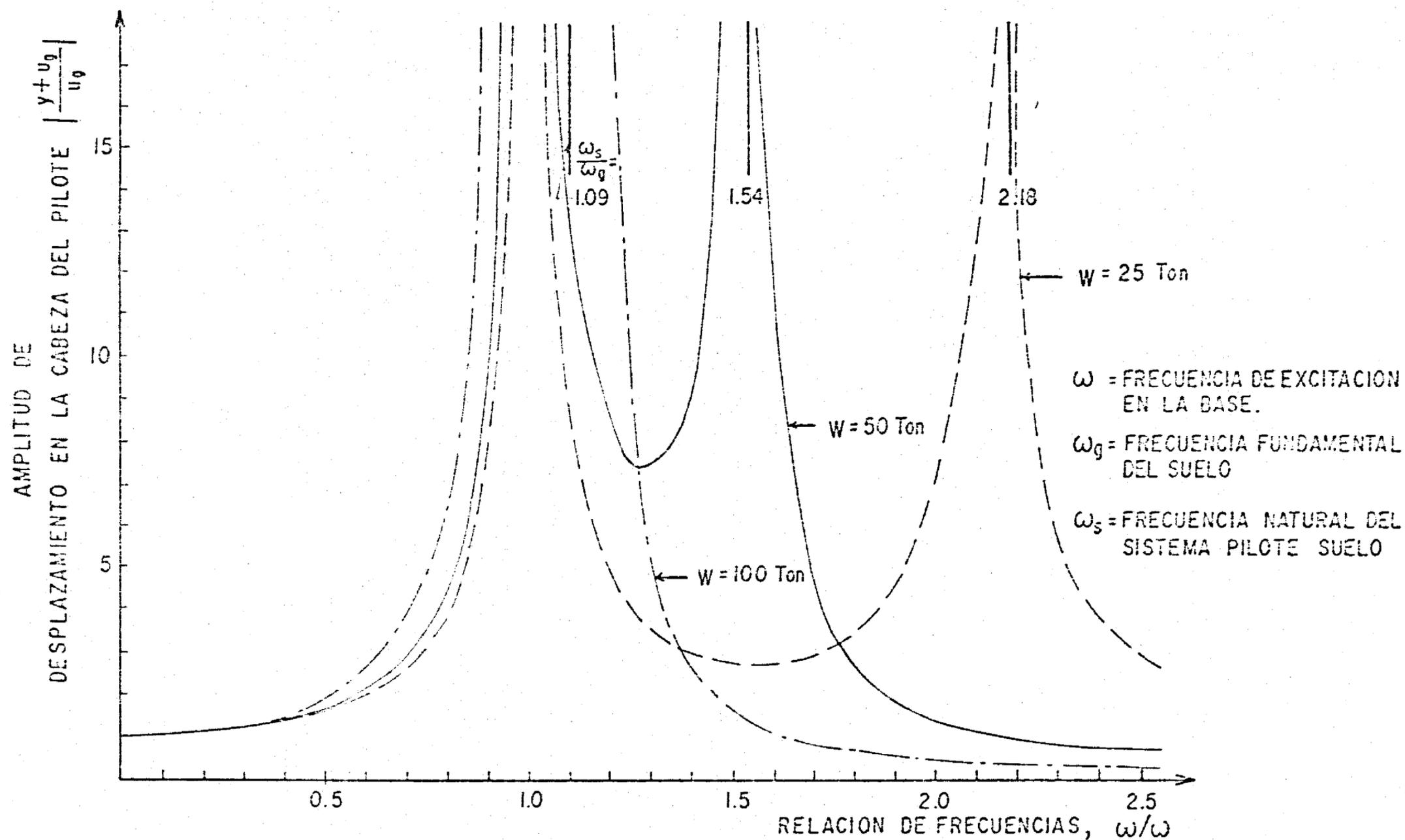


FIG. 4.14 AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO DEL PILOTE EN FUNCIÓN DE LA RELACION DE FRECUENCIA, ω/ω_g , PARA DIFERENTES CARGAS VERTICALES EN EL PILOTE DESCRITO EN LA FIG. 3.2

CAPITULO V

SOLUCION SIMPLIFICADA PARA EL ANALISIS DINAMICO DE UN PILOTE

5.1 Introducción

En los capítulos II y III se señalaron los procedimientos existentes para diseñar pilotes contra fuerzas de sismo, y se vió que los únicos métodos racionales son aquellos que utilizan teorías dinámicas y toman en consideración el efecto del movimiento del suelo sobre el pilote. Sin embargo, se señaló también que estas teorías resultan relativamente sofisticadas para ser comprendidas y aplicadas fácilmente por la mayoría de los ingenieros que se dedican al diseño práctico de pilotes. Falta por tanto, contar con un procedimiento simple y racional, que se pueda aplicar en la solución práctica de los problemas relacionados al diseño dinámico de pilotes sujetos a movimientos sísmicos. En el presente capítulo se analizan por separado los efectos causados por la masa de la superestructura y el del movimiento del suelo, y se hace uso de la superposición de efectos para proponer una solución simplificada al problema relacionado con el comportamiento sísmico de pilotes.

5.2 Separación de Efectos

En el capítulo anterior se obtuvo la respuesta de un pilote sin masa en su cabeza, que es sometido a un movimiento armónico en su base. Enseguida se evaluará la respuesta de ese mismo pi-

lote pero con masa en su cabeza y sujeto a una fuerza dinámica - aplicada en su extremo superior; la magnitud de dicha fuerza será igual al producto de la masa soportada por el pilote, multiplicada por la aceleración que se tendrá en la cabeza si el estrato de suelo fuera excitado en su base.

La ecuación de equilibrio de un pilote que soporta masa, y está sujeto a las condiciones anteriores, es la siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + kDy = 0 \quad \dots\dots\dots(5-1)$$

donde kDy es la presión del suelo por unidad de longitud, a lo largo del pilote.

Haciendo nuevamente

$$\beta^4 = \frac{1}{4EI} (kD - m\omega^2),$$

y

$$y = Y(z)e^{i\omega t},$$

la solución general de la ecuación (5-1) es:

$$Y = \text{sen } \beta z (A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z}) + \text{cos } \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z}) \dots\dots(5-2)$$

donde A_1, A_2, A_3 y A_4 , son constantes determinadas por las condiciones de frontera. Si la masa que soporta el pilote en su parte superior, se sujeta a una cierta aceleración, se pueden representar las condiciones de frontera mediante las siguientes ecuaciones:

1) $(Y)_{z=0} = 0$ (Desplazamiento nulo en la base)

$$\left. \begin{array}{l} 2) \quad EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{z=0} = 0 \\ 3) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{z=H} = 0 \\ 4) \quad EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right)_{z=H} = \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Pilote articulado en la base)} \\ \text{.....(5-3)} \\ \text{(Pilote empotrado en la parte superior)} \\ M \times \text{Acel. total en la cabeza} \end{array}$$

Nota.- Para el caso en que la fuerza aplicada en la cabeza del pilote provenga de un sismo, la aceleración total, a la que se refiere la cuarta condición de frontera, corresponde a la suma de la aceleración que tiene el pilote en sí y a la aceleración que le induce la masa M.

En el Apéndice V-1 se expone el criterio para la forma de obtener los coeficientes A_1 a A_4 , bajo estas condiciones de frontera.

Considerando nuevamente el ejemplo dado en la Fig. 3-2, los desplazamientos y los momentos flexionantes a lo largo del pilote, con $M = 0$, se muestran en las Figs. 5-1a y 5-1b. Por otro lado, las Figs. 5-2a y 5-2b indican, respectivamente, estos mismos elementos para el caso de aplicar la fuerza dinámica en la cabeza del pilote. Es interesante observar en las dos últimas figuras que el cambio en signos (positivo a negativo o viceversa), ocurre a la misma profundidad independientemente de la frecuencia; para el caso estático (Chang, 1937), esta profundidad depende solamente del valor de β y su valor, para momentos flexionantes, es de $1/3$ del correspondiente a desplazamientos.

5.3 Solución Simplificada

De acuerdo con el planteamiento del modelo mostrado en la Fig. (3-1), la superposición de los efectos producidos por el suelo y la masa que soporta el pilote es válida; es decir, se desprecia, en este modelo, la retroalimentación que pueda haber del pilote hacia el suelo.

Con base a esta validez, si a los desplazamientos dados por la Fig. 5-1a se añaden los desplazamientos dados por la Fig. 5-2a, según cada una de las frecuencias que allí se indican, se obtienen los desplazamientos totales del pilote; de la misma manera, lo anterior se puede aplicar en las Figs. 5-1b y 5-2b para obtener los momentos flexionantes totales a lo largo del pilote. Las Figs. 5-3a y 5-3b muestran, respectivamente, los valores totales de los desplazamientos y momentos flexionantes que se obtienen al sumar los efectos.

Lo anterior conduce a sugerir el uso de un procedimiento simple cuando el pilote se comporte como un elemento flexible ($\bar{\lambda} > 5$); dicho procedimiento consiste en determinar la respuesta del pilote por efecto de la fuerza cortante en la cabeza del mismo, y añadir, a dicha respuesta, la experimentada por el suelo. La primera de estas respuestas, la proveniente de la superestructura, se puede obtener determinando la fuerza cortante a través de un análisis dinámico y aplicando la ecuación que da la respuesta correspondiente (Ec. 5-2). En cuanto a la segunda respuesta, la del suelo, se puede obtener simplemente a través de la ecuación de onda, como se hizo en el Capítulo III (Ec. 3-13).

Sintetizando, para problemas donde $\bar{\lambda} > 5$, la respuesta dinámica-

de un pilote se puede obtener añadiendo, a la respuesta del suelo, la respuesta que el pilote tiene por efecto de la fuerza cortante aplicada en su cabeza.

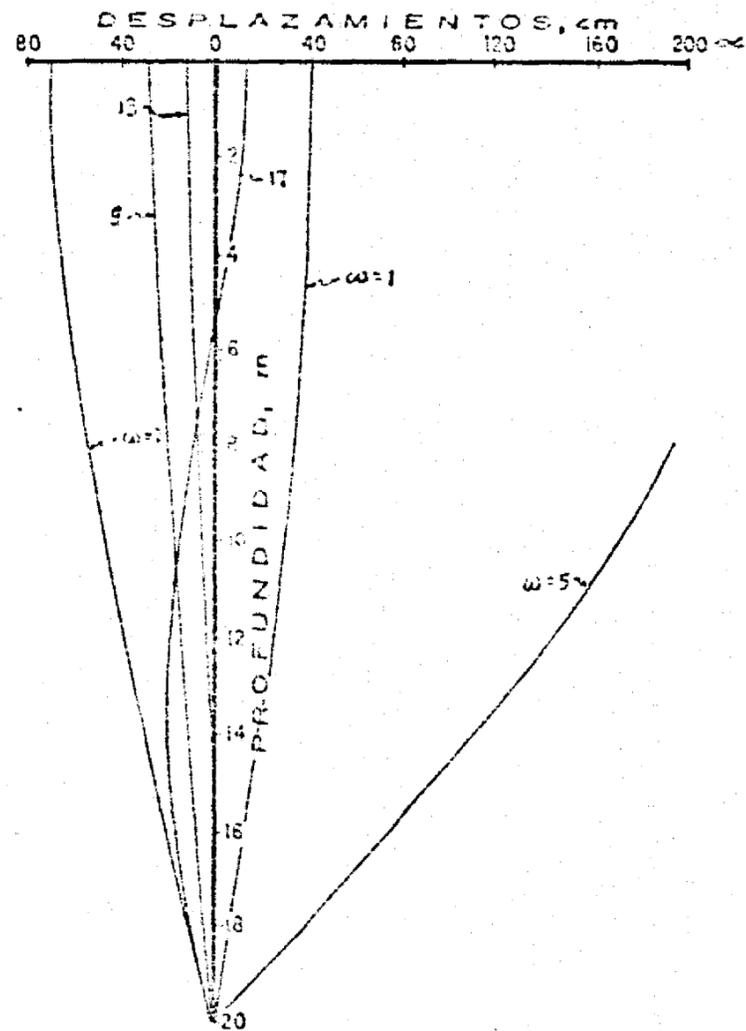


FIG. 5.1 a VARIACION DE LA AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTOS CON LA FRECUENCIA, EN UN PILOTE SIN CARGA AXIAL.

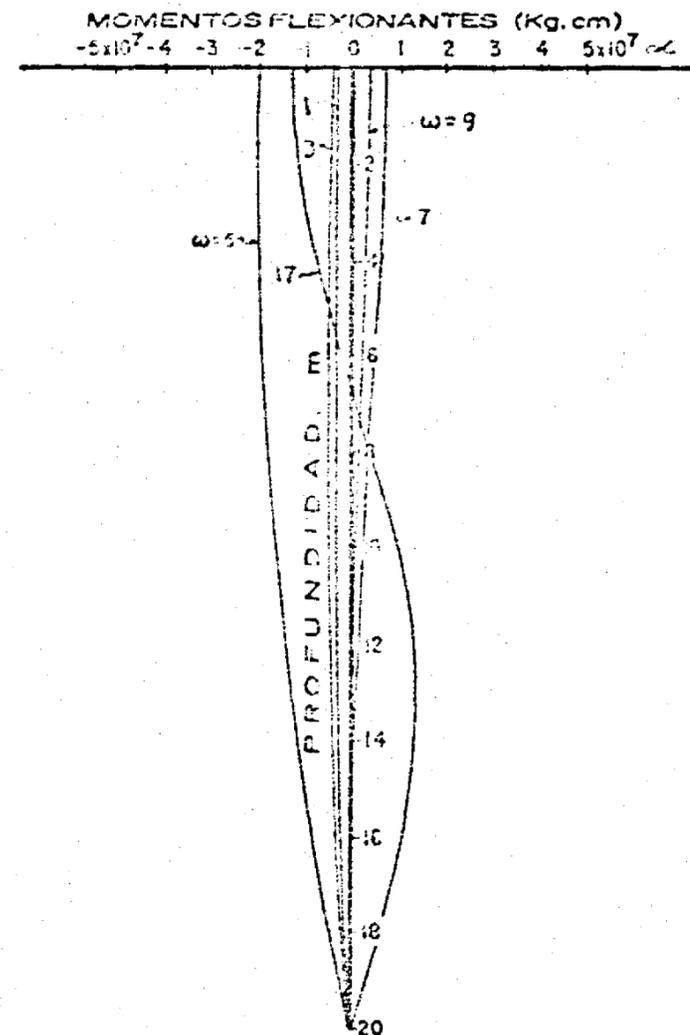


FIG. 5.1 b VARIACION DE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES MAXIMOS CON LA FRECUENCIA, EN UN PILOTE SIN CARGA AXIAL.

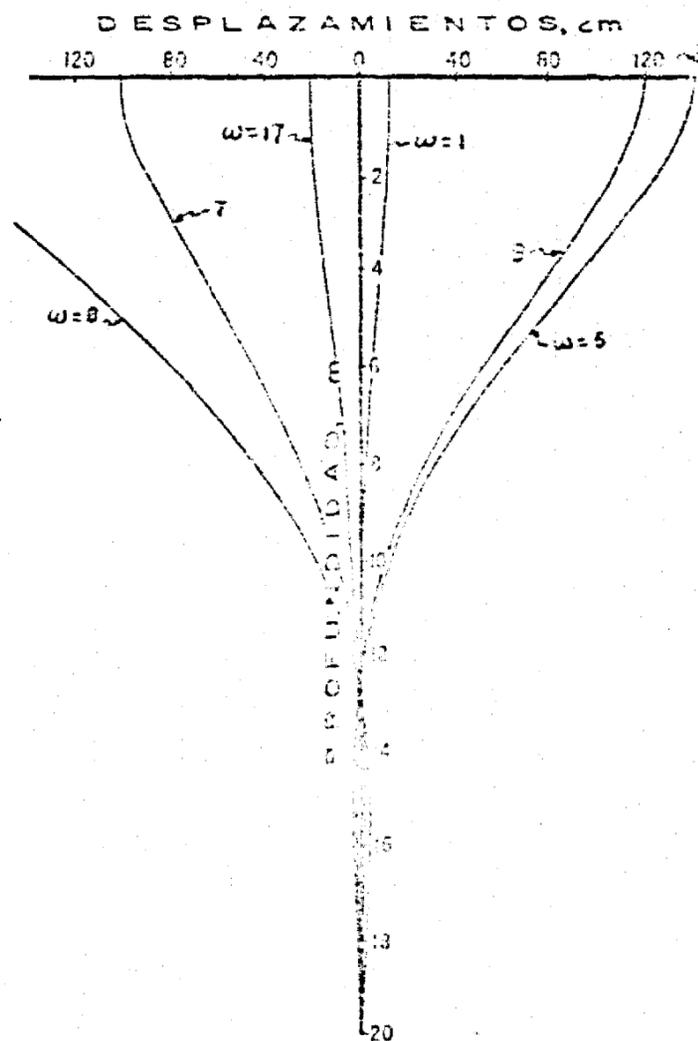


FIG. 5.2 a VARIACION DE LA AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTO CON LA FRECUENCIA, EN UN PILOTE SUJETO A UNA CARGA DINAMICA APLICADA EN LA CABEZA.

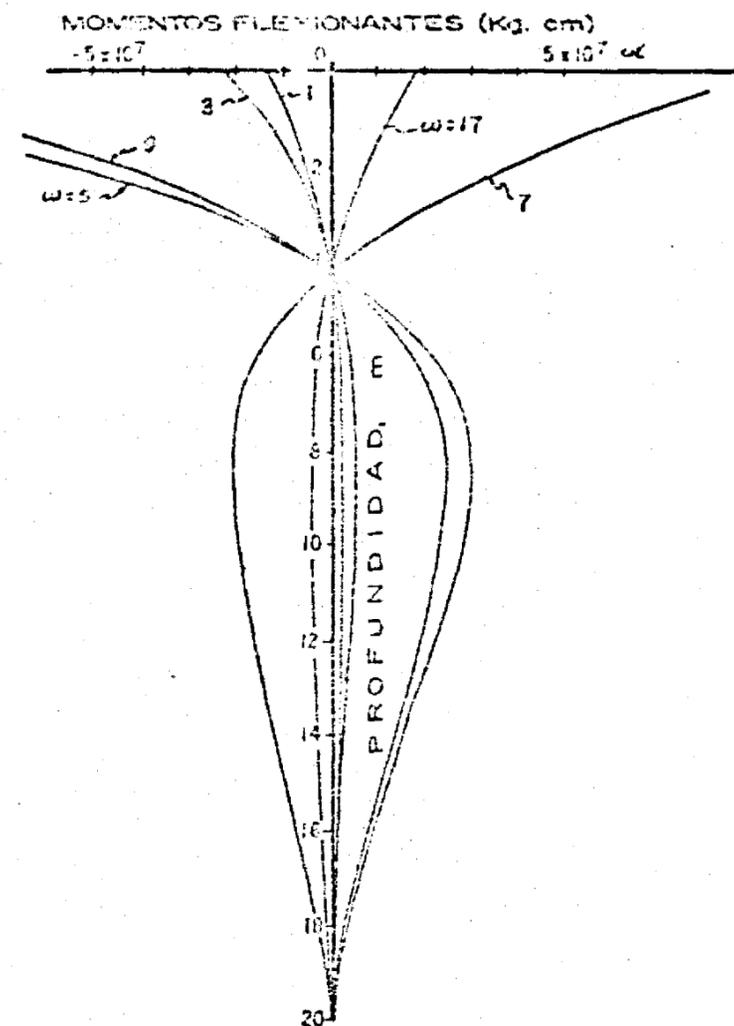
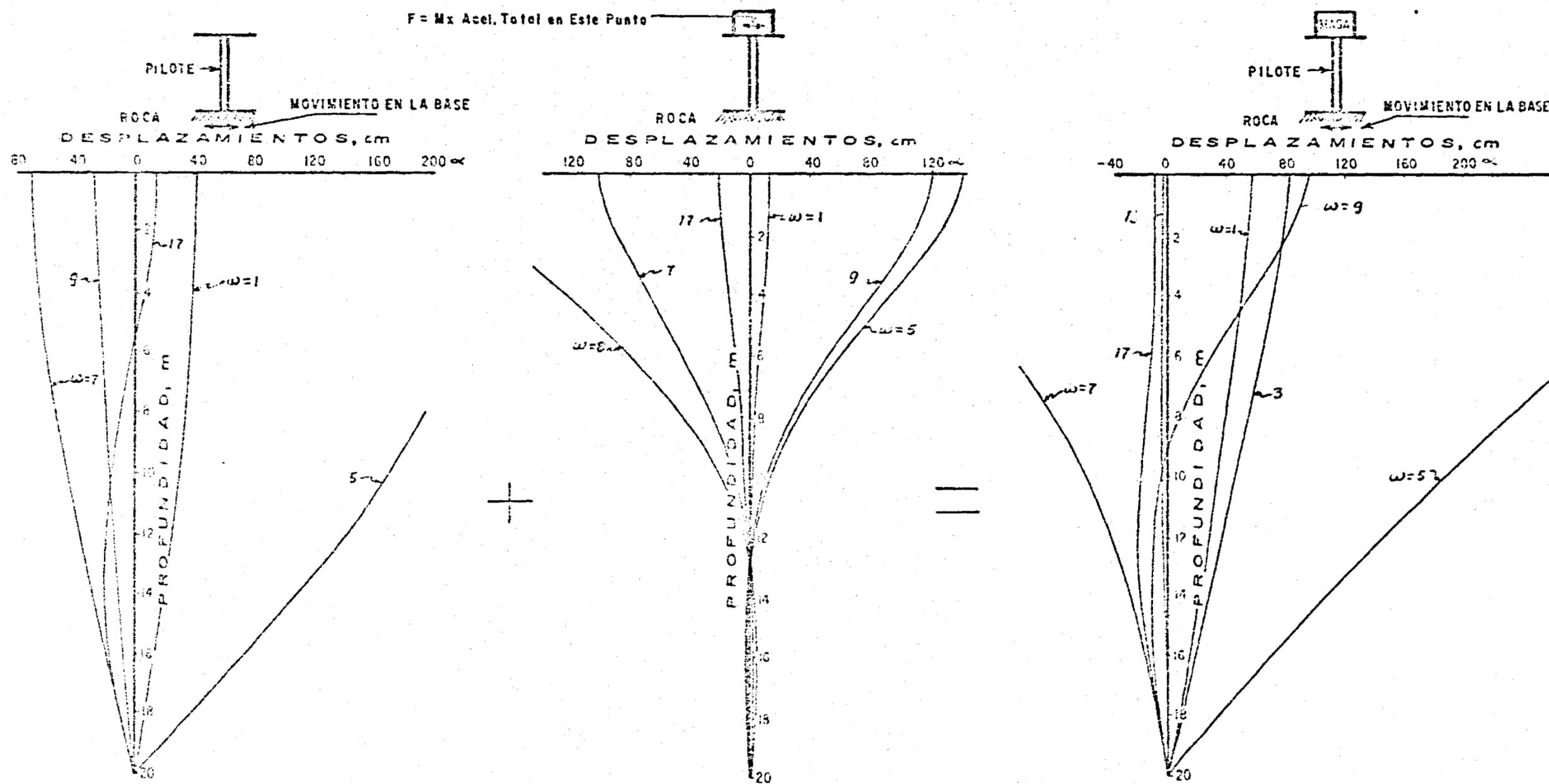


FIG. 5.2 b VARIACION DE LOS MOMENTOS FLEXIONANTES MAXIMOS CON LA FRECUENCIA, EN UN PILOTE SUJETO A UNA FUERZA DINAMICA APLICADA EN LA CABEZA.

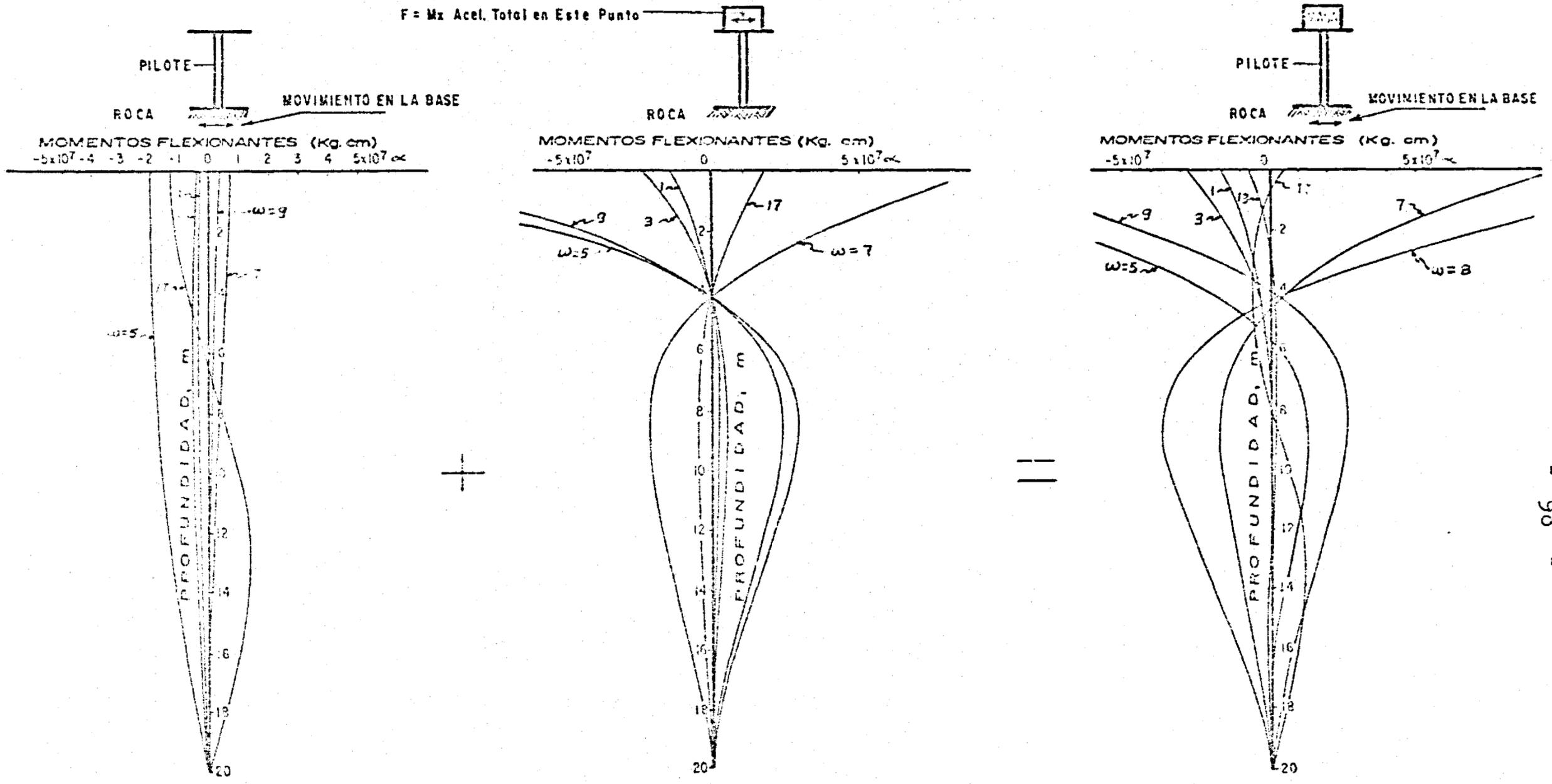


Variación de la amplitud de desplazamientos con la frecuencia, en un pilote sin carga axial (Fig. 5.1a)

Variación de la amplitud de desplazamiento con la frecuencia, en un pilote sujeto a una carga dinámica — aplicada en la cabeza (Fig. 5.2a)

Variación de las amplitudes totales de desplazamiento con la frecuencia y la profundidad (Ec. 3.19)

Fig. 5.3a Amplitudes totales de desplazamiento y su comparación con la suma de los efectos causados por movimiento dinámico del suelo y los de la superestructura.



Variación de los momentos flexionantes máximos con la frecuencia, en un pilote sin carga axial (Fig. 5.1b)

Variación de los momentos flexionantes máximos con la frecuencia, en un pilote sujeto a una fuerza dinámica aplicada en la cabeza (Fig. 5.2b)

Variación de los momentos flexionantes totales máximos con la frecuencia y la profundidad (obtenidos a partir de la Ec. 3.19)

Fig. 5. 3b Momentos flexionantes totales máximos y su comparación con la suma de los efectos causados por el movimiento dinámico del suelo y los de la superestructura.

CAPITULO VI

APLICACION DE LA TEORIA DE TAJIMI PARA DETERMINAR EL AMORTIGUA-- MIENTO RADIAL

6.1 Introducción

Los efectos de amortiguamiento, en particular alrededor de las frecuencias de resonancia, son muy importantes cuando se estudian las propiedades de estructuras y cimentaciones sujetas a fuerzas dinámicas. Dos de estos efectos son: el cambio o desvío de la primer frecuencia de resonancia, y el abatimiento de las curvas que representan la respuesta a las cargas dinámicas - (véase Fig. 6-1). Se sabe también que el amortiguamiento total se debe principalmente a dos partes: 1) el amortiguamiento interno o histerético causado por el comportamiento inelástico del sistema suelo-estructura, y 2) el amortiguamiento radial o geométrico producido por la disipación de energía a través de las ondas generadas en el sitio de excitación.

Para el caso de la interacción directa de la cimentación con el suelo, el amortiguamiento interno es generalmente pequeño en comparación con el radial, y suele asignársele el valor de 5% cuando se expresa en porcentaje del amortiguamiento crítico, es decir, del amortiguamiento que evita o suprime las vibraciones libres. Por otro lado, el amortiguamiento radial es función de la frecuencia, y su cálculo se hace generalmente a través de la teoría elástica del semi-espacio.

Considerando que la Teoría de Tajimi resulta especialmente conveniente para la determinación del amortiguamiento radial, ya -- que en ella se considera al pilote dentro de un medio elástico, -- en el presente capítulo se utiliza dicha teoría para obtener el valor del amortiguamiento mencionado. El procedimiento usado en la obtención de este valor, es el mismo que Whitman (1971) utiliza para estimar el amortiguamiento radial en el caso de una placa rígida, que vibra verticalmente en el semi espacio.

6.2 Estimación del Amortiguamiento Radial y la Masa Efectiva

A fin de obtener el amortiguamiento radial y la masa efectiva del suelo, mediante la secuencia utilizada en la Teoría del -- semi-espacio, es necesario partir de las consideraciones que Tajimi hace en su teoría (presentadas anteriormente en el Capítulo III) y establecer las ecuaciones que a continuación se escriben.

La ecuación de equilibrio de la masa que soporta el pilote, de -- acuerdo con las fuerzas mostradas en la Fig. 6-2, está dada por la siguiente expresión:

$$M\ddot{u}_{pH} + Ve^{i\omega t} = - M\ddot{u}_g \quad \dots\dots\dots(6-1)$$

donde \ddot{u}_{pH} = aceleración relativa de la cabeza del pilote

Se puede ver en esta ecuación que $Ve^{i\omega t}$ (fuerza cortante en la base), se debe a dos tipos de aceleración: la aceleración relativa del pilote (\ddot{u}_{pH}), acabada de definir, y la aceleración de la roca (\ddot{u}_g).

Considerando ahora la expresión 3-6, que representa la solución-

de la ecuación de equilibrio del pilote dentro del medio elástico, y despejando el valor de $V e^{i\omega t}$ cuando $z = H$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V e^{i\omega t} &= \frac{u_{pH} - u_g G(H, \omega) (\omega/\omega_g)^2 e^{i\omega t}}{\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{2}{H} F(H, \omega)} \\
 &= \frac{u_{pH} - u_g G(H, \omega) (\omega/\omega_g)^2 e^{i\omega t}}{\frac{F(H, \omega)}{K_s F(H, 0)}} \dots\dots\dots(6-2)
 \end{aligned}$$

Puede observarse en la ecuación 6-2, que $V e^{i\omega t}$ está constituido por dos partes: una correspondiente al desplazamiento de la cabeza del pilote u_{pH} , y la otra por el desplazamiento de la roca, u_g .

O sea, se puede escribir:

$$V e^{i\omega t} = V(u_{pH}) - V(u_g) \dots\dots\dots(6-3)$$

donde

$$V(u_{pH}) = K_s u_{pH} \frac{F(H, 0)}{F(H, \omega)} \dots\dots\dots(6-4)$$

y

$$V(u_g) = u_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 K_s F(H, 0) \frac{F(H, \omega)}{F(H, \omega)} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(6-5)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (6-3) en la ecuación(6-1), ésta última se puede escribir:

$$M \ddot{u}_{pH} + V_{u_{pH}} = M u_g \omega^2 e^{i\omega t} + V_{u_g} \dots\dots\dots(6-6)$$

Con el objeto de analizar más adecuadamente el significado de las funciones complejas, que forman a las ecuaciones 6-4 y 6-5, -

éstas se expresarán como sigue; de la ecuación (6-4) se tiene:

$$Vu_{pH} = K_s u_{pH} (f_1 + if_2) \dots\dots\dots(6-7)$$

donde

$$f_1 + if_2 = \frac{F(H, 0)}{F(H, \omega)}, \dots\dots\dots(6-8)$$

y de la ecuación (6-5)

$$Vu_g = u_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 K_s F(H, 0) \Gamma (g_1 + i g_2)e^{i\omega t}, (6-9)$$

donde

$$g_1 + ig_2 = \frac{G(H, \omega) / F(H, \omega)}{G(H, 0) / F(H, 0)} \dots\dots\dots(6-10)$$

y

$$\Gamma = G(H, 0) / F(H, 0) \dots\dots\dots(6-11)$$

La función compleja $f_1 + if_2$ (ecuación 6-8) tiene el siguiente significado físico según se demuestra más adelante: la parte real, f_1 , está relacionada a la masa efectiva del suelo y varía con la frecuencia en la forma mostrada en la Fig. 6-3; la parte imaginaria, f_2 , está relacionada con el amortiguamiento radial.

En cuanto a la función $g_1 + ig_2$, la Fig. 6-4 muestra que dicha función se parece a la de un sistema con un grado de libertad, de frecuencia natural igual a ω_g y con un amortiguamiento interno igual a h_s . Dibujando los valores de $(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}$, como se muestra en la Fig. 6-5, y comparándolos con la curva que da el factor dinámico de carga para un sistema de un grado de libertad, es posible obtener lo que pudiera llamarse "amortiguamiento equivalente" h_s . La relación entre D_r y h_s se puede obtener a par-

##

tir de curvas como la presentada por Tajimi y reproducidas en la Fig. 6-6.

Para escribir la ecuación 6-6, en la forma que se acostumbra expresar la ecuación de equilibrio en un sistema con un grado de libertad, conviene primero escribir el valor de V_{ug} (Ec. 6-5) en la forma siguiente:

$$V_{ug} = - J_s F_s (\omega) u_g \omega^2 e^{i\omega t}, \dots\dots\dots(6-12)$$

donde

$$F_s(\omega) = \frac{1 + i 2 h_s (\omega / \omega_g)}{1 - (\omega / \omega_g)^2 + i h_s (\omega / \omega_g)}$$

y

$$J_s = F(H, 0) \frac{K_s}{\omega_g^2} \sqrt{1}$$

Llevando ahora la ecuación (6-12) a la ecuación (6-6), se puede escribir:

$$M\ddot{u}_{pH} + K_s u_{pH}(f_1 + i f_2) = -M\ddot{u}_g - J_s (\ddot{u} + \ddot{u}_g) \dots\dots(6-13)$$

donde \ddot{u} se obtiene de:

$$\ddot{u} + 2h_s \omega_g \dot{u} + \omega_g^2 u = -\ddot{u}_g$$

La ecuación (6-13) se puede también expresar en la siguiente forma:

$$M\ddot{u}_{pH} + \frac{f_2}{\omega} K_s \dot{u}_{pH} + f_1 K_s u_{pH} = P \dots\dots\dots(6-14)$$

donde

$$P = - [M\ddot{u}_g + J_s (\ddot{u} + \ddot{u}_g)]$$

Finalmente, la ecuación (6-14), se puede escribir de la siguiente manera:

$$M\ddot{u}_{pH} + \bar{C} \chi_2 \dot{u}_{pH} + K_s \chi_1 u_{pH} = P, \dots\dots\dots(6-15)$$

donde

$$\chi_1 = f_1 \quad (\text{Fig. 6-3})$$

$$\chi_2 = f_2/\omega \quad (\text{Fig. 6-7})$$

y

$$\bar{C} = K_s$$

Ahora bien, como se hace para el caso de la Teoría del semi-espacio, las siguientes simplificaciones se pueden hacer en los coeficientes de la ecuación 6-15:

1o. Para frecuencias muy bajas, usar $\chi_1 = 1$

2o. Para frecuencias intermedias pero menores de $\omega / \omega_g = 1$, χ_1 se puede aproximar a una parábola de la forma:

$$\chi_1 = 1 - \Gamma_2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2$$

Para este caso, y considerando que

$$-\omega^2 u_{pH} = \ddot{u}_{pH}$$

la ecuación 6-15 puede escribirse como sigue:

$$\left(M + \Gamma_2 \frac{K_s}{\omega_g^2}\right) \ddot{u}_{pH} + \bar{C} \chi_2 \dot{u}_{pH} + K_s u_{pH} = P \quad \dots\dots\dots(6-16)$$

O sea, la masa adicional está dada por:

$$M_e = \sqrt{2} K_s / \omega_g^2, \dots\dots\dots(6-17)$$

y el coeficiente equivalente de amortiguamiento por

$$C_e = \bar{c} \chi_2 \dots\dots\dots(6-18)$$

3o. Para $\omega \gg \omega_g$, usar una masa efectiva de suelo nula.

Obsérvese en la Fig. 6-7, que para frecuencias por abajo de la frecuencia natural del suelo, no existe amortiguamiento radial (esto es, $\chi_2 = 0$), y que para $\omega > \omega_g$, el valor de χ_2 puede aproximarse a 0.01. Para este último valor, la relación equivalente de amortiguamiento es:

$$D_h = \frac{0.01 K_s}{2 \sqrt{K_s M_T}} = 0.005 \left(\frac{K_s}{M + \sqrt{2} \frac{K_s}{\omega^2}} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(6-19)$$

Para ilustrar el cálculo de la masa equivalente del suelo, y la relación equivalente de amortiguamiento, se utilizará una vez más el ejemplo dado por la Fig. 3-2.

Considerando el valor de f_1 , dado por la Fig. 6-3, y empleando la expresión que da dicha función para $\omega < \omega_g$, se obtiene que:

$$\sqrt{2} = \frac{1 - f_1}{(\omega / \omega_g)^2} = 0.05$$

O sea, este es el valor de $\sqrt{2}$ que permite describir la función f_1 , en la misma forma como ésta varía en la Fig. 6-3 para $H = 20$ m.

De la ecuación (3-7), se puede obtener el valor de K_s . Sustituyendo valores se obtiene:

$$K_s = 7.8 \times 10^4 \text{ kg/cm};$$

El valor de la masa sobre el pilote es:

$$M = \frac{50 \times 10^3}{980} = 51 \text{ kg seg}^2/\text{cm}$$

La frecuencia fundamental del suelo, calculada con la expresión

$$\omega_g = \frac{C_s \pi}{2H}$$

resulta igual a 5.5 r.p.s.

Por tanto, de la ecuación (6-17), se obtiene que la masa equivalente de suelo es:

$$M_e = \frac{\sqrt{2} K_s}{\omega_g^2} = 0.05 \times \frac{7.8 \times 10^4}{30.2} = 130$$

y de la ecuación 6-19, suponiendo una masa de suelo nula, el amortiguamiento radial es:

$$D_h = \frac{0.005 \times (7.8 \times 10^4)^{1/2}}{51^{1/2}} = 0.19$$

O sea:

$$D_h = 19\%$$

6.3 Conclusiones

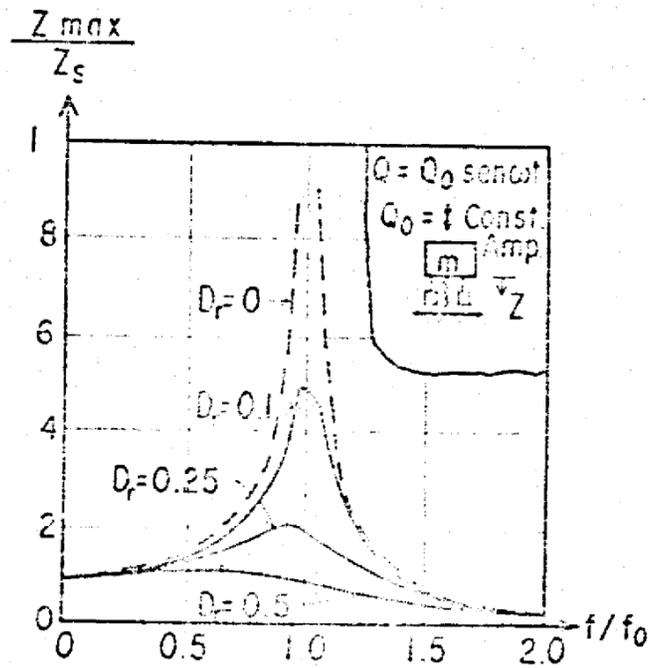
Dos conclusiones principales se pueden extraer de este capítulo.

- 1.- Existe una cantidad considerable de amortiguamiento radial - si $\omega_s > \omega_g$, pero muy poco (teóricamente cero) si $\omega_s < \omega_g$. Este resultado sugiere que puede existir una diferencia muy

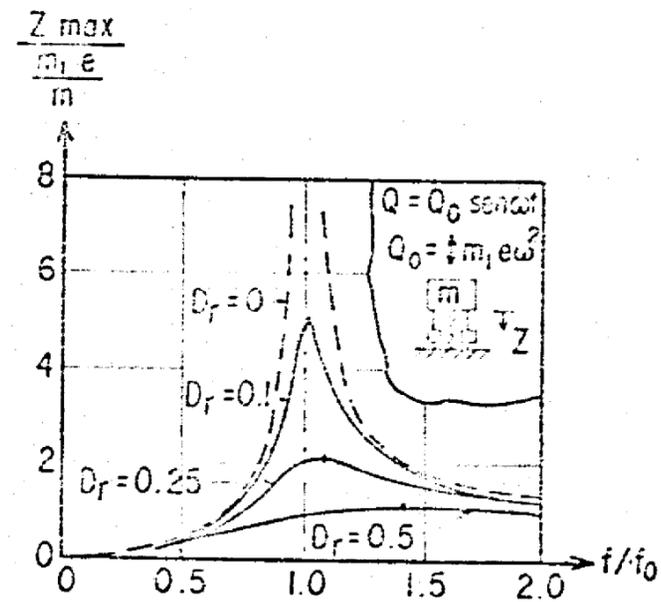
grande en el comportamiento de pilotes, dependiendo de cual-
sea el valor relativo de la frecuencia natural del sistema -
pilote-suelo con respecto al de la frecuencia fundamental -
del suelo.

- 2.- Se requieren datos experimentales para verificar el enuncia-
do anterior y establecer los límites de aproximación del --
procedimiento sugerido aquí para el cálculo del amortigua--
miento.

D_r = AMORTIGUAMIENTO
 Z_{max} = DESPLAZAMIENTO MAXIMO
 Z_s = DESPLAZAMIENTO ESTATICO
 m_1 = MASA EXCENTRICA
 e = EXCENTRICIDAD



a) FUERZA DE EXCITACION CONSTANTE.



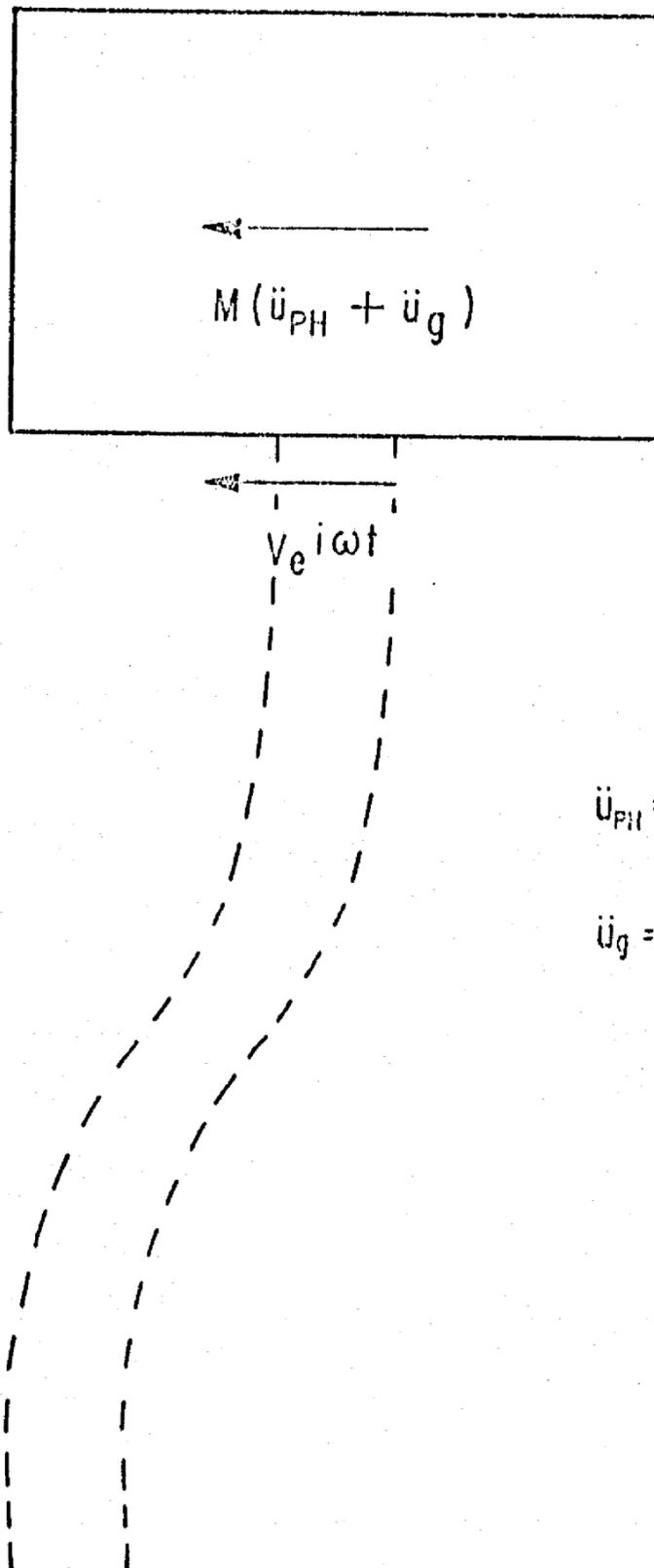
b) FUERZA DE EXCITACION DEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA.

FIG. 6.I. AMPLITUD DE DESPLAZAMIENTOS EN FUNCION DE LA FRECUENCIA DE EXCITACION, PARA UN SISTEMA AMORTIGUADO DE MASA-RESORTE.

(RICHART y WHITMAN, 1967)

ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO:

$$M\ddot{u}_{PH} + M\ddot{u}_g + Ve^{i\omega t} = 0$$



\ddot{u}_{PH} = ACELERACION RELATIVA DE LA CABEZA DEL PILOTE CON RESPECTO A LA ROCA.

\ddot{u}_g = ACELERACION DE LA ROCA

FIG. 6.2 FUERZAS QUE ACTUAN EN LA MASA SOPORTADA POR EL PILOTE.

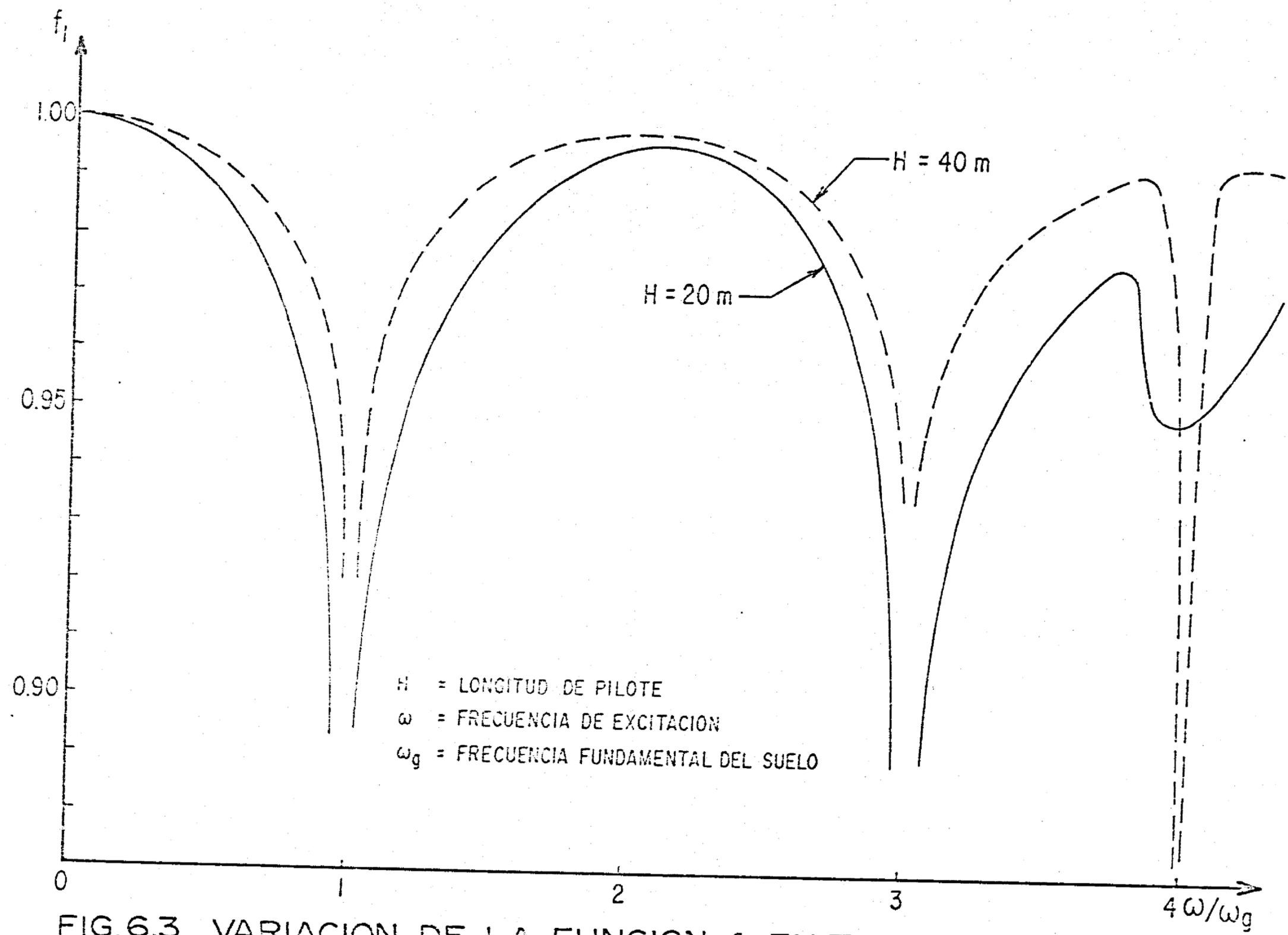


FIG.6.3 VARIACION DE LA FUNCION f_1 EN TERMINOS DE LA RELACION DE FRECUENCIAS ω/ω_g .

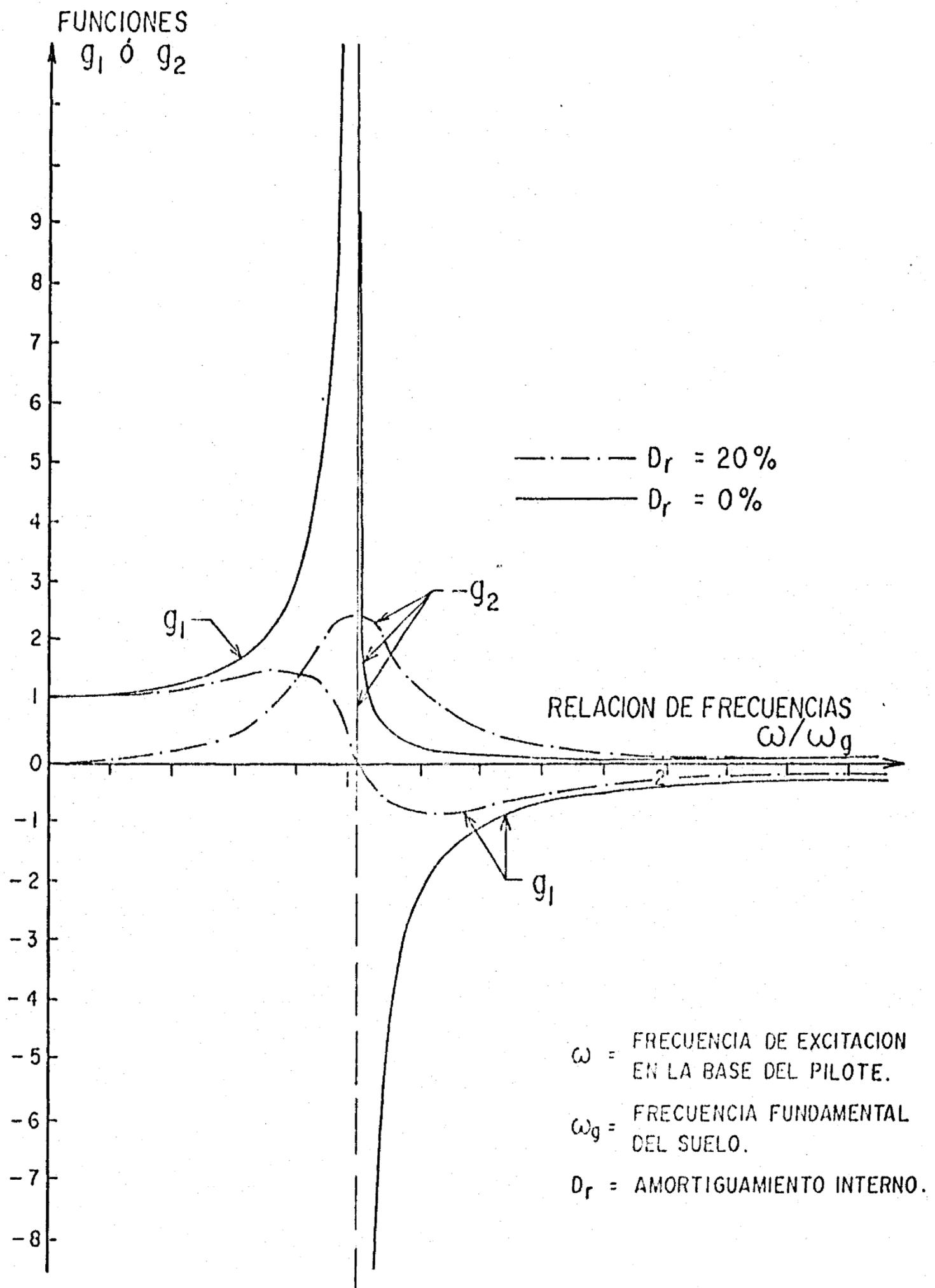


FIG.6.4 VARIACION DE LAS FUNCIONES g_1 y g_2 ,
CON LA RELACION DE FRECUENCIAS ω/ω_g

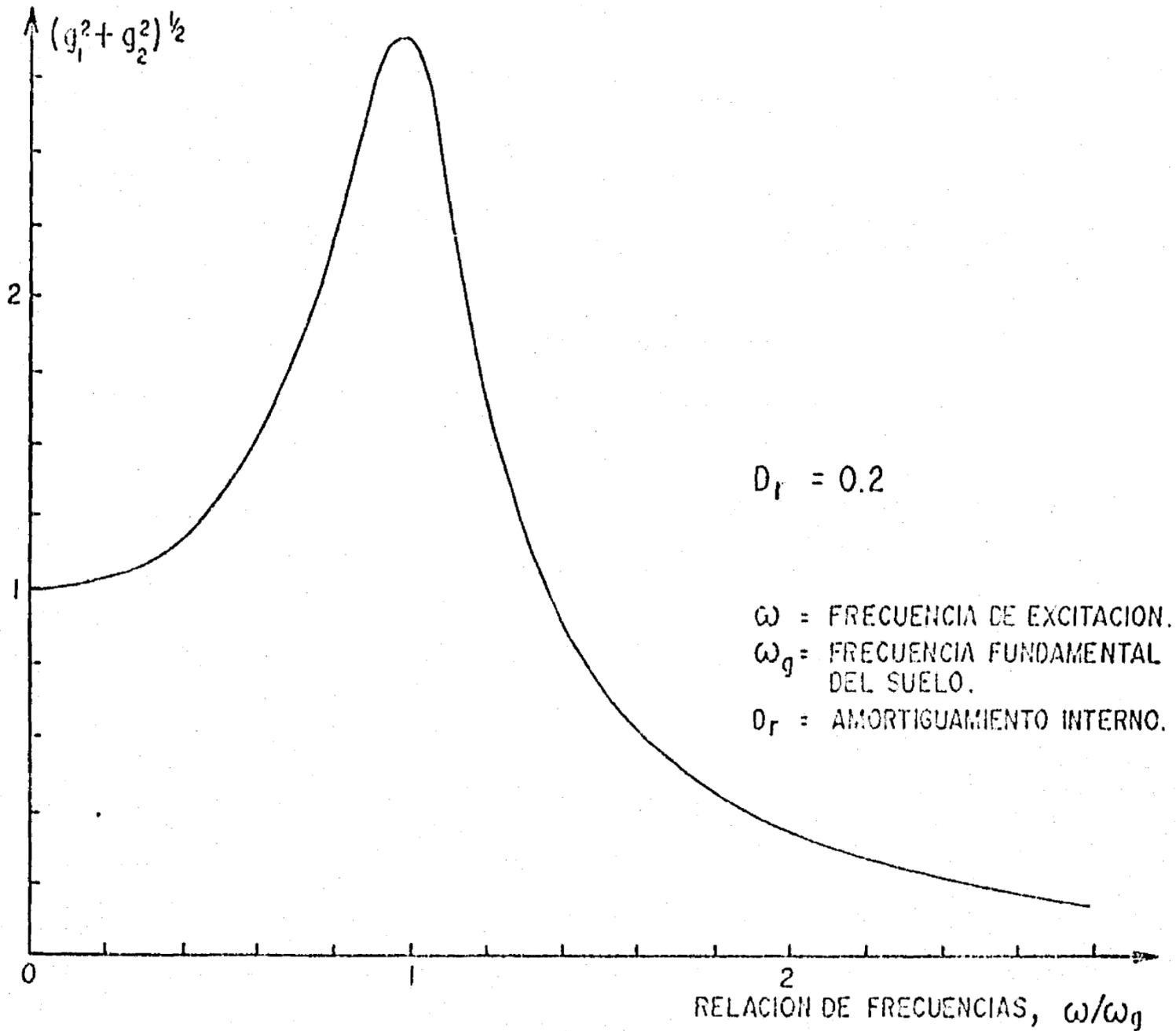


FIG. 6.5 VARIACION DEL MODULO DE LA FUNCION COMPLEJA $g_1 + ig_2$, EN TERMINOS DE LA RELACION DE FRECUENCIAS ω/ω_g .

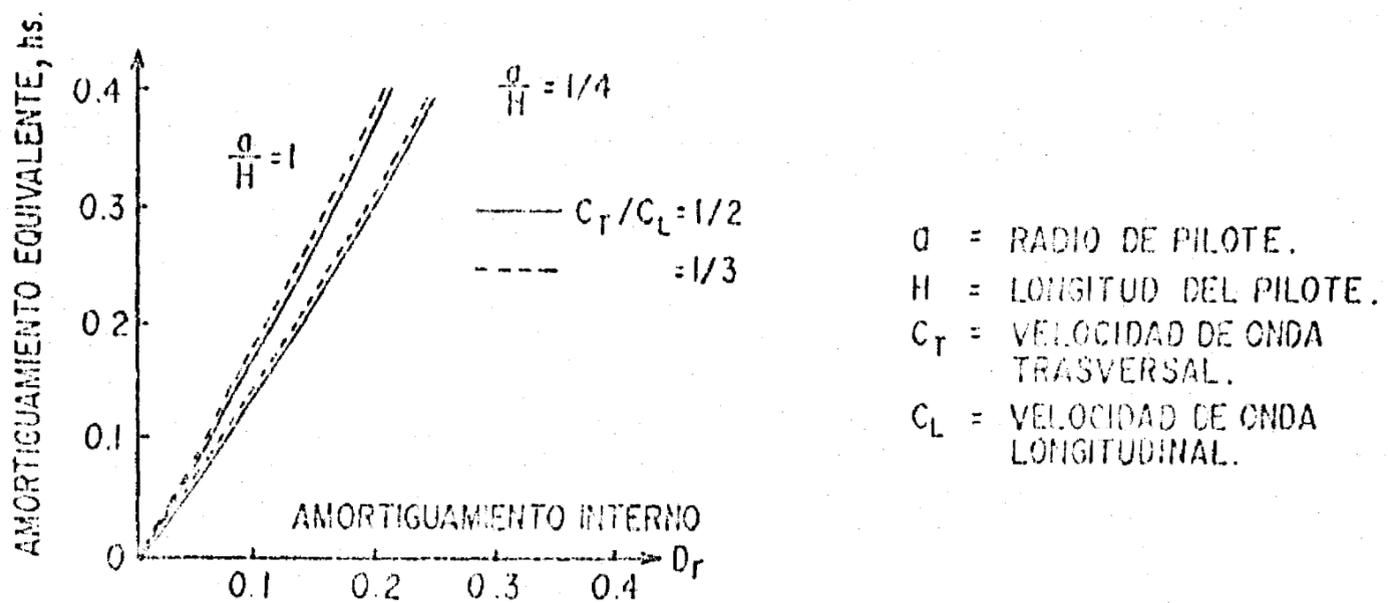


FIG. 6.6 VALORES DEL AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE EN FUNCION DEL AMORTIGUAMIENTO INTERNO. (TAJIMI, 1969)

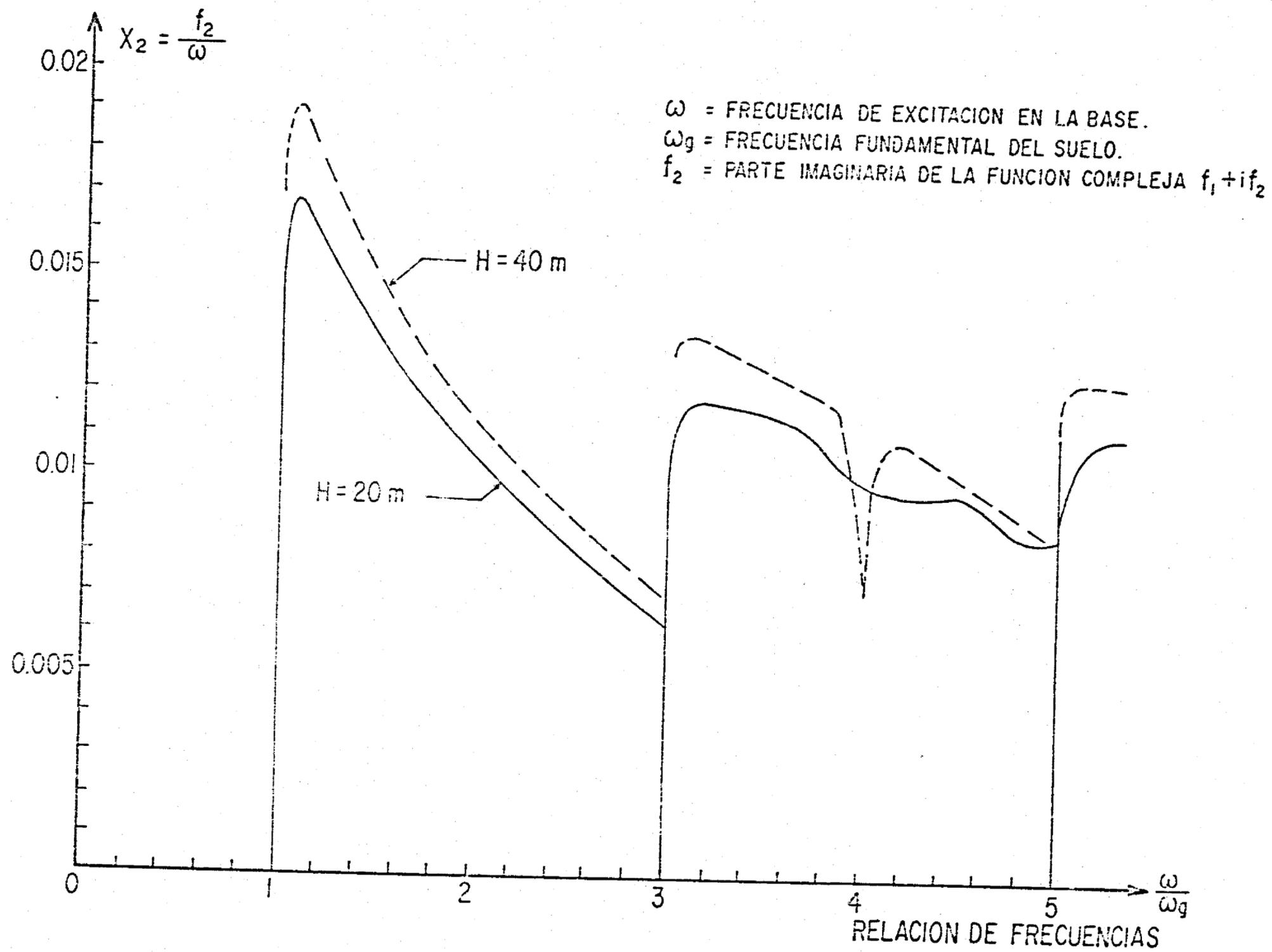


FIG.6.7 VARIACION DE LA FUNCION X_2 CON LA RELACION DE FRECUENCIAS (ω/ω_g) .

CAPITULO VII
GRUPOS DE PILOTES

7.1 Introducción

Los datos teóricos y experimentales sobre el comportamiento de pilotos, sujetos a fuerzas horizontales estáticas, han demostrado que la eficiencia de grupos de pilotos, definida como

$$\text{eficiencia de grupo} = \frac{\text{capacidad de carga del grupo}}{n \text{ veces la capacidad de pilotos aislados,}}$$

(donde n = número de los pilotos en el grupo), es siempre menor que la unidad (Prakash y Saran, 1967; Poulos 1971b).

En problemas dinámicos, es de esperarse este mismo tipo de resultados. En base a las conclusiones obtenidas en los capítulos -- previos, en el actual se propone un método que considera la --- interacción entre los pilotos que trabajan en grupo, cuando existen movimiento sísmicos. El método que se propone es meramente teórico y requiere de ser comprobado experimentalmente.

7.2 Respuesta de Pilotes en Grupo

En el capítulo V se demostró que la respuesta de pilotos se puede dividir en dos partes; una debido al desplazamiento del -- suelo y la segunda debido al efecto de la masa que soporta el pi lote. Se mostró también que para la primera parte, se puede con siderar que el pilote sigue el desplazamiento del suelo (siempre y cuando $\lambda > 5$), y que la respuesta total es igual a la suma --

del desplazamiento del suelo y el efecto de la superestructura.

Basado en estas consideraciones, y en el hecho de que la mayor parte del desplazamiento total final de un grupo de pilotes, cargados lateralmente con fuerzas estáticas, ocurre instantáneamente al aplicar las cargas (véase la Fig. 7-1), la respuesta de un grupo de pilotes sujetos a movimientos sísmicos se puede calcular como sigue:

- 1.- Suponer que no existe efecto de interacción en la parte correspondiente a la respuesta causada por el desplazamiento del suelo.
- 2.- Usar, para la parte correspondiente a las fuerzas que provienen de la superestructura, los factores de interacción que se tendrían en el caso de que la situación fuera estática. Por ejemplo, se pueden utilizar como dichos factores aquellos dados por la teoría que propone H. G. Poulos (1971b), para grupo de pilotes.
- 3.- Súmenese los resultados de (1) y (2), para obtener la respuesta total de un grupo de pilotes (desplazamiento del suelo + la segunda parte modificada por el efecto de interacción).

Si se utiliza este procedimiento, los resultados de estudios en problemas estáticos serán de valiosa utilidad. Varios de tales estudios se han efectuado en grupos de pilotes (Sawaguchi, 1972; Yegian y Wright, 1973; Suklje, 1971), pero posiblemente el más general y extenso es el presentado por H. G. Poulos (1971b y 1973). Este último autor encontró que el desplazamiento de un

grupo de pilotos puede obtenerse mediante la fórmula

$$\frac{\hat{\rho}_{\text{del grupo}}}{\hat{\rho}_{\text{individual}}} = 1 + \hat{\alpha} \dots\dots\dots(7-1)$$

donde $\hat{\rho}$ significa desplazamiento, y

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{desplazamiento adicional debido a los pilotos adjuntos}}{\text{desplazamiento de un pilote debido a su propia carga}}$$

En el Apéndice VII-1 se presenta un resumen del análisis hecho por Poulos; en él se indica la manera como se determina el factor de interacción $\hat{\alpha}$, y la forma cómo se aplican los resultados del análisis de pilotos individuales a grupos de pilotos.

Algunos de los importantes resultados que Poulos obtuvo en sus estudios, sobre grupos de pilotos sujetos a cargas estáticas horizontales, son los siguientes:

- 1.- La distribución de la presión horizontal a lo largo del pilote, y consecuentemente la distribución de momentos, no son afectados; es decir, la presión y momentos obtenidos para un pilote aislado, puede usarse para dos o más pilotos que trabajan en interacción.
- 2.- El desplazamiento depende más del ancho del grupo que del número de pilotos en el grupo. Esto significa que, en lo que se refiere a desplazamientos, se puede obtener una considerable economía si se utiliza un número relativamente pequeño de pilotos a espaciamientos relativamente grandes.
- 3.- Para grupos donde cada pilote soporte iguales cargas, o mo-

mentos, los pilotes centrales sufren los máximos desplazamientos y los de las esquinas los mínimos.

- 4.- Para grupos donde se tienen iguales desplazamientos, se demuestra que los pilotes de las esquinas soportan mayores cargas que los del centro.

Poulos (1973) da ejemplos para determinar el desplazamiento de grupos de pilotes, bien sea para valores de E_s que son constantes o son variables con la profundidad, y tanto para suelos de comportamiento elástico como para suelos de comportamiento elástico-plástico.

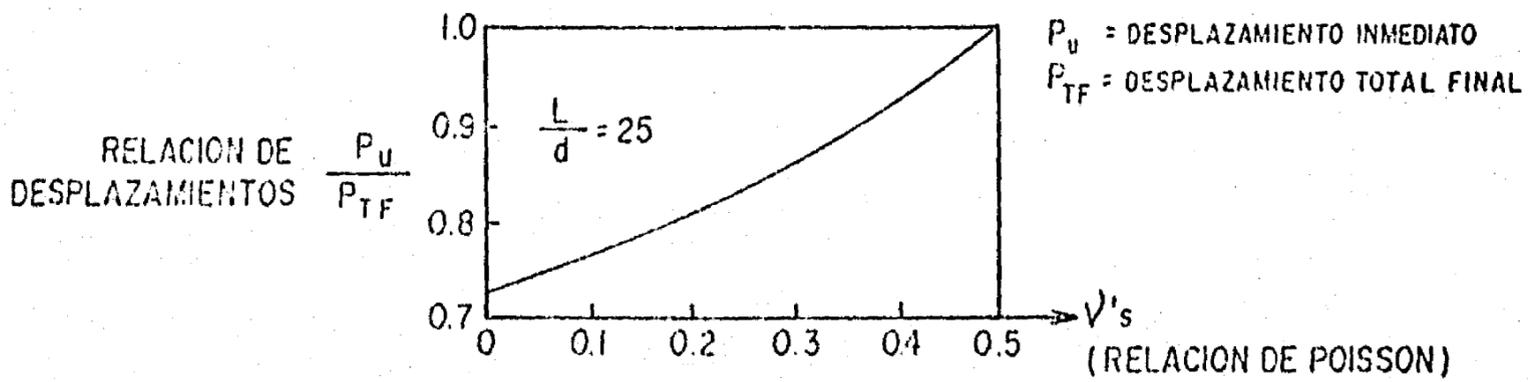


FIG. 7.1 RELACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS INICIAL Y FINAL, EN PILOTES CARGADOS LATERALMENTE CON FUERZAS ESTATICAS.

(POULOS, 1971a)

CAPITULO VIII

EFFECTO DEL ENCAJONAMIENTO EN LA RESPUESTA DINAMICA DE CIMENTACIONES PILOTEADAS

8.1 Introducción

Como ya se indicó anteriormente, uno de los procedimientos comúnmente usados para resistir las fuerzas sísmicas, en cimentaciones piloteadas, es encajonar parte de la estructura dentro del suelo, a fin de emplear los empujes pasivos que actúan en las paredes localizadas abajo del nivel superficial del suelo. Sin embargo, no existen en la literatura estudios analíticos que muestren la efectividad de tal encajonamiento y la duda de emplear este procedimiento aún permanece en la mente de muchos ingenieros.

Tratando de obtener alguna información referente a esta efectividad, se utilizaron algunos programas de elemento finito que originalmente fueron desarrollados para calcular la respuesta de estructura apoyadas, o parcialmente sumergidas, en un medio elástico.

Primeramente se determinó la respuesta de un pilote aislado utilizando un método tridimensional desarrollado por Kausel (1974), y posteriormente se empleó un método de deformación plana desarrollado por Waas (1972) para obtener la respuesta en un grupo de pilotes y analizar el efecto de la fricción en el fondo de la cimentación, así como la efectividad del encajonamiento.

El método de análisis que se presenta en este capítulo está todavía en una etapa muy inicial; sin embargo, mediante algunos refinamientos, es posible que el mismo sirva de base para estudios posteriores relacionados a este tema.

8.2 Método de Kausel para Determinar la Respuesta de Pilotes -- Aislados

Kausel utiliza el método de expansión de Fourier para hacer el análisis de sistemas axisimétricos sujetos a cargas no axisimétricas arbitrarias, y obtiene la interacción entre una zapata circular y un estrato de suelo. En su análisis, se emplea una malla de elementos finitos que modela las propiedades de la región irregular, localizada entre la superficie del manto rocoso y la cimentación de una estructura (Fig. 8-1). Se usa también una frontera especial cilíndrica, lejana del campo, para representar los efectos de interacción entre la región irregular y la región estratificada del suelo (que se encuentra a una gran distancia del eje del sistema). La frontera trasmisora reproduce, en forma consistente, la radiación de las ondas provenientes de la región central.

Para obtener la respuesta de un pilote circular, mediante el método de Kausel, fué necesario eliminar la zapata circular junto con la región irregular, y aislar la matriz frontera que representa al campo lejano.

La respuesta de un pilote sujeto a cargas estáticas, se puede obtener utilizando, como una de las propiedades del suelo que ro

dea al pilote, el módulo de Young determinado a partir de pruebas de campo; sin embargo, para obtener la respuesta de un pilote su jeto a cargas dinámicas, es indispensable considerar la disminución de este módulo con la magnitud de las deformaciones. Esto último deberá realizarse sin variar las características dinámicas del estrato de suelo; por ejemplo, sin variar la frecuencia natural del estrato.

Lo anterior se puede conseguir mediante un proceso iterativo que permita repetir el análisis, hasta que las deformaciones y las características del suelo sean compatibles con las relaciones de esfuerzo deformación. Como alternativa a dicho proceso, que consume un tiempo relativamente muy grande de computadora, se propone un procedimiento que más adelante se describe, y está basado en las siguientes hipótesis:

- 1a. El suelo adyacente a la superficie lateral del pilote experimenta un cierto remodelo como consecuencia de las fuerzas dinámicas que le transfiere la superestructura, en particular aquel localizado en el tramo comprendido entre el punto donde la elástica deformada pasa por cero y la superficie del suelo.
- 2a. La alteración que se produce en el suelo descrito en el párrafo anterior, puede representarse mediante la sustitución de una cierta cantidad de dicho suelo por un material hipotético, que tiene una misma relación de Poisson, pero un módulo elástico menor que el correspondiente al suelo no alterado.

La cantidad y distribución a lo largo del pilote, de este material hipotético, debe ser tal que la respuesta del mismo, obtenida mediante el procedimiento que más adelante se describe, cuando se aplican cargas estáticas, sea la misma que la calculada usando el método de Chang (1937).

- 3a. La respuesta dinámica del pilote, en las condiciones que se acaban de describir, es la misma que la obtenida usando el modelo empleado en el Capítulo IV de la tesis.

En base a las anteriores hipótesis, el procedimiento que se propone para la determinación de la respuesta de un pilote aislado es el siguiente:

- 1o. Determinar el primer punto donde la elástica deformada del pilote pasa por cero. [Para el caso de un estrato de suelo homogéneo, la profundidad de este punto es: $l = 3\pi / 4\psi$, donde $\psi = (kD/4EI)^{1/4}$].
- 2o. Calcular el primer punto de inflexión (igual a $l/3$, cuando el módulo del suelo se considera constante con la profundidad)
- 3o. De la superficie del suelo, al primer punto de inflexión, suponer que existe suelo "remoldeado" alrededor del pilote, en una extensión de $2D$ ($D =$ diámetro del pilote) a partir de la superficie lateral del pilote (ver Fig. 8-2). El módulo-elástico, de este suelo "remoldeado", es:

$$E'_S = E_S/400$$

donde

$$E'_S = \text{módulo elástico del suelo remoldeado}$$

##

E_s = módulo elástico del suelo inalterado

4o. Del punto de inflexión al primer punto donde la elástica-deformada del pilote pasa por cero, suponer que existe suelo "remoldeado" alrededor del pilote, en una extensión igual a D a partir de la superficie lateral del pilote.

Ahora bien, el procedimiento anterior se determinó después de -- analizar varias alternativas y aplicar el procedimiento de tanteos al problema descrito en la Fig. 3-2, hasta que la respuesta obtenida fue congruente en la búsqueda. La solución que resultó mejor para suelos arcillosos con distintas resistencias al corte, es precisamente la mostrada en la Fig. 8-2.

Para verificar la hipótesis de que el modelo propuesto daría la misma respuesta que el modelo dinámico estudiado en el Capítulo IV de la tesis, se determinaron las respuestas del pilote mencionado para varias frecuencias de excitación. Los valores obtenidos para $\omega = 1 \text{ rad/seg}$ y 3 rad/seg , se muestran respectivamente en las Figs. 8-3 y 8-4, donde también se dibuja el desplazamiento del suelo como referencia. En estas dos figuras se puede ver la buena aproximación del procedimiento propuesto; sin embargo, como se mencionó desde un principio, falta analizar otras muchas condiciones (variación de E_s con la profundidad, empleo de amortiguamiento interno, etc.) para evaluar correctamente dicho procedimiento.

Cabe aquí señalar que una de las mayores ventajas del uso del método del elemento finito, en el cálculo de la respuesta de pilo-

tes, es poder simular mejor cualquier situación particular de los mismos. En efecto, utilizando dicho método, es posible representar a los pilotes con sus conexiones reales en sus extremos y -- con las características actuales en sus materiales (o sea, no -- hay necesidad de transformar la sección del pilote en una sección homogénea, cuando por ejemplo la sección es tubular con corazón de concreto); además, un suelo estratificado, o con propiedades variables con la profundidad, se puede manejar muy fácilmente a -- través del elemento finito.

8.3 Método de Waas para Analizar la Respuesta de Grupos de Pilotes y el Efecto de Encajonamiento en Cimentaciones Piloteadas

El objetivo principal en el estudio de pilotes aislados, mediante el programa de Kausel, fue el de ver la aplicabilidad del método del elemento finito en el análisis de pilotes. Sin embargo, a pesar de que dicho programa permite analizar casi cualquier tipo de problemas en pilotes individuales, resulta muy difícil -- adaptarlo para resolver directamente los problemas en grupo de -- pilotes. Para este último caso, se consideró conveniente emplear un programa desarrollado por Waas (1972), y modificarlo por Chang (1974).

El método desarrollado por Waas es muy similar al empleado por Kausel en lo que se refiere a la frontera transmisora que reproduce la radiación de ondas (de hecho, Kausel partió de los resultados de Waas para el desarrollo de su método), sólo que el de -- Waas se refiere a problemas con deformación plana. Esto último,

implica una seria limitación del método de Waas, y ella es que sólo es aplicable en grupos donde se puede considerar que, en uno de los sentidos, el número de pilotes es infinito.

La forma como se utilizó el modelo de deformación plana, para determinar la presunta de pilotes que trabajan en grupo, fué el de representara éstos por paredes, de tal manera que cada tramo de pared tenga la misma relación de fuerza-desplazamiento que la de un pilote aislado. Para conseguir ésto, el módulo al cortante de los pilotes es modificado en la relación A_0/A_1 , donde A_0 es el área de un pilote real y A_1 es el área equivalente del tramo de pared. La Fig. 8-5a muestra la determinación del módulo G del pilote y el área equivalente del tramo de pared que sustituye al pilote.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, una hilera de pilotes puede también representarse por una sola pared, simplemente multiplicando, el módulo al cortante modificado, por el número de pilotes en la hilera.

La Fig. 8-5b muestra la red empleada para un grupo de 6 pilotes; nótese en esta figura que también se está considerando el remoldeado que el suelo experimenta alrededor del pilote. (Por simplificación, se considera para este caso una sola franja continua de suelo remoldeado a cada lado de las paredes que representan las hileras de pilotes). Si se aplica una fuerza horizontal de 100-Ton en la cabeza de cada pilote, del modelo mostrado en la Fig. 8-5b, los desplazamientos que se obtienen se muestran en la Fig. 8-6. Esta última figura indica que el tipo de desplazamientos-

experimentados por este modelo, es el mismo que Poulos (1971-1b) señala en su análisis de grupos de pilotes; es decir, para la misma fuerza en cada pilote, los pilotes del centro se desplazan más que los de la orilla.

Ahora bien, con el fin de simplificar más el modelo del elemento finito en un grupo de pilotes, y analizar los efectos de encajonamiento y fricción en la base de la estructura, se decidió concentrar las rigideces de todos los pilotes, en el grupo, en dos pilotes: una a cada lado del centro del claro para no tener cabeceo. La Fig. 8-7 muestra un modelo en deformación plana para hileras de seis pilotes (cada pilote o "tramo de pared" representa 3 de ellos); en la misma figura se muestra el encajonamiento de la superestructura que esta representada por una masa rígida.

Si se aplica una fuerza horizontal al modelo de la Fig. 8-7, de manera que la carga promedio por pilote sea de 100 Ton al nivel de su cabeza, el desplazamiento que se obtiene es el indicado en la Fig. 8-8. En esta última figura también se muestra el desplazamiento que se obtendrá si no existiera encajonamiento; se puede observar que el desplazamiento horizontal, para una profundidad de 4 metros de encajonamiento, es disminuido en más del 50%.

La Fig. 8-9, señala el efecto de la fricción en la base de la cimentación para el último caso señalado; en ella se puede observar que dicho efecto es muy pequeño cuando se compara al efecto de la presión de tierra en las paredes de la cimentación, y puede prácticamente despreciarse.

Con respecto a la clase de suelo que rodea a las paredes de la -

cimentación, la Fig 8-10 hace ver que la respuesta a un movimiento dinámico en la base del estrato de suelo, de cimentaciones piloteadas encajonadas, es prácticamente independiente de este efecto. Esto concuerda con los resultados de Seed & Idriss (1973) - para cimentaciones encajonadas sin pilotes.

8.4 Conclusiones

Las conclusiones del presente capítulo son las siguientes:

- 1.- El encajonamiento de estructuras con cimentaciones piloteadas reduce considerablemente la fuerza que la superestructura produce en la cabeza de los pilotes durante movimientos sísmicos. Dos factores contribuyen a esta reducción: a) disminución de la masa "actuante" de la estructura, por una cantidad igual a la masa del suelo excavado, y b) absorción de una cantidad considerable de energía a través de la presión pasiva de tierra.
- 2.- La fricción en la base de la cimentación, y la disminución del módulo E_s a lo largo de las paredes de la misma (que se encuentran dentro del suelo), son efectos que se pueden despreciar.
- 3.- El método del elemento finito puede ser una herramienta muy útil en el análisis de los problemas relacionados a la respuesta de pilotes y estructuras encajonadas. En particular, el programa de Kausel aquí descrito amerita que su aplicación, en este tipo de problemas, sea extendido.

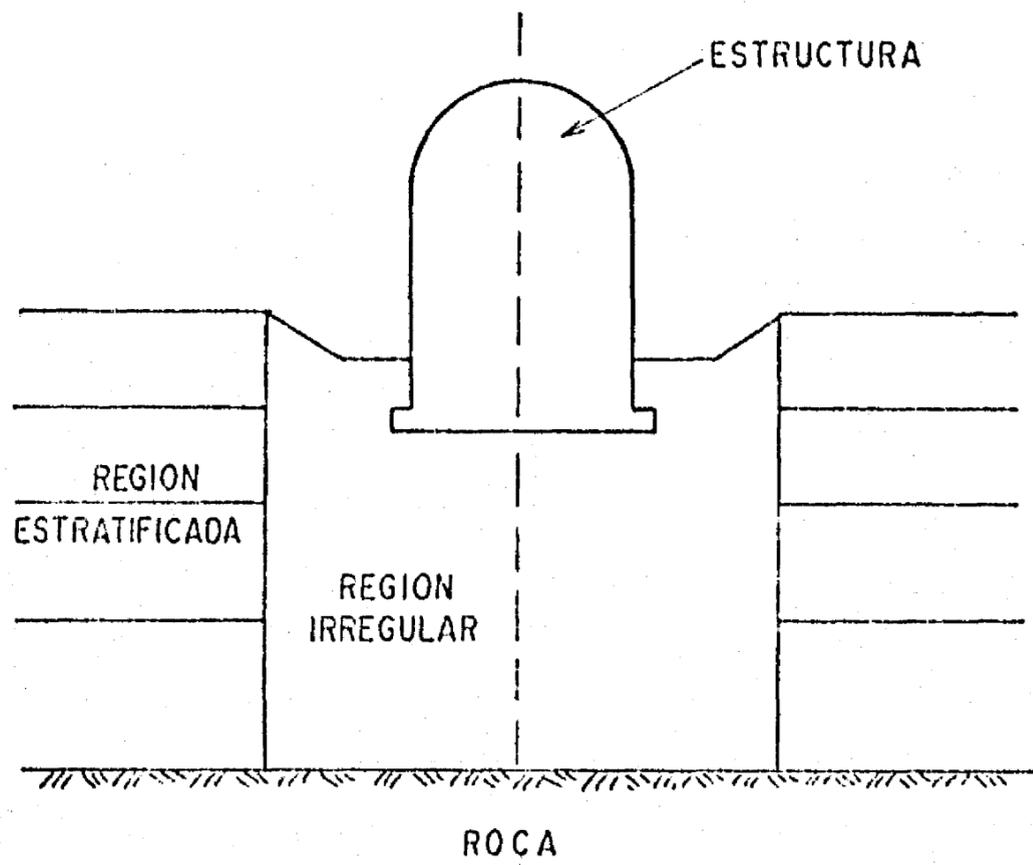


FIG. 8.1 REPRESENTACION DEL SUELO PARA ANALIZAR LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA NUCLEAR CILINDRICA (KAUSEL, 1974)

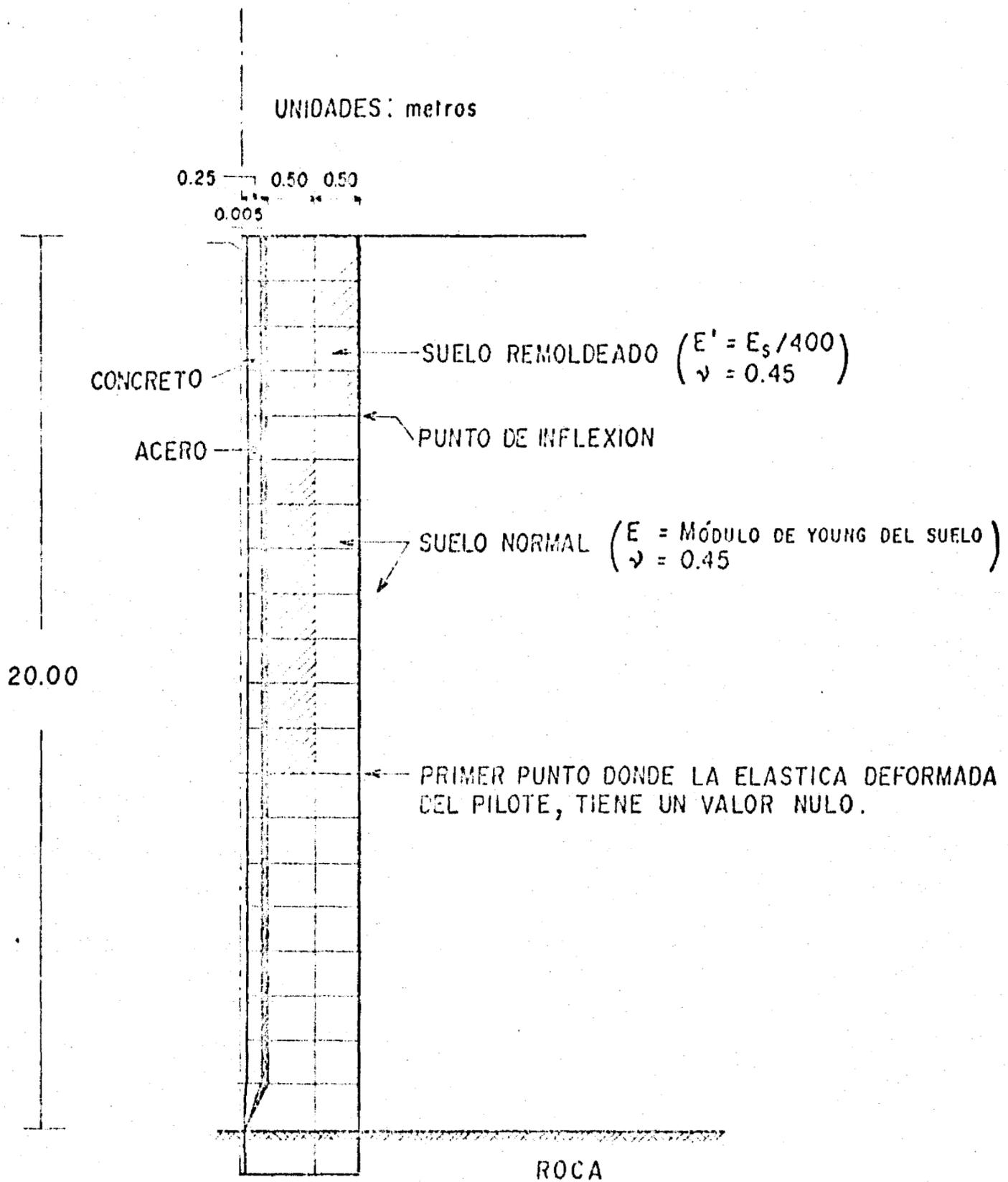


FIG. 8.2 MALLA UTILIZADA PARA OBTENER EL MODELO DE ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL QUE PROPORCIONA LA MISMA RESPUESTA ESTADICA, A CARGAS LATERALES, QUE EL METODO DE CHANG.

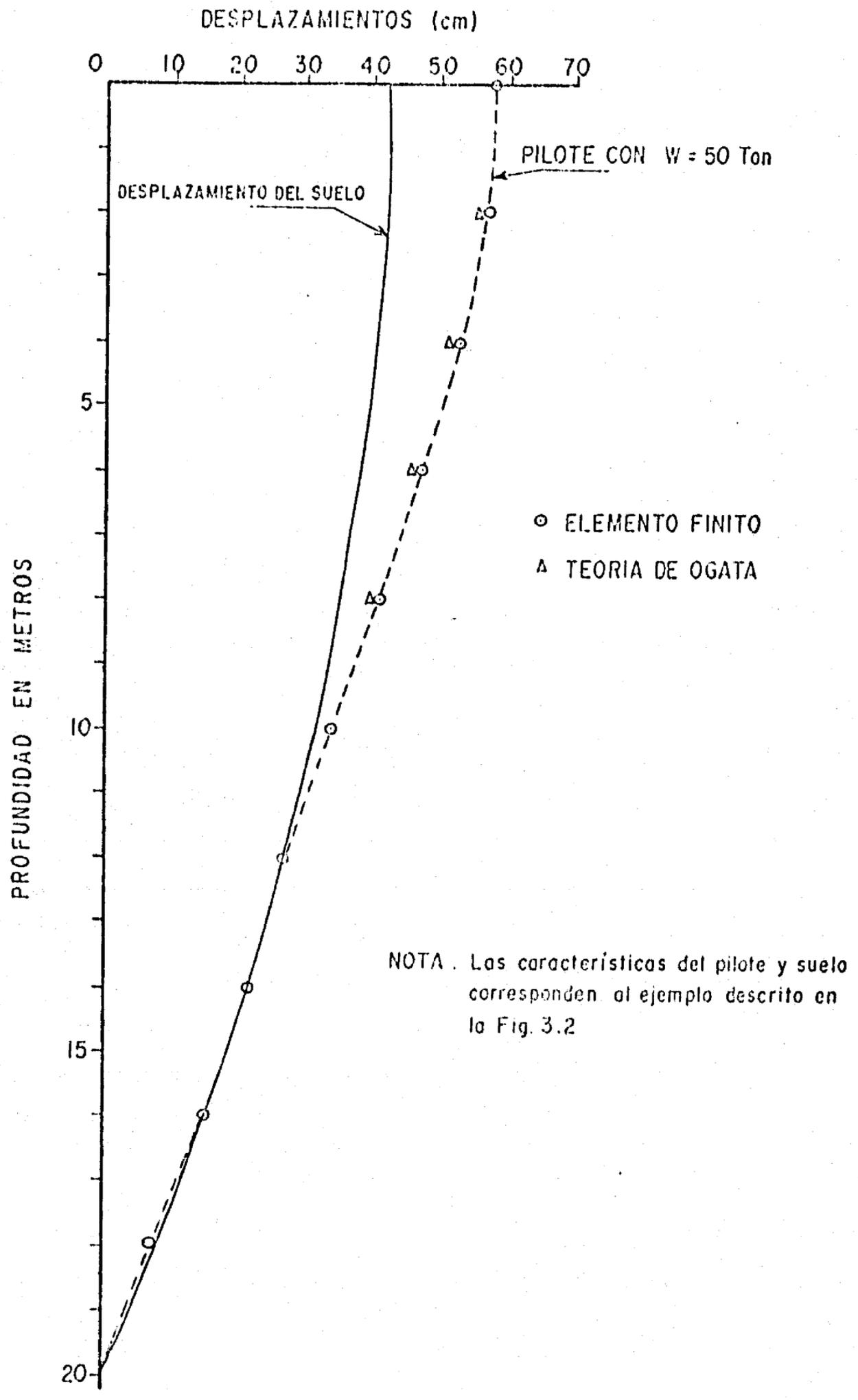


FIG. 8.3 DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO Y PILOTE CUANDO LA FRECUENCIA DE EXITACION EN LA BASE ES DE 1 RAD/SEG.

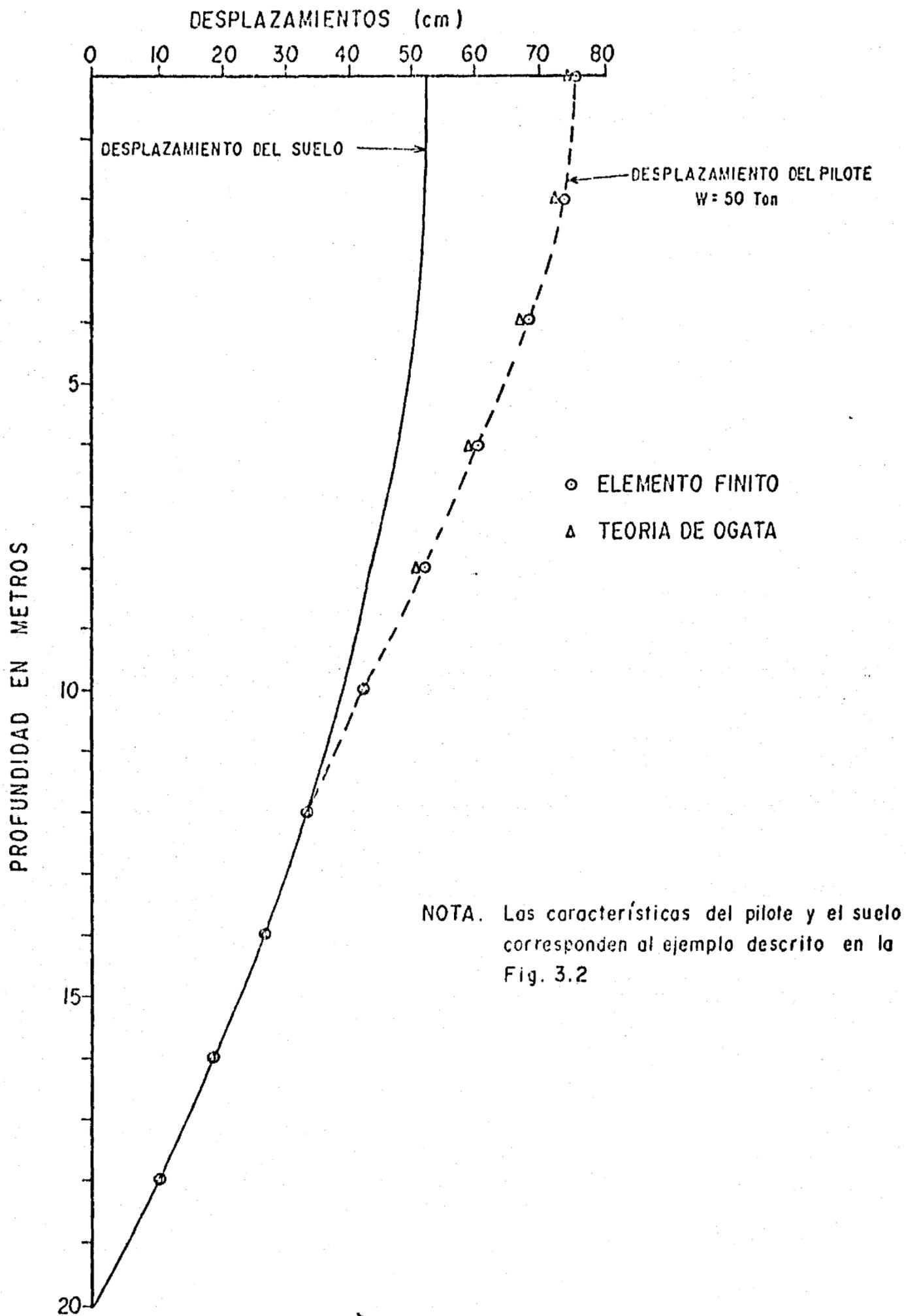
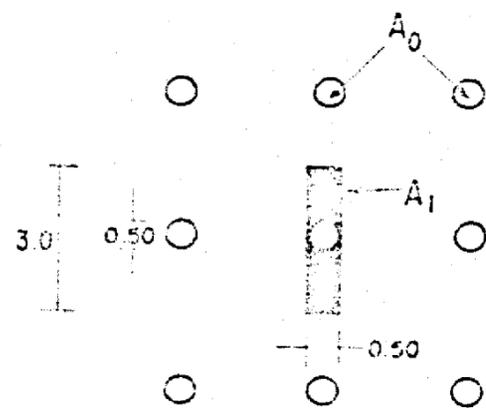


FIG. 8.4 DESPLAZAMIENTO DEL SUELO Y EL PILOTE CUANDO LA FRECUENCIA DE EXITACION, EN LA BASE DEL ESTRATO, ES DE 3 RAD/seg.



UNIDADES: METROS

DETERMINACION DE G_1

$$U_0 = \frac{P_0}{G_0 A_0} = \text{Desplazamiento de un pilote en un grupo.}$$

Donde P_0 = Carga lateral promedio,
 G_0 = Módulo al cortante del pilote,
 A_0 = Área transversal de un pilote
 $= \pi D^2/4$.

$$U_1 = \frac{P_0}{G_1 A_1} = U_0$$

Donde G_1 = Módulo al cortante equivalente
 A_1 = Área equivalente
 (= 3×0.50 para nuestro ejemplo)

Dado que $U_1 = U_0$, se tiene que

$$G_1 = G_0 \frac{A_0}{A_1}$$

FIG. 8.5 a DETERMINACION DEL AREA EQUIVALENTE (A_1), Y MODULO AL CORTANTE EQUIVALENTE (G_1).

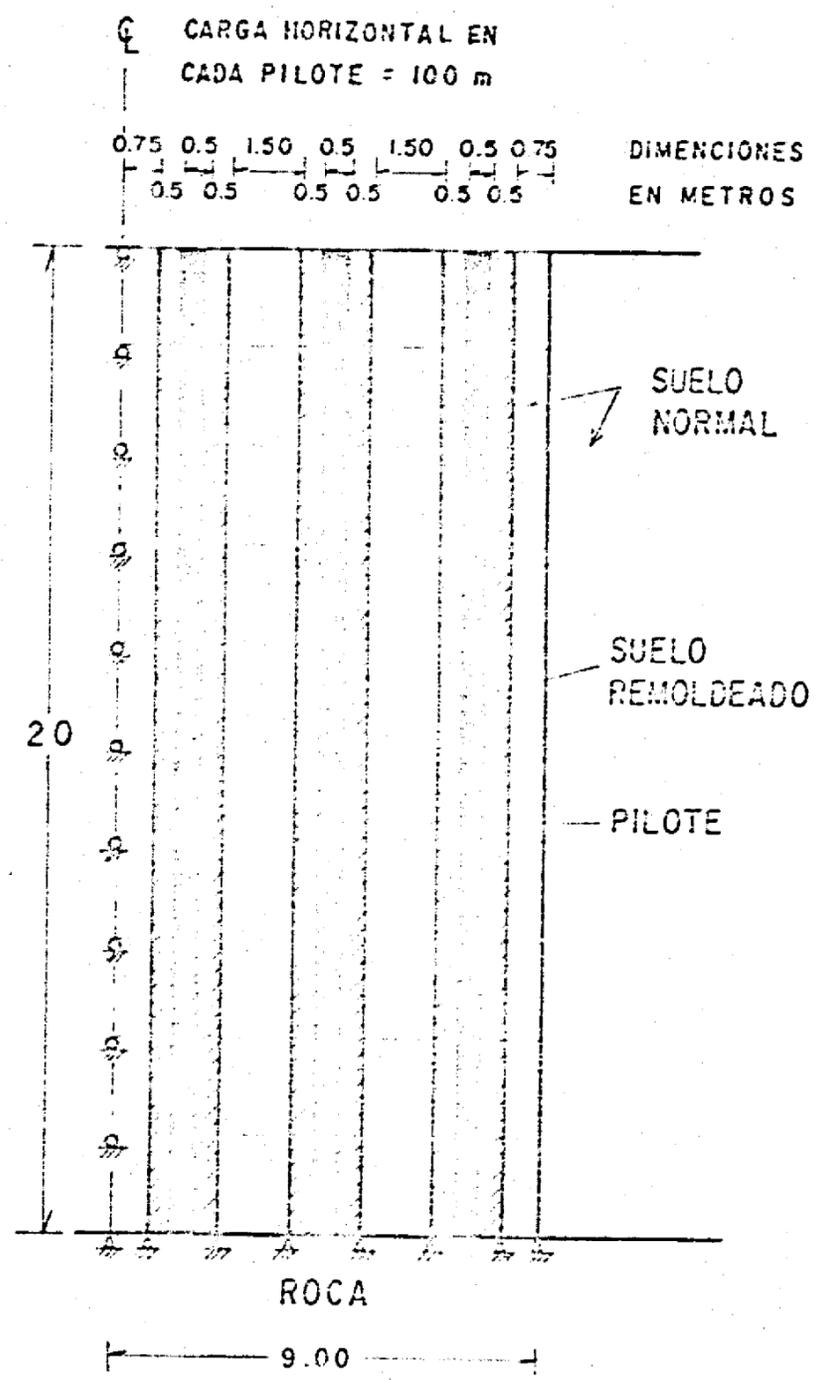


FIG. 8.5 b MALLA EMPLEADA EN MODELO DE ELEMENTO FINITO CON DEFORMACION PLANA PARA UN GRUPO DE 6 PILOTES @ 60

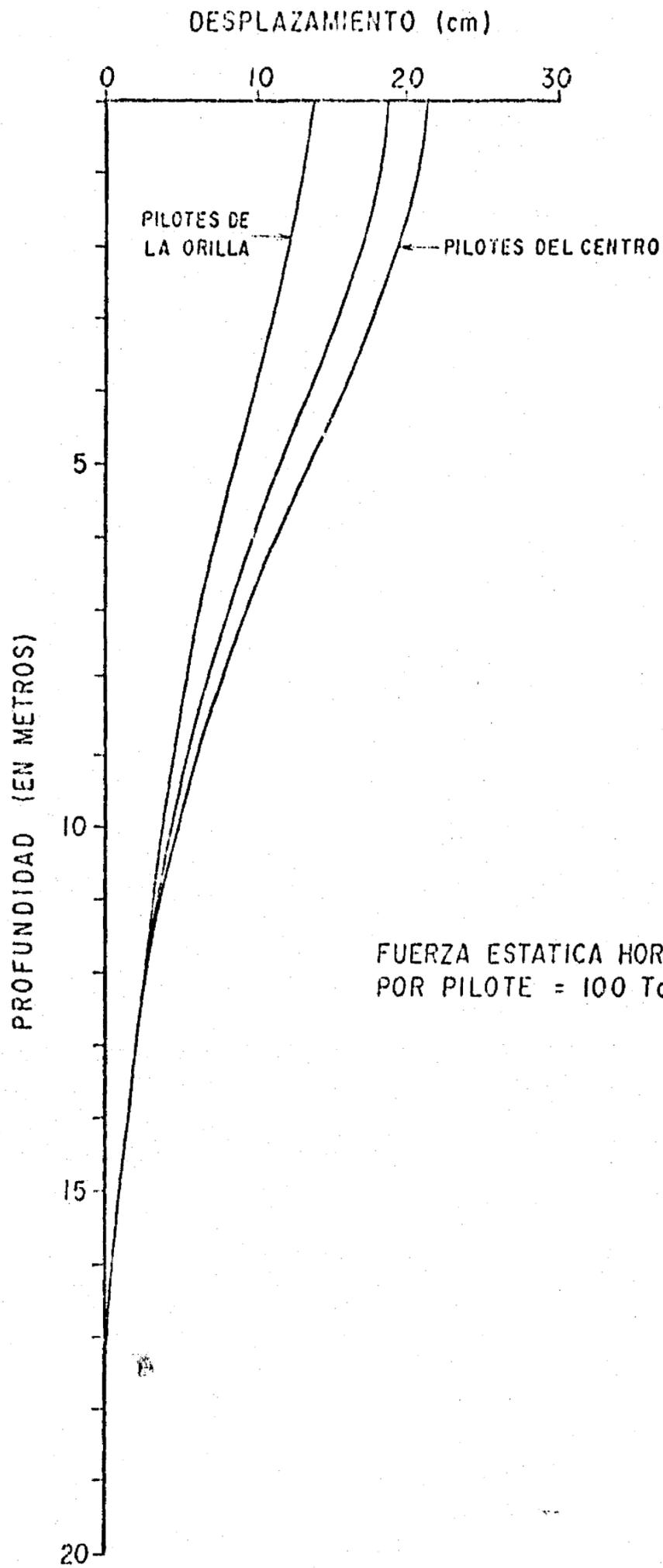


FIG. 8.6 DESPLAZAMIENTOS OBTENIDOS USANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO CON DEFORMACION PLANA (GRUPO DE 6 HILERAS DE PILOTES).

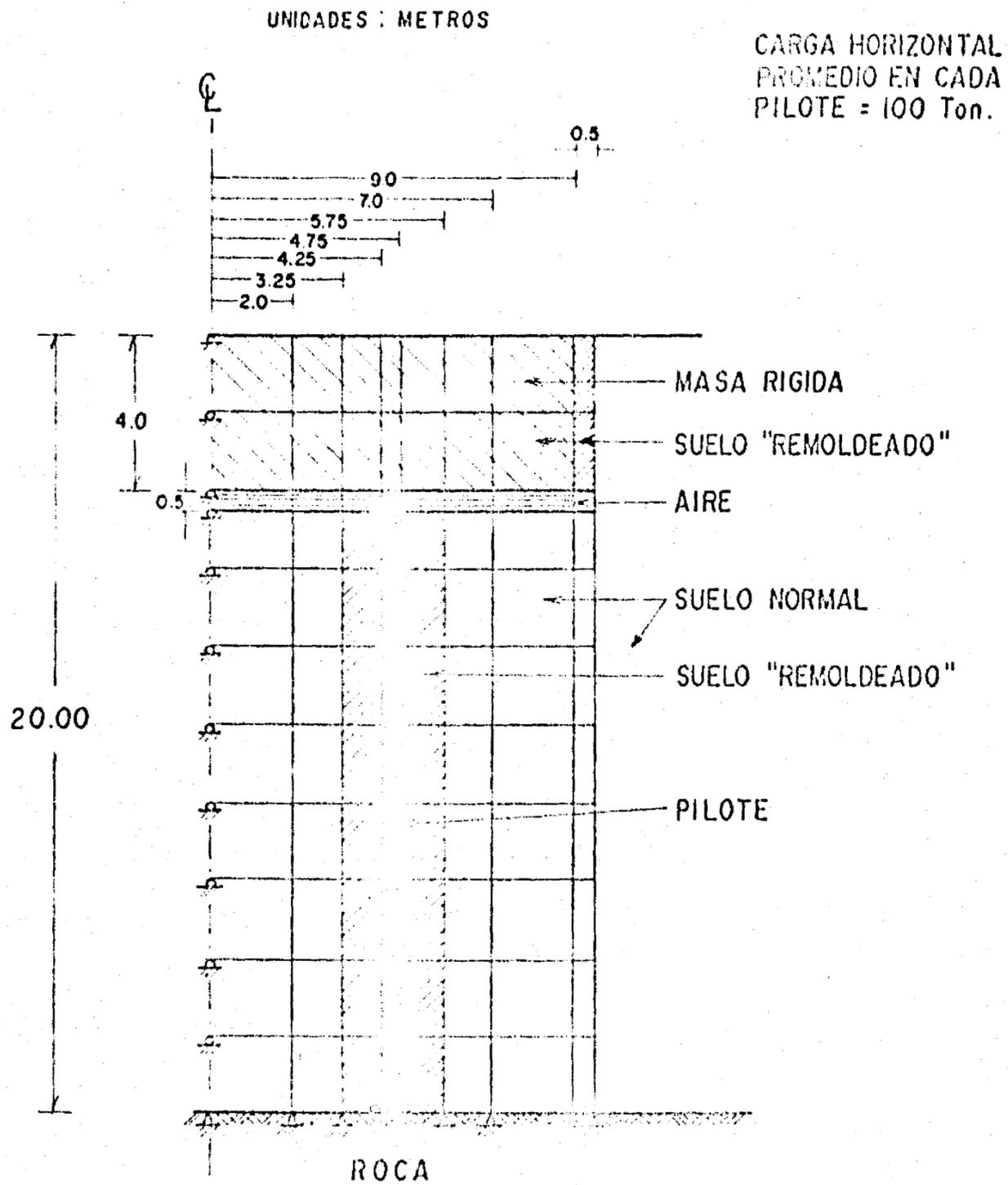


FIG. 8.7 MALLA UTILIZADA EN EL MODELO DE ELEMENTO FINITO (DEFORMACION PLANA), PARA UN GRUPO DE PILOTES (6 HILERAS @ 6 D) CON 4 METROS DE ENCAJONAMIENTO.

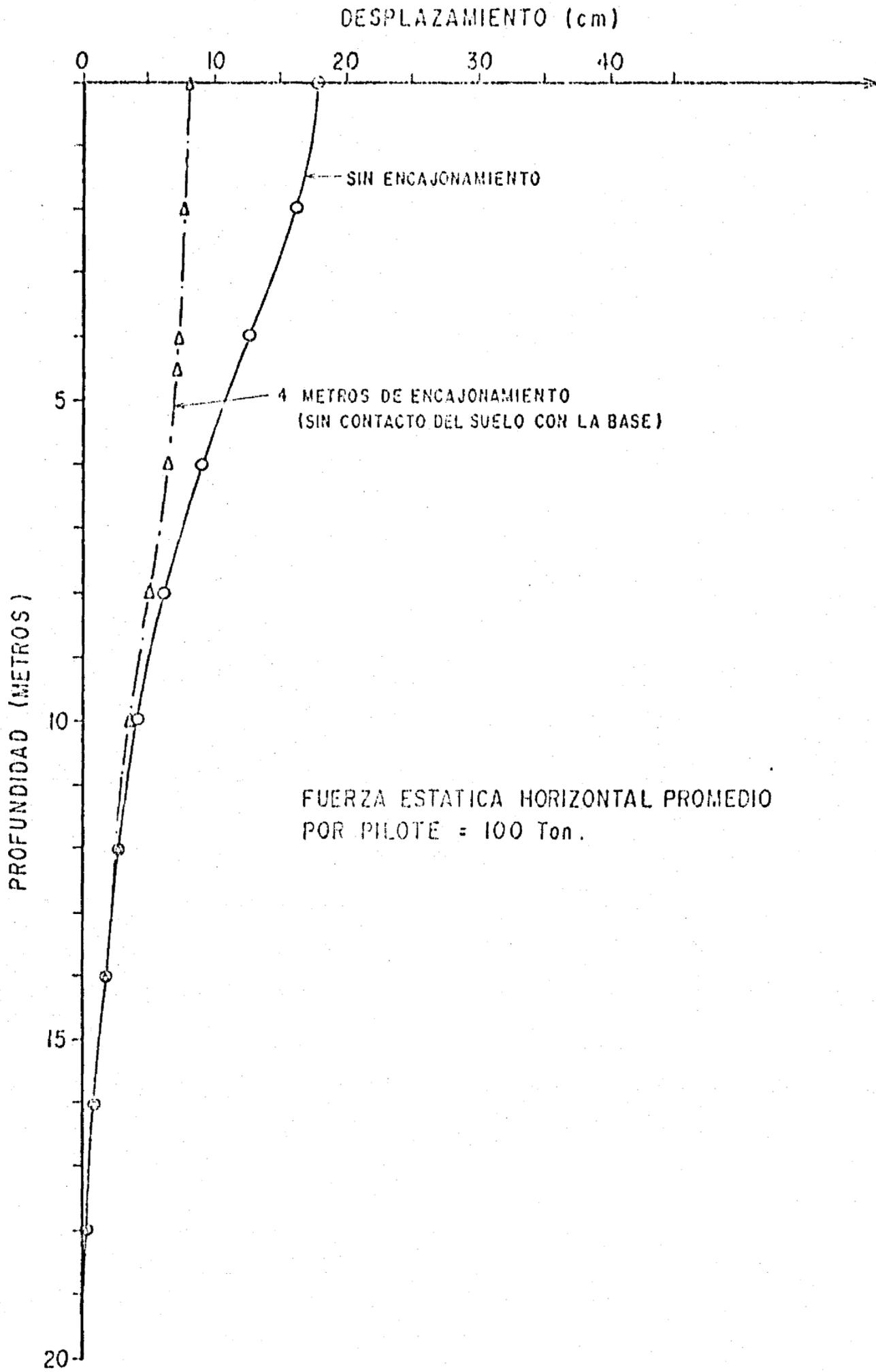


FIG. 8.8 EFECTO DEL ENCAJONAMIENTO EN LOS DESPLAZAMIENTOS DEL PILOTE, CUYO MODELO SE ENCUENTRA EN LA FIG. 8.7

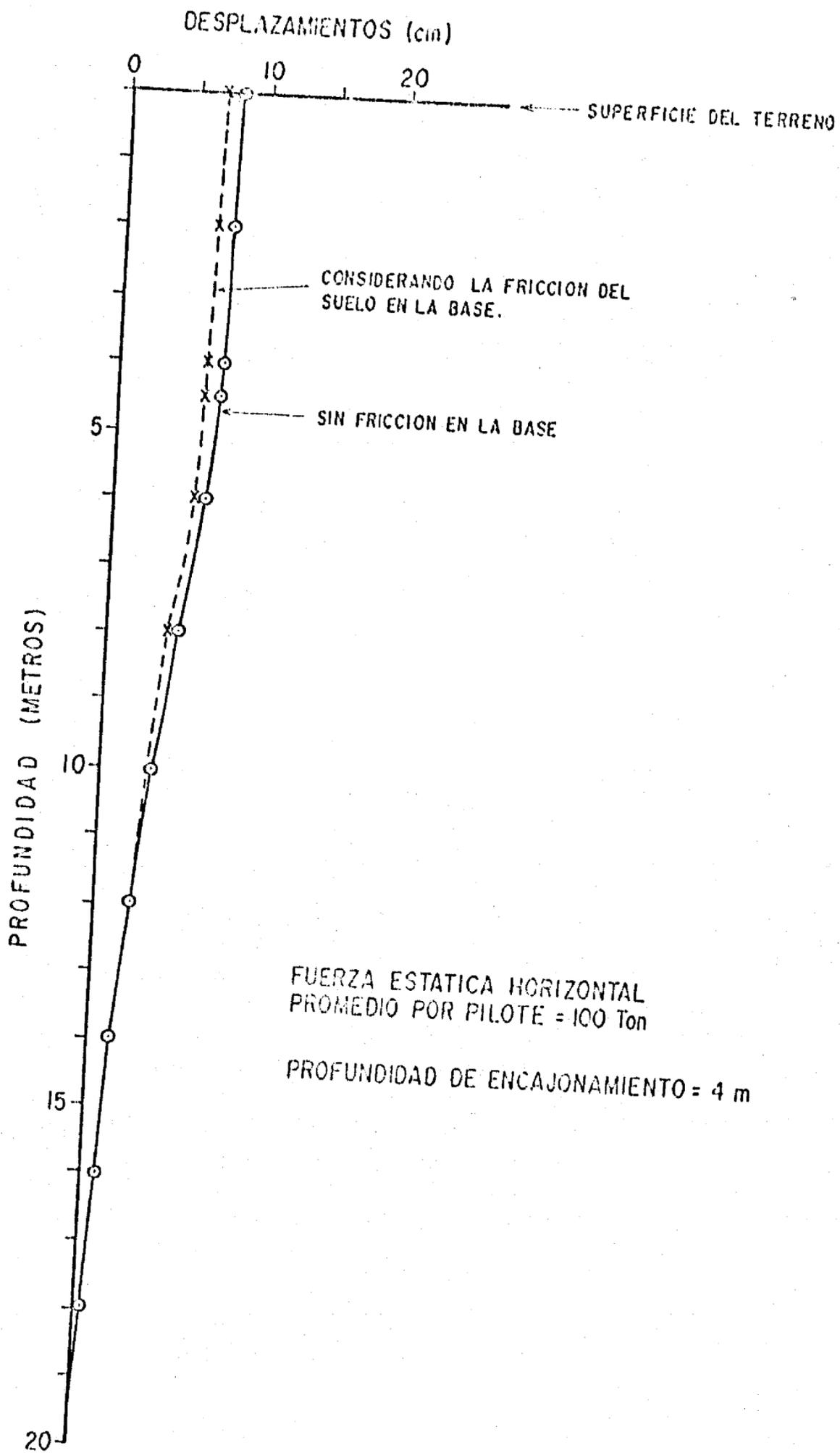


FIG. 8.9 EFECTO DE LA FRICCION EN LA BASE DE LA CIMENTACION PILOTEADA, CORRESPONDIENTE A LA FIG. 8.7

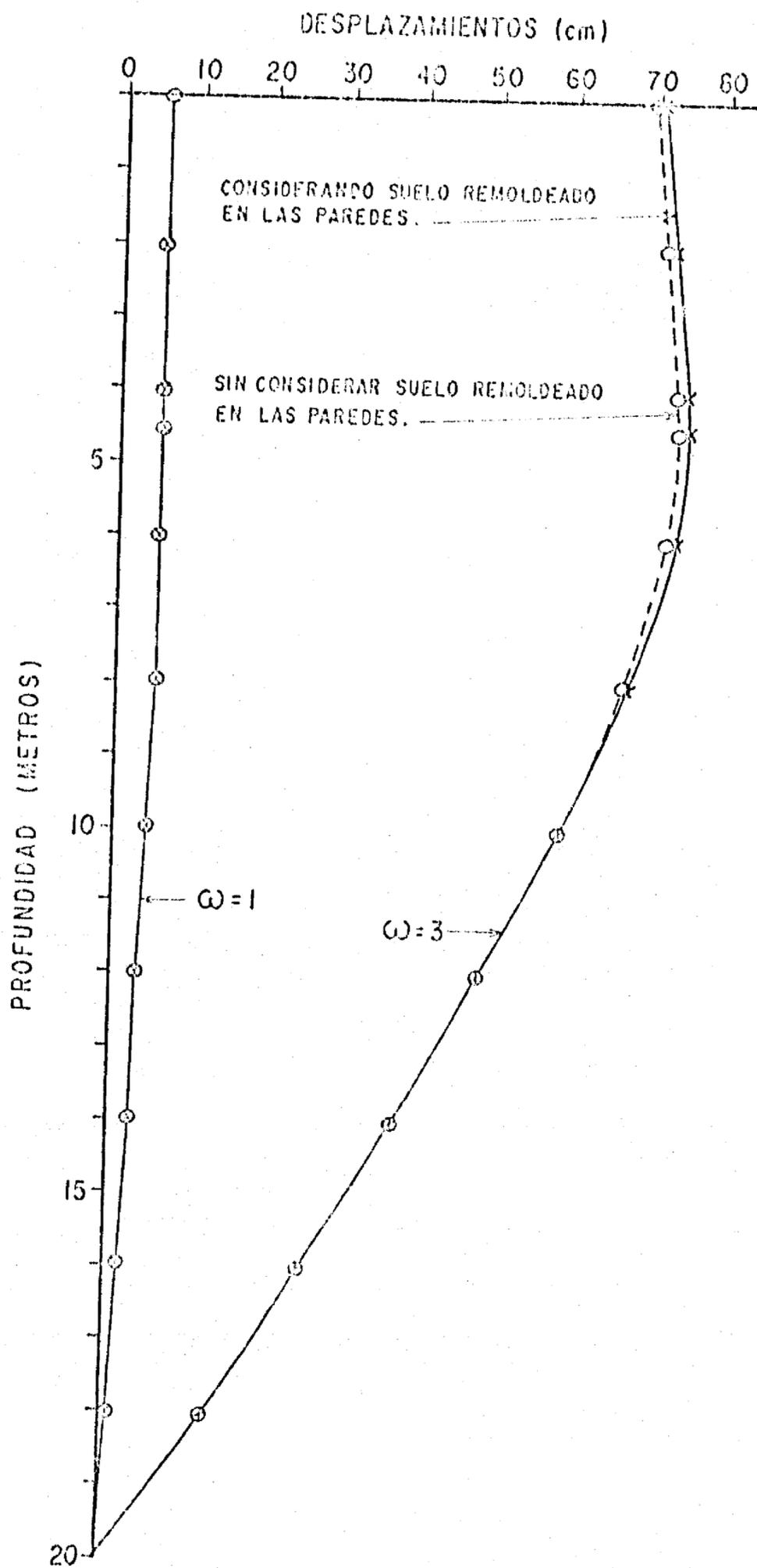


FIG. 8.10 RESPUESTA DINAMICA DE UN GRUPO DE PILOTES CON ENCAJONAMIENTO DE 4 m EN LA CIMENTACION, PARA FRECUENCIAS DE EXITACION IGUAL A 1 y 3 rad/seg

CAPITULO IX

CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes que se derivan de este trabajo, son las siguientes:

1a.- Existen dos frecuencias importantes de excitación en la respuesta dinámica de pilotes.

a) la frecuencia natural del sistema suelo-pilote (Ecs. - - 4-3 ó 4-4)

b) la frecuencia fundamental del estrato de suelo (Ec.4-5)

Ambas frecuencias pueden producir resonancia cuando el amortiguamiento es nulo.

2a.- El rango en el cual se puede considerar que los pilotes siguen el desplazamiento del suelo, y en el que por tanto, se comportan como elementos flexibles, corresponde a $\bar{\lambda} > 5$, donde $\bar{\lambda} = kDH^4/4EI$. Cuando los sistemas tienen valores de $\lambda < 5$, y en particular cuando $\bar{\lambda} < 0.4$, los pilotes afectan la respuesta de las estructuras; es decir, la presencia de los pilotes en este caso hace que el comportamiento dinámico de las estructuras durante sismos sea diferente.

3a.- Para problemas de pilotes en que $\lambda > 5$, la respuesta dinámica de un pilote sujeto a sismos se puede obtener añadiendo, a la respuesta del suelo, la respuesta que el pilote tiene por efecto de la fuerza cortante aplicada en su cabeza.

- 4a.- Existe una cantidad considerable de amortiguamiento radial para frecuencias mayores de la frecuencia fundamental del suelo (ω_g). En estas circunstancias, si la frecuencia del sistema suelo-pilote (ω_s), es menor que ω_g , y además el amortiguamiento interno es muy pequeño o nulo, la resonancia en el sistema puede ocurrir fácilmente cuando las frecuencias de excitación coincidan, o estén cercanas a ω_s .
- 5a.- La estimación del amortiguamiento radial existente en un sistema suelo-pilote, se puede hacer mediante la ecuación 6-19; sin embargo, se requiere de la verificación experimental de dicha ecuación para conocer la aproximación de la misma.
- 6a.- La respuesta de un grupo de pilotes, cuando $\lambda > 5$, se puede estimar como sigue:
- a) aplicar los factores de interacción estáticos recomendados por Poulos (1973), en la respuesta correspondiente a las fuerzas provenientes de la superestructura.
 - b) Añadir a la respuesta determinada en (a), la respuesta del suelo.
- 7a.- El encajonamiento de estructuras piloteadas es considerablemente efectivo en la reducción de la fuerza que la superestructura produce en la cabeza de los pilotes sujetos a sismos. Los factores más importantes, que contribuyen a esta efectividad, son dos: 1) disminución de la masa "actuante" de la estructura, por una cantidad igual a la masa del-

suelo excavado, y 2) absorción de una cantidad considerable de energía a través de la presión pasiva de tierra.

8a.- La fricción en la base y el remoldeo del suelo cercano a -- las paredes encajonadas de la cimentación, son efectos muy-pequeños que se pueden despreciar en el análisis sísmico de la cimentación.

NOMENCLATURA

- a = radio del pilote (cm)
- \bar{a} = parámetro definido por la ecuación 4-30
- A_n = constante arbitraria en las ecuaciones 4 y 5 donde σ_r y $\zeta_{r\theta}$, son definidos en el Apéndice III-1
- b = relación de masas = Hm/M (adimensional)
- B_n = constante arbitraria en las ecuaciones 4 y 5 donde σ_r y $\zeta_{r\theta}$, son definidos en el Apéndice III-1
- C = coeficiente sísmico
- \bar{C} = K_s = constante de resorte (Kg/cm)
- C_e = coeficiente equivalente de amortiguamiento
- C_L = velocidad de la onda longitudinal (cm/seg)
- C_S = velocidad de la onda transversal (cm/seg)
- d = ancho del pilote en una sección prismática (cm)
- D = diámetro del pilote (cm)
- D_r = relación de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento/amortiguamiento crítico)
- D_h = relación equivalente de amortiguamiento radial
- e = número de Euler (2.7172...)
- E = módulo de Young del pilote (Kg/cm²)
- E_s = módulo de Young del suelo (Kg/cm²)
- E'_s = módulo elástico del suelo remoldeado = $E_s/400$ (Cap.VIII)
(Kg/cm²)
- E_s'' = kD = módulo utilizado en el Cap. VIII, para indicar el módulo elástico obtenido en una prueba horizontal estática de pilotes (Kg/cm²)

E_I = rigidez del pilote (Kg.cm^2)

f_1 = parte real de la función definida en la ecuación 6-8

f_2 = parte imaginaria de la función definida en la ecuación --
6-8

F = fuerza aplicada en la cabeza del pilote (Ton)

$F(H, \omega)$ = función compleja en la ecuación 3-6

$F_s(\omega)$ = función compleja = $\left[1 + i 2h_s (\omega / \omega_g) 1 - (\omega / \omega_g)^2 + i h_s (\omega / \omega_g) \right]$

g_1 = parte real de la función definida en la ecuación 6-10

g_2 = parte imaginaria de la función definida en la ecuación --
6-10

G = módulo del suelo al cortante (Kg/cm^2)

$G(H, \omega)$ = función compleja en la ecuación 3-6

$h_g = D_r$ = relación de amortiguamiento en la Teoría de Tajimi ----
 $= \frac{\mu'}{2\mu} \omega$

h_s = amortiguamiento equivalente que se obtiene de la Fig. ---
6-5 y relacionado con h_g en la Fig. 6-6

H = longitud del pilote o espesor del estrato blando del sue-
lo (m)

\bar{H} = fuerza horizontal aplicada en un pilote trabajando dentro
de un grupo (Ton)

I = momento de inercia del pilote (cm^4)

J_s = $F(H, 0) K_s r_1 / \omega_g^2$

k = módulo de reacción horizontal (Kg/cm^3)

\bar{k} = constante del resorte para cabeceo (Kg.cm/rad)

k_h = constante estática del resorte en la Teoría de Tajimi (Kg/cm)

- k_R = factor de flexibilidad definido por Poulos ($= EI/E_s L^4$)
- K = parámetro de Hayashi definido en la ecuación 2-2
- K_s = constante del resorte (ecuación 6-15). (Kg/cm)
- K_0 = función de Bessel modificada, de orden cero
- K_1 = función de Bessel modificada, de orden 1
- l = profundidad a la cual la elástica del pilote, bajo cargas, pasa por cero (m)
- L = longitud del pilote (m)
- m = masa específica del pilote (Kg.seg²/cm²)
- M = masa en la cabeza del pilote (Kg.seg²/cm)
- \bar{M} = masa total propia del pilote (Kg.seg²/cm)
- M_c = masa adicional (o equivalente) de suelo (Kg.seg²/cm)
- M_0 = momento con respecto a la base del pilote (Kg.cm)
- n = 1, 2, 3..., o número de segmentos en que el pilote se divide (Teoría elástica)
- \bar{n} = parámetro definido por la ecuación 7 del Apéndice III-1
- n_h = coeficiente usado para determinar k en arenas o arcillas normalmente consolidadas (Tabla II-1)
- p = presión del suelo a lo largo del pilote (Kg/cm²)
- p_i = esfuerzos actuando en la superficie del pilote (teoría -- elástica). (Kg/cm²)
- $p_{(z)}$ = presión del suelo en la dirección de la fuerza aplicada - (Kg/cm²)
- P_i = fuerza actuando en la mitad del segmento de pilote cuando se utiliza la teoría elástica de Poulos (Kg)
- $P_p(\hat{\delta})$ = empuje pasivo del suelo (Kg/cm²)
- q_u = resistencia del suelo a la compresión simple (Kg/cm²)

- $R_h(\hat{\delta})$ = resistencia horizontal del pilote (Kg)
- S = separación de centro a centro entre pilotes (cm)
- S_u = resistencia al cortante no drenada del suelo ($=q_u/2$) ----
(Kg/cm²)
- t = tiempo (seg)
- u = desplazamiento relativo del suelo, $\bar{u} - u_g$ (cm)
- \bar{u} = desplazamiento total del suelo (cm)
- u_o = amplitud del movimiento en la superficie del manto rocoso
- u_g = desplazamiento en la superficie del manto rocoso (cm)
- \ddot{u}_g = aceleración horizontal en la superficie del manto rocoso-
(cm/seg²)
- u_p = desplazamiento lateral del pilote (cm)
- u_r = desplazamiento horizontal del suelo en la dirección radial,
relativo al manto de roca (cm)
- u_θ = desplazamiento horizontal del suelo en la dirección tangen-
cial, relativo al manto de roca (cm)
- V = fuerza cortante, concentrada, actuando en la cabeza de la
pila (Kg)
- V_{u_g} = fuerza causada por el desplazamiento del suelo (ecuación-
5-8)
- $V_{u_{pH}}$ = fuerza definida en la ecuación 5-7
- W = carga vertical en el pilote (Ton)
- x = profundidad a partir de la superficie del suelo (m)
- $X_1 = f_1 = 1 - \Gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2$
- $X_2 = f_2/\omega$
- y = desplazamiento relativo del pilote con respecto a la roca
durante movimientos sísmicos, o el desplazamiento del pi-

lote cuando es sujeto a fuerzas aplicadas en su cabeza --
(cm)

\bar{y} = desplazamiento total del pilote (cm)

$Y(z)$ = amplitud del desplazamiento relativo "y"

z = coordenada vertical con origen en la base del estrato de-
suelo

NOMENCLATURA GRIEGA

α = parámetro de Hayashi

$\hat{\alpha}$ = factor de interacción en grupos de pilotes

α_2 = coeficiente definido por la ecuación 23 del Apéndice III-1

β = parámetro definido por la ecuación 3-18

$\hat{\beta}$ = ángulo formado por la línea que une el centro de dos pilotes y la línea de acción de la fuerza aplicada en el primero de ellos (Apéndice VI-1)

ν = constante de Euler (=0.5772157...)

γ_m = peso volumétrico del suelo (Ton/m³)

δ = ω / c_s

$\hat{\delta}$ = desplazamiento horizontal de la pared de cimentación (cm)

ε = parámetro definido en la ecuación 3-22

$$\eta_{Ln} = \frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}$$

$$\eta_{Tn} = \frac{\xi_n \omega_g a}{c_T}$$

θ = ángulo de rotación o coordenada cilíndrica

$$L = \delta^2 / 2\beta^2$$

λ = constante de Lamé

$\bar{\lambda}$ = relación de rigideces = $kDH^4 / 4EI$

Λ = profundidad de encajonamiento (m)

μ = constante de Lamé (módulo al cortante del suelo) (Kg/cm²)

μ' = coeficiente de viscosidad (= $2\mu h_g / \omega$)

$$\xi_n = [n^2 (1 + izh_g) - (\omega / \omega_g)^2]^{1/2}$$

ρ_s = masa específica del suelo (Kg.seg²/cm⁴)

$\hat{\rho}_g$ = desplazamiento de un grupo de pilotes (cm o pulg)

$\hat{\rho}_i$ = desplazamiento de un pilote (cm o pulg)

ρ_p = masa específica del pilote ($\text{Kg seg}^2/\text{cm}^4$)

σ_r = esfuerzo normal sobre el pilote en la dirección radial ($\frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$)

$\tau_{r\theta}$ = esfuerzo sobre el pilote en la dirección tangencial (Kg/cm^2)

Γ_1 = definido en la ecuación 6-11

Γ_2 = parámetro de la parábola que aproxima la función f,

$\varphi = [E_s''/4EI]^{1/4}$

χ = parámetro definido en la ecuación 5-3

ω = frecuencia de desplazamiento en la roca

ω_g = frecuencia fundamental del estrato de suelo

ω_0 = frecuencia natural de cabeceo para un pilote rígido

$$= (\sqrt{kD/M})$$

ω_s = frecuencia natural del sistema pilote - suelo

ω_{st} = frecuencia natural del sistema pilote - suelo para $m = 0$

Ω_n = coeficiente definido en la ecuación 20, Apéndice V-1

REFERENCIAS

- Agarwal, S. L., (1973) "Soil-Structure Interaction of Dynamically Laterally Loaded Pile Based on Discrete-Element Method", Procc. 5a CMIS (Conf. Mundial de Ingeniería Sísmica), artículo #235, Roma.
- Alpan, I., (1973) "The Dynamic Response of Pile Foundations to Lateral Forces" Procc. 5a CMIS, artículo #229, Roma.
- Bergfelt, A., (1957) "The Axial and Lateral Load Bearing Capacity and Failure by Buckling of Piles in Soft Clay", Proc. 4a Conf. Int. de Mec. de Suelos e Ing. de Cimentaciones
- B.O.C.A (1970) Basic Building Code, Sección 748 "Lateral Support"
- Boston Building Code (1970) City of Boston Administrative Services Department. Sección Editorial
- Brandtzaeg, A y Harboe, E. (1957) "Buckling Test of Slender Steel Piles in Soft, Quick Clay", Proc 4a Conf. Int de Mec. de Suelos e Ing. de Cimentaciones
- Broms, B. B. (1964) "Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. ASCE, Vol. 90, No. 322
- Broms, B. B., (1965) "Design of Laterally Loaded Piles" Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. A.S.C.E., Vol. 91
- Chang Liang, Y. (1974) "Dynamic Response of Structures in Layered Soils", Tesis Doctoral, MIT
- Chang, Y. L., Discusión de "Lateral Pile-Loading Tests" Por Feagin L. B. Trans. A.S.C.E. Vol. 102, pp. 272-273
- Chellis, R. D. (1961), "Pile Foundations", 2a Ed., Nueva York, McGraw-Hill pp 173
- Clough R. W. (1965) "Discussion of Vibrational Property and Earthquake Response of Tall Building Supported with Caisson or Pile by Tajima et al." Proc. 3a CMIS, Vol. I, pp 1-179 Nueva Zelanda
- Cummings, A. E. (1947) "The Resistance of Piling to Lateral Loads" Proc. 7a Conf. de Mecánica de Suelos en Texas
- Duke, C. H. (1960) "Foundations and Earth Structures in Earthquakes" Proc. 2a CMIS, Vol. I, pp 435-451

- Fukuoka, M., (1966) "Damage to Civil Engineering Structures" Soil and Foundations, Vol. I, No. 2, pp. 45-51
- Gakkai, N. K. (1970) "Design Essentials in Earthquake Resistant Building" Publicado por el Inst. Arquitectónico de Japón, Tokio, pp. 46-64
- Gaul, R. D. (1958) "Model Study of a Dynamically Laterally Loaded Pile", Journal of Soil Mechanical and Foundations Div. ASCE Vol., 84, No. 511, pp. 1535-1 to 1535-33
- Gleser, S.M. (1953), "Lateral Load Tests on Vertical Fixed-Head and Free-Head Piles" Symposium on Lateral Load Test on Piles, STP No. 153, ASTM
- Golder, H. G. y Skipp, B. U. (1957) "The Buckling of Piles in Soft Soils" Proc. de la 4a Conf. Int. de Mecánica de Suelos Vol. II
- Hakuno, M. (1973) "Evaluation of Dynamical Properties of Pile Foundation Based on Wave Dissipation Theory", Proc. 5a CMIS, artículo #334, Roma
- Haliburton, T. A. (1971) "Soil Structure Interaction Numerical Analysis of Beams and Beam-Column" Technical Publication No. 14, School of Civil Engineering. Universidad de Oklahoma
- Hayashi S. et al. (1966) "Dynamic Response of Steel Pile to Lateral Excitation" Proc. of Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokio, Japón
- Hisada, et al. (1973) "Dynamic Response of Buildings Supported on Piles Extending through Soft Alluvial Subsoil Layers". -- Kajima Institute of Construction Technology, Japón
- JSCE, (1973) "Earthquake Resistant Design for Civil Engineering Structures, Earth Structures and Foundations in Japan" The Japan Society of Civil Engineers, Japón
- Kausel, E. (1974) "Forced Vibrations of Circular Foundations on Layer Media" Tesis Doctoral, MIT
- Kishida, H. (1966) "Damage to Reinforced Concrete Buildings in Niigata City with Special Reference to Foundation Engineering" Soil Foundation Vol. VI, No. 1 pp 71-88
- Kabori, T. et al (1968) "Dynamical Ground Compliance of Rectangular Foundation on an Elastic Stratum over a Semi-infinite Rigid Medium" Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Universidad de Kyoto (En Japonés)
- Kubo, K. (1964) "Vibration Test of a Structure Supported by Pile Foundation" Proc. 4a CMIS, Chile.
- Los Angeles Building Code (1970) Building News, Inc. Los Angeles, Calif.

- Matlock, H. y Reese, L. C. (1960) "Generalized Solutions for Laterally Loaded Piles" Proc. ASC. Vol. 86 No. SMS pp. 63-91
- Matthewson, C. D. (1969) "The Elastic Behavior of a Laterally loaded Pile" Tesis Doctoral, Universidad de Canterbury, Christ-Church, Nueva Zelandia
- McClelland, B. y Focht, J. A. (1958) "Soil Modulus for Laterally Loaded Piles" Trans. ASCE Vol. 123 pp. 1049
- Minami, J. K. y Sakurai, J. (1973) "Seismic Response of Buildings with and without Basements and Piles" Proc. 5a CMIS, artículo #168, Roma
- Miranov, N. V. (1971) "Method of Analysis for Laterally Loaded Piles" Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Grantov, No. 3, pp. 15-17 (En Ruso)
- Moore, P. J. y Irwin, J.R. (1970) "Effects of Vibrations on Buckling of Slender Piles" Artículo #677 5a Conf. de Mec. de Suelos de Nueva Zelandia y Australia
- Nair, K. (1968) "Dynamic and Earthquake Forces on a Deep Foundation" Performance of Deep Foundation ASTM STP449 pp.229-267
- Newmark, N. M. (1956) "The Effect of Dynamic Loads on offshore Structures" Proc. 5a Conf. de Mec. de Suelos de Texas
- Ogata, N. y Kotsubo, S. (1966) "Seismic Force Effect on Pile Foundation" Proc. del Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokio, Japon (En Japonés)
- Ohta, T., et al. (1973) "Dynamic Response of Buildings Supported on Piles Extending Through Soft Alluvial Subsoil Layers" Proc. 5a CMIS, Artículo #260, Roma
- Palmer, L. A. y Brown, F. P. (1953) "Piles Subjected to Lateral Thrust by the Method of Difference Equations" Expansion on Lateral Load Tests on Piles ASTM STP No. 134
- Paramelee, R. A., et al. (1964) "Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending through Deep Sensitive Clays" Report to California State Division of Highways, Inst. de Investigación de Ingeniería, Univ. de California, Berkely, Calif.
- Penzien, J. (1970) "Soil-Pile Foundation Interaction" Earthquake Engineering, Editado por Siegel, Prentice-Hall
- Poulos, H. G. (1971-a) "Behavior of Laterally Loaded Piles: I-Single Piles" Journal of ASCE Vol. 97, No. SM5, pp.711-731
- Poulos, H. G. (1971-b) "Laterally Loaded Piles: II-Pile Group" Journal ASCE, Vol. 97, No. SM5

- Foulos, H. G. (1972) "Behavior of Laterally Loaded Piles III-Soaked Piles" Journal of ASCE, Vol. 98 No. SM4
- Foulos, H. G. (1973) "Load-Deflection Prediction for Laterally Loaded Piles" Universidad de Sidney, Esc. de Ingeniería
- Prakash, S. y Saran, D. (1967) "Behavior of Laterally-Loaded Piles in Cohesive Soil" Proc. de la 3a Conf. de Mec. de Suelos
- Prakash, S. y Aggarwal, S. L. (1965) "Study of a Vertical Pile Under Dynamic Lateral Load" Proc. 3a CMIS Vol. I, Nueva Zelanda pp. 1-215 a 3-321
- Reese, L. C. y Matlock, H. (1956) "Non-Dimensional solutions for Laterally Loaded Piles with Soil Modulus Assumed Proportional to Depth" Proc. 8a Conf. de Mec. de Suelos Texas
- Richart, F. E. y Whitman, R. R. (1967) "Comparison of Footing Vibration Tests with Theory" Journal of Soil Mechanics and Foundation Division ASCE, Vol. 93, No. SM-pp 143-169
- Richart, F. E. et al. (1970) "Vibrations of Soils and Foundations" Prentice-Hall
- Rossset, J. y Whitman, R.V. (1969) "Theoretical Background for Amplification Studies" Research Report No. R69-15, MIT
- Sawaguchi, H. (1972) "Group Effect on Lateral Resistance of a Pile Group" Port and Harbour Research Institute, Japon
- Seed, H. B. y Idriss, I. M. (1970) "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis" Earthquake Engineering Research Center Report, Universidad de California, Berkeley, Calif.
- Seed, H. B. (1969) "The Influence of Local Soil Conditions on Earthquake Damage" Soil Dynamics Speciality Conference. VII Conf. Int. de Mec. de Suelos Ing. de Ciencasiones, México
- Seed, H. B. y Idriss, I. M. (1973) "Soil-Structure Interaction of Massive Embedded Structures During Earthquakes", artículo #233, 5a CMIS, Roma
- Singh, A. y Prakash, S. (1971) "Model Pile Group Subjected to Cyclic Lateral Load" Soils and Foundations, Vol. II, No. 2
- Singh, A. et al. (1971) "Lateral Load Capacity of Piles in Sand and Normally Consolidated Clay" Civil Engineering, ASCE, Agosto
- Spillers, J. R. y Stoll, R. B. (1964) "Lateral Response of Piles" Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, Proc. ASCE

- Staunitzer, L. P. y Shekhter, O. Ya. (1971) "Horizontal Vibrations in Piles Induced by Seismic Waves"
Osnovaniya, Fundamentally, Mekhanika, Gruntov, No. 5,
pp. 19-23 (En Ruso)
- Jada, Y. et al. (1966) "On the Damage to Bridges Caused
by the Niigata Earthquake" Proceeds. of Japan Earthquake
Eng'g Symposium, Tokio, Japon (En Japonés)
- Tajimi, H. (1969) "Dynamic Analysis of a Structure
Embedded in an Elastic Stratum" Proc. 4a CMIS, Chile
- Tajimi, T. et al. (1965) "Vibrational Property and
Earthquake Response of Tall Buildings, Supported
with Caisson or Pile" Proc. 3a CMIS, Vol. I, Nueva
Zelanda
- Terzaghi, K (1955) "Evaluation of Coefficients of Subgrade
Reaction". Geotechnic 5, No. 4, pp. 297-326
- Tomlinson, H. J. (1963) "Foundation Design and Construction"
New York, John Wiley and Sons
- Uniform Building Code (UBC) Edición 1970 Vol. I International
Conference of Building Officials
- Waas, G. (1972) "Earth Vibration Effects and Abatement for
Military Facilities", Technical Report S-71-14, USA. NIES
- Whitman, R. V. (1971) Apuntes de Dinámica de Suelos, MIT
- Yamamoto, S. y Kometani, H. (1969) "Rocking Vibrations of
Structure with Piles Placed on Elastic Two Layer System
Against Ground Motions" Trans. Architectural Institute
of Japan, No. 148 (En Japonés)
- Yamamoto, S. y Seki, T. (1971-a) "Earthquake Response of
Multi-Story Building Supported on Piles, Part I Method
of Analysis" Trans. Architectural Institute of Japan,
No. 177
- Yamamoto, S. y Seki, T. (1971-b) "Earthquake Response of
Multi-story Building Supported on Piles, Part II Numerical
Analysis" Trans. Architectural Institute of Japan, No. 178
- Yegian, M. y Wright, S. (1973) "Lateral Soil Resistance-Displacement
Relationships for pile Foundations in Soft Clays" Offshore
Technology Conference, Texas

APENDICE II-1

FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL ANALISIS DE PILOTES SUJETOS A FUERZAS HORIZONTALES

II.1 Introducción

El único requisito que la mayoría de los reglamentos exigen, con respecto al diseño de pilotes sujetos a movimientos sísmicos, es que los pilotes deberán soportar la fuerza cortante y el momento flexionante calculados en la base de la estructura. En este apéndice se describen algunas otras consideraciones hechas por algunos países en sus reglamentos y se discuten varias de las hipótesis que se tienen que hacer con respecto al suelo y al pilote, para poder aplicar dichos reglamentos. Se examina también, en forma breve, el fenómeno de pandeo en suelos blandos.

II.2 Reglamentos para el Diseño Sísmico de Pilotes

A continuación se transcriben las especificaciones referentes al diseño sísmico de pilotes, establecidas en el libro, "Earthquake Resistance Design for Civil Engineering Structures, Earth Structures and Foundations in Japan", editado en 1973 por la Sociedad Japonesa de Ingenieros Civiles (JSCE).

1) Capacidad de Carga Permisible de Pilotes Aislados

La capacidad de carga permisible de un pilote, sujeto a sismos, puede obtenerse dividiendo la capacidad de carga última por los factores de seguridad dados en la tabla II-1.

2) Resistencia Permisible a la Extracción de Pilotes Aislados

La resistencia permisible a la extracción de un pilote, durante un sismo, se puede obtener dividiendo la resistencia última a la extracción por los factores de seguridad dados en la tabla 11-2, de acuerdo con las diferentes condiciones de suelo.

3) Resistencia Horizontal Permisible de Pilotes Aislados

a) Cuando se efectúan cargas de prueba

La resistencia horizontal permisible de pilotes, durante temblores, se puede obtener dividiendo la resistencia horizontal última por los factores de seguridad dados en la tabla 11-3.

b) Cuando se hacen cálculos utilizando el coeficiente de reacción horizontal de la subrasante

La resistencia horizontal permisible se puede calcular usando los coeficientes de reacción horizontal de la subrasante, que se determinan a partir de pruebas de carga. Para este caso, se considera que la resistencia horizontal permisible es aquella que corresponde al máximo desplazamiento permisible. Los desplazamientos permisibles en la cabeza del pilote, son de 1.5cm según la JHPC (Especificaciones para el Diseño de Carreteras Nacionales), y 1.0 cm según la TEPC (Diseño Antisismico Estándar y Códigos Relacionados).

c) Efecto de estructuras bajo el suelo

Es válido suponer que los pilotes pueden resistir fuerzas horizontales junto con las estructuras que van dentro del suelo, tales como zapatas, cajones, etc. En este caso, la resistencia efectiva del suelo a una estructura se determina tomando en cuenta el desplazamiento del suelo, que produce empuje pasivo, y el desplazamiento de la estructura supuesta en el diseño.

11.3 Suposiciones referentes al Suelo y a los Pilotes

11.3.1 Suposiciones referentes al Suelo

La consideración más importante que se hace acerca del suelo, cuando se utiliza la Teoría de Winkler o la Teoría Elástica, consiste en suponer el módulo de reacción "k", o el módulo de Young " E_s ", respectivamente. En ambos casos es importante saber cómo varían los correspondientes módulos con la profundidad, ya que los esfuerzos calculados a lo largo del pilote, y particularmente en la cabeza del mismo, dependen en gran parte de esta consideración.

Para el caso de arenas y arcillas normalmente consolidadas , ----

Terzaghi (1955) recomendó el uso de un valor de k que varía linealmente con la profundidad y el cual está dado por la siguiente expresión:

$$k = n_h x$$

donde:

x = profundidad medida a partir de la superficie del suelo, y n_h = coeficiente que depende de la clase de suelo (ver tabla 11-4)

Para arcillas sobre-consolidadas se acostumbra suponer que k toma valores constantes con la profundidad, pero varía según las consistencias del suelo y anchos de pilotes. La tabla 11-5, recomendada por Terzaghi (1955), muestra valores de kD (donde D es el diámetro del pilote).

En cuanto a la variación del módulo E_s con la profundidad, se hacen suposiciones semejantes a la de k . Sin embargo, el mejor método que se utiliza hoy en día, para conocer la variación de cualquiera de estos dos módulos, consiste en efectuar pruebas horizontales en pilotes con cargas que tienen la magnitud y tipo de las de trabajo.

Otro aspecto importante, con relación a E_s o k , es su correlación con la resistencia al corte no drenada del suelo, ya que no existen correlaciones simples: E_s depende del tipo de suelo y el nivel de esfuerzos, y k depende, según se indicó anteriormente, del material, ancho del pilote y tipo de suelo. Por lo tanto, las reglas que se encuentran en la literatura son sólo aproximadas y se requieren verificar mediante pruebas de campo que permitan obtener las correlaciones correctas.

La estratigrafía y la profundidad del manto resistente son otros dos aspectos que intervienen en el análisis de pilotes. Una de las ventajas que se tienen al emplear la teoría del medio elástico es, precisamente, que se puede aplicar uno de los procedimientos teóricos existentes [el método del elemento finito o el procedimiento sugerido por Matthewson (1969)] que toman en cuenta esta estratigrafía.

11.2.2 Suposiciones referentes a los Pilotes

Cuando se estudian pilotes trabajando bajo condiciones de cargas horizontales, además del material, tipo y forma en que los pilotes transmiten las cargas verticales al estrato de suelo, existen otros factores muy importantes que también deben tomarse en cuenta. Uno de estos factores es el relativo a las condiciones de conexión en los extremos de los pilotes. Si se comparan por ejemplo, el comportamiento de un pilote de cabeza fija con el de un pilote con cabeza libre, cuando ambos son sujetos a la misma condición de carga horizontal, se observará que en el primer caso se tendrán menores desplazamientos y mayores momentos flexionantes que el segundo. Sucede sin embargo, que no es siempre posible considerar cabezas fijas cuando el extremo superior del pilote se empotra en el cabezal, ya que tales pilotes pueden experimentar alguna rotación debida a una falsa conexión o a una baja rigidez del cabezal; en tal caso se debería considerar, para el análisis, un tipo intermedio de conexión.

Si las deformaciones que experimenta el suelo durante un sismo, son tomadas en cuenta para el cálculo de los esfuerzos del pilo-

te, las condiciones en que queda la punta de ésta son también -- muy importantes. Ahora bien, en el caso de pilotes con puntas -- articuladas, éstos tendrán momento flexionante nulo, en tal ex-- tremo, mientras que los pilotes con puntas fijas experimentarán una concentración de esfuerzos debido al cambio brusco en la curvatura del pilote, en las cercanías de la superficie de contacto entre los estratos blando y firme.

Resulta obvio que si en el análisis se hace la consideración de que los pilotes siguen el movimiento del terreno, los pilotes -- flexibles tendrán momentos flexionantes menores, que los rígidos. Por lo tanto, cuando en el cálculo se considera la deformación -- del suelo, resultan preferibles los pilotes flexibles y con punta articulada a los rígidos y con punta fija. Sin embargo, dadas las muchas incertidumbres que existen en la superficie de -- contacto entre suelo y roca, puede resultar muy difícil conocer y controlar las condiciones que finalmente se tendrán:

Otro factor importante, en la consideración de cargas horizontales, es la manera en que la fuerza cortante actuando en la base del pilote, se trasmite a los pilotes en forma individual cuando éstos trabajan como grupo. Muchas veces se supone que dicha fuerza se distribuye por partes iguales en cada pilote, pero esto -- desde luego dista de la realidad. Se ha demostrado, tanto experimental (Kubo, 1969), como analíticamente (Poulos, 1971b; -- -- -- Yegian, 1973), que cuando un grupo de pilotes tienen igual desplazamiento, los de las esquinas toman mayores cargas que los -- centrales.

Existen aún otros aspectos importantes en el diseño de pilotes - que los ingenieros de cimentaciones no deberían de ignorar. Uno de estos aspectos es, por ejemplo, la consideración de los momentos flexionantes y las fuerzas axiales para diseñar los pilotes como columnas, según lo indican algunos reglamentos como el U.B.C. 1970 y el B.O.C.A., 1970. Estos reglamentos especifican que los esfuerzos permisibles, en los pilotes, deben ser menores que los esfuerzos permisibles en columnas; la razón de este tipo de especificación es dada por Chellis (1961):

"Para asegurar un contacto suficiente con el suelo, a fin de desarrollar una alta capacidad en el pilote, y frecuentemente para dar una resistencia suficiente que soporte los esfuerzos de hincado requeridos para alcanzar la profundidad deseada de penetración y obtener el factor de seguridad fijado, se encontrará que un pilote, con sus dimensiones totales calculadas, tendrá una -- área transversal de acero mucho mayor que la correspondiente al diseño que se daría a una columna trabajando bajo las mismas cargas".

11.3 Falla de Pandeo

Cuando los pilotes atraviesan un estrato muy blando de suelo, y en particular si se produce un cambio rápido de esfuerzos, es posible que pueda ocurrir una falla por pandeo. Por otro lado, si se toma en cuenta que en el diseño sísmico de pilotes se necesita considerar tanto el momento de volteo como la fuerza -- cortante en la base, es importante efectuar un análisis donde se revisen los esfuerzos contra este tipo de falla. Como ya se men

cionó en el capítulo segundo, este fenómeno se ha observado en varias estructuras dañadas por sismos (Fukuoka, 1966; Golden y Skipp, 1957; Bergfelt, 1957).

A fin de evitar el problema del pandeo, la mayoría de los reglamentos recomiendan diseñar los pilotes empleando el mismo criterio con el cual se calculan las columnas, pero con una relación de esbeltez que depende de las condiciones del suelo. El reglamento de construcción de Los Angeles (1970), por ejemplo, dice lo siguiente en su Sec. 91.2808-C:

"Acción de Columna: Todos los pilotes sin atezadores que se encuentren en aire, agua o materiales incapaces de proporcionar soporte lateral, deberán diseñarse de acuerdo con la correspondiente fórmula de columna dada por este reglamento. Estos pilotes se podrán considerar soportados lateralmente a cinco pies abajo del nivel superficial de suelos compactos o firmes, y a diez pies abajo del nivel superficial de suelos sueltos o blandos, a menos que otra cosa sea determinada por el Inspector del Edificio después de que la cimentación fué revisada por una agencia acreditada en cimentaciones".

Cuando los pilotes son considerados como columnas, algunos libros de cimentaciones recomiendan factores adicionales de reducción como los mostrados en la Tabla 11-6.

En el Japón se acostumbra ignorar en el diseño las capacidades de carga vertical y horizontal de los tres metros superiores de suelos cohesivos, o arcillosos, que tengan valores de q_u (resistencia a la compresión simple) menores de 0.2 kg/cm^2 . En suelos --

granulares susceptibles a licuación (valores de N menores de 10, coeficientes de uniformidad menores de 6, y valores de D_{20} entre 0.04 mm. y 0.5 mm.), se aconseja que las capacidades de carga vertical y horizontal se desprecien en el diseño. (Ref.: Especificaciones para el Diseño contra Temblores de Puentes Carreteros; Asociación Japonesa de Caminos).

De acuerdo con los estudios teóricos efectuados por Brandtzaeg y Harbue (1953), la carga bajo la cual los pilotes pueden fallar - por pandeo, llamada también "carga crítica", está dada por

$$P = 2 \sqrt{kEID}$$

donde:

EI = rigidez del pilote

k = constante del resorte o módulo de reacción

D = diámetro del pilote

Desafortunadamente este problema no ha sido estudiado aún bajo cargas dinámicas aleatorias y lo único que el ingeniero de diseño puede hacer, para no estar fuera de la seguridad, es revisar que los esfuerzos estén muy por abajo de aquellos producidos por la carga crítica.

11.4 Procedimientos Usados para el Cálculo de los Esfuerzos Originados por la Estructura y por el Movimiento del Suelo.

El procedimiento más común que se acostumbra usar en el análisis de pilotes contra fuerzas de sismo, es diseñar los pilotes para las cargas normales que van a soportar (carga muerta+carga viva de diseño). y posteriormente hacer la revisión tomando en cuenta las fuerzas sísmicas; cuando se consideran estas últimas fuerzas, la mayoría de los reglamentos permiten incrementar los esfuerzos permisibles del suelo y de los pilotes en un 33%.

Desafortunadamente las únicas cargas sísmicas que usualmente se consideran en el diseño de pilotes son las producidas por la superestructura (fuerza cortante en la base y momento de volteo), pero las fuerzas causadas por el movimiento que el suelo experimenta durante un sismo, no son tomadas en cuenta. Esta negligencia puede originar la falla de los pilotes como consecuencia de la concentración de esfuerzos que se producen a lo largo del mismo, siendo esta concentración de mayor importancia en las fronteras de estratos con resistencias muy diferentes.

La determinación de la fuerza cortante en la base y el momento de volteo, se hace a partir de un análisis dinámico de la estructura o a partir de las fórmulas que aparecen en los reglamentos de construcción. Una vez obtenidos estos dos elementos se determinan las fuerzas correspondientes a cada uno de los pilotes y se procede a encontrar los esfuerzos máximos a lo largo de los mismos. Una manera de hacer esto último, según se mencionó en el capítulo segundo, es usando uno de los procedimientos que dan la respuesta del pilote sujeto a un cierto momento, y una fuerza horizontal estática, aplicados ambos en su cabeza; otra forma de hacerlo es aplicando una fuerza dinámica, "equivalente", en la parte superior del pilote y encontrar su respuesta.

Para tomar en cuenta el efecto que el movimiento del suelo produce sobre los pilotes, se puede usar cualquiera de los siguientes procedimientos:

1o. Suponer que los pilotes siguen al desplazamiento del suelo -

(suposición que desde luego no es siempre válida ya que, como se demostrará en el capítulo No. 4, ello depende de la relación de rigideces entre pilote y suelo) y sobreponer, a dicho desplazamiento, los efectos causados por la fuerza cortante, y el momento volteante, para obtener la respuesta total del pilote.

Este procedimiento es aproximado y tiene validez sólo en pilotes que se consideran se comportan como cuerpos flexibles y cuando las fuerzas de la superestructura y las del suelo, están basadas en la misma sollicitación sísmica (misma aceleración, o mismo sismo).

Dicho procedimiento es el más común en la práctica, pero por desgracia rara vez se toman en cuenta sus limitaciones.

- 2o. Efectuar un análisis completo, empleando una de las teorías dinámicas descritas brevemente en el texto del capítulo II. Este segundo procedimiento es aún poco usado, debido a que la mayoría de dichas teorías resultan complicadas y les falta ser comprobadas experimentalmente para que su aplicación sea válida en cualquier tipo de problemas.

TABLA II-1

FACTORES DE SEGURIDAD PARA CAPACIDADES DE CARGA DE PILOTES SUJETOS A SISMOS

(JSCE, 1973)

| Especi fi cación | Pilotes de Punta | Pilotes de Fricción | |
|---------------------|------------------|--------------------------|-----------------|
| | | En Capas de Arena Densas | En otros suelos |
| ES | 2 | 2 | 2 |
| SSHB | 2 | 2 | 3 |

TABLA 11-2

FACTORES DE SEGURIDAD PARA LA RESISTENCIA A LA EXTRACCION DE PILOTES SUJETOS A SISMOS

(JSCE, 1973)

| | Tipo de Terreno | | |
|------|-------------------------|-------------------------------|-------|
| | Capas de Arena Compacta | Capas de Arcilla Firme y Dura | Otros |
| SSHB | 2 | 3 | * |
| ES | | * | |

* La resistencia a la extracción no deberá ser mayor que el peso propio de los pilotes y la resistencia a la fricción debida al suelo se debe ignorar

TABLA 11-3

FACTORES DE SEGURIDAD PARA RESISTENCIA HORIZONTAL DE PILOTES DURANTE SISMOS

(JSCE, 1973)

| Tipo de Terreno | | | | |
|-------------------------|---|-----------------------|------------------------------|-------------------------|
| Capas de Arena Compacta | | Capas de Arena Suelta | Capa de Arcilla Firme y Dura | Capas de Arcilla Blanda |
| ES | 2 | * | 2 | 3 |
| SSHB | 2 | * | 3 | * |

* No se deberá considerar resistencia horizontal

TABLA 11-4

Valores Típicos del Factor n_h , en Kg/cm^3

a) Arena (Terzaghi, 1955)

| Densidad Relativa | Suelta | Media | Compacta |
|-------------------------|--------|-------|----------|
| n_h , seco o húmedo | 0.224 | 0.67 | 1.8 |
| n_h , arena sumergida | 1.28 | 0.45 | 1.09 |

b) Suelos Cohesivos (Poulos, 1973)

| Tipo de Suelo | n_h Kg/cm^3 | Referencia |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| Arcilla Blanda | 0.02 - 0.35 | Reese y Matlock, 1956 |
| Normalmente Consolidada | 0.03 - 0.06 | Davisson & Prakash, 1963 |
| Arcilla Orgánica | 0.011 - 0.028 | Peck & Davisson, 1962 |
| Normalmente Consolidada | 0.011 - 0.082 | Davisson, 1970 |
| Turba | 0.005 | Davisson, 1970 |
| | 0.003 - 0.011 | Wilson & Hiltz, 1967 |
| Limo | 0.8 - 1.1 | Bowles, 1968 |

TABLA II-5

VALORES DE k_D PARA ARCILLAS SOBRECONSOLIDADAS

Kg/cm^2

| Consistencia de la Arcilla | Firme | Muy Firme | Dura |
|---------------------------------------|-------|-----------|------|
| Valores de q_u (Kg/cm^2) | 1-2 | 2-4 | 4 |
| Valores Promedio Propuestos de k_D | 1.6 | 3.2 | 6.4 |

TABLA 11-6

REDUCCION DE FACTORES PARA PILOTES TRABAJANDO COMO COLUMNAS

(Tomlinson, 1963)

| Relación de - Longitud efec- tiva al radio de giro míni- mo | Madera (1) | Concreto Reforzado (2) | B.S.15 Acero (3) | B.S.548 Acero (3) | B.S.968 Acero (3) | Hierro Fundido (4) |
|---|---------------|------------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 0 | 1.00 | - | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.14 |
| 10 | 0.98 | - | 0.95 | 0.94 | 0.94 | 0.94 |
| 20 | 0.95 | - | 0.89 | 0.87 | 0.88 | 0.80 |
| 30 | 0.93 | - | 0.84 | 0.81 | 0.82 | 0.64 |
| 40 | 0.89 | - | 0.78 | 0.75 | 0.75 | 0.50 |
| 50 | 0.82 | 1.00 | 0.73 | 0.63 | 0.69 | 0.39 |
| 60 | 0.72 | 0.88 | 0.68 | 0.62 | 0.63 | 0.31 |
| 70 | 0.61 | 0.76 | 0.62 | 0.56 | 0.57 | - |
| 80 | 0.50 | 0.67 | 0.57 | 0.49 | 0.51 | - |
| 90 | 0.41 | 0.59 | 0.51 | 0.43 | 0.44 | - |
| 100 | 0.34 | 0.52 | 0.46 | 0.37 | 0.38 | - |
| 110 | 0.28 | - | 0.41 | 0.32 | 0.33 | - |
| 120 | 0.24 | - | 0.36 | 0.27 | 0.29 | - |
| 130 | 0.21 | - | 0.32 | 0.24 | 0.25 | - |

APENDICE III-1

DESPLAZAMIENTO DE PILOTES USANDO LA ECUACION TRIDIMENSIONAL DE ONDA

(Teoría de Tajimi, 1969)

La ecuación de onda en términos de las coordenadas cilíndricas - (r, θ, z), para un estrato elástico, isótropo y homogéneo, que descansa en roca, está dada por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] - u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
 & = (\rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu' \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}) u_r - \rho_s u_0 \cos \theta \omega^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{u}{\partial r} \left[\frac{1}{r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
 & = (\rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu' \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}) u_\theta + \rho_s u_0 \sin \theta \omega^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (1')
 \end{aligned}$$

donde

u_0 = amplitud del desplazamiento en la roca

u_r = desplazamiento horizontal, en la dirección radial, relativo al manto de roca

u_θ = desplazamiento horizontal, en la dirección tangencial, relativo al manto de roca

λ, μ = constantes de Lamé

ρ_s = masa específica del suelo

Tajimi resuelve la ecuación 1 y obtiene el valor de los desplazamientos u_r y u_θ ; dichos desplazamientos están dados por las siguientes expresiones

$$u_r = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ -A_n \left[\frac{1}{r} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) \right] + \frac{B_n}{r} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_s} \right) + \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \cos \theta \sin \frac{n\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots (2)$$

$$u_\theta = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ -\frac{A_n}{r} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) + B_n \left[\frac{1}{r} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_s} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_s} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_s} \right) \right] - \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \sin \theta \sin \frac{n\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots (3)$$

Donde K_1 y K_0 son funciones modificadas de Bessel, y A_n y B_n son constantes arbitrarias

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s} \right)^{1/2} = \text{velocidad de onda longitudinal}$$

$$c_s = \left(\frac{\mu}{\rho_s} \right)^{1/2} = \text{velocidad de onda transversal}$$

$$\omega_g = c_s \frac{\pi}{2H} = \text{frecuencia natural del estrato de suelo}$$

H = espesor de la capa de suelo

$$\xi_n = \left[n^2 \left(1 + i \frac{\mu'}{\mu} \omega - \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right) \right]^{1/2}$$

$\mu' = 2\mu D_r / \omega$ = coeficiente de viscosidad

D_r = relación de amortiguamiento

Tajimi también obtiene el valor de los esfuerzos normales (σ_r) y tangenciales ($\tau_{r\theta}$), cuyas expresiones son las siguientes:

$$\sigma_r = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ A_n \rho_s \xi_n^2 \omega_g K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) - 2\mu A_n \frac{2}{r^2} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_L r} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_L} \right) - 2\mu B_n \frac{2}{r^2} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{c_s} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\xi_n \omega_g}{C_T r} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_S} \right) \left. \right\} \cos \theta \sin \frac{n \pi z}{2H} e^{i \omega t} \dots \dots \dots (4)$$

y

$$\begin{aligned} Z_{r\theta} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ -B_n \rho_s \xi_n^2 \omega_g^2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_S} \right) + 2 \mu A_n \left[\frac{2}{r^2} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_L} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi_n \omega_g}{C_L r} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_L} \right) \right] - 2 \mu B_n \left[\frac{2}{r^2} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_S} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\xi_n \omega_g}{C_S r} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g r}{C_S} \right) \right] \right\} \sin \theta \sin \frac{n \pi z}{2H} e^{i \omega t} \\ \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Ahora bien, para determinar la respuesta de un pilote hincado en el estrato elástico, es necesario establecer las condiciones de frontera a las que estará sujeto. Para este análisis se considerarán las siguientes hipótesis:

- 1) El pilote tiene un radio "a" y una longitud H, y es apoyado libremente sobre la roca.
- 2) La cabeza del pilote está empotrada a la superestructura
- 3) La fuerza cortante total de la superestructura actúa en la cabeza de los pilotes.

Con base a estas suposiciones, la ecuación de equilibrio del pilote se puede escribir como sigue:

$$\rho_p \pi a^2 \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + u_g \right) + EI \frac{\partial^4 u_p}{\partial z^4} = [p(z) + q(z)] e^{i \omega t} \dots (6)$$

donde

$$u_g = - u_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

y

ρ_p = densidad de masa (o masa específica) del pilote

$p(z)e^{i\omega t}$ = reacción del suelo en la superficie lateral del pilote, a la profundidad z y en la dirección horizontal x , causada por la respuesta del suelo a una excitación - en su base.

$q(z)e^{i\omega t}$ = reacción del suelo en la superficie lateral del pilote, a una profundidad z , y en la dirección x , debido a la fuerza cortante V concentrada sobre la cabeza del pilote.

Haciendo las proyecciones adecuadas se encuentra que:

$$p(z) = \frac{1}{e^{i\omega t}} \int_0^{2\pi} (\sigma_r |_{r=a} \cos \theta - \tau_{r\theta} |_{r=a} \sin \theta) a d\theta ; \dots (7)$$

Considerando que

$$\int (\cos^2 ax) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

y

$$\int (\sin^2 ax) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax,$$

y llevando las ecuaciones (4) y (5), que dan los esfuerzos σ_r y $\tau_{r\theta}$ respectivamente, en la ecuación (7), se obtendrá:

$$p(z) = \rho_s \pi a \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \xi_n^2 \omega_g^2 \left[A_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) + B_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) \sin \frac{n\pi z}{2H} \right] (8)$$

La función $q(z)$ se puede expandir en serie como sigue:

$$q(z) e^{i\omega t} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{n\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots (9)$$

Escribiendo la solución de la ecuación (6), en la forma de series de Fourier, se tiene:

$$u_p = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_n \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} e^{i\omega t}, \quad \dots\dots\dots(10)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = -\omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_n \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{\partial^4 u_p}{\partial z^4} = \left(\frac{n\tilde{\pi}}{2H}\right)^4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} u_n \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(12)$$

Llevando las ecuaciones (8), (9), (10), (11) y (12) a la ecuación (6), y arreglando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 \rho_p \tilde{\pi}^2 a^2 + \frac{n^4 \tilde{\pi}^4}{(2H)^4} EI) \sum u_n \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} e^{i\omega t} \\ & = \left\{ \rho_p \tilde{\pi}^2 a^2 \omega^2 u_0 + \rho_s \tilde{\pi} a \sum \xi_n^2 \omega_g^2 \left[A_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. B_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} + \sum \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} \right\} e^{i\omega t} \dots(13) \end{aligned}$$

Se sabe que una función cualquiera, $f(x)$, se puede expresar como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}x}{H},$$

donde $b_n = \frac{2}{H} \int_0^H f(x) \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}x}{H} dx$

Si $f(x) = 1$, entonces el valor de la integral de esta última expresión es

$$\int_0^H \operatorname{sen} \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} dz = -\frac{2H}{n\tilde{\pi}} \cos \frac{n\tilde{\pi}z}{2H} \Big|_0^H = \frac{2H}{n\tilde{\pi}} ;$$

o sea

$$b_n = \frac{4}{n\pi}$$

Por lo tanto, se puede escribir la siguiente igualdad

$$\rho_s \pi a^2 \omega^2 u_0 = \rho_s \pi a^2 \omega^2 u_g \sum \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} \dots (14)$$

Llevando la ecuación (14) dentro la ecuación (13), y reduciendo términos, se obtiene:

$$\left(-\omega^2 \rho_p \pi a^2 + \frac{n^4 \pi^4}{(2H)^4} EI \right) u_n = \rho_s \pi a^2 \omega^2 \frac{4}{n\pi} u_0 + \rho_s \pi a \xi_n^2 \omega_g^2 \left[A_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} \right) + B_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} \right) \right] + \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dots (15)$$

Las constantes A y B de la ecuación anterior se obtienen aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$u_p = u_r \text{ para } r = a \text{ y } \theta = 0 \dots (16)$$

$$u_p = u_\theta \text{ para } r = a \text{ y } \theta = \pi/2 \dots (17)$$

Aplicando la ecuación # 2, en la primera de estas condiciones, se obtiene:

$$u_n = -A_n \left[\frac{1}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{C_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \right] + \frac{B_n}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} \right) + \frac{4}{nH} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \dots (18)$$

Aplicando la ecuación (3), en la segunda condición, se obtiene lo siguiente:

$$u_n = \frac{A_n}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) - B_n \left[\frac{1}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_s} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) \right] + \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) \dots (19)$$

Arreglando ahora los términos de las ecuaciones (18) y (19), estas resultan:

$$- A_n \left[\frac{1}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) \right] + B_n K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) = u_n - \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \dots (20)$$

y

$$A_n \frac{1}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} \right) - B_n \left[\frac{1}{a} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) + \frac{\xi_n \omega_g}{c_s} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} \right) \right] = u_n - \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \dots (21)$$

Las ecuaciones (20 y 21) forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$- A_n C_{11} + B_n C_{12} = b_1$$

$$- A_n C_{12} - B_n C_{22} = b_1$$

Resolviendo este sistema para A_n y B_n , se obtiene:

$$A_n = - b_1 \left(\frac{C_{22} + C_{12}}{\Delta} \right)$$

y

$$B_n = - b_1 \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right)$$

donde

$$\Delta = C_{11} C_{22} - C_{21} C_{12}$$

Poniendo el valor de b_1 en las expresiones de A_n y B_n , se tendrá:

$$A_n = -u_n \left(\frac{C_{22} + C_{11}}{\Delta} \right) + \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \left(\frac{C_{22} + C_{11}}{\Delta} \right) \dots (22)$$

$$B_n = -u_n \left(\frac{C_{21} - C_{11}}{\Delta} \right) - \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \left(\frac{C_{21} - C_{11}}{\Delta} \right) \dots (23)$$

El valor de Δ se obtiene a partir de las ecuaciones (20) y (21).

Dicho valor resulta:

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left\{ K_1 \left[\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) - \frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \right] \left[\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} + \frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) \right] - K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \right\} \dots (24)$$

$$C_{22} + C_{11} = \frac{1}{a} \left\{ 2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) \right\} \dots (25)$$

$$C_{21} + C_{11} = \frac{1}{a} \left\{ 2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \right\} \dots (26)$$

Llevando las ecuaciones (22) y (23) a la ecuación (15), se tiene

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 \rho_p \pi a^2 + \frac{n^4 \pi^4}{(2H)^4} EI) u_n = \rho_s \pi a^2 \omega^2 \frac{4}{n\pi} u_0 + \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \rho_s \pi a \xi_n^2 \omega_g^2 \\ & K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \left[-u_n \left(\frac{C_{22} + C_{12}}{\Delta} \right) + \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \left(\frac{C_{22} + C_{12}}{\Delta} \right) \right] \\ & + \rho_s \pi a \xi_n^2 \omega_g^2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) - \left[u_n \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right) + \frac{4}{n\pi} \frac{u_0}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right) \right] \end{aligned}$$

Arreglando términos se llega a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 u_n & \left[-\omega^2 \rho_p \tilde{\pi} a^2 - \frac{n^2 \tilde{\pi}^4}{(2H)^4} EI + \rho_s \tilde{\pi} a \xi_n^2 \omega_g^2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \left(\frac{C_{22} + C_{11}}{\Delta} \right) + \right. \\
 & \left. \rho_s a^2 \xi_n^2 \omega_g^2 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right) \right] \\
 & = \frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{4}{n \tilde{\pi}} u_0 \rho_s \tilde{\pi} a^2 \omega^2 + \frac{1}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \rho_s \tilde{\pi} a \xi_n^2 \omega_g^2 \left(\frac{C_{22} + C_{12}}{\Delta} \right) \\
 & K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) + \frac{1}{\xi_n^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \rho_s \tilde{\pi} a \xi_n^2 \omega_g^2 \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right) K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) \quad (27)
 \end{aligned}$$

Considerando ahora solamente el término que contiene la fuerza - cortante (o sea, el primer término que aparece en el miembro de la derecha de la ecuación (27)), se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 u_{n1} & = \frac{\frac{2V(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 \tilde{\pi}^4} EI - \omega^2 \rho_p \tilde{\pi} a^2 + \rho_s \tilde{\pi} a \xi_n^2 \omega_g^2 \left[K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) \left(\frac{C_{22} + C_{12}}{\Delta} \right) \right. \\
 & \left. + K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) \left(\frac{C_{21} + C_{11}}{\Delta} \right) \right]}{\dots\dots\dots} \quad (28)
 \end{aligned}$$

Llamando

$$\Omega_n = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\Delta} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \right) (C_{22} + C_{12}) + K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} \right) (C_{21} + C_{11}), \quad (29)$$

y llevando esta expresión a la ecuación (28), se obtiene:

$$u_{n1} = \frac{\frac{2V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{2H}{\tilde{\pi}} \right)^4 \frac{1}{EI}}{n^4 - \omega^4 \rho_p \tilde{\pi} a^2 \left(\frac{2H}{\tilde{\pi}} \right)^4 \frac{1}{EI} + \rho_s \tilde{\pi} a^2 \xi_n^2 \omega_g^2 \left(\frac{2H}{\tilde{\pi}} \right)^4 \frac{1}{EI} \cdot \Omega_n} \dots\dots\dots (30)$$

Denominado con α_2 la siguiente expresión:

$$\alpha_2 = \pi \rho_s a^2 \omega_g^2 \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{1}{EI}, \quad \dots\dots\dots(31)$$

la ecuación (30) se puede escribir también como sigue:

$$u_{n1} = \frac{2 \frac{V}{H} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{1}{EI}}{n^4 - \alpha_2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + \alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n} \dots\dots\dots(32)$$

Considerando ahora, el término de la ecuación (22) que contiene a la amplitud del movimiento en la roca, u_g , se obtiene:

$$u_{n2} = \frac{\frac{4}{n\pi} u_0 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \rho_s \pi a^2 \omega_g^2 \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{1}{EI} (1 + \Omega_n)}{n^4 - \alpha_2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + \alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n}$$

que también se puede expresar en la siguiente forma:

$$u_{n2} = \frac{\alpha_2 (\Omega_n + 1) \frac{4}{n\pi} u_0 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{n^4 - \alpha_2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + \alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n} \dots\dots\dots(33)$$

Haciendo $Z_n = a^2 \Delta$, y considerando los valores dados por las -- ecuaciones (17) y (18), el valor de Ω_n es igual a

$$\Omega_n = \frac{1}{Z_n} \left[4 K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_s} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) + \frac{\xi_n \omega_g a}{c_L} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_s}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) \right] \dots\dots\dots(34)$$

Definiendo a

$$F(z, \omega) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4 - \alpha_2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + \alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n} \text{sen} \frac{n\pi z}{2H}, \quad (35)$$

y

$$G(z, \omega) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_2 (\Omega_n + 1) n^{\frac{4}{\pi}}}{n^4 - \alpha_2 \frac{\rho_s}{\rho_s} (\frac{\omega}{\omega_g})^2 + \alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n} \text{sen } \frac{n\pi z}{2H} \dots (36)$$

y considerando que

$$u_n = u_{n1} + u_{n2},$$

de la ecuación (10) se obtiene:

$$u_p = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^2 \frac{2V}{H} F(z, \omega) + u_0 G(z, \omega) \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right] e^{i\omega t} \dots (37)$$

VALORES SIMPLIFICADOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

Para el caso en que $a \ll H$, la función modificada de Bessel se -- puede expresar como sigue:

$$K_0 (\eta_{Tn}) = - (\gamma + \log \frac{\eta_{Tn}}{2})$$

$$K_1 (\eta_{Tn}) = - \frac{1}{\eta_{Tn}} + (\gamma - 0.5 + \log \frac{\eta_{Tn}}{2}) \frac{\eta_{Tn}}{2}$$

$$K_0 (\eta_{Ln}) = - (\gamma + \log \frac{\eta_{Tn}}{2} + \log S)$$

$$K_1 (\eta_{Ln}) = - \frac{1}{\eta_{Tn} S} + (\gamma - 0.5 + \log \frac{\eta_{Tn}}{2} + \log S) \frac{\eta_{Tn} S}{2}$$

o escribiendo las ecuaciones anteriores como función sólo de K_0 (η_{Tn}) y η_{Tn} , se tienen las siguientes igualdades:

$$K_1 (\eta_{Tn}) = \frac{1}{\eta_{Tn}} - \frac{\eta_{Tn}}{4} - K_0 (\eta_{Tn}) \frac{\eta_{Tn}}{2}$$

$$K_0 (\eta_{Ln}) = K_0 (\eta_{Tn}) - \log S$$

$$K_1 (\eta_{Ln}) = \frac{1}{\eta_{Tn} S} - K_0 (\eta_{Tn}) \frac{\eta_{Tn} S}{2} + \frac{\eta_{Tn} S}{2} (\log S - 0.5)$$

$$y \quad \eta_{Ln} = \eta_{Tn} S$$

donde γ = Constante de Euler (= 0.5772157...)

$$S = C_s / C_L$$

$$y \quad \eta_{Ln} = \frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} = \frac{\xi_n \pi a}{2H} \frac{C_s}{C_L}$$

$$\eta_{Tn} = \frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} = \xi_n \frac{\pi a}{2H}$$

EVALUACION DEL TERMINO $\propto_2 \xi_n^2 \Omega_n$

De la ecuación(31) se puede escribir

$$\begin{aligned} \propto_2 \xi_n^2 \Omega_n &= \pi \rho_s a^2 \omega_g^2 \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \frac{1}{EI} \xi_n^2 \Omega_n \\ &= \frac{\pi \pi}{EI} \left(\frac{2H}{\pi}\right)^4 \xi_n^2 \left(\frac{\pi a}{2H}\right)^2 \Omega_n \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

Considerando el valor de Δ , dado por la ecuación (24), el valor de Z_n es igual a:

$$\begin{aligned} Z_n = a^2 \Delta &= \frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s}\right) \\ &+ \frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) \\ &+ \frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \cdot \frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s}\right) \dots(40) \end{aligned}$$

Evaluando cada término de Z_n , dado en la ecuación (40), se tendrá:

$$\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s} K_1 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) K_0 \left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_s}\right) =$$

$$\frac{1}{\eta_{Tn} S} - K_0(\eta_{Tn}) \frac{\eta_{Tn} S}{2} + \frac{\eta_{Tn} S}{2} (\log S - 0.5) K_0(\eta_{Tn})$$

$$= \frac{K_0(\eta_{Tn})}{S} - \frac{S}{2} \eta_{Tn} K_0(\eta_{Tn})^2 \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right) (\log S - 0.5) S \cdot K_0(\eta_{Tn}) \dots (41)$$

$$\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} K_1\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S}\right) K_0\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) = \eta_{Tn} S \left[\frac{1}{\eta_{Tn}} - \frac{\eta_{Tn}}{4} - K_0(\eta_{Tn}) \frac{\eta_{Tn}}{2} \right] \left[K_0(\eta_{Tn}) - \log S \right]$$

$$= \left[S - \frac{S}{4} (\eta_{Tn})^2 - \frac{S}{2} K_0(\eta_{Tn}) \eta_{Tn}^2 \right] \left[K_0(\eta_{Tn}) - \log S \right]$$

$$= S K_0(\eta_{Tn}) - S \log S - \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S K_0(\eta_{Tn}) + \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S \log S$$

$$- \frac{S}{2} \eta_{Tn} K_0(\eta_{Tn})^2 + \frac{S}{2} (\eta_{Tn})^2 K_0(\eta_{Tn}) \log S \dots (42)$$

$$\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L} \frac{\xi_n \omega_g a}{C_S} K_0\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_L}\right) K_0\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{C_S}\right) = (\eta_{Tn})^2 K_0(\eta_{Tn}) \left[K_0(\eta_{Tn}) - \log S \right] = S \left[\eta_{Tn} K_0(\eta_{Tn}) \right] - (\eta_{Tn})^2 S K_0(\eta_{Tn}) \log S \dots (43)$$

Llevando las ecuaciones (41), (42) y (43) en la ecuación (40), se tiene:

$$Z_n = \frac{K_0(\eta_{Tn})}{S} + S K_0(\eta_{Tn}) - S \log S + \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S \log S$$

que se puede reducir a

$$Z_n = \frac{(1 + S^2) K_0(\eta_{Tn}) - S^2 \log S + S^2 \log S \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2}{S} \dots (44)$$

Este es el valor del denominador de Ω_n , cuya expresión está dada por la ecuación (34). Evaluando ahora el valor del numerador de la misma ecuación, se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 4 K_1\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_L}\right) K_1\left(\frac{\xi_n \omega_g a}{c_S}\right) &= \left[\frac{4}{\eta_{Tn}} - \eta_{Tn} - 2 \eta_{Tn} K_0(\eta_{Tn}) \right] \left[\frac{1}{\eta_{Tn} S} - \right. \\
 &K_0(\eta_{Tn}) \times \frac{\eta_{Tn} S}{2} - \left. \frac{\eta_{Tn} S}{2} (\log S - 0.5) \right] \\
 &= \frac{4}{(\eta_{Tn})^2 S} - 2 S K_0(\eta_{Tn}) + 2 S (\log S - 0.5) - \frac{1}{S} + \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S K_0(\eta_{Tn}) \\
 &- \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right) S (\log S - 0.5) - 2 \frac{K_0(\eta_{Tn})}{S} + S [\eta_{Tn} K_0(\eta_{Tn})]^2 \\
 &- (\eta_{Tn})^2 S K_0(\eta_{Tn}) (\log S - 0.5) \dots\dots\dots(45)
 \end{aligned}$$

Llevando las ecuaciones (40), (41) y (44), a la ecuación (34), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Omega_n = \frac{1}{Z_n} \left[\frac{4}{(\eta_{Tn})^2 S} - S K_0(\eta_{Tn}) + S \log S - \frac{1}{S} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S K_0(\eta_{Tn}) \right. \\
 \left. - \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S \log S + \left(\frac{\eta_{Tn}}{2}\right)^2 S - \frac{K_0(\eta_{Tn})}{S} \right] \dots\dots\dots(46)
 \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (44) y (46), en la ecuación (39), y despreciando el término que contiene $(\eta_{Tn})^2$, se obtiene finalmente la siguiente expresión:

$$\alpha_2 \xi_n^2 \Omega_n^2 = - \frac{4 \mu \pi^2 (2H)^4}{EI \pi^4} \frac{1}{(1+S^2) \left(\gamma + \log \frac{\eta_{Tn}}{2}\right) + S^2 \log S} \dots\dots\dots(47)$$

APENDICE III-2

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES A, B, C y D DE LA ECUACION OBTENIDA EN EL MODELO DE WINKLER

(Teoría de Ogata-Kotsubo)

Dada la ecuación diferencial

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + kD(y-u) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \dots\dots\dots(1)$$

se encontró en la sección 3-3 que la solución a la misma está dada por

$$Y(z) = e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \sen \beta z) + e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \sen \beta z)$$

$$-u_0 \left\{ 1 + \frac{kD (\cos \frac{\omega z}{C_s} + \tan \frac{\omega H}{C_s} \sen \frac{\omega z}{C_s})}{m\omega^2 - kD - EI (\frac{\omega}{C_s})^2} \right\} \dots\dots(2)$$

donde

$$\beta = \left[\frac{1}{4EI} (kD - m\omega^2) \right]^{1/4}$$

$$y = Y(z) e^{i\omega t}$$

y A, B, C y D son los coeficientes que dependen de las condiciones de borde. En este apéndice se consideran las siguientes condiciones de frontera

##

1) $(Y)_{z=0} = u_g$ No hay desplazamiento relativo en la superficie de contacto entre el suelo y la roca (3-a)

2) $(EI \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2})_{z=0} = 0$ El pilote está articulado en la base (3-b)

3) $(\frac{\partial Y}{\partial z})_{z=H} = 0$ La cabeza del pilote está empotrada en la superestructura (3-c)

4) $(EI \frac{\partial^3 Y}{\partial z^3})_{z=H} = (M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2})_{z=H}$ Cortante transferido en la cabeza (3-d)*

*Para el caso en que $M=0$, el miembro de la derecha de la Ec.3-d vale cero. Para tal caso el Apéndice V-1 presenta la derivación de los coeficientes A~D.

Para este caso los valores de A~D se obtienen como sigue

Aplicando la primera condición de frontera, y considerando que $\bar{y} = u_g + y$, se tiene

$$(y)_{z=0} = 0; \text{ o, } (Y(z))_{z=0} = 0;$$

por lo que se puede escribir

$$A + C = u_o \left[1 + \frac{kD}{m\omega^2 - kD - EI \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^4} \right] \dots \dots \dots (4)$$

De la segunda condición de frontera, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} &= \beta \cos \beta z (B e^{\beta z} + D e^{-\beta z}) + \beta \operatorname{sen} \beta z (B e^{\beta z} - D e^{-\beta z}) \\ &- \beta \operatorname{sen} \beta z (A e^{\beta z} + C e^{-\beta z}) + \beta \cos \beta z (A e^{\beta z} - C e^{-\beta z}) \\ &- u_0 \left\{ \delta \frac{kD(\operatorname{sen} \delta z + \tan \delta H \cos \delta z)}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \right\} \dots\dots\dots(5-a) \end{aligned}$$

donde $\delta = \frac{\omega}{c_s}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} &= \beta^2 \operatorname{sen} \beta z (B e^{\beta z} + D e^{-\beta z}) + \beta^2 \cos \beta z (B e^{\beta z} - D e^{-\beta z}) \\ &+ \beta^2 \cos \beta z (B e^{\beta z} + D e^{-\beta z}) + \beta^2 \operatorname{sen} \beta z (B e^{\beta z} - D e^{-\beta z}) \\ &- \beta^2 \cos \beta z (A e^{\beta z} + C e^{-\beta z}) - \beta^2 \operatorname{sen} \beta z (A e^{\beta z} - C e^{-\beta z}) \\ &- \beta^2 \operatorname{sen} \beta z (A e^{\beta z} + C e^{-\beta z}) + \beta^2 \cos \beta z (A e^{\beta z} - C e^{-\beta z}) \\ &- u_0 \left[\delta^2 \frac{kD (\cos \delta z + \tan \delta H \operatorname{sen} \delta z)}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \right] \end{aligned}$$

Simplificando términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} &= 2\beta^2 \cos \beta z (B e^{\beta z} - D e^{-\beta z}) - 2\beta^2 \operatorname{sen} \beta z (A e^{\beta z} - C e^{-\beta z}) \\ &+ \frac{u_0 \delta^2 kD (\cos \delta z + \tan \delta H \operatorname{sen} \delta z)}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \dots\dots(5-b) \end{aligned}$$

Para $z = 0$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right)_{z=0} = 2\beta^2 (B-D) + \frac{u_0 \delta^2 kD}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} = 0$$

o,

$$B - D = \frac{1}{2\beta^2} \frac{u_0 \delta^2 kD}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \dots\dots(5-c)$$

De la tercera condición de frontera se tiene:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{z=H} = 0; \quad \text{o,} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{z=H} = 0$$

Usando la ecuación (5-a), para $z = H$, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)_{z=H} = \beta \{ & \cos \beta H (B e^{\beta H} + D e^{-\beta H} + A e^{\beta H} - C e^{-\beta H}) \\ & + \sin \beta H (B e^{\beta H} - D e^{-\beta H} - A e^{\beta H} - C e^{-\beta H}) = 0 \end{aligned}$$

o,

$$\begin{aligned} A e^{\beta H} (\cos \beta H - \sin \beta H) + B e^{\beta H} (\cos \beta H + \sin \beta H) \\ - C e^{-\beta H} (\cos \beta H + \sin \beta H) + D e^{-\beta H} (\cos \beta H - \sin \beta H) = 0 \dots (6) \end{aligned}$$

Aplicando la cuarta condición de frontera, se obtendrá:

$$(EI \frac{\partial^3 Y}{\partial z^3})_{z=H} = M \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_g + Y) \right]_{z=H}$$

o,

$$(EI \frac{\partial^3 Y(z)}{\partial z^3})_{z=H} = M \left[u_0 \omega^2 + \omega^2 Y(z) \right]_{z=H}$$

Partiendo ahora del resultado obtenido en la ecuación (5-b), se obtiene la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial z^3}\right) = & -2\beta^3 \sin \beta z (B e^{\beta z} - D e^{-\beta z}) + 2\beta^3 \cos \beta z (B e^{\beta z} + D e^{-\beta z}) \\ & - 2\beta^3 \cos \beta z (A e^{\beta z} - C e^{-\beta z}) - 2\beta^3 \sin \beta z (A e^{\beta z} + C e^{-\beta z}) \\ & - u_0 \left\{ \delta^3 \frac{kD (\sin \delta z - \tan \delta H \cos \delta z)}{m \omega^2 - kD - EI \cdot \delta^4} \right\} \end{aligned}$$

Arreglando términos, y multiplicando por EI, para $z = H$ se obtiene la igualdad siguiente:

$$EI \left(\frac{\partial^3 Y(x)}{\partial z^3} \right)_{z=H} = 2 EI \beta^3 \left\{ B e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) + D e^{-\beta H} (\operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H) \right. \\ \left. - A e^{\beta H} (\operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H) + C e^{-\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) \right. \\ \left. = M \left\{ u_0 \omega^2 + \omega^2 \operatorname{sen} \beta H (B e^{\beta H} + D e^{-\beta H}) + \omega^2 \cos \beta H (A e^{\beta H} + C e^{-\beta H}) - u_0 \omega^2 \left(1 + \frac{kD}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4} \right) \right\} \right\};$$

denominando

$$\chi = \frac{kD}{m\omega^2 - kD - EI \delta^4},$$

y arreglando los términos de la ecuación anterior, se tiene

$$B e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) + D e^{-\beta H} (\operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H) \\ - A e^{\beta H} (\operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H) + C e^{-\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) \\ + M \frac{\omega^2}{2 EI \beta^3} \operatorname{sen} \beta H (B e^{\beta H} + D e^{-\beta H}) \\ + M \frac{\omega^2}{2 EI \beta^3} \cos \beta H (A e^{\beta H} + C e^{-\beta H}) - \frac{M}{2 EI \beta^3} \frac{u_0 \omega^2}{\cos \beta H} \chi = 0$$

$$\text{Haciendo } \bar{n} = \frac{M \omega^2}{2 EI \beta^3} \dots\dots(7)$$

y agrupando en factores comunes los términos de la ecuación anterior, ésta se puede escribir de la forma siguiente:

$$- A e^{\beta H} [(1-\bar{n}) \cos \beta H + \operatorname{sen} \beta H] + B e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H + \bar{n} \operatorname{sen} \beta H) \\ + C e^{-\beta H} [(1+\bar{n}) \cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H] + D e^{-\beta H} [(1+\bar{n}) \operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H] \\ = \frac{\omega^2 u_0 M \chi}{2 EI \beta^3 \cos \beta H} \dots\dots(8)$$

Las ecuaciones (4), (5-c), (6) y (8) representan un sistema heterogéneo de ecuaciones que se puede resolver para los coeficientes A, B, C y D.

El sistema se puede representar, en forma de matriz, como sigue

| | | | | |
|--|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1 | 0 | 1 | 0 | $\left. \begin{array}{l} u_0(1+\chi) \\ \frac{u_0 \delta^2}{2\beta^2} \chi \\ 0 \\ \frac{\omega^2 u_0 M \chi}{2EI \beta^3 \cos \delta H} \end{array} \right\}$ |
| 0 | 1 | 0 | -1 | |
| $e^{\beta H} (\cos \beta H$ | $e^{\beta H} (\cos \beta H$ | $-e^{-\beta H} (\cos \beta H$ | $e^{-\beta H} (\cos \beta H$ | |
| $- \text{sen } \beta H)$ | $+ \text{sen } \beta H$ | $+ \text{sen } \beta H)$ | $- \text{sen } \beta H)$ | |
| $- e^{\beta H} [(1-i\pi) \cos \beta H$ | $e^{\beta H} [\cos \beta H$ | $e^{-\beta H} [(1+i\pi) \cos \beta H$ | $e^{-\beta H} [(1+i\pi)$ | $\frac{\omega^2 u_0 M \chi}{2EI \beta^3 \cos \delta H}$ |
| $+ \text{sen } \beta H]$ | $-(1-i\pi) \text{sen } \beta H]$ | $- \text{sen } \beta H]$ | $\text{sen } \beta H + \cos \beta H]$ | |

Nótese en la ecuación (2), que para valores grandes de βz , $e^{\beta z} \rightarrow \infty$; por tanto, para tal caso, los valores de A y B deberían ser cero o muy cercanos a cero (comportamiento de viga larga). Por consiguiente, para valores de $\beta z \gg 4$, el sistema anterior de ecuaciones se puede simplificar aún más.

APENDICE IV-1

DERIVACION DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA PILOTE-SUELO

Considerando solamente vibraciones libres, la ecuación de equilibrio de un pilote en movimiento se puede expresar como sigue

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4} = - (kD - m\omega^2) Y \dots\dots\dots(1)$$

La solución a esta ecuación es:

$$Y = e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \sen \beta z) + e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \sen \beta z) \dots(2)$$

donde

$$\beta = \left[\frac{1}{4EI} (kD - m\omega^2) \right]^{1/4} \geq 0$$

y

$$y = Y e^{i\omega t}$$

A, B, C y D son coeficientes que dependen de las condiciones de frontera. Como ejemplo, supóngase que estas condiciones son las siguientes:

- 1.- $(\bar{y})_z = 0 = u_g$ No hay desplazamiento relativo entre el suelo y la roca en la superficie de contacto.(3-a)
- 2.- $(EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2})_{z=0} = 0$ El pilote está articulado en su base(3-b)
- 3.- $(\frac{\partial Y}{\partial z})_{z=H} = 0$ La cabeza del pilote se encuentra en potrada en la superestructura(3-c)
- 4.- $(EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3})_{z=H} = (M \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2})_{z=H}$ El cortante proveniente de la superestructura es transmitido a la cabeza del pilote(3-d)

Aplicando cada una de estas condiciones a la ecuación (2), las frecuencias de resonancia del sistema pilote-suelo pueden obtenerse como se indica a continuación:

De la primera condición, se tiene:

$$A + C = 0,$$

o sea:

$$A = -C \dots\dots\dots(4)$$

Para aplicar la segunda condición se debe diferenciar dos veces, es decir:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \beta \left\{ e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \sin \beta z) - e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \sin \beta z) + e^{\beta z} (-A \sin \beta z + B \cos \beta z) + e^{-\beta z} (-C \sin \beta z + D \cos \beta z) \right\} \quad (5-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \beta^2 & \left\{ e^{\beta z} (A \cos \beta z + B \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C \cos \beta z + D \sin \beta z) \right. \\ & + e^{\beta z} (-A \sin \beta z + B \cos \beta z) - e^{-\beta z} (-C \sin \beta z + D \cos \beta z) \\ & + e^{\beta z} (-A \sin \beta z + B \cos \beta z) - e^{-\beta z} (-C \sin \beta z + D \cos \beta z) \\ & \left. + e^{\beta z} (-A \cos \beta z - B \sin \beta z) + e^{-\beta z} (-C \cos \beta z - D \sin \beta z) \right\} \end{aligned}$$

Esta última expresión se reduce a:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \beta^2 \left\{ 2 e^{\beta z} (-A \sin \beta z + B \cos \beta z) + 2 e^{-\beta z} (C \sin \beta z - D \cos \beta z) \right\} ; \dots\dots\dots(5-b)$$

Puesto que

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = 0, \text{ para } z = 0, \text{ la ecuación (5-b) resulta:}$$

$$2 \beta^2 (B - D) = 0,$$

ecuación que también se puede escribir como:

$$B = D \dots\dots\dots(5-c)$$

Para aplicar ahora la tercera condición de frontera, conviene llevar las ecuaciones (4) y (5-c) a la ecuación (5-a) con $z = H$. Al hacer esto se obtiene:

$$A \cos \beta H (e^{\beta H} + e^{-\beta H}) - A \sin \beta H (e^{\beta H} - e^{-\beta H}) + B \sin \beta H (e^{\beta H} - e^{-\beta H}) + B \cos \beta H (e^{\beta H} + e^{-\beta H}) = 0$$

Esta última ecuación también se puede expresar como:

$$A (\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H) = -B (\sin \beta H \sin h \beta H + \cos \beta H \cos h \beta H)$$

o también:

$$\frac{A}{B} = \frac{\sin \beta H \sin h \beta H + \cos \beta H \cos h \beta H}{\sin \beta H \sin h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \dots\dots\dots(6)$$

Para aplicar la 4a. condición de frontera, conviene llevar las ecuaciones (4) y (5-c) a la ecuación(5-b). Haciendo ésto, resulta:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 2 \beta^2 \{ -2 A \sin \beta z \cos h \beta z + 2 B \cos \beta z \sin h \beta z \} = 4 \beta^2 (B \cos \beta z \sin h \beta z - A \sin \beta z \cos h \beta z).$$

Derivando nuevamente con respecto a z , se tiene:

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right) = 4 \beta^3 (-B \sin \beta z \sin h \beta z + B \cos \beta z - A \cos \beta z \cos h \beta z - A \sin \beta z \sin h \beta z)$$

Esta última expresión, para $z = H$, queda:

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right)_{z=H} = 4\beta^3 \left[B (\cos \beta H \cos h\beta H - \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H) - A (\cos \beta H \cos h\beta H + \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H) \right]$$

Llevando ahora la ecuación (6), en la ecuación anterior, se tiene

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right)_{z=H} = 4\beta^3 B \left[\cos \beta H \cos h\beta H - \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H - (\cos \beta H \cos h\beta H + \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H) \frac{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H + \cos \beta H \cos h\beta H}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H - \cos \beta H \cos h\beta H} \right]$$

Desarrollando esta ecuación, y cancelando términos, se obtiene - la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right)_{z=H} = 8\beta^3 B \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \beta H \operatorname{sen} h^2 \beta H + \cos^2 \beta H \cos h^2 \beta H}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H - \cos \beta H \cos h\beta H} \right)$$

que se puede reducir a:

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\right)_{z=H} = \frac{-8\beta^3 B (\operatorname{sen} h^2 \beta H + \cos^2 \beta H)}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h\beta H - \cos \beta H \cos h\beta H} \dots\dots\dots (7)$$

Obsérvese que si no existe masa en la cabeza del pilote, la ecuación anterior debe ser igual a cero, y puesto que $(\operatorname{sen} h^2 \beta H + \cos^2 \beta H)$ no puede ser cero, a fin de tener una solución diferente a la trivial el valor de β debe ser cero.

O sea, considerando que $\beta = \left[\frac{1}{4EI} (kD - \omega^2 m) \right]^{1/4}$, al hacer este valor igual a cero resulta:

$$\omega^2 = \frac{kD}{m}$$

Según se demostró en el Cap. IV, esta frecuencia corresponde -

también a la de un pilote rígido moviéndose alrededor de su punta.

Si el pilote soporta una masa M, el miembro de la derecha en la ecuación (3-d) es:

$$(M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2})_{z=H} = - [M \omega^2 Y e^{i\omega t}]_{z=H} \dots\dots\dots(8)$$

Llevando las ecuaciones (4) y (5-c), dentro de la ecuación (8), se obtiene:

$$(-M \omega^2 Y e^{i\omega t})_{z=H} = -e^{i\omega t} M \omega^2 \left[A \cos \beta H (e^{\beta H} - e^{-\beta H}) + B \sin \beta H (e^{\beta H} + e^{-\beta H}) \right]$$

$$= - 2 e^{i\omega t} M \omega^2 (B \sin \beta H \cos h \beta H + A \cos \beta H \sin h \beta H)$$

Llevando ahora la ecuación (6), a la ecuación anterior, se tiene

$$-M \omega^2 Y e^{i\omega t} = - 2 e^{i\omega t} M \omega^2 B (\sin \beta H \cos h \beta H +$$

$$\frac{\sin \beta H \sin h \beta H + \cos \beta H \cos h \beta H}{\sin \beta H \sin h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \cos \beta H \sin h \beta H).$$

$$-M \omega^2 Y e^{i\omega t} = -2 M \omega^2 B e^{i\omega t} \left(\frac{\sin h \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \cos \beta H}{\sin \beta H \sin h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \right) \dots\dots\dots(9)$$

Ahora bien, la cuarta condición de frontera está dada también por:

$$(EI \frac{\partial^3 Y}{\partial z^3})_{z=H} e^{i\omega t} = - M \omega^2 e^{i\omega t} Y \dots\dots\dots(10)$$

Llevando las ecuaciones (7) y (9), en la ecuación (10), resulta-

la siguiente igualdad:

$$-4 EI \beta^3 (\text{sen } h^2 \beta H + \cos^2 \beta H) = -M \omega^2 (\text{sen } h \beta H \cos h \beta H - \text{sen } \beta H \cos \beta H)$$

Resolviendo esta última ecuación, para ω^2 , se tiene

$$\omega^2 = (4 EI \beta^3 / M) \left(\frac{\text{sen } h^2 \beta H + \cos^2 \beta H}{\text{sen } h \beta H \cos h \beta H - \text{sen } \beta H \cos \beta H} \right) \dots (11)$$

La ecuación (11) representa así la frecuencia natural del sistema pilote-suelo (ω_s).

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, se encuentra --- que, para $\beta < 0$, los pilotes sin masa en su cabeza tienen más - frecuencias de resonancia que están dadas por:

$$\omega^2 = \frac{kD}{m} + \frac{4EI}{mH^4} \left(n \frac{\pi}{2} \right)^4$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Sin embargo, estas frecuencias son tan altas que, para fines --- prácticos, el pilote se comporta como si fuera un elemento rígi- do. (Este es el caso de pilotes que son muy gruesos y pesados, - de manera que las fuerzas de inercia son más importantes que las de resorte).

Si existe carga en la cabeza del pilote, la frecuencia natural- del sistema suelo-pilote, para $\beta < 0$, resulta igual a:

$$\omega^2 = \frac{2 EI}{M} \epsilon^3 \frac{\cos h \epsilon H \cos \epsilon H}{\text{sen } \epsilon H \cos h \epsilon H - \text{sen } h \epsilon H \cos \epsilon H} \dots (12)$$

donde

$$\varepsilon = \left[-\frac{1}{EI} (kD - m^2) \right]^{1/4}$$

APENDICE IV-2

DETERMINACION DE LA RESPUESTA DE UN PILOTE SIN CARGA VERTICAL, SUJETO A SISMO

Considerando las ecuaciones (4), (5-c), (6) y (7) del Apéndice - III-2, para el caso particular de que $M = 0$, las ecuaciones resultan respectivamente como siguen:

$$A + C = u_0 (1 + \chi) \dots\dots\dots(1)$$

$$B - D = - \frac{\delta^2}{2\beta^2} u_0 \chi = - l u_0 \chi \dots\dots\dots(2)$$

$$a_1 A + a_2 B - a_4 C + a_3 D = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$-a_2 A + a_1 B + a_3 C + a_4 D = 0 \dots\dots\dots(4)$$

donde

$$l = \frac{\delta^2}{2\beta^2}$$

$$a_1 = e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H)$$

$$a_2 = e^{\beta H} (\cos \beta H + \operatorname{sen} \beta H),$$

$$a_3 = e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H)$$

$$a_4 = e^{-\beta H} (\cos \beta H + \operatorname{sen} \beta H)$$

Multiplicando la ecuación (3) por a_1 , y la ecuación (4) por $(-a_2)$, se tiene:

$$a_1^2 A + a_1 a_2 B - a_1 a_4 C + a_1 a_3 D = 0 \dots\dots\dots(3-a)$$

$$a_2^2 A - a_1 a_2 B - a_2 a_3 C - a_2 a_4 D = 0 \dots\dots\dots(4-a)$$

Sumando las ecuaciones (3-a) y (4-a) se obtiene:

###

$$(a_1^2 + a_2^2) A - (a_1 a_4 + a_2 a_3) C + (a_1 a_3 + a_2 a_4) D = 0 \dots (4-b)$$

pero

$$a_1^2 + a_2^2 = e^{2\beta H} \left[\cos^2 \beta H - 2 \cos \beta H \sin \beta H + \sin^2 \beta H + \cos^2 \beta H + 2 \cos \beta H \sin \beta H + \sin^2 \beta H \right] = 2 e^{2\beta H},$$

$$a_1 a_4 + a_2 a_3 = 2 (\cos^2 \beta H - \sin^2 \beta H) = 2 \cos 2\beta H,$$

y

$$a_1 a_3 - a_2 a_4 = \cos^2 \beta H - 2 \cos \beta H \sin \beta H + \sin^2 \beta H - \cos^2 \beta H - 2 \cos \beta H \sin \beta H + \sin^2 \beta H = -4 \cos \beta H \sin \beta H,$$

o sea:

$$a_1 a_3 - a_2 a_4 = -2 \sin 2\beta H$$

Por tanto, la ecuación (4-b) se reduce a:

$$2 e^{2\beta H} A - 2 \cos 2\beta H C - 2 \sin 2\beta H D = 0 \dots (4-c)$$

Llevando la ecuación (1), dentro la ecuación (4-c), se obtiene - lo siguiente:

$$2 e^{2\beta H} A - 2 \cos 2\beta H \left[u_0 (1+\chi) - A \right] - 2 \sin 2\beta H D = 0$$

o,

$$(e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) A - \sin 2\beta H D = u_0 (1+\chi) \cos 2\beta H \quad (5)$$

Multiplicando ahora la ecuación (3) por a_3 , y la ecuación (4) --

por a_4 , se obtiene:

$$a_1 a_3 A + a_2 a_3 B = a_3 a_4 C + a_3^2 D = 0 \quad \dots\dots\dots(4-d)$$

y

$$-a_2 a_4 A + a_1 a_4 B + a_3 a_4 C + a_4^2 D = 0 \quad \dots\dots\dots(4-e)$$

Añadiendo las ecuaciones (4-d) y (4-e) se obtiene:

$$(a_1 a_3 - a_2 a_4) A + (a_2 a_3 + a_1 a_4) B + (a_3^2 + a_4^2) D = 0 \quad \dots(4-f)$$

Llevando ahora la ecuación (2), a la ecuación (4-f), se tiene

$$-2A \operatorname{sen} 2\beta H + 2(D - 2u_0 \chi) \cos 2\beta H + 2D e^{-2\beta H} = 0$$

o,

$$-A \operatorname{sen} 2\beta H + D(e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) = (\chi) u_0 \cos 2\beta H \quad \dots(6)$$

Multiplicando la ecuación (5) por $\operatorname{sen} 2\beta H$, y la ecuación (6) por $(e^{2\beta H} + \cos \beta H)$, se tiene:

$$\operatorname{sen} 2\beta H (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) A - D \operatorname{sen}^2 2\beta H = u_0 (1 + \chi) \operatorname{sen} 2\beta H \cos 2\beta H \quad \dots\dots\dots(4-g)$$

y

$$-A \operatorname{sen} 2\beta H (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) + D(e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) = \chi u_0 \cos 2\beta H (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) \quad \dots\dots(4-h)$$

Añadiendo estas dos últimas ecuaciones, se obtiene:

$$D(-\operatorname{sen}^2 2\beta H + 1 + e^{2\beta H} \cos 2\beta H + e^{-2\beta H} \cos 2\beta H + \cos^2 2\beta H) = u_0 \cos 2\beta H \left[(1 + \chi) \operatorname{sen} 2\beta H + \chi (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H) \right], \dots\dots(4-i)$$

y reduciendo términos, resulta:

$$2D \cos 2\beta H (\cos 2\beta H + \cosh 2\beta H) = u_0 \cos 2\beta H (1+\chi) \sin^2 \beta H + \chi (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H)$$

Finalmente, si se aísla a D, se tiene:

$$D = \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) \sin 2\beta H + \chi (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H)}{\cos 2\beta H + \cosh 2\beta H} \dots\dots\dots(7)$$

Multiplicando esta vez la ecuación (5) por $(e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H)$, y la ecuación (6) por $\sin 2\beta H$, se obtiene:

$$A \left[1 + \cos 2\beta H (e^{2\beta H} + e^{-2\beta H}) + \cos^2 2\beta H \right] - \sin 2\beta H (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) D = u_0 (1+\chi) \cos 2\beta H (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H)$$

y

$$-A \sin^2 2\beta H + D \sin 2\beta H (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) = \chi u_0 \cos 2\beta H \sin 2\beta H$$

Añadiendo ahora estas dos ecuaciones, se tiene:

$$A \cos 2\beta H (2 \cos 2\beta H + 2 \cosh 2\beta H) = u_0 \cos 2\beta H \left[(1+\chi) (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) + \chi \sin 2\beta H \right]$$

de la cual se obtiene el valor de A dado por

$$A = \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) + \chi \sin 2\beta H}{\cos 2\beta H + \cosh 2\beta H}$$

y llevando la ecuación (7) a la ecuación (2), resulta que el valor de B es:

$$B = D - i \chi u_0$$

$$= \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) \operatorname{sen} 2\beta H + i \chi (e^{2\beta H} + \cos 2\beta H - 2 \cos 2\beta H - e^{2\beta H} - e^{-2\beta H})}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H}$$

de donde se obtiene que

$$B = \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) \operatorname{sen} 2\beta H - i \chi (\cos 2\beta H + e^{-2\beta H})}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H} \dots\dots(9)$$

Ahora bien, de las ecuaciones (1) y (8) se obtiene el valor de C

$$C = \frac{u_0}{2} (1+\chi) - \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) + i \chi \operatorname{sen} 2\beta H}{\cos^2 \beta H + \cos h 2\beta H} \dots\dots(10)$$

Por consiguiente, la respuesta del pilote en su cabeza es:

$$Y = e^{\beta H} \cos \beta H \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H) + i \chi \operatorname{sen} 2\beta H}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H}$$

$$+ e^{\beta H} \operatorname{sen} \beta H \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) \operatorname{sen} 2\beta H - i \chi (\cos 2\beta H + e^{-2\beta H})}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H}$$

$$+ e^{-2\beta H} \cos \beta H \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) (\cos 2\beta H + e^{2\beta H}) - i \chi \operatorname{sen} 2\beta H}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H}$$

$$- u_0 - \chi u_0 / \cos \delta H + e^{-\beta H} \operatorname{sen} \beta H \frac{u_0}{2} \frac{(1+\chi) \operatorname{sen} 2\beta H + i \chi (e^{-2\beta H} + \cos 2\beta H)}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H}$$

y arreglando términos se obtiene:

$$Y = \frac{u_0}{2} (1+\chi) \frac{1}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H} (e^{-\beta H} + e^{\beta H} \cos 2\beta H + e^{\beta H} \operatorname{sen} 2\beta H$$

$$+ e^{-\beta H} \cos 2\beta H + e^{\beta H} + e^{-\beta H} \operatorname{sen} 2\beta H) + \frac{i \chi \frac{u_0}{2}}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H} (e^{\beta H}$$

$$\operatorname{sen} 2\beta H - e^{\beta H} \cos 2\beta H - e^{-\beta H} - e^{-\beta H} \operatorname{sen} 2\beta H + e^{\beta H} + e^{-\beta H} \cos 2\beta H)$$

$$- u_0 - \chi u_0 / \cos \delta H$$

o,

$$Y = \frac{u_0}{\cos 2\beta H + \cos h 2\beta H} \left[(1+\chi) \cos h\beta H (1 + \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) + \chi \sen h\beta H (1 - \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) \right] - \left(u_0 + \frac{\chi u_0}{\cos \delta H} \right) \dots\dots(11)$$

Ahora bien, el movimiento relativo del suelo y el pilote es --- igual a $y - u$, o sea igual a $y - (\bar{u} - u_0)$. Al considerar la ecuación (11) y el valor de \bar{u} , dado en la sección 3-3 (ecuación 3-13), se obtienen que este movimiento relativo está dado por:

$$y - u = u_0 \left\{ - \frac{\chi + 1}{\cos \delta H} + \left[(1 + \chi) \cos h\beta H (1 + \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) + \chi \sen h\beta H (1 - \cos 2\beta H + \sen 2\beta H) \right] \right\} \dots\dots(12)$$

CASO FLEXIBLE

$$\beta H \rightarrow \infty$$

Para este caso resulta que el límite de Y, (dado por la Ec.11) - cuando $\beta H \rightarrow \infty$, es:

$$\lim_{\beta H \rightarrow \infty} Y = - \left[u_0 + \frac{(-1) u_0}{\cos \delta H} \right]$$

puesto que, para tal caso $\nu \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow -1$;

o sea:

$$\lim_{\beta H \rightarrow \infty} Y = u_0 \left(\frac{1}{\cos \delta H} - 1 \right)$$

Y puesto que $y = Y e^{i\omega t}$, para este límite se tiene que:

$$\lim_{\beta H \rightarrow \infty} y = u_0 \left(\frac{1}{\cos \delta H} - 1 \right) e^{i\omega t} = \bar{u} - u_g \Big|_{z = H}$$

##

Es decir, el desplazamiento relativo del pilote es igual al desplazamiento relativo del suelo cuando la rigidez del pilote tiende a cero.

CASO RIGIDO

$$\beta H \rightarrow 0$$

En este caso, al tomar límites, el valor de Y se reduce a:

$$Y = u_0 (1 + \chi) - u_0 \left(1 + \frac{\chi}{\cos \delta H}\right) = \chi u_0 \left(1 - \frac{1}{\cos \delta H}\right)$$

$$\text{pero } \chi = \frac{-1}{1 + \frac{EI}{kD} \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{kD}},$$

y puesto que

$$\lim_{\beta H \rightarrow 0} \frac{EI}{kD} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{4\beta^4} = \infty,$$

$$\beta H \rightarrow 0 \quad \beta \rightarrow 0$$

se tiene que

$$\lim_{\beta H \rightarrow 0} \chi = 0$$

$$\beta H \rightarrow 0$$

0 sea, que para el caso en que el pilote sea rígido, $Y = 0$, y por consiguiente no existe desplazamiento relativo de pilote.

APENDICE V-2

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES A_1 , A_2 , A_3 y A_4 PARA EL MODELO DE WINKLER CON EXCITACION DESDE LA CABEZA DEL PILOTE

La solución de la ecuación diferencial

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k D y = 0, \dots\dots\dots(1)$$

es:

$$Y = \text{sen } \beta z (A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z}) + \text{cos } \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z}) \dots\dots(2)$$

$$\text{donde } \beta = \left[\frac{1}{4EI} (kD - m\omega^2) \right]^{1/4}$$

y

$$y = Y(z) e^{i\omega t}$$

A_1 , A_2 , A_3 , A_4 son constantes determinadas por las condiciones de frontera.

Utilizando el llamado método "substitución de variables", se determinarán estos coeficientes para las siguientes condiciones de frontera:

1) $(y)_{z=0} = 0$ El pilote no experimenta desplazamientos en su base

2) $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0$ El pilote está articulado en la base

3) $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{z=H} = 0$ La cabeza del pilote está empotrada en la superestructura.

$$4) \quad EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right)_z = H = M \times \text{Aceleración total en la cabeza del pilote}$$

Aplicando la primera condición frontera a la ecuación (2), se obtiene:

$$A_3 + A_4 = 0,$$

o sea:

$$A_3 = - A_4$$

Considerando la 2a. condición de frontera, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial z} = & \beta \cos \beta z (A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z} - \beta \text{sen } \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z})) + \\ & \beta \text{sen } \beta z (A_1 e^{\beta z} - A_2 e^{-\beta z}) + \beta \cos \beta z (A_3 e^{\beta z} - A_4 e^{-\beta z}) \\ & \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = & -\beta^2 \left[\text{sen } \beta z (A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z}) - \cos \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z}) \right. \\ & - \cos \beta z (A_1 e^{\beta z} - A_2 e^{-\beta z}) - \text{sen } \beta z (A_3 e^{\beta z} - A_4 e^{-\beta z}) \\ & + \cos \beta z (A_1 e^{\beta z} - A_2 e^{-\beta z}) - \text{sen } \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z}) \\ & \left. + \text{sen } \beta z (A_1 e^{\beta z} + A_2 e^{-\beta z}) + \cos \beta z (A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{-\beta z}) \right] \end{aligned}$$

Para $z = 0$, la anterior ecuación se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_z = 0 = 2 (A_1 - A_2) = 0$$

de donde se tiene que

$$A_1 = A_2$$

Considerando ahora la 3a. condición frontera, y la ecuación (4), se tiene:

$$A_1 e^{\beta H} (\cos \beta H + \operatorname{sen} \beta H) + A_2 e^{-\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) + A_3 e^{\beta H} (\cos \beta H - \operatorname{sen} \beta H) - A_4 e^{-\beta H} (\operatorname{sen} \beta H + \cos \beta H) = 0 \quad \dots(6-a)$$

Llevando las ecuaciones (3) y (5), a la ecuación (6-a), se obtendrá:

$$2 A_1 \cos \beta H \cos h \beta H + 2 A_1 \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H + 2 A_3 \cos \beta H \cos h \beta H - 2 A_3 \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H = 0 ,$$

que conduce a la siguiente ecuación:

$$A_3 = A_1 \frac{\cos \beta H \cos h \beta H + \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \quad \dots\dots\dots(6-b)$$

Llevando ahora las ecuaciones (3) y (5), a la ecuación (2), se obtiene la siguiente:

$$Y = 2 A_1 \operatorname{sen} \beta z \cos h \beta z + 2 A_3 \cos \beta z \operatorname{sen} h \beta z \quad \dots\dots\dots(7)$$

y llevando esta ecuación, a la ecuación (6-b), se obtiene:

$$Y = 2 A_1 \left[\operatorname{sen} \beta z \cos h \beta z + \cos \beta z \operatorname{sen} h \beta z \frac{\cos \beta H \cos h \beta H + \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \right] \quad (8)$$

Si se denomina con C al siguiente cociente:

$$C = \frac{\cos \beta H \cos h \beta H + \operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H}{\operatorname{sen} \beta H \operatorname{sen} h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} ,$$

la ecuación (8) se reduce a

$$Y = 2 A_1 (\operatorname{sen} \beta z \cos h \beta z + C \cos \beta z \operatorname{sen} h \beta z) \quad \dots\dots\dots(8-b)$$

Considerando por último la 4a. condición frontera, se tiene:

$$EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \right)_{z=H} e^{i\omega t} = M \omega^2 (u_0 + Y' + Y)_{z=H} e^{i\omega t} \dots\dots(9)$$

donde $y = Y' e^{i\omega t}$ es el desplazamiento relativo del pilote, sin masa en su cabeza, cuando es sujeto a un movimiento en su base - representado por $u_g = u_0 e^{i\omega t}$

Usando la ecuación (8-b), para encontrar el valor de $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}$, se obtiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = 2 A_1 \beta \left[\cos \beta z \cos h \beta z + \sin \beta z \sin h \beta z - C \sin \beta z \sin h \beta z + C \cos \beta z \cos h \beta z \right]$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 2 A_1 \beta \left[- \sin \beta z \cos h \beta z + \cos \beta z \sinh \beta z + \cos \beta z \sin h \beta z + \sin \beta z \cos h \beta z - C \cos \beta z \sin h \beta z - C \sin \beta z \cos h \beta z + C \cos \beta z \sin h \beta z \right]$$

Que se puede reducir a:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 4 A_1 \beta^2 \left[\cos \beta z \sin h \beta z - \sin \beta z \cos h \beta z - C \right] \dots(10-a)$$

Por consiguiente:

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial z^3} = 4 A_1 \beta^3 \left[- \sin \beta z \sin h \beta z + \cos \beta z \cos h \beta z - C (\cos \beta z \cos h \beta z + \sin \beta z \sin h \beta z) \right]$$

Llevando ahora el valor de C a esta última ecuación, y multiplicándola por EI, para $z = H$ se tendrá:

$$EI \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial z^3} \right)_{z=H} = 4EI A_1 \beta^3 \left(\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H + \cos \beta H \cos h \beta H + \sin \beta H \sin h \beta H - \frac{\cos \beta H \cos h \beta H + \sin \beta H \sin h \beta H}{\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H} \right)$$

Que se reduce a

$$EI \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial z^3} \right)_{z=H} = 8 EI A_1 \beta^3 \left[\frac{\cos^2 \beta H \cos h^2 \beta H + \sin^2 \beta H \sin h \beta H}{\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H} \right] \dots (10-b)$$

Llevando las ecuaciones (8-b) y (10-b), dentro de la ecuación(9), se obtiene:

$$8 EI A_1 \beta^3 \left(\frac{\cos^2 \beta H \cos h^2 \beta H + \sin^2 \beta H \sin h \beta H}{\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H} \right) =$$

$$\omega^2 M \left[u_0 + Y' + 2 A_1 \left(\sin \beta H \cos \beta H + \right. \right.$$

$$\left. \left. \cos \beta H \sin h \beta H \frac{\cos \beta H \cos h \beta H + \sin \beta H \sin h \beta H}{\sin \beta H \sin h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \right) \right],$$

expresión que se reduce a:

$$8 EI A_1 \beta^3 \left(\frac{\cos^2 \beta H \cos h^2 \beta H + \sin^2 \beta H \sin h \beta H}{\cos \beta H \cos h \beta H + \sin \beta H \sin h \beta H} \right)$$

$$= - \omega^2 M \left[u_0 + Y' + 2 A_1 \left(\frac{\sin h \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \cos \beta H}{\sin \beta H \sin h \beta H - \cos \beta H \cos h \beta H} \right) \right]$$

Separando por último el valor de A₁, se tiene:

$$A_1 = - \omega^2 M (u_0 + Y') \left[\frac{\cos \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \sin h \beta H}{8 EI \beta^3 (\cos^2 \beta H \cos h^2 \beta H + \sin^2 \beta H \sin h^2 \beta H)} \right.$$

$$\left. \frac{- 2 M \omega^2 (\sin h \beta H \cos h \beta H - \sin \beta H \cos \beta H)}{\dots \dots \dots (11)} \right]$$

Llevando este valor de A₁, a la ecuación (8-b), se obtiene la de flexión del pilote, y multiplicando la ecuación (10-a), por EI, - se obtienen los momentos flexionantes del pilote.

APENDICE VII-1

APLICACION DE LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE UN PILOTE INDIVIDUAL A UN GRUPO DE PILOTES

La solución analítica del problema para un grupo de pilotes, ha sido resuelta por varios autores usando el modelo de Winkler; sin embargo, existe una solución dada por H.G. Poulos (Journal del - ASCE, SM5, 1971), que se refiere a la interacción de pilotes que trabajan en grupo en un medio semi-infinito, idealmente elástico e isótropo. En este apéndice se presenta un resumen del trabajo de Poulos, indicando los pasos esenciales para emplear, razonablemente, los resultados del análisis de un pilote individual a un grupo de pilotes.

Interacción entre Dos Pilotes

Según se muestra en la Fig. 1, esta interacción se refiere a dos pilotes sujetos cada uno a una fuerza horizontal \bar{H} , con una separación de centro a centro igual a S , y con un ángulo $\hat{\beta}$ entre la línea que los une y la dirección de la fuerza.

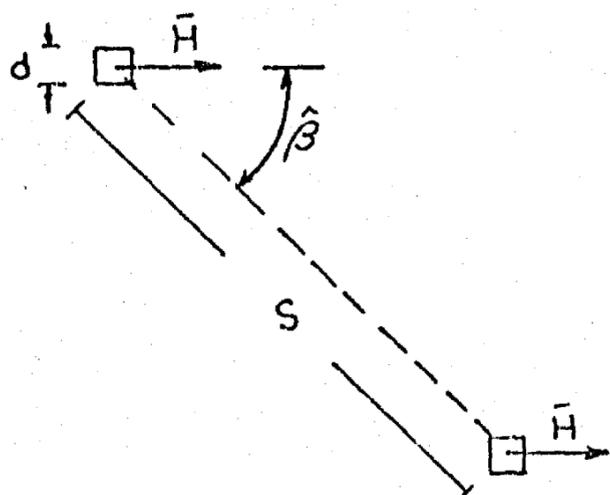


Fig. 1
GRUPO DE DOS PILOTES

Los pilotes tienen una longitud L , un ancho d y una rigidez igual a EI .

El pilote se divide en $n + 1$ elementos, de longitud L/n , según se muestra en las figuras 2 y 3.

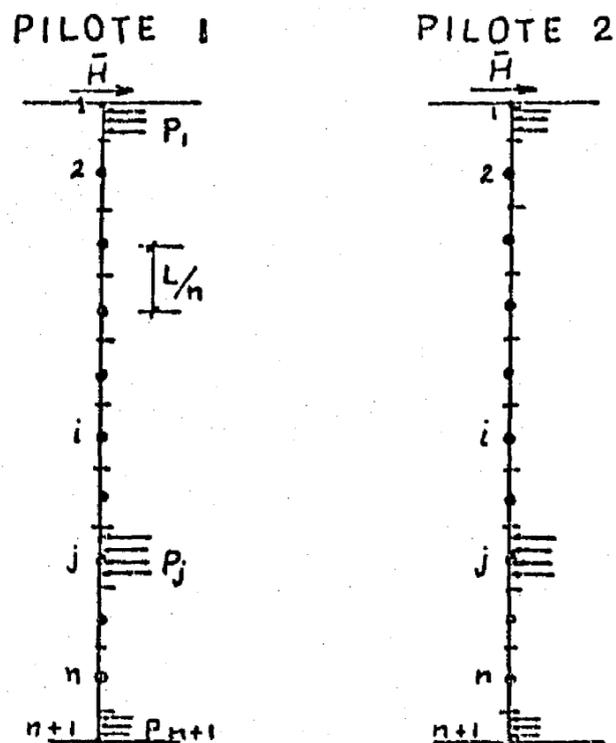


Fig. 2 Fuerzas y Presiones Actuando en los Pilotes

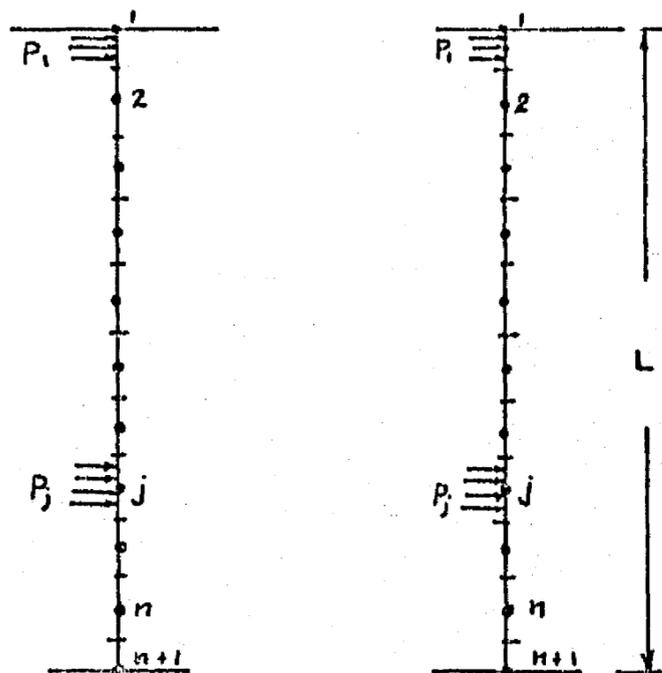


Fig. 3 Presiones Actuando en el Suelo

Los esfuerzos desconocidos P_i , en cada pilote, se obtienen igualando los desplazamientos del suelo (usando las ecuaciones de Mindlin) con las del pilote (usando la teoría de la viga) en cada uno de los $(n + 1)$ elementos, y haciendo uso de las condiciones de equilibrio. El análisis se describe con detalle en uno de los reportes de Poulos (Civil Engineering Report # R 106, Universidad de Sidney).

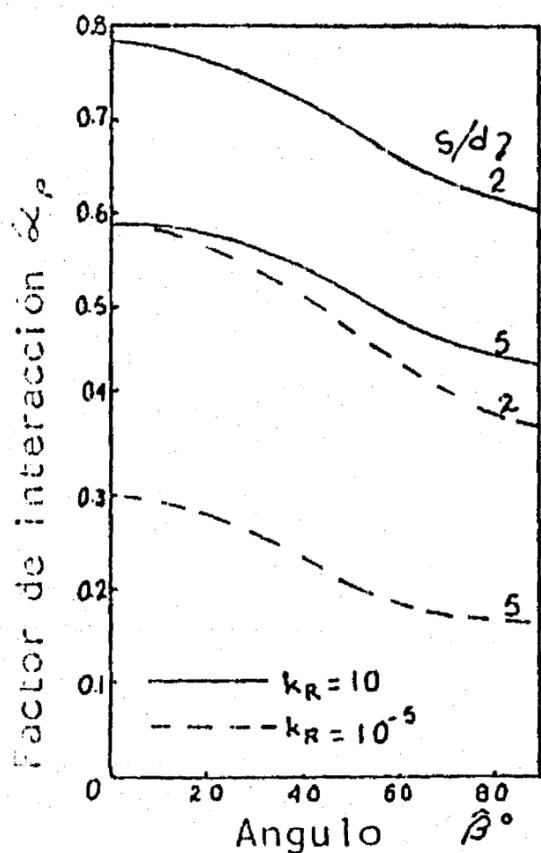
El factor de interacción para desplazamientos se define por el valor $\hat{\alpha}_p$, dado por

$$\hat{\alpha}_p = \frac{\text{desplazamiento adicional debido al pilote adjunto}}{\text{desplazamiento de un pilote debido a su propia carga}}$$

Poulos considera también factores de interacción para rotaciones, con diferentes condiciones de carga (momentos o fuerzas horizon-

ales aplicadas en la cabeza del pilote), así como para las condiciones de cabeza libre o restringida. Para fines ilustrativos, se analizan en este apéndice sólo los factores de interacción para desplazamientos de pilotes con cabeza fija sujetos a fuerzas horizontales.

Las variaciones típicas del factor de interacción para distintos valores de $\hat{\beta}$ se presentan en la Fig. 4



$$L/d = 25$$

$$\nu = 0.5$$

$$k_R = \frac{EI}{E_s L^4} = \text{factor de flexibilidad}$$

Fig. 4 Valores Típicos de factores de interacción para varios valores de $\hat{\beta}$.

El presente capítulo presenta otras gráficas para distintos valores de L/d y s/d , así como para las condiciones señaladas con anterioridad. Las conclusiones que se pueden derivar de dichas gráficas se resumen en lo que sigue

Los valores de $\hat{\alpha}$ disminuyen cuando aumenta el desplazamiento y son mayores para $\hat{\beta} = 0$ que para $\hat{\beta} = 90$

Todos los valores de $\hat{\alpha}$ aumentan cuando L/d aumenta

- c) Los valores de $\hat{\alpha}$ aumentan cuando se aumenta E
- d) Los factores de interacción para pilotes de cabeza fija son -
mayores que los de cabeza libre.

Interacción de un Grupo de 4 Pilotes Iguales Cargados

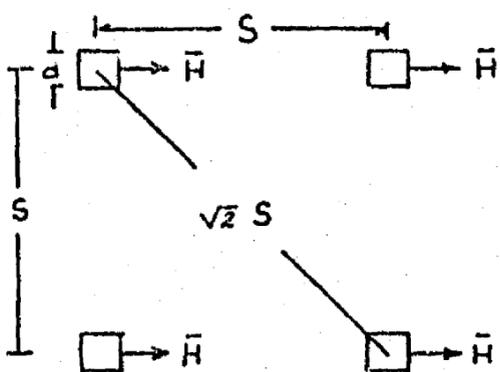


Fig.5
GRUPO DE 4 PILOTES

El análisis de 2 pilotes se puede extender al caso de 4 pilotes dispuestos como se muestra en la Fig. 5; sin embargo, los desplazamientos del suelo en cada pilote, deben incluir las componentes debidas a los dos pilotes adicionales del grupo.

Una solución aproximada es la de suponer que el principio de superposición es válido, y que por tanto, el factor de interacción es

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 \dots \dots \dots (1)$$

donde $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$ y $\hat{\alpha}_4$ son los factores de interacción para el pilote 1, debido a los pilotes 2, 3 y 4, para los respectivos valores de $\hat{\rho}$ y los espaciamentos mostrados en la Fig. 5.

La relación del desplazamiento de un grupo $\hat{\rho}_G$, con respecto al desplazamiento $\hat{\rho}_i$ de un pilote, que lleva la misma carga que un pilote en el grupo, está dado por

$$\frac{\hat{\rho}_G}{\hat{\rho}_i} = 1 + \hat{\alpha} \dots \dots \dots (2)$$

De acuerdo con Poulos, el error que se comete al usar un análisis exacto y el que supone el principio de superposición es del orden de 2%. La aplicabilidad del principio de superposición -

en un grupo de cuatro pilotos condujo a Poulos a concluir que dicho principio se puede también usar para el caso general de grupos de pilotos.

Análisis General de Grupos de Pilotes

Sea un grupo de m pilotos con cabeza libre; el desplazamiento de cualquier pilote k en el grupo es, por superposición:

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_H \left(\sum_{j=1}^m H_j \hat{\alpha}_{\rho_{H_{kj}}} + H_k \right) \dots \dots \dots (3)$$

donde $\bar{\rho}_H$ es el desplazamiento unitario de referencia, correspondiente a un pilote de cabeza libre bajo una carga unitaria; H_j es la carga en el pilote j ; $\hat{\alpha}_{\rho_{H_{kj}}}$ es el factor de interacción para los pilotos "k" y "j"

Si se denomina a la carga total del grupo como H_G , se tiene

$$H_G = \sum_{j=1}^m H_j \dots \dots \dots (4)$$

I) Si el grupo de pilotos es tal, que los desplazamientos son -- los mismos para todos los pilotos, las fuerzas H_j y el desplazamiento del grupo se pueden determinar a partir de las m --- ecuaciones que resultan de (3) y de la ecuación de equilibrio dada por (4).

II) Si se tiene un grupo donde los pilotos tienen las mismas cargas, las fuerzas $H_j = H_G/m$ y los desplazamientos se pueden obtener directamente usando la ecuación (3).

Para el caso de grupos de pilotos de cabeza restringida, se utili

za un procedimiento igual a (1), sólo que en la ecuación (3) se utilizaría el factor de interacción $\hat{\alpha}_{pF}$, correspondiente a pilotes de cabeza restringida, y $\bar{\rho}_F$ que es el desplazamiento de un pilote de cabeza restringida debido a una fuerza unitaria. Los valores de $\bar{\rho}_H$ y $\bar{\rho}_F$ han sido obtenidos por Poulos para pilotes individuales y son dados por las siguientes expresiones:

$$\bar{\rho}_H = \frac{I_{\rho H}}{L E_s}$$

y

$$\bar{\rho}_F = \frac{I_{\rho F}}{L E_s}$$

siendo $I_{\rho H}$ e $I_{\rho F}$ los factores de influencia de desplazamiento para pilotes de cabeza libre y cabeza restringida respectivamente; dichos factores los obtiene Poulos para varios valores de las variables que intervienen, los cuales aparecen en la referencia mencionada al principio de este apéndice.