00365

8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ACCIONES DE GRUPOS TOPOLOGICOS EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

MAT. SANTIAGO MARCOS ZEPEDA MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN

Agradecimientos

Agradesco a mi madre y demás familiares por el apoyo que me han brindado en todo momento.

A la Dra. Silvia De Neymet por su amistad, asesoria, ayuda y apoyo a lo largo de mis estudios de posgrado.

Al Dr. Sergey Antonyan por su amistad, asesoria y consejos.

A los sinodales Dr. Ángel Tamariz Mascarua, Dr. Rolando Jiménez Benítez, Dra. María Isabel Puga Espinoza, al Dr. Alexander Bykov por su infinita paciencia y consejos para la realización de este trabajo. Así también a mi amigo y sinodal M. en C. Armando Mata Romero.

A la máxima casa de estudios en México, la UNAM, por darme la oportunidad de ser parte de su comunidad.

A las personas que me han favorecido con el privilegio de su amistad.

A N el bello Angelito que me enseño la belleza de la vida.

A todas las personas que han pagado mi enseñanza y educación.

Contenido

Introducción.

Un grupo topológico es la fusión de dos conceptos matemáticos fundamentales, el de grupo y el de espacio topológico; así los elementos de este conjunto constituyen a la vez un grupo y un espacio topológico pero tal fusión no tendría sentido de no estar relacionadas entre si las operaciones algebráicas y topológicas definidas sobre un mismo conjunto. Este vinculo existe y se expresa en la continuidad, en el sentido topológico de las operaciones de grupo.

El concepto de grupo topológico apareció inicialmente en matemáticas en relación con los grupos de transformaciones continuas

Recordemos que si X es un conjunto, el conjunto $T(X)$ de las transformaciones (biyecciones) de X en sí mismo es un grupo con la composición como operación. Recordemos también que se llama grupo topológico de transformaciones continuas a todo grupo topológico G isomorfo a un subgrupo $H(X)$ (de donde $H(X)$ es el conjunto de los homeomorfismos $f : X \to X$ con X un espacio topológico)

También, se dice que un grupo G actúa sobre un espacio X si esta definida una acción de G en X esto es si existe un homeomorfismo

$\lambda : G \to H(X)$, tal que la función $\lambda' : G \times X \to X; \lambda'(g, x) = \lambda(g)(x)$ es continua.

Si un grupo G actúa sobre un espacio topológico X como un grupo de transformaciones continuas, es posible, definir una topología en G que le dé una estructura de grupo topológico. Esto ocurre, por ejemplo, si X es un espacio euclidiano. Estos fueron los grupos topológicos que se considerarón inicialmente. Luego se prescindió de su origen como grupos de transformaciones continuas y se conservó sólo su estructura.

Para el desarrollo de este trabajo nosotros consideramos la acción de un grupo topológico G sobre un espacio de funciones continuas del espacio topológico X al espacio topológico Y, dotado con las tres topologías clásicas.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el capítulo 1 se enuncian diferentes tópicos básicos como son el producto topológico, espacios compactos, espacios métricos y espacio de funciones continuas el cual denotaremos por $C(X, Y)$, donde X Y son espacios topológicos. Sobre este espacio de funciones hablaremos en particular de la topología compacto-abierta, la topología punto-abierta y espacios donde ambas topologías coinciden. Finalmente se mencionan algunos conceptos de espacios uniformes y de la topología de convergencia uniforme.

En el capítulo 2 se comienzan a desarrollar conceptos referentes a grupos topológicos y se definen acciones de un grupo topológico G sobre el espacio topológico $C_{\mathcal{K}}(X, Y)$ donde el subíndice $\mathcal{K}$ denota la topología compacto-abierta y se mencionan las restricciones que deben existir en X o en G para que esta acción sea continua. En la parte final de este capítulo con la misma acción en donde se sustituye el espacio $C_{\mathcal{K}}(X\ Y)$ por el espacio $\mathcal{A}(Z, T)$ (la familia de funciónes G-uniformes de un G-conjunto Z decir G actúa sobre un conjunto Z en un espacio uniforme T), se demuestra que esta acción es no sólo continua sino también uniformemente continua. En este capítulo estableceremos también la notación, terminología y resultados básicos que se usan a lo largo de este trabajo. Algunos de ellos se enuncian sin demostración y en cada uno de ellos se da la referencia en la que pueden ser consultados

Finalmente el capítulo 3 trata de acciones de un grupo topológico G sobre espacios equicontinuos, también para un grupo topológico G sobre el cual se piden diferentes propiedades se obtienen diferentes encajes en diferentes espacios. Al final de este trabajo, se enuncia y demuestra en forma diferente el Teorema de Uspenskiĭ el cual afirma: un grupo topológico G con base contable puede ser encajado en un subgrupo del grupo de autohomeomorfismos del cubo de Hilbert.

Capítulo 1

Nociones Preliminares.

En este capítulo haremos mención de algunas definiciones básicas, y de algunos resultados importantes de topología general que posteriormente serán utilizados, en este trabajo.

1.1 Producto Topológico.

Un tema interesante y que será de gran utilidad en esta tesis es el producto de espacios topológicos. Antes de definirlo es necesario mencionar lo que es una topología inicial, a partir de la cual se obtiene el producto topológico.

1.1.1 Definición.

Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia no vacía definida como sigue $\mathcal{F} = \{(f_i, (X_i, T_i))\}_{i \in I}$ donde (X_i, T_i) es un espacio topológico no vacío con topología T_i. Y para cualquier $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ es una aplicación. Sea $\sum_{\mathcal{F}} = \{f_i^{-1}(G_i) : i \in I, G_i \in T_i\}$ de X. A la topología

$T_{\mathcal{F}}$ en X, que tiene como sub-base la familia $\sum_{\mathcal{F}}$ llama *topología inicial en X para la familia $\mathcal{F}$.* Esta es la topología menos fina (la que tiene menos abiertos) que tiene la proyección continua para toda $i \in I$

La definición anterior nos permitirá encontrar una base para el producto topológico, el cual definiremos en seguida.

1.1.2 Definición.

Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos.

Denotaremos por $\mathbf{X} = \prod_{i\in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : f(i) \in X_i \; \forall\, i \in I\}$ al producto de conjuntos X_i. Para cada $i \in I$, sea $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$, la aplicación proyección, es decir $p_i(f) = f(i)$ para toda $f \in \prod_{i\in I} X_i$

Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{(p_i, (X_i; T_i))\}_{i\in I}$. A la topología inicial en $\mathbf{X} = \prod_{i\in I} X_i$ para la familia $\mathcal{F}$, se le denomina *Topología Producto de* $\{T_i\}_{i\in I}$ *ó Topología Tychonov* y la denotamos por T_p.

Al par $(\prod_{i\in I} X_i, T_p)$ se le conoce como *espacio topológico producto de la familia de espacios topológicos* $\{(X_i, T_i)\}_{i\in I}$ y se denota por $\prod_{i\in I}(X_i, T_i)$

Ahora teniendo en cuenta la definición de topología inicial, *una sub-base de la topología producto T_p es:* $\sum_p = \{p_i^{-1}(G_i) : i \in I, G_i \in T_i\}$ por lo tanto, *una base de T_p es:* $B_p = \{\bigcap_{i\in F} p_i^{-1}(G_i) : F \subset I$ F finito, $G_i \in T_i\}$

Así tenemos que $\bigcap_{i\in F} p_i^{-1}(G_i) = \prod_{i\in I} A_i$ donde $A_i = G_i \in T_i$, para cualquier $i \in F$ y $A_i = X_i$ para cualquier $i \in I \setminus F$. Y de aquí.

$$B_p = \{\prod_{i\in I} G_i : \exists F \subset I, \text{ F finito, con } G_i = X_i, \ \forall i \in I \setminus F \text{ y } G_i \in T_i \\ \forall i \in F\}.$$

Con ello se tiene

$$T_p = \{G \subset \prod_{i\in I} X_i \ . \text{ para todo } x \in G. \ \exists\, H \text{ finito, } H \subseteq I \text{ y } G_i \in T_i. \\ i \in H \text{ tal que } x \in \prod_{i\in I} A_i \subset G_i, \text{ donde } A_i = G_i. \text{ para todo } i \in H \text{ y} \\ A_i = X_i, \text{ para todo } i \in I \setminus H\}$$

Abajo se hará mención de algunas definiciones y teoremas referentes a compacidad sin exponer todas las propiedades referentes de este tema. Sino sólo las que serán de utilidad en resultados futuros. Comenzamos con un par de definiciones previas, que también estan relacionadas. con el tema de compacidad.

1.1.3 Definición.

Si (X, τ) es un espacio topológico, para un subconjunto Y de X podemos construir una topología τ_R en Y la cual es llamada la *topología relativa ó inducida, ó la relativización de τ sobre Y*. La topología relativa τ_R está definida para la familia de todas las intersecciones de miembros de τ con Y. Esto es, U pertenece a la topología relativa τ_R si y sólo si $U = V \bigcap Y$ para algún V en τ.

1.1.4 Definición.

Sean X un espacio topológico, B un subconjunto de X y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{F}$ es una *cubierta de* B si y sólo si B es un subconjunto de la unión $\bigcup\{A : A \in \mathcal{F}\}$: esto es, si y sólo si cada punto de B pertenece a algún elemento de $\mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ es una *cubierta abierta de* B si y sólo si cada elemento de $\mathcal{F}$ es un conjunto abierto en X. Una *subcubierta de* $\mathcal{F}$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ la cual también es una cubierta para B.

1.1.5 Definición.

Un *espacio topológico* X *es compacto* si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Un conjunto A de un espacio topológico X, es compacto si A es compacto con la topología relativa. Equivalentemente A es compacto si y sólo si toda cubierta abierta de A por subconjuntos abiertos de X, tiene una subcubierta finita.
En la demostración del siguiente teorema se muestra como para una vecindad dada de un producto finito de compactos es posible encontrar vecindades de cada compacto cuyo producto está contenido en la vecindad dada.

1.1.6 Teorema.

Si X, Y son espacios topológicos, A, B subconjuntos compactos de X, Y respectivamente, y W una vecindad de $A \times B$ en el espacio producto $X \times Y$, entonces existen vecindades U de A, V de B tal que $U \times V \subset W$

Demostración.

Para cada elemento (x, y) de $A \times B$ existen vecindades abiertas R de x y S de y tal que $R \times S \subset W$. Como B es compacto, para una x fija en A existen vecindades R_i de x y sus correspondientes conjuntos abiertos S_i, para $i = 0, 1, ..., n$, tal que $B \subset Q = \bigcup\{S_i : i = 0, 1, ..., n\}$. Si $P = \bigcap\{R_i : i = 0, 1, ...n\}$, entonces P es una vecindad de x y Q es una vecindad de B tal que $P \times Q \subset W$. Como A es compacto existen conjuntos abiertos P_i en X y Q_i en Y, para $i = 0, 1, ..., m$, tal que cada Q_i es una vecindad de B, $P_i \times Q_i \subset W$ y $A \subset \bigcup\{P_i : i = 0, 1, ..., m\} = U$. Entonces U y $V = \bigcap\{Q_i : i = 0, 1, ..., m\}$ son vecindades de A y B respectivamente, $U \times V$ es un subconjunto de W, como se pedía.□

A continuación se mencionan algunas equivalencias importantes de compacidad local que serán útiles posteriormente.

1.1.7 Definición.

Un espacio topológico X es *localmente compacto* si cada punto de X tiene al menos una vecindad cuya cerradura es compacta (vecindad compacta)

De la definición anterior se tiene que todo espacio compacto es un espacio localmente compacto.

1.1.8 Teorema *([Du], pág. 238).*

Las siguientes cuatro propiedades son equivalentes:

1. X es localmente compacto.

2. Para cada $x \in X$ y cada vencidad $U(x)$, existe un abierto V con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ compacto.

3. Para cada compacto K y cada abierto $U \supset K$, existe un abierto V, con $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ compacto

4. X tiene una base formada de conjuntos abiertos con cerraduras compactas. □

La siguiente definición se refiere a un tipo especial de compacidad

1.1.9 Definición.

Un espacio topológico X es *σ-compacto* si éste puede ser expresado como la unión de a lo más un conjunto numerable de subespacios compactos de X.

A continuación encontraremos definiciones y resultados referentes a cerca de los espacios métricos para concluir con un teorema muy importante (a cerca de producto topológico de espacios métricos) del cual también se da su demostración

1.1.10 Definición.

Un *espacio métrico* es un par (X, ρ) consta de un conjunto X y una función real ρ definida sobre el conjunto $X \times X$, con valores reales no negativos que cumplen con lo siguiente:

1. $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$.
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

El conjunto X es *llamado un espacio*, los elementos de X son llamados puntos, la función ρ es llamada una *métrica* sobre el conjunto X y el número dado por $\rho(x, y)$ es llamada la *distancia entre x. y*

Teniendo ya la definición de espacio métrico vamos a ver como se relacionan los espacios métricos con los espacios topológicos, lo cual lleva a la siguiente pregunta ¿Cómo son los abiertos en espacios métricos?

1.1.11 Definición.

Sea (X, ρ) un espacio métrico, x_o un punto de X y r un número positivo; el conjunto $B(x_o, r) = \{x \in X : \rho(x_o, x) < r\}$ es llamado la *bola abierta con centro en x_o de radio r*. Para un subconjunto A de X y un número positivo r, llamaremos r-bola de A al conjunto $B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$. Es fácil ver que la familia de todas las bolas abiertas en X constituye una base de una topología τ_ρ sobre X, la cual se llama la *topología inducida por la métrica ρ*

La pregunta que surge en forma natural es si dado un espacio topológico siempre se puede metrizar.

1.1.12 Definición.

Un espacio topológico X es metrizable si existe una métrica ρ sobre el conjunto X, tal que la topología inducida por la métrica ρ coincide con la topología original en X.

La métrica sobre el conjunto X que induce la topología original de X será llamada *métrica del espacio X*.

1.1.13 Proposición *([En], pág. 317)*

Una función f de un espacio X con la topología inducida por una métrica ρ a un espacio Y con la topología inducida por una métrica σ es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$ siempre que $\rho(x, x') < \delta$.□

El siguiente teorema es importante en los siguientes capítulos por lo cual se escribe junto con su demostración.

1.1.14 Teorema.

Sea $X_1, X_2,\ldots$ una sucesión de espacios metrizables y sea ρ_i la métrica sobre el espacio $\mathbf{X}$ donde $\rho_i(x, y) \leq 1 \forall x_i, y_i \in X$ para i=1,2, ... La topología inducida

sobre el conjunto $\mathbf{X} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ por la métrica ρ definida como sigue

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(\rho_i(x_i, y_i)) \tag{1.1}$$

coincide con la topología del producto cartesiano de $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Demostración.

Para $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in \mathbf{X}$ claramente tenemos $\rho_i(x_i, y_i) < \varepsilon$ siempre que $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, así que, por la Proposición 1.1 13, la proyección p_i de $\mathbf{X}$ en X_i es continua respecto a la topología inducida sobre $\mathbf{X}$ por ρ. Se sigue de la definición de la Topología Tychonov que la topología inducida por ρ es más fina que la topología del producto cartesiano sobre $\mathbf{X}$.

Ahora, mostraremos que todo conjunto $U \subset \mathbf{X}$ abierto con respecto a la topología inducida por ρ es también abierto con respecto a la topología del producto cartesiano; claramente, esto concluirá la prueba.

Tomemos un punto $x = \{x_i\} \in U$, entonces existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Es suficiente encontrar un entero positivo k y conjuntos abiertos $B_i \subset X_i$, donde $i = 1, 2, ..., k$, tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(B_i) \subset B(x,r) \subset U. \tag{1.2}$$

Sea k un entero positivo que satisface

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2} \tag{1.3}$$

1.2 Espacio de Funciones.

La siguiente sección es la más extensa de este capítulo, y de cierta manera es una generalización del producto cartesiano; esta sección es de gran importancia para los resultados buscados en los siguientes capítulos. De aquí en adelante, por brevedad, en vez de escribir un espacio topológico (X,τ), con topología τ, se escribirá solamente un espacio X. Denotaremos por $C(X,Y)$ a la familia de todas las funciones continuas de un espacio X a un espacio Y. Para un subconjunto K de un espacio X y un subconjunto U de Y. denotaremos $M[K.U] = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$.

La familia de todos los conjuntos de la forma $M[K,U]$, con K un subconjunto compacto de X y U un subconjunto abierto en Y, es una subbase para la llamada *topología compacto-abierta* la cual denotaremos por $\mathcal{K}$ Al espacio topológico $(C(X,Y),\mathcal{K})$ por brevedad lo denotaremos como $C_{\mathcal{K}}(X,Y)$. La familia de intersecciones finitas de conjuntos $M[K,U]$ es una base para $\mathcal{K}$; así cada elemento de esta base es de la forma $\bigcap\{M[K_i,U_i] : i = 0,1,...,n\}$ con n un entero positivo, donde cada K_i es un subconjunto compacto de X y cada U_i es un subconjunto abierto de Y. En el caso particular que K este constituído por un sólo punto p se tiene $M[p.U] = \{f \in C(X.Y) : f(p) \in U\}$ la cual es una sub-base para una topología en general diferente. *la topología punto-abierta*, la cual denotaremos por $\mathcal{P}$, y al espacio topológico $(C(X,Y)\ \mathcal{P})$ como $C_{\mathcal{P}}(X,Y)$

Ahora haremos mención de algunos teoremas que relacionan tanto espacios métricos como espacios de funciones, para ello, definiremos previamente algunos términos.

1.2.1 Definición.

Sea un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, ρ). Diremos que *una función f de X en Y es acotada si el conjunto $f(X) \subset Y$ es acotado*, es decir existe un número real $M > 0$ tal que $\rho(f(x), f(x')) \leq M$ para todo $x, x' \in X$.

Sea $B(X, (Y, \rho))$ *el conjunto de todas las funciones continuas acotadas* de X en Y. Se define entonces la métrica $\hat{\rho}$ sobre B como sigue:

$$\hat{\rho}(f, g) = sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

como los conjuntos $f(X)$ y $g(X)$ son acotados, $\hat{\rho}(f, g)$ es un número real bien definido, además cumple las condiciones 1-3 de la Definición 1.1.10

Una cuestión importante es saber qué pasa con la topología métrica y la topología compacto-abierta cuando $B(X, (Y, \rho))$ y $C(X, Y)$ coinciden para ello tenemos el siguiente teorema.

1.2.2 Teorema *([En], pág 264).*

Para todo espacio topológico X y cualquier espacio métrico (Y, ρ) tal que $B(X, (Y, \rho)) = C(X, Y)$ la topología sobre $C(X, Y)$ inducida por ρ es más fina que $\mathcal{K}$.□

Para el caso en que X sea compacto, la relación es más fuerte entre las dos topologías, como se establece en el siguiente resultado.

1.2.3 Teorema.

Para un espacio métrico Y, todo espacio compacto X y cualquier métrica ρ sobre el espacio Y, la topología inducida sobre $C(X,Y)$ por $\hat{\rho}$ coincide con $\mathcal{K}$ y es independiente de la elección de la métrica ρ.

Demostración.

Por el Teorema 1.2.2 sólo basta mostrar que, para toda $f \in C(X,Y)$ y cualquier $r > 0$, existe un conjunto $V \subset C(X,Y)$, abierto con respecto a la topología compacto abierta, tal que

$$f \in V \subset B(f,r) \tag{1.4}$$

La familia $\{U_x\}_{x\in X}$, donde $U_x = f^{-1}(B(f(x),r/4))$, es una cubierta abierta de el espacio compacto X. Por lo tanto existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ tal que

$$X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}. \tag{1.5}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$ sea

$$C_i = \overline{U}_{x_i} = \overline{f^{-1}(B(f(x_i), r/4))} \text{ y } V_i = B(f(x_i), r/3) \tag{1.6}$$

Como los subconjuntos $C_1, C_2, ..., C_n$ de el espacio X son compactos y los subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de el espacio Y son abiertos, el conjunto $V = \bigcap_{i=1}^{n} M(C_i, V_i)$ es abierto respecto a $C_{\mathcal{K}}(X,Y)$. Mostraremos que V

satisface (1.4). Se sigue de (1.6) que $f(C_i) \subset V_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, así que $f \in V$. Consideremos $g \in V$. Por (1.5), (1.6), para cualquier punto $x \in X$ existe un $i \leq n$ tal que $x \in C_i$; claramente $g(x) \in V_i$ y $f(x) \in V_i$. Como el diámetro de $(V_i) \leq 2r/3$, tenemos $\rho(f(x)), g(x)) \leq 2r/3$ y, como x es arbitrario, $\hat{\rho}(f,g) < r$, lo cual concluye la prueba de (1.4) $\square$

Ahora continuaremos con propiedades exclusivas de espacios de funciones.

1.2.4 Definición.

La función Ω de $C(X,Y) \times X$ en Y, definida por $\Omega(f, x) = f(x)$ es llamada la función de evaluación de $C(X,Y)$.

Y en forma más general tenemos:

1.2.5 Definición.

Sean X, Y y Z espacios. Si $\{[\Lambda(f)](z)\}(x) = f(z,x)$, donde f es una función de $C(Z \times X, Y)$, Λ define una correspondencia inyectiva entre los conjuntos $C(Z \times X, Y)$ y $C(Z, C(X,Y))$; esta correspondencia es llamada *función exponencial*

1.2.6 Definición.

Decimos que la *topología sobre $C(X, Y)$ es propia* si para todo espacio Z y toda $f \in C(Z \times X, Y)$, la función $\Lambda(f) \in C(Z, C(X, Y))$

Similarmente, decimos que una *topología sobre $C(X, Y)$ es admisible* si para todo espacio Z y toda $g \in C(Z, C(X,Y))$ la función $\Lambda^{-1}(g)$ pertenece a $C(Z \times X, Y)$
Si topología sobre $C(X, Y)$ es propia y admisible, entonces es llamada una *topología aceptable.*

En la siguiente proposición se da una caracterizacón más de las topologías admisibles

1.2.7 Proposición.

Una topología sobre $C(X, Y)$ es admisible si y sólo si la función evaluación de $C(X, Y)$ es continua.

Demostración.

Si la topología sobre $C(X, Y)$ es admisible, entonces para $Z = C(X, Y)$ y $g = id_{C(X,Y)}$, la función $\Lambda^{-1}(g) : C(X,Y) \times X \to Y$ es continua. Como $\{[\Lambda(\Omega)](f)\}(x) = \Omega(f, x) = f(x)$, es decir, $\Lambda(\Omega) = id_{C(X,Y)}$ se sigue que $\Omega = \Lambda^{-1}(g)$, así que Ω es continua.
Recíprocamente, si la función de evaluación de $C(X, Y)$ es continua, entonces para cada espacio Z y cualquier $g \in C(Z, C(X, Y))$ la función $\Lambda^{-1}(g)$ es continua por que $\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times id_X) : Z \times X \to Y$. De aquí, para cualquier $(z, x) \in Z \times X$ tenemos
$\{[\Lambda(\Omega(g \times id_X))](z)\}(x) = [\Omega(g \times id_X)](z, x) = \Omega((g(z), x)) = [g(z)](x)$
así que $\Lambda(\Omega(g \times id_X)) = g$ y $\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times id_X)$ $\square$

Observación.

Si una topología para $C(X,Y)$ es admisible, entonces cada topología más fina sobre $C(X,Y)$ también es admisible.

1.2.8 Definición.

Una topología para *C(X, Y) es admisible sobre un conjunto* $A \subseteq X$ si y sólo si la función Ω es continua sobre $C(X,Y) \times A$.

Esto no significa que Ω es continua en los puntos de $C(X,Y) \times A$: la condición es que la restricción $\Omega\mid_{C(X,Y)\times A}$ es continua.

En la definición anterior no se pide que A tenga alguna característica en particular, la única condición que se pide es sobre la función de evaluación

1.2.9 Definición.

Una topología para *C(X, Y) es admisible sobre compactos* si y sólo si Ω es continua sobre cada subconjunto compacto K del espacio dominio.

El próximo resultado nos da la relación existente entre un espacio de funciones con la topología compacto-abierta y el mismo espacio con la topología propia

1.2.10 Teorema.

Para cada par X, Y de espacios topológicos la topología compacto-abierta sobre $C(X,Y)$ es propia.

Demostración.

Sea Z un espacio y f una función en $C(Z\times X,Y)$. tomemos un conjunto $M[K,U]\subset C(X,Y)$, donde K es un subconjunto compacto de X y U un subconjunto abierto de Y. De la Definición 1.2 5 se sigue que

$$[\Lambda(f)]^{-1}(M[K,U]) = \{z\in Z : ([\Lambda(f)](z))(x)\in U \text{ para } x\in K\} =$$

$$= \{z\in Z : f(z,x)\in U \text{ para x } \in K\} = \{z\in Z : f(\{z\}\times K)\subset U\}$$
$$= \{z\in Z : \{z\}\times K\subset f^{-1}(U)\}.$$

Del Teorema 1.1.6 se sigue que el último conjunto es abierto Junto Con el hecho que conjuntos de la forma M[K, U] forman una sub-base para $C(X,Y)$, se tiene que $\Lambda(f)\in C(Z,C(X,Y))$.$\square$

También hay resultados que utilizan propiedades de compacidad local con espacio de funciones, como los dos siguientes.

1.2.11 Teorema.

Para cada par de espacios X, Z y cada espacio localmente compacto Y, la composición siguiente $\Sigma : C(X,Y)\times C(Y,Z)\rightarrow C(X,Z)$ con regla de correspondencia $\sum(f,g) = g\circ f$ es continua con respecto a la topología compacto-abierta sobre el espacio de funciones.

Demostración.

Mostraremos que, para un subconjunto compacto $K \subset X$, y un abierto $U \subset Z$, la imagen inversa $\sum^{-1}(M[K,U])$ es abierta. Para cada par $(g,f) \in \sum^{-1}(M[K,U])$ tenemos $gf(K) \subset U$ es decir, $f(K) \subset g^{-1}(U)$. Como el espacio Y es localmente compacto, por el Teorema 1.1.8, existe un conjunto abierto $N \subset Y$ tal que $f(K) \subset N \subset \overline{N} \subset g^{-1}(U)$ y $\overline{N}$ es compacto. de aquí (g,f) esta en $M[\overline{N},U] \times M[K,N] \subset \sum^{-1}(M[K,U])$, lo cual muestra que $\sum^{-1}(M[K,U])$ es abierto.□

Establecemos ahora cómo es la topología compacto-abierta de $C(X,Y)$ cuando X es localmente compacto

1.2.12 Teorema.

Sea un espacio topológico localmente compacto X, entonces para cualquier espacio Y, la topología compacto-abierta sobre $C(X,Y)$ es aceptable

Demostración.

Por el Teorema 1.2.11, la fórmula de la Definición 1.2.4 y la Proposición 1.2.7 se tiene que la topología compacto-abierta sobre $C(X,Y)$ es admisible. Por último se aplica el Teorema 1.2.10.□

La relación entre las topologías admisibles sobre compactos y la topología compacto-abierta se establece a continuación

1.2.13 Teorema.

Cada topología la cual es admisible sobre compactos es más fina que la topología compacto-abierta $\mathcal{K}$. Si X es regular entonces $\mathcal{K}$ es admisible sobre compactos.

Demostración.

Sean τ una topología para $C_{\mathcal{K}}(X,Y)$ admisible sobre subconjuntos compactos de X, U un subconjunto abierto de Y, K un subconjunto compacto de X, y ω una función tal que $\omega(f,x) = f(x)$. Por demostrar que $M[K,U]$ es un τ-abierto, donde $M[K,U] = \{f : f[K] \subset U\}$. El conjunto $V = (C(X,Y) \times K) \cap \omega^{-1}[U]$ es abierto en $C(X,Y) \times K$ porque τ es admisible sobre compactos. Si $f \in M[K,U]$, entonces $\{f\} \times K \subset V$, y como $\{f\} \times K$ es compacto, existe una τ-vecindad N de f tal que $N \times K \subset \omega^{-1}[U]$ (Teorema 1.1.6). Es decir, cada elemento de la τ-vecindad N de f es un elemento de la vecindad compacto-abierta $M[K,U]$. Se sigue que $M[K,U]$ es τ-abierto y la primera afirmación está probada. Para la segunda, supongamos que K es un subconjunto compacto de X, $x \in K$, U es un conjunto abierto en Y y $(f,x) \in \omega^{-1}[U]$. Entonces, como f es continua sobre K, existe un conjunto compacto W el cual es una vecindad de x en K tal que $f[W] \subset U$ (recordemos que X es regular). Entonces $M[W,U] \times W$ es una vecindad de (f,x) en $C(X,Y) \times K$ y está contenida en $\omega^{-1}[U]$. Así K es admisible.□

Cuando los espacios presentan propiedades topológicas especiales, se obtienen propiedades interesantes para los subespacios compactos de funciones.

1.2.14 Teorema *([Ke], pág. 224)*

Sean un espacio regular X, un espacio Hausdorff Y, $K(X,Y)$ la familia de funciones de X en Y que son continuas sobre subconjuntos compactos de X, sean $C_{\mathcal{K}}(X,Y)$ y $C_{\mathcal{P}}(X,Y)$ espacios de funciones continuas de X a Y con la topología compacto-abierta y la topología punto-abierta respectivamente. Entonces una subfamilia S de $K(X,Y)$ es compacta en $C_{\mathcal{K}}(X,Y)$ si y sólo si

1. S es cerrada con respecto $\mathcal{K}$ en $K(X,Y)$.

2. $S[x]$ tiene cerradura compacta para cada elemento $x \in X$, donde $S[x] = \{f(x) : f \in S\}$.

3. La topología punto-abierta $\mathcal{P}$ para $\overline{S}$ en $C_{\mathcal{P}}(X,Y)$ es admisible sobre compactos □

1.2.15 Definición.

La familia $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ con X, Y espacios, se llama *igualmente continua* si para cualquier $x \in X$, cualquier $y \in Y$, toda $f \in \mathcal{F}$ y para toda vecindad U_y de y existe una vecindad V de x y una vecindad W de y tal que $f[V] \subset U$ siempre que $f(x) \in W$

La propiedad de Y de ser regular y de que las subfamilias de $C(X, Y)$ sean igualmente continuas, proveen resultados importantes como los que se mencionan a continuación.

1.2.16 Teorema *([ke], pág. 235).*

Sea $F \subset C(X, Y)$ una familia de funciones igualmente continuas de un espacio X a un espacio regular Y. sea $C_{\mathcal{P}}(X, Y)$ como siempre. Entonces la $\overline{F}$ en $C_{\mathcal{P}}(X, Y)$ es igualmente continua y la topología punto-abierta $\mathcal{P}$ es admisible sobre $\overline{F}$ □

1.2.17 Teorema *([ke], pág 236).*

Sean $F \subset C(X, Y)$ con X un espacio, Y un espacio regular, compacto en alguna topología admisible. entonces F es igualmente continua.□

El siguiente teorema hace mención nuevamente el concepto de compacidad local y la regularidad en X, obteniéndose el teorema que sigue

1.2.18 Teorema (Ascoli).

Sean $C(X, Y)$ con X un espacio regular localmente compacto, Y un espacio regular, $C_K(X, Y)$ como siempre, entonces un subconjunto S de $C_K(X, Y)$ es compacto si y sólo si

1. S es igualmente continua

2. S es cerrado en $C_K(X, Y)$

3. Para toda x en X, $\overline{S[x]}$ es compacta en Y. donde
   $S[x] = \{f(x) : f \in S\}$.

Demostración.

Si S es compacto en $C_{\mathcal{K}}(X, Y)$. (1). (2) y (3) se siguen de los Teoremas 1.2.14 y 1.2.17. Si S satisface (1),(2) y (3). entonces $\overline{S}$ en $C_{\mathcal{P}}(X, Y)$ es una familia igualmente continua sobre la cual $\mathcal{P}$ es admisible. por el Teorema 1.2.16 La compacidad se sigue del Teorema 1.2.14 □

1.3 Uniformidades.

Una relación en un conjunto X es un conjunto de pares ordenados en $X \times X$ que satisfacen una condición dada. Si U es una relación, también lo es la relación U^{-1} que es el conjunto de todos los pares (x, y) tal que $(y. x) \in U$. Así la operación de tomar inversos es involutiva en el sentido que $(U^{-1})^{-1}$ es siempre U.

En el caso que $U = U^{-1}$, se dice que U es una relación simétrica o simplemente que U es simétrica. Además si U y V son relaciones, entonces la composición $U \circ V$ es el conjunto de todos los pares $(x. z)$ en $X \times X$ tal que para algún y en X se cumple que $(x, y) \in V$ y $(y, z) \in U$.

La composición es asociativa como sigue $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$. y siempre se cumple que $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$.

También el conjunto de todos los pares (x, x) para $x \in X$ es llamado la *relación identidad*, ó la diagonal en $X \times X$, y se denota por $\Delta(X)$ o simplemente Δ.

Para cada subconjunto A de X y cada relación U en X. el conjunto $U[A]$ esta definido por $\{y \in X . (x, y) \in U$ para algún x en $A\}$. en el caso que A este constituido por un sólo punto x de X. entonces $U[x]$ es $U[\{x\}]$. Para cada U, V y cada A se cumple que $(U \circ V)[A] = U[V[A]]$ Ahora se escribira formalmente lo que es una uniformidad. así como lo que es un espacio uniforme y posteriormente también se darán algunas de sus características y se relacionarán esta nueva clase de espacios con los espacios topológicos.

1.3.1 Definición.

Una *uniformidad* para un conjunto X es una familia no vacía $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ tal que

1. Cada miembro de $\mathcal{U}$ contiene la diagonal Δ
2. si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$
3. si $U \in \mathcal{U}$, entonces $V \circ V \subset U$ para alguna $V \in \mathcal{U}$
4. si U y V son miembros de $\mathcal{U}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$
5. si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subset V \subset X \times X$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

El par $(X, \mathcal{U})$ es un *espacio uniforme*

Ejemplos

1 Sea Y un espacio métrico, δ una métrica para Y, para cada $\varepsilon > 0$ sea $V_\varepsilon = \{(x, y) \in Y \times Y \mid \delta(x, y) < \varepsilon\}$; la familia $\mathcal{V} = \{V_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ es una uniformidad en Y, entonces el par $(Y, \mathcal{V})$ es un espacio uniforme

2 Sea X un espacio normal, $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas abiertas localmente finitas de X, entonces $\mathcal{U}$ es una uniformidad en X y $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme

La siguiente definición muestra la relación entre espacios uniformes con espacios topológicos.

1.3.2 Definición.

Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, la topología τ de la uniformidad $\mathcal{U}$, o la *topología uniforme* es la familia de todos los subconjuntos T de X tal que para cada x en T existe U en $\mathcal{U}$ tal que $U[x] \subset T$.

Una cuestión importante en las uniformidades es el concepto de base para la uniformidad que se enuncia a continuación.

1.3.3 Definición.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de un conjunto X a un espacio uniforme $(Y,\mathcal{V})$. Para cada miembro V de $\mathcal{V}$ sea $W(V)$ el conjunto de todos los pares (f,g) en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ tal que $(f(x),g(x)) \in V$ para cada x en X. Así $W(V)[f]$ es el conjunto de todas las g tales que $g(x) \in V[f(x)]$ para todo x en X. Es fácil ver que

$W(V^{-1}) = (W(V))^{-1}, W(U \cap V) = W(U) \cap W(V)$, y

$W(U \circ V) \supset W(U) \circ W(V)$

para todos los miembros U y V de $\mathcal{V}$. Consecuentemente la familia de todos los conjuntos $W(V)$ para V en $\mathcal{V}$ es una *base para una uniformidad de* $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$

En los espacios uniformes, la continuidad de funciones se establece en la definicione siguiente, y se puede apreciar que es muy similar a la continuidad entre dos espacios topológicos.

1.3.4 Definición.

Si f es una función de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ con valores en otro espacio uniforme $(Y, \mathcal{V})$, entonces f es llamada *uniformemente continua* relativa a las uniformidades $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ si y sólo si para cada V en $\mathcal{V}$ el conjunto $\{(x\ y) \mid (f(x), f(y)) \in V\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$

Dado que el concepto anterior es muy semejante al establecido entre espacios, entonces uno se puede preguntar ¿Cómo es la continuidad entre un espacio topológico X y un espacio uniforme Y? Afortunadamente la respuesta se encuentra en la siguiente

1.3.5 Definición.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones de un espacio topológico X en un espacio uniforme $(Y\ \mathcal{V})$. La familia $\mathcal{F}$ es *equicontinua en un punto* $x \in X$ si y sólo si para cada elemento V de $\mathcal{V}$ existe una vecindad U de x tal que $f[U] \subset V[f(x)]$ para todo elemento $f \in \mathcal{F}$

1.3.6 Definición.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de un espacio X a un espacio uniforme $(Y, \mathcal{V})$ La uniformidad de convergencia uniforme sobre compactos, es la uniformidad $\mathcal{U}\mid_{\tilde{K}}$ donde $\tilde{K}$ es la familia de todos los subconjuntos compactos de X. La topología $U\mid_{\mathcal{K}}$ es algunas veces llamada la *topología de convergencia uniforme sobre compactos.*

El resultado que se menciona a continuación relaciona los espacios topológicos con los espacios uniformes

1.3.7 Teorema *([ke], pág. 230).*

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de un espacio topológico X a un espacio uniforme $(Y, \mathcal{V})$. Entonces la topología de convergencia uniforme sobre compactos es $\mathcal{K}$.□

Finalizamos este capítulo con un teorema en el cual la topología punto-abierta coincide con la topología de convergencia uniforme sobre compactos y de aquí con la topología compacto-abierta.

1.3.8 Teorema.

Si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua, entonces la topología $\mathcal{P}$ es admisible y de aquí coincide con la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

Demostración.

Para probar que la función de $\mathcal{F} \times X$ en Y es continua en (f, x) sea V un elemento de la uniformidad de Y y sea U una vecindad de x tal que $g[U] \subset V[g(x)]$ para toda g en $\mathcal{F}$. Si g es un elemento de

$\{h : h(x) \in V[f(x)]\}$ vecindad de f, $y \in U$, entonces $g(y) \in V[g(x)]$ Consecuentemente $g(y) \in V \circ V[f(x)]$, y de aquí es admisible. Cada topología admisible es más fina que $\mathcal{K}$ por el Teorema 1.2.13 y $\mathcal{K}$ coincide con la de convergencia uniforme sobre compactos por el Teorema 1.3.7.$\square$

Capítulo 2

Grupos Topológicos de Transformaciones.

Este capítulo trata una nueva clase de espacios los cuales se definen a continuación, así como muchas de sus propiedades que seran de utilidad para el resto de este trabajo, en especial lo referente a grupos topológicos y los G-espacios que es en donde se basa éste trabajo.

2.1 Acciones de Grupos Topológicos.

Esta sección también es un poco extensa y es la base de la cual parten las siguientes secciones, sin restarle importancia al capítulo anterior aquí está la introducción a los siguientes temas.

2.1.1 Definición.

Un *grupo topológico* G es una terna $(G, *, \tau)$, donde $(G, *)$ es un grupo (G, τ) un espacio topológico y $(G, *, \tau)$ satisface
La función $i : G \to G$ dada por $i(x) = x^{-1}$ es continua sobre G y
$\mu : G \times G \to G$ con $\mu(x, y) = x * y$ es continua sobre $G \times G$

Ejemplos

1. Sea un grupo arbitrario G con la topología discreta, entonces G es un grupo topológico.

2. El conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual y la operación de suma usual, es un grupo topológico.

Una parte que es bastante útil en este trabajo son las vecindades simétricas del elemento unidad e de G, es decir aquellas vecindades que satisfacen $U = U^{-1}$ y siempre es posible elegir una por lo siguiente. Si U es una vecindad de e en G, por la continuidad de i se tiene que $i(U) = U^{-1}$ es también una vecindad de e en G, así $U' = U \bigcap U^{-1}$ es una vecindad simétrica de e en G

2.1.2 Definición.

Sea G un grupo y X un conjunto. Por una *G-acción* mencionaremos la función $\phi : G \times X \to X$ tal que

1. $\phi(e, x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G

2. $\phi(g_2, \phi(g_1, x)) = \phi(g_2 * g_1, x)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.

Aquí X es llamado un *G-conjunto*

Cuando el conjunto X tiene una topología y la acción es continua, entonces se obtiene una nueva clase de espacios los cuales definimos a continuación.

2.1.3 Definición.

Por un *grupo topológico de transformaciones ó un G-espacio* mencionaremos a la terna (G, X, ϕ), donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y $\phi : G \times X \rightarrow X$ es una función continua que satisface (1) y (2) de la definición anterior, es decir una acción continua

Ejemplos

1. Cualquier grupo topológico G que actua sobre sí mismo con la operación del grupo,es un G-espacio.

2. Sea X un espacio topológico y $\mathbb{R}$ el grupo topológico de números reales. Entonces la $\mathbb{R}-$acción sobre X es llamado un sistema dinámico

Los G-espacios forman una nueva categoria llamada $G-TOP$ o TOP^G, en la cual los morfismos, llamados funciones equivariantes, se definen de la siguiente manera.

2.1.4 Definición.

Sea G un grupo topológico que actúa en los espacios topológicos X e Y Se dice que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es *equivariante* cuando $f(gx) = gf(x)$ para toda x en X y toda g en G.

Esto es las funciones equivariantes son aquellas que conmutan con la acción En el caso cuando la acción es trivial, estas funciones se llaman *invariantes*. Esto significa que $f(gx) = f(x)$ para toda $g \in G$ y $x \in X$

Las siguientes definiciones involucran tanto grupos topológicos, como espacio de funciones, sobre los cuales se define una acción que será utilizada posteriormente en resultados futuros.

2.1.5 Definición.

Sea G un grupo topológico. X un G-espacio arbitrario. y sea Y un espacio topológico. Definimos la acción ρ $G \times C_K(X,Y) \to C_K(X,Y)$ del grupo G en el espacio $C_K(X,Y)$ (espacio de todas las funciones continuas de X en Y) de acuerdo a la siguiente regla. $\rho(g,f) = gf$ donde

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x) \qquad (2.1)$$

donde $g \in G$, $x \in X$ y $f \in C_K(X,Y)$.

2.1.6 Definición.

En el caso que $X = G$ y el grupo G actúe sobre X de acuerdo a la siguiente regla $g * x = x \circ g^{-1}$, $g, x \in G$. la acción (2 1) del grupo G sobre $C(G\ Y)$ tiene la siguiente forma.

$$(gf)(x) = f(xg);\, g, x \in G.\ f \in C(G,Y). \qquad (2.2)$$

2.1.7 Definición.

Sea G un grupo topológico, $\mathbb{R}$ la recta real. Por un *G-compacto convexo* mencionaremos un subespacio compacto convexo $K \subset C(G, \mathbb{R})$ invariante con respecto a la acción (2.2) tal que la restricción de la acción sobre $G \times K$ es continua.

Dado que el presente trabajo se refiere en gran medida a los G-espacios uniformes, la noción de una función G-uniforme juega un papel muy importante de aquí en adelante.

Otra definición que será importante en el transcurso de la tesis es la de espacio G-Tychonov, pero antes de definirla nos hace falta otro concepto que a continuación se enuncia.

2.1.8 Definición.

Sea G un grupo topológico arbitrario, Z un G-conjunto y $(T, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Una función $f : Z \to T$ se llama *G-uniforme* si para toda U en $\mathcal{U}$, existe una vecindad O de e contenida en G tal que $(f(gz), f(z))$ está en U para toda $g \in O$, y $z \in Z$.

2.1.9 Definición.

Un G-espacio X se dice que es *G-Tychonov* si para cualquier conjunto cerrado $A \subset X$ y cualquier punto $x \in X \setminus A$ existe una función G-uniforme $f : X \to [0, 1]$ tal que f(x)=0 y $A \subset f^{-1}(1)$.

Si un G-espacio X es G-Tychonov entonces X es de Tychonov. Jan De Vries [DV2] probó que si G es localmente compacto entonces cualquier G-espacio de Tychonov es G-Tychonov y son precisamente los que poseen una G-compactación. Para una nueva prueba de lo anterior se puede consultar en [An1].

La siguiente definición nos permitirá enunciar el lema 2.1.11.

2.1.10 Definición.

Sea X un espacio topológico $\{Y_i : i \in I\}$ una familia de espacios, sea $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i;$ con $i \in I\}$ una familia de funciones continuas Decimos que $\mathcal{F}$ *separa puntos de conjuntos cerrados de* X si para cada cerrado A en X y cada punto $p \in X \setminus A$, existe una $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(p) \notin \overline{f_i(A)}$

Esta sección la finalizaremos con un lema del cual también se presenta su demostración.

2.1.11 Lema.

Sean X y Y_λ, espacios Tychonov con $\lambda \in I$ (I un conjunto de indices) y sea el peso de X, $w(X) = \tau$ infinito Sea $\mathcal{F} = \{f_\lambda : X \to Y_\lambda : \lambda \in I\}$ una familia de funciones continuas. Si $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados de X, entonces existe una subfamilia $K \subset \mathcal{F}$ de cardinalidad $Card K = \tau$ la cual también separa puntos y conjuntos cerrados de X

Demostración

Sea B una base de abiertos de X de cardinalidad τ. Considere la familia D de todos los pares $(U_1, U_2) \in B \times B$, tal que $\overline{U_1} \subset U_2$. Entonces existe una función $f_\lambda \in \mathcal{F}$ cumpliendo

$$\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \bigcap \overline{f_\lambda(X \setminus U_2)} = \emptyset \tag{2.3}$$

Claramente, $CardD = \tau$. Elijamos para cada par $(U_1, U_2) \in D$ una función $f_\lambda \in \mathcal{F}$ que cumple con (2.3), sea K la familia de todas las funciones obtenidas de esta forma. Así, $CardK \leq CardD = \tau$ Para completar la prueba, es suficiente mostrar que K separa puntos y conjuntos cerrados de X. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado y sea $x \in X \setminus A$. Siendo B una base, existe un $U_2 \in B$ tal que $x \in U_2 \subset X \setminus A$ Como $\mathcal{F}$ separa puntos y subconjuntos cerrados de X, existe una función $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, $f_\lambda \in \mathcal{F}$ tal que

$$f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda X \setminus U_2)} \tag{2.4}$$

Siendo X y Y_λ espacios Tychonov y f_λ una función continua, (2.4) implica que existe un $U_1 \in B$ tal que $x \in U_1, \overline{U_1} \subset U_2$ y (2.3) se cumple. Consecuentemente, el par (U_1, U_2) pertenece a D. De aquí

$$\overline{f(\overline{U_1})} \cap \overline{f(X \setminus U_2)} = \emptyset \tag{2.5}$$

donde $f \in \mathcal{F}$ es la función correspondiente al par (U_1, U_2). Siendo $f \in K$ y siendo (2.5) implica $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U_2)}$ para $x \in U_1$. Esto completa la prueba.□

2.2 Acciones de un Grupo Topológico en C_K(X, Y).

En esta parte G será un grupo topológico. X un G-espacio. Y un espacio topológico y $C_K(X,Y)$ el espacio de funciones continuas de X en Y con la topología compacto-abierta. Consideremos la acción ϕ de G en $C_K(X,Y)$ definida por la fórmula (2.1), es decir

$$\phi : G \times C(X,Y) \to C(X,Y) \tag{2.6}$$

$$(g,f) \longrightarrow gf; \qquad (gf)(x) = f(g^{-1}x).$$

2.2.1 Teorema *De Vries [DV2].*

En el caso anterior si G es localmente compacto, entonces la acción ϕ es continua

Demostración.

Sea $g_o \in G$, $f_o \in C_K(X,Y)$, K un compacto en X, U un abierto en Y tal que $M[K,U]$ es un abierto de la subbase de la topología de $C_K(X,Y)$ que contiene a g_of_o, es decir $(g_of_o)(K) \subset U$. Sea $x \in K$, entonces $(g_of_o)(x) = f_o(g_o^{-1}x) \in U$. Por la continuidad de f_o en el punto $g_o^{-1}x$ existe un abierto $W_x \subset X$ tal que $g_o^{-1}x \in W_x$ y $f_o(W_x) \subset U$. Ahora por la continuidad de la acción G en X, para cada $x \in K$, existen abiertos $G \supset O_x \ni g_o$ y $X \supset S_x \ni x$ tal que $O_x^{-1}S_x \subset W_x$. Así por ser G localmente compacto existe $A_x \ni g_o$, tal que $\overline{A_x} \subseteq O_x$ y $\overline{A_x}$ es compacto. Ahora la familia $\{S_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K y por ser éste compacto, existe una subfamilia finita $\{S_{x_1}, \ldots, S_{x_n}\}$

de $\{S_x \mid x \in K\}$ que cubre a K. Para cada S_{x_i} con $1 \leq i \leq p$, existen sus correspondientes O_{x_i} y los A_{x_i}. Ahora definimos $A = \bigcap_{i=1}^{i=p} A_{x_i}$. Entonces A es una vecindad de g_oy $\overline{A} \subset \bigcap_{i=1}^{i=p} \overline{A_{x_i}}$. Entonces $\overline{A}$ es compacto. Por lo tanto $T = \overline{A^{-1}}K$ es un compacto en X. Así $f_o \in M[T, U]$, porque para toda $t \in T$ existe $1 \leq i \leq p$ tal que $t \in \overline{A_{x_i}^{-1}} S_{x_i} \subset O_{x_i}^{-1} S_{x_i} \subset W_{x_i}$, así tenemos $Zf_o(T) \in U$. Afirmamos que para todo $g \in A$ y para todo $\phi \in M[T, U]$ así se cumple $g\phi \in M[K, U]$. En efecto, si $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{i=p} S_{x_i}$ así existe $j(1 \leq j \leq p)$ tal que $x \in S_{x_j}$ y $g \in A_{x_j}$ así $g^{-1}x \in A^{-1}S_{x_j} \subset \overline{A^{-1}}K = T$ con lo cual $(g\phi)(x) = \phi(g^{-1}x) \in \phi(T) \subset U$. así $g\phi \in M[K, U]$ con esto la demostración está terminada.□

Otro caso en el que la acción (2.1) es continua, es cuando se pide que X posea compacidad local como lo establece el siguiente resulatado

2.2.2 Teorema.

Sea G un grupo topológico cualquiera y sea X un G-espacio localmente compacto, entonces la acción ϕ definida en (2.6) es continua.

Demostración.

Sean $g_o \in G, f_o \in C_K(X, Y)$, K un compacto en X, y U un abierto en Y tal que $M[K, U]$ es un abierto de la subbase de la topología de

$C_K(X,Y)$ que contiene a g_of_o, es decir $(g_of_o)(K) \subset U$. Sea $x \in K$ así $(g_of_o)(x) = f_o(g_o^{-1}x) \in U$. Por la continuidad de f_o en el punto $g_o^{-1}x$ existe un abierto W_x en X con $g_o^{-1}x \in W_x$ tal que $f_o(W_x) \subset U$. Por ser X localmente compacto para cada $x \in K$ existe una vecindad D_x de $g_o^{-1}x$ tal que $\overline{D_x} \subset W_x$ y $\overline{D_x}$ es compacto. Por la continuidad de la acción de G en X existen vecindades $O_x \ni g_o$ y $S_x \ni x$ tales que satisfacen $O_x^{-1}S_x \subset D_x$. Con lo cual $\{S_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, y por ser éste compacto existe una subcubierta finita

$\{S_{x_1}, \ldots, S_{x_p}\}$ de $\{S_x : x \in K\}$, que cubre a K. Sea $O = \bigcap_{i=1}^{i=p} O_{x_i}$. Así O

es una vecindad de g_o. Denotamos $D = \bigcup_{i=1}^{i=p} D_{x_i}$, entonces $\overline{D} = \bigcup_{i=1}^{i=p} \overline{D_{x_i}}$

es compacto, de aquí se tiene que $M[\overline{D}, U]$ es una vecindad de f_o. Como $f_o(\overline{D_{x_i}}) \subset f_o(W_{x_i}) \subset U$, concluimos que $f_o(\overline{D}) \subset U$. Luego afirmamos que tiene lugar la siguiente inclusión $(O, \Psi M[\overline{D}, U]) \subset M[K, U]$. En efecto, sean $g \in O$ y $\phi \in M[\overline{D}, U]$ y sea $x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{i=p} S_{x_i}$. Entonces existe $1 \leq i \leq p$ tal que $x \in S_{x_i}$ y $g \in O_{x_i}$. Así $g^{-1}x \in O_{x_i}^{-1}S_{x_i} \subseteq D_i \subseteq \overline{D}$ con lo cual $(g\phi)(x) = \phi(g^{-1}x) \in \phi(\overline{D}) \subset U$ y así $g\phi \in M[K, U]$, lo cual demuestra el teorema □

La acción anterior en general no es continua si no cuenta con restricciones de compacidad local como se pidio en los resultados anteriores Ahora mostraremos en un ejemplo que la accion (2 6) puede ser discontinua.

Ejemplo *(R. Fox [Fo]).*

Sea $G = Q$ el grupo aditivo de números racionales. Entonces la función de evaluación $\omega : Q \times C(Q, I) \to I$ con $\omega(x, f) = f(x)$ es discontinua (ver [Fo], pág 419).

Ahora afirmamos que la acción (2.6) $\phi : Q \times C(Q, I) \to C(Q, I)$ también es discontinua. En efecto, supongamos que ϕ es continua. Sea $\beta : C(Q, I) \to I$ la función definida por la fórmula $\beta(f) = f(0)$. Entonces la composición $\alpha = \beta\phi : Q \times C(Q, I) \to I$ también es continua. Pero $\alpha(x, f) = (\beta\phi)(x, f) = \beta[\phi(x, f)] = \beta(xf) = (xf)(0) = f(x)$ para todo $x \in Q$, $f \in C(Q, I)$. Por lo tanto $\alpha = \omega$. Pero ω no es continua Esta contradicción muestra que en realidad la acción ϕ es discontinua

2.3 Acciones de un Grupo Topológico G en C_U(X, Y).

Sean Z un G-conjunto, y $(T,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, denotaremos por $\mathcal{A}(Z,T)$ el conjunto de todas las funciones $f : Z \to T$, G-uniformes. El siguiente teorema generaliza un resultado de [An2], en donde nada más el caso $T = \mathbb{R}$ esta considerado.

2.3.1 Teorema.

Sea G un grupo topológico cualquiera, Z un G-conjunto y $(T,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces la acción $\phi : G \times \mathcal{A}(Z,T) \to \mathcal{A}(Z,T)$ definida por $(g,f) \longrightarrow gf$ donde $(gf)(z) = f(g^{-1}z)$ para todo $z \in Z$, es:

1. continua,

2. uniformemente equicontinua

Demostración.

Primero verifiquemos que ϕ está bien definida, es decir que $gf \in \mathcal{A}(Z,T)$ para todo $g \in G, f \in \mathcal{A}(Z,T)$. Para ello, tomemos una base de uniformidad de cualquiera de sus elementos simétricos $v \in \mathcal{U}$, sea

$$\mathcal{A}_v = \{(f,\Phi) \in \mathcal{A}(Z,T) \times \mathcal{A}(Z,T) \mid (f(z),\Phi(z)) \in V, z \in Z\}$$

donde $V \in \mathcal{U}$ es algun elemento simétrico. Como $f \in \mathcal{A}(Z,T)$, existe una vecindad $O_1 \subseteq G$ de la identidad tal que $(f(hz), f(z)) \in V$ para todo $h \in O_1, z \in Z$. Pongamos $O_2 = gO_1^{-1}g^{-1}$. Es claro que O_2

también es una vecindad de la identidad de G. Afirmamos lo siguiente $((gf)(tz), (gf)(z)) \in V$ para todo $t \in O_2$, $z \in Z$. Para ello, sean $x = g^{-1}tz$ y $h = g^{-1}t^{-1}g$. Entonces $hx = g^t g g t = g^{-1}z$ y $h \in O_1$ si $t \in O_2$. Así $((gf)(tz), (gf)(z)) = (f(g^{-1}tz), f(g^{-1}z)) = (f(x), f(hx)) \in V^{-1} = V$. Por lo tanto gf es G-uniforme, es decir $gf \in \mathcal{A}(Z, T)$.

Verifiquemos la veracidad de la propiedad 2), para ello

Sea $\mathcal{A}_V = \{(f, \Phi) \in \mathcal{A}(Z,T) \times \mathcal{A}(Z,T) \mid (f(z), \Phi(z)) \in V, z \in Z\}$ cualquier elemento de la base de la uniformidad de $\mathcal{A}$(Z, T). Es claro que $(gf, g\Phi) \in \mathcal{A}_V$ para todo $(f, \Phi) \in \mathcal{A}_V$. Esto significa que la acción ϕ es uniformemente equicontinua.

Para la propiedad 1). Sea cualquier $(g_o, f_o) \in G \times \mathcal{A}(Z, T)$ y $V \in \mathcal{U}$. Basta encontrar una vecindad $O_{g_o} \subseteq G$ de g_o y un elemento $W \in \mathcal{U}$ tales que si $g \in O_{g_o}$ y $(f(z), f_o(z)) \in W$ para todo $z \in Z$ entonces $((gf)(z), (g_o f_o)(z)) \in V$. Ahora bien, sea $V_1 \in \mathcal{U}$ un elemento tal que $V_1 \circ V_1 \subseteq V$. Por la G-uniformidad de f_o elegimos una vecindad O_1 de la identidad de G tal que $(f_o(hz), f_o(z)) \in V_1$ para todo $h \in O_1$, $z \in Z$. Definimos $O_{g_o} = g_o O_1^{-1}$. Es claro que O_{g_o} es una vecindad de g_o en G. Así $((gf_o)(z), (g_o f_o)(z)) \in V_1$ para todo $g \in O_{g_o}$, $z \in Z$, porque, si $y = g_o^{-1}z, z \in Z$ y $h = g^{-1}g_o, g \in G$ entonces $((gf_o)(z), (g_o f_o)(z)) = (f_o(g^{-1}z), f_o(g_o^{-1}z)) = (f_o(hg_o^{-1}z), (f_o(g_o^{-1}z)) = (f_o(hy), (f_o(y))$. Como $h \in O_1$ para $g \in O_{g_o}, y \in Z$, tenemos $(f_o(hy), f_o(y)) \in V_1$. Pongamos $W = V_1$. Si $(f(z), f_o(z)) \in W$ para todo $z \in Z$, por la propiedad (2) sigue que $((gf)(z), (gf_o)(z)) \in W$ para todo $g \in G, z \in Z$. Por lo tanto

Capítulo 3

Encajes Equivariantes y Grupos $\omega-$Acotados.

En este capítulo se prueba que para cualquier grupo ω-acotado G, todo espacio G-Tychonov admite un encaje equivariante en un producto de G-compactos convexos metrizables dotados con acciones afines al grupo G. Nuevas características de grupos ω-acotados son presentadas. Sobre un grupo topológico consideramos su uniformidad derecha.

Veremos que el Teorema 3.5 dara nuevos criterios para ω-acotados y la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) confirmara un resultado de Pestov(Teorema 3.2) (ver [Pe]) El Teorema 3.7 difiere de los resultados existentes sobre encajes equivariantes y linealización de acciones (ver [DV1], [An2] y [AS]) que no requieren la condición de compacidad local del grupo G. En este capítulo por un grupo y un espacio mencionaremos un grupo topológico de Hausdorff y un espacio Tychonov. Para dos espacios X y Y denotamos por $C_{\mathcal{K}}(X, Y)$ el espacio de todas las funciones continuas $f : X \to Y$ dotadas con la topología compacto-abierta $\mathcal{K}$. Por brevedad en lugar de $C_{\mathcal{K}}(X, [0,1])$ escribiremos $C_{\mathcal{K}}(X)$. Por un compacto X denotaremos Aut(X) el grupo de todos los homeomorfismos del espacio X sobre sí mismo dotado con la topología inducida por $C_{\mathcal{K}}(X, X)$.

Comenzaremos con algunos conceptos previos.

3.1 Definición.

Un grupo G *se llama totalmente acotado* si para cualquier vecindad U de la unidad e de G, existe un número finito $g_1 \ldots g_n$ de elementos de G tales que $G = g_1U_e \cup ... \cup g_nU_e$ es decir G esta cubierto por un número finito de traslaciones de U_e, de aquí se sigue que particularmente cualquier compacto es totalmente acotado.

Ejemplo

1. Todo grupo compacto es totalmente acotado.

2. Todo grupo finito estotalmente acotado.

En el siguiente resultado se dan características para este conjunto

3.2 Teorema *(Weil)*.

G es totalmente acotado si y sólo si puede ser encajado como subgrupo topológico en un grupo compacto.□

3.3 Definición.

Un *grupo ω-acotado* es un grupo topológico que puede ser cubierto por un número contable de translaciones de cualquier vecindad de su elemento identidad.

De la definición anterior se sigue que cualquier grupo de Lindelof es ω-acotado. Particularmente cualquier grupo separable y metrizable lo es también.

Como demostró I. Guran.

3.4 Teorema *([Gu]).*

Un grupo topologico G es ω-acotado si y sólo si puede ser encajado como subgrupo topológico en un producto $\prod_{i\in I}\phi_i$ donde cada ϕ_i es un grupo separable metrizable.□

3.5 Teorema *([Pe]).*

Un grupo topológico G es ω-acotado si y sólo si existe un encaje de grupos topológicos $j : G \hookrightarrow L$ donde el grupo topológico L, posee un subespacio denso σ-compacto □

Después del siguiente lema se da una característica más sobre un grupo ω-acotado.

3.6 Lema.

Si el espacio X contiene un subconjunto denso σ-compacto y el espacio Y es metrizable, entonces cualquier compacto $K \subset C_K(X,Y)$ es metrizable.

Demostración.

Sea $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}$, donde cada X_n es un subconjunto compacto de X. Consideremos un subconjunto compacto arbitrario $K \subset C_K(X,Y)$. Para cada $n \in N$ denotamos por $p_n : K \to C_K(X_n, Y)$ la función restricción bajo la cual para cada $f \in K$ se tiene $p_n(f) = f_n$, la que corresponde a la restricción $f_n = f \mid X_n$. Considere el producto diagonal $p = \Delta_{n=1}^{\infty} p_n : K \to \prod_{n=1}^{\infty} C_K(X_n, Y)$; $p_n(f) = f_n$. Como cada p_n es continua, p también lo es. Por otro lado, si $p(f) = p(g)$ para $f, g \in K$, entonces f y g coinciden en el subconjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, como $p_n(f) = p_n(g)$. Esto implica $\{f_n\} = \{g_n\}$ para toda $n \in N$ y, consecuentemente por su continuidad, coinciden sobre el espacio entero X. Es decir, $f = g$. De aquí, en vista de la compacidad de K, concluimos que p es un encaje homeomorfo. Más aun, notamos que, en virtud de la compacidad de X_n, el espacio $C_K(X_n, Y)$ es metrizable (ver Teorema 1.2.3). Se sigue del Teorema 1.1.14 que el producto contable $\prod_{n=1}^{\infty} C_K(X_n, Y)$ es metrizable, y de aquí el compacto K es metrizable. $\square$

3.7 Teorema.

Para un grupo topológico G, son equivalentes

1. G es un grupo ω-acotado.

2. G admite un encaje uniforme en un espacio uniforme X que posee un subespacio denso σ-compacto.

3. Cualquier subconjunto compacto uniformemente equicontinuo $K \subset C_K(G)$, es metrizable.

Demostración.

La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) sigue del criterio de Pestov (ver Teorema 3.5) para grupos ω-acotados, de donde se tiene que cualquier grupo ω- acotado posee un encaje isomorfo en un grupo que contiene un subespacio denso σ-compacto.

Ahora probamos la implicación (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}$ donde cada subconjunto X_n es compacto. Denotamos por K_d el conjunto K dotado con uniformidad discreta y definimos la función $\mathcal{F} : K_d \times Y \to [0, 1]$, por medio de la fórmula $\mathcal{F}(f, y) = f(y)$; $(f, y) \in K \times Y$. Puede mostrarse (ver [Is], pág. 43), que la equicontinuidad uniforme de K es exactamente equivalente a la continuidad uniforme de la función $\mathcal{F}$. Siendo el intervalo $[0, 1]$ un espacio uniforme inyectivo ([Is], pág. 40] (o un extensor absoluto uniforme), la función $\mathcal{F}$ admite una extensión uniformemente continua $\Phi : K_d \times X \to [0, 1]$. Para cada $f \in K$ aplicamos la fórmula $\phi_f(x) = \Phi(f, x)$, $x \in X$ para definir una función uniformemente continua $\phi_f : X \to [0, 1]$ y así obtener un subconjunto uniformemente equicontinuo $M = \{\phi_f \colon f \in K\}$ del espacio $C_{\mathcal{K}}(X)$. Consideremos su cerradura $\overline{M}$ en el espacio $C_{\mathcal{K}}(X)$. Por el Teorema (1.2.18) de Ascoli, el conjunto $\overline{M}$ es compacto, y, de acuerdo al Lema 3.6, es metrizable. Tomemos la función restricción continua $p : C_{\mathcal{K}}(X) \to C_{\mathcal{K}}(Y)$, es decir $p(f) = f\mid_Y$ para todo $f \in C_{\mathcal{K}}(X)$. Como el peso de un compacto no se incrementa bajo funciones continuas, el compacto $p(\overline{M})$ también tiene una base contable y por ello es metrizable. Sin embargo, por construcción, tenemos $p(M) = K$. Consecuentemente, $K \subset p(\overline{M})$, y de aquí K es un espacio metrizable. Esto completa la prueba de la implicación (2) $\Rightarrow$ (3).

Ahora probaremos la implicación (3) $\Rightarrow$ (1). Sea U una vecindad arbitraria del elemento identidad del grupo G. Sin perdida de generalidad, se puede suponer que la vecindad U es simétrica. Tomamos una función uniformemente continua $f : G \to [0, 1]$ tal que $f(e) = 1$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in G \setminus U$. Denotamos por K la cerradura de la órbita $G(f)$ en $C_{\mathcal{K}}(G)$ (con respecto a la acción definida en (2.2)). La continuidad uniforme de f inmediatamente implica la equicontinuidad uniforme de la órbita $G(f)$ y de aquí también de su cerradura K, la cual, por el Teorema (1.2.18) de Ascoli es compacta. De acuerdo a la condición (3), el compacto K es metrizable, y, en particular la órbita $G(f) = \{gf : g \in G\}$ es separable. Sea $\{g_1 f, g_2 f, \ldots, g_n f, \ldots\}$ un subconjunto denso contable de la órbita $G(f)$. Probaremos que para cualquier

$g \in G$ existe un número natural i tal que $(g_i f)(g^{-1}) \neq 0$. Supongamos lo contrario, entonces $(g_i f)(h^{-1}) = 0$ para algun $h \in G$ fijo y todos los g_i, con $i = 1, 2, \ldots$ Siendo el conjunto $\{g_1 f, \ldots, g_n f, \ldots\}$ denso en $G(f)$, se sigue que $(gf)(h^{-1}) = 0$ para cualquier $g \in G$. En particular, tenemos $f(e) = (hf)(h^{-1}) = 0$, lo cual contradice la condición $f(e) = 1$. Así para cualquier $g \in G$ existe un número natural i tal que $(g_i f)(g^{-1}) \neq 0$, es decir, $f(g^{-1} g_i) \neq 0$. De acuerdo a la elección de f, esto significa que $g^{-1} g_i \in U$, es decir, $g \in g_i U^{-1} = g_i U$. Esto prueba el teorema.□

La afirmación siguiente establece la continuidad de la acción definida en (2.1) sobre algun subespacio $E \subset C_K(X, Y)$ de forma más general donde ni el grupo G ni el G-espacio X son localmente compactos.

3.8 Lema.

Si G un grupo cualquiera, X un G-espacio, (Y, ω) un espacio uniforme y $E \subset C_K(X, Y)$ un subconjunto equicontinuo. Entonces la función $\beta : G \times X \times E \to Y$, con regla $\beta(g, x, f) = f(g^{-1}x)$ es continua.

Demostración.

Sean g_o en G, x_o en X y f_o en E tales que $\beta(g_o, x_o, f_o) = f_o(g_o^{-1} x_o) = y_o$ está en $V[y_o]$, con V en ω. Ahora elegimos U en ω tal que $U \circ U \subset V$. Por la equicontinuidad de E en el punto $g_o^{-1} x_o$, para U existe un abierto W en X tal que contiene $g_o^{-1} x_o$ con

$$(f(x), f(g_o^{-1} x_o)) \in U \text{ para todo } x \in W,\ f \in E \qquad (3.1)$$

Por la continuidad de la acción de G en X, existe un abierto O en G que contiene a g_o, también existe un abierto S en X, que contiene a x_o, y cumple que $O^{-1}S \subseteq W$. Consideremos la siguiente vecindad de f_o en $M[g_o^{-1}x_o, U] = \{\phi \in E : \phi(g_o^{-1}x_o) \in U[y_o]\}$ Afirmamos que $\beta(g, x, \phi) \subset V[y_o]$ para toda $g \in O, x \in S$. en $M[g_o^{-1}x_o, U]$. con $\beta(g.x.\phi) = \phi(g^{-1}x)$. Si tomamos $g^{-1}x \in O^{-1}S \subseteq W$ y también $(\phi(g^{-1}x_o). f_o(g_o^{-1}x_o) \in U$ de (3.1) entonces tendremos

$$(\phi(g^{-1}x), \phi(g_o^{-1}x_o)) \in U \text{ y} \tag{3.2}$$

$$(\phi(g^{-1}x_o), f_o(g_o^{-1}x_o)) \in U \tag{3.3}$$

de (3.2) y (3.3) tenemos $(\phi(g^{-1}x), f_o(g_o^{-1}x_o)) \in U \circ U \subset V$, de aquí tenemos $\phi(g^{-1}x) \in V[y_o]$.□

3.9 Lema.

Si G, X, (Y,ω), $E \subset C(X,Y)$ y $\beta : G \times X \times E \to Y$ son como antes. si además K es un compacto en X. V un elemento de ω de Y. Entonces para cualesquiera $g_o \in G$ y $f_o \in E$ existen vecindades $A \subset G$ y $B \subset E$ de los puntos g_o y f_o respectivamente, tales que $(\beta(g, x, f), \beta(g_o, x, f_o)) \in V$ para todo $(g, f) \in A \times B, x \in K$.

Demostración.

Tomemos g_o en G, f_o en E tales que $(g_o, f_o) \subset G \times E$ así tenemos $\Gamma(K, V)[g_o f_o] = \{\phi \in E . (\phi(x), (g_o f_o)(x)) \in V$ para toda $x \subset K\}$ elegimos un $U \in \omega$ tal que $U = U^{-1}$ y $U \circ U \circ U \subset V$ Para toda x en

K consideremos $g_o^{-1}x$ en X. Como E es equicontinua en $g_o^{-1}x$ entonces existe W_x un abierto en X que contiene $g_o^{-1}x$ tal que

$$(f(z), f(g_o^{-1}x)) \in U \text{ para toda } f \in E \tag{3.4}$$

Ahora por la continuidad de la acción de G_x en X existen O_x un abierto en G que contiene a $g_o, y S_x$ un abierto en X que contiene a x tal que $O_x^{-1}S_x \subseteq W_x$. La colección $\gamma = \{S_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, por ser este compacto existe $\{S_{x_1}, \ldots, S_{x_n}\}$ una subcubierta finita de γ. Así existen sus correspondientes $O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}$ para $g_o^{-1}x_1, g_o^{-1}x_2, \ldots, g_o^{-1}x_n$, así para $1 \leq i \leq n$ tenemos lo siguiente $A_i = \{\phi \in C(X, Y) : (\phi(g_o^{-1}x_i), f_o(g_o^{-1}x_i)) \in U\}$ y $M(g_o^{-1}x_i, U[f_o(g_o^{-1}x_i)])$

Así $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es una vecindad de f_o y $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_{x_i}$ una vecindad de g_o

Afirmamos que A y O son las vecindades que necesitamos, es decir que satisfacen lo siguiente $((gf)(t), (g_of_o)(t)) = (f(g^{-1}t), f_o(g_o^{-1}t)) \in V$ siempre que t este en K, f en A y g en O. Para toda t en K se tiene que t pertenece a algun S_{x_i} con $1 \leq i \leq n$, como f esta en A contenida en A_i, entonces

$$(f(g_o^{-1}x_i), f_o(g_o^{-1}x_i)) \text{ en } U \tag{3.5}$$

con $x \in S_{x_i}$ y g_o en O tenemos $g_o^{-1}x$, así

$$(f_o(g_o^{-1}x), f_o(g_o^{-1}x_i)) \in U \tag{3.6}$$

de (3.5) y (3.6) tenemos lo siguiente, $(f_o(g_o^{-1}x_i), f_o(g_o^{-1}x)) \in U \circ U$ y de (3.4) $(f_o(z), f_o(g_o^{-1}x)) \in U$ para toda z en W, tomando aquí $x = x_i$,

$(f_o(z), f_o(g_o^{-1}x_i))$ en U para z en W_{x_i}. Pero el punto $z = g_o^{-1}t$ en $O^{-1}S_{x_i}$ esta contenida en W_{x_i}, por eso

$$(f_o(g_o^{-1}t), f_o(g_o^{-1}x_i)) \in U \tag{3.7}$$

de (3.5) y (3.7) tenemos

$$(f(g_o^{-1}x_i), f_o(g_o^{-1}t)) \in U \circ U \tag{3.8}$$

otra vez de (3.4) con $x = x_i(f(z), f(g_o^{-1}x_i)) \in U$ para toda $f \in E$, $z \in W_{x_i}$, pero el punto $z = g^{-1}t$ pertenece a $O^{-1}S_{x_i}$ contenida en W_{x_i}, por eso

$$(f(g^{-1}t), f(g_o^{-1}x_i)) \text{ esta en } U \tag{3.9}$$

así de (3.8) y (3 9) tenemos $(f(g^{-1}t), f_o(g_o^{-1}t)) \in U \circ U \circ U \subset V$ $\Box$

En el siguiente teorema tampoco se piden características sobre X o G

3.10 Teorema.

Sea G un grupo arbitrario, sea X un G-espacio arbitrario, y sea $(Y, \mathcal{V})$ un espacio uniforme. Si E un subconjunto de $C_K(X, Y)$ equicontinuo en cada punto del espacio X, entonces la restricción de la acción definida en (2 1) para el espacio $G \times E$ es continua

Demostración.

Como el subconjunto E es equicontinuo, su topología compacto-abierta coincide con la topología de convergencia puntual. (ver Teorema 1 3.8) y la función evaluación $\Omega : E \times X \to Y; \Omega(f, x) = f(x)$, es continua (ver Teorema [Bo],pp. 193-198). Seleccionamos, de forma arbitraria, un punto $(g_o, f_o) \in G \times E$, un compacto $K \subset X$, y un elemento $U \in \mathcal{V}$. Como siempre denotamos por $M[K, U]$ la familia de todas las funciones $f \in C_K(X, Y)$ tal que $(f(x), (f_o(x)) \in U$ para todo $x \in K$. La función $\beta : G \times X \times E \to Y, \beta(g, x, f) = f(g^{-1}x)$ es continua (ver Lema 3.8). Por el Lema 3.9 esto significa que existen vecindades A y B de los puntos g_o y f_o correspondientes tales que cumplen que $(\beta(g, x, f), \beta(g_o, x, f_o) \in U$ para todo $(g, f) \in a \times B$ y $x \in K$ $(gf, g_of_o) \in M[K, U]$ para todo $(g, f) \in A \times B$, que completa la demostración. □

3.11 Lema.

Sea G un grupo arbitrario (respectivamente ω-acotado) sea X un espacio G-Tychonov arbitrario, sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado, y sea $x \in X \setminus A$. Entonces existe un G-compacto convexo (respectivamente, metrizable) K_f y una función equivariante $f : X \to K_f$ tal que $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

Demostración.

Tomemos $\phi : X \to [0, 1]$ una función G-uniforme tal que $\phi(x) = 0$ y $A \subset \phi^{-1}(1)$. Definimos la función $f : X \to C_\lambda(G)$ por medio de la fórmula $f(x)(g) = \phi(g.x), x \in X, g \in G$. Su continuidad se sigue del hecho que la topología compacto-abierta es propia (ver Teorema 1.2.10). Denotamos por U el subconjunto abierto de $C_\lambda(G)$ que consta de todas las funciones $h : G \to [0,1]$ tal que $h(e) < \frac{1}{3}$, donde e es el elemento identidad del grupo G. Obviamente $f(x) \in U$ y $U \bigcap f(A) = \emptyset$. Consecuentemente, $f(x) \notin \overline{f(A)}$. Más aun, notamos que la G-uniformidad de la función ϕ equivale a la equicontinuidad uniforme del conjunto $f(X)$ en $C_K(G)$. Siendo $C_K(G)$ un subconjunto convexo cerrado del espacio topológico lineal $C_K(G, \mathbb{R})$, donde $\mathbb{R}$ es la recta numérica, la cerradura convexa K_f del conjunto $f(X)$ en $C_K(G, \mathbb{R})$ está en $C_K(G)$. La propiedad de equicontinuidad uniforme es transferible de $f(X)$ a K_f, donde K_f es la cerradura convexa de $f(X)$. De aquí, por el Teorema de Ascoli (ver Teorema 1.2.18), K_f es compacta. Falta que se cumpla que K_f está dotado con la acción del grupo G. Para este fin considaramos la acción definida en (2.2) sobre el espacio $C_K(G)$. De acuerdo al Teorema 3.8, la restricción de esta acción para el subconjunto $G \times K_f$ es continua. Una simple verificación muestra que la función $f : X \to C_K(G)$ es equivariante, de donde sigue que K_f es invariante con respecto a la acción dada en (2.2). Así, K_f es G-compacto convexo y $f : X \to K_f$ es la función requerida. En caso que G sea un grupo ω-acotado, el Teorema 3.7 implica que K_f es metrizable.□

3.12 Teorema.

Sea G un grupo (respectivamente, ω-acotado). Entonces para cualquier espacio G-Tychonov X de peso infinito $\omega(X) = \tau$ existe una familia de G compactos convexos (respectivamente metrizables) $\{K_f : f \in \Gamma\}$

tal que $|F| = \tau$, donde $|F|$ es la potencia de F, y X posee un encaje equivariante en el producto $\prod\limits_{f \in F} K_f$ (dotado con la acción diagonal del grupo)

Demostración.

Por el Lema 3.11, la familia Φ de todas las funciones, equivariantes $f : X \to K_f$ con rangos en G-compactos convexos separa puntos de conjuntos cerrados en X. Y de aquí por el Lema 2.1.11 es posible elegir una subfamilia $F \subset \Phi$ de potencia $|F| = \tau = \omega X$ que también separa los puntos de conjuntos cerrados en X. Tomando el producto diagonal de todas las funciones $f \in F$ obtenemos el encaje equivariante deseado $\iota : X \to \{\prod K_f : f \in F\}$.□

Aquí está otro resultado que establece la existencia de un G-compacto universal de un peso dado.

3.13 Teorema.

Sea τ un cardinal infinito y sea G un grupo localmente compacto de peso $\omega G \leq \tau$ Entonces existe una familia $\{K_f, f \in F\}$ de G-compactos convexos tal que $|F| = \tau$, y cada espacio G-Tychonov X arbitrario de peso $\leq \tau$ posee un encaje equivariante en el G-espacio $\prod\limits_{f \in F} K_f$.

Prueba

Consideremos el G-espacio $C_K(G, I^\tau)$, $I = [0, 1]$, dotado con la acción definida en (2.2). En virtud de la compacidad local de G, esta acción es continua (ver Teorema 2.2.1), y tenemos $\omega C_K(G, I^\tau) = \tau$. Aplicando el Teorema 3.12 encontramos una familia $\{K_f, f \in F\}$ de G-compactos convexos tal que $| F |= \tau$, y el G-espacio $C_K(G, I^\tau)$ admite un encaje equivariante en el producto $\prod_{f\in F} K_f$. Queda por mostrar que para todo espacio G-Tychonov X, $\omega X \leq \tau$,existe un encaje equivariante en el espacio $C_K(G, I^\tau)$. Esto puede hacerse tomando el encaje topológico $i : X \to I^\tau$ y definiendo la función $j : X \to C_K(G, I^\tau)$ como sigue $j(x)(g) = i(gx)$, $x \in X, g \in G$. Entonces la verificación directa muestra que j es un encaje equivariante Notemos que $\omega(\prod_{f\in F} K_f) = \tau$ □

Los resultados anteriores nos permiten obtener una nueva demostración del siguiente Teorema de Uspenskiĭ [Us].

3.14 Teorema.

Todo grupo G con base contable es topológicamente isomorfo a algun subgrupo S del grupo de autohomeomorfismos del cubo de Hilbert $AutQ$.

Demostración.

El grupo G es ω-acotado ([Gu]) y es un G-espacio G-Tychonov (relativo a las traslaciones izquierdas). La propiedad lateral sigue por que la familia de funciones uniformemente continuas con respecto a la uniformidad derecha $G \to [0,1]$ separa puntos de conjuntos cerrados. Por

el Teorema 3.12, existe un encaje equivariante $\alpha : G \to \prod_{i=1}^{\infty} K_i = K$

donde cada K_i es un G-compacto convexo metrizable, con más de un punto. Consideremos ahora el homomorfismo $\beta : G \to AutK$ definido de acuerdo a la siguiente regla $\beta(g)(x) = \alpha(gx)$, con α el encaje anterior, $g \in G$ y $x \in K$. Si mostramos que para cualquier subconjunto $A \subset G$ y cualquier punto $g \in G \setminus A$ se cumple la relación $\beta(g) \notin \overline{\beta(A)}$, entonces esto inmediatamente implicara que β es un isomorfismo topológico sobre su imagen $\beta(G)$. Para este fin hacemos $U = K \setminus \alpha(A)$ y denotamos por e el elemento unitario del grupo G. Como α es equivariante, tenemos $\beta(g)(\alpha(e)) = \alpha(g) \in U$. Con ello, $\beta(g)$ pertenece al conjunto abierto $W = \{f \in AutK : f(\alpha(e)) \in U\}$ en $AutK$. Si $h \in A$, entonces

$\beta(h)(\alpha(e)) = \alpha(h) \in U$, i.e., $\beta(A) \bigcap W = \emptyset$. De aquí $\beta(g) \notin \overline{\beta(A)}$. Sólo

queda mostrar que el subgrupo $AutK$ es topologicamente isomorfo al grupo $AutQ$. Para ello es suficiente probar que el producto K es homeomorfo a Q. Cada conjunto K_i es un compacto convexo metrizable en el espacio localmente convexo $C(G, \mathbb{R})$, por la demostración de los Teoremas 3.12 y 3.11 se tiene que es homeomorfo a algun cubo de dimensión finita (en el caso $dim K_i < \infty$) o, de acuerdo al Teorema de Keller (ver [BP], pp 98-100), al cubo de Hilbert Q (en el caso dim $K_i = \infty$). Consecuentemente, el producto K es homeomorfo al cubo de Hilbert Q $\square$

Bibliografía

[An1] ANTONYAN A. S.

A new proof of the existence of G-compactifications

Comment. Math Univ. Caroline 22 (1981), No. 4. 761-772.

[An2] ANTONYAN A. S.

Equivariant embeddings into G-AR's

Glasnik Mat, 22 (1987), No. 2, 503-533.

[An3] ANTONYAN A.S.

Equivariant embedding and ω-bounded groups

Moscow Univ. Math. Bull. 49 (1994), No 1, 13-16

[AS] ANTONYAN A. S and Yu M Smirnov,

Universal Objects and Bicompact Extensions

Soviet Math Doklady. 23 (1981) No 2. 279-284

[AV] ANTONYAN A S. and De Vries J ,

Tychonov Theorem for G-spasces

Acta Math Hung. 50 (1987), No. 3-4, 253-257

[Ar] ARHANGEL'SKIĬ A. V.

General Topology III

Germany, Springer-Verlag 1995.

[Bo] BOURBAKI N.

Topologie Général, structures topologiques,

structures uniformes

Paris, Hermann, 1956.

[BP] BESSAGA C. and Pelczynski

Selected Topics in Infinite Dimensional Topology

Warzawa, 1975.

[DN] De NEYMET U. Silvia

Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones

Por salir.

[DV1] De VRIES J

Topological Transformation Groups

Amsterdam, 1975.

[DV2] De VRIES J.

Equivariant Embeddings to G-spaces

in: General Topology and Its Relations to Modern

Analysis and Algebra IV

Proc 4th Prague Top Symp , Part 3, pp 485-493

[Du] DUGUNDJI James

Topology

USA, EDS Allyn and Bacon, 1966.

[En] ENGELKING R.

General Topology

Warszawa, 1972.

[Fo] FOX H. R.

On topologies for function spaces

Bull. Amer Math Soc. 51 (1945), 429-432.

[Gu] GURAN I. I.

On topological grouups close to being Lindelof

Dokl Akad Nauk SSSR, 256 (1981),No. 6. 1035-1037.

[GM] GARCIA Marrero M.

Topología Vol. 1

España, EDS Alhambra, 1975

[Is] ISBELL J R.

Uniform Spaces

AMS Math Surv., No. 12 providence 1964.

[Ke] KELLY L John

General Topology

USA, EDS Springer-Verlag 1975

[Ka] KAWAKUBO Katsuo

The Theory of Transformation groups

Great Britain, EDS Oxford University Press 1991

[MZ] MONTGOMERY D. and ZIPPIN L.

Topological Transformation Groups

2da. edición, USA New York, EDS Interscience Publishers, 1964.

[Pe] PESTOV V. G

On compactly genered topological groups

Mathematical Notes of the Acad. of Sciences of the USSR 40 (1986), No 5, 880-882.

[Us] USPENSKIĬ V. V.

Universal Topological Groups with Countable Base

Funtional Anal Appl., 20 (1986), No. 2 86-87

Indice