12

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE LOS COMPONENTES PRINCIPALES EN LA SALUD FEMENINA

299142

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

FABIOLA BERENICE BAEZ REVUELTAS

DIRECTOR DE TESIS: M. en A.P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

MEXICO, D. F. 2001

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Análisis de los Componentes Principales en la Salud Femenina

realizado por Fabiola Berenice Báez Revueltas

con número de cuenta 9333289-3, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
Propietario	M. en C. José Antonio Flores Díaz
Propietario	Act. Jaime Vázquez Alamilla
Suplente	Dr. Carlos Díaz Avalos
Suplente	Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a todas aquellas personas que me han ayudado a lo largo de mi vida y en particular a lo largo de mi carrera

De manera especial, quiero agradecer a mis padres por el gran apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida y por haberme hecho la persona que soy hoy en día y a mis hermanos que me han apoyado incondicionalmente.

A Enrique, que ha sido una de mis más grandes inspiraciones y apoyos en todos mis proyectos.

Agradezco también a mi tutora Pilar Alonso que me ayudó a trabajar más seriamente con modelos estadísticos y a todos mis sinodales por haberme brindado parte de su tiempo y de sus conocimientos ayudándome así a formar este trabajo: C. Díaz, M. Chávez, J. Vázquez y J. A. Flores.

A la familia Moreno Méndez por su gran apoyo.

A mi profesor y amigo Javier Páez que fue uno de mis más grandes apoyos durante mi carrera, a los profesores Anton María Minzonni, Federico Sabina y Beatriz Rodríguez que me ayudaron muchísimo en mi formación académica. Al Dr. Federico O'Reilly por su gran apoyo y al Dr. Carlos Díaz un especial agradecimiento por haberme dado la oportunidad de iniciarme en lo que es la investigación.

A todos mis amigos que siempre han estado ahí para animarme y apoyarme en todo, entre ellos: Paola Vera, Raúl Espejel, Adrián Espíndola, Elsa Puente, Erika Charrez, Alejandra Estrada, Luisa, Edgardo Granados, Javier, Marianna Nuñez, Baruch, Carolina Delgado, Marianne Roux, Esteban, Didier, Vladimir, Paola Pavón, Alejandro (El Toluco), Luis López, Alfredo (El Katz), Rodrigo Pérez, Iván Sosa, Enrique Guzmán (El Tocayo) y Ricardo (El Chiquete).

Y a Wiskas, mi gato loco que se desveló varias noches conmigo.

Índice

Introducción

El 10 de Mayo, Día de la Madre, nunca pasa inadvertido en México, sin embargo, el 28 de Mayo, Día Mundial por la Salud de las Mujeres, no tiene el mismo reconocimiento, ya que si bien, maternidad y salud en las mujeres, se conmemoran con días de diferencia, no siempre van a la par si se revisan los estudios que destacan la mortalidad durante el embarazo como una de las principales causas de muerte entre las mujeres de América Latina y El Caribe.

En México, este problema sigue representando una preocupación, debido a que si se comparan las tasas de mortalidad materna en el país con las de los países desarrollados se encuentra que existe una marcada diferencia.

Sin embargo no es de menospreciarse la labor de los comités encargados de nivelar estas tasas de mortandad ya que la exposición de las mujeres a los riesgos de salud asociados al embarazo ha disminuido de manera sustancial, claro, esto sin tomar en cuenta el hecho de que esta reducción no se ha dado con la misma intensidad en todos los grupos sociales y regiones del país.

Por otro lado, cabe hacer notar que el incremento en la cobertura de servicios no ha sido acompañado hasta ahora por acciones efectivas para todas las regiones del país, por lo que muchas mujeres no tienen acceso adecuado a los servicios de planificación familiar y salud reproductiva.

En el presente documento se muestra como el comportamiento de la mortalidad materna refleja los avances que las instituciones del Sistema Nacional de Salud han realizado para coadyuvar a reducir la mortalidad materna, estudiando las causas y los factores que intervinieron en la presentación de estos niveles de mortalidad materna.

Capitulo I

El Embarazo

1.1 ¿Qué es el embarazo?

Entiéndase por embarazo, gestación, preñez o estado de una mujer encinta, el periodo comprendido desde la fecundación del óvulo hasta el parto; es decir, es un proceso que inicia con el desarrollo de un óvulo fecundado y que en el humano tiene una duración promedio de 282 dias a partir del primer dia del último periodo menstrual, por lo que, son 286 dias aproximadamente contando desde la ovulación hasta el parto.

Por otro lado existen básicamente dos tipos de embarazo, uno es el denominado embarazo normal o fisiológico, que es aquel en el que ni la madre ni el bebé corren riesgo alguno; y el embarazo anormal o patológico, que es aquel en el que su desarrollo presenta anomalías, ya sea por un mal desarrollo del embrión, por enfermedades del feto o de la madre.

Se conoce como embarazo simple aquel en el que la mujer está esperando un sólo bebé y se le conoce como embarazo múltiple a aquel en que la mujer espera más de uno (pueden ser de 2 a 6 bebés)[1] .

1.2 Síntomas y Signos del Embarazo.

El embarazo provoca en el organismo de la mujer modificaciones de dos tipos, las denominadas locales que son las que recaen en el aparato reproductor de la mujer, y las generales que recaen en todo el organismo de la misma. Algunos de estos cambios son:

- Los de tipo genital en donde se contemplan los que presenta el útero que conforme el embarazo va evolucionando, tiene un aumento en su volumen acompañado de acrecentamiento en su capacidad. El útero, que en su estado normal mide aproximadamente de 2 a 5 cm^3 llega a medir hasta 4,000 ó 5,000 cm^3 [2] en la fase terminal del embarazo.

- El estiramiento de la piel del abdomen, la cual se expande hasta alcanzar el doble de su tamaño normal o más[3]; algo similar ocurrirá con otras partes del cuerpo de la mujer durante el periodo de gestación; tal es el caso de los ligamentos entre los huesos, los cuales, se ablandan (principalmente los de la cadera y los de la espalda) para ampliar las cavidades entre ellos y así poder proporcionar al futuro bebé el lugar más confortable y espacioso en el que pueda comenzar su desarrollo inicial.

---

[1] Los embarazos múltiples en el que participan más de tres bebés son embarazos que se conocen, por lo general, como embarazos de alto riesgo, ya que es difícil para el cuerpo de la mujer soportarlos además de que a veces no todos los bebés están proporcionalmente alimentados o no tienen espacio suficiente para desarrollarse, lo cual representa también un peligro para ellos.
[2] El tamaño del bebé y la existencia de más de un bebé además, también del el tamaño de éste o de éstos y la cantidad de líquido amniótico (este es el líquido que rodea al bebé dentro del útero materno y le sirve principalmente como amortiguador contra golpes externos y contra movimientos orgánicos de la madre) hacen que estas cantidades varíen
[3] Esto depende del aumento en el tamaño del útero.

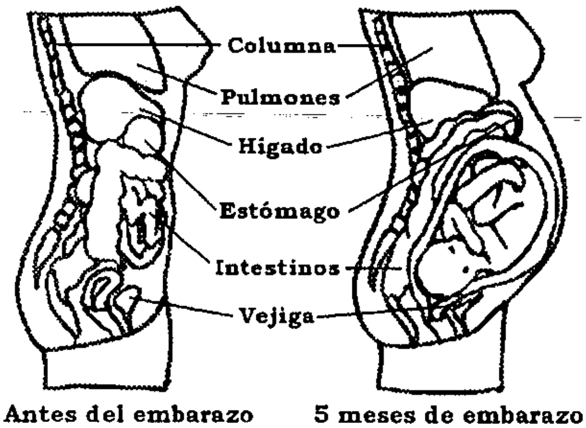
- Durante las primeras seis u ocho semanas del embarazo la mujer comienza a segregar un mayor número de hormonas por lo que puede detectar un agrandamiento moderado de los senos, además de mayor sensibilidad y tensión en los mismos; a las doce semanas se observa que se puede exprimir de estos una secreción clara que se convierte en calostro amarillo cerca del final del embarazo[4]. Esta segregación de hormonas influye también de manera psicológica, ya que la mujer se pone sumamente susceptible; sus gustos alimenticios cambian un poco (esto se dice por que a veces algunos alimentos que antes no le gustaban ahora si y viceversa) y su apetito aumenta considerablemente al principio y después se aminora. Además de que sufre de diversos cuadros de nauseas y vómitos[5].

También hay modificaciones generales que recaen en todos los sistemas. Por ejemplo las que son de tipo mecánico, se presentan porque a medida que el feto crece el útero se expande (como se mencionó anteriormente) por lo que los órganos de la madre son "comprimidos" (ver Fig.1.1), lo cual, provoca leves molestias en la madre; tal es el caso de la vejiga que al ser comprimida hace que la mujer se vea en la necesidad de orinar con mayor frecuencia, esto en unos casos y en otros se ocasiona algo inverso, ya que se puede provocar una retención de líquidos que induzca a una hinchazón corporal de la madre que puede ser sumamente incómodo ya que entre otras cosas impide un poco la movilidad de la misma; con el estómago pasa algo similar, ya que cuando es comprimido provoca en la madre indigestiones y estreñimiento (esto se manifiesta pricipalmente durante el primer trimestre); por último otro órgano importante que es comprimido son los pulmones que provoca en la madre una tendencia a agitarse más fácilmente[6].

[4]La hormona que ocasiona todo este proceso se conoce con el nombre de prolactina.
[5] A este "fenómeno se le conoce como enfermedad matutina ya que son síntomas comunes que se presentan por la mañana y en general se presentan sólo entre la sexta y catorceava semana del embarazo.
[6] A esto se le conoce médicamente como disnea compresiva.

FIGURA 1.1

Vista detallada de la forma en que son comprimidos los órganos de la madre a causa del embarazo



A medida que el feto crece, aprieta la vejiga de la mamá, por lo que ella necesita orinar con mayor frecuencia.

También comprime su estómago y pulmones ocasionándole indigestión y agitación por falta de aire.

Fuente: S/Autor, *El Milagro del Nacimiento*, Editorial Patria México, D.F., 1994.

- El aumento de peso en la madre es otro cambio que presenta la mujer; este "sintoma" se va presentando conforme el bebé crece y se desarrolla; dicho incremento en la masa corporal de la madre puede ser de hasta 11 kilos o más[7] durante todo el embarazo y se constituye de la siguiente manera: 3 Kg. (es aproximadamente lo que pesa el bebé), 2 Kg. de la grasa que se acumula, 2 Kg. de sangre, 1 Kg. del aumento y congestión de los senos, 1 Kg. de liquido amniótico y 1 Kg. de placenta[8].

Se debe tomar en cuenta que conforme todos los cambios antes mencionados se van

[7] Depende de la expansión del útero, lo cual, además, depende del control médico y alimenticio que tenga la futura madre, además de las caracteristicas fisicas de la misma.
[8]Estas cantidades son aproximadas y son consideradas ya en la etapa final del periodo de gestación.

presentando, la mujer sufre de diversas padecimientos como son, por ejemplo, los dolores que se sufren cuando las cavidades entre los huesos se expanden[9], o también las dolencias de parto, las cuales pueden ser desde sólo molestos hasta insoportables, pero esto depende tanto de la mujer como del tipo de embarazo y del tamaño del bebé.

1.3 Desarrollo del Embarazo

Durante el embarazo no sólo es la mujer la que va presentado cambios, sino también es el denominado en un principio feto y después bebé el que va teniendo transformaciones que a continuación se describirán (se debe tomar en cuenta que las modificaciones que se expusieron anteriormente en la mujer se presentan de manera simultánea con las que va teniendo el futuro bebé; a continuación se detallará la manera en que se presentan en ambas partes); pero antes es necesario mencionar que el embarazo se divide en dos etapas, la primera es cuando el bebé se esta formado (principalmente) y la segunda es cuando el bebé se concreta sólo en crecer.

- Primera etapa. En general las mujeres durante esta etapa no presentan cambios notables en su físico pero si un poco en su estado de ánimo y en sus gustos alimenticios, ya que es aquí cuando se presentan las agruras y los mareos[10]. Se dice que aquí es cuando el bebé se forma porque aquí es la etapa en la que este comienza siendo un simple embrión (conjunto de células) hasta que termina siendo un bebé pasando por una etapa en la que se le nombra feto (se le denomina así por que en este periodo casi no parece un ser humano ya que todos los rasgos para que tenga una apariencia tal, apenas se están formando, como son, las manos, los pies, el corazón, etc.). Aquí el bebé también crece, pero se gasta toda su energía y su tiempo principalmente en formarse.

9 El dolor que esto provoca no es muy intenso pero si molesto
10 Pueden no presentarse en algunas mujeres.

Antes de todo esto debe de tomarse en cuenta el periodo de ovulación en la mujer, el cual en general se manifiesta de manera normal en la mayor parte de las mujeres[11]. A este ciclo se le denomina menstruación (se nombró así por que es un evento que ocurre de manera cíclica aproximadamente cada mes). Durante este ciclo si un óvulo es fecundado en las trompas de Falopio, es multiplicado en un sin número de células volviéndose así en un gran conjunto de las mismas, y es entonces a esta "bolita" de células a la que se le denomina embrión; aún multiplicándose baja por la trompa de Falopio hasta el útero, en donde, si las condiciones son adecuadas, se adhiere al mismo, permaneciendo ahí durante los 6 o 9 días posteriores a la fecundación. Y es así como da inicio el embarazo siguiendo la siguiente secuencia:

- Primer día: Al principio el ser humano es tan sólo una pequeñisima célula con un peso aproximado de 15 X 10^{-7} grs, pero con una gran información genética del individuo, la cual le da las cualidades suficientes para el desarrollo total del mismo.

- 7° día: En esta etapa el embrión mide aproximadamente 1 ½ mm y éste mismo es el que se encarga de detener [12] o mejor dicho, inhibir el ciclo menstrual de la madre. A pesar del tamaño del mismo ya posee un corazón que palpita (aunque aún no se puede percibir desde afuera del cuerpo materno).

- 2ª semana: El corazón del embrión ya se puede percibir desde fuera de la madre (esto con ayuda, claro, de aparatos especiales); a pesar de que la forma

[11] Cuando los "síntomas" de una ovulación normal (menstruación) no se presenta en una mujer, esto puede ser indicio de que dicha mujer padece de esterilidad, es decir, esta incapacitada para engendrar un bebé; ahora, se debe de tomar en cuenta que el hecho de que una mujer tenga un ciclo menstrual "normal" no es señal inequivoca de que está capacitada para procrear, sino que además de cumplir con este, digamos, requisito debe de tener algunas otras características para hacerlo, es decir, que el ciclo menstrual no siempre garantiza el que una mujer sea fértil.
Para ello debe tomarse en cuenta que en la actualidad existen un sin número de métodos que facilitan hasta cierto punto el que una mujer que esta incapacitada para la procreación pueda hacerlo, claro, no en todos los casos dichos métodos son del todo exitosos.

[12] Hay ocasiones en que el ciclo menstrual no se ausenta, sino hasta ya avanzado el embarazo, lo cual no siempre significa algo malo ni para la madre ni para el futuro bebé (generalmente).

física del futuro bebé aún no posee un aspecto muy humano, sino más bien tiene el de un reptil, a pesar de que sus futuras extremidades ya se pueden comenzar a vislumbrar.

- 5ª semana: El embrión en esta etapa ya posee un cerebro, columna vertebral y sistema nervioso; sus extremidades se distinguen con mayor facilidad que antes, además de su boca, ojos y orejas; en esta etapa puede medir aproximadamente 2mm de largo.

- 6ª semana: La cara se sigue formando y sus extremidades tanto superiores como inferiores empiezan a tomar ya forma, ayudando con ello a que el feto posea un aspecto más humano; su tamaño puede ser de aproximadamente 1 ½ cm.

- De la 7ª a la 8ª semana: El embrión tiene ya un aspecto más humano por lo que a partir de esta etapa toma el sobrenombre de feto; los órganos principales, además del corazón, como son pulmones y riñones comienzan a tomar forma en esta etapa, los ojos ya están casi totalmente formados (aún faltan los párpados), además de que sus extremidades tanto superiores como inferiores ya están definidas casi en su totalidad en el ahora feto; este puede alcanzar hasta un tamaño de aproximadamente 3 cm desde la cabeza hasta las caderas y además durante esta etapa comienza a presentar ya movimiento[13].

- De la 8ª a la 12ª semana: Hasta ahora el corazón del bebé, a pesar de que ya latía, aún no era el encargado de distribuir la sangre y los nutrientes a través del cuerpo del mismo, sino que esto lo hacía el de la madre; pero a

[13] En esta etapa el bebé está unido a la madre por medio de varias membranas que sirven para abastecer al bebé tanto de oxígeno como de nutrientes para su supervivencia; una de estas membranas es la que conforme avanza el periodo de gestación se va convirtiendo en un órgano parecido a un disco denominado placenta, ésta es un "saco" que se implanta en la mucosa del útero y el bebé, qué esta prácticamente dentro de dicha bolsa, se une a ella por medio del cordón umbilical. Por otro lado, se dice que el feto comienza a presentar movimiento en esta etapa, no por que antes no lo presentace sino por que ahora es más perceptible que antes, pero se ha visto que el ser humano presenta movimiento desde sus primeros días de existencia.

partir de esta etapa dicho órgano, del bebé es el que se encargará de esta labor (se ha de resaltar que esta acción no es del todo independiente, sino que aún depende del flujo sanguíneo de la madre). Además, es a partir de esta etapa cuando el feto ya comienza a absorber nutrientes y a desalojar desechos de su cuerpo "por sí sólo", todo esto se realiza con ayuda de la placenta (Fig. 1.2) por medio de la cual el feto es alimentado[14]; este procedimiento de absorción y eliminación de fluidos en el cuerpo del bebé se da gracias a que la sangre de la madre llega a la placenta ya depurada con oxigeno y nutrientes, en donde estos son absorbidos por el feto a través de una vena ubicada en el cordón umbilical; toda esta sangre se distribuye por el cuerpo del bebé favoreciendo con ello su desarrollo; de la misma forma pero por medio de un "transporte" diferente (las arterias del cordón umbilical) la sangre utilizada por el bebé con productos de desecho del mismo regresa a la madre (al corazón y los riñones de esta) y es entonces cuando el organismo de esta última se encarga de desechar tanto los desechos del bebé como los de ella misma. Se puede ver que en esta etapa el feto ya posee huellas digitales y al final del periodo el bebé ya es capaz de hacer diversos gestos en su cara, abrir y cerrar sus manos, etc.

- Segunda etapa: Aquí es cuando la madre empieza a presentar verdaderos cambios, ya que como el bebé empieza a crecer de manera acelerada a partir de este momento es cuando el vientre de la madre se extiende lo necesario al igual que sus cavidades entre los huesos para dar mas espacio al bebé, estas extensiones de vientre y de cavidades pueden resultar un poco dolorosas para la madre o simplemente molestas (como se mencionó anteriormente); por ello, se podría decir que esta etapa es la mas pesada para la madre, ya que además de

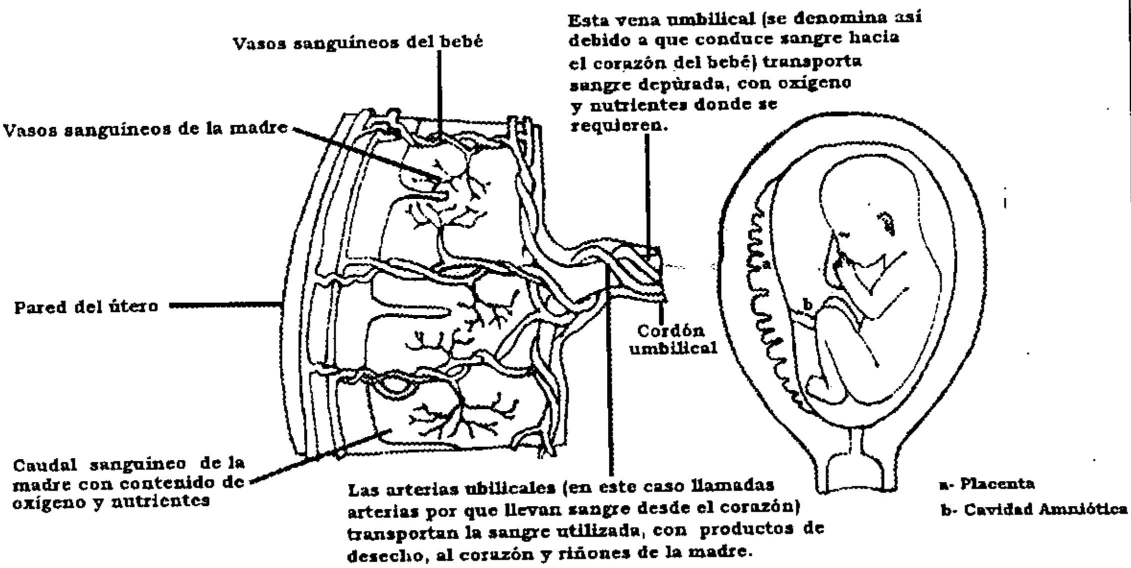
[14] Los bebés en esta etapa ya son capaces de degustar los alimentos por lo que cuando algo no les gusta lo manifiestan moviéndose dentro del vientre materno o pateando el mismo.

las molestias antes mencionadas es en esta etapa cuando la madre mas se fatiga (por la compresión de los órganos) y en el momento del parto, sufre de diversos dolores, los cuales, pueden ser desde sólo molestos hasta insoportables, esto depende tanto del carácter del embarazo como de el tipo de parto, de la mujer y del bebé, pero esto se verá más adelante.

- De la 12ª a la 20ª semana: Aquí comienza la 2ª parte del embarazo aunque para ser más exactos empieza a partir de la 13ª semana debido que para este momento el bebé ya está completamente formado y sólo se va a concretar a crecer, a "divertirse" un rato dando puñetazos, patadas, además de prepararse para sobrevivir fuera del útero materno.

FIGURA 1.2

Vista Detallada del Cordón Umbilical y de la Placenta



Fuente: S/Autor, *El Milagro del Nacimiento*, Editorial Patria, México, D.F., 1994

- De la 20ª a la 24ª semana: En esta etapa es mucho más notorio el movimiento del bebé ya que éste es aún más grande, inquieto y expresivo que antes. Es en esta etapa, cuando aprende a ingerir y desechar fluidos con ayuda del líquido amniótico ya que dicho fluido es muy del gusto de la mayoría de los fetos por lo que lo toman con frecuencia, y cuando hacen esto se "enseñan" ingerir substancias; esto a veces les provoca hipo, lo cual puede ocasionar leves molestias a la madre.

- De la 24ª a la 40ª semana: Aquí el bebé se termina de desarrollar por completo (deja de crecer, es decir, para esta etapa el crío ya alcanzó casi su tamaño máximo[15] posible para antes de nacer) y comienza a acomodarse[16] para su nacimiento además de que "prepara" un poco a sus pulmones para respirar realizando pequeñas aspiraciones (aunque lo único que aspira es líquido, pero aún así como ensayo esto es válido) y además, estos (los pulmones) segregan un líquido llamado sufractante que permite que se inflen como globos y así se "acostumbren" a distenderse.

- El parto: Éste ocurre ya en las últimas semanas y puede tomar desde muy pocas horas hasta un día entero o más[17]; en un parto existen tres etapas que son:

  a) Etapa 1: Esta comienza cuando da inicio el denominado trabajo de parto[18] y termina la dilatación del cuello uterino para permitir una fácil expulsión del bebé (ver Fig. 1.3). Además, las contracciones que en un principio son

---

15 Hay bebés que el tamaño que alcanzan en esta etapa no es el idóneo sino más bien es o más pequeño o más grande; esto depende de diversos factores como son, la alimentación de la madre o afecciones de la misma, ya sea, físicas o psicológicas.
16 Cuando un niño se "acomoda" para nacer quiere decir que debe estar con la cabeza hacia abajo, para que al nacer sea ésta la primera en salir del cuerpo de la madre; hay ocasiones en que los bebés no logran voltearse (por diversas causas) y entonces se recurre a diversos métodos para lograr, ya sea, voltear al bebé o simplemente lograr un óptimo nacimiento con ayuda, por lo general, de una operación (la denominada cesárea).
17 Esta es la etapa más dolorosa del embarazo, ya que las contracciones traen consigo diversos dolores; ahora, estos dolores dependen tanto del tamaño del bebé (si este es muy grande suele ser más doloroso), de si la madre tiene alguna afección física (enfermedad, estreches de la cadera, etc.), de si la madre es muy susceptible al dolor, en fin, de múltiples factores.
18 Se denomina trabajo de parto cuando da inicio la contracción del útero (desde la primera contracción de este) hasta el nacimiento del bebé.

pausadas y leves se van volviendo más continuas y fuertes, es decir, que el lapso entre una contracción y otra es cada vez más pequeño hasta que se sienten como si fueran una sola gracias a lo seguido que se presentan, además de que al mismo tiempo el útero se dilata aún más (ver Fig. 1.3).

b) Etapa 2: Da inicio cuando la dilatación del útero ya está al máximo y es entonces cuando la mujer puede comenzar la labor de expulsar el bebé[19].

c) Etapa 3: Da inicio cuando el bebé ya es completamente expulsado del cuerpo de la madre e inicia realmente cuando sale la placenta, la cual se debe retirar por completo después del parto, el cordón umbilical del bebé es cortado y atado y finalmente el útero y por consecuencia el vientre de la madre comienza a retomar su tamaño normal.

Finalmente el bebé es medido, pesado y auscultado por lo médicos para verificar su estado de salud al igual que es verificado el estado de salud de la madre. En general después de un parto tanto la madre como el bebé quedan sumamente cansados, y es necesario un pequeño reposo previo al parto que dura de uno a dos días para ambos[20], además de que se les realizan a ambos una serie de auscultaciones médicas para ver sus comportamientos físicos.

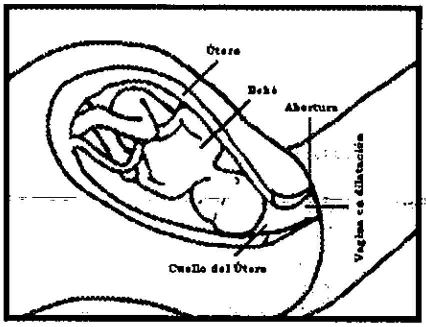
Nota: Se debe tomar en cuenta que para llevar a cabo un embarazo y un parto "normales", es decir, con la menor posibilidad de riesgos tanto para la madre como para el bebé es necesario consultar periódicamente a un médico, recurrir a diversos estudios para ver como esta el bebé, llevar una buena alimentación y seguir lo mejor posible las recomendaciones médicas.

[19] Esta labor puede durar una hora, más o menos, dicha duración depende de si la madre es primeriza (es su primer embarazo) o no.
[20] El tiempo de reposo del bebé depende mucho de cómo responda el organismo de este al medio ambiente, ya que si no lo hace de manera adecuada entonces el bebé puede permanecer en el hospital por tiempo indefinido.

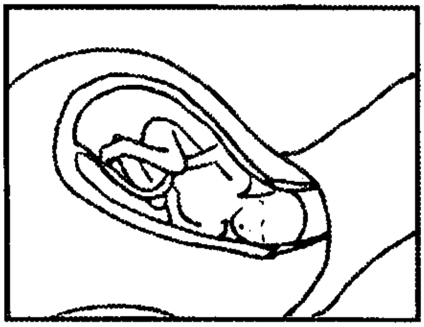
FIGURA 1.3

Etapas previas al parto.

PRIMERA ETAPA

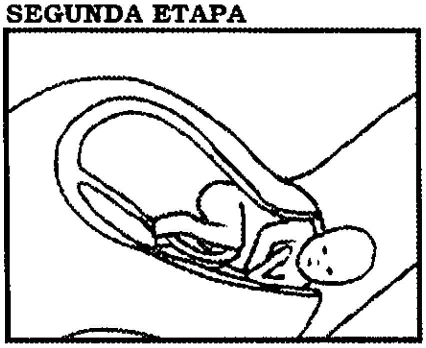


Esta etapa comienza con el inicio del trabajo de parto y termina con la dilatación del cuello uterino. El cuello uterino se contrae una y otra vez.



Gradualmente, el intervalo entre contracción y contracción va disminuyendo hasta que estas se tornan casi continuas. Durante este lapso, el cuello del útero se ensancha aún mas para que el bebé pueda salir.

SEGUNDA ETAPA



Esta etapa comienza cuando el cuello del útero a alcanzado la máxima dilatación. Entonces, la mujer puede empujar al bebé, valiéndose de sus músculos abdominales (vientre). Esta etapa se extiende a una hora, o menos si la mujer ya tiene o no otros hijos.

Fuente: S/Autor, *El Milagro del Nacimiento*, Edit. Patria, México, D.F., 1994

1.4 El Riesgo Durante el Embarazo

El embarazo es un proceso en el que existen numerosos riesgos tanto para la futura madre como para el próximo bebé; por lo que hay un gran índice de mortandad femenina en esta etapa. Ahora, los riesgos que pueden llevar, en ocasiones extremas, hasta la muerte, ya sea, del bebé, de la mujer o hasta de ambos son diversos.

Por otro lado, se debe enunciar que cuando se habla de mortalidad materna es hablar de la denominada muerte obstétrica o durante el embarazo, es decir, esto se refiere a todas las defunciones ocurridas durante el embarazo y dadas a causa de complicaciones del mismo; ya sea en el parto o en el puerperio[21]. Por ende, todos aquellos decesos provocados por accidentes obstétricos o por enfermedades ajenos al embarazo no entran dentro de los riesgos que provocan la muerte materna.

Habiendo aclarado lo anterior, se tiene, además, que los factores que influyen de alguna manera a la existencia de los riesgos maternos se dividen en dos; unos son los riesgos que son provocados por problemas netamente físicos (un mal funcionamiento del organismo materno) y los que son causados por agentes externos a la madre. De esta última clasificación se tienen, por ejemplo:

* Abortos provocados, debido a embarazos no deseados, los cuales, en general, se dan gracias a problemas socioeconómicos y más comúnmente por problemas de índole cultural.

* Accidentes sufridos por la madre durante el embarazo que afecte el periodo de gestación de alguna manera[22], estos pueden ser desde "simples" caídas hasta,

[21] Es el conjunto de fenómenos que sufre el organismo de la mujer recién parida hasta que sus órganos afectados por el embarazo y el parto recuperen su forma, estructura y funciones normales.
[22] El hablar de afectar el periodo de gestación quiere decir varias cosas como son: que el periodo de gestación finalice antes de tiempo ya sea por un aborto o por un parto prematuro, lo cual por lo general no es del todo saludable ni para la madre ni para el futuro bebé, ya que esto puede provocar la muerte de alguno de estos o de

por ejemplo, accidentes automovilísticos muy fuertes.

*Mala alimentación o mala atención médica hacia la madre debido a factores culturales[23], a factores socioeconómicos y en ocasiones por mera negligencia médica[24].

* Una mala educación y/o preparación hacia la futura madre con respecto a como debe llevar su embarazo, en especial como debe cuidarse; aquí entra también la denominada negligencia médica, hasta cierto punto, ya que este punto esta también muy relacionado con aspectos socioeconómicos y culturales, de hecho esto último es el principal "problema" en estos casos.

Los puntos antes mencionados son sólo algunos de los factores externos al organismo de la madre que pueden ser causa de mortalidad materna, pero son los más importantes.

Se puede ver que todos estos factores además de muchos otros están intimamente relacionados con la cultura y el estado socioeconómico de la madre y de la sociedad que rodee a la misma.

Por otro lado, con respecto a los riesgos "internos" a la madre (los problemas netamente fisicos) se manifiestan como denominadas enfermedades obstétricas

---

ambos, o en ocasiones una atención médica más fuerte después del parto. Ahora, el parto prematuro no siempre lleva consigo consecuencias graves para la madre y/o para el bebé.

[23] Cuando se habla de los factores culturales, esto quiere decir mucho ya que en zonas principalmente rurales de un país como México aún existe mucha mas confianza en gente no preparada que se autonombran curanderos o brujos que en gente que esta realmente preparada como son muchos médicos.

[24] Este punto de negligencia médica entra también dentro de los riesgos fisicos, ya que, cuando se presentan complicaciones en un embarazo por esta causa, quiere decir que el médico pasó por alto algunas características del embarazo, ya que no tomo las debidas precauciones, provocándose así, en la mayoría de los casos, serios problemas tanto para la madre como para el bebé y en ocasiones la perdida de alguno de ellos o hasta de ambos; esto es por en algunos embarazos el organismo no los soportar del todo o de manera "normal" por lo que deben de seguirse algunas precauciones y hay médicos que simplemente las pasan por alto.

(padecimientos que se presentan durante el embarazo), las cuales, se dividen básicamente en tres grupos[25], que son:

- Enfermedades específicas del embarazo o causas obstétricas directas; es decir, son los padecimientos que sólo se pueden presentar durante el periodo de gestación, como por ejemplo, las toxemias, las hemorragias, algunas infecciones de cualquier índole, los accidentes vasculares, los accidentes por anestesia y otras menos frecuentes que más adelante se explicarán más detalladamente.

- Enfermedades que pueden provocarse por deficiencias provocadas por el embarazo, más no son padecimientos del mismo, o, lo que es igual, las causas obstétricas indirectas; es decir, estas anomalías se pueden presentar incluso en mujeres que no están embarazadas, pero, se ha visto con base de un sin número de muestras que hay una gran cantidad de males que durante el embarazo se pueden agravar o manifestar, es decir, existen casos en que la enfermedad que la futura madre ya padecía desde antes del embarazo se agrava o se manifiesta gracias a este, tal es el caso de la tuberculosis, las enfermedades cardiovasculares, los problemas hepáticos, la inestabilidad mental, etc. Este tipo de enfermedades se pueden agravar o surgir con "ayuda" del embarazo a niveles sumamente peligrosos que pueden ocasionar desde lesiones en la madre, o en el bebé o en ambos que sean irreparables y en ocasiones hasta la muerte de alguno de ellos o de los dos.

- Las enfermedades que afectan a la madre sin tener absolutamente nada que ver con el embarazo como son, principalmente, las enfermedades transmisibles.

Las enfermedades que aquí se mencionan son en ocasiones causas de muerte materna, ya sea en alta o baja frecuencia, esto depende de diversos factores tanto

[25] Clasificación Internacional de Enfermedades y Causas de Muerte Materna.

internos como externos a la madre y más frecuentemente los externos a la misma (como son los antes mencionados).

Dentro de las enfermedades más frecuentes que se consideran causas obstétricas directas están, de manera más específica, las siguientes:

* Hemorragias: Están relacionadas muy fuertemente con el aborto y es una de las principales causas de muerte materna y se manifiestan de la siguiente manera:

  - Abortos: Se define como la expulsión del bebé antes de que culmine el periodo de gestación y la mayor parte de estos se presenta dentro del primer trimestre. Ahora, el aborto se puede manifestar de dos formas: una es de manera "rápida" que es cuando existe una hemorragia que provoca que el feto sea desprendido del útero, provocando con ello que el primero sea expulsado del cuerpo materno; la otra forma es la tardía, la cual, se comporta de manera similar a lo que seria un trabajo de parto normal siendo el bebé expulsado como si estuviera naciendo, pero sin que este esté capacitado para hacerlo.

    Algunas de las causas de abortos son: Anormalidades fetales[26], respuestas deficiente de anticuerpos maternos, anomalias en el útero materno[27], enfermedades maternas como fiebre aguda o diabetes, abusos en la ingesta de fármacos, etc.

    En la actualidad, se dice que ésta es una de las principales causas de muerte materna por que la pérdida de sangre que puede sufrir la madre por el aborto, puede ser incontrolable y así provocar en esta hasta su muerte o,

[26] Son las más comunes y se deben principalmente a problemas cromosómicos del feto.
[27] Roturas, amputación del cuello uterino, etc.

en algunos casos, cuando el aborto no es total[28] sino parcial se pueden provocar serias infecciones en el organismo de la mujer.

* Infección puerpueral o sepsis. Ésta incluye todas las enfermedades provocadas por infecciones en la herida puerpueral[29] a causa de microorganismos patógenos; dicha infección puede ser producida en el puerperio que sigue al embarazo o al aborto. Las infecciones generalmente son provocadas por infecciones externas mixtas o por infecciones endógenas focales.

  Éstas se facilitan si se da una frecuencia de embarazos en la mujer, o un embarazo ectópico, heridas genitales o por intervenciones quirúrgicas y pueden ocasionar serios problemas en la mujer a grado tal que provoquen desde esterilidad hasta la muerte.

* Toxemias del embarazo. Éstas forman un grupo de enfermedades caracterizadas por:

  - El vómito simple (que se considera como algo normal en el embarazo). El vómito grave que es similar al anterior pero cuando es muy frecuente puede estar relacionado con enfermedades intercurrentes como son pilonefritis (casi siempre) y en ocasiones muy raras obstrucciones intestinales o tumores cerebrales.

    En ocasiones el vómito puede ser tan fuerte (independientemente de lo que lo ocasione) que puede provocar una grave deshidratación para la mujer y hacerla deficiente de vitaminas necesaras para su estado.

---

28 Se denomina aborto total a aquel en el que se expulsa del cuerpo materno todo el contenido del útero y, se denomina aborto parcial a aquel en el que quedan restos del contenido del útero en la madre, lo cual puede provocar serias infecciones a la mujer.

29 Herida ocasionada por el parto, en ocasiones desgarramientos en la vagina o en su caso la herida por cesárea. Dicha palabra proviene de puerperio que significa el conjunto de fenómenos que suceden en el organismo de la mujer recién parida hasta que los órganos afectados por el embarazo y el parto recuperan su forma, estructura y funciones normales.

- Nefritis Es una complicación rara del embarazo y es probable que su evolución no se altere con el mismo. Esta enfermedad puede provocar hipertensión y en ocasiones mas graves la muerte del feto.

- Hipertensión. Puede ser causada por una enfermedad preexistente que se descubre o intensifica durante el embarazo, como la hipertensión primaria o la nefritis. A esta enfermedad se le ha denominado más comúnmente como preeclampsia debido a que en algunos casos la enfermedad evoluciona a grado tal que se pueden presentar en la mujer convulsiones. Las causas que provocan este trastorno aún no son muy claras, pero se cree que es provocada por una intoxicación por toxinas producidas en zonas degeneradas de la placenta o por trastornos funcionales del hígado, riñones o gládulas endócrinas, y en ocasiones por deficiencias a falta de calcio o vitaminas.

- Eclampsia. Es una evolución grave de la preeclampsia y se puede manifestar después del parto (durante las primeras 24 horas) y casi siempre esta eclampisa es leve, pero una eclampsia grave puede provocar hemorragias cerebrales, edemas pulmonares, insuficiencias cardiacas, hepáticas o anuria si continúan las convulsiones.

Además de las enfermedades antes mencionadas que son las más comunes, se tienen por otro lado otras enfermedades que aunque menos comunes no dejan de ser igual o más peligrosas que las anteriores, entre estas enfermedades están las del tipo obstétricas directas, indirectas y ajenas al embarazo, además de las enfermedades que se prvocan gracias a las enfermedades antes mencionadas (esto en ciertos casos) y son:

* Posmadurez. Es cuando el feto no esta bien "acomodado" para salir por vía natural y no por cesárea del cuerpo materno, también se denomina

posmadurez cuando el trabajo de parto se retrasa mas de las 48 semanas reglamentarias, para lo cual se revisa si el bebé esta bien acomodado o si no esta teniendo el denominado sufrimiento fetal[30].

* Tumores. Éstos en general no tienen nada que ver con el embarazo, pero si tienen mucho que ver con complicaciones durante el mismo además de complicaciones durante el trabajo de parto.

* Anemia. Se manifiesta en mujeres que tienen bajas en sus niveles de proteínas, vitaminas, hierro, etc. y si no se controlan estos niveles, se puede provocar en la mujer una fuerte descompensación además de un carente desarrollo del bebé.

* Enfermedades Cardiacas. Muchas veces no tienen nada que ver con el embarazo pero si es afectado por este y en ocasiones pueden provocar hasta la muerte materna gracias al mal funcionamiento cardiaco y el exceso de trabajo que requiere el organismo gracias al mismo embarazo.

* Enfermedades Pulmonares. Estas se comportan igual que las anteriores.

* Enfermedades de Transmisión Sexual. Estas no tienen nada que ver con el embarazo pero si puede llevar serias complicaciones al mismo, estas enfermedades pueden provocar desde graves transtornos irreversibles, tanto para la madre como para el bebé hasta la muerte de uno de ellos o de ambos.

[30] Se dice que un feto tiene sufrimiento fetal cuando este, por ejemplo, se enreda el cordón umbilical en el cuello y comienza a ahorcarse con este provocándose as mismo una insuficiencia respiratoria que lo puede llevar hasta la muerte (no en todos los casos).

Capitulo II

Estadísticas Obstétricas

El índice de mortalidad materna (MM)[1] es, sin duda, un indicador de que tan desarrollado está un país, ya que, mientras se presenten muertes maternas prevenibles, la atención a la salud tendrá que mejorar.

Durante muchos años la MM fue, a nivel mundial, algo a lo que se le daba poca importancia, por lo que la información que existia al respecto no era fiel reflejo de lo que en verdad ocurría, presentándose así un subregistro[2]; por esta razón se implantaron, como una necesidad, diversos comités para el estudio de la MM. Con la creación de dichos comités se pudieron resolver algunos de los problemas de subregistro y se propició la disminución de la MM, ya que al ver de manera más clara el panorama que rodeaba a este fenómeno fue más fácil tomar medidas preventivas al respecto; además de que estos comités ayudaron a sistematizar la experiencia y a fomentar la enseñanza y la investigación, convirtiéndose así en insumos para una mejor planeación de los servicios de salud.

Actualmente, con la ayuda de algunos estudios realizados por dichos Comités se sabe que las muertes maternas atribuibles a problemas durante el embarazo, el parto y el puerperio son, en general, evitables, es decir, que con una atención adecuada antes, durante y después del parto se puede prevenir el desencadenamiento de una complicación que de otra manera culminaria con la muerte de la mujer y/o del bebé.

[1] Son las muertes en mujeres durante el embarazo y las 42 semanas siguientes al término del mismo, debido a cualquier causa relacionada o agravada. / Salud y Enfermedad, San Martín, HERNAN
[2] Mortalidad Materna y Perinatal, Cifras y Hechos 1989-1984, Acciones para su reducción, Secretaría de Salud, Comité Nacional para el Estudio de la Mortalidad Materna y Perinatal, Mayo 1994, México.

Sin embargo, se sabe también, que a pesar de todos los adelantos médicos que ha habido en los últimos años, la MM es aún un problema complejo debido a que su solución rebasa, en ocasiones, los conocimientos médicos y tecnológicos, tanto para atender cierto tipo de enfermedades como para atender, en algunas regiones del mundo, a toda la población femenina durante el periodo de gestación. Al respecto se debe tomar en cuenta que por lo general van a existir regiones en donde debido al nivel socioeconómico, la escolaridad y los patrones culturales que rigen la vida cotidiana de las mujeres las prevenciones que se puedan tomar al respecto no van a ser tan eficientes y bastas.

Todo esto influye de manera determinante en el tipo de prevención y atención prenatal, en el parto y en el postparto que cada mujer recibe, y dicha atención es un punto crucial para que se presente un alto o bajo nivel porcentual de la tasa de MM.

2.1 Panorama Mundial

Es del conocimiento popular que en el mundo existen diversas costumbres, estilos de vida, culturas, religiones, situaciones socioeconómicas, demográficas y climatológicas; en fin, es bien sabido que en el mundo hay innumerables diferencias entre un país y otro, en particular las del tipo socioeconómico que son muy importantes para la instalación y calidad de los programas de salud en general.

Por esta razón es que los programas de prevención de la MM a nivel mundial tienen una variación similar a la que existe entre las características de los países con respecto a la atención que se les tiene, y gracias a esto los indices de MM varian mucho entre un país y otro. En pocas palabras se puede decir que los niveles de mortalidad que existen en cada pais hablan mucho de que tan desarrollados están estos.

Al respecto, con ayuda de diversas encuestas realizadas por múltiples comités, se tiene conocimiento de que en las últimas décadas del siglo XX han ocurrido, o al menos se han registrado, alrededor de 1,600 muertes maternas diarias a nivel mundial a causa de complicaciones durante el embarazo y el parto, esto da un aproximado de 585,000 muertes maternas anuales en el mundo[3].

De esta aproximación obtenida de MM a nivel mundial existen variaciones tremendamente fuertes con respecto a los porcentajes que muestra cada país, y se ha visto que estas variaciones coinciden con las características socioeconómicas de los mismos ya que a menor nivel socioeconómico mayor índice de MM y viceversa.

Al respecto se sabe que existen dos factores básicos que pueden ayudar a reducir la MM, estos son: la planificación familiar (que ayuda a la mujer a retrasar su primer embarazo y a evitar los embarazos no deseados, así como los abortos provocados), el acceso a servicios durante el embarazo, el parto y el postparto (suponiendo que estos servicios se utilicen), además de la posibilidad de obtener atención obstétrica de emergencia.

Es de esperarse que estos factores tan influyenetes en los niveles de MM estén íntimamente relacionados con el nivel socioeconómico de cada país, ya que la estabilidad económica define automáticamente el tipo de insumos que se le puede dar a la salud.

Un claro ejemplo de ello es el caso de Africa, donde, según registros, existe una de las zonas con mayor rezago económico; esta es la zona comprendida por la denominada Africa Subsaharia; esta región del mundo es en donde existen las mayores carencias económicas y es bien sabido que por esta misma razón que existen múltiples problemas, en particular los de índole alimenticio y de salud, que implican, notablemente, que las tasas de MM de este continente sean las más

[3] OMS, UNICEF, Revised 1990 Estimates of Maternal Mortality. Anew Approach by WHO and UNICEF. Abril, 1996.

CUADRO 2.1

Riesgo que tiene la mujer de morir por la maternidad durante todo el ciclo de vida reproductivo

Región	Riesgo de Morir
Africa	1 en 16
Asia	1 en 65
América Latina y el Caribe	1 en 130
Europa	1 en 1400

Fuente: OMS, UNICEF, *Estimates of Maternal Mortality, A New Approach by WHO and UNICEF, Revised 1990*, Abril, 1996

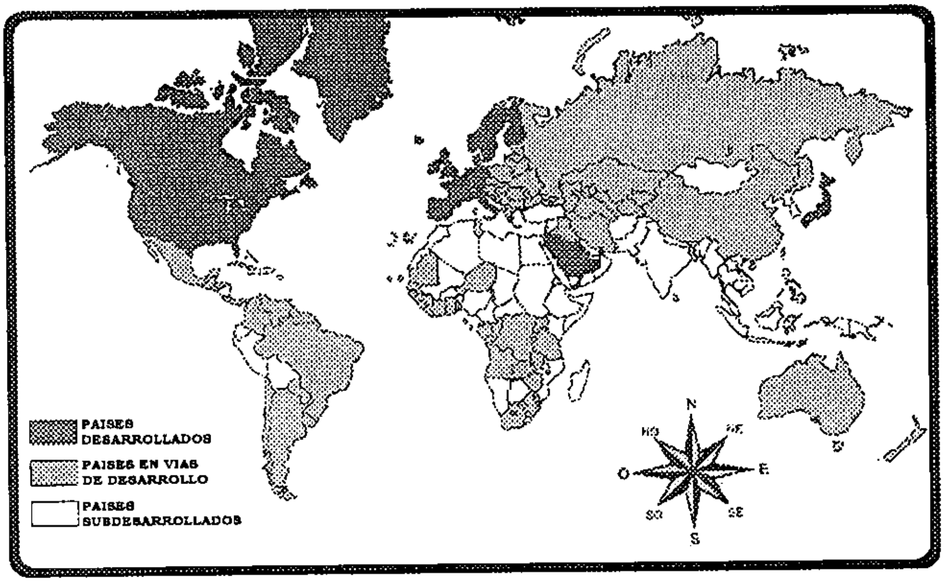
alarmantes del mundo (Ver Cuadro 2.1); en cambio si se observa el caso de los demás continentes se puede ver que estos presentan características socioeconómicas mucho más favorecedoras, por lo que no es de extrañarse que estos mismos muestren tasas menores que las del caso de Africa.

Si se van tomando en cuenta los continentes en donde en promedio hay menos problemas socioeconómicos se podrá entonces observar como estas tasas son cada vez menores, lo cual refuerza lo antes dicho de la relación entre los factores que influyen más fuertemente en los niveles de MM y la situación económica de los países

Una muestra más clara de este comportamiento se da en el caso de los paises desarrollados, los que están en vías de desarrollo y los que son considerados como subdesarrollados (ver Mapa 2.1), ya que si se toma en cuenta dicha característica de

Mapa 2.1

Distribución de los Niveles de Desarrollo Económico a Nivel Mundial



Fuente: S/Autor, *Enciclopedia Universal Ilustrada*, Editorial Espasa-Calpe, Madrid, 1990

los países se puede apreciar claramente que, en efecto, el continente con el mayor número de países desarrollados es Europa, y en efecto es el que cuenta con la tasa mas pequeña de MM; y dicha tasa se va incrementado conforme el número de paises desarrollados por continente va disminuyendo[4].

Otra manera de ver todo esto es analizando los porcentajes de MM de manera, por así decirlo, individual, tomando como muestra los resultados al respecto de un grupo seleccionado de paises (de preferencia los que sean más representativos de

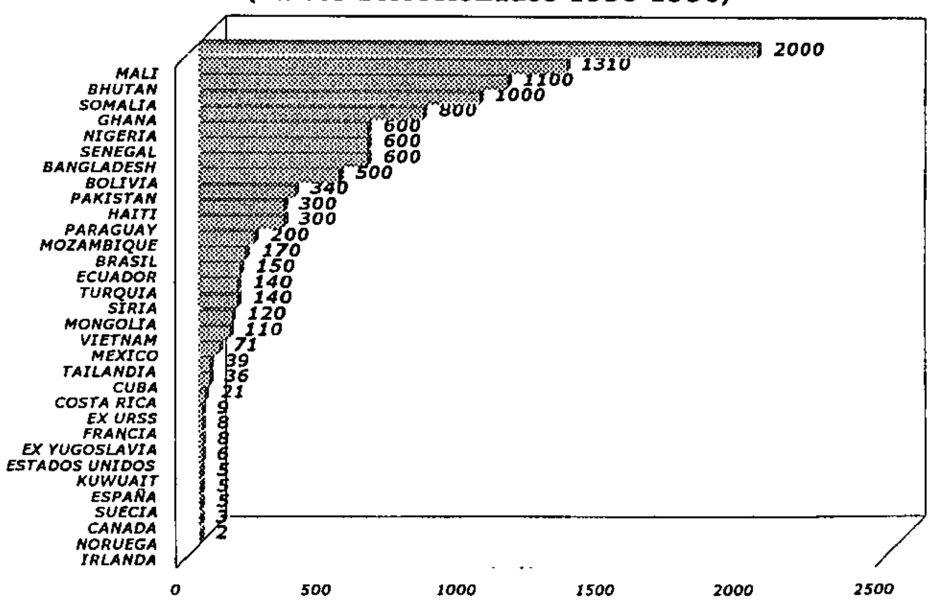
4 Al respecto se tienen datos de que en las últimas décadas los paises desarrollados presentan un indice de MM de 1 en 1800, mientras que los paises en vías de desarrollo muestran un nivel de 1 en 48.

cada continente); si se comparan estos porcentajes con los niveles socioeconómicos nuevamente podrá observarse que los países más favorecidos o los que presentan los indices más bajos de MM son aquellos en los que la situación socioeconómica y por ende la tecnologia son, si no óptimos, si mejores que en otros países.

Tal es el caso de Kuwuait y Estados Unidos que son dos de los paises que muestran unos de los indices mas bajos de MM (ver Gráfica 2.1) y que, por ejemplo, el primero de ellos goza de una estabilidad económica envidiable, gracias a sus bien conocidas reservas petroleras, y el segundo pais mencionado es el que es considerado como la potencia mundial a nivel económico y es bien sabido que este país, gracias a su estabilidad económica, cuenta con unos de los mejores recursos y adelantos médicos.

GRÁFICA 2.1

Distribución de la mortalidad materna a nivel mundial por cada mil nacidos vivos (Países Seleccionados 1980-1990)



Fuente: OPS. Edición de 1990.

Del otro lado de la moneda, se ve el caso de, por ejemplo, Somalia en donde es del conocimiento general que, debido a un sin número de factores como la sobrepoblación y el problemático clima, existen grandes deficiencias económicas, que dan como consecuencia gigantescas hambrunas y problemas médicos irremediablemente fuertes y difíciles de controlar, por lo que los niveles de MM que ahí se registran son verdaderamente preocupantes; tristemente otros países como Ghana sufren de esta misma suerte.

En conclusión se puede decir que el estilo de vida y el nivel socioeconómico de cada país, son los puntos que definen determinantemente los niveles de muertes maternas ya que son los que definen el tipo de atención que se le da a los puntos que definen estos índices (la planificación familiar y los servicios de salud). De ello se sabe que en los países en donde la situación económica es más decadente es en donde se tienen registros de que hay una sanidad poco cuidada, una alimentación pésima y una prevención médica casi inexistente y, en el mejor de los casos, insuficiente; en cambio, en los lugares en donde se presentan los mejores niveles económicos es en donde la situación al respecto es mucho más favorable.

Ahora, para estudiar mejor el fenómeno de la MM es necesario observar las causas de muerte materna que dan lugar a esta, las cuales son diversas, pero las más características son, por ejemplo, la hemorragia grave, la intoxicación por toxinas como la eclampsia y el denominado parto obstruido[5], entre otras.

Estas causas de mortandad materna presentan, por si solas diversas magnitudes (ver Cuadro 2.2), las que son influenciadas individualmente por las mismas razones que lo es la MM en general; un ejemplo claro de ello son los denominados abortos inseguros, los cuales provocan en gran parte dos de las causas de muerte

[5] Es cuando el aborto es mal indicado o es realizado en condiciones sanitarias inapropiadas. (fuente)

CUADRO 2.2

Causas de mortalidad materna en el Mundo, 1997

Causas	Porcentajes
Hemorragia Grave	25
Infección	15
Aborto inseguro	13
Eclampsia	12
Parto obstruido	8
Causas indirectas	20
Otras causas directas	7
Total	**100**

Fuente: Family Care International

plasmadas en el cuadro, dichas causas son las hemorragias graves y el parto obstruido[6].

Al respecto se sabe que los abortos inseguros son provocados en su mayoría gracias a embarazos no deseados que se presentan, en la mayoría de los casos por una mala difusión sobre el tema de planificación familiar y el de educación sexual, las cuales, muchas veces son decadentes, ya sea por falta de recursos económicos para su difusión o por tabues culturales que forman una gran barrera para que en algunas regiones exista un cierto porcentaje de mujeres que siquiera estén enteradas de que es posible prevenir un embarazo, o en el mejor de los casos, sea tal la presión social sobre los temas sexuales para con la mujer que

[6] Se sabe que la diferencia existente entre una muerte por aborto dentro de la clasificación de hemorragia grave y la de aborto obstruido es básicamente que cuando entra dentro de la primera clasificación, implica que la mujer murió desangrada por algún tipo de desgarramiento o algo similar y cuando entra en la segunda clasificación quiere decir que la mujer murió básicamente de una infección producida, en general, por una mala sepsis. (fuente)

estas se inhiban ante la idea de mostrar su situación sexual, por lo que no se procuren un cuidado al respecto.

Las otras causas de mortandad materna no se comportan de la misma forma que lo hace el aborto, estas se dan mas bien por una falta de asistencia y prevención médica para con la madre (como es el caso de la eclampsia), además de por otras causas que fueron ya mencionadas en el capitulo 1.

En conclusión las tasas de MM a nivel mundial están influenciadas además de por aspectos económicos, por características sociales y culturales también que son los que definen el comportamiento de las mismas.

2.2 La situación de las mujeres en América.

En el continente Americano pasa algo similar a lo que ocurre a nivel mundial, con la excepción de que en este caso las características socioeconómicas y culturales de cada país no difieren tan fuertemente; un ejemplo claro de ello es lo que pasa con los países de centro y Sudamérica además de México, en donde las características culturales son hasta cierto punto similares, gracias a que su historia se ha ido dando con sucesos parecidos.

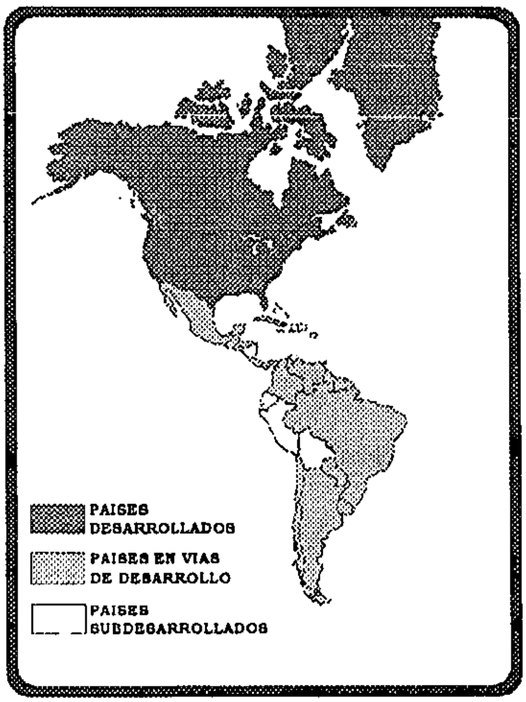
El resto de los países de América (casi toda América del Norte para ser precisos), tienen la singularidad de que también sus características son parecidas entre si, casi de la misma forma que los otros, pero este bloque de países difiere con le otro en lo que se refiere básicamente a economía, y esto se debe principalmente a la historia que rodea el desarrollo de cada bloque.

Sin embargo, hay que recalcar que esta diferencia no es tan grande tampoco, presentándose así un comportamiento económico relativamente equitativo en el

continente del tipo "estable", aunque claro con ciertas zonas que presentan situaciones económicas extremosas (ver Mapa 2.2).
Gracias a estas características y lo visto anteriormente en el comportamiento de la MM a nivel mundial, sería muy probable que las diferencias en los niveles de MM entre un país y otro no sean muy grandes.

Analizando esto se tiene en primera instancia que, en promedio, en América durante las últimas décadas, la MM ha dejado de ser un problema relevante, ya que ha disminuido de manera notoria. Sin embargo, se tienen registros de que a pesar de todo hay regiones en donde la mortalidad materna aún sigue considerándose dentro de las cinco principales causas de muerte

Mapa 2.2
Distribución de los Niveles de Desarrollo Económico en el Continente Americano

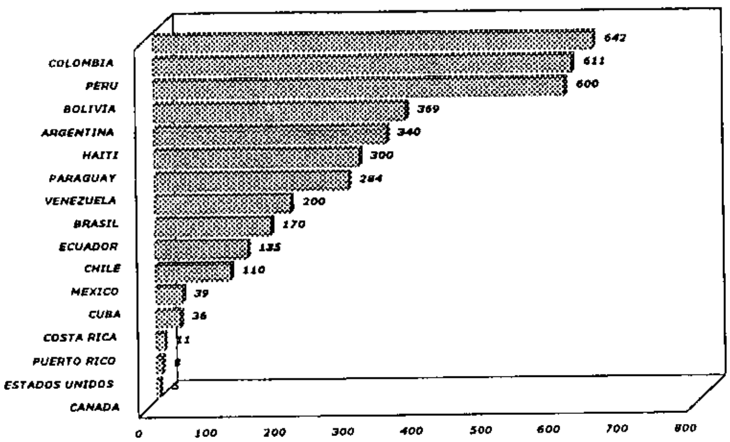


Fuente: S/Autor, *Enciclopedia Universal Ilustrada*, Editorial Espasa-Calpe, Madrid, 1990

Dicho comportamiento se puede apreciar al analizar un poco la evolución socioeconómica de cada país, ya que se ha visto que es el principal factor que induce a una alta o baja tasa de MM. Para ello es necesario hacer notar (ver Mapa 2.2) que los países con mejores niveles económicos son los que están precisamente en el norte del continente y los que sufren las mayores carencias económicas están en lo que es considerado el sur del continente, principalmente en una zona denominada como la región andina[7], por lo que no es de sorprenderse que actualmente las tasas de MM hablen de que en Estados Unidos y Canadá este tipo de muertes se dan en mucho menor grado que en el resto del continente, de hecho se ha visto que en estos países el riesgo que corre una mujer de morir durante el embarazo o el parto es 80% veces menor. Asimismo se estima que a principios de los noventa la tasa de muertes maternas era moderadamente alta en Sudamérica (menos de 50 muertes por cada 100 mil nacidos vivos); alta (entre 50 y 100) en el Caribe, Centroamérica y la región comprendida por Brasil, las Guyanas, Paraguay y Suriname; y muy alta (más de 100) en la región andina [8].

GRÁFICA 2.2

Distribución de la mortalidad materna en América por cada mil nacidos vivos (Países Seleccionados 1980-1990)



Fuente: OPS. *Las Condiciones de Salud en las Américas*. Edición de 1990.

---

[7] Los países que comprenden esta región son: Venezuela, Colombia, Ecuador, Perú, Bolivia y Chile / Anesa, Noguer y Rizzoli. *Geografía Universal Ilustrada*. Buenos Aires. Argentina. 1990.

[8] Martínez, Alejandro Francisco, *Mortalidad Materna*. COLMEX. México 1996

Si se toma una muestra de paises seleccionados y se observan sus niveles de MM, entonces se podrá apreciar mucho mejor el comportamiento ya mencionado (ver Gráfica 2.2), ya que si además de observar estos niveles de MM en cada país, se comparan con los niveles de desarrollo económico de los mismos con ayuda del Mapa 2.2, entonces se podrá tener una mejor noción de que, en efecto, los paises con menor desarrollo económico son los que presentan las mayores tasas de MM.

Sin embargo, también se podrá apreciar otro fenómeno, el de los paises en vias de desarrollo como Chile, que presenta unos niveles de MM considerablemente altos, esto puede deberse a que dentro del grupo de estos paises existen otras clasificaciones que los "categorizan" como mejores o peores dentro de su ramo, y esto depende de muchos parámetros, además de los ya vistos, como son, en particular, los de índole político-social que determinan el tipo de atención que se le da a cada uno de los factores que influyen directamente sobre la población, como son vivienda, seguridad, salud, etc.

Por otro lado, analizando más detalladamente el problema de la MM, se tiene que las principales causas de ella son: aborto, toxemias, hemorragias del embarazo y el parto, complicaciones del puerperio y otras causas directas e indirectas . Dichas causas se presentan, ya sea, en menor o mayor grado en los diferentes países y en ocasiones dichas magnitudes se presentan de manera casi proporcional independientemente de su magnitud total promedio. Esta intensidad con la que se presenta cada causa habla mucho de la organización preventiva de cada país.

Analizando las magnitudes antes mencionadas (ver Tabla 1.2) se ve que la causa más recurrente de mortandad materna no es ninguna de las especificadas, sino más bien un grupo de causas que no están especificadas, y que la causa que presenta los menores porcentajes son las denominadas causas indirectas. Este comportamiento puede deberse a que las causas que están, por así decirlo, definidas o que entran dentro de una "clasificación" (aborto, toxemias, etc.) fueron en una época las causas de MM más fuertes por lo que los Comités que se instalaron para la prevención de las mismas se dedicaron principalmente a la prevención por este tipo de causas.

En conclusión puede decirse que las medidas preventivas que se han aplicado en el continente son sumamente plausibles ya que se ha logrado bastante con ellas; aunque si bien es muy recomendable que se le de una mayor atención a las causas de MM no especificadas que entran dentro de las causas obstétricas directas, ya que sería muy bueno lograr que además de que los niveles de MM bajen hasta ser lo más despreciables posibles, lograr que estos niveles bajen de igual manera para todas las causas de mortandad materna.

Si este panorama de porcentajes similares de muertes por cada una de las causas se diera, entonces querría decir que una mujer embarazada podría presentar cualquier tipo de enfermedad con la "tranquilidad" de que tendría una mayor oportunidad de recuperarse sin problemas, e incluso de sobrevivir, ya que los porcentajes iguales estarían implicando que la atención es igualmente eficiente para cualquier área.

Ahora, el comportamiento que se ha descrito es el que presenta el continente en promedio, pero si se observa dicho comportamiento por país, entonces se podrá apreciar mucho mejor la situación existente Por ejemplo, al analizar en algunos paises (ver Gráficas 2.3, 2.4 y 2.5) el comportamiento de los niveles por causa de MM, se puede apreciar que, en efecto, la mortandad por causas no especificadas ocasiona un pico muy significativo, gracias a los altos índices de mortandad por dicha causa y este pico se ve mas obvio en el caso de la región central del continente, en donde asciende a un 70 % de muertes y en lo que respecta a las otras regiones (sur y norte) aunque este pico no es tan alarmante, se puede ver que existen paises que lo muestran, aunque, claro en estos casos se muestran además picos en otras causas de mortandad materna.

Analizando más detalladamente se observa que a pesar de que todas las regiones

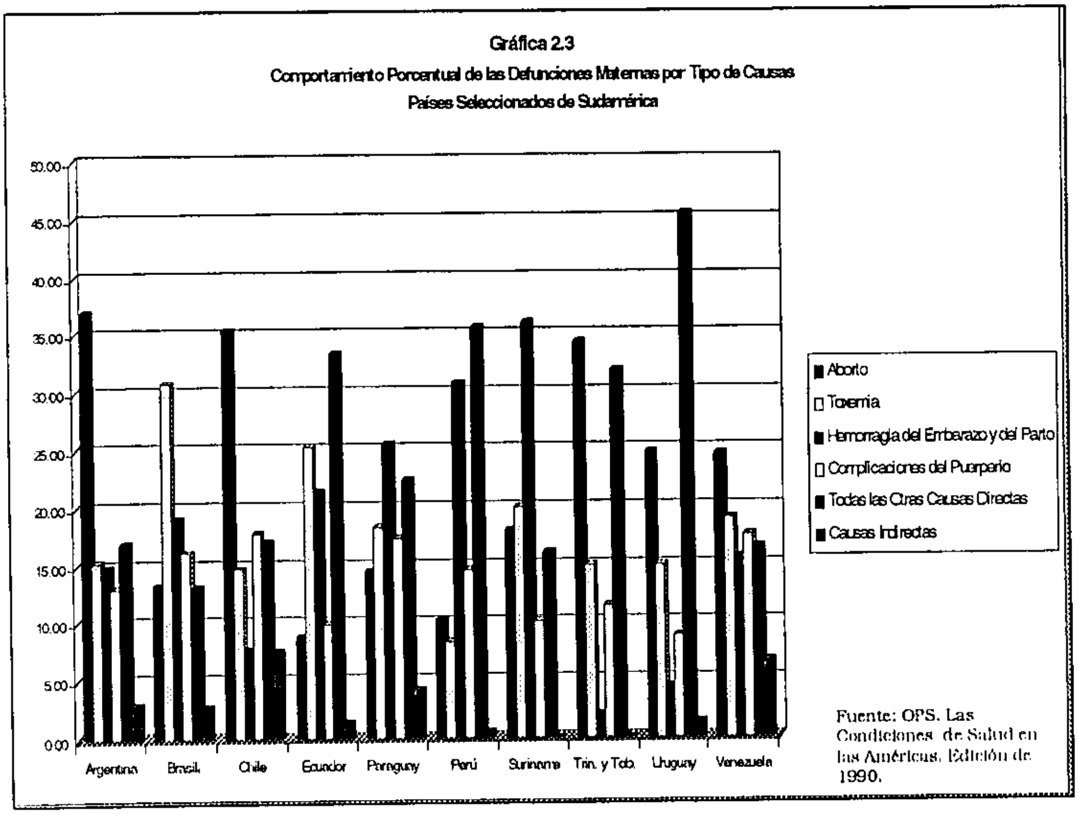
TABLA 2. 1

Distribución Porcentual de las Defunciones Maternas por tipo de Causas en Países Seleccionados

Año más Reciente

País	Causas Obstétricas Directas					Causas Indirectas	Total
	Aborto	Toxemia	Hemorragia del Embarazo y del Parto	Complicaciones del Puerperio	Todas las Otras Causas Directas		
Argentina	37.00	15.30	14.90	13.00	16.90	2.90	100.00
Brasil	13.30	30.80	19.10	16.10	13.10	7.60	100.00
Canada	8.8	12.00	19.00	30.20	19.30	10.70	100.00
Costa Rica	17.60	18.20	16.70	22.60	24.50	0.40	100.00
Cuba	19.30	7.80	6.40	15.10	26.90	24.50	100.00
Chile	35.40	14.70	7.60	17.80	17.00	7.50	100.00
Ecuador	8.80	25.30	21.40	9.80	33.30	1.40	100.00
E. U.	17.80	16.50	12.80	27.20	21.40	4.30	100.00
Guatemala	11.20	4.40	2.40	8.90	72.10	1.00	100.00
Honduras	8.70	0.70	2.20	1.20	69.30	17.90	100.00
México	9.40	17.80	19.90	10.10	36.70	6.10	100.00
Panamá	16.40	16.00	16.40	6.00	43.20	2.00	100.00
Paraguay	14.40	18.30	25.50	17.30	20.40	4.10	100.00
Perú	10.20	8.30	30.80	14.50	35.60	0.60	100.00
Puerto Rico	18.60	29.70	25.80	18.50	7.40	0.00	100.00
Rep. Dom	18.50	25.60	20.10	4.10	24.40	7.30	100.00
Suriname	18.00	20.00	36.00	10.00	16.00	0.00	100.00
Trin. y Tob.	34.30	15.00	2.00	11.40	31.80	5.50	100.00
Uruguay	24.70	15.00	4.40	8.80	45.50	1.60	100.00
Venezuela	24.60	19.00	15.60	17.50	16.50	6.80	100.00
Total	18.32	16.49	15.92	13.98	29.67	5.60	100.00

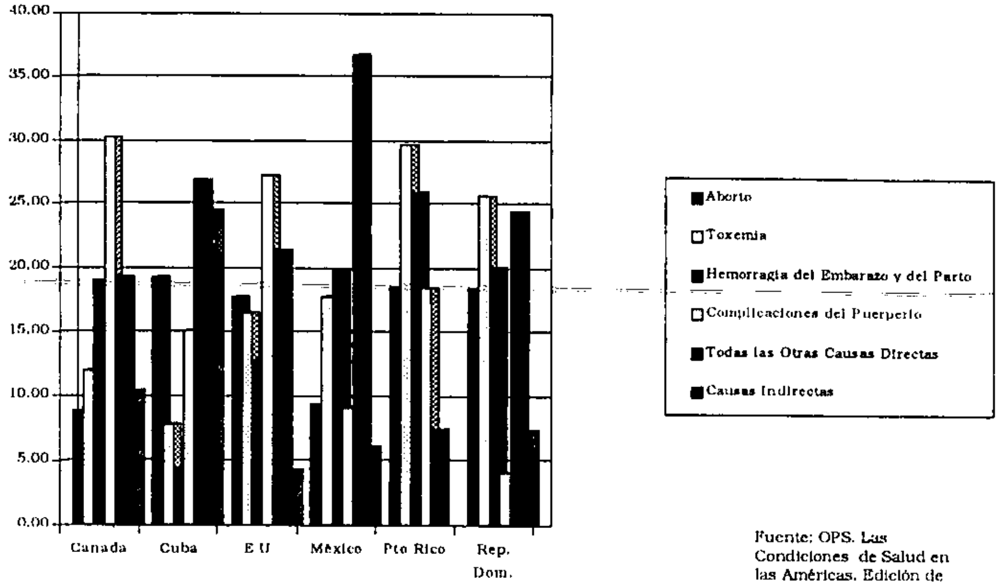
Fuente: OPS, *Las Condiciones de Salud en las Américas*, Vol. I, México, Edición 1990 tienen un comportamiento similar, cada una tiene un muy particular modo de funcionar. Por ejemplo, en el caso de la región norte los indices se comportan dentro del rango más pequeño, lo cual implica que en esta zona es muy probable que se tenga el mejor control contra la mortandad materna; en la región sur se aprecia algo similar, aunque con un rango un poco más grande, lo cu4al, se puede explicar cuando se considera que esta zona no goza de tan buena estabilidad económica como la anterior; por último, si se observa la región central podria pensarse que ahi se goza del mejor panorama, esto claro, despreciándose los niveles de mortandad por causas no especificadas, ya que si se observa este puede entonces decirse aunque se tienen un excelente comportamiento con respecto a las causas principales de MM, esto no implica que ahí se manejen las mejores estrategias en contra de la mortandad materna, debido al alto indice de mortandad por causas no especificadas.



Gráfica 2.3
Comportamiento Porcentual de las Defunciones Maternas por Tipo de Causas
Países Seleccionados de Sudamérica

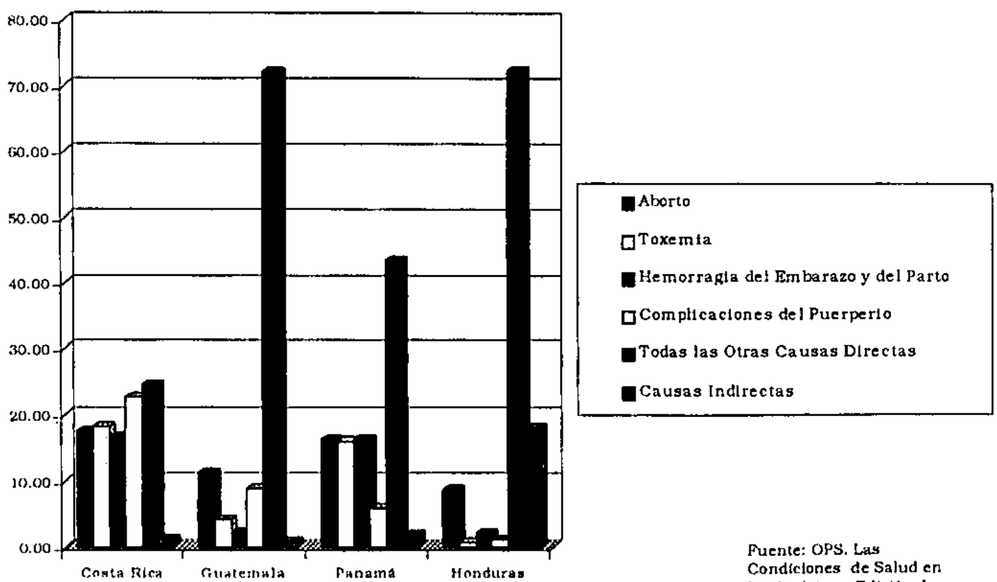
Fuente: OPS. Las Condiciones de Salud en las Américas. Edición de 1990.

Gráfica 2.4
Comportamiento Porcentual de las Defunciones Maternas por Tipo de Causas
Países Seleccionados de Norteamérica



Fuente: OPS. Las Condiciones de Salud en las Américas. Edición de 1990.

Gráfica 2.5
Comportamiento Porcentual de las Defunciones Maternas por Tipo de Causas
Países Seleccionados de Centroamérica



Fuente: OPS. Las Condiciones de Salud en las Américas. Edición de 1990.

2.3 El Caso de México

Las estadisticas vitales en México cuentan con un sin número de deficiencias que no permiten tener un panorama preciso de lo que está ocurriendo, lo que ocasiona el denominado subregistro. Sin embargo, a últimas fechas dicho problema ha disminuido un poco, dando con ello un registro estadístico relativamente confiable.

Al respecto se tienen datos de que en lo que concierne al desarrollo y evolución de las instituciones de salud en México, éstas han realizado conteos mejor realizados de la situación salubre en el país, teniéndose con ello un mejor control del tipo de estrategias preventivas a aplicar en cada una de las regiones mexicanas.

Dichos conteos muestran (con cierto margen de error), que en los últimos años la tasa de mortandad general en México ha descendido notablemente; por ejemplo, si se comparan las tasa de mortalidad general existente en fechas recientes con la de comienzos de los años cincuenta se ve una disminución considerable, ya que en la década de los cincuenta dicha tasa fue del 1.6 % por cada mil y para finales de los años ochenta fue del 0.6 % por cada mil.

Por otro lado, es importante reconocer la ardua labor que han realizado las instituciones de salud mexicanas[9] para el bienestar de la población, pero es aún más importante reconocer también que todavia queda mucho por hacer para lograr una situación óptima para la población en lo que a salud respecta, ya que si se comparan las tasas de mortandad en México con la de países primermundistas es notorio todo el trabajo que falta por hacer. Además de que se debe tomar en cuenta que los avances sanitarios son los más afectados por impactos de crisis económicas y fiscales que se han presentado en los últimos años, lo cual, significa su detenimiento en diversos planos.

2.3.1 La Mortalidad Materna (MM)

En los últimos años se ha procurado en México poner más interés en lo que al bienestar femenino concierne, tanto en educación como en salud, hogar, trabajo, etc. Para ello se han creado múltiples dependencias dedicadas exclusivamente al estudio del bienestar femenino para asi lograr una situación cada vez mejor para esta población del pais.

Así, con ayuda de estas dependencias, se ha logrado que las condiciones de salud de las mujeres mexicanas haya mejorado apreciablemente en las últimas cuatro décadas, aunque todavia existen problemas de consideración, especialmente en las zonas más desprotegidas del pais.

Asimismo, se tienen datos de que la MM, ha tenido un comportamiento global bastante satisfactorio durante los últimos años; por ejemplo, la tasa de este tipo de mortalidad fue en 1950 de 2.8 muertes por mil nacidos vivos y al paso de los años, con ayuda de diversos Programas de prevención al respecto se logró que en 1990 dicha tasa fuera de 0.51 decesos por mil nacidos vivos (ver Cuadro 2.3), lo cual, es fiel reflejo de la labor que han realizado los comités encargados de la salud de la mujer en el país. Sin embargo, si se comparan los índices vistos en México con los de otros paises; (en particular con los del primer mundo (ver Gráfica 2.1) se considera entonces que el problema de la MM en México es aún muy grave y al cual le falta mucho por resolver.

Ahora, esto es solo desde el punto de vista global, ya que si se observa más detalladamente entonces puede verse que, a pesar de todo los índices por estado son muy intermedios, dándose asi zonas en el pais en donde la mortalidad asociada al embarazo y al parto sigue siendo considerada un problema de salud pública grave y eso sin mencionar regiones en donde no sólo no han bajado los índices de MM

---

[9] Estas instituciones son en particular todas las que forman parte del Sector Salud Mexicano (IMSS, ISSSTE,etc.)

CUADRO 2.3

Evolución de la mortalidad materna en México

Año	Porcentajes (por mil nacidos vivos)
1935	6.7
1940	5.4
1945	3.9
1950	2.8
1955	2.1
1960	1.9
1965	1.6
1970	1.4
1975	1.1
1980	0.9
1985	0.6
1990	0.5

Fuente: SPP, *Anuario Estadístico de los Estados Unidos Mexicanos, 1981. México. La Salud por la Mujer en México. Programa Nacional de la Mujer, Salud y Desarrollo, Sistema Nacional de Salud*, México, 1990

sino, por el contrario han subido (ver Tabla 2.2), lo cual representa panoramas muy preocupantes en ciertas regiones del país.

Por ejemplo, las entidades federativas de la frontera norte son las que presentan los valores más reducidos contándose entre ellas a Baja California Sur, Coahuila, Nuevo León, Tamaulipas y Baja California. Los valores más elevados de las tasas de MM se presentan en las entidades que conforman el sur y centro de la República Mexicana, tal es el caso de Chiapas, Oaxaca, Puebla, Querétaro y San Luis Potosí (Ver Tabla 2.2), que están reconocidas como las entidades con más carencias sociales y económicas en el país.

Al respecto, una investigadora del Instituto Mexicano del Seguro Social (I.M.S.S.) en 1992[10] conformó, sobre la base de tasas de MM de 1937 a 1991, cuatro regiones de

[10] Reyes Faustro, Sandra, *Mortpalidad Materna en México*. Instituto Mexicano del Seguro Social, Subdirección General Médica, México, D.F., 1994

Tabla 2.2

Tasas de Mortalidad Materna por Entidad Federativa
México 1989-1992

Entidad Federativa	1989	1990	1991	1992
Estados Unidos Mexicanos	57.90	54.00	51.30	50.00
Aguascalientes	35.20	16.60	32.60	31.50
Baja California	39.00	32.50	35.40	15.10
Baja California Sur	11.00	21.50	0.00	21.50
Campeche	51.60	39.80	33.80	55.20
Coahuila	22.50	8.40	9.80	12.90
Colima	30.30	30.90	71.40	24.30
Chiapas	97.90	48.90	55.40	62.50
Chihuahua	56.70	56.00	25.80	37.30
Distrito Federal	46.80	51.30	54.90	51.20
Durango	61.10	41.80	14.50	16.80
Guanajuato	51.60	64.00	47.10	58.80
Guerrero	72.20	61.30	54.00	45.20
Hidalgo	66.70	67.10	51.80	73.60
Jalisco	36.30	38.10	27.20	32.90
México	78.60	72.10	74.90	54.40
Michoacán	42.30	30.10	32.40	52.10
Morelos	30.60	59.30	30.60	60.80
Nayarit	47.40	33.10	21.90	30.30
Nuevo León	19.20	23.30	18.40	14.30
Oaxaca	128.40	119.90	142.30	95.80
Puebla	82.10	82.40	86.60	77.60
Querétaro	81.10	57.80	48.00	54.80
Quitana Roo	55.50	25.30	44.50	68.00
San Luis Potosí	70.90	61.50	55.40	79.20
Sinaloa	31.30	14.90	26.00	18.40
Sonora	15.80	24.70	31.30	43.90
Tabasco	28.60	27.60	28.50	15.90
Tamaulipas	18.10	17.80	21.00	12.30
Tlaxcala	65.00	85.10	59.70	73.10
Veracruz	67.70	74.70	50.30	61.30
Yucatán	60.70	53.80	77.50	57.80
Zacatecas	26.30	36.70	53.60	33.60

Fuente: Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Inormática, México, 1994 clasificación de la MM, estas zonas fueron de baja, mediana, alta y muy alta MM (ver el Cuadro 2.4).

Tomando como referencia la región baja de MM observó que la probabilidad de morir durante el embarazo es un 20 % mayor en la región clasificada como media; un 50 % mayor que la región clasificada como alta y un 90 % mayor con respecto a la de muy alta mortalidad. En otras palabras, por cada 10 muertes maternas que ocurren en la región denominada como de baja mortalidad, ocurren 12 en la de media, 15 en la de alta y 19 en la muy alta.

Analizando esto es importante hacer notar que la situación poco satisfactoria desde el punto de vista regional de la MM en el pais es debido a un sin número de factores, como son los de tipo cultural, socioeconómico y demográfico existente,

CUADRO 2.4

Regionalización de la muerte materna en México (1937-1991)

Región	Estados
Baja Mortalidad	Aguascalientes, Baja California Sur, Coahuila, Distrito Federal y Nuevo León.
Mediana Mortalidad	Baja California, Campeche, Durango, Jalisco, Morelos, Nayarit, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas Tlaxcala, y Yucatán.
Alta Mortalidad	Colima, Chihuahua, Guanajuato, Guerrero, México, Michoacán, Tabasco y Zacatecas.
Muy Alta Mortalidad	Chiapas, Hidalgo, Oaxaca, Puebla, Querétaro, Quintana Roo, San Luis Potosí y Veracruz.

Fuente: Reyes Faustro, Sandra. *Mortalidad Materna en México, México, 1994* ocasiona el que haya panoramas muy diferentes entre una región y otra, dando como resultado una polarización estrepitosa entre las condiciones generales de los estados. Además de que hay estados en los que la transición demográfica que ha habido en ellos es menos avanzada dando como resultado el que cuenten con una población más joven y por ende que el número de mujeres en edades fértiles sea mayor, por lo que los problemas de índole materno-infantil tienen una importancia superior que en regiones en donde la población se caracteriza por ser una población principalmente "vieja".

Curiosamente, las zonas en donde se da este comportamiento es en donde, por lo general, se presentan los mas altos índices de pobreza y por lo mismo las condiciones alimentarias y de vivienda son verdaderamente más deplorables que en los otros estados de la República.

Si además se toma en cuenta que los sistemas de salud se concentran principalmente en las zonas metropolitanas y cubre muy débilmente las zonas rurales, en particular las de los estados más postergados, dejando con ello desatendidas zonas seriamente necesitadas, entonces se ve completo el cuadro problemático que da como resultado que estas zonas conocidas como las más pobres del país presenten los mayores índices de MM y den como resultado que los estados por si sólos, en promedio, tengan una variación muy grande entre si.

Estos índices tienen una fuerte influencia de una serie de factores que definen, incluso, que zonas son las más o menos afortunadas en el ámbito; algunos de estos factores son, por ejemplo, la situación laboral de la mujer, la escolaridad, el estado civil, etc.

3.3.3.1 MM por Edad

A pesar de las deficiencias que tengan las estadisticas vitales, es posible apreciar que el riesgo de muerte materna varía con la edad. En México, en el periodo de 1980 a 1994 las tasas de MM más bajas corresponden, en promedio, al grupo de edades de 20 a 24 años (ver Tabla 2.5). La tasa se incrementa con la edad y se observa un aumento verdaderamente considerable después de los 35 años y si se ve el último grupo de edades, se puede apreciar un comportamiento aún más alarmante; lo cual habla de que en estas edades se experimenta un riesgo mucho mayor para tener un hijo.

El riesgo más alto de las mujeres a edades más maduras indica que el desgaste físico asociado a la edad y a la paridad[11], conlleva un aumento de las posibilidades de que se presenten complicaciones durante el embarazo, el parto y el puerperio y que la letalidad de éstas sea más intensa.

De todo esto es posible desprender una recomendación para política de salud que es que se le de mayor atención durante el embarazo y el parto a las mujeres de 35 o más años, en especial a aquellas en las que se detecten embarazos de alto riesgo.

Visto del otro extremo del periodo reproductivo se aprecia también, que en las edades más jóvenes (de 15 a 19 años) las tasas que se presentan son relativamente altas también (aunque considerablemente menores que los porcentajes de las edades más maduras), estas defunciones se encuentran asociadas al hecho de que estas mujeres enfrentan un embarazo cuando aún no han concluido su propio desarrollo. Por lo general los índices que se presentan en estas edades están relacionados con otros muchos factores como son, la preparación académica (que muchas veces no es ni siquiera la básica), la zona donde vivan las mujeres y la

[11] El número de hijos es tomado en cuenta debido que se considera que la mayoría de las mujeres que tienen hijos a edades más maduras han tenido, por lo general, partos anteriores.

Tabla 2.3

Uso de Anticonceptivos Según Método y Edad 1976-1987 (según varias encuestas)

	Encuesta Mexicana de Fecundidad 1976	Encuesta Nacional de Prevalencia 1979	Encuesta Nacional Demográfica 1982	Encuesta Nacional sobre Fecundidad 1987
Uso entre todas las mujeres				
Métodos modernos	nd	21.4	26.3	29.0
Cualquier método	nd	25.2	36.2	33.9
Uso entre mujeres unidas				
Métodos modernos	23.1	32.0	41.5	44.8
Cualquier método	30.2	37.8	47.7	52.7
Distribución de métodos usados entre mujeres en edad fértil				
Pastillas	35.9	33.0	29.7	18.2
DIU	18.7	16.1	13.8	19.4
Operación femenina	8.9	23.5	28.1	36.2
Operación masculina	0.6	0.6	0.7	1.5
Inyecciones	5.6	6.7	10.6	5.3
Preservativos y espermaticidas	7.0	5.0	4.1	4.7
Métodos tradicionales	23.3	15.1	13.0	14.7
Total	100.0	100.0	100.0	100.0
Porcentaje de uso por edad entre mujeres unidas				
15-19	14.2	19.2	20.8	30.2
20-24	26.7	37.4	45.7	46.9
25-29	38.6	44.5	56.5	54.0
30-34	38.0	49.6	59.8	62.3
35-39	37.9	42.8	57.6	61.3
40-44	25.1	33.3	42.9	60.2
45-49	11.8	16.3	22.1	34.2
Uso total	30.2	37.8	47.7	52.7

Fuente: Encuesta Nacional de Fecundidad, México, 1987 difusión de programas de prevención y planificación familiar, lo cual está relacionado muchas veces con la situación socioeconómica de las mujeres.

Con respecto a la difusión del uso de métodos anticonceptivos se tiene que la información estadística disponible refleja que a fines de los años ochenta todavía era relativamente baja la proporción de mexicanas que usaban métodos anticonceptivos. Según la Encuesta Nacional sobre la Fecundidad y Salud de 1987, únicamente un tercio de las mujeres mayores de 15 años usaba algún método (el 29 % métodos modernos).

Desde luego, se trata de una proporción en aumento, aunque no posea un ritmo de crecimiento muy rápido, ya que al observar la evolución de este tipo de uso puede apreciarse un cambio en el tipo de método: en 1976 se usaban sobre todo pastillas anovulatorias (35.9 %), después el DIU (18.7 %). Diez años después había crecido principalmente la esterilización femenina (36.2 %), apenas había aumentado el uso del DIU (19.4 %) y había disminuido notablemente el uso de las pastillas (18.2 %) (ver Tabla 2.5).

A todo esto se debe tomar en cuenta que existen diferentes factores que inciden en el uso de métodos anticonceptivos. Según la Encuesta Nacional sobre la Fecundidad y Salud de 1987, el uso de estos es más frecuente en mujeres que residen en zonas urbanas, así como en mujeres que tienen un mayor nivel educativo y es por eso que es tan importante la educación y el lugar de residencia de las mujeres.

Por ejemplo en lo que respecta al lugar de residencia de la mujer se tiene que únicamente un 32.5 % de las mujeres unidas de las zonas rurales usa métodos anticonceptivos, cifra que se eleva al 59.2 % en las zonas urbanas y al 65.3 % en las zonas metropolitanas del país. Al respecto se tienen datos que los métodos anticonceptivos que se usan también varía, por ejemplo, el peso de la esterilización femenina es mayor en as zonas rurales, donde es menor el uso del DIU (ver Tabla 2.6).

En lo que respecto al nivel académico de las mujeres se tiene que en 1987 sólo un 23.7 % de las mujeres sin escolaridad utilizaba métodos anticonceptivos, mientras que entre las mujeres que habían terminado o al menos llegado a la secundaria este porcentaje era de 69.9 %. Ahora con respecto a que tipo de métodos se usan también es importante la educación, ya que, por ejemplo, el peso de las esterilizaciones es mayor entre las mujeres con bajo nivel educativo, aunque el uso más frecuente de este método se da entre las que han completado pero no superado la primaria. Las mujeres con estudios secundarios y superiores reducen la práctica de la esterilización y utilizan principalmente el DIU (ver Tabla 2.6).

Tabla 2.4

Uso de anticonceptivos según método, zona y nivel de estudios

Método	Lugar de Residencia			Escolaridad			
	Rural	Urbana	Area Metropolitana	Sin Escolaridad	Primaria Incompleta	Primaria Completa	Secundaria y más
Operación femenina	11.9	20.5	23.5	11.0	18.4	25.5	17.1
DIU	4.4	10.2	16.8	3.1	6.0	11.4	18.2
Pastillas	7.7	11.8	9.2	3.6	8.8	11.2	13.1
Métodos Tradicionales	5.3	9.4	9.1	4.4	7.0	7.4	11.9
Inyecciones	1.5	3.6	2.8	1.5	2.2	2.8	4.1
Preservativos	1.3	2.5	1.7	0.1	1.3	2.5	3.0
Operación masculina	0.1	0.7	1.6	0.0	0.6	0.4	1.6
Espermaticidas	0.3	0.7	0.6	0.0	0.5	0.7	0.9
Total	32.5	51.2	65.3	23.7	44.8	62.0	69.9

Fuente:SSA/DHS Encuesta Nacional Sobre Fecundidad y Salud, México, 1987

La enorme diferencia apreciada entre el conocimiento y el uso de los medios anticonceptivos hace pensar que la razón principal del bajo uso está referida a la dificultad de acceso a dichos métodos.

Por ejemplo se sabe, con ayuda de la Encuesta Nacional sobre Fecundidad realizada en 1987, que los anticonceptivos que más se conocen son, por ejemplo, las pastillas, el DIU y la operación de inseminación femenina, entre otros y entre estos el más usado es la operación femenina; sin embargo se sabe también de otros métodos de planificación familiar como el denominado Ritmo y el Retiro que son relativamente bien conocidos pero que, sin embargo en la actualidad no son usados básicamente por nadie[12] (ver Tabla 2.3).

Además de todas estas causas existen muchos otros factores sociales que influyen a los niveles de MM, dichos factores son múltiples e inumerables, como por ejemplo, la cultura (machismo, sumisión femenina, etc.). Pero todos estos factores son generalmente influenciados por los ya vistos por lo que no es necesario mencionarlos.

2.3.2 La Mortalidad Materna por Causas

Se ha observado que a lo largo del tiempo la MM ha tenido un comportamiento un tanto satisfactorio para la población femenina de México, lo cual muestra que la cobertura que se ha desplegado para encontrar una solución a este grave problema ha sido bastante eficiente. Sin embargo no se observa un cambio igual de "drástico" en las proporciones de la causalidad de este fenómeno. Así, estudiando los índices que existen por causa en la República Mexicana a lo largo del tiempo, se puede apreciar que más de la mitad de las muertes maternas han sido ocasionadas por hemorragias y toxemias durante el embarazo y/o el puerperio (ver Cuadro 2.4).

---

12 De esto hay que hacer notar que estos dos últimos métodos de planificación familiar ninguna es, realmente eficiente y tienen una alta probabilidad de que fallen. (Nota del autor)

En el Instituto Mexicano del Seguro Social se consideran como las cuatro principales causas de muerte materna a las hemorragias, al aborto, a la denominada sepsis puerperal. Y la intoxicación por toxemias.

Al respecto se sabe que entre estas tres primeras causas existe una relación intima, ya que muchas veces una de ellas puede ser la causante de la otra; por ejemplo, el aborto, cuando es inducido ilegalmente ocasiona muchas veces complicaciones secundarias por falta de sepsis que en general degeneran en hemorragias; y cuando el aborto no es inducido de manera "natural" tiene su origen en complicaciones hemorrágicas o sépticas, aunque bueno, las primeras son por lo general espontáneas y las segundas generalmente se observan en las formas inducidas ilegalmente.

Asimismo se ha visto que aunque la representación de cada una de estas causas es variable con el paso de los años, se considera en las últimas estadísticas obtenidas por el mismo IMSS en 1994, el aborto representa el 7.9 % de las defunciones ocurridas en los hospitales de las instituciones del Sistema Nacional de Salud. No obstante debe señalarse que, por lo menos en el caso de México, es muy frecuente que las muertes por aborto sean registradas como muertes hemorragicas o septicas[13] que directamente la ocasiona, lo que favorece cierto subregistro y dificulta precisar el panorama existente.

En lo que respecta a la mortandad por complicaciones hemorragicas del embarazo, parto y puerperio las tasas de mortandad que se han obtenido a lo largo de los años son por lo general altas, especialmente en sectores de la población con baja disponibilidad y accesibilidad a servicios institucionales o profesionales de atención materna. Esta causa de MM, a diferencia de otras causas prevenibles, se encuentra fuertemente vinculada con la capacidad resolutiva de los servicios médicos disponibles, ya que la evolución de este tipo de complicaciones es muy rápida y

[13] Rev. Med. IMSS 1999

fulminante para la salud de la mujer, por lo que para su atención requieren de unidades hospitalarias con organización, infraestructura y equipamiento médico para la atención de emergencias, así como de personal capacitado.

Otra de las causas de que las muertes por hemorragias sean las más frecuentes es por dos factores escenciales: el primero es la vigilancia prenatal y el segundo es la educación de la mujer embarazada para que pueda ser capaz de reconocer los signos y sintomas de alarma.

Por último, se ha observado que los índices de representatividad de las muertes por sepsis puerperal son debido a dos origenes principales: por una parte, la escasa accesibilidad a servicios médicos con equipamiento adecuado y personal entrenado, y por otro lado la povca atención que muchas veces se le pone a la asepsia dentro de algunas unidades médicas. Algunos de los factores de riesgo frecuentemente asociados con este tipo de muertes son las infecciones cervicovaginal que no son atendidas durante el embarazo, revisiones ginecológicas en exceso durante la vigilancia del trabajo de parto, las técnicas de asepsia inadecuadas para la atención del parto o la cesárea, la atención decadente del equipo medico encargado del parto que ocasione la evacuación incompleta de la placenta del cuerpo femenino, así como la sutura defectuosa del útero y la pared abdominal en los casos de cesárea.

Con esta causa de mortalidad materna existe una diferencia muy grancde con respecto a las otras en lo que se refiere a su prevención, ya que esta solo requiere de que la calidad de la atención médica respectiva mejore.

En conclusión es notable que la MM en México, a pesar de la disminución de los índices que se presentan hasta hoy en dia, es necesario que las autoridades médicas aseguren la capacitación permanente de personal de salud, además de una mejor cobertura en todo el país tanto de instituciones de salud como de la difusión de la educación materna prenatal.

3.1.2 Componentes Principales en una Población

Si la matriz de covarianas asociadas a un vector aleatorio X es conocida, entonces la transformación que lleva a esta variable a su correspondiente vector de componentes principales Y está dada en la siguiente definición:

Definición 3.1.1 *Si X es un vector aleatorio con media μ y matriz de covarianzas Σ, entonces la transformación de los componentes principales es la transformación:*

$$X \rightarrow Y = \Gamma'(X - \mu) \qquad (3.3)$$

donde Σ es una matriz ortogonal, $\Gamma'\Sigma\Gamma = \Lambda$ es una matriz diagonal de los valores propios de la matriz Σ, los cuales cumplen que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$; estos valores son estrictamente positivos si la matriz $\Sigma > 0$.

El j-ésimo componente principal de X está definido como el j-ésimo elemento del vector Y, cuya expresión es la siguiente:

$$Y_j = \Gamma^t_{(j)}(X - \mu) \qquad (3.4)$$

donde $\Gamma_{(j)}$ es la j-ésima columna de Γ, y es llamado el j-ésimo vector correspondiente al j-ésimo componente principal.

Estos componentes tienen el número de propiedades óptimas que se describirán más adelante, y proveen de una útil herramienta para investigar gran parte del análisis de la información del problema. Desde que el vector propio $\Gamma_{(j)}$ tiene una unidad menos puede verse que $Y_{(j)}$ es la proyección ortogonal de $(x-\mu)$ en dirección de $\Gamma_{(j)}$.

Teorema 3.1.1 *Si X es un vector de parámetros* μ *y* Σ *donde la matriz* Σ *puede descomponerse en* $\Sigma = \Gamma\Lambda\Gamma'$ *con* $\Gamma'\Gamma = I_p$ *y* $Y = \Gamma'(x-\mu)$, *entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $E(Y_j) = 0 \quad \forall j$

2. $V(Y) = \Lambda$

3. $V(Y_1) \geq \cdots \geq V(Y_p) \geq 0$

4. $\sum_{j=1}^{p} V(Y_j) = tr\,\Sigma$

5. $\prod_{j=1}^{p} V(Y_j) = |\Sigma|$

Demostración:

1.- $E(Y_j) = 0 \quad \forall j$

$$\begin{aligned} E(Y_j) &= E\left[\Gamma'_{(j)}(X-\mu)\right] \\ &= E\left(\Gamma'_{(j)}X\right) - E\left(\Gamma'_{(j)}\mu\right) \\ &= \Gamma'_{(j)}E(X) - \Gamma'_{(j)}\mu \\ &= \Gamma'_{(j)}\mu - \Gamma'_{(j)}\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.- $V(Y) = \Lambda$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\Gamma'(X-\mu)\right) \\ &= V\left(\Gamma'X\right) \\ &= \Gamma' V(X)\Gamma \\ &= \Gamma'\Gamma\Lambda\Gamma'\Gamma \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

Capítulo III

3.1 Análisis de Componentes Principales

El análisis de componentes principales (A.C.P.) es una de las técnicas del denominado Análisis Multivariado; dicho análisis se puede definir como un conjunto de técnicas que describen o modelan el comportamiento de dos o más características hechas sobre cada individuo proveniente de una o varias poblaciones.

Este análisis se considera como una técnica descriptiva para reducir la dimensión del espacio en el que originalmente se encuentra la muestra y en la que ningún supuesto distribucional se hace inicialmente. El objetivo primario es el de construir combinaciones lineales con base en las originales, tal que acumulen la mayor variabilidad de la muestra inicial.

Esto se hace porque en ocasiones se observa un conjunto de n variables que están correlacionadas entre sí, por lo que es necesario transformarlas en un conjunto con un menor número de variables que no estén tan correlacionadas, a las cuales se les llama componentes principales, estas nuevas variables guardan la información relevante de la muestra[1].

Dentro de esta técnica el objetivo principal es el de tomar sólo algunos componentes para que éstos acumulen una proporción significativa de la variable original. Si esto se puede lograr entonces se concluye que la dimensión puede reducirse.

[1] Dicha transformación se puede ver como una rotación ortogonal en un espacio de n dimensiones.

En esta técnica no se requiere de ningún modelo estadístico. En particular, ningún supuesto inicial de la distribución de probabilidad de las variables original se hace. Sin embargo si se supone que la población tiene una distribución normal, entonces la muestra observada podrá ser utilizada para inferencias estadísticas a partir de pruebas de hipótesis que ayuden a conocer la estructura de la población inicial.

3.1.1 Definición y Propiedades

En esta sección se definirá matemáticamente a los componentes principales al igual que a las propiedades que éstos satisfacen. Con ello se dice que estos resultados consideran una muestra de p individuos y que éstos se denotan como x_i; cada uno de estos individuos tiene asociadas n características y es sobre ellas que se basa el análisis de componentes principales.

La muestra antes mencionada puede agruparse en una matriz Γ de dimensión $p \times n$ con la forma:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix} \qquad p \textit{ individuos} \tag{3.1}$$

Además de esto, se puede suponer que cada individuo x_i tiene un vector de medias y una matriz de covarianzas ya definidos y dados de la siguiente manera:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

3.1.2 Componentes Principales en una Población

Si la matriz de covarianas asociadas a un vector aleatorio X es conocida, entonces la transformación que lleva a esta variable a su correspondiente vector de componentes principales Y está dada en la siguiente definición:

Definición 3.1.1 *Si X es un vector aleatorio con media μ y matriz de covarianzas Σ, entonces la transformación de los componentes principales es la transformación:*

$$X \to Y = \Gamma'(X-\mu) \tag{3.3}$$

donde Σ es una matriz ortogonal, $\Gamma'\Sigma\Gamma = \Lambda$ es una matriz diagonal de los valores propios de la matriz Σ, los cuales cumplen que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$; estos valores son estrictamente positivos si la matriz $\Sigma > 0$.

El j-ésimo componente principal de X está definido como el j-ésimo elemento del vector Y, cuya expresión es la siguiente:

$$Y_j = \Gamma^t_{(j)}(X-\mu) \tag{3.4}$$

donde $\Gamma_{(j)}$ es la j-ésima columna de Γ, y es llamado el j-ésimo vector correspondiente al j-ésimo componente principal.

Estos componentes tienen el número de propiedades óptimas que se describirán más adelante, y proveen de una útil herramienta para investigar gran parte del análisis de la información del problema. Desde que el vector propio $\Gamma_{(j)}$ tiene una unidad menos puede verse que $Y_{(j)}$ es la proyección ortogonal de $(x-\mu)$ en dirección de $\Gamma_{(j)}$.

Teorema 3.1.1 *Si X es un vector de parámetros μ y Σ donde la matriz Σ puede descomponerse en $\Sigma = \Gamma\Lambda\Gamma'$ con $\Gamma'\Gamma = I_p$ y $Y = \Gamma'(x-\mu)$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $E(Y_j) = 0 \quad \forall\, j$

2. $V(Y) = \Lambda$

3. $V(Y_1) \geq \cdots \geq V(Y_p) \geq 0$

4. $\sum_{j=1}^{p} V(Y_j) = tr\,\Sigma$

5. $\prod_{j=1}^{p} V(Y_j) = |\Sigma|$

Demostración:

1.- $E(Y_j) = 0 \quad \forall\, j$

$$
\begin{aligned}
E(Y_j) &= E\left[\Gamma'_{(j)}(X-\mu)\right] \\
&= E\left(\Gamma'_{(j)}X\right) - E\left(\Gamma'_{(j)}\mu\right) \\
&= \Gamma'_{(j)}E(X) - \Gamma'_{(j)}\mu \\
&= \Gamma'_{(j)}\mu - \Gamma'_{(j)}\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2.- $V(Y) = \Lambda$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= V\left(\Gamma'(X-\mu)\right) \\
&= V\left(\Gamma'X\right) \\
&= \Gamma'V(X)\Gamma \\
&= \Gamma'\Gamma\Lambda\Gamma'\Gamma \\
&= \Lambda
\end{aligned}
$$

3.- $V(Y_1) \geq \cdots \geq V(Y_p) \geq 0$

se cumple implícitamente de que:

$\Sigma \geq 0$

4.-

$$
\begin{aligned}
tr(\Sigma) &= tr\left(\Gamma\Lambda\Gamma^t\right) \\
&= tr\left(\Gamma\Gamma^t\Lambda\right) \\
&= tr(\Lambda) \\
&= \sum_{j=1}^{p}\lambda_j
\end{aligned}
$$

$$tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} V(Y_j)$$

5.- $\prod_{j=1}^{p} V(Y_j) = |\Sigma|$

$$
\begin{aligned}
|\Sigma| &= \left|\Gamma\Lambda\Gamma^t\right| \\
&= |\Gamma||\Lambda|\left|\Gamma^t\right| \\
&= \left|\Gamma^t\Gamma\right||\Lambda| \\
&= |\Lambda| \\
&= \prod_{j=1}^{p}\lambda_j \\
&= \prod_{j=1}^{p} V(Y_j)
\end{aligned}
$$

Definición 3.1.2 *Una combinación lineal estandarizada de $X \in \Re^p$ se define como:*

$$Y = a^t X$$

donde $a^t a = I$

Teorema 3.1.2 *Sea* $Y = a'X$ *una combinación lineal estandarizada, donde* $E(X) = \mu$ *y* $V(X) = \Sigma \geq 0$, *entonces* $V(Y) \leq \lambda_1$ *donde la descomposición espectral de la matriz* Σ *se define por* $\Sigma = \Gamma\Lambda\Gamma'$, *donde* $\Lambda = diag(\lambda_1 \cdots, \lambda_p)$, *y* $\Gamma'\Gamma = I$, *donde se satisface que* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$. *Adicionalmente* $V(\Gamma'_{(1)}X) = \lambda_1$.

Demostración:

Primeramente se tiene que todas las columnas de Γ son linealmente independientes, por lo que se puede decir que

$$a = \Gamma b$$

en donde b está definida como

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Por lo que $b' = (b_1, b_2, \cdots, b_p)$

Dado esto queda que,

$$\begin{aligned} a &= (\Gamma_{(1)}, \cdots \Gamma_{(p)}) \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_j \Gamma_{(j)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se sabe por la definición 3.2 que

$$\begin{aligned} I &= a'a \\ &= (\Gamma b)'(\Gamma b) \\ &= b'b \end{aligned}$$

Por lo que V(Y) toma la expresión:

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(a'X) \\ &= a^t V(X) a \\ &= b^t \Lambda b \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_j^2 \lambda_j \end{aligned}$$

Por lo que la V(Y) se maximiza si

$$b = e_{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y con esto se tiene que

$$a = \Gamma b = \Gamma_{(1)}$$

con lo que finalmente V(Y) se calcula como:

$$V(Y) = \Gamma_{(1)}^t \Lambda \Gamma_{(1)} = \lambda_1$$

Teorema 3.1.3 *Si $Y = a^t X$ es una combinación lineal estandarizada, la cual está no correlacionada con los primeros k componentes principales de X, definidos por:*

$$Y_j = \Gamma'_{(j)}(x - \mu) \qquad j = 1,2,\cdots k$$

Entonces V(Y) se maximiza si $a = \Gamma_{(k+1)}$

Demostración:

Antes que nada, se tiene que las columnas de Γ son linealmente independientes, por lo que se puede escribir

$$a = \Gamma b$$

de donde además se sabe que $bb' = I$, por lo que, utilizando este resultado se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= C\left(Y, \Gamma_{(j)}^t (X-\mu)\right) \\ &= C\left(a^t X, \Gamma_{(j)}^t X\right) \\ &= a^t C(X,X)\Gamma_{(j)} \\ &= a^t \Gamma \Lambda \Gamma^t \Gamma_{(j)} \\ &= b^t \Lambda \Gamma^t \Gamma_{(j)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Debido a que

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{(1)} \\ \Gamma_{(2)} \\ \vdots \\ \Gamma_{(p)} \end{pmatrix} \Gamma_{(j)} = e_{(j)},$$

se puede escribir la ecuación (3.6) como

$$\begin{aligned} b^t \Lambda e_{(j)} &= 0 \\ b_j \lambda_j &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, puede suponerse que $\lambda_j > 0 \ \forall \ j = 1,2,\cdots,k$ debido a que si alguna $\lambda_j = 0$, entonces las $\lambda_r = 0 \ \forall \ r \neq j, r = 1,\cdots,p$.

Por lo tanto

$$b_j = 0 \qquad \forall \ \ j = 1,\cdots,k$$

así se cumple que

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{j=1}^{p} b_j^2 \lambda_j \\ &= \sum_{j=k+1}^{p} b_j^2 \lambda_j \end{aligned}$$

Por lo que si $b_j = e_{(k+1)}$ V(Y) se maximiza, entonces

$$\begin{aligned} a &= \Gamma b \\ &= \Gamma e_{(k+1)} \\ &= \Gamma_{(k+1)} \end{aligned}$$

quedando así que

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\Gamma_{(k+1)}^t X\right) \\ &= \Gamma_{(k+1)}^t \Lambda \Gamma_{(k+1)} \\ &= e_{(k+1)}^t \Lambda e_{(k+1)} \\ &= \lambda_{(k+1)} \end{aligned}$$

3.1.3 El Análisis de Componentes Principales con Base en la Matriz de Correlación Poblacional

Cuando las variables a estudiar están medidas en unidades diferentes se recomienda aplicar una estandarización para que los efectos de la escala no influyan en la determinación de los componentes principales. Esta estandarización se realiza de la siguiente manera:

1 Antes que nada se debe suponer que la matriz X_{nxp} que fue definida en (3.1), tiene asociados un vector de medias y un vector de varianzas como en (3.2).

2 Con los datos anteriores se obtiene que, la estandarización para la j-ésima variable del elemento X_i es de la siguiente manera:

$$\tilde{Z} = \frac{X_{ij} - \mu}{\sqrt{\sigma_j}}, \forall j$$

Ahora, sea $\Delta = diag\Sigma$, entonces la ecuación obtenida anteriormente se puede escribir como:

$$\tilde{Z} = \left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} (X - \mu)$$

Y se sigue claramente que $E(\tilde{Z}) = 0$, y

$$\begin{aligned} V(\tilde{Z}) &= V\left[\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} (X - \mu)\right] \\ &= \left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \Sigma \left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ &= \rho \end{aligned}$$

En donde ρ denota a la matriz de correlación poblacional que puede descomponerse como $\rho = \tilde{\Gamma}\tilde{\Lambda}\tilde{\Gamma}'$ y las columnas de la matriz $\tilde{\Gamma}$ son los vectores propios de ρ, los cuales son ortogonales. Por lo tanto, la transformación que define a los componentes principales está dada por $Y = \tilde{\Gamma}'\tilde{Z}$

Y además se tiene que

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\tilde{\Gamma}'\tilde{Z}\right) \\ &= \tilde{\Gamma}\rho\tilde{\Gamma}' \\ &= \tilde{\Lambda} \end{aligned}$$

3.1.4 Componentes Principales Generados a partir de una Muestra

El objetivo de esta sección es el de analizar a todos aquellos componentes principales que son generados a partir de la matriz de covarianzas y de la matriz de correlación.

En ambos casos, se tiene que por lo general la matriz de covarianzas es una matriz desconocida, por lo que se estima una mediante la muestra observada, además de que se supone que los valores de las p variables $X_1, X_2, \ldots, X_p$ que son obtenidos de una muestra observada son concentrados en una matriz de $n\,x\,p$.

Cuando el análisis de componentes principales se basa en una matriz de covarianzas, se tiene primeramente que, debido a que dicha matriz no es conocida, este análisis se basa en una matriz de covarianzas muestral S_x donde:

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \qquad con \;\; j = 1,\cdots,p$$

es la media de los valores observados para la j-ésima variable sobre los n individuos, y

$$S_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - \overline{X}_j\right)\left(X_{ik} - \overline{X}_k\right)$$

es la covarianza muestral entre las variables X_j y X_k. De modo que $S_x = \{S_{jk}\}$ es la matriz de covarianzas de las p variables.

Definición 3.1.3 *Sea U una matriz ortogonal cuyos elementos en la diagonal son positivos y tales que*

$$U' S_x U = \tilde{\Lambda}$$

y $U'U = I_p$ *donde* $\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_p$ *son los valores propios ordenados y que están asociados a la matriz* S_x*. La transformación de los componentes principales de un vector* $X \in \Re^p$ *está definida como:*

$$Y_{px1} = U'\left(X - \overline{X}\right)$$

en donde la i-ésima nueva observación está dada por:

$$Y_i = U'\left(X_i - \overline{X}\right) \quad i = 1,\cdots,n$$

La media muestral de estas nuevas observaciones está dada como:

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U'\left(X_i - \overline{X}\right) \\ &= \frac{1}{n} U' \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

y la matriz de covarianzas muestral S_y *puede definirse por:*

$$
\begin{aligned}
S_y &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)^t \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^t\left(X_i - \overline{X}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)^t U \\
&= U^t S_x U \\
&= L
\end{aligned}
$$

En forma matricial las nuevas observaciones pueden escribirse de la forma siguiente:

$$
Y_{nxp} = \begin{pmatrix} Y_1^t \\ Y_2^t \\ \vdots \\ Y_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(X_1 - \overline{X}\right)^t \\ \left(X_2 - \overline{X}\right)^t \\ \vdots \\ \left(X_n - \overline{X}\right)^t \end{pmatrix} U
$$

En donde el j-ésimo elemento de Y_i, dado por Y_{ij} representa el puntaje del j-ésimo componente sobre el i-ésimo individuo. De tal forma que en términos de este individuo se puede escribir la transformación del componente principal como:

$$
Y_{ij} = U_{(j)}^t\left(X_i - \overline{X}\right) \; con\, i = 1,\cdots,n \;\; y \;\; j = 1,\cdots,p
$$

Por otro lado, examinando la correlación existente entre el vector de componentes principales Y y el punto X definido como:

$$
X \rightarrow Y = \Gamma^t(x - \mu)
$$

se tiene que la covarianza entre la variable Y y el punto X puede calcularse de la forma:

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= C\left(X, \Gamma^t (X-\mu)\right) \\ &= C\left(X, \Gamma^t X\right) \\ &= C(X, X\Gamma) \\ &= V(X) = \Gamma\Lambda\Gamma^t\Gamma = \Gamma\Lambda \end{aligned}$$

Con lo cual puede definirse que la covarianza entre X_k y Y_j está dada como:

$$C(X_k, Y_j) = \Gamma_{kj}\lambda_j$$

Ahora, si se define a la varianza de X como

$$V(X) = \Sigma = \{\sigma_{kj}\} \qquad j = 1,2,\ldots p$$

y a Λ como la matriz diagonal de las varianzas de Y, entonces la correlación entre las variables X_k y Y_j se obtiene de la forma:

$$\tau_{kj} = \frac{\Gamma_{kj}\lambda_j}{\sqrt{\sigma_{kk}\lambda_j}} = \frac{\Gamma_{kj}\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\sigma_{kk}}}$$

Así, puede decirse que la proporción de variabilidad explicada de X_k por la componente Y_j es τ_{kj}^2 donde

$$\tau_{kj}^2 = \frac{\Gamma_{kj}^2\lambda_j}{\sigma_{kk}}$$

Ahora, debido a que los elementos de Y no están correlacionados, cualquier subconjunto I de componentes principales explica una proporción

$$\tau_{kI}^2 = \sum_{j\in I}\tau_{kj}^2 = \frac{1}{\sigma_{kk}}\sum_{j\in I}\lambda_j\Gamma_{kj}^2$$

de la varianza de X_k. El denominador de esta última expresión representa la variación de X_k que va a ser explicada, y el numerador proporciona la variación acumulada por el conjunto I. Cuando I incluye todos los componentes principales, la proporción acumulada es uno.

La proporción de X_k explicada por Y_j con $j \in I$ puede concentrarse en una tabla como la siguiente:

τ_{ij}^2	Y_1	$\cdots$	Y_p
X_1	$\frac{\lambda_1 U_{11}^2}{\sigma_{11}}$	$\cdots$	$\frac{\lambda_p U_{1p}^2}{\sigma_{11}}$
X_2	$\frac{\lambda_2 U_{21}^2}{\sigma_{22}}$	$\cdots$	$\frac{\lambda_p U_{2p}^2}{\sigma_{22}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_p	$\frac{\lambda_p U_{p1}^2}{\sigma_{p1}}$	$\cdots$	$\frac{\lambda_p U_{pp}^2}{\sigma_{pp}}$

3.1.5 Propiedades sobre los Componentes Principales.

Las propiedades más importantes de los Componentes Principales están dadas en la Definición 3.1 y en el Teorema 3.1. Las propiedades que se darán a continuación son sólo algunas de las propiedades que sirven como herramientas para la interpretación de los resultados que se obtienen con este método estadístico.

1.- La media de las nuevas observaciones.

Esto es cuando se define como la media muestral de las observaciones originales a $\overline{X}$ y se usa como matriz muestral de covarianzas a S_x, es entonces cuando la transformación general es de la forma:

$$Y = U'(X - \overline{X})$$

donde esta transformación consta de una translación seguida de una rotación; para lo cual la media de los componentes principales es igual a cero.

Si U se denota como la matriz de los vectores propios asociada a la matriz de correlación R, entonces dicha transformación puede ser usada después de estandarizar las variables $(X - \overline{X})$, con lo que se obtiene que cada variable tiene una varianza unitaria.

2.- Valores propios iguales a cero.

Cuando algunas variables originales son linealmente dependientes, se obtiene que algunos valores propios de Σ son iguales a cero.

3.- Componentes principales bajo cambios de escala de las variables.

Los componentes principales de un vector aleatorio no son invariantes con respecto ala escala

4.- Valores propios repetidos.

En algunas ocasiones los valores propios de Σ son iguales si y solo si

$$\lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_{q+k} = \lambda$$

con lo cual puede decirse que la raíz de λ es de multiplicidad K. Los vectores propios que corresponden a las raíces múltiples no son únicos y sus correspondientes componentes principales tendrán la misma varianza.

5.- Proporción de la variabilidad explicada

El cociente

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}$$

representa la proporción de variabilidad explicada por los primeros k componentes principales.

6.- El rango de la matriz X

Si la matriz de covarianzas de la muestra X_{nxp} es de rango $k<p$, entonces la variabilidad de X puede ser explicada totalmente por los primeros k componentes principales.

3.1.6 Interpretación Geométrica de los Componentes Principales bajo Normalidad de las Observaciones

Primeramente se tiene que la función de densidad de un vector $X \in \Re^p$ puede escribirse como:

$$f_x(X) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^t\Sigma^{-1}(X-\mu)\right\}$$

siempre que X se comporte como una $N_p(\mu,\Sigma), \Sigma > 0$

Hay que tomar en cuenta que $|2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$ es una constante que no depende del vector X y además de que la forma cuadrática

$$(X-\mu)^t\Sigma^{-1}(X-\mu) = c \tag{3.7}$$

define una elipse en un espacio de dimensión p. Cuando se varía la constante c se genera una familia de elipses.

Ahora, si se toma en cuenta que la matriz Σ es definida positiva, se tiene por definición que Σ^{-1} también lo es y que además se puede escribir como:

$$\Sigma^{-1} = U\Lambda^{-1}U^t$$

con lo que se obtiene que la ecuación (3.5) puede escribirse como:

$$(X-\mu)^t U\Lambda U^{-1}(X-\mu) = c \tag{3.8}$$

y los ejes principales de esta elipse son simplemente los vectores propios de la matriz Σ. Tomando $Y = U^t(X - \mu)$, la ecuación (3.6) puede escribirse como:

$$Y^t \Lambda^{-1} Y = c \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} \frac{Y_j^2}{\lambda_j} = c$$

La magnitud del j-ésimo eje principal está dado por:

$$y_j = \pm\sqrt{\lambda_j c}$$

3.1.7 Estimación Máxima Verosímil para datos Normales

La distribución de una muestra pequeña de valores y vectores propios de una matriz de covarianzas *S*, es extremadamente complicada aún cuando no exista correlación. Una de las razones, es porque los valores propios son funciones no racionales de los elementos de *S*.

Sin embargo para una muestra grande los resultados son conocidos, y algunas de las propiedades usuales de la muestra de componentes principales para datos normales están contenidos en los resultados de máxima verosimilitud que a continuación se citan.

Teorema 3.1.4 *Para datos normales cuando los valores propios de Σ son distintos, los componentes principales y valores propios muestrales, son los estimadores máximos verosímiles de los parámetros poblacionales correspondientes.*

Demostración:

Sigue de la propiedad de invarianza de los estimadores máximo verosímiles

Teorema 3.1.5 *Para datos normales, cuando k>1, los valores propios de Σ son iguales y toman un valor común $\bar{\lambda}$, se cumple que:*

1. El estimador máximo verosímil de $\bar{\lambda}$ es $\bar{l}$, la media aritmética muestral correspondiente a los vectores propios con $\bar{\lambda}$ común.

2. Los vectores propios muestrales correspondientes a $\bar{\lambda}$, son estimadores máximos verosímiles, sin embargo no son únicos.

Nota: Para ver la demostración, consultar el libro: *An Introduction to Multivariate Analysis*, Anderson, T.W.

Teorema 3.1.6 *Sea Σ una matriz definida positiva con valores propios distintos y sean $M \approx W(\Sigma, m)$ y $W = m^{-1}M$. Considérese la descomposición espectral $\Sigma = \Gamma\Lambda\Gamma^t$ y $W = GLG'$ y sean $\Psi = diag(\Lambda)$ y $\Phi = diag(L)$. Entonces las siguientes distribuciones asintóticas se satisfacen siempre que $m \to \infty$.*

1. $\Phi \approx N_p\left(\Psi, \frac{2\Psi^2}{m}\right)$, esto es, los valores propios de W son asintóticamente normales, insesgados e independientes.

2. $g(i) \approx N_p\left(\Gamma_{(i)}, \frac{V_i}{m}\right)$, donde $V_i = \lambda_i \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_i)} \Gamma_{(i)}\Gamma_{(j)}^t$. Con $\Gamma_{(i)}$ el vector correspondiente a la i-ésima columna de la matriz Γ. Los vectores propios de W son asintóticamente normales e insesgados, con matriz de covarianza asintótica $\frac{V_i}{m}$.

3. *La covarianza entre el r-ésimo elemento de g(i) y el t-ésimo elemento de g(j) es* $-\frac{\lambda_i \lambda_j \tau_{rj} \tau_{ti}}{m(\lambda_i - \lambda_j)^2}$

4. *Los elementos de L son asintóticamente independientes de los elementos de G.*

Nota: Para ver demostración, consultar el libro: *Multivariate Analyusis*, Mardia, K.V.

Teorema 3.1.7 *Sea* $\hat{\Sigma}$ *el estimador máximo verosímil para* Σ, *basado en una muestra de tamaño n, de una población* $N(\mu, \Sigma)$. *Sean* $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_p)$ *y* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ *en donde* $\hat{\lambda}_i$ *y* λ_i *son los valores propios de* $\hat{\Sigma}$ *y* Σ *respectivamente. Sean* $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$, *entonces si* $\Sigma > 0$ *y todos los valores propios son diferentes, i.e.,* $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p > 0$, $\sqrt{n-1}\ (\hat{\lambda} - \lambda)$ *se distribuye asintóticamente como una* $N(0, 2\Lambda^2)$.

Nota: Para ver demostración, consultar Girshick, 1939

Teorema 3.1.8 *Sean las mismas definiciones y condiciones que en el teorema anterior, y sean además* $\hat{\tau}$ *y* τ *los vectores propios normalizados de* $\hat{\Sigma}$ *y* Σ *respectivamente.*

Entonces $\sqrt{n-1}\ (\hat{\tau}_i - \tau_i)$, $i = 1,2,\ldots,p$ *se distribuye asintóticamente como una* $N(0, L_i)$ *donde*

$$L_i = \lambda_i \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_i)^2} \tau_{(j)} \tau_{(j)}^t$$

Demostración:

Ver Girshick (1939)

3.1.8 Intervalo de Confianza para un Valor Propio

Como consecuencia de lo anterior es posible construir un intervalo de confianza para algún λ_j, que hable de la dispersión de este valor, este intervalo se puede obtener de la siguiente manera:

Para el Teorema 3.1.7. la expresión

$$\sqrt{n-1}\left(\hat{\lambda}_j - \lambda_j\right)$$

sigue asintóticamente $(\approx)$ una distribución $N\left(0,2\lambda_j^2\right)$ $j = 1,2,\ldots,p$. Estandarizando se obtiene:

$$\frac{\sqrt{n-1}\left(\hat{\lambda}_j - \lambda_j\right)}{\sqrt{2}\,\lambda_j} \approx N(0,1),$$

esta expresión es una cantidad pivotal con la que puede obtenerse el intervalo deseado, mediante la siguiente probabilidad:

$$P\left[z_1 < \frac{\sqrt{n-1}\left(\hat{\lambda}_j - \lambda_j\right)}{\sqrt{2}\,\lambda_j} < z_2\right] = (1-\alpha),$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[z_1 < \frac{\dfrac{\sqrt{n-1}\left(\hat{\lambda}_j - \lambda_j\right)}{\lambda_j}}{\dfrac{\sqrt{2}\,\lambda_j}{\lambda_j}} < z_2\right] = (1-\alpha)\ ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[z_1\sqrt{2} < \sqrt{n-1}\,\frac{\hat{\lambda}_j}{\lambda_j} - \sqrt{n-1} < z_2\sqrt{2}\right] = (1-\alpha) \ ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[z_1\sqrt{2} + \sqrt{n-1} < \sqrt{n-1}\,\frac{\hat{\lambda}_j}{\lambda_j} < z_2\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\right] = (1-\alpha) \ ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[\frac{z_1\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} + 1 < \frac{\hat{\lambda}_j}{\lambda_j} < \frac{z_2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} + 1\right] = (1-\alpha) \ ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[\frac{1}{1+\frac{z_2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}} < \frac{\lambda_j}{\hat{\lambda}_j} < \frac{1}{1+\frac{z_1\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}\right] = (1-\alpha) \ ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left[\frac{\hat{\lambda}_j}{1+\frac{z_2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}} < \lambda_j < \frac{\hat{\lambda}_j}{1+\frac{z_1\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}\right] = (1-\alpha) \ ,$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza para λ_j al $(1-\alpha)\times 100\%$ está definido por:

$$\left(\frac{\hat{\lambda}_j}{1+\frac{z_2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}, \frac{\hat{\lambda}_j}{1-\frac{z_2\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}\right) \tag{3.9}$$

Para muestras grandes Anderson sugiere la siguiente relación[2].

[2] (ver Anderson, 1982 p.314)

$$\frac{l_1}{\sum_{j=1}^{p}\hat{\lambda}_j} \leq \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j} \leq \frac{l_2}{\sum_{j=1}^{p}\hat{\lambda}_j}$$

3.1.9 Pruebas de Hipótesis sobre los Componentes Principales

Con frecuencia se debe contar con un procedimiento para decidir cuantos (k) componentes principales incluyen la variación que se considera importante de la matriz de observaciones X. Claramente uno esperaría ignorar $(p-k)$ si sus correspondientes valores propios son iguales a cero, pero esto ocurre sólo cuando la matriz Σ asociada a la muestra es de rango $(p-k)$; i.e., $(p-k)$ valores propios son iguales a cero; caso que generalmente en la práctica no ocurre.

Una segunda alternativa sería la de hacer una prueba de hipótesis, en la que la proporción de variabilidad explicada por las k componentes sea menor que un cierto valor π. Otra hipótesis que puede probarse es cuando los últimos $(p-k)$ valores propios son iguales. Esto implica que la variación es igual en todas las direcciones del espacio generado por los últimos $(p-k)$ vectores propios, esta situación es denominada variación isotrópica e implica que si alguna componente es eliminada, entonces deben ser eliminadas todas las demás. Este tipo de pruebas pueden también realizarse con la suposición de que la muestra original es normal.

Ahora, los tipos de pruebas que pueden realizarse con Componentes Principales son las siguientes:

1. Prueba de la proporción de variabilidad explicada por los primeros k componentes principales.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los valores propios de Σ y $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_p$ los valores propios muestrales de S. El juego de hipótesis a probar es el siguiente:

$$Ho: \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} = \pi \quad \text{con } k < p \quad \text{vs} \quad Ha: no\ Ho.$$

Sea $\hat{\pi}$ el estimador muestral de π, y por el teorema 3.1.7 se sabe que los elementos de $\hat{\lambda}_j$ tienen una distribución normal asintótica, y $\hat{\pi}$ tiene una distribución normal[3] con media π y varianza de la forma:

$$V(\hat{\pi}) = \frac{2tr(\Sigma^2)}{(n-1)(tr(\Sigma))^2}\left(\pi^2 - 2c\pi + c\right), \tag{3.10}$$

donde el número c esta definido como:

$$c = \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2} \tag{3.11}$$

La estimación de la $V\wedge(\pi)$ puede hacerse utilizando la matriz Sx y los valores propios de ésta, es decir

$$\hat{\Sigma} = S$$

$$tr(\hat{\Sigma}) = \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_j$$

Como consecuencia resulta que:

$$V(\hat{\pi}) = \frac{2tr(S^2)}{(n-1)(tr(S))^2}\left(\pi^2 - 2\hat{c}\pi + \hat{c}\right)$$

Entonces queda que:

$$\hat{\pi} \approx N(\pi, V(\hat{\pi})) \tag{3.12}$$

De manera alternativa, puede utilizarse un intervalo estandarizado en esta expresión (3.12), el cual tiene un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$ y que se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{(\hat{\pi}-\pi)}{\sqrt{V(\hat{\pi})}} \approx N(0,1)$$

y calculando se obtiene que

$$P\left(z_1 < \frac{(\hat{\pi}-\pi)}{\sqrt{V(\hat{\pi})}} < z_2\right) = (1-\alpha) ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left(z_1\sqrt{V(\hat{\pi})} < (\hat{\pi}-\pi) < z_2\sqrt{V(\hat{\pi})}\right) = (1-\alpha) ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left(z_1\sqrt{V(\hat{\pi})} - \hat{\pi} < -\pi < z_2\sqrt{V(\hat{\pi})} - \hat{\pi}\right) = (1-\alpha) ,$$

$\Leftrightarrow$

$$P\left(\hat{\pi} - z_2\sqrt{V(\hat{\pi})} < \pi < \hat{\pi} - z_1\sqrt{V(\hat{\pi})}\right) = (1-\alpha)$$

Se define $z_1 = -z_2$ para minimizar la longitud del intervalo, esta definición conduce a la expresión final la cual está dada por:

$$\left(\hat{\pi} - z_2\sqrt{V(\hat{\pi})}, \hat{\pi} + z_2\sqrt{V(\hat{\pi})}\right) \tag{3.13}$$

En donde z_2 es el cuantil de $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ de una normal estándar.

2. Prueba de Esfericidad.

Esta prueba es usada para determinar el número de componentes principales que serán utilizados para describir el comportamiento de los datos. En esta área se desea probar que los últimos $(p-k)$ valores propios son iguales, es decir, las últimas $(p-k)$ componentes principales tienen la misma varianza; esto significa que si se incluye una de ellas deben incluirse todas las demás.

El juego de la hipótesis a probar está dado por:

$$Ho: \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_p \qquad vs \qquad Ha: no\ Ho$$

La estadística de prueba se obtiene con el método de la razón de verosimilitud, el cual tiene asociada la siguiente expresión:

$$-2\ln\Lambda = np[a - \ln(g) - 1] \text{ ,}$$

donde la constante a se define como (3.2). Y como a y g corresponden a la media aritmética y geométrica de los valores propios de $\hat{\Sigma}^{-1}S$, donde $\hat{\Sigma}$ es el estimador máximo verosímil de Σ bajo la hipótesis nula. Sea

$$a_o = \frac{\sum_{j=k+1}^{p} \hat{\lambda}_j}{(p-k)} \tag{3.14}$$

que denota la media aritmética de los valores propios $\hat{\lambda}_{k+1},\ldots,\hat{\lambda}_{k+p}$ asociados a $\hat{\Sigma}$ y

$$g_o = \left(\prod_{j=k+1}^{p} \hat{\lambda}_j \right)^{\frac{1}{(p-k)}}$$

la media geométrica. Por lo tanto, la estadística de prueba es

$$-2\ln\Lambda = np[a_o - \ln(g_o) - 1]$$

En donde n es el tamaño de muestra y p es la dimensión, asi $-2\ln\Lambda$ en la ecuación (3.14) se distribuye como una X_r^2, donde r es el numero de grados de libertad. Siguiendo la aproximación de Bartlett[4], la ecuación (3.14) puede escribirse como:

[4] Fuwe citada por Mardia (1982, pp.236)

$$\left(n - \frac{2p+11}{6}\right)(p-k)\ln\left(\frac{a_o}{g_o}\right) \approx X_r^2 \tag{3.15}$$

donde $r = \frac{1}{2}(p-k+2)(p-k-1)$.

3.1.10 Reglas de Corte

Además de las pruebas de hipótesis mencionadas anteriormente, existen "reglas" que a pesar de ser subjetivas pueden ser de gran utilidad para determinar el número de componentes principales que deben ser retenidos. Dichas "reglas de corte" son las siguientes:

1. Una forma práctica de observar empíricamente la contribución de varios componentes principales (Cattell, 1966) es observar la gráfica conocida en la literatura como "Screeplot", la cual consiste en graficar el valor propio λ_j contra j. Dicho diagrama puede indicar claramente dónde terminan los valores propios grandes y en que punto empiezan los valores pequeños.

2. Incluir los componentes principales que en conjunto acumulen un 90% de la variación total.

3. (Kaisser) Excluir aquellos componentes cuyos valores propios sean menores que la media, es decir, menores que la unidad si es que se ha utilizado la matriz de correlación.

3.2 Análisis de Discriminante

Esta es una técnica que tiene como objeto la clasificación entre una variable categórica y un grupo de variables interrelacionadas, más específicamente, clasifica individuos en uno y sólo uno de los t grupos o poblaciones que se tienen como alternativas.

Dicha asignación puede ser basada en supuestos distribucionales que se hacen sobre la muestra que ha sido observada, como son:

1. Discriminación Normal. Es cuando se supone que las poblaciones tienen una distribución normal multivariada.

2. Discriminante Logístico. Es cuando se supone que la forma específica de las densidades es desconocida, pero el logaritmo del cociente de las densidades es lineal en los parámetros asociados.

3. Discriminante no Paramétrico. Aquí se supone que la distribución de la muestra no es conocida y debe ser estimada.

Para el trabajo a realizar, es conveniente hacer notar que se utilizará el método de discriminación normal, en donde debe de considerarse que las g poblaciones o grupos se van a denotar como P_i con $i = 1,2,\ldots,g$. Ahora, supóngase que existe una función de densidad de la forma

$$f_i(x) \in \Re^p$$

asociada a cada población P_i, tal que el vector de observaciones X de un individuo proveniente de la población P_i tiene una función de distribución poblacional (f.d.p.) de la forma $f_i(x)$. Con lo cual puede concluirse que el análisis discriminante tiene como finalidad el asignar un individuo con vector de la forma X a uno y sólo uno de estos t grupos con base a sus q caracteristicas, por lo que se hará indistinta referencia al vector de caracteristicas X y la individuo, debido a que sus caracteristicas están en dicho vector.

Por otro lado es de considerarse la necesidad de utilizar reglas de asignación lo más confiables posibles. Para ello puede establecerse la siguiente definición:

Definición 3.2.1 *Una regla discriminante corresponde a una división del espacio* $\Re^p$ *en regiones disjuntas (o mutuamente excluyentes),* $R_1, R_2, \ldots, R_g$ $\left(\bigcup_{i=1}^{g} R_i \equiv \Re^p\right)$, *donde la regla está dada como:*

$$asignar\ X\ a\ P_i\ si\ X \in R\ con\ i = 1, \ldots, g$$

La discriminación es más exacta en la medida en que P_i tenga la mayor parte de su probabilidad centrada en R_i para cada i.

Aunque ya en la práctica es muy complicado hallar casos en los que la función de distribución $f_i(x)$ es totalmente conocida, una excepción de uso común de esta situación se presenta cuando la forma funcional de la f.d.p. para cada una de las poblaciones es conocida, pero existen parámetros que deben ser estimados. La estimación de ello está basada en una matriz muestral $X_{n \times p}$ cuyos renglones están repartidos en t grupos de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_t \end{pmatrix}$$

donde la matriz X_i de $n_i \times p$ representa una muestra de n_i individuos de la población P_i, definida por:

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{i1}^t \\ X_{i2}^t \\ \vdots \\ X_{in_i}^t \end{pmatrix}$$

con $i = 1,2,\ldots,t$. Nótese que los individuos están asignados en los renglones de la matriz X, de los cuales a su vez están agrupados en categorías.

3.2.1 Propiedades Generales de la Discriminación Normal

La discriminación normal, como se mencionó anteriormente, esta basada en un supuesto de normalidad de la matriz X, es decir, se supone que cada una de las g poblaciones tienen asociada una densidad normal multivariada. Además, si se sabe que los parámetros de la f.d.p. $f_i(x)$ son conocidos para cada i, entonces la discriminación se centra en encontrar una regla que maximice la función de versimilitud. Cuando la función de distribución es conocida pero sus parámetros aún deben ser estimados, estos se reemplazan por los estimadores máximo verosímil y la técnica de nuevo maximisa la función de verosimilitud.

Bajo el supuesto de normalidad de las observaciones, existen dos tipos de técnicas generales que son: Discriminación Lineal y Discriminación Cuadrática, las cuales varían con respecto al tipo de población que se esté analizando y se comportan de la siguiente manera:

1. Discriminación Cuando las Poblaciones son Conocidas.

   Regla de Asignación por Máxima Verosimilitud.

   Supóngase que cada una de las poblaciones Π_i se distribuyen como normales multivariadas, es decir, si X proviene de P_i, entonces $X \approx N(\mu_i, \Sigma_i)$.

Sea la f.d.p. del i-ésimo grupo $f_i(x)$ y $L_i(x)=f_i(x)$ la verosimilitud del vector de observaciones X.

A continuación se definirá la manera de construir las regiones de clasificación bajo el método de máxima verosimilitud.

Definición 3.2.2 *La regla discriminante de máxima verosimilitud (r.d.m.v.) que asigna una observación X, en una de las poblaciones $P_1,\ldots,P_g$, consiste en asignar X a la población que tiene la verosimilitud mas grande. Es decir, la r.d.m.v. dice que se debe asignar X a P_i si:*

$$L_i(x)=max L_k(x)$$

En otras palabras se debe encontrar la población P_i que maximice la verosimilitud del vector X, por lo que las regiones de clasificación puede escribirse en este caso como:

$$R_i=\{X\in\Re^p | L_i(x)\geq L_k(x)\quad k=1,2,\ldots,g\}$$

para i=1,2,....,g

- Discriminación Lineal

Aqui se considera que las matrices de covarianzas Σ son comunes para las g poblaciones, es decir, cada muestra X_i se distribuye normal de parámetros μ_i y Σ para todo indice $i=1,2,...g$.

Teorema 3.2.1 *En el caso en el que P_i tiene asociada una densidad $N(\mu,\Sigma)$, de parámetros conocidos, la regla de asignación máximo verosímil asigna X a P_i si*

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

$$PL_i = a_i^t\left(X - \frac{1}{2}\mu_i\right) \text{ con } i = 1,2,\ldots g, \tag{3.16}$$

donde $PL_i(X) = \max_j PL_j(X)$. *PL denotará el puntaje lineal.*

Demostración:

Primeramente se debe demostrar que el maximizar la fnción de verosimilitud $L_i(x)$, es igual a maximizar la expresión:

$$|2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma^{-1}(X-\mu_i)\right\},$$

lo cual es equivalente también a maximizar la expresión

$$-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma^{-1}(X-\mu_i). \tag{3.17}$$

Ahora, desarrollando esta ecuación se obtiene que:

$$\mu_i^t\Sigma^{-1}X - \frac{1}{2}\mu_i^t\Sigma^{-1}\mu_i,$$

que es la equivalentcia a maximisar, donde $\frac{1}{2}X^t\Sigma^{-1}X$, no depende de i. Ahora, si se define $a_i = \Sigma^{-1}\mu_i$, la ecuación anterior puede entonces escribirse como:

$$a_i^t\left(X - \frac{1}{2}\mu_i\right).$$

Con lo que se tiene que la regla de asignación máximo verosímil asigna X as la población P_i, si

$$PL_i(x) = \max_j\left\{a_j^t\left(X - \frac{1}{2}\mu_i\right)\right\}$$

De esta manera las regiones R_i mutuamente excluyentes (o disjuntas con probabilidad 1), en las que se divide el espacio $\Re^p$ están definidas por:

$$asignar\ X\ a\ P_i\ si\ X \in R_i$$

$$asignar\ X\ a\ P_i\ si\ X \in R_i$$

donde

$$R_i = \{X \in \Re^p | PL_i(x) \geq PL_k(x) \quad \forall k\},$$

$i = 1,2,\ldots,g$ y $PL_i(x)$ se define como en (3.16).

Si varias verosimilitudes tomaran el mismo valor máximo, entonces cualquiera de ellas puede ser tomada. Este caso no es importante ya que desde el punto de vista práctico la probabilidad de dos verosimilitudes tomen el mismo valor máximo es casi cero.

Teorema 3.2.2 *Si X proviene de una población P_i con densidad asociada $N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i = 1,2,\ldots g$, y $\Sigma > 0$, donde los parámetros asociados son conocidos, entonces la regla discriminante de máxima verosimilitud que asigna X a P_i donde $k \in \{1,2,\ldots,g\}$, es aquel valor de i que minimiza la distancia de Mahalanobis*

$$(X - \mu_i)' \Sigma^{-1} (X - \mu i)$$

Ahora, para g=2 grupos, la regla asigna X a

$$a = \begin{cases} P_1\ si\ \alpha' (X - \mu) > 0 \\ \\ P_2\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde $\alpha = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$ *y* $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$.

Demostración:

Primeramente , se debe demostrar que

$$(X - \mu_i)' \Sigma^{-1} (X - \mu_i)$$

es la regla discriminante de máxima verosimilitud que asigna X a P_i donde $k \in \{1,2,\dots,g\}$, es aquel valor de I que minimiza la distancia de Mahalanobis.

Entonces se tiene que, la i-ésima verosimilitud está dada por:

$$L_i(x) = |2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma^{-1}(X-\mu_i)\right\}$$

Ahora, el maximizar esta función es equivalente a minimizar la forma cuadrática del exponente que es:

$$(X-\mu_i)^t \Sigma^{-1}(X-\mu i)$$

Por otro lado se debe demostrar también el hecho de que para asignar X a P_i debe cumplirse que

$$L_1(x) > L_2(x)$$

Esta desigualdad se satisface si y solo si

$$(X-\mu_1)^t \Sigma^{-1}(X-\mu_1) < (X-\mu_2)^t \Sigma^{-1}(X-\mu_2)$$

Desarrollando a esta última desigualdad se obtiene fácilmente que

$$(\mu_1-\mu_2)^t \Sigma^{-1}\left(X-\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\right) > 0, \tag{3.18}$$

haciendo $\alpha = \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$ y $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\alpha^t(X-\mu) > 0$$

- Discriminación Cuadrática

Aquí se considera el caso en el que g poblaciones P_i tienen asociadas una densidad normal de parámetros μ_i y Σ_i, $i = 1,2,\ldots,g$. La regla discriminante de máxima verosimilitud queda establecida en el siguiente teorema

Teorema 3.2.3 *La regla discriminante de máxima verosimilitud asigna X a P_i si $L_i(x) \geq L_k(x)$ $\forall k \neq i$, lo que ocurre si y solo si:*

$$R_i = \left\{X \in \Re^p : (X-\mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i) \leq (X-\mu_k)^t \Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)\right\} \quad (3.19)$$

$k = 1,2,\ldots,g \qquad i = 1,2,\ldots,g$

Demostración:

Primeramente se tiene que la desigualdad de las verosimilitudes $L_i(x)$ y $L_k(x)$ puede escribirse como:

$$|2\pi\Sigma_i|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i)\right\} \geq |2\pi\Sigma_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_k)^t \Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)\right\}$$

que ocurre si y sólo si

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i)\right\} \geq \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_k)^t \Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)\right\}$$

que pasa si y sólo si

$$-\frac{1}{2}(X-\mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i) \geq -\frac{1}{2}(X-\mu_k)^t \Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)$$

por lo que las regiones de clasificación se definen como:

$$R_i = \left\{X \in \Re^p : (X-\mu_i)^t \Sigma_i^{-1}(X-\mu_i) \leq (X-\mu_k)^t \Sigma_k^{-1}(X-\mu_k)\right\} \quad (3.20)$$

2. Discriminación bajo estimación

Regla de Asignación por Máxima Verosimilitud

La regla discriminante muestral de máxima verosimilitud se utiliza cuando la forma de las distribuciones de los grupos $P_1, P_2, \ldots, P_g$, son conocidas, pero que sus parámetros deben aún ser estimados con base en la matriz de datos $X_{n \times p}$. Supóngase que los renglones de X están repartidos de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_g \end{pmatrix}$$

y que además, la densidad asociada a P_i es $f_i(x|\Theta_i)$ donde Θ_i es el un vector de parámetros desconocidos. Entonces la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud queda definida como:

Definición3.2.3 *La regla discriminante muestral de máxima verosimilitud que asigna una observación X, en una de las poblaciones $P_1, P_2, \ldots, P_g$, consiste en asignar X a la población que tiene la verosimilitud muestral más grande.*

Entonces, la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud dice que se debe asignar X a P_i si

$$\hat{L}_i(x) = \max_x \hat{L}_k(x).$$

Entonces las regiones de clasificación pueden escribirse en este caso como:

$$R = \left\{X \in \Re^p \middle| \hat{L}_i(x) \geq \hat{L}_k(x) \quad k = 1,2,\ldots,g\right\}$$

para $i = 1,2,\ldots,g$.

Ahora, como en el caso anterior aquí también se deben de describir los dos casos posibles: la discriminación normal y la cuadrática; en la primera se considera que los g grupos tienen medias diferentes, comparten la misma matriz de covarianzas; en la segunda, se considera que a cada grupo le corresponde una media y una matriz de covarianzas diferente.

- Discriminación Lineal.

Como se dijo, aquí se considera una media diferente y una matriz de covarianzas común para las g poblaciones que se denominarán como μ_i y Σ para cada grupo i, sean los estimadores máximo verosímiles de estos parámetros dados de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \overline{X}_i \quad i = 1,2,\ldots,g, \\ &= \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad i = 1,2,\ldots,g \end{aligned} \tag{3.21}$$

y

$$W = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{g}\ \sum_{j=1}^{g}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)'$$

Ahora, en el caso en que los g grupos tienen asociadas poblaciones normales cada uno con diferente valor de medias y matriz de covarianzas, y si para la i-ésima población estos parámetros están dados por μ_i y Σ_i, entonces los estimadores máximo verosímiles están definidos como:

$$\hat{\mu}_i = \overline{X}_i \quad i = 1,2,\ldots,g,$$

y

$$\hat{\Sigma}_i = S_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)' \tag{3.22}$$

En donde la relación existente entre las matrices S_i y W es la siguiente:

$$W = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{g} n_i S_i$$

Ahora, la matriz de covarianzas es desconocida por lo que es estimada mediante la matriz W., y a continuación se enunciarán los teoremas que establecen mas formalmente las expresiones que definen la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud y que se obtienen reemplazando los parámetros de la función de distribución poblacional por los estimadores máximo verosimiles.

Teorema 3.2.4 *En el caso en el que P_i tiene asociada una densidad $N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i = 1,2,\ldots,g$ de parámetros desconocidos, la regla muestral por máxima verosimilitud asigna X a P_i si $PL_i(x) = maxPL_j(x)$, donde*

$$PL_i = \left\{ a'\left(X - \frac{1}{2}\overline{X}_i \right) \right\} \quad i = 1,2,\ldots,g \quad a = W^{-1}\overline{X}_i \ \text{y} \ \overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} .$$

Demostración:

El resultado sigue del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.5 *Si X_i proviene de una población $N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i = 1,2,\ldots,g$ entonces la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud que asigna X a P_k donde $k \in \{1,2,\ldots,g\}$, es aquel valor de i que minimiza la distancia de Mahalanobits estimada de la forma:*

$$\left(X - \overline{X}_i\right)' W^{-1} \left(X - \overline{X}_i\right).$$

Ahora, para g=2, la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud es de la forma:

$$asigna\ X\ a = \begin{cases} P_1 & si\ y\ solo\ si\ a'\left(X - \overline{X}\right) > 0 \\ P_2 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración:

Se sigue de aplicar el Teorema 3.2.2 sustituyendo los parámetros por los estimadores máximo verosímiles.

Por lo que las regiones de clasificación pueden ser escritas como:

$$R_i = \left\{ X \in \Re^p \middle| a'\left(X - \frac{1}{2}\overline{X} \right) > 0,\ i \neq k \right\},$$

$$= \left\{ X \in \Re^p \middle| a'\left(X - \frac{1}{2}(\overline{X}_i - \overline{X}_k) \right) > 0,\ i \neq k \right\}$$

- Discriminación cuadrática

Aquí se considerará el caso en el que tanto las medias como las matrices de covarianzas, son diferentes para cada uno de los grupos y los estimadores máximo verosímiles están dados como en (3.19) y (3.20). Si estos estimadores son sustituidos en el Teorema 3.2.3 para obtener el siguiente resultado:

Teorema 3.2.6 *En el caso en el que P_i tiene densidad asociada $N_p(\mu_i, \Sigma)$ $i = 1,2,\ldots,g$, de parámetros desconocidos, la regla discriminante muestral de máxima verosimilitud asigna X a P_i, si $L_i(x) \geq L_k(x)\ \forall\ k \neq i$, lo que ocurre si y solo si*

$$R_i \left\{ X \in \Re^p \middle| \left(X - \overline{X}_i\right)' S_i^{-1}\left(X - \overline{X}_i\right) < \left(X - \overline{X}_k\right)' S_k^{-1}\left(X - \overline{X}_k\right), k = 1,\ldots,g,\ pra\ i = 1,\ldots,g \right\}$$

Demostración:

Se sigue del Teorema 3.2.3 reemplazando los parámetros por los estimadores máximos verosímiles

3.2.2. Regla Discriminante de la Razón de Verosimilitudes

Una alternativa a la regla de asignación máximo verosímil es utilizar el criterio de la razón de verosimilitud[5]. Considerando el caso en que si X es un individuo que pertenece a P_r entonces X se distribuye como $N_p(\mu_r, \Sigma)$. El criterio consiste en calcular las verosimilitudes de las hipótesis:

H_r : X y los renglones de X_r pertenecen a P_r,
y las filas de X_k pertenecen al grupo de P_k, $k \neq r$

La regla consiste en asignar X a la población cuya hipótesis H_r tiene la mayor verosimilitud; esta verosimilitud bajo H_r esta dada por:

$$L_r(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_g, \Sigma) = \prod_{i=1}^{g} \prod_{j=1}^{g} |2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X_{ij} - \mu_i)' \Sigma^{-1} (X_{ij} - \mu_i)\right\} \tag{3.23}$$

$$\times |2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \mu_r)' \Sigma^{-1} (X - \mu_{ri})\right\}$$

Ahora, si los parámetros son conocidos entonces, la region de clasificación en P_r es:

$$R_r = \left\{X \in \Re^p \middle| L_r(x) \geq L_k(x) \ \forall\ r \neq k\right\}, \text{ para } r = 1,2,\ldots,g .$$

[5] Anderson (1958), pp. 141

donde $L_r(x)$es la función de verosimilitud de la r-ésima población definida en la ecuación (3.22).

Si los parámetros son desconocidos, entonces estos deben de reemplazarse por sus correspondientes estimadores máximo verosímiles. Si se define como $\hat{\mu}_k^{(r)}$ y $\hat{\Sigma}^{(r)}$ a los estimadores para la media y para la matriz de covarianzas asociados al k-ésimo grupo para la hipótesis H_r, toman entonces las siguientes expresiones:

$$\hat{\mu}_k^{(r)} = \begin{cases} \overline{X}_k^{(r)} = \dfrac{n_r \overline{X}_r + X}{n_r + 1} & si\ k = r \\ \\ \overline{X}_k & si\ k \neq r \end{cases}$$

y

$$\hat{\Sigma}^{(r)} = W^{(r)} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{g} \left(n_k + I_{\{r\}}(k)\right) S_k^{(r)}\right],$$

donde

$$S_k^{(r)} = \begin{cases} S_k = \dfrac{1}{n_k}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_k}\left(X_{kj} - \overline{X}_k\right)\left(X_{kj} - \overline{X}_k\right)^t & si\ k \neq r \\ \\ S_r^{(r)} = \dfrac{1}{n_r + 1}\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{n_r}\left(X_{kj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{kj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)^t + \left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)^t\right] & si\ k = r \end{cases}$$

Por lo que las regiones de clasificación están dadas por:

$$R_i = \left\{X \in \Re^p \middle| \hat{L}_r(X) \geq \hat{L}_k(X)\ \ \forall\ r \neq k\right\} \quad r = 1,2,\ldots,g$$

y donde

$$\hat{L}_r(X) = \prod_{i=1}^{g} \prod_{j=1}^{n_j} \left|2\pi\Sigma\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(X_{ij} - \overline{X}^{(r)}\right)^t W^{(r)-1}\left(X_{ij} - \overline{X}^{(r)}\right)\right\} \tag{3.24}$$

$$\times \left|2\pi\Sigma\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(X - \overline{X}^{(r)}\right)' W^{(r)-1}\left(X - \overline{X}^{(r)}\right)\right\}, \quad r = 1,2,\ldots,g$$

De la ecuación anterior se puede observar que las regiones de clasificación están en términos de la matriz $W^{(r)}$ se puede simplificar cuando se desarrolla la siguiente desigualdad:

$$(n_r+1)S_r^{(r)} = \sum_{j=1}^{n_r}\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)' + \left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)'$$

$$= \sum_{j=1}^{n_r}\left(X_{rj} - \overline{X}_r + \overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r + \overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)' + \left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)'$$

$$= \sum_{j=1}^{n_r}\left(X_{rj} - \overline{X}_r\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r\right)' + \sum_{j=1}^{n_r}\left(\overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(\overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)' + \left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)'$$

$$= n_r S_r + n_r\left(\overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(\overline{X}_r - \overline{X}_r^{(r)}\right)' + \left(X - \overline{X}_r^{(r)}\right)\left(X_{rj} - \overline{X}_r^{(r)}\right)'$$

$$= n_r S_r + n_r\left(\overline{X}_r - \frac{n_r\overline{X}_r + X}{n_r+1}\right)\left(\overline{X}_r - \frac{n_r\overline{X}_r + X}{n_r+1}\right)' + \left(X - \frac{n_r\overline{X}_r + X}{n_r+1}\right)\left(X - \frac{n_r\overline{X}_r + X}{n_r+1}\right)'$$

$$= n_r S_r + \frac{n_r}{(n_r+1)^2}\left(\overline{X}_r - X\right)\left(\overline{X}_r - X\right)' + \frac{n_r^2}{(n_r+1)^2}\left(X - \overline{X}_r\right)\left(X - \overline{X}_r\right)'$$

$$= n_r S_r + \frac{n_r(n_r+1)}{(n_r+1)^2}\left(\overline{X}_r - X\right)\left(\overline{X}_r - X\right)'$$

$$= n_r S_r + \frac{n_r}{(n_r+1)}\left(\overline{X}_r - X\right)\left(\overline{X}_r - X\right)'$$

Quedando:

$$W^{(r)} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{g}\left(n_k + I_{\{r\}}(k)\right)S_k^{(r)}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k\neq r} n_k S_k + S_r^{(r)}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k \neq r} n_k S_k + n_r S_r + \frac{n_r}{n_r+1}(X - \overline{X}_r)(X - \overline{X}_r)'\right]$$

$$= \frac{n}{n+1} W + \frac{n_r}{(n+1)(n_r+1)}(X - \overline{X}_r)(X - \overline{X}_r)'$$

Con lo que la función de verosimilitud de la muestra $X_1,\ldots,X_g$ bajo la hipótesis H_r dada en (3.22) ase puede simplificar de la siguiente manera:

$$\hat{L}_r(X) = \left|2\pi W^{(r)}\right|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr W^{(r)}\left[\sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i^{(r)})(X_{ij} - \overline{X}_i^{(r)})'\right.\right.$$

$$\left.\left. + (X_{ij} - \overline{X}_i^{(r)})' W^{(r)-1} (X_{ij} - \overline{X}_i^{(r)})\right]\right\}$$

$$= \left|2\pi W^{(r)}\right|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr\left(W^{(r)-1}(n+1)W^{(r)}\right)\right\}$$

$$= \left|2\pi W^{(r)}\right|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{-\frac{n+1}{2} p\right\}$$

Por lo que ahora se debe encontrar:

$$\min_r \left|W^{(r)}\right| = \min_r \left|\frac{n}{n+1} W^{(r)} + \frac{n_r}{(n+1)(n_r+1)}(X - \overline{X}_r^{(r)})(X - \overline{X}_r^{(r)})'\right|$$

$$= \min_r \left|W^{(r)}\right|\left[1 + \frac{n_r}{(n_r+1)}(X - \overline{X}_r^{(r)})'(nW^{(r)})^{-1}(X - \overline{X}_r^{(r)})\right]$$

$$= \min_r \left[\frac{n_r}{(n_r+1)}(X - \overline{X}_r^{(r)})'(nW^{(r)})^{-1}(X - \overline{X}_r^{(r)})\right]$$

y desarrollando la forma cuadrática en la ecuación anterior se obtiene que la regla que asigna X a P_r en:

$$\max_r \left[\frac{n_r}{(n_r+1)} a_r'\left(X - \frac{1}{2}\overline{X}_r\right)\right]$$

donde se define:

$$a_r = W^{-1}\overline{X}_r$$

Ahora, si en particular se considera el caso de dos poblaciones normales con matriz de covarianzas común, para las cuales un nuevo individuo X debe discriminarse, el juego de hipótesis es de la forma:

H_1: X y los renglones de X_1 pertenecen a P_1, y las filas de X_2 provienen de P_2.
H_2: Los renglones de X_1 provienen de P_1 y X y las filas de X_2 pertenecen a P_2.

Si los parámetros de $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son desconocidos se deben de reemplazar por sus estimadores máximo verosímiles. Los estimadores para $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2$ y Σ bajo la hipótesis H_1 están dadas por:

$$\hat{\mu}_i = \begin{cases} \overline{X}_1^{(1)} = \dfrac{n_1 \overline{X}_1 + X}{n_1 + 1} & si\ i = 1 \\ \overline{X}_2 & si\ i = 2 \end{cases}$$

y

$$\hat{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{n_1 + n_2 + 1}\left\{W + \frac{n_1}{n_1 + 1}\left(X - \overline{X}_1\right)\left(X - \overline{X}_1\right)^t\right\}$$

donde $nW = n_1 S_1 + n_2 S_2$

Bajo la hipótesis H_2 los estimadores máximo verosímiles para μ_1, μ_2 y Σ están definidos por:

$$\mu_i = \begin{cases} \overline{X}_1 & si\ \ i = 1 \\ \overline{X}_2^{(2)} = \dfrac{n_2 \overline{X}_2 + X}{n_2 + 1} & si\ i = 2 \end{cases}$$

$$\hat{\Sigma}^{(2)} = \frac{n}{n_1 + n_2 + 1}\left\{W + \frac{n_2}{n_2 + 1}\left(X - \overline{X}_2\right)\left(X - \overline{X}_2\right)^t\right\}.$$

Entonces el cociente de verosimilitud es la proporción:

$$\frac{\left|\hat{\Sigma}^{(2)}\right|}{\left|\hat{\Sigma}^{(1)}\right|}=\frac{\left|\frac{n}{n_1+n_2+1}\left\{W+\frac{n_2}{n_2+1}(X-\overline{X}_2)(X-\overline{X}_2)'\right\}\right|}{\left|\frac{n}{n_1+n_2+1}\left\{W+\frac{n_1}{n_1+1}(X-\overline{X}_1)(X-\overline{X}_1)'\right\}\right|}.$$

$$\frac{\left|\hat{\Sigma}^{(2)}\right|}{\left|\hat{\Sigma}^{(1)}\right|}=\frac{1+\frac{n_2}{n_2+1}(X-\overline{X}_2)'W^{-1}(X-\overline{X}_2)}{1+\frac{n_1}{n_1+1}(X-\overline{X}_1)'W^{-1}(X-\overline{X}_1)}$$

La prueba acepta H_0, *es decir, se asigna* X a P_1 si y solo si:

$$1+\frac{n_2}{n_2+1}(X-\overline{X}_2)W^{-1}(X-\overline{X}_2)'>\frac{n_1}{n_2+1}(X-\overline{X}_1)W^{-1}(X-\overline{X}_1)'.$$

Si los tamaños de muestra son iguales, es decir, si $n_1 = n_2$ es equivalente a la regla de máxima verosimilitud. Pero si los tamaños de muestra son diferentes entonces este método tiende a clasificar a X a la población que tiene el tamaño de muestra más grande.

3.2.3 Regla de Discriminante de Bayes

Existen ocasiones en las que es conveniente suponer que algunas poblaciones tengan asignadas probabilidades a priori; por ejemplo, en los diagnósticos médicos puede pensarse que un paciente este mas propenso a ciertas enfermedades cardiacas si padece de presión arterial alta a que si no padeciera de ello.

La regla de Discriminante de Bayes, utiliza precisamente este criterio de probabilidades a priori para realizar la asignación de un individuo X a la población con mayor probabilidad posterior, esto es, a la cual el producto $\pi_i L_i(x)$ sea máxima.

Definición 3.2.4 *Si las poblaciones $P_1, P_2, \ldots, P_g$ tienen probabilidades a priori $\pi' = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_g)$, entonces la regla de discriminante de Bayes (con respecto a π) asigna a una observación X a la población para la cual*

$$\pi_i L_i(x)$$

sea maximizada.

Es de hacerse notar que la regla de máxima verosimilitud es un caso especial del criterio de Bayes cuando todas las probabilidades son iguales.

Cuando se realiza una discriminación entre 2 poblaciones (g=2), el efecto que causa introducir probabilidades a priori es simplemente aumentar el valor crítico de la función de discriminación por la cantidad $\ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$. En este caso la regla de asignación según el criterio de Bayes está dada por:

$$aignar\ X\ a \begin{cases} P_1 & si\ h(x) > \ln\left(\dfrac{\pi_2}{\pi_1}\right) \\ P_2 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde

$$h(x) = \ln\left(\frac{L_1(x)}{L_2(x)}\right) \tag{3.25}$$

Desarrollando la ecuación anterior bajo el supuesto adicional de que las dos poblaciones tienen una matriz de covarianzas común conocida se obtiene

$$\ln\left(\frac{|2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_1)'\Sigma^{-1}(X-\mu_1)\right\}}{|2\pi\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_2)'\Sigma^{-1}(X-\mu_2)\right\}}\right) > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$$

si y sólo si

$$-\frac{1}{2}(X-\mu_1)'\Sigma^{-1}(X-\mu_1)+\frac{1}{2}(X-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(X-\mu_2) > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$$

lo cual es equivalente a

$$\mu_i'\Sigma^{-1}X - \frac{1}{2}\mu_1'\Sigma^{-1}\mu_1 - \mu_2'\Sigma^{-1}X + \frac{1}{2}\mu_2'\Sigma^{-1}\mu_2 > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$(\mu_1 - \mu_2)'\Sigma^{-1}\left\{X - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right\} > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) \tag{3.26}$$

Haciendo $\delta = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$ y $\mu = (\mu_1 + \mu_2)$ la ecuación anterior se puede escribir como:

$$h(x) = \delta'\left(X - \frac{1}{2}\mu\right) > \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$$

Ahora, esta regla de discriminante de Bayes cumple con ciertas propiedades que son óptimas. Primeramente debe de tomarse en cuenta que dicha regla es determinística desde el punto de vista de que si $\overline{X}_1 = \overline{X}_2$ entonces X_1 y X_2 se asignarán siempre a la misma población. Sin embargo para propósitos matemáticos conviene considerar una clase más general de reglas de discriminantes, mismas que se describirán sin profundizar en los desarrollos matemáticos.

Por ejemplo, se tiene que una regla discriminante aleatoria d, asigna una observación X a una población i con probabilidad $\phi_i(x)$, donde $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_g$, son funciones no negativas definidas cada una en $\Re^p$, mismas que satisfacen que:

$$\sum_{i=1}^{g}\phi_i(x) = 1 \qquad \forall\ x \in \Re^p$$

Hay que hacer notar que una regla de asignación determinística es un caso particular de una regla de asignación aleatoria, tomando $\phi_i(x) = 1$ para $X \in \Re_i$ y $\phi\ (x) = 0$ en cualquier otro caso.

Por ejemplo, la regla de Bayes con respecto a probabilidades a priori $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_g$ esta definida por:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 \; si \; \pi_i L_i(x) = max_k \{\pi_k L_k(x)\} \\ \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases} \qquad 3.27$$

Definición 3.2.4 *La probabilidad de asignar un individuo a la población P_i, cuando proviene de la población P_K, esta dada por:*

$$p_{ik} = \int \phi_i(x) L_k(x) dx \qquad 3.28$$

En particular, si este individuo en $\Re^p$ que proviene de P_i la probabilidad de asignarlo correctamente esta dada por:

$$p_{ii} = \int \phi_i(x) L_i(x) dx$$

Ahora, se tienen también definiciones que pueden ordenar las reglas de discriminante como son:

Definición 3.2.5 *Una regla discriminante d con probabilidad de asignación correcta $\{p_{ii}\}$ es tan buena como cualquier otra regla d* con probabilidades $\{p_{ii}^*\}$ si*

$$p_{ii} > p_{ii}^* \qquad \forall i$$

Se dice que d es mejor que d si al menos una de las desigualdades es estricta.*

Definición 3.2.6 *Si d es una regla para la cual no existe otra regla mejor, se dice entonces que d es una regla admisible.*

Teorema 3.2.7 *Todas las reglas discriminantes de Bayes son adminibles.*

Demostración:

Primeramente sea d^* una regla de Bayes con probabilidades a priori $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_g$. Ahora, supóngase que existe otra regla d que es mejor que la regla anterior. Sean entonces $\{p_{ii}^*\}$ y $\{p_{ii}\}$ las probabilidades de clasificación correcta para las reglas d^* y d respectivamente.

Ahora, como se dijo anteriormente d es mejor que d^* y $\pi_i > 0$ para toda i, por lo que se puede escribir que:

$$\sum_{i=1}^{g} \pi_i p_{ii} > \sum_{i=1}^{g} \pi_i p_{ii}^* \qquad 3.29$$

Si se usan las definiciones 3.2.4 y 3.2.3 se puede obtener que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{g} \pi_i p_{ii} &> \sum_{i=1}^{g} \int \phi_i(x) \pi_i L_i(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{g} \int \phi_i(x) \max_j \pi_j L(x) \pi_j dx \\
&= \int \left[\sum_{i=1}^{g} \phi_i(x) \right] \max_j \pi_j L_j(x) dx \\
&= \int \max_j \pi_j L_j(x) dx \\
&= \int \sum_{i=1}^{g} \phi_i^*(x) \pi_i L_i(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{g} \pi_i p_{ii}^*
\end{aligned}$$

lo cual coincide con lo que se quiere demostrar.

Teorema 3.2.8 *Si las poblaciones P_1, P_2,..., P_g tienen asociadas las probabilidades a priori $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_g$, entonces ninguna otra regla discriminante tiene mejores probabilidades de asignación correcta que la regla de Bayes con respecto a esas condiciones a priori.*

Demostración:

Primeramente sea d^* la regla de Bayes con probabilidades de clasificación correcta $\{p_{ii}^*\}$ y sea d cualquier otra regla discriminante con probabilidades de clasificación correcta $\{p_{ii}\}$. Ambas reglas con probabilidades a priori $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_g$.

Ahora, se puede continuar del teorema 3.2.7 que:

$$\sum_{i=1}^{g}\pi_i p_{ii}^* > \sum_{i=1}^{g}\pi_i p_{ii}$$

esto quiere decir, que la regla d tiene probabilidades posteriores a la asignación correcta a lo más tan grandes como la regla de Bayes.

3.2.4 Probabilidades de Mala Clasificación

De manera formal, las probabilidades de mala clasificación p_{ik} se dieron en la sección anterior, especificamente en la ecuación (3.28). Ahora, si los parámetros de las distribuciones en cuestión son estimados de los datos, entonces se obtienen las probabilidades estimadas $\hat{p}_{ik}$.

Si se considera el caso de dos poblaciones normales de la forma $N_p(\mu_1,\Sigma)$ y $N_p(\mu_2,\Sigma)$; y si se denomina a X como un individuo que proviene de P_1, entonces debe de cumplirse la función lineal discriminante de la forma:

$$h(X) = \alpha'\left(X - \frac{1}{2}\mu\right) > 0,$$

donde $\alpha = \Sigma^{-1}(X - \mu)$ y $\mu = (\mu_1 + \mu_2)$, tiene densidad normal con media y varianza dados por:

$$E(h(X)) = E\left(\alpha'\left(X - \frac{1}{2}\mu\right)\right)$$

$$= \alpha' E\left(X - \frac{1}{2}\mu\right),$$

$$= \alpha'\left(E(X) - E\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right),$$

$$= \alpha'\left(\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha'(\mu_1 - \mu_2).$$

y varianza de la forma

$$V(h(X)) = V\left(\alpha'\left(X - \frac{1}{2}\mu\right)\right)$$

$$= \alpha' V(X)\alpha$$

$$= \alpha'\Sigma\alpha$$

Entonces puede observarse que si X proviene de P_1 se tiene que:

$$h(X) \approx N_p\left(-\frac{1}{2}\Delta^2, \Delta^2\right),$$

donde

$$\Delta^2 = (\mu_1 - \mu_2)'\Sigma(\mu_1 - \mu_2),$$

la cual es conocida como la distancia de Mahalanobits entre ambas poblaciones. Análogamente puede demostrarse que si X proviene de P_2 entonces se tendrá que:

$$h(X) \approx N_p\left(-\frac{1}{2}\Delta^2, \Delta^2\right)$$

Con lo que la probabilidad de mala clasificación está dada por:

$$p_{12} = P\big(h(X) > 0 \mid P_2\big) \tag{3.29}$$

Ahora, denotando como número 1 a la población P_1 que le fue asignada la observación X con la condición de que esta proviene de la población 2 (P_2). Conociendo la distribución de $h(X)$ descrita en la ecuación anterior entonces esto puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p_{12} &= P\left(\frac{h(X) - E(h(X))}{\sqrt{V(h(X))}} > -\frac{E(h(X))}{\sqrt{V(h(X))}} \middle| P_2 \right), \\ &= P\left(\frac{h(X) - E(h(X))}{\sqrt{V(h(X))}} > -\frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{\Delta} \middle| P_2 \right) \\ &= \phi\left(-\frac{1}{2}\Delta \right) \end{aligned}$$

Donde ϕ denota a la función de distribución normal estándar. De manera análoga si X proviene de 2 y fue asignada a 1 entonces la probabilidad de mala clasificación está definida por:

$$p_{21} = \phi\left(-\frac{1}{2}\Delta \right)$$

Ahora, si los parámetros son estimados de los datos, entonces un estimador de Δ^2 es de manera natural de la forma:

$$D^2 = \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)' S^{-1} \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right),$$

y si se toma en cuenta el desarrollo anterior resulta que las probabilidades de mala clasificación son de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{12} &= \hat{p}_{21} \\ &= \phi\left(-\frac{1}{2}D \right) \end{aligned}$$

Esta aproximación es muy benevolente; es decir, suele subestimar las verdaderas probabilidades de mala clasificación cuando el tamaño de muestra es pequeño. Por ello se argumenta que las probabilidades basadas en la regla de discriminante de Bayes son más realistas[6] (Aitchison et. Al. (1997)).

[6] Aitchison et. Al. (1997)

Capítulo IV

Resultados

El análisis estadístico que se va a realizar es bajo tres puntos de vista, el primero es sobre la base del comportamiento anual y cronológico de los niveles de la mortalidad materna a lo largo de un cierto periodo (de 1989 a 1992), el segundo será con respecto al comportamiento de la mortalidad materna por causas en un año de terminado, y el último será el comportamiento del tipo de atención que reciben las mujeres durante el embarazo (consultas médicas) en toda la República Mexicana en un año determinado, es decir, este último se referirá al número de mujeres que son atendidas durante el embarazo.

4.1 Comportamiento Cronológico de la Mortalidad Materna.

La muestra observada consta de cuatro años de registro que son: 1989, 1990, 1991 y 1992. Para cada uno de estos años se recolectó una muestra de 32 observaciones correspondientes a cada estado de la República Mexicana; para cada año de registro se asignó una variable, con lo que finalmente queda conformada una matriz X de dimensión 32×4 (ver Tabla 1 en el Anexo A).

Como primer acercamiento para analizar el comportamiento de la muestra se presentan las medias y las desviaciones estándares con respecto a la muestra total en la tabla 4.1. En este cuadro anterior, todas las variables muestran una variación muy grande, por lo que se pude decir que en cada uno de los años existe polaridades muy grandes entre los porcentajes de un estado y otro, es decir, que como existen estados que muestran índices muy bajos en sus

Descriptive Statistics (anual.sta)		
	Media	Desviación
AÑO 89	50.890625	26.302770
AÑO 90	46.196875	24.748392
AÑO 91	44.268750	27.153500
AÑO 92	45.075000	23.073781

Tabla 4.1 Media y Desviación estándar de la muestra total de la mortalidad materna

niveles de mortandad materna, como los que muestran índices mucho muy altos y en promedio dichos indices son considerablemente altos.

Por otro lado se tiene que la matriz de correlación, a la que se denotará como R, es de la siguiente manera:

Correlations (anual.sta) Casewise deletion of MD N=32				
Variable	AÑO 89	AÑO 90	AÑO 91	AÑO 92
AÑO 89	1.00	0.83	0.76	0.76
AÑO 90	0.83	1.00	0.79	0.81
AÑO 91	0.76	0.79	1.00	0.72
AÑO 92	0.76	0.81	0.72	1.00

Tabla 4.2 Matriz de correlación de l comportamiento anual

Aquí se puede observar que todas las parejas de (X_i, X_j) presentan una alta correlación, lo cual indica que el comportamiento de cada año depende del comportamiento del o los años anteriores.

La siguiente figura (Figura 4.1) muestra la dependencia que existe entre las variables, así como la leve presencia de dos grupos.

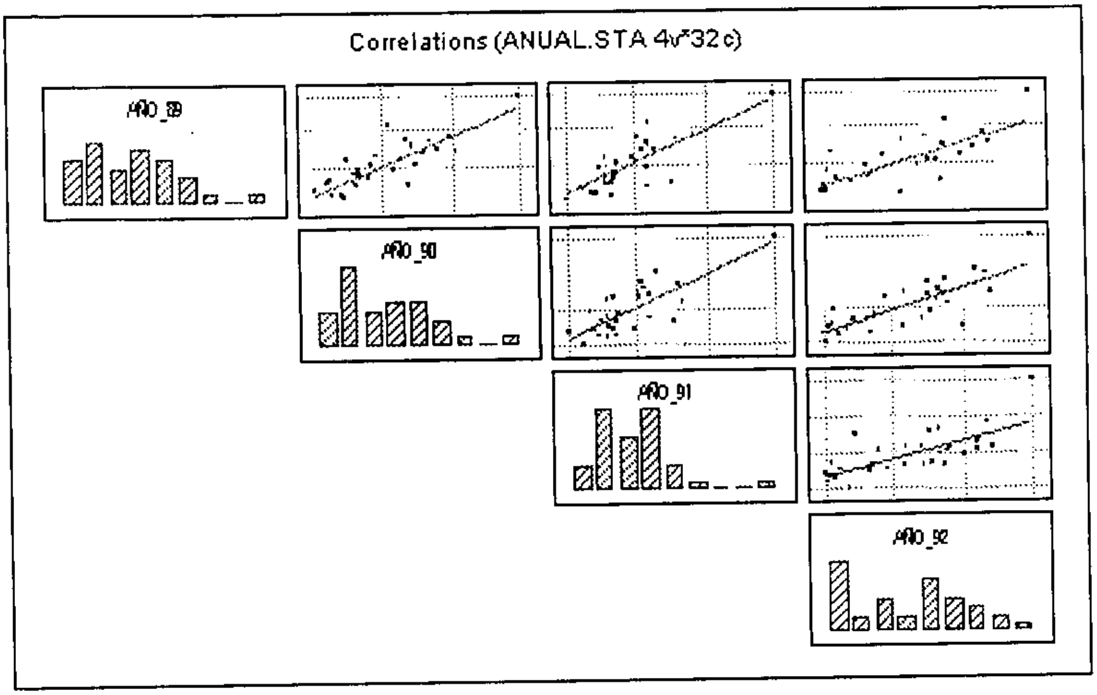


Figura 4.1. Gráfica de la correlación de las 4 variables de la Mortalidad Materna Anual

Ahora, en la aplicación del método de componentes principales, es necesario observar, antes que nada, los valores propios asociados a la matriz de correlación de la matriz *X*, además de la asimilación de varianza para cada componente principal y la varianza acumulada de cada uno de estos, dicha información se muestra en la Tabla 4.3

Eigenvalues (anual.sta) Extraction: Principal components				
Value	Eigenval	% total Variance	Eigenval	Cumul. %
1	3.33586	83.3965	3.33586	83.3965
2	0.27694	6.92359	3.6128	90.3201
3	0.23095	5.77384	3.84376	96.0939
4	0.15624	3.90607	4	100

Tabla 4.3. Acumulación de la varianza de cada componente principal.

En esta tabla puede observarse que es suficiente con sólo considerar los dos primeros componentes principales para explicar poco más de un 90 % de la variación total.

La gráfica de estos dos componentes principales es de la forma

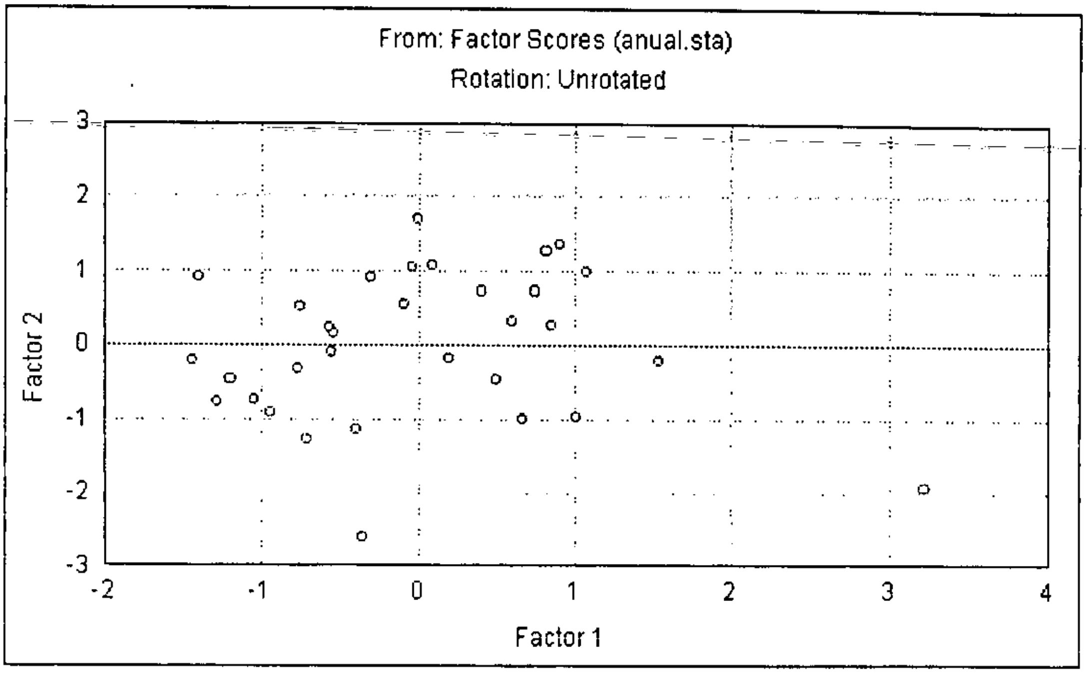


Figura 4.2. Gráfica de la componente 2 vs 1

En esta figura se aprecia que alrededor del primer componente principal (Factor 1) las observaciones tienen una mayor variabilidad y en cambio, para el segundo componente principal (Factor 2) dicha variabilidad disminuye considerablemente, de hecho para este componente se podría decir que dicha variación es prácticamente nula. En la gráfica de dispersión de puntos (Scree plot), se puede apreciar que la pendiente que definen los segmentos de recta se empiezan a estabilizar a partir del primer valor propio, lo cual hace pensar que sería suficiente únicamente retener el primer componente principal.

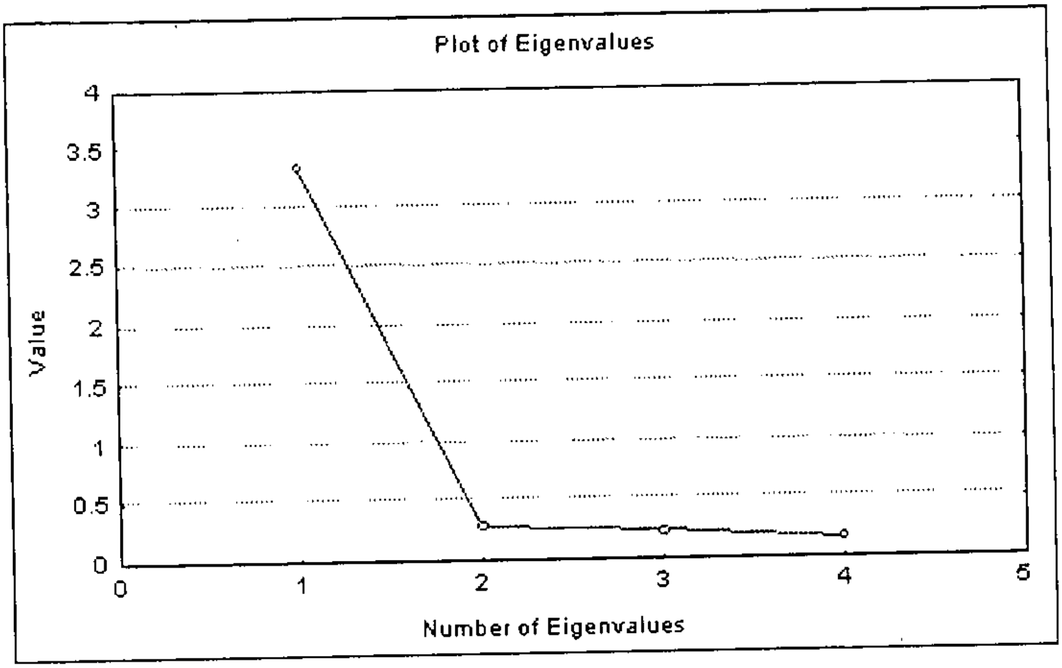


Figura 4.3 Gráfica de los valores propios para el comportamiento anual de la MM

Por otro lado, para poder decir concretamente si es útil o no tomar dos componentes principales existe también otra manera, por medio de un análisis de la estructura de correlación (valores r^2) existente entre cada uno de los componentes principales de cada una de las variables X_k con respecto a los subconjuntos de componentes Y_k. Dichos valores son:

Communalities (anual.sta) Extraction: Principal components Rotation: Unrotated					
Variable	From 1 Factor	From 2 Factors	Form 3 Factors	From 4 Factors	Multiple R-Square
ANO 89	0.840479	0.840884	0.972164	1	0.72843
ANO 90	0.88276	0.885077	0.8892	1	0.788388
ANO 91	0.801451	0.950419	0.996538	1	0.668955
ANO 92	0.81117	0.936424	0.985855	1	0.68868

Tabla 4.4 Estructura de correlación

Así se confirma que si sería suficiente tomar sólo el primer componente principal, con lo que se tendría alrededor de un 80.00 % de la proporción de varianza sobre cada una de las variables X_k, pero si se tomasen en cuenta los dos primeros componentes principales se tendría en conjunto una proporción acumulada de varianza del 84.00 % aproximadamente, el incremento en la proporción de varianza puede ser despreciable, pero para saber de una manera más determinante que tan despreciable es esto es necesario analizar el intervalo en el que se encuentra el verdadero valor del segundo valor propio, con lo cual podrá darse una mejor opinión al respecto.

Dicha prueba rotunda y final es construyendo un intervalo del 95% de confianza para el segundo valor propio, este intervalo ayuda en la toma de decisión de si la varianza de el valor propio que se está analizando puede o no despreciarse del análisis. Dicho intervalo se define por:

$$\left(\frac{\hat{\lambda}_j}{1+\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}, \frac{\hat{\lambda}_j}{1-\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}} \right)$$

donde n es el tamaño de la muestra, q es el quantil de orden 0.95 de una normal estándar con base en la muestra y $\hat{\lambda}_j$ es el valor propio que se quiere analizar, por lo tanto se tiene que los datos son:

$$\hat{\lambda}_2 = 0.27694$$
$$q = 1.645$$
$$\sqrt{32} = 5.6568$$

Por lo tanto el intervalo resultante para el segundo valor propio quedaría de la forma:

$$(0.19327, 0.47039)$$

Concluyendo entonces que dicho valor propio puede ser considerado dentro del análisis ya que no es tan pequeño como para ser despreciado y por lo tanto la varanza de Y_2 no se sacará del análisis. Que conlleva a modelar la matriz X en solo dos dimensiones, lo cual se visualiza como la gráfica 4.2. En la que se puede apreciar cierta clasificación de los niveles de mortandad materna y dicha clasificación es de la siguiente manera:

Clasificación	
Mortalidad Alta	CHIS., D.F., GTO., GRO., HDGO., MEX., OAX., PUE., QUER., Q.R., S.L.P., TLAX., VER., YUC.
Mortalidad Baja	AGS., B.C., B.C.S., CAMP., COAH., COL., CHIH., DGO., JAL., MICH., MOR., NAY., N.L., SIN., SON., TAB., TAMPS., ZAC.

Tabla 4.5 Clasificación de la mortalidad materna en la República Mexicana Obtenida con ayuda del método de componentes principales

Esta tabla será de utilidad para el análisis de discriminante, en donde se tomarán en cuenta dos clasificaciones, la primera será la antes planteada y la segunda será la ya presentada en el Capitulo 2.

Antes que nada es necesario mencionar que se debe hacer el supuesto de normalidad de la muestra y se considera que las matrices de covarianza para los cuatro años son iguales. Estos supuestos se realizan para las dos clasificaciones que se van a analizar.

Ahora, se tiene entonces para la primera clasificación (ver Tabla 4.6) que, una vez hecho el supuesto ya antes mencionado, se realiza entonces la clasificación por individuos con base en las funciones de discriminación lineal que muestra en la siguiente Tabla la clasificación por grupo:

Classification Matrix (anual.sta) Rows: Observed classifications Columns: Predicted classifications			
Group	Percent Correct	G_1:1 p=.56250	G_2:2 p=.43750
G_1:1	94.44444275	17	1
G_2:2	92.85713959	1	13
Total	93.75	18	14

Tabla 4.6 Porcentajes de clasificación por región para los niveles de mortalidad.

Antes que nada cabe mencionar que el grupo 1 se refiere a los estados que presentan indices de mortalidad materna bajos y la segunda es la de los estados con indices altos.

De esta manera es posible decir que la clasificación que se obtuvo de los componentes principales es buena, o al menos con un margen de error pequeño, ya que los casos mal clasificados son sólo dos, los cuales pueden deberse a que estos casos en particular se encontraban justo en la frontera de la otra clasificación, es decir, que los índices que muestran se acercan mucho a los de la otra clasificación.

Classification of Cases (anual.sta)			
	Incorrect classifications are marked with *		
Case	Observed Classif.	1 p=.56250	2 p=.43750
AGS	G_1:1	G_1:1	G_2:2
BC	G_1:1	G_1:1	G_2:2
BCS	G_1:1	G_1:1	G_2:2
*CAMP	G_1:1	G_2:2	G_1:1
COAH	G_1:1	G_1:1	G_2:2
COL	G_1:1	G_1:1	G_2:2
CHIS	G_2:2	G_2:2	G_1:1
CHIH	G_1:1	G_1:1	G_2:2
*DF	G_2:2	G_1:1	G_2:2
DGO	G_1:1	G_1:1	G_2:2
GTO	G_2:2	G_2:2	G_1:1
GRO	G_2:2	G_2:2	G_1:1
HDGO	G_2:2	G_2:2	G_1:1
JAL	G_1:1	G_1:1	G_2:2
MEX	G_2:2	G_2:2	G_1:1
MICH	G_1:1	G_1:1	G_2:2
MOR	G_1:1	G_1:1	G_2:2
NAY	G_1:1	G_1:1	G_2:2
NL	G_1:1	G_1:1	G_2:2
OAX	G_2:2	G_2:2	G_1:1
PUE	G_2:2	G_2:2	G_1:1
QUER	G_2:2	G_2:2	G_1:1
QR	G_2:2	G_2:2	G_1:1
SLP	G_2:2	G_2:2	G_1:1
SIN	G_1:1	G_1:1	G_2:2
SON	G_1:1	G_1:1	G_2:2
TAB	G_1:1	G_1:1	G_2:2
TAMPS	G_1:1	G_1:1	G_2:2
TLAX	G_2:2	G_2:2	G_1:1
VER	G_2:2	G_2:2	G_1:1
YUC	G_2:2	G_2:2	G_1:1
ZAC	G_1:1	G_1:1	G_2:2

Tabla 4.7 Clasificaciones incorrectas y muestra del grupo al que debe pertenecer cada caso

Ahora, para saber cuales son estos casos es necesario observar la tabla anterior que es la Clasificación de los Casos, en la cual, puede apreciarse que los casos con clasificación errónea son Campeche que debe estar en el grupo 2 (Mortalidad Alta) y el D.F. que debería estar en el grupo 1 (Mortalidad Baja).

Por lo que la clasificación final en este caso sería de la forma:

Clasificación	
Mortalidad Alta	CAMP., CHIS., GTO., GRO., HDGO., MEX., OAX., PUE., QUER., Q.R., S.L.P., TLAX., VER., YUC.
Mortalidad Baja	AGS., B.C., B.C.S., COAH., COL., CHIH., D.F., DGO., JAL., MICH., MOR., NAY., N.L., SIN., SON., TAB., TAMPS., ZAC.

Tabla 4.8 Clasificación final de la Mortalidad Materna en la República Mexicana

Para la segunda clasificación que se tomará en cuenta en este análisis será, como ya se había mencionado, el dado en el Capítulo 2 (Sección 3.3.1) (La Regionalización de la Mortalidad Materna en México durante el periodo 1937-1991[1]) (ver Tabla 4.10) con lo que podrá saberse que tan certera y por lo tanto útil resulta dicha clasificación para el comportamiento más recientemente registrado de la mortalidad materna en México.

Region	Estados
Baja mortalidad	Ags., B.C.S., Coah., D.F. Y N.L.
Mediana Mortalidad	B.C., Camp., Dgo., Jal., Mor., Nay., Sin., Son., Tamps., Tlax. Y Yuc.
Alta Mortalidad	Col., Chih., Gto., Gro., Mex., Mich., Tabs. Y Zac.
Muy Alta Mortalidad	Chis., Hgo., Oax., Pue., Qro., Q.R., S.L.P. Y Ver.

Tabla 4.9. Clasificación de los Niveles de Mortalidad Materna en la República Mexicana según clasificación echa por Reyes Faustro Sandra.

Después de haber hecho los supuestos ya antes mencionados, se obtiene que, realizándose la clasificación de los individuos con base a las funciones de discriminación lineal, el siguiente cuadro de clasificación por grupo:

[1] Reyes Faustro, Sandra. Mortalidad Materna en México, 1994

Classification Matrix (anual.sta)					
	Rows: Observed classifications				
	Columns: Predicted classifications				
Group	Percent Correct	G_1:1 p=.15625	G_2:2 p=.31250	G_3:3 p=.28125	G_4:4 p=.25000
G_1:1	60	3	2	0	0
G_2:2	50	2	5	3	0
G_3:3	66.66666	0	3	6	0
G_4:4	87.5	0	0	1	7
Total	65.625	5	10	10	7

Tabla 4.10. Porcentajes de clasificación por región para los niveles de mortalidad

Se puede observar en esta tabla que existen un número considerable de malas clasificaciones, lo cual puede deberse a un subregistro. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que la regionalización de la mortalidad materna que se está utilizando como referencia fue echa sobre la base de un comportamiento cronológico desde 1937 hasta 1991 y aqui sólo se está tomando el comportamiento cronológico de 1989-1992, lo cual influye en el hecho de que la clasificación resulte "incorrecta".

De esto puede concluirse que el comportamiento cronológico de los últimos años de los que se tiene conocimiento público de este problema es en cierta medida más optimista de lo que se mostraba en la clasificación previamente tomada. Por otro lado la clasificación correcta puede deducirse de la Tabla 4.*, en la que es posible observar claramente que casos son los que están incorrectamente clasificados y puede observarse también a que grupo deben de pertenecer, con lo cual la clasificación correcta seria la que se muestra en la Tabla 4.5, en donde podria decirse que en tiempos más recientes la mortalidad materna en México es todavia un problema grave, pero si se observa lo que ha pasado a lo largo de los años y después de una serie de programas de prevención al respecto, puede concluirse que si han dado resultados en algunas zonas pero gracias a esto algunas otras han perdido al menos un poco de lo que ya habian ganado, esto tal vez por un poco de descuido o exceso de confianza por parte de las asociaciones encargadas de la prevención de la mortandad materna.

Classification of Cases (anuel.sta)					
Incorrect classifications are marked with *					
Case	Observed Classif.	1 p=.15625	2 p=.31250	3 p=.28125	4 p=.25000
*AGS	G_1:1	G_2:2	G_1:1	G_3:3	G_4:4
*BC	G_2:2	G_3:3	G_2:2	G_1:1	G_4:4
BCS	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_4:4
CAMP	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_3:3	G_1:1
COAH	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_4:4
COL	G_3:3	G_3:3	G_1:1	G_2:2	G_4:4
CHIS	G_4:4	G_4:4	G_3:3	G_2:2	G_1:1
CHIH	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1	G_4:4
*DF	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_1:1	G_4:4
DGO	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1	G_4:4
*GTO	G_3:3	G_2:2	G_3:3	G_1:1	G_4:4
GRO	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_4:4	G_1:1
HDGO	G_4:4	G_4:4	G_2:2	G_3:3	G_1:1
JAL	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1	G_4:4
MEX	G_3:3	G_3:3	G_4:4	G_2:2	G_1:1
*MICH	G_3:3	G_2:2	G_4:4	G_3:3	G_1:1
MOR	G_2:2	G_2:2	G_1:1	G_3:3	G_4:4
*NAY	G_2:2	G_3:3	G_2:2	G_1:1	G_4:4
N.L.	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_4:4
OAX	G_4:4	G_4:4	G_3:3	G_2:2	G_1:1
PUE	G_4:4	G_4:4	G_3:3	G_2:2	G_1:1
QUER	G_4:4	G_4:4	G_3:3	G_2:2	G_1:1
QR	G_4:4	G_4:4	G_2:2	G_1:1	G_3:3
SLP	G_4:4	G_4:4	G_2:2	G_3:3	G_1:1
*SIN	G_2:2	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_4:4
SON	G_2:2	G_2:2	G_1:1	G_3:3	G_4:4
TAB	G_3:3	G_3:3	G_1:1	G_2:2	G_4:4
*TAMPS	G_2:2	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_4:4
TLAX	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_4:4	G_1:1
*VER	G_4:4	G_3:3	G_2:2	G_4:4	G_1:1
*YUC	G_2:2	G_3:3	G_2:2	G_4:4	G_1:1
*ZAC	G_3:3	G_2:2	G_1:1	G_3:3	G_4:4

Tabla 4.11. Clasificaciones incorrectas y muestra del grupo al que debe de pertenecer cada elemento

Con lo que se obtiene finalmente que la clasificación correcta es de la forma:

Region	Estados
Baja mortalidad	B.C.S., Coah., N.L., Sin. y Tamps.
Mediana Mortalidad	Ags., Camp., D.F., Dgo., Gto., Mich., Jal., Mor., Son., Tlax. y Zac.
Alta Mortalidad	B.C., Col., Chih., Gro., Mex., Nay., Tabs., Var., y Yuc.
Muy Alta Mortalidad	Chis., Hgo., Oax., Pue., Qro., Q.R. y S.L.P.

Tabla 4.12 Clasificación correcta de las regiones de mortalidad materna en México

4.2 Comportamiento de la Mortalidad Materna por Causas

En este caso, la muestra a analizar se refiere a la mortalidad materna por causas en el año de 1994, que es la información mas reciente que se tiene al respecto (ver Tabla 2 del Anexo A). Esta muestra consta de nueve causas de mortalidad.materna diferentes, que son:

- Causas obstétricas directas.
- Aborto.
- Transtornos hipertensivos.
- Hemorragias del embarazo y el parto.
- Parto obstruido.
- Complicaciones del puerperio.
- Infecciones.
- Causas obstétricas indirectas.
- Causas no especificadas.

Para cada una de las clasificaciones de mortalidad materna se recolectaron 32 observaciones que corresponden a los 32 estados de la República Mexicana.

A cada una de las clasificaciones de la mortandad materna en México se les asigno una variable de acuerdo a cada causa.

El primer acercamiento que se puede tener de esta muestra es presentando la media y la desviación estándar que presente la muestra total, que son de cómo se muestra en la Tabla 4.13.

Se puede apreciar en este cuadro, que la variable que presenta la mayor variación es la denominada Clasif. 1 que se refiere a la mortalidad por causas obstétricas directas, y los niveles de mortalidad por esta causa oscilan alrededor de 3.73, dado que su variabilidad es grande es posible suponer que hay estados en los que la muerte por esta causa es muy grande y estados en los que es muy pequeña, por lo que se hacen dos clasificaciones de antemano que son los estados que presentan alta mortandad por esta causa y los estados en donde es muy baja.

Descriptive Statistics (anual.sta)		
	Media	Desviación
Clasif. 1	3.7321875	1.71984383
Clasif. 2	0.284375	0.22304256
Clasif. 3	1.53125	0.89278018
Clasif. 4	0.4975	0.41200532
Clasif. 5	0.03125	0.08206017
Clasif. 6	0.3875	0.3002687
Clasif. 7	0.1609375	0.20428253
Clasif. 8	0.484375	0.37854507
Clasif. 9	0.01875	0.0535061

Tabla 4.13 Media y desviación estándar de la muestra total de las causas de mortandad materna

Ahora, la matriz de correlación R de la muestra es de la siguiente manera:

Correlations (causas.sta) Casewise deletion of MD N=32										
Variable	Clasif. 1	Clasif. 2	Clasif. 3	Clasif. 4	Clasif. 5	Clasif. 6	Clasif. 7	Clasif. 8	Clasif. 9	Clasif. 10
Clasif. 1	1.00	0.81	0.45	0.73	0.70	0.17	0.57	0.47	0.07	-0.06
Clasif. 2	0.81	1.00	0.44	0.68	0.75	0.24	0.56	0.50	0.04	0.01
Clasif. 3	0.45	0.44	1.00	0.36	0.33	0.03	0.20	0.41	-0.03	0.05
Clasif. 4	0.73	0.68	0.36	1.00	0.31	-0.02	0.40	0.34	0.29	-0.05
Clasif. 5	0.70	0.75	0.33	0.31	1.00	0.23	0.31	0.40	-0.19	0.02
Clasif. 6	0.17	0.24	0.03	-0.02	0.23	1.00	0.12	0.17	-0.10	-0.14
Clasif. 7	0.57	0.56	0.20	0.40	0.31	0.12	1.00	0.62	-0.17	-0.07
Clasif. 8	0.47	0.50	0.41	0.34	0.40	0.17	0.62	1.00	-0.15	0.04
Clasif. 9	0.07	0.04	-0.03	0.29	-0.19	-0.10	-0.17	-0.15	1.00	-0.18
Clasif. 10	-0.06	0.01	0.05	-0.05	0.02	-0.14	-0.07	0.04	-0.18	1.00

Tabla 4.14 Matriz de correlación de las causas de mortalidad materna en México.

Se puede apreciar que las variables que presentan una alta correlación, son las parejas (X_1, X_3), (X_1, X_4), (X_1, X_6) y (X_1, X_7). Esto significa que las muertes por aborto están seriamente relacionadas con problemas hipertensivos, hemorragias, complicaciones durante el embarazo (principalmente) o por infecciones, lo cual no resulta ilógico.

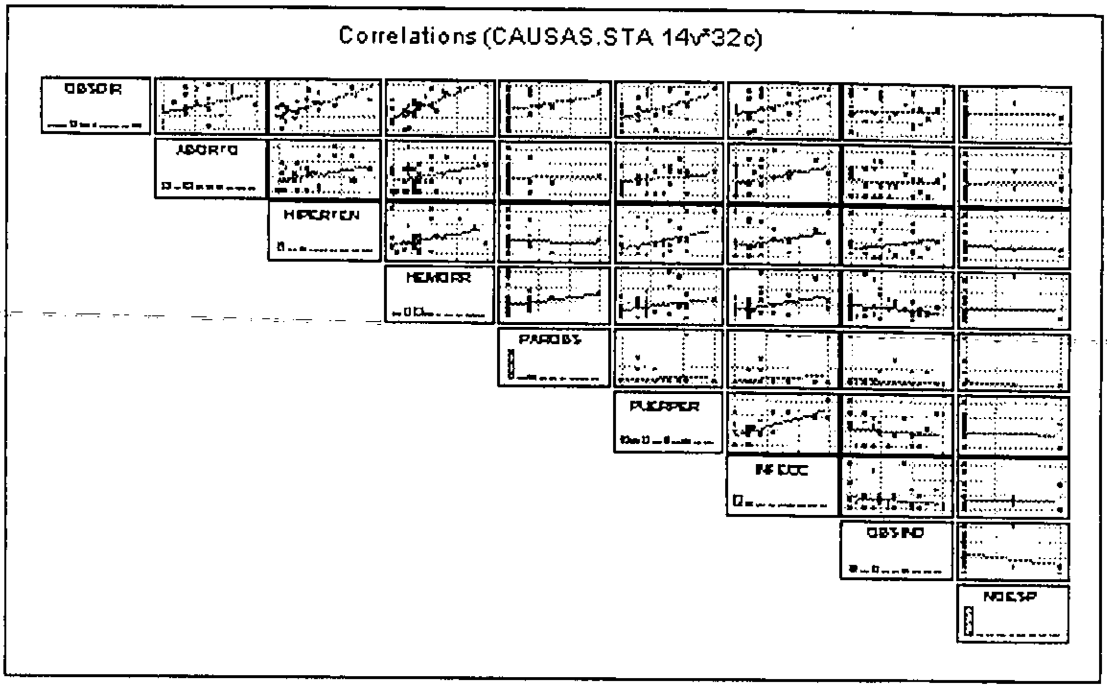


Figura 4.4 Gráfica de las 8 variables de las causas de mortandad materna en México

La gráfica anterior muestra la dependencia que existe entre las variables, así como la présencia de alrededor de tres o cuatro clasificaciones diferentes.

Ahora, para el análisis de componentes principales se tiene que de la matriz X los valores propios, la asimilación de varianza para cada uno de éstos y la varianza acumulada que tienen cada uno de los componentes principales se muestran en la Tabla 4.14.

En esta tabla se aprecia el hecho de que podría ser suficiente considerar hasta el quinto componente principal, ya que con ello se tendría poco más de un 90% de la explicación de la variación total. Ahora, algo muy útil para averiguar que tan optimo es hacer esto es observando la gráfica de dispersión de puntos (Scree Plot).

Eigenvalues (causas.sta)				
Extraction: Principal components				
Value	Eigenval	% total Variance	Cumul. Eigenval	Cumul. %
1	3.3053142	36.7257	3.30531	36.7257
2	1.3828179	15.3646	4.68813	52.0904
3	1.1609932	12.8999	5.84913	64.9903
4	0.8962634	9.95848	6.74539	74.9488
5	0.7490565	8.32285	7.49445	83.2716
6	0.6792055	7.54673	8.17365	90.8183
7	0.4382213	4.86913	8.61187	95.6875
8	0.2962576	3.29175	8.90813	98.9792
9	0.0918704	1.02078	9	100

Tabla 4.15. Valores propios para la muestra

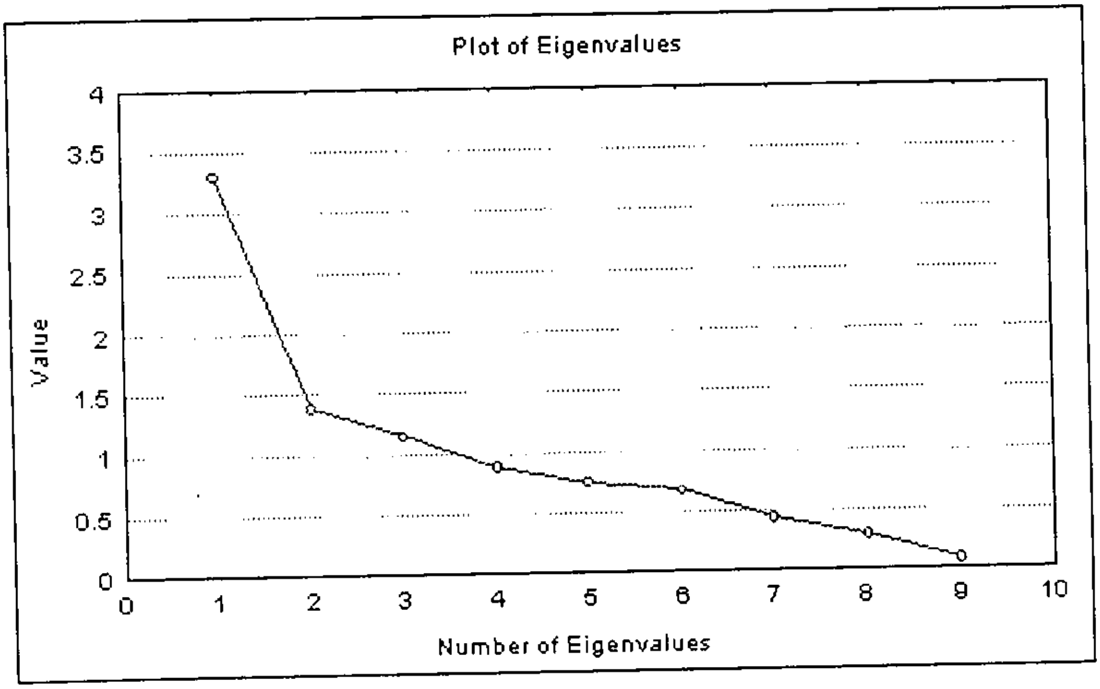


Figura 4.5. Gráfica de los valores propios de la matriz de correlación para la muestra

La gráfica anterior resulta un poco ambigua para decidir exactamente hasta que componente principal sería útil tomar, ya que el segmento de la recta entre el primer componente principal y el segundo es muy pronunciada y, en cambio, los siguientes segmentos de recta no son tan drásticos pero, sin embargo, no se muestra en ningún momento una clara estabilización, lo cual induce a pensar que podrían no despreciarse ninguno de los componentes principales.

Para tomar una decisión más certera es muy útil construir un intervalo del 95% de confianza para los valores propios correspondientes a los componentes principales 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y asi conocer en que rango esta el verdadero valor de cada uno de estos valores propios y así poder decidir si la varianza de los componentes principales correspondientes puede despreciarse del análisis. Este intervalo se define como:

$$\left(\frac{\hat{\lambda}_j}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}, \frac{\hat{\lambda}_j}{1 - \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}} \right)$$

donde

$$\hat{\lambda}_2 = 1.3828179$$
$$\hat{\lambda}_3 = 1.1609932$$
$$\hat{\lambda}_4 = 0.8962634$$
$$\hat{\lambda}_5 = 0.7490565$$
$$\hat{\lambda}_6 = 0.6792055$$
$$\hat{\lambda}_7 = 0.4382213$$
$$\hat{\lambda}_8 = 0.2962576$$
$$\hat{\lambda}_9 = 0.0918704$$
$$q = 1.645$$
$$\sqrt{32} = 5.6568$$

Con lo que los intervalos quedan de la forma:

$$\text{para}\begin{cases}\lambda_2=(0.9753056, 2.3752837)\\ \lambda_3=(0.8188520, 1.9942523)\\ \lambda_4=(0.6321372, 1.5395229)\\ \lambda_5=(0.5283118, 1.2866638)\\ \lambda_6=(0.4790457, 1.1666799)\\ \lambda_7=(0.3090788, 0.7527382)\\ \lambda_8=(0.2089514, 0.5088854)\\ \lambda_9=(0.0647965, 0.1578069)\end{cases}$$

Observando los valores anteriores es posible decir que hasta el quinto componente principal ya que no resultan ser tan pequeños como se había supuesto, por lo tanto con es posible decir que la muestra puede distribuirse en 5 causas de muerte que prevalecen sobre los estados de la República Mexicana, es decir, que en cada uno de los estados una de las causas de mortalidad materna es predominante y se tomará una clasificación tomando en cuanta esta característica en cada estado.

Ahora, para realizar el análisis de componentes principales se tomará en cuenta la siguiente clasificación realizada con ayuda de los componentes principales, en donde se tomó en cuenta una clasificación con base a que causa de mortandad materna era la más representativa de cada estado.

Clasificación	
Causa de muerte	Estados
Causas obstétricas directas	Ags., Gro., Mor., Tamps., Tlax. y Ver.
Aborto	B.C., B.C.S., Coah., Dgo., Gto., N.L., Quer. y Q.R.
Transtornos hipertensivos	Jal., Mex., Oax., Pue. y S.L.P.
Hemorragias del embarazo y el parto	Col., Chih., Hdgo., Nay., Sin. y Son.
Parto obstruido	Camp., Chis., D.F., Mich. y Tab.

Tabla 4.16 Clasificación de las causas de mortalidad materna

Ahora, para realizar el análisis de discriminante es necesario hacer, como en el análisis anterior, primeramente el supuesto de normalidad de la muestra y debe considerarse que las matrices de covarianza para todas las variables son iguales . Por lo tanto se tiene que, realizando la clasificación por individuos con base en las funciones de discriminación lineal la Tabla 4.17 de clasificación por grupo en donde puede apreciarse en esta tabla que existe un número considerable de malas clasificaciones las cuales se pueden apreciar de manera mas certera en la tabla 4.18, en donde como en el análisis anterior, se especifica que observaciones están mal clasificadas y a que grupo deben de pertenecer en dado caso.

Classification Matrix (causas.sta) Rows: Observed classifications Columns: Predicted classifications						
Group	Percent Correct	G_1:1 p=.18750	G_2:2 p=.28125	G_3:3 p=.15625	G_4:4 p=.18750	G_5:5 p=.18750
G_1:1	66.67	4	0	1	1	0
G_2:2	88.89	0	8	0	0	1
G_3:3	80.00	0	0	4	0	1
G_4:4	100.00	0	0	0	6	0
G_5:5	100.00	0	0	0	0	6
Total	87.50	4	8	5	7	8

Tabla 4.17 Porcentaje de clasificación por cada causa de mortandad materna

Lo que se puede deducir de este análisis es que causa de mortandad materna es la más sobresaliente en toda la República Mexicana con la Tabla 4.18

En la Tabla 4.18 se puede apreciar que las cuatro clasificaciones mal realizadas fueron S.L.P., Tamps., Ver. y Yuc., de las que se habia considerado la muerte por transtornos hipertensivos, la muerte por causas obstétricas directas y la muerte por abortos, respectivamente, como la causa mas sobresaliente de mortalidad materna, pero en realidad no es así sino una situación sumamente diferente, que se ilustra en la Tabla 4.19.se sabrá de manera más certera cual es.

Classification of Cases (causas.sta)						
	Incorrect classifications are marked with *					
	Observed Classif.	1 p=.18750	2 p=.28125	3 p=.15625	4 p=.18750	5 p=.18750
AGS	G_1:1	G_1:1	G_5:5	G_4:4	G_3:3	G_2:2
BC	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_5:5	G_1:1	G_3:3
BCS	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_5:5	G_1:1	G_3:3
CAMP	G_5:5	G_5:5	G_2:2	G_4:4	G_3:3	G_1:1
COAH	G_2:2	G_2:2	G_5:5	G_4:4	G_3:3	G_1:1
COL	G_4:4	G_4:4	G_2:2	G_5:5	G_3:3	G_1:1
CHIS	G_5:5	G_5:5	G_1:1	G_4:4	G_2:2	G_3:3
CHIH	G_4:4	G_4:4	G_3:3	G_5:5	G_1:1	G_2:2
DF	G_5:5	G_5:5	G_1:1	G_3:3	G_4:4	G_2:2
DGO	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_1:1	G_5:5	G_3:3
GTO	G_2:2	G_2:2	G_1:1	G_4:4	G_5:5	G_3:3
GRO	G_1:1	G_1:1	G_5:5	G_2:2	G_4:4	G_3:3
HDGO	G_4:4	G_4:4	G_1:1	G_5:5	G_2:2	G_3:3
JAL	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_4:4	G_5:5	G_1:1
MEX	G_3:3	G_3:3	G_1:1	G_5:5	G_2:2	G_4:4
MICH	G_5:5	G_5:5	G_4:4	G_2:2	G_3:3	G_1:1
MOR	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_4:4	G_3:3	G_5:5
NAY	G_4:4	G_4:4	G_5:5	G_2:2	G_1:1	G_3:3
NL	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_1:1	G_5:5	G_3:3
OAX	G_3:3	G_3:3	G_1:1	G_4:4	G_5:5	G_2:2
PUE	G_3:3	G_3:3	G_4:4	G_5:5	G_2:2	G_1:1
QUER	G_2:2	G_2:2	G_5:5	G_1:1	G_4:4	G_3:3
QR	G_2:2	G_2:2	G_4:4	G_5:5	G_3:3	G_1:1
*SLP	G_3:3	G_5:5	G_3:3	G_4:4	G_2:2	G_1:1
SIN	G_4:4	G_4:4	G_5:5	G_2:2	G_3:3	G_1:1
SON	G_4:4	G_4:4	G_2:2	G_1:1	G_5:5	G_3:3
TAB	G_5:5	G_5:5	G_1:1	G_2:2	G_4:4	G_3:3
*TAMPS	G_1:1	G_4:4	G_1:1	G_5:5	G_2:2	G_3:3
TLAX	G_1:1	G_1:1	G_5:5	G_2:2	G_4:4	G_3:3
*VER	G_1:1	G_3:3	G_1:1	G_2:2	G_5:5	G_4:4
*YUC	G_2:2	G_5:5	G_2:2	G_4:4	G_3:3	G_1:1
ZAC	G_5:5	G_5:5	G_4:4	G_2:2	G_3:3	G_1:1

Taba 4.18 Clasificaciones incorrectas y muestra de los grupos a los que debe pertenecer cada muestra

Clasificación	
Causas de muerte	Estados
Causas obstétricas directas	Ags., Gro., Mor. y Tlax
Aborto	B.C., B.C.S., Coah., Dgo., Gto., N.L., Quer. y Q.R.
Tranatornos hipertensivos	Jal., Mex., Oax., Pue., S.L.P. y Ver
Hemorragias del embarazo y el parto	Col., Chih., Ghdgo., Nay., Sin., Son. y Tamps.
Parto obstruido	Camp., Chis., D.F., Mich., Tab. y Yuc.

Tabla 4.19 Clasificación correcta de las causas de mortalidad materna en la República Mexicana

4.3 Clasificación por Tipo de Atención Prenatal

Aquí la muestra observada habla del número de mujeres que son atendidas a lo largo del periodo de gestación, es decir, son un conjunto de datos que muestran el número de mujeres que son atendidas en consultas externas de control prenatal en el año de 1994 que es la información mas reciente al respecto(ver Tabla 3 en el Anexo A).

En la muestra antes mencionada se plasman seis características diferentes que indican el número de mujeres que acudieron, ya sea, por primera vez a una consulta externa tomando en cuenta el trimestre de gestación en que se encontraban, o en ocasiones posteriores a consultas externas tomando también en cuenta el trimestre de gestación en que estaban. Para cada una de estas características se obtuvieron 32 observaciones correspondientes a cada uno de los estados de la República Mexicana y además se les asignó una variable de la siguiente forma:

- C1/T1: Primera vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el primer trimestre de embarazo.
- C1/T2: Primera vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el segundo trimestre de embarazo.
- C1/T3: Primera vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el tercer trimestre de embarazo.
- C2/T1: Segunda vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el primer trimestre de embarazo.
- C2/T2: Segunda vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el segundo trimestre de embarazo.
- C2/T3: Segunda vez que acudió un n número de mujeres a una consulta externa durante el tercer trimestre de embarazo.

De esta manera se conformó una matriz X de dimensión 32×6, de la cual se tiene como primer acercamiento las siguientes medias y desviaciones estándares:

Descriptive Statistics (anual.sta)		
	Media	Desviación
C1/T1	8,762.44	9,085.13
C1/T2	12,067.81	14,652.92
C1/T3	16,425.47	26,984.22
C2/T1	5,417.38	6,348.37
C2/T2	27,506.44	57,280.93
C2/T3	30,733.34	30,203.63

Tabla 4.20 Media y Desviación Estándar de la muestra total de la Atención Prenatal

Se puede apreciar en la tabla anterior que todas las variables muestran una desviación estándar alta lo cual indica que existen zonas en la República Mexicana en donde las mujeres casi no se atienden durante el periodo de gestación y, por el contrario, existen lugares en donde la atención es muy buena.

Ahora, en este caso puede apreciarse también que las medias más altas se encuentran principalmente en las variables C2/T2 y C3/T3, lo cual indica que muchas mujeres son atendidas con más de una consulta durante el segundo y tercer trimestre de gestación.

La matriz de correlación se muestra de la siguiente manera:

Correlations (consultas.sta) Casewise deletion of MD N=32						
Variable	C1/T1	C1/T2	C1/T3	C2/T1	C2/T2	C2/T3
C1/T1	1.000000	0.688836	0.470459	0.981084	0.394269	0.970370
C1/T2	0.688836	1.000000	0.344469	0.658836	0.229645	0.641435
C1/T3	0.470459	0.344469	1.000000	0.533599	0.129688	0.506740
C2/T1	0.981084	0.658836	0.533599	1.000000	0.368707	0.970579
C2/T2	0.394269	0.229645	0.129688	0.368707	1.000000	0.443723
C2/T3	0.970370	0.641435	0.506740	0.970579	0.443723	1.000000

Tabla 4.21 Matriz de correlación de la muestra

Puede observarse que casi todas las variables tienen una alta correlación, en particular todas las variables muestran una correlación considerablemente alta con respecto a C1/T1 y a C2/T3.

La Figura 4.5 muestra una gráfica que ilustra la correlación existente entre las variables y se observa lo ya antes mencionado de la alta correlación existente, además de que se pueden observar la leve presencia de dos grupos.

Por otro lado, en la aplicación del método de componentes principales, es necesario observar como primera intención los valores propios asociados a la matriz de correlación de la matriz X, la asimilación de a varianza para cada componente principal y la varianza acumulada para cada uno de estos componentes principales, lo cual se muestra en la siguiente Tabla 4.21:

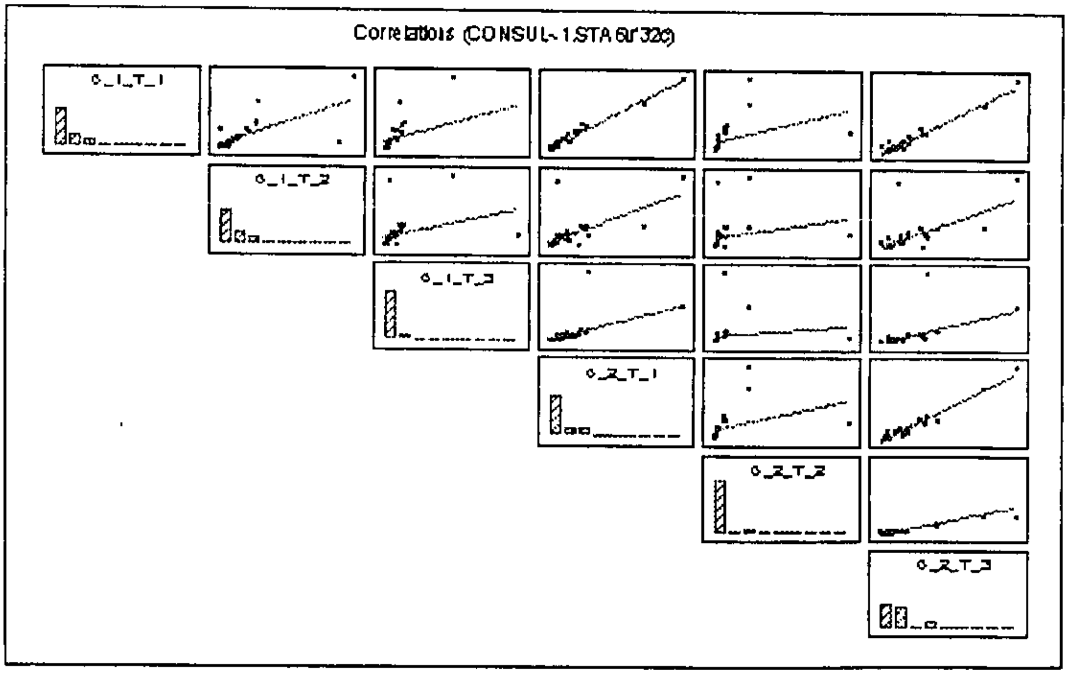


Figura 4.6 Gráfica de las seis variables de la Atención Prenatal

Eigenvalues (consultas.sta)				
Extraction: Principal components				
Value	Eigenval	% total Variance	Cumul. Eigenval	Cumul. %
1	3.974455037	66.24091729	3.974455037	66.24091729
2	0.886397992	14.77329987	4.860853029	81.01421715
3	0.665943347	11.09905578	5.526796376	92.11327293
4	0.429529476	7.158824606	5.956325852	99.27209754
5	0.028644277	0.477404608	5.984970129	99.74950215
6	0.015029871	0.250497853	6	100

Tabla 4.21 Acumulación de varianza para cada componente principal

Puede observarase que con solo considerar los tres `primeros componentes principales seria suficiente , ya que con estos se tendria alrededor de un 92 % de la variación total. La gráfica de estos componentes principales es la siguiente:

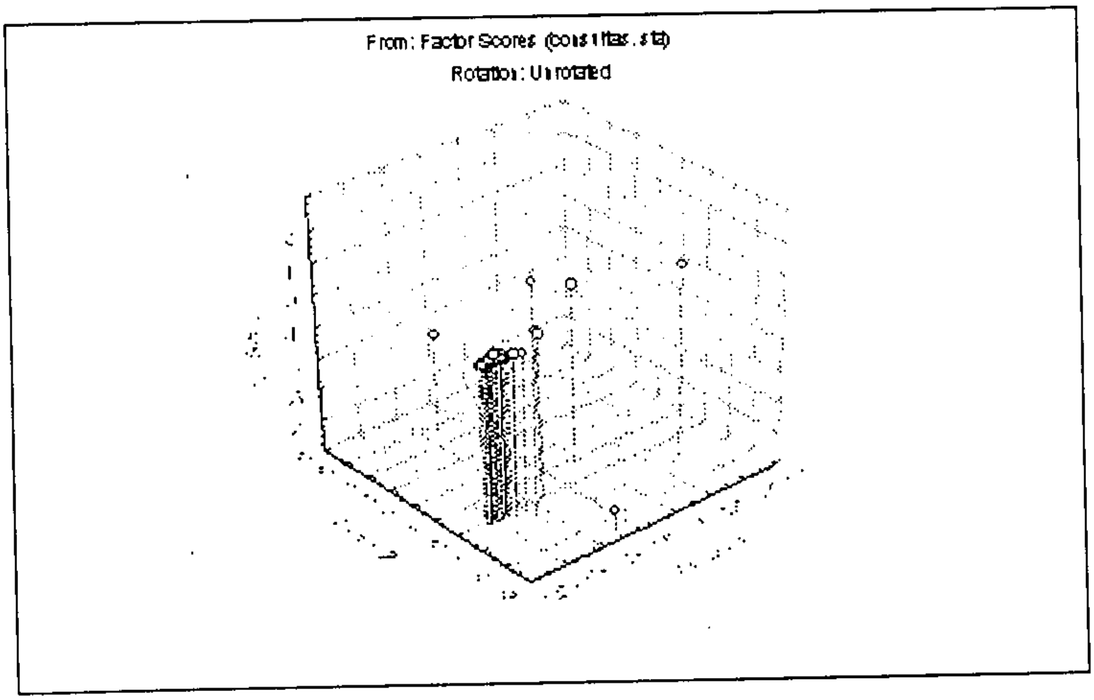


Figura 4.7 Gráfica de los componentes 3 vs 2 vs 1

Se puede apreciar que alrededor del segundo componente principal (Factor 2) las observaciones tienen una variabilidad considerable, la cual es mucho menor para el primer componente principal (Factor 1) y considerablemente menor para el tercer componente principal (Factor 3).

En la Figura 4.8 puede apreciarse mejor aún la manera en que cada componente principal va explicando la variación.

Puede apreciarse que la gráfica se estabiliza hasta el quinto componente principal, lo cual hace pensar que el cuarto componente también podría considerarse, pero para aclarar esto se observará el intervalo de confianza al 95 % de dicho componente principal para así ver si el valor del mismo es útil o no considerarlo.

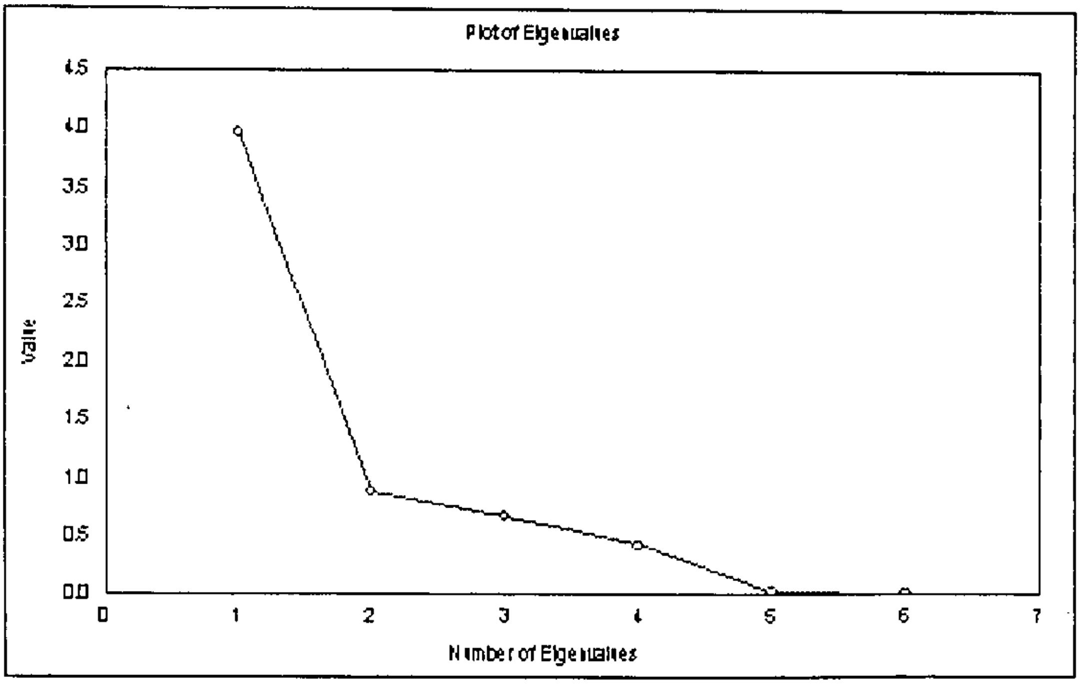


Figura 4.8 Gráfica de los valores propios

Se tiene entonces que el intervalo es de la forma:

$$\left(\frac{\hat{\lambda}_j}{1+\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}},\frac{\hat{\lambda}_j}{1-\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}\right)$$

donde n es el tamaño de la muestra, q es el quantil de orden 0.95 de una normal estándar con base en la muestra y $\hat{\lambda}_j$ es el valor propio que se quiere analizar, por lo tanto se tiene que los datos son:

$$\hat{\lambda}_4 = 0.4295295$$
$$q = 1.645$$
$$\sqrt{32} = 5.6568$$

Por lo tanto el intervalo resultante para el segundo valor propio quedaria de la forma:

$$(0.302948, 0.737808)$$

como se ve el valor de este componente principal oscila en números muy pequeños por lo que puede ser despreciado y por lo tanto la varianza de Y_4 se despreciará también.

Lo cual conlleva a modelar la matriz en sólo tres dimensiones (ver Gráfica 4.*) observándose así la posibilidad de tres clasificaciones de la muestra de la forma:

- Atención médica baja: Son los estados en donde predominan el número de mujeres que llegan al tercer trimestre de gestación sin haber recibido un chequeo médico.
- Atención médica mediana: Estados en donde el número de mujeres que llegan al tercer semestre sin haber recibido chequeos no es tan alto.
- Atención médica alta: Estados en donde el número de mujeres que llegan al tercer trimestre sin atención médica es bajo.

Y la lista de estados correspondientes a cada una de las clasificaciones es la siguiente:

Clasificación	
Tipo de Atención	Estados
Atención médica baja	N.L., TAB. y VER.
Atención médica mediana	AGS., B.C., B.C.S., CAMP., COAH., COL., CHIH., CHIS., DGO., GRO., HDGO., MICH., NAY., OAX., PUE., QUER., Q.R., S.L.P., SIN., SON., TAMPS., TLAX., YUC. y ZAC.
Atención médica alta	D.F., GTO., JAL., MEX. y MOR.

Tabla 4.22 Clasificación del tipo de atención prenatal

La tabla anterior se utilizará para el análisis de discriminante en donde, como en los análisis de discriminante anteriores es necesario realizar de primera instancia el supuesto de normalidad de lamuestra y el considerar que las matrices de covarianza para todas las variables son iguales . En consecuencia se tiene que, realizando la clasificación por individuos con base en las funciones de discriminación lineal la siguiente tabla de clasificación por grupo:

Classification Matrix (consultas.sta)				
Rows: Observed classifications Columns: Predicted classifications				
Group	Percent Correct	G_1:1 p=.09375	G_2:2 p=.75000	G_3:3 p=.15625
G_1:1	66.67	2	1	0
G_2:2	100.00	0	24	0
G_3:3	80.00	0	1	4
Total	93.75	2	26	4

Tabla 4.23 Porcentajes de clasificación por tipo de atención prenatal

Puede observarse que la clasificación realizada es relativamente buena o al menos con un margen de error aparentemente pequeño ya que solo dos observaciones están mal clasificadas, y para saber cuales son se analizará la Tabla 4.24.

Con ayuda de esta tabla es posible observar que las dos observaciones mal clasificadas son las correspondientes al D.F. y a Veracruz, esto implica que la atención prenatal en el D.F. es mejor de lo que se supuso en un principio y, en cambio, la atención en Veracruz no es tan buena como se supuso.

Classification of Cases (consultas.sta)				
Incorrect classifications are marked with *				
	Observed Classif.	1 p=.09375	2 p=.75000	3 p=.15625
AGS	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
BC	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
BCS	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
CAMP	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
COAH	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
COL	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
CHIS	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
CHIH	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
*DF	G_3:3	G_2:2	G_3:3	G_1:1
DGO	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
GTO	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1
GRO	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
HDGO	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
JAL	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1
MEX	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1
MICH	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
MOR	G_3:3	G_3:3	G_2:2	G_1:1
NAY	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
NL	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_3:3
OAX	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
PUE	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
QUER	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
QR	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
SLP	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
SIN	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
SON	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
TAB	G_1:1	G_1:1	G_2:2	G_3:3
TAMPS	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
TLAX	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
*VER	G_1:1	G_2:2	G_3:3	G_1:1
YUC	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1
ZAC	G_2:2	G_2:2	G_3:3	G_1:1

Tabla 4.24 Clasificaciones incorrectas y muestra del grupo al que debe pertenecer cada caso

Con lo que la clasificación final quedaría de la siguiente manera:

Clasificación	
Tipo de Atención	Estados
Atención médica baja	N.L. y TAB.
Atención médica mediana	AGS., B.C., B.C.S., CAMP., COAH., COL., CHIH., CHIS., DGO., D.F., GRO., HDGO., MICH., NAY, OAX., PUE., QUER., Q.R., S.L.P., SIN., SON., TAMPS., TLAX., VER.,YUC. y ZAC.
Atención médica alta	GTO., JAL., MEX. y MOR.

Tabla 4.25 Clasificación final del tipo de atención prenatal

Este análisis posibilita el concluir que la atención prenatal en México es en su mayoría medianamente buena, es decir, que las mujeres que acuden a una consulta médica hasta el tercer trimestre no es casi igual al número de mujeres que van desde el primero. Esto puede indicar varias deficiencias en el sistema de salud en México, uno de ellos puede ser la falta de información para la mujer acerca de las prevenciones que debe de tomar cuando este en embarazada y de cómo debe seguir su embarazo desde el punto de vista médico, es decir que es probable que no se de suficiente información acerca de que la mujer debe ir periódicamente al médico durante el embarazo desde los primeros síntomas de este, lo cual si no se realiza puede conllevar a que la mujer por ignorancia no lleve su embarazo de manera sana y cuidadosa y eso conlleve a múltiples problemas para esta.

Ahora, lo anterior puede ser un poco ambiguo ya que lo que se observó puede deberse a una falta de educación medico preventiva para la población y no precisamente a un mal sistema de salud, en fin es un problema que debe atacarse por todos los medios, tanto de educación académica como de educación médico preventiva.

Capitulo V

Conclusiones

En base a los resultados obtenidos el análisis de la mortalidad materna, es posible concluir que ésta es, aún hoy en día, un problema de salud importante en México, y por lo tanto merece un mejor seguimiento; de manera que quede claro cómo se está comportando día con día.

Es necesario hacer notar que existe un gran atraso en la publicación de los datos y un subregistro considerable. Esto se vió reflejado al analizar la clasificación de la mortalidad materna hecha por el sector salud y compararla con la clasificación obtenida gracias al análisis estadístico que realizamos con sus mismos datos.

Otro punto a resaltar en este análisis es que, dentro de los resultados obtenidos se vió que estados como el D.F. presentan características que no cuadran del todo con lo que dice la Secretaría de Salud, ya que al menos, este estado es el que dicha secretaria muestra con los mínimos problemas de mortalidad materna y, sin embargo esto no es así, puesto que se encuentra en realidad clasificado junto con los estados de mediana mortalidad materna y no junto con los de baja mortalidad.

En fin, es posible decir que hoy en día, aunque la mortalidad materna ha tenido una gran atención por parte de los comités encargados de ésta (lo cual también se pudo apreciar en el análisis), aún queda mucho por hacer para lograr una reducción considerable de este fenómeno. Cuando esto sea llevado a cabo, será muy importante no descuidar ningún estado, ni ninguna causa de mortalidad materna por enfocarse en bajar los indices de mortandad en otro estado o enfocar toda la atención a un solo problema.

En conclusión, el Sector Salud debe tomar estrategias de prevención y registro basándose en estudios más detallados. Para esto es necesario empezar con la recopilación de datos que permitan realizar análisis estadísticos comparativos, de forma tal que pueda hacerse un seguimiento detallado y periódico de todos los problemas relacionados con este fenómeno, esto tomando en cuenta las transformaciones socioeconómicas que el país tiene con el paso del tiempo.

Es necesario recomendar que se realice un muestreo más detallado, debido a que hay regiones en el país de las que no se tiene el más mínimo registro sobre el comportamiento de este fenómeno, pues por lo general, las zonas más marginadas del país son las que tienen, por consiguiente, las más decadentes condiciones higiénicas y salubres. Esto hace que el subregistro pueda tener implicaciones más graves de las que se han considerado hasta ahora.

Se debe entender también que para lograr una cobertura completa y satisfactoria de este tipo de muestreos, se necesita un subsidio mucho mayor del que se tiene y, muy probablemente, una tecnología mayor, lo cual requiere más tiempo y esfuerzo del que se le ha dedicado.

Bibliografía

- AGUIRRE MARTINEZ, A. Francisco, *Mortalidad Materna*, Tesis de Licenciatura, Colegio México, México.

- ANDERSON, T. Wilbur, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York, USA, 1994.

- CASTREJON J. L., *Análisis de Componentes Principales y Otras Proyecciones*, Tesis de Licenciatura de Matemático, Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F., 1995.

- Cimac, *Maternidad sin Riesgos en México*, México, 1994

- Chatfield, Christopher, *Introduction to Multivariate Analysis*, Lodres, Inglaterra, 1980.

- COMITÉ NACIONAL PARA EL ESTUDIO DE LA MORTALIDAD MATERNA Y PERINATAL, *Mortalidad Materna y Perinatal, Cifras y Hechos 1989-1994, Acciones para su Reducción*, México, Mayo 1994.

- CONAPO, *Encuesta Nacional de Planificación Familiar*, México, 1995 (mimeo).

- CONAPO, *Indicadores Básicos de Salud Reproductiva y Planificación Familiar*, México, 1996.

- CONAPO & Programa Nacional de la Mujer (1995-2000), *La Situación de la Mujer en México*, México, D.F., 1997.

- DIRECCIÓN GENERAL DE ESTADÍSTICA & Secretaria de la Industria y Comercio, *IX Censo General de Población*, México, 1970.

- EVERITT, B. Sidney, *Applied Multivariate Data Analysis*, Londres, Inlglaterra, 1991.

- FUNDACIÓN PARA EL SÍNDROME DE HELLP, *Síndrome de Hellp*, Madrid, España, 1998.

- HAND, David J., *Discrimination and Clasification*, Chichester, 1981.

- HARRIS, Richard J., *A Primer of Multivariate Statistics*, New York, USA, 1975.

- HERNÁN, S. Martin, *Salud y Enfermedad*, México, D.F., 1993.

- HERNÁNDEZ C. Elvira, *Maternidad y Salud... ¿Binomio Posible?*, México, Julio 1995.
- HUBERTY, Carl J., *Applied Discriminant Analysis*, New York, USA, 1994.
- INEGI, *XI Censo General de Población y Vivienda*, México, 1990.
- INEGI, *Conteo de Población y Vivienda*, México, 1995.
- INEGI, *Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica*, México, 1997.
- INEGI, *Información Estadística del Sector Salud y Seguridad Social*, Cuadernillos, México, 1999.
- INEGI & UNICEF, *La mujer Mexicana: Un Balance Estadístico al Final de Siglo XX*, México, 1995.
- INSTITUTO DE LA MUJER (Ministerio de Asuntos Sociales), *Mujeres Latinoamericanas en Cifras*, México 1992-1995.
- JOHNSON, R. Arnold, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, New Jersey, USA, 1982.
- MARDIA, K. Varichand, *Multivariate Analysis*, Londres, Inglaterra, 1984.
- PEDRERO N., Mercedes & CONAPO, *Situación de la Mujer en México.Cinco Dimensiones Sobre la Situación de la Mujer Mexicana; Legal, Política, Bienestar, Trabajo y Fecundidad*, México, 1992.
- POPULATION REFERENCE BUREAU (PRB), Las mujeres de Nuestro Mundo, DC EEUU, Marzo 1998.
- PROGRAMA NACIONAL PARA EL BIENESTAR Y LA INCORPORACIÓN AL DESARROLLO DE LAS PERSONAS CON DISCAPACIDAD, *Desarrollo Integral de la Familia*, México, 1995.
- PRESS, S. James, *Applied Multivariate Analysis: Methods of Inference*, Krieger, 1982.
- S/Autor, *El Milagro del Nacuimiento*, México, D.F., 1994.
- S/Autor, *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana*, Madrid, España, 1980.
- SEBER, George A.F., *Multivariate Observations*, New York, USA, 1984.

- SECRETARÍA DE SALUD, *Análisis Situacional Sobre la Salud de la Mujer en México (por entidades federativas)*, México, Octubre 1994.
- SECRETARÍA DE SALUD, *Encuesta Nacional sobre Fecundidad y Salud*, México, 1987.
- SECRETARÍA DE SALUD &, Dirección General de Estadística e Informática, *Sistema Nacional en Salud para Población Abierta*, México, 1997.
- SECRETARÍA DE SALUD & Subsecretaria de Prevención y Control de Enfermedades & Dirección General de Estadística e Informática, *Mortalidad 941-97*, México, Noviembre 1998.
- STANLEY, Clayton & Newton R. John, *Manual de Obstetricia y Ginecología*, Churchill Livingstone, Edinburgo, 1998.
- UNICEF, *Programa de Salud y Nutrición*, México, D.F., 1997