

00382 (2)



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS

METODOS HAMILTONIANOS EN CAMPOS Y SISTEMAS EXTENDIDOS.

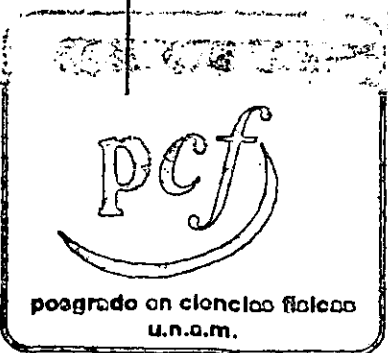
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE: DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA) PRESENTA: ROMAN LINARES ROMERO

294129

DIRECTORES: Dr. JOSE DAVID VERGARA OLIVER. Dr. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS

2001





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tesis: METODOS HAMILTONIANOS EN CAMPOS Y SISTEMAS EXTENDIDOS.

Presentada por: Román Linares Romero

Directores de tesis: Dr. José David Vergara Oliver y Dr. Luis Fernando Urrutia Rios.

## RESUMEN

En la tesis se abordan dos problemas generales, uno en teoría de campos y otro en teoría de objetos extendidos. Ambos son tratados utilizando el método hamiltoniano, el primero a nivel cuántico y el segundo a nivel clásico. Motivados por la formulación de lazos aplicada al modelo de Schwinger, se obtiene la cuantización completa y exacta de la formulación compacta del modelo. En el área de los objetos extendidos se estudia la formulación canónica de las diferentes acciones de cuerdas bosónicas y de la supercuerda de Green-Schwarz. Para esta última se hace una separación covariante consistente de las constricciones fermiónicas en constricciones de primera y segunda clase. Como una generalización de este análisis se expone la formulación hamiltoniana de las diferentes acciones que describen las  $p$ -branas bosónicas. Se muestra explícitamente la dificultad para desarrollar el método canónico de la acción de  $p$ -branas invariante de Weyl standard y para resolver este problema, se propone una nueva acción de  $p$ -branas que involucra un campo escalar auxiliar y que mantiene la invariancia de Weyl. Se discute la extensión supersimétrica de estas acciones en espacios-tiempo curvos y se analiza su simetría local fermiónica  $\kappa$ . Como caso particular se realiza una discusión detallada para la supermembrana conforme, se desarrolla su formulación canónica y se presenta una separación consistente de las constricciones fermiónicas. Utilizando la misma línea de razonamiento se introduce una acción bosónica de  $D_p$ -branas cuadrática en el campo de fuerza e invariante de Weyl. Se muestra que esta simetría nos provee de una forma de construir acoplamientos conformes entre el campo escalar y los campos de norma.

Tesis: METODOS HAMILTONIANOS EN CAMPOS Y SISTEMAS EXTENDIDOS.

Presentada por: Román Linares Romero

Directores de tesis: Dr. José David Vergara Oliver y Dr. Luis Fernando Urrutia Rios.

## SUMMARY

In the thesis two general problems, one in theory of fields and another one in theory of extended objects are approached. Both are discussed using the Hamiltonian method, the first at quantum level and the second at classic level. Motivated by the loop formulation approach of the Schwinger model, the complete and exact quantization of the compact formulation of the model is obtained. In the area of extended objects the canonical formulation of the different bosonic string actions and of the Green-Schwarz superstring action is studied. A covariant consistent splitting for the fermionic constraints into first class constraints and second class constraints is showed for the Green-Schwarz action. As a generalization of this analysis the canonical formulation of the different bosonic p-branes actions is discussed. We show explicitly the difficulty to apply the canonical method for the standard Weyl invariant p-brane action and in order to solve this problem, a new p-brane action that involves a scalar field to maintains the Weyl invariance is introduced. The supersymmetric extension of these actions in curved space-time is discussed and its local fermionic kappa symmetry is carefully analyzed. As a particular case we study the conformal supermembrane, its canonical formulation is developed and a consistent splitting of its fermionic constraints is performed. In the same thought line a bosonic Weyl invariant  $D_p$ -brane action quadratic in the strength field is introduced. Is also showed that this symmetry provides us with a form to construct conformal couplings between the scalar field and the gauge fiels on the D-brane.

# Índice

<b>Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelo de Schwinger compacto</b>	<b>5</b>
1.1 Campo electromagnético libre . . . . .	7
1.2 El modelo de Schwinger . . . . .	9
1.3 Grados de libertad invariantes de norma . . . . .	11
1.4 Espacio de Fock . . . . .	15
1.5 La cuantización completa del modelo . . . . .	18
1.5.1 Los modos cero . . . . .	20
1.5.2 Los estados excitados . . . . .	24
1.6 La carga quiral . . . . .	25
1.7 Conclusiones . . . . .	28
<b>2 Cuerdas y Supercuerdas</b>	<b>35</b>
2.1 Partícula relativista . . . . .	38
2.2 Cuerdas bosónicas . . . . .	39
2.2.1 Acción de Nambu-Goto . . . . .	39
2.2.2 Acción de Schild . . . . .	41

2.2.3	Acción de Polyakov . . . . .	42
2.3	Formulación canónica de cuerdas . . . . .	44
2.3.1	Acción de Nambu-Goto . . . . .	44
2.3.2	Acción de Schild . . . . .	45
2.3.3	Acción de Polyakov . . . . .	46
2.4	Transformaciones de norma . . . . .	47
2.5	Supercuerdas . . . . .	49
2.5.1	$SUSY(N)/SO(D - 1, 1)$ como espacio de fondo . . . . .	49
2.5.2	Acciones invariantes . . . . .	51
2.5.3	La acción de Green-Schwarz y sus simetrías . . . . .	53
2.5.4	Tipos de cuerdas . . . . .	56
2.6	Formulación canónica de supercuerdas tipo II . . . . .	58
2.6.1	Hamiltoniano y constricciones . . . . .	58
2.6.2	Clasificación y álgebra de constricciones . . . . .	61
2.7	Análisis canónico de la cuerda heterótica . . . . .	64
2.8	Conclusiones . . . . .	67
<b>3</b>	<b>p-branas y super p-branas</b>	<b>72</b>
3.1	Acciones de p-branas bosónicas . . . . .	77
3.1.1	Acción de Nambu-Goto . . . . .	77
3.1.2	Acción tipo Schild . . . . .	78
3.1.3	Acción tipo Polyakov . . . . .	79
3.1.4	Acción conforme I . . . . .	80
3.1.5	Acción conforme II . . . . .	81

3.1.6	Acción generalizada . . . . .	83
3.2	Formulación canónica de $p$ -branas . . . . .	84
3.2.1	Acción de Nambu-Goto . . . . .	84
3.2.2	Acción de Schild . . . . .	85
3.2.3	Acción conforme I . . . . .	85
3.3	Formulación canónica de la acción conforme II . . . . .	87
3.4	Acciones supersimétricas . . . . .	91
3.4.1	Super $p$ -branas en el super espacio curvo de $D$ dimensiones . . . . .	91
3.4.2	Super $p$ -branas en el super espacio plano de $D$ dimensiones . . . . .	96
3.5	D-branas . . . . .	99
3.5.1	Acción de Dirac-Born-Infeld . . . . .	99
3.5.2	Acción de Abou-Hull . . . . .	100
3.5.3	Acción conforme I . . . . .	103
3.5.4	Acción conforme II . . . . .	104
3.6	Conclusiones . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Supermembrana conforme</b>	<b>111</b>
4.1	La supermembrana conforme en $D = 11$ . . . . .	113
4.1.1	Supermembrana conforme acoplada a supergravedad . . . . .	113
4.1.2	Supermembrana conforme en el espacio-tiempo plano . . . . .	114
4.2	Supercuerdas a partir de supermembranas . . . . .	116
4.3	Formulación canónica . . . . .	119
4.4	Norma del cono de luz . . . . .	125
4.5	Soluciones clásicas . . . . .	127

4.6	Supermembrana como una teoría de matrices . . . . .	131
4.6.1	Area preservando difeomorfismos . . . . .	131
4.6.2	Regularización matricial . . . . .	132
4.6.3	Espectro de la supermembrana . . . . .	134
4.6.4	Cuantización covariante . . . . .	135
4.7	Invariancia de Lorentz . . . . .	135
4.8	Desarrollos recientes . . . . .	137
4.8.1	Teoría M . . . . .	137
4.8.2	La conjetura BFSS . . . . .	138
4.8.3	Teoría de matrices como una teoría de segunda cuantización . . . .	139
4.9	Conclusiones . . . . .	141
<b>Apéndice A. Relaciones de Conmutación</b>		<b>145</b>
<b>Apéndice B. Variables ADM</b>		<b>147</b>
<b>Apéndice C. Notación y convenciones</b>		<b>148</b>



# Introducción

Todas las interacciones fundamentales se describen en términos de teorías de norma. Estas teorías tienen como característica principal que sus ecuaciones de movimiento no determinan unívocamente la solución del sistema. En el sentido de Dirac, una teoría de norma es un sistema con constricciones de primera clase. Sistemas como las teorías de Yang-Mills, relatividad general, partículas, cuerdas y membranas relativistas son teorías de norma. Durante muchos años se ha estudiado el régimen perturbativo de este tipo de teorías, sin embargo, el estudio del régimen no perturbativo se ha intensificado recientemente en algunos de estos sistemas.

El estudio de los efectos no perturbativos en teorías de campos, tiene una historia que se remonta hasta los años cincuentas, donde por primera vez se obtuvieron soluciones exactas a una teoría de campos. A finales de esa década se encontró una solución no trivial para un modelo que describe un campo de Dirac en  $1 + 1$  dimensiones con una interacción que depende de la cuarta potencia de dicho campo (modelo de Thirring). Posteriormente en 1962, Schwinger, considerando la posibilidad de que un campo vectorial de norma pudiera dar origen a una partícula masiva, mostró que la electrodinámica cuántica con un campo fermiónico no masivo en dos dimensiones ( $QED_2$ ) tenía esta propiedad. Esta teoría de campos simple, pero no trivial, conocida como el modelo de Schwinger, es una de las teorías con invariancia de norma, exactamente soluble, más populares. El modelo ha sido utilizado desde entonces para probar diferentes aspectos de la teoría cuántica de campos. Por ejemplo, la anomalía axial, los vacíos theta, el apantallamiento de la carga y la bosonización presentada por el modelo, junto con métodos alternativos de cuantización, han sido estudiados por muchos autores. De particular interés son los resultados de la ( $QED_2$ ) que pueden dar luz sobre las características no perturbativas tanto de la ( $QED_4$ ) como también de la cromodinámica cuántica ( $QCD_4$ ). Es debido a estas características que la investigación en este tipo de modelos continua hasta la fecha y debido a esta investigación se siguen descubriendo nuevos aspectos que pueden tener relevancia en los fenómenos no perturbativos de teorías de campos.

Son muy pocos los modelos con invariancia de norma que pueden ser resueltos exactamente. En consecuencia, ha sido necesario continuar con el estudio de los efectos no perturbativos en teorías de norma a través de muy diversas rutas. Un ejemplo de ello es la teoría de redes, donde se considera un espacio-tiempo discreto (formulación lagrangiana), o un espacio discreto con tiempo continuo (formulación hamiltoniana). Otra formulación alternativa, utilizada principalmente en el caso de las teorías de norma, ha sido el estudio de la teoría de campos en términos de variables de lazo, cuya propiedad fundamental es ser invariantes de norma. Estas técnicas han permitido realizar algunos avances en la formulación no perturbativa de la gravedad cuántica.

En particular, se ha investigado recientemente la posibilidad de aplicar la formulación de lazos al modelo de Schwinger y se ha encontrado que esta forma de cuantización sugiere de manera directa la formulación compacta del modelo (donde se compactifica el único

grado de libertad físico que tiene la teoría). Sin embargo, la solución del modelo con esta variante no se conocía. Inspirados en este problema, en esta tesis se desarrolla la cuantización del modelo de Schwinger compacto en el capítulo uno. Para ello utilizamos la formulación hamiltoniana de esta teoría de campo y obtenemos su solución completa. Hacemos también una comparación del modelo de Schwinger compacto con el modelo de Schwinger standard.

En la actualidad uno de los problemas más atractivos en física teórica, es el estudio del régimen no perturbativo en teoría de cuerdas. La cuerda (objeto de una dimensión) es el sistema más simple después de considerar estructuras puntuales (objetos de dimensión cero). La teoría de cuerdas fue formulada originalmente a fines de los sesentas y principio de los setentas para describir la física de los hadrones. En este caso, la cuerda se utilizó para conectar quarks y formar así estados ligados de quarks, los cuales son hadrones. El tamaño típico de esta cuerda es  $10^{-13} \text{ cm}$ . Sin embargo, la abundancia de anomalías en espacios-tiempo de 4 dimensiones, la existencia de estados no masivos en el espectro de la cuerda sin correspondencia en el mundo hadrónico y el surgimiento de la cromodinámica cuántica, llevaron al abandono de este modelo. En la actualidad la aplicación de la teoría de cuerdas en física teórica tiene como objetivo la unificación de todas las interacciones fundamentales (electrodébil, fuerte y gravitacional) en teoría de partículas. La idea básica es que toda la materia está hecha de cuerdas, de manera tal que mientras una partícula, por ejemplo un electrón, parece como un punto a la escala de  $10^{-13} \text{ cm}$ , si lo magnificamos a una escala de  $10^{-33} \text{ cm}$ , entonces veremos a éste como un objeto extendido, esto es, como una cuerda. La unificación consiste en que los diferentes tipos de partículas que vemos corresponderían a diferentes excitaciones de la misma cuerda. Si excitamos la cuerda de una manera obtenemos un electrón, si la excitamos de otra, un fotón etc.

A principio de los ochenta (en el periodo ahora conocido como la primera revolución de cuerdas) se encontró que las teorías de cuerdas relevantes deben incluir supersimetría en el espacio-tiempo y que para evitar patologías (anomalías, pérdida de covariancia etc.) este espacio-tiempo debe ser de 10 dimensiones. Hay cinco teorías de cuerdas supersimétricas con estas características, éstas son conocidas como la teoría IIA, IIB, heterótica  $E_8 \times E_8$ , heterótica  $SO(32)$  y tipo I. Las primeras cuatro teorías consideran sólo cuerdas cerradas orientadas mientras que la teoría de cuerdas tipo I considera cuerdas cerradas y cuerdas abiertas no orientadas. Las cuerdas no orientadas surgen al considerar la simetría discreta generada por el operador de paridad, el cual invierte la parametrización de la cuerda y por tanto cambia la orientación de la hoja de mundo. A bajas energías cada una de estas teorías de supercuerdas se reduce a una teoría de campos conocida, siendo éstas teorías de supergravedad en diez dimensiones. Durante la década de los ochenta y principios de la década de los noventas la investigación en teoría de cuerdas se centró básicamente en el estudio perturbativo de estas cinco aparentemente diferentes teorías. Sin embargo, desde mediados de los noventas (en lo que hoy se conoce como la segunda revolución de cuerdas), se ha aprendido mucho sobre la estructura no perturbativa de la teoría, transformándose con esto varias de la viejas ideas que se tenían sobre ella. Una cosa que se ha aprendido es que las cinco teorías de cuerdas, aparentemente distintas, en realidad están relacionadas a través de diferentes relaciones de dualidad. Por ejemplo, la dualidad T identifica dos

teorías definidas sobre espacios de diferente tamaño, esta dualidad relaciona la teoría de cuerdas IIA con la IIB y la heterótica  $E_8 \times E_8$  con la heterótica  $SO(32)$ . Existe también la dualidad S, la cual identifica una teoría con acoplamiento fuerte a otra con acoplamiento débil, esta dualidad relaciona la teoría tipo I con la  $SO(32)$  y la IIA con la IIB.

Otro tópico interesante, es la evidencia acumulada sobre la existencia de una teoría en 11 dimensiones, a partir de la cual se puede obtener mediante diferentes procesos de compactificación, las cinco teorías de cuerdas. A esta teoría en 11 dimensiones que aún no es construida se le llama teoría M. Esta teoría tiene además a la supergravedad en 11 dimensiones como otro de sus límites, pero más aún, los diferentes límites de la teoría M no sólo contienen cuerdas y supergravedad, sino también una gran variedad de objetos extendidos de mayor dimensión los cuales son no perturbativos y se les conoce con el nombre genérico de branas. Ejemplos de branas son las  $p$ -branas, las  $Dp$ -branas y las  $Mp$ -branas.

De esta forma, las branas constituyen un elemento importante de la física no perturbativa de los sistemas extendidos y en consecuencia es necesario realizar un estudio exhaustivo de sus propiedades. Mucho se ha aprendido en los años recientes sobre las diferentes branas, pero falta mucho por entender.

La teoría de cuerdas es una teoría invariante bajo transformaciones de coordenadas en la hoja de mundo y puede construirse una acción (acción de Polyakov) que de manera adicional tenga una invariancia de escala (comúnmente llamada invariancia de Weyl). Estas simetrías permiten fijar la norma conforme en la hoja de mundo y por tanto simplificar de manera importante el principio de acción. Al tomar esta norma, la cuerda tiene aún simetrías residuales que dan origen a lo que se conoce como la simetría conforme. Cuando la supercuerda es cuantizada, esta simetría da origen a una anomalía para dimensiones del espacio-tiempo diferentes de 10. Por tanto una forma de obtener la dimensión crítica de la cuerda es estudiar su simetría conforme.

Al inicio del desarrollo de la teoría de super  $p$ -branas, se consideró la posibilidad de que estos objetos fueran fundamentales en el sentido de que las partículas fueran modos de vibración de las  $p$ -branas. Bajo esta consideración hubo gente que se planteó la posibilidad de tener una acción de  $p$ -branas que incorporara la simetría de Weyl (además de la invariancia bajo reparametrizaciones) y ver si de la generalización de la anomalía conforme para cuerdas, era posible obtener una dimensión crítica para las diferentes super  $p$ -branas. Al proponer una acción que incorporara la simetría de Weyl aparecieron problemas paralelos, por ejemplo, la acción propuesta tiene la gran dificultad de poseer una potencia fraccionaria en las derivadas de las coordenadas del espacio-tiempo y como consecuencia de esta característica, no se puede desarrollar la formulación hamiltoniana y por tanto no se tiene una representación canónica cuántica. Este problema encuentra una solución en esta tesis. Proponemos una nueva acción que es invariante de Weyl y además es cuadrática en las derivadas de las coordenadas del espacio-tiempo. Para esta acción el formalismo canónico puede obtenerse a partir del método de Dirac. Este problema se analiza en el capítulo tres para  $p$ -branas bosónicas y en el capítulo cuatro para la supermembrana ( $p=2$ ). De manera adicional, en el capítulo tres hacemos una construcción semejante para el caso de  $Dp$ -branas bosónicas y analizamos algunas de sus consecuencias.

En el caso del análisis supersimétrico de la membrana con invariancia de Weyl, surgen algunas sutilezas cuando se quiere hacer la clasificación covariante de las constricciones fermiónicas. Esto mismo sucede en la teoría de cuerdas supersimétricas y en la superpartícula. Un análisis de estas sutilezas se hace en el capítulo dos para la supercuerda y en el capítulo cuatro para la supermembrana.

De manera específica, esta tesis se compone de dos problemas generales, uno en teoría de campos y el otro en objetos extendidos, expuestos en cuatro capítulos. Ambos son tratados utilizando el método hamiltoniano, el primero a nivel cuántico y el segundo a nivel clásico. Como hemos mencionado anteriormente, el modelo de Schwinger es un modelo de teoría de campos en  $1 + 1$  dimensiones, exactamente soluble. Motivados por la formulación de lazos aplicada al modelo de Schwinger, en el capítulo uno se expone la cuantización de la formulación compacta del modelo, la cual no había sido discutida previamente en la literatura. La solución a este problema es una contribución de la presente tesis. En los restantes tres capítulos se expone la formulación canónica de diversos sistemas extendidos. En el capítulo dos se estudia la formulación canónica de las diferentes acciones de cuerdas bosónicas y se obtienen las simetrías de la acción de Polyakov a través del hamiltoniano extendido. También se estudia la formulación canónica de la supercuerda de Green-Schwarz y se hace una separación covariante consistente de las constricciones fermiónicas en constricciones de primera y segunda clase. El material de este capítulo es una síntesis de diferentes trabajos previos discutidos por diferentes autores, con excepción de la obtención de las simetrías utilizando el hamiltoniano extendido. En el capítulo tres se expone la formulación hamiltoniana de las diferentes acciones que describen las  $p$ -branas bosónicas. Se muestra explícitamente la dificultad que se encuentra al tratar de desarrollar el método canónico para la acción de  $p$ -branas invariante de Weyl standard y para resolver este problema, se propone una nueva acción de  $p$ -branas que involucra un campo escalar auxiliar y que mantiene la invariancia de Weyl. Se muestra que para esta acción la formulación canónica se sigue sin problemas utilizando el método de Dirac. Se presenta la extensión supersimétrica de estas acciones en espacios-tiempo curvos arbitrarios y se discute en detalle la invariancia de esta acción ante la simetría local fermiónica  $\kappa$ . Se introduce también en este capítulo una acción bosónica de  $Dp$ -branas, cuadrática en el campo de fuerza e invariante de Weyl, mediante la introducción nuevamente de un campo escalar auxiliar, y se muestra que, la simetría de Weyl nos provee de una forma de construir acoplamientos conformes del campo escalar con los campos de norma. La introducción de las acciones invariantes de Weyl utilizando un campo escalar auxiliar para  $p$ -branas, super  $p$ -branas y  $Dp$ -branas es una contribución de la presente tesis. Por último, en el capítulo cuatro se analiza la acción que describe a la supermembrana invariante de Weyl tanto en espacios-tiempo curvos arbitrarios como en el espacio de Minkowski. Se desarrolla el análisis canónico para la supermembrana conforme y al igual que para la supercuerda, se presenta una separación consistente de las constricciones fermiónicas. Se finaliza el capítulo con una revisión de temas que ponen de manifiesto el papel de la teoría de supermembranas dentro de la teoría de cuerdas. El análisis canónico de la supermembrana invariante de Weyl es una contribución original de esta tesis.

# Capítulo 1

## Modelo de Schwinger compacto

Uno de los sistemas exactamente solubles más populares en teoría cuántica de campos es el modelo de Schwinger, el cual describe electrodinámica en  $1 + 1$  dimensiones [1]. Este modelo ha sido resuelto de varias maneras y no se intenta dar aquí una lista completa de todas las referencias relacionadas con el tema [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Muchas de las soluciones consideran la coordenada espacial como una línea o un círculo, con el grado de libertad electromagnético básico que es el modo cero de la componente espacial del potencial electromagnético  $A_1$ , tomando valores en el intervalo  $[-\infty, +\infty]$ . Nos referiremos a esta versión del modelo como el caso no compacto, donde el adjetivo (no compacto) se refiere, desde ahora, a la variable de configuración electromagnética y no a la coordenada espacial. En general las teorías de norma tienen también su versión compacta, la cual surge cuando los grados de libertad correspondientes a los campos de norma, toman valores sobre un intervalo compacto. Las formulaciones naturales para que esto pase son, por un lado, la formulación de redes de las teorías de norma [11] y por el otro, la formulación de las teorías de norma en el espacio de lazos [12]. En esta última aproximación, toda la información acerca de la teoría está dada en términos de variables que son invariantes ante transformaciones de norma grandes y pequeñas. En  $1 + 1$  dimensiones la variable básica para los grados de libertad electromagnéticos es  $\exp[ie \int_0^L dx A_1(x)]$  y, consecuentemente, la representación de lazos describe naturalmente la electrodinámica compacta, dado que es suficiente restringir  $c = \frac{1}{L} \int_0^L dx A_1(x)$  al intervalo  $\{-\frac{\pi}{eL}, \frac{\pi}{eL}\}$  [13]. La representación de lazos puede también considerar el caso no compacto si se introducen grados de libertad adicionales [14].

Como ha sido enfatizado por Polyakov [15], la selección de un tipo de teoría (caso compacto) sobre el otro (caso no compacto) puede ser decidido únicamente sobre bases empíricas de acuerdo a las predicciones de cada elección. Desde un punto de vista más técnico podemos decir que las teorías de campo compactas están blindadas respecto a las transformaciones de norma grandes, mientras que en las no compactas tienen que ser introducidos los vacíos- $\theta$  de manera tal que se preserve la invariancia bajo tales transfor-

maciones. Se espera que una de las mayores diferencias entre los casos compacto y no compacto esté en las condiciones de frontera que satisfacen las correspondientes funciones de onda, más que en la forma específica de las ecuaciones diferenciales (funcionales) que describen la dinámica. Esto está en completa analogía con el caso simple de una partícula en un espacio unidimensional representado por la línea (caso no compacto) en contraste con el rotor rígido unidimensional (caso compacto) [16], los cuales están descritos por la misma ecuación de Schrödinger, pero sujetos a diferentes condiciones de frontera.

En este capítulo se presenta la solución completa y exacta del modelo de Schwinger con grupo de norma compacto  $U(1)$  (caso compacto). La condición de compactificación surge al pedir que el único grado de libertad electromagnético  $c$  tenga un carácter angular. Este caso es sugerido cuando se utiliza la formulación de lazos en el problema, lo cual define una versión del modelo de Schwinger que difiere del modelo standard, donde el grado de libertad electromagnético  $c$  toma valores sobre la línea (caso no-compacto). Todos los resultados se siguen de manera natural de la condición de compactificación. Las consecuencias principales son: el espectro de los modos cero no es degenerado y no corresponde al del oscilador armónico (igualmente espaciados), el espectro y las funciones de onda de los estados excitados también difiere de aquellos del caso standard, la carga eléctrica y una carga quirál invariante de norma son conservadas y finalmente, no hay necesidad de introducir un vacío  $\theta$ . Sin embargo la corriente axial anómala continua estando presente. En mayor detalle, estas propiedades son una consecuencia de las siguientes características básicas (i) la condición de compactificación hace que el grado de libertad electromagnético  $c$  sea invariante bajo transformaciones de norma pequeñas y grandes, (ii) esta invariancia de norma es heredada a los operadores de creación y aniquilación, los cuales son utilizados para resolver el modelo y (iii) las condiciones de frontera sobre las funciones de onda, las cuales surgen de pedir hermiticidad tanto del campo eléctrico como del modo cero del hamiltoniano en el espacio compacto de la variable  $c$ , y que consisten en pedir que las funciones de onda  $F(c)$  (y sus primeras derivadas) sean iguales en los puntos  $\pm \bar{c}$ , corresponden al principio y final del círculo  $-\bar{c} < c < \bar{c}$ . Es decir, estos puntos extremos son identificados como un mismo punto físico en el espacio de configuración electromagnético compacto.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. Comenzamos con una breve motivación de la compactificación del grado de libertad electromagnético, esto se hace en el caso del campo electromagnético libre. Inmediatamente después se introduce el modelo de Schwinger compacto. Se hace un análisis detallado de las implicaciones físicas debidas a la constricción de Gauss. Se construye el espacio de Fock del modelo y se encuentra numéricamente los valores propios del hamiltoniano. Por último, se discute el motivo por el cual se tiene una carga quirál conservada. A lo largo del capítulo, se hace una comparación con el modelo de Schwinger standard.

## 1.1 Campo electromagnético libre

En esta sección se expone una breve motivación de la compactificación del grado de libertad electromagnético en el marco de referencia de la formulación del espacio de lazos. Para esto utilizaremos el caso del campo electromagnético libre porque es más sencillo que el modelo de Schwinger. Tomaremos el espacio como un círculo de longitud  $L$  e imponemos condiciones de frontera periódicas sobre  $A_\mu$ . Clásicamente, tomamos la elección de norma  $A_0 = 0$ , junto con  $\partial_1 A_1 = 0$ . Esto implica  $A_1 = A_1(t) = c(t)$ , dejando el modo cero del potencial electromagnético como el único grado de libertad, con  $E = \dot{c}$ . Tenemos aun la libertad de las transformaciones de norma grandes  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$ ,  $\alpha = \frac{2\pi n}{eL} x$ , las cuales cambian

$$c(t) \rightarrow c(t) - \frac{2\pi n}{eL}, \quad (1.1)$$

dejando  $A_0 = 0$  junto con  $E$  invariante. La cuantización es realizada en el subespacio  $A_0 = 0 = \Pi_0$ , y subsecuentemente imponiendo la ley de Gauss (la cual es una constricción) sobre los estados físicos. La densidad Hamiltoniana, la ley Gauss y las relaciones de conmutación son

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} E^2, \quad \mathcal{G} = \partial_x E \approx 0, \quad [A_1(x), E(y)] = i\hbar \delta(x - y). \quad (1.2)$$

Expandiendo en modos, tenemos

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= c(t) + \sum_{m \neq 0} A_m \exp\left(\frac{2\pi m}{L} x\right), \\ E(x, t) &= E_0(t) + \sum_{m \neq 0} E_m \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} x\right), \quad E^2 = \sum_{m \geq 0} E_m^* E_m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

con lo cual obtenemos

$$[A_m, E_n] = \frac{i\hbar}{L} \delta_{mn} \Rightarrow [c(t), E_0(t)] = \frac{i\hbar}{L}. \quad (1.4)$$

En la representación de conexiones tenemos la realización  $E_n = \frac{i\hbar}{L} \frac{\partial}{\partial A_n}$  para los conmutadores anteriores. Únicamente el modo cero sobrevive porque la ley de Gauss implica  $E_m = 0, m \neq 0$ , sobre los estados físicos. Es decir  $\Psi_{\text{phys}} = \Psi(c)$ . El Hamiltoniano es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{d^2}{dc^2}, \quad (1.5)$$

con las correspondientes funciones propias y valores propios

$$\Psi(c) = \Psi_0 \exp(ipc), \quad E_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2L}. \quad (1.6)$$

La naturaleza precisa del espectro dependerá de las condiciones de frontera impuestas sobre las funciones de onda. Regresemos ahora a la formulación de lazos donde hemos introducido

$$T^0[\gamma] = \exp \left( i e \oint_{\gamma} dx A_1(x, t) \right) = \exp (i e c(t) M L), \quad (1.7)$$

como el grado de libertad electromagnético manifiestamente invariante de norma. Aquí  $M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es el número de vueltas del lazo  $\gamma$ , el cual caracteriza completamente cualquier lazo en nuestro círculo espacial. De hecho también  $T^0[\gamma]$  es invariante bajo transformaciones de norma grandes, porque

$$T^0[\gamma] \rightarrow \exp \left( i e M L \left( c(t) - \frac{2\pi n}{e L} \right) \right) = \exp (i M n 2\pi) T^0[\gamma] = T^0[\gamma]. \quad (1.8)$$

Consideremos los operadores invariantes de norma  $\hat{T}^0[N]$  y  $\hat{E}$ , tal que

$$\hat{T}^0[N] = \exp (i e \hat{c} N L), \quad [\hat{T}^0[N], \hat{E}] = -e \hbar N \hat{T}^0[N]. \quad (1.9)$$

El espacio de Hilbert  $\{|N\rangle\}$ , donde los estados son etiquetados por el número de vueltas, es construido a partir del vacío  $|0\rangle$

$$\hat{E}|0\rangle = 0, \quad |N\rangle = \hat{T}^0[N]|0\rangle, \quad (1.10)$$

donde tenemos

$$|N+P\rangle = \hat{T}^0[N]|P\rangle, \quad \hat{E}|N\rangle = e N |N\rangle. \quad (1.11)$$

El Hamiltoniano es

$$H = \int_0^L dx \frac{1}{2} E^2, \quad H|N\rangle = \frac{1}{2} (e^2 \hbar^2 L) N^2 |N\rangle = (\hbar e^2 L^2) \frac{\hbar}{2L} N^2 |N\rangle. \quad (1.12)$$

Aquí la elección de las condiciones de frontera, las cuales determinan los valores propios y las funciones propias, está oculto en el proceso algebraico. Con el objetivo de hacerlas explícitas, introducimos una base en la representación de conexiones modificada  $|\tilde{c}\rangle$  definida por

$$|\tilde{c}\rangle = \sum_N \exp(i e \tilde{c} N L) |N\rangle = \sum_N \exp\left(i \frac{\pi \tilde{c}}{e} N\right) |N\rangle, \quad \tilde{c} = \frac{\pi}{e L}, \quad (1.13)$$

la cual es una superposición de estados completamente invariantes de norma. De la expresión anterior verificamos que  $|\tilde{c} + 2M\tilde{c}\rangle = |\tilde{c}\rangle$ , lo cual establece el carácter angular de las variables  $\tilde{c}$  en un intervalo de longitud  $2\tilde{c}$ , el cual elegimos como  $-\tilde{c} \leq \tilde{c} \leq \tilde{c}$ . La inversa de la relación anterior es

$$|N\rangle = \int_{-\tilde{c}}^{\tilde{c}} d\tilde{c} \exp\left(-i \frac{\pi \tilde{c}}{e} N\right) |\tilde{c}\rangle. \quad (1.14)$$



Resumiendo, en la representación de conexiones modificadas con  $\tilde{c}$  siendo la variable angular definida anteriormente, tenemos la siguiente realización de los operadores

$$\hat{E} = \frac{\hbar}{iL} \frac{\partial}{\partial \tilde{c}}, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{c}^2}, \quad (1.15)$$

junto con las funciones propias correspondientes, y sus derivadas

$$\Psi_N(\tilde{c}) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{c}}} \exp\left(-i\frac{\pi\tilde{c}}{c} N\right), \quad \frac{d\Psi_N(\tilde{c})}{d\tilde{c}} = -\frac{i\pi N}{\sqrt{2\tilde{c}^3}} \exp\left(-i\frac{\pi\tilde{c}}{c} N\right). \quad (1.16)$$

Claramente las funciones anteriores satisfacen las condiciones de frontera

$$\Psi_N|_{\tilde{c}=-\varepsilon} = \Psi_N|_{\tilde{c}=\varepsilon}, \quad \frac{d\Psi_N}{d\tilde{c}}|_{\tilde{c}=-\varepsilon} = \frac{d\Psi_N}{d\tilde{c}}|_{\tilde{c}=\varepsilon}. \quad (1.17)$$

A partir de ahora denotaremos por  $c$  a la variable compactificada  $\tilde{c}$ .

## 1.2 El modelo de Schwinger

En lo sucesivo utilizaremos una notación y convenciones similares a las utilizadas en la Ref.[9]. El modelo está descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) \psi, \quad (1.18)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  es un campo fermiónico tipo Grassmann y estamos utilizando unidades tales que  $\hbar = c = 1$ . Consideraremos el espacio de coordenadas como  $S^1$  y pediremos condiciones de frontera periódicas (antiperiódicas) para los campos.

$$A_\mu(x+L) = A_\mu(x), \quad \psi(x+L) = -\psi(x), \quad (1.19)$$

donde  $L$  es la longitud del círculo. Las matrices gamma son:  $\gamma^0 = \sigma_1$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_2$ ,  $\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli standard. Utilizamos la signatura  $(+, -)$ , i.e.  $\eta_{00} = -\eta_{11} = 1$ .

Después del análisis canónico standard de la densidad lagrangiana (1.18), describiendo las variables del espacio de configuración por  $A_0$ ,  $A_1$  y  $\psi$ , obtenemos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} E^2 + i\psi^\dagger \sigma_3 (\partial_1 + ieA_1) \psi - A_0 (\partial_1 E - e\psi^\dagger \psi), \quad \Pi_0 \approx 0, \quad (1.20)$$

donde los momentos canónicos correspondientes son  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1 = F_{01} = E$  y  $\Pi_\psi = -i\psi^*$ . La conservación en el tiempo de la constricción primaria  $\Pi_0 \approx 0$  produce la ley de Gauss como una constricción

$$\mathcal{G} = \partial_1 E - e\psi^\dagger \psi \approx 0. \quad (1.21)$$

Y esta constricción no produce constricciones adicionales. A este punto fijamos parcialmente la norma del potencial electromagnético haciendo la elección

$$A_0 = 0, \quad \Pi_0 = 0. \quad (1.22)$$

La constricción restante  $\mathcal{G}$  es de primera clase y será impuesta fuertemente sobre los estados físicos del sistema. A partir de este momento utilizaremos la notación  $A_1 = A$  para el grado de libertad electromagnético que sobrevive. También tenemos  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ , donde  $\top$  denota transposición. La densidad de carga está dada por  $\rho(x) = e\psi^\dagger\psi = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)$ . El álgebra resultante de paréntesis de Poisson a tiempos iguales es

$$\{A(x), E(y)\} = \delta(x, y), \quad \{\psi_\eta(x), \psi_\xi^*(y)\} = -i\delta_{\eta\xi}\delta(x, y), \quad \eta, \xi = 1, 2, \quad (1.23)$$

con todos los restantes iguales a cero. El procedimiento de cuantización canónica produce los siguientes conmutadores no nulos ( $\hbar = 1$ )

$$[A(x), E(y)] = i\delta(x, y), \quad \{\psi_\eta(x), \psi_\xi^*(y)\} = \delta_{\eta\xi}\delta(x, y). \quad (1.24)$$

La norma elegida en (1.22) no fija completamente el grado de libertad electromagnético, dejando aún la densidad Lagrangiana (1.18) invariante bajo las siguientes transformaciones de norma

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha(x), \quad (1.25)$$

generadas por la constricción de Gauss. La parte constante  $\alpha_0$  de la función  $\alpha(x)$  es irrelevante en la transformación anterior. En lo que sigue consideraremos  $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x) - \alpha_0$  como la función generadora de las transformaciones de norma. Note que  $\partial_0\alpha(x) = 0$  satisface la condición de norma  $A_0 = 0$ .

Existen dos familias de transformaciones de norma:

1. Aquellas conectadas continuamente con la identidad, llamadas transformaciones de norma pequeñas (TNP), caracterizadas por la función

$$\bar{\alpha}(x) = b(e^{i2\pi nx/L} - 1), \quad (1.26)$$

la cual es periódica en  $x$  y preserva las condiciones de frontera (1.19).

2. La segunda familia corresponde a las llamadas transformaciones de norma grandes (TNG), las cuales son generadas por las funciones no periódicas

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{2\pi n}{eL}x = 2n\bar{c}x, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.27)$$

Las condiciones de frontera (1.19) son preservadas también en este caso.

Note que en ambos caso tenemos

$$\bar{\alpha}(0) = 0. \quad (1.28)$$

A este punto **definimos** el modelo de Schwinger compacto por pedir que el único grado de libertad que surge del potencial electromagnético en una dimensión, el cual es el modo cero  $c$ , está restringido al intervalo

$$-\bar{c} \leq c = \frac{1}{L} \int_0^L A(z) dz \leq \bar{c}. \quad (1.29)$$

En la sección anterior dimos algunas motivaciones para considerar esta situación. La ecuación (1.29) significa que dos valores de  $c$  que difieren por  $2\bar{c}N = \frac{2\pi N}{eL}$  deben ser identificados como un solo punto físico en el espacio compacto de la variable  $c$ . Dado que los grados de libertad electromagnéticos restantes son pura norma, esperamos que la posible compactificación de ellos sea irrelevante. Sin embargo, aún permanece la pregunta de ¿en que manera? si existe, la compactificación impuesta se muestra en los grados de libertad fermiónicos del problema. Este tópico será tratado en la siguiente sección.

### 1.3 Grados de libertad invariantes de norma

Consideremos la siguiente descomposición de Fourier para el potencial electromagnético  $A(x)$ , el campo de fuerza  $E(x)$  y la función de transformación de norma  $\bar{\alpha}(x)$

$$\begin{aligned} A(x) &= c + \sum_{m \neq 0} A_m e^{\frac{2\pi i m}{L} x}, & E(x) &= E_0 + \sum_{m \neq 0} E_m e^{-\frac{2\pi i m}{L} x}, \\ \bar{\alpha}(x) &= \sum_{m \neq 0} \bar{\alpha}_m e^{\frac{2\pi i m}{L} x}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

La transformación inversa para el potencial electromagnético está dada por

$$c = \frac{1}{L} \int_0^L dx A(x), \quad A_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx A(x) e^{-\frac{2\pi i m}{L} x}, \quad m \neq 0, \quad (1.31)$$

expresiones similares se obtienen para  $E_0, E_m, \bar{\alpha}_m$ . Observemos que  $E_m^\dagger = E_{-m}$  y  $A_m^\dagger = A_{-m}$  en virtud de la hermiticidad de  $E(x)$  y  $A(x)$ . Remarcamos que

$$0 = \bar{\alpha}(0) = \sum_{m \neq 0} \bar{\alpha}_m, \quad (1.32)$$

lo cual será usado en lo siguiente. Bajo una transformación de norma  $A(x) \rightarrow A(x) - \frac{\partial \bar{\alpha}(x)}{\partial x}$ , los modos correspondientes cambian como

$$c \rightarrow c - \frac{1}{L}(\bar{\alpha}(L) - \bar{\alpha}(0)), \quad A_m \rightarrow A_m - \frac{2\pi i m}{L} \bar{\alpha}_m, \quad m \neq 0. \quad (1.33)$$

Claramente el modo cero  $c$  es invariante bajo transformaciones de norma pequeñas generadas por  $\bar{\alpha} = b(e^{i2\pi n x/L} - 1)$ . Para las (TNG) (1.27),  $c \rightarrow c - \frac{2\pi n}{eL}$ , pero estos puntos deben ser identificados de acuerdo a la condición de compactificación (1.29). En otras palabras,  $c$  es también invariante bajo transformaciones de norma largas. Resumiendo, el modo cero  $c$  es totalmente invariante de norma. Los modos electromagnéticos restantes  $A_m$  están desacoplados de la teoría debido a la ley de Gauss (1.21), como mostraremos después. Ahora consideremos la expansión de las variables fermiónicas en un campo electromagnético de fondo. De acuerdo a la ref. [9], estas pueden ser escritas como

$$\psi_1(x, t) = \sum_n a_n \phi_n(x) e^{-i\epsilon_n t}, \quad \psi_2(x, t) = \sum_n b_n \phi_n(x) e^{i\epsilon_n t}, \quad (1.34)$$

donde  $a_n, b_n$  son operadores de aniquilación fermiónicos standard que satisfacen los anti-conmutadores no nulos

$$\{a_m, a_n^\dagger\} = \delta_{mn}, \quad \{a_m, a_n\} = 0, \quad \{b_m, b_n^\dagger\} = \delta_{mn}, \quad \{b_m, b_n\} = 0, \quad (1.35)$$

mientras que cualquier  $a_n$  anticonmuta con cualquier  $b_n$ . Los estados  $\psi_1$  ( $\psi_2$ ) describen los sectores quirales (valores propios de  $\gamma_5$ ) positivos (negativos) del modelo. Las funciones básicas  $\phi_n$ , junto con los valores propios de la energía están dados por

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\epsilon_n x - ic \int_0^x A(z) dz}, \quad \epsilon_n = \frac{2\pi}{L} \left( n + \frac{1}{2} - \frac{eL}{2\pi c} \right) \equiv \frac{2\pi n}{L} + \frac{\pi}{L} - ec. \quad (1.36)$$

Reescribiendo el sector fermiónico de la densidad Hamiltoniana (1.20) como  $\mathcal{H}_F = \psi^\dagger h_F \psi$ , observamos que los valores propios correspondientes de  $h_F$  son  $+\epsilon_n$  y  $-\epsilon_n$  para los sectores de quiralidad positiva y negativa respectivamente. Dado que  $c$  es invariante bajo transformaciones de norma grandes y pequeñas los valores propios de la energía  $\epsilon_n$  son completamente invariantes de norma. Más aún, de acuerdo a la definición (1.36)

$$\phi_n \rightarrow e^{ie\bar{\alpha}(x)} \phi_n, \quad (1.37)$$

tanto para transformaciones de norma grandes y pequeñas (hemos usado  $\bar{\alpha}(x) = 0$ ). Como consecuencia de las propiedades anteriores y para recobrar la ley de transformación (1.25) del campo fermiónico  $\psi$ , debemos tener

$$a_n \rightarrow a_n, \quad b_n \rightarrow b_n, \quad (1.38)$$

para las transformaciones de norma de los operadores fermiónicos  $a_n$  y  $b_n$ . En otras palabras, consistencia entre la condición de compactificación (1.29), la ley de transformación (1.25) y la definición (1.36) requiere que los operadores fermiónicos básicos  $a_n$  y  $b_n$  sean **completamente invariantes de norma en el caso compacto**. Enfatizamos el hecho de que las propiedades anteriores establecen una gran diferencia entre los casos no compacto y compacto. Siguiendo los mismos pasos en la situación compacta, obtenemos que el cambio  $c \rightarrow c - \frac{2\pi n}{eL}$  bajo transformaciones de norma grandes, implica que los valores propios de la energía no son invariantes de norma, esto es,  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_{n+1}$ , lo cual lleva a

$\phi_n(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\phi_{n+1}$ . Entonces, para poder satisfacer las propiedades de transformación (1.25) del campo fermiónico, debemos tener ahora que  $a_n \rightarrow a_{n+1}, b_n \rightarrow b_{n+1}$ , bajo TNG. Es decir, los operadores fermiónicos no son completamente invariantes de norma en el caso no compacto. De esta manera es transparente el comportamiento topológico de  $c$ , esto es, dependiendo de que la variable  $c$  sea compacta o no compacta, se implica una transformación completamente diferente para los operadores fermiónicos  $a_n, b_n$  bajo transformaciones de norma.

Utilizando las expansiones de Fourier (1.30) y (1.34), reescribimos los conmutadores para los campos en términos de los modos correspondientes. En particular, el conmutador  $[E(x), \psi_\alpha(y)] = 0$  produce

$$[E_m, a_n] = \frac{ie}{2\pi m} (a_n - a_{n+m}), \quad m \neq 0, \quad [E_0, a_n] = 0, \quad (1.39)$$

$$[E_m, b_n] = \frac{ie}{2\pi m} (b_n - b_{n+m}), \quad m \neq 0, \quad [E_0, b_n] = 0. \quad (1.40)$$

Los conmutadores restantes son

$$[A_k, A_l] = 0 = [E_k, E_l], \quad [A_k, E_l] = \frac{i}{L}\delta_{kl}, \quad [A_k, a_n] = 0, \quad [A_k, b_m] = 0. \quad (1.41)$$

Nos concentraremos ahora en el álgebra de conmutadores de los modos de Fourier. Para este fin, introducimos los siguientes operadores

$$j_{++}^{nm} = a_n^\dagger a_m, \quad j_{--}^{nm} = b_n^\dagger b_m, \quad j_{+-}^{nm} = a_n^\dagger b_m, \quad j_{-+}^{nm} = b_n^\dagger a_m, \quad (1.42)$$

los cuales satisfacen  $(j_{++}^{nm})^\dagger = j_{++}^{mn}$ ,  $(j_{--}^{nm})^\dagger = j_{--}^{mn}$  y  $(j_{+-}^{nm})^\dagger = j_{-+}^{nm}$ . Combinaciones adicionales útiles de los operadores fermiónicos anteriores son las corrientes

$$j_+(x) = \psi_1^\dagger(x)\psi_1(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} j_+^n, \\ j_-(x) = \psi_2^\dagger(x)\psi_2(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+\frac{2\pi i n}{L}x} j_-^n, \quad (1.43)$$

donde

$$j_+^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_{++}^{m, m+n}, \quad j_+^0 = Q_+, \quad j_-^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_{--}^{m, m+n}, \quad j_-^0 = Q_-. \quad (1.44)$$

En este punto introducimos la forma regularizada  $\zeta$  de las corrientes definidas en la ec. (1.44),

$$j_+^n|_{\text{reg}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m,\epsilon}} a_m^\dagger a_{m+n}, \quad j_-^n|_{\text{reg}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m,\epsilon}} b_{m+n}^\dagger b_m, \quad (1.45)$$

donde el regulador está dado por  $\lambda_{n,\epsilon} = |\lambda \epsilon_n|^\epsilon$ , con  $\lambda$  un parámetro con dimensiones de inverso de energía. En lo que sigue eliminaremos el subíndice  $|_{\text{reg}}$  de estas corrientes, pero

siempre consideraremos su forma (1.45) en cualquier relación que las involucre. Al final de los cálculos tomaremos el límite  $s \rightarrow 0$ . En otras palabras, construiremos un álgebra entre objetos regularizados, los cuales serán adicionalmente restringidos a la acción sobre el espacio de Hilbert del problema. Como se muestra en detalle en el apéndice, el álgebra de corrientes regularizadas de los operadores (1.45) está dada por

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] = n\delta_{m,n}, \quad [j_-^n, (j_-^m)^\dagger] = n\delta_{m,n}, \quad [j_+^n, j_-^m] = 0. \quad (1.46)$$

Las relaciones de conmutación anteriores son las mismas que aquellas obtenidas en el caso no compacto. El cálculo aquí es diferente al realizado en la ref. [9] porque hemos usado las expresiones regularizadas (1.45) para las corrientes. Hemos también verificado en el apéndice que las corrientes regularizadas satisfacen las propiedades de hermiticidad.

$$(j_\pm^m)^\dagger = j_\pm^{-m}. \quad (1.47)$$

Para poder satisfacer las relaciones de conmutación (1.39) y (1.40) hacemos el ansatz

$$E_m = \frac{1}{iL} \frac{\partial}{\partial A_m} - \frac{e}{2\pi i m} (j_+^m + (j_-^m)^\dagger), \quad m \neq 0, \quad E_0 = \frac{1}{iL} \frac{\partial}{\partial c}, \quad (1.48)$$

el cual claramente satisface la tercera relación de conmutación en (1.41). Enfatizamos que los campos  $E_m$ ,  $m \neq 0$ , definidos en ec.(1.48) satisfacen también la segunda relación de conmutación en (1.41), por virtud de (1.46). Substituyendo las expresiones (1.48) en el conmutador correspondiente de la ec. (1.39) obtenemos

$$\frac{\partial a_n}{\partial A_m} = -\frac{eL}{2\pi m} a_n, \quad m \neq 0, \quad \frac{\partial a_n}{\partial c} = 0. \quad (1.49)$$

La ecuación anterior lleva a la siguiente solución para los operadores fermiónicos con respecto a su dependencia del campo de norma

$$a_m = \exp\left(-\frac{eL}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} A_k\right) \bar{a}_m \equiv U \bar{a}_m, \quad (1.50)$$

donde  $\bar{a}_m$  son nuevos operadores fermiónicos los cuales son independientes del campo de norma  $A_k$  y el cual también satisface las relaciones de anticonmutación fermiónicas básicas. De hecho, la transformación  $U$  definida anteriormente es unitaria porque  $A_k^\dagger = A_{-k}$ . Una relación análoga a (1.50) puede ser encontrada para los operadores fermiónicos restantes  $b_m = U \bar{b}_m$ , donde por construcción los nuevos operadores  $\bar{b}_m$  son independientes del potencial electromagnético. La expresión (1.50) reproduce el carácter completamente invariante de norma de  $a_n$ . De hecho, bajo la transformación de norma dada por (1.33), la exponencial en (1.50) cambia por un factor  $\exp(i e \sum_{k \neq 0} \bar{\alpha}_k)$  el cual es exactamente  $\exp(i e \bar{\alpha}(0)) = 1$ , de acuerdo a la relación (1.32). El mismo resultado se obtiene para el operador  $b_n$ . Con el ansatz (1.48), la ley de Gauss  $\mathcal{G}(x) = -\frac{1}{L} \sum \exp(-\frac{2\pi i m x}{L}) \mathcal{G}_m$  se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= e(j_+^0 + (j_-^0)^\dagger) = eQ \\ \mathcal{G}_m &= 2\pi i m E_m + e(j_+^m + (j_-^m)^\dagger) = \frac{2\pi m}{L} \frac{\partial}{\partial A_m}, \quad m \neq 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Estas expresiones llevan a la propiedad de transformación

$$[\mathcal{G}(x), a_n] = ea_n\delta(x) \iff [\mathcal{G}_m, a_n] = -ea_n, \quad (1.52)$$

en virtud de la relación (1.49). El conmutador anterior es la versión infinitesimal de la relación (1.38). Nuestra expresión (1.51) para la constricción de Gauss es algo diferente de la obtenida en ref. [9]. Imponiendo esta constricción sobre los estados físicos concluimos que las funciones de onda del sistema deben ser de carga eléctrica cero y también independientes de los modos  $A_m$ ,  $m \neq 0$ , lo cual explícitamente muestra el desacoplamiento de los modos electromagnéticos  $m \neq 0$ . En particular, los siguientes operadores fermiónicos bilineales:  $a^\dagger a$ ,  $a^\dagger b$ ,  $b^\dagger a$ ,  $b^\dagger b$ , los cuales serán subsecuentemente usados en la solución del modelo, son independientes de los modos electromagnéticos y son invariantes de norma bajo TNG y TNP. Resumiendo, hemos mostrado que la condición de compactificación (1.29) implica que los operadores  $c$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son completamente invariantes de norma. También, la constricción de Gauss implica que la función de onda del sistema es independiente de los modos electromagnéticos  $A_m$ ,  $m \neq 0$ .

## 1.4 Espacio de Fock

Construyamos ahora el espacio de Fock fermiónico en un campo electromagnético de fondo. Comenzando del vacío  $|0\rangle$  aniquilado por los operadores  $a_n$  (sector de quiralidad positiva) y los operadores  $b_n$  (sector de quiralidad negativa), el vacío de Dirac  $|vac\rangle$  es construido de tal manera que todos los niveles de energía negativa sean llenados. Nuestra condición de compactificación (1.29) para la variable electromagnética  $c$  implica que todos los niveles con  $n \leq -1$  ( $n \geq 0$ ) tienen energía negativa para los sectores de quiralidad positiva (negativa), respectivamente. De esta manera el vacío de Dirac es

$$|vac\rangle = \prod_{n=-\infty}^{-1} a_n^\dagger |0\rangle \otimes \prod_{n=0}^{\infty} b_n^\dagger |0\rangle. \quad (1.53)$$

El Hamiltoniano  $\zeta$ -regularizado y el operador de carga  $\zeta$ -regularizado de los sectores quirales positivo (negativo) están dados por [9]

$$\begin{aligned} H_+ &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\epsilon_n}{\lambda_{n,s}} a_n^\dagger a_n & Q_+ &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda_{n,s}} a_n^\dagger a_n \\ H_- &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-\epsilon_n)}{\lambda_{n,s}} b_n^\dagger b_n & Q_- &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda_{n,s}} b_n^\dagger b_n. \end{aligned} \quad (1.54)$$

La carga total  $Q$ , la carga quiral total  $Q_5$  y la energía total  $H$ , son operadores hermitianos definidos por

$$Q = Q_+ + Q_-, \quad Q_5 = Q_+ - Q_-, \quad H_F = H_+ + H_-. \quad (1.55)$$

Los valores propios de los operadores anteriores para el vacío de Dirac son

$$\begin{aligned} Q|vac\rangle &= 0, & Q_5|vac\rangle &= -\frac{ecL}{\pi}|vac\rangle, \\ H_F|vac\rangle &= \frac{2\pi}{L} \left\{ \left( \frac{ecL}{2\pi} \right)^2 - \frac{1}{12} \right\} |vac\rangle \equiv \varepsilon_0|vac\rangle. \end{aligned} \quad (1.56)$$

A este nivel es conveniente introducir la carga quiral modificada

$$\bar{Q}_5 = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda \varepsilon_n|^s} (a_n^\dagger a_n - b_n^\dagger b_n) + \frac{ecL}{\pi}, \quad (1.57)$$

la cual es invariante bajo TNG y TNP en el modelo de Schwinger compacto. Este no es el caso en la situación no compacta, donde  $\bar{Q}_5$  no es invariante bajo TNG. Los valores propios de  $\bar{Q}_5$  son números enteros en el espacio de Hilbert fermiónico. En lo que sigue nos referiremos a  $\bar{Q}_5$  como la carga quiral (total) modificada del sistema. También, a un valor propio dado  $2M$  de  $\bar{Q}_5$  nos referiremos como el sector quiral  $M$  de la teoría. De esta manera, la segunda ecuación (1.56) es  $\bar{Q}_5|vac\rangle = 0$ , la cual, asigna carga quiral cero al vacío de Dirac.

Para poder construir estados excitados con diferente carga quiral  $\bar{Q}_5$ , necesitamos usar los operadores (1.42). La aplicación de cualquiera de ellos a  $|vac\rangle$  produce nuevos estados propios del hamiltoniano fermiónico, todos ellos de carga eléctrica cero. Sin embargo, el valor de la carga quiral es cambiada en pasos de dos unidades, por la acción de  $j_{+-}$ ,  $j_{-+}$ . Si se consideran los estados

$$j_{+-}^{pq}|vac\rangle, \quad p, q \geq 0 \quad j_{-+}^{pq}|vac\rangle, \quad p, q < 0, \quad (1.58)$$

donde la elección de  $p$  y  $q$  en cada caso es tal que resulta un vector no nulo. Al calcular su energía, se encuentra

$$\begin{aligned} H_F(j_{+-}^{pq}|vac\rangle) &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_p + \varepsilon_q)j_{+-}^{pq}|vac\rangle, \\ H_F(j_{-+}^{pq}|vac\rangle) &= (\varepsilon_0 - \varepsilon_p - \varepsilon_q)j_{-+}^{pq}|vac\rangle. \end{aligned} \quad (1.59)$$

La carga quiral de estos estados es

$$\begin{aligned} \bar{Q}_5(j_{+-}^{pq}|vac\rangle) &= 2j_{+-}^{pq}|vac\rangle, \\ \bar{Q}_5(j_{-+}^{pq}|vac\rangle) &= -2j_{-+}^{pq}|vac\rangle. \end{aligned} \quad (1.60)$$

De las ecuaciones (1.59) y (1.60) concluimos que el estado con carga quiral  $+2$  y menor energía  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0$  es

$$j_{+-}^{00}|vac\rangle = \prod_{n=-\infty}^0 a_n^\dagger \prod_{n=1}^{\infty} b_n^\dagger |0\rangle \equiv |\varepsilon_1, 2\rangle. \quad (1.61)$$

Análogamente, el estado con carga quiral  $-2$  y menor energía  $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_0 - 2\varepsilon_{-1}$  es

$$j_{-+}^{-1-1}|vac\rangle = \prod_{n=-\infty}^{-2} a_n^\dagger \prod_{n=-1}^{\infty} b_n^\dagger |0\rangle \equiv |\varepsilon_{-1}, -2\rangle. \quad (1.62)$$



Repetiendo este procedimiento construimos los estados base locales  $|\epsilon_N, 2N\rangle$ , para una quiralidad definida  $2N$ ,  $N \in \mathcal{Z}$ ,

$$\begin{aligned} j_{+-}^{NN} |\epsilon_N, 2N\rangle &= |\epsilon_{N+1}, 2(N+1)\rangle, \\ j_{-+}^{N-1N-1} |\epsilon_N, 2N\rangle &= |\epsilon_{N-1}, 2(N-1)\rangle, \end{aligned} \quad (1.63)$$

teniendo mínima energía  $\epsilon_N$ , determinada por las recursiones  $\epsilon_{N+1} = \epsilon_N + 2\epsilon_N$  y  $\epsilon_{N-1} = \epsilon_N - 2\epsilon_{N-1}$ , respectivamente. Los estados anteriores pueden ser escritos como

$$|\epsilon_N, 2N\rangle = \prod_{n=-\infty}^{N-1} a_n^\dagger |0\rangle \otimes \prod_{m=N}^{\infty} b_m^\dagger |0\rangle. \quad (1.64)$$

Usando la expresión regularizada para el Hamiltoniano fermiónico, se obtiene el resultado

$$\epsilon_N(c) = \frac{2\pi}{L} \left\{ \left( N - \frac{ecL}{2\pi} \right)^2 - \frac{1}{12} \right\}, \quad (1.65)$$

el cual es equivalente al que obtuvimos utilizando las recursiones previamente indicadas. En esta notación el vacío de Dirac es

$$|vac\rangle = |\epsilon_0, 0\rangle. \quad (1.66)$$

Todos los estados (1.64) tienen carga eléctrica cero, la cual no escribimos explícitamente. Resumiendo, a partir del vacío de Dirac hemos construido hasta aquí, estados con energía mínima para cada quiralidad posible. Como fue notado anteriormente, cada uno de estos estados puede ser considerado como un *vacío local* en el sector quiral correspondiente. Estamos ahora en posición de determinar las características del espectro fermiónico completo en el campo electromagnético externo. Dentro de cada sector quiral y comenzando de los estados base locales  $|\epsilon_N, 2N\rangle$ , tenemos que considerar todas las posibles excitaciones de carga cero generadas por  $a_p^\dagger a_q$ . La energía mínima correspondiente  $\epsilon_N$  será aumentada a  $\epsilon_N + \epsilon_p - \epsilon_q = \epsilon_N + \frac{2\pi}{L}(p - q)$ . Más aún, la expresión (1.64) implica que

$$a_p^\dagger a_q |\epsilon_N, 2N\rangle = 0, \quad p < q, \quad q > N - 1. \quad (1.67)$$

De esta manera, sólo las excitaciones con  $p \geq q$  son permitidas. Un resultado análogo se obtiene de considerar las excitaciones generadas por los operadores  $b_n^\dagger b_m$ . La conclusión final es que el espectro fermiónico es

$$\left\{ \epsilon_N + \frac{2\pi}{L} M, M = 1, 2, \dots, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}. \quad (1.68)$$

El siguiente paso es construir explícitamente los estados excitados correspondientes. Para este fin utilizamos los operadores (1.44). La carga eléctrica  $Q$  y la carga quiral modificada  $\bar{Q}_5$  del sistema son escritos en términos de estos operadores en la forma

$$Q = j_+^0 + j_-^0, \quad \bar{Q}_5 = j_+^0 - j_-^0 + \frac{ecL}{\pi}. \quad (1.69)$$

Los operadores  $j_{\pm}^n$ ,  $n \geq 1$  aniquilan los estados (1.64), esto es,

$$j_{\pm}^n |\varepsilon_N, 2N\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad (1.70)$$

el cual es sólo una consecuencia de la relación (1.67) y la relación análoga para los operadores  $b$ . Otra propiedad que será utilizada en lo siguiente es

$$\langle \varepsilon_N, 2N | j_{+-}^{pq} | \varepsilon_N, 2N \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_N, 2N | j_{-+}^{pq} | \varepsilon_N, 2N \rangle = 0, \quad \forall p, q. \quad (1.71)$$

También, los siguientes conmutadores pueden ser calculados

$$[H_F, (j_{\pm}^n)^{\dagger}] = \frac{2\pi n}{L} (j_{\pm}^n)^{\dagger}. \quad (1.72)$$

De esta manera, el espacio de Fock fermiónico en el campo electromagnético de fondo consiste de todos los vacíos locales (1.64), junto con todos los estados posibles construidos a partir de ellos por la aplicación de un número arbitrario de operadores de corriente  $(j_{\pm}^n)^{\dagger}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  definidos en la ecuación (1.45). Tomando en cuenta el espectro del sistema junto con la manera en la cual el espacio de Fock ha sido construido, el hamiltoniano fermiónico en el campo externo puede ser reescrito en la forma de Sugawara [18]

$$H_F = \varepsilon_N(c) + \frac{2\pi}{L} \sum_{n>0} \left( (j_{+}^n)^{\dagger} j_{+}^n + (j_{-}^n)^{\dagger} j_{-}^n \right). \quad (1.73)$$

De las relaciones de conmutación

$$[j_{+}^n, j_{+-}^{pq}] = j_{+-}^{p-n, q}, \quad [j_{-}^n, j_{+-}^{pq}] = -j_{+-}^{p, q-n}, \quad [j_{+}^n, j_{-+}^{pq}] = -j_{-+}^{p, q+n}, \quad [j_{-}^n, j_{-+}^{pq}] = j_{-+}^{p+n, q} \quad (1.74)$$

junto con (1.46), concluimos que

$$[Q, j_{+}^n] = [\bar{Q}_5, j_{+}^n] = [Q, j_{-}^n] = [\bar{Q}_5, j_{-}^n] = 0, \quad (1.75)$$

y

$$[Q, j_{+-}^{pq}] = [Q, j_{-+}^{pq}] = 0, \quad [\bar{Q}_5, j_{+-}^{pq}] = 2j_{+-}^{pq}, \quad [\bar{Q}_5, j_{-+}^{pq}] = -2j_{-+}^{pq}. \quad (1.76)$$

Los conmutadores anteriores muestran que los operadores de corriente  $j_{+}^n$  y  $j_{-}^n$  no cambian ni la carga eléctrica ni la carga quiral, mientras que cualquier combinación lineal de los operadores  $j_{+-}^{pq}$  ( $j_{-+}^{pq}$ ), a pesar de que no cambian la carga eléctrica, incrementarán (disminuirán) la carga quiral modificada por 2 unidades.

## 1.5 La cuantización completa del modelo

El paso siguiente es escribir el Hamiltoniano completo  $H = H_{EM} + H_F$  en términos de los operadores de corriente fermiónicos junto con los grados de libertad electromagnéticos,

los cuales son, el modo cero  $\partial/\partial c$  del campo eléctrico y el modo cero  $c$  del potencial de norma

$$H_{EM} = \frac{L}{2} \sum_n E_n^\dagger E_n = -\frac{1}{2L} \left( \left( \frac{\partial}{\partial c} \right)^2 - \sum_{n \neq 0} \left( \frac{eL}{2\pi n} \right)^2 (j_+^n + (j_-^n)^\dagger) ((j_+^n)^\dagger + j_-^n) \right),$$

$$H_F = \frac{2\pi}{L} \left( \frac{Q_+^2 + Q_-^2}{2} - \frac{1}{12} + \sum_{n>0} ((j_+^n)^\dagger j_+^n + (j_-^n)^\dagger j_-^n) \right). \quad (1.77)$$

Seguindo las referencias [8, 9], hemos usado explícitamente la constricción de Gauss (1.51) para expresar los modos del campo eléctrico  $E_n$  en términos de las corrientes fermiónicas. Podemos además dividir el hamiltoniano total en su parte del modo cero, la cual se desacopla del sector fermiónico, obteniendo

$$H = H_{EM} + H_F = H_0 + \sum_{n>0} H_n - \frac{2\pi}{12L}, \quad (1.78)$$

donde

$$H_0 = \frac{\pi}{2L} \left( Q^2 + \left( \bar{Q}_5 - \frac{ecL}{\pi} \right)^2 \right) - \frac{1}{2L} \left( \frac{\partial}{\partial c} \right)^2,$$

$$H_n = \frac{2\pi}{L} ((j_+^n)^\dagger j_+^n + (j_-^n)^\dagger j_-^n) + \frac{e^2 L}{4\pi^2 n^2} ((j_+^n)^\dagger + j_-^n) (j_+^n + (j_-^n)^\dagger). \quad (1.79)$$

Aún cuando a este punto  $c$  es una variable dinámica tal que  $\dot{c} \neq 0$ , la carga quiral modificada  $\bar{Q}_5$  es conservada en el espacio de Hilbert completo del problema, como mostraremos en más detalle posteriormente. Para poder diagonalizar la expresión del hamiltoniano (1.79), es conveniente introducir las transformaciones de Bogoliubov para los operadores de corriente, dados por [8, 9]

$$\bar{j}_+^n = U_n^\dagger (j_+^n) U_n = \cosh t_n j_+^n - \sinh t_n (j_-^n)^\dagger,$$

$$(\bar{j}_-^n)^\dagger = U_n^\dagger (j_-^n)^\dagger U_n = -\sinh t_n j_+^n + \cosh t_n (j_-^n)^\dagger, \quad (1.80)$$

donde

$$\cosh 2t_n = \frac{1}{\mathcal{E}_n} \left( \frac{2\pi n}{L} + \frac{e^2 L}{4\pi^2 n} \right), \quad \sinh 2t_n = \frac{1}{\mathcal{E}_n} \frac{e^2 L}{4\pi^2 n}, \quad (1.81)$$

y

$$\mathcal{E}_n = \sqrt{\left( \frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \frac{e^2}{\pi}}. \quad (1.82)$$

Los operadores unitarios  $U_n$  que producen las transformaciones anteriores son

$$U_n = \exp \left\{ -\frac{t_n}{n} \left( (j_+^n)^\dagger (j_-^n)^\dagger - j_+^n j_-^n \right) \right\}. \quad (1.83)$$

La transformación completa es obtenida a través del operador  $U = \prod_{n \geq 1} U_n$ . En particular, tenemos que

$$[Q, U_n] = [\bar{Q}_5, U_n] = 0, \quad n \geq 1. \quad (1.84)$$

Resumiendo, la transformación de Bogoliubov afecta sólo los modos fermiónicos del sistema y en particular, las corrientes  $j_{\pm}^0$  o equivalentemente  $Q$  y  $\bar{Q}_5$ , permanecen inalteradas. De esta manera, el Hamiltoniano completamente rotado

$$H_B = U^\dagger H(j_+^n, j_-^n) U = H(\bar{j}_+^n, \bar{j}_-^n), \quad (1.85)$$

es

$$H_B = \frac{\pi}{2L} \left( Q^2 + \left( \bar{Q}_5 - \frac{ecL}{\pi} \right)^2 \right) - \frac{1}{2L} \left( \frac{\partial}{\partial c} \right)^2 + \sum_{n>0} \frac{\mathcal{E}_n}{n} \left( (j_+^n)^\dagger j_+^n + (j_-^n)^\dagger j_-^n \right), \quad (1.86)$$

hasta una constante infinita. Para construir el espacio de Hilbert de la teoría completa partimos de los estados  $|\mathcal{E}_N, 2N\rangle$  dados en la ecuación (1.64), los cuales tienen energía mínima, carga eléctrica cero y valores propios  $2N$  para la carga quiral modificada  $\bar{Q}_5$ . En particular, recordemos que estos estados (1.64) están aniquilados por las corrientes  $j_+^{-n}$  y  $j_-^{-n}$ ,  $n \geq 1$ , para toda  $N$ .

Como en el caso no compacto, la ecuación (1.86) implica que cada modo se desacopla, esto es, la energía total  $\mathcal{E}$  está dada por la superposición de cada modo de energía. También, la función de onda total  $\Delta$ , tal que  $H\Delta = \mathcal{E}\Delta$ , es  $\Delta = \prod_n \Delta_n$ , donde  $\Delta_n$  son las funciones propias de  $H_{Bn}$ .

La formulación de lazos, la cual estamos tomando como una guía en definir el modelo de Schwinger compacto, requiere únicamente la compactificación del modo cero  $n = 0$ , el cual está relacionado al campo electromagnético. Sin embargo, dado que los modos  $n \geq 1$  serán obtenidos por aplicar operadores de ascenso a los modos cero, el proceso de compactificación se propaga a los estados excitados, llevando también a un espectro y funciones propias diferentes, respecto al caso no-compacto.

La estructura general de los estados en el espacio de Hilbert del modelo será del tipo

$$|\text{estado}\rangle = F(c) \times |\text{fermiónico}\rangle. \quad (1.87)$$

La función de onda completa tendrá carga eléctrica cero y carga quiral definida, lo cual implica una condición únicamente sobre la parte fermiónica. La estrategia para construir el espacio de Hilbert será comenzar a partir de los modos cero  $F_N(c) \times |N\rangle$  y subsecuentemente aplicar todas las posibles combinaciones de los operadores de ascenso  $(j_{\pm}^m)^\dagger$ . En esta forma, obtendremos una torre infinita de estados para cada valor de la carga quiral modificada.

### 1.5.1 Los modos cero

Los modos cero corresponden al caso en que no hay excitaciones fermiónicas y pueden ser escritos como

$$|N\rangle_B = F_N(c) \times |\mathcal{E}_N, 2N\rangle. \quad (1.88)$$

El subíndice  $B$  nos recuerda que cada vector está escrito en el sistema rotado de Bogoliubov, donde el hamiltoniano tiene la forma (1.86). Su acción sobre las funciones de onda anteriores se reduce a la siguiente ecuación de Schrödinger para los modos cero de las funciones de onda  $F_N(c)$

$$\left( -\frac{1}{2L} \left( \frac{\partial}{\partial c} \right)^2 + \frac{e^2 L}{2\pi} \left( \frac{2\pi N}{eL} - c \right)^2 \right) F_N(c) = \mathcal{E}_{N,0} F_N(c). \quad (1.89)$$

Una diferencia fundamental entre el modelo compacto y no-compacto surge en el espectro de energía  $\{\mathcal{E}_{\alpha,N,0}\}$  del sector de modo cero. Aquí  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ , etiqueta los valores propios del modo cero en el sector quiral  $N$  del modelo. Las funciones de onda  $F_N(c)$  satisfacen una ecuación de Schrödinger cuyo potencial  $V_N(c) = \left( \frac{2\pi N}{eL} - c \right)^2$  mostrado en la figura 1 corresponde sólo a una parte de un potencial de oscilador armónico, debido a que cada uno de estos potenciales (para un  $N$  dado) está definido en el intervalo  $-\bar{c} \leq c \leq \bar{c}$ , con  $\bar{c} = \frac{\pi}{eL}$ .

El producto interno en el espacio de Hilbert del modelo para funciones arbitrarias  $F(c)$  y  $G(c)$  es definido en la forma standard

$$\langle F|G \rangle = \int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} dc F^*(c)G(c). \quad (1.90)$$

Para determinar las condiciones de frontera apropiadas utilizamos la hermiticidad del operador asociado al modo cero  $E_0 = \frac{1}{iL} \frac{\partial}{\partial c}$  del campo eléctrico. Esto nos lleva a pedir

$$F_N|_{c=-\bar{c}} = F_N|_{c=+\bar{c}}, \quad (1.91)$$

para la función de onda  $F_N$ . Más aún, la hermiticidad del Hamiltoniano (1.89) implica la condición de frontera adicional

$$\frac{\partial F_N}{\partial c} \Big|_{c=-\bar{c}} = \frac{\partial F_N}{\partial c} \Big|_{c=+\bar{c}}, \quad (1.92)$$

para la derivada de la función de onda.

De esta manera, las condiciones de frontera (1.91) y (1.92) son una consecuencia inevitable de la compactificación del modo cero  $c$  del campo electromagnético, junto con los requerimientos de hermiticidad. Estos son completamente análogos a aquellos del rotor rígido unidimensional, los cuales dan los valores propios para la componente  $z$  del operador momento angular y el espectro de energía correctos.

Las condiciones de frontera anteriores deben ser contrastadas por ejemplo, con aquellas usadas en las ecuaciones (3.15) de la referencia [5] y la ecuación (48) de la referencia [8]. En términos de las convenciones que estamos utilizando estas están dadas por

$$F_N|_{c=-\bar{c}} = F_{N+1}|_{c=+\bar{c}}, \quad (1.93)$$

$$\frac{\partial F_N}{\partial c} \Big|_{c=-\bar{c}} = \frac{\partial F_{N+1}}{\partial c} \Big|_{c=-\bar{c}}. \quad (1.94)$$

Estas condiciones de frontera están correctamente diseñadas para recobrar el caso no compacto, esto es, para ir del círculo a la línea. Más aún, para una  $L$  dada, éstas no pueden estar continuamente relacionadas a aquellas de las ecuaciones (1.91) y (1.92). Esto enfatiza la no equivalencia entre ambos modelos, la cual tiene su origen en una elección topológica diferente a través de la condición de compactificación (1.29).

La ecuación de Schroedinger anterior (1.89) junto con las condiciones de frontera (1.91) y (1.92) lleva a energías que no están dadas por el espectro igualmente espaciado del oscilador armónico, como en el modelo no compacto.

La solución que corresponde a  $N = 0$  ha sido anteriormente discutida en referencia [13], junto con las funciones de onda correspondientes. Aquí extenderemos el cálculo para  $N \neq 0$  arbitrarias. Para este fin, introduciremos las variables auxiliares

$$y = \sqrt{\frac{2eL}{\sqrt{\pi}}} \left( \frac{2N\pi}{eL} - c \right), \quad \mathcal{E}_{\alpha, N, 0} = -\frac{e}{\sqrt{\pi}} a_{\alpha, N}, \quad (1.95)$$

donde  $y$  y  $a_N$  son cantidades adimensionales. El rango de  $y$  es

$$y_{N-} \leq y \leq y_{N+}, \quad y_{N-} \equiv \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi^3}}{eL}}(2N-1), \quad y_{N+} \equiv \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi^3}}{eL}}(2N+1) \quad (1.96)$$

y la ecuación (1.89) se reduce a

$$f'' - \left( \frac{1}{4}y^2 + a_N \right) f = 0, \quad (1.97)$$

donde  $F_N(c) = f\left(\frac{2\pi N}{eL} - c\right)$ . Las condiciones de frontera (1.91) y (1.92) sobre  $f(y)$  son

$$f(y_{N-}) = f(y_{N+}), \quad f'(y_{N-}) = f'(y_{N+}). \quad (1.98)$$

La solución general de la ecuación (1.97) se expresa en términos de funciones parabólicas cilíndricas [19]

$$f(y) = Ae^{-y^2/4} M\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{2}\right) + Bye^{-y^2/4} M\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{2}\right), \quad (1.99)$$

donde  $M(b, c, z)$  es la función hipergeométrica confluyente. Es conveniente introducir la variable adimensional

$$l = \frac{eL}{\pi^{3/2}}. \quad (1.100)$$

Las ecuación de valores propios (1.97) para la función  $f$ , determinará los niveles de energía  $\mathcal{E}_{\alpha, N, 0}(a)$  como una función de  $l$ . De las condiciones de frontera (1.98) obtenemos ( $N \neq 0$ )

$$\left[ e^{-y_{N-}^2} M\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2}\right) - e^{-y_{N+}^2} M\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2}\right) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \left[ e^{-y_{N-}^2} \left( \left( 1 - \frac{y_{N-}^2}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2} \right) + y_{N-}^2 \left( \frac{a}{3} + \frac{1}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2} \right) \right) \right. \\
& - \left. e^{-y_{N+}^2} \left( \left( 1 - \frac{y_{N+}^2}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2} \right) + y_{N+}^2 \left( \frac{a}{3} + \frac{1}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2} \right) \right) \right] \\
& = \left[ e^{-y_{N-}^2} M \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2} \right) - e^{-y_{N+}^2} M \left( \frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2} \right) \right] \times \\
& \left[ e^{-y_{N-}^2} \left( -\frac{y_{N-}^2}{2} M \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2} \right) + y_{N-}^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N-}^2}{2} \right) \right) \right. \\
& \left. - e^{-y_{N+}^2} \left( -\frac{y_{N+}^2}{2} M \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2} \right) + y_{N+}^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) M \left( \frac{a}{2} + \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{y_{N+}^2}{2} \right) \right) \right] \quad (1.101)
\end{aligned}$$

la cual define la función  $a_{\alpha,N} = a_{\alpha,N}(l)$ . Al igual que en el caso  $N = 0$  [13], esta función puede ser determinada únicamente de manera numérica para  $l$  arbitraria. En la fig.2 y fig.3 mostramos los resultados para  $a_{\alpha,N}$  versus  $l$ , para las elecciones  $\alpha = 0, 1, 2$  y  $N = 0, 1, 2, 3$ .

Algunas propiedades de la condición de cuantización anterior, junto con sus soluciones son las siguientes:

(1) Como puede observarse de la figura 1, existe la simetría  $V_n(c) = V_{-n}(-c)$  entre los potenciales  $V_N(c)$ . Así, los valores de  $a_N$  son los mismos en ambos casos. Esto puede verse del hecho de que cuando  $n \rightarrow -n$  se tiene que  $y_{N-}^2 \rightarrow y_{N+}^2$  y  $y_{N+}^2 \rightarrow y_{N-}^2$ , obteniéndose la invariancia de la ecuación (1.101).

(2) De los cálculos numéricos encontramos que  $a_{0,N}$  es monótonamente creciente y también que el  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{0,N}(l) = 0$ . Esta última propiedad es consistente con el hecho de que si  $a_{0,N}$  permanece finita cuando  $l \rightarrow \infty$ , entonces  $a_{0,N} = 0$ .

(3) El comportamiento para  $a_{\alpha,N}$  negativa y valor absoluto grande ( $|a_{\alpha,N}| \gg 1$ ), cuando  $l \gg 1$ , está dado por

$$a_{\alpha,N}(l) = -\frac{\pi^2}{2} \left( 2 \left[ \frac{\alpha}{2} \right] - 1 \right)^2 l, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (1.102)$$

donde  $[x]$  es la función máximo entero.

(4) El comportamiento de  $a_{\alpha,N}(l)$  para  $l \rightarrow 0$  es dado por el límite

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)} e^{\frac{(2N+1)^2}{l}} l^{1-\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow -\infty. \quad (1.103)$$

Físicamente estos límites son entendidos de la siguiente manera. Dado que la función potencial en los puntos extremos  $c = \pm \bar{c}$  se comportan como  $1/L$  para cada  $N$  (fig. 1), los correspondientes valores van a cero y el intervalo de definición de  $c$  es muy pequeño,

cuando  $L \rightarrow \infty$ . Entonces, para todo  $N$ , todas las funciones potencial parecen como una caja unidimensional con paredes infinitas. Así, en este límite los valores propios de la energía corresponden a un rotor unidimensional.

De manera análoga, podemos entender el comportamiento para  $L \rightarrow 0$ . En este caso  $V(c) \rightarrow \infty$  para todo  $N \neq 0$ , mientras que el dominio de  $c$  es también grande. Entonces, los valores propios correspondientes están acotados por abajo por  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$ , esto es,  $a \rightarrow -\infty$ .

De esta manera hemos obtenido el espectro completo para los modos cero  $|\alpha, N, 0\rangle_B$ . Para una  $L$  dada, encontramos numéricamente todos los valores propios  $\alpha_{\alpha, N, 0}$  de la ecuación (1.97). Para cada uno de estos valores propios, obtenemos la energía mediante (1.95) y las funciones propias  $F_{\alpha, N, 0}(c)$  mediante (1.99), junto con las condiciones de frontera. La constante de normalización puede ser determinada por el producto escalar (1.90).

Entre los modos cero, nos concentraremos ahora en los estados de energía con mínimos locales ( $\alpha = 0$ ):  $|0, N, 0\rangle_B$ , para cada sector quiral  $N$  de la teoría. Ellos tienen energías  $\mathcal{E}_{0, N, 0}$ .

Una consecuencia importante de la compactificación es que estos estados no están completamente degenerados como lo estaban en el modelo no-compacto (es debido a esta degeneración que en el caso standard se tiene que introducir los vacíos  $\theta$ ). Únicamente permanece la degeneración  $\mathcal{E}_{0, N, 0} = \mathcal{E}_{0, -N, 0}$ ,  $N \neq 0$ . La única posibilidad para tener degeneración completa se tiene en el límite  $L \rightarrow \infty$ . En este caso  $\mathcal{E}_{0, N, 0} = 0$  para toda  $N$ .

Más importante aún, de los cálculos numéricos encontramos que el mínimo valor absoluto de  $\mathcal{E}_{0, N, 0}$  corresponde a  $N = 0$ . Así, en el caso compacto el vacío no degenerado de la teoría es  $|0, 0, 0\rangle_B$ , y por tanto no necesitamos introducir un vacío  $\theta$  para el modelo de Schwinger compacto.

## 1.5.2 Los estados excitados

En la subsección anterior hemos construido los modos cero del problema (sin excitaciones fermiónicas), para cada sector quiral etiquetado por  $N$ . Los estados excitados correspondientes se obtienen de aplicar los operadores de creación  $(j_{\pm}^m)^\dagger$ . Cada acción individual de estos operadores incrementa la energía por  $\mathcal{E}_m$ , como puede ser visto de la ecuación (1.86). Los estados excitados serán etiquetados por

$$|\alpha, N, N_1, \dots, N_k, \dots\rangle_B, \quad (1.104)$$

donde  $N_k$  es el número total de veces que los operadores  $(j_{\pm}^k)^\dagger$  han sido aplicados al estado de energía mínimo correspondiente. Este es el número de ocupación del nivel- $k$ . Los modos cero corresponden a  $|\alpha, N, 0, \dots, 0, \dots\rangle_B$ , esto es  $N_1 = \dots = N_k \dots = 0$ . Estos estados fueron previamente denotados por  $|\alpha, N, 0\rangle_B$ . La energía total del estado



(1.104) está dada por

$$\mathcal{E}_{\alpha, N, N_1, N_2, \dots, N_k, \dots} = \mathcal{E}_{\alpha, N, 0} + \sum_{k>0} N_k \mathcal{E}_k. \quad (1.105)$$

Dado que los valores de  $\mathcal{E}_{\alpha, N, 0}$  no están regularmente espaciados, esperamos sólo degeneraciones accidentales, con la posible excepción del límite  $L \rightarrow \infty$ , donde los estados de energía mínima del modo cero llegan a estar degenerados con  $\alpha_{0, N, 0} = 0$ . En este caso necesitaríamos introducir el vacío  $\theta$ , de una manera similar al caso no-compacto. Sin embargo, aún en esta situación no recobramos el caso no-compacto standard a menos que adicionalmente cambiemos las condiciones de frontera (1.91) y (1.92) a la forma empleada en las referencias [5, 8].

Otro límite interesante es  $L \rightarrow 0$ , donde el espectro de oscilador armónico es recobrado en el potencial  $N = 0$ . Sin embargo, el espectro  $N \neq 0$  se reduce a los niveles degenerados con energías infinitas. En otras palabras, el caso no-compacto tampoco es recobrado en este límite.

En esta sección hemos mostrado que el modelo de Schwinger compacto, el cual surge de manera natural en la formulación de lazos del problema es exactamente soluble al igual que el caso standard.

## 1.6 La carga quiral

El hecho de que la carga quiral  $\bar{Q}_5$  se conserve en el espacio de Hilbert completo del modelo es una consecuencia directa de la manera en la cual este espacio de Hilbert ha sido construido. Resumamos los principales pasos que nos han llevado a este resultado:

1. Primero definimos  $\bar{Q}_5$  en una forma invariante de norma, en la ecuación (1.57).
2. Utilizando los operadores  $j_{+-}^{NN}, j_{-+}^{NN}$ , construimos los estados (1.64) que tienen diferente energía mínima para cada etiqueta diferente  $2N$  de la carga quiral.
3. El espacio de Hilbert completo para el sector fermiónico fue construido vía la aplicación de los operadores de ascenso  $(j_+^n)^\dagger, (j_-^n)^\dagger$  sobre los estados quirales del punto 2. Más aún, los conmutadores (1.46) fueron calculados para las corrientes regularizadas, lo cual valida la conservación de  $\bar{Q}_5$  en dicho espacio de Hilbert.
4. El espacio de Hilbert completo fue construido en el sistema rotado de Bogoliubov, se comenzó nuevamente con los modos cero y se aplicaron a éstos los mismos operadores de ascenso  $(j_+^n)^\dagger$  y  $(j_-^n)^\dagger$  empleados en el sector fermiónico. Esta rotación no afectó  $\bar{Q}_5$  preservando así las relaciones de conmutación (1.75) y (1.76).

5. Finalmente hemos establecido las relaciones de conmutación entre los operadores electromagnéticos  $c$ ,  $\frac{\partial}{\partial c}$  y las corrientes regularizadas  $j_{\pm}^n$ . Estas corrientes dependen de  $c$  sólo a través de los factores de regularización  $\lambda_{m,s} = |\epsilon_n|^s$ . Así,  $c$  conmuta con cualquiera de dichas corrientes. Hasta este nivel, observamos que  $\bar{Q}_5$  conmuta con los términos del hamiltoniano completo (1.86), excepto por los términos de derivadas que analizaremos a continuación. Definamos el conmutador

$$C_+^n = \left[ \frac{\partial}{\partial c}, j_+^n \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|\epsilon_n|^s} \right) a_m^\dagger a_{m+n}. \quad (1.106)$$

Primero, considere la acción de  $C_+^n$  con  $n \neq 0$  sobre un vector arbitrario

$$|\{m_i\}\rangle = \prod_i a_{m_i}^\dagger |0\rangle, \quad (1.107)$$

en el subespacio fermiónico de Fock de quiralidad positiva. En general, los subíndices  $m_i$  tomarán valores sobre un subconjunto infinito de números enteros. El único resultado distinto de cero de la acción del  $i$ -ésimo término de (1.106) sobre el vector anterior, es reemplazar el  $m_i + n$  fermión por el  $m_i$  fermión, llevando así a una suma de estados linealmente independientes. De esta manera, el límite  $s \rightarrow 0$  debe tomarse separadamente en cada término de la serie y por tanto no obtenemos una suma infinita. Dado que

$$\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|\epsilon_n|^s} \right) \approx -\frac{s}{|\epsilon_n|^{s+1}}, \quad (1.108)$$

este límite es cero y el operador conmuta.

Considere ahora el caso  $n = 0$  junto con la acción de  $C_+^0$  sobre el estado base local  $|N\rangle_B = F_N(c) \times |\epsilon_N, 2N\rangle$  de cada sector de quiralidad. Obtenemos

$$\begin{aligned} C_+^0 |N\rangle_B &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{N-1} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|\epsilon_n|^s} \right) |N\rangle_B \\ &= -\frac{eL}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} s \zeta(s+1, \frac{1}{2} + \frac{ecL}{2\pi} - N) |N\rangle_B = -\frac{eL}{2\pi} |N\rangle_B, \end{aligned} \quad (1.109)$$

donde  $\zeta(s, q)$  es la función zeta de Riemann. Hemos utilizado la propiedad  $\lim_{s \rightarrow 0} s \zeta(s+1, q) = 1$ . [20]

De manera análoga consideramos

$$C_-^n = \left[ \frac{\partial}{\partial c}, j_-^n \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|\epsilon_n|^s} \right) b_{m+n}^\dagger b_m. \quad (1.110)$$

Nuevamente la acción de  $C_-^n$ ,  $n \neq 0$  sobre un estado arbitrario  $|\{n_i\}\rangle = \prod_i b_{n_i}^\dagger |0\rangle$  es cero. Para  $n = 0$  obtenemos, sobre los estados base locales,

$$\begin{aligned} C_-^0 |N\rangle_B &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=N}^{\infty} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|\epsilon_n|^s} \right) |N\rangle_B \\ &= \frac{eL}{2\pi} \lim_{s \rightarrow 0} s \zeta(s+1, \frac{1}{2} - \frac{ecL}{2\pi} + N) |N\rangle_B = \frac{eL}{2\pi} |N\rangle_B, \end{aligned} \quad (1.111)$$

El resultado anterior lleva a

$$\left[ \frac{\partial}{\partial c}, \bar{Q}_5 \right] |N\rangle_B = \left( C_+^0 - C_-^0 + \frac{eL}{\pi} \right) |N\rangle_B = 0. \quad (1.112)$$

Además, cualquier estado excitado es construido por la aplicación de los operadores de ascenso  $(j_{\pm}^n)^\dagger, n \geq 1$  a  $|N\rangle_B$ . Estos operadores conmutan con  $\bar{Q}_5$  y  $\frac{\partial}{\partial c}$  de manera tal que el conmutador  $\left[ \frac{\partial}{\partial c}, \bar{Q}_5 \right]$  es cero en el espacio de Hilbert completo del problema. Esto completa nuestra prueba de que  $\bar{Q}_5$  conmuta con el hamiltoniano (1.86).

Dado que  $\bar{Q}_5$  y  $Q$  son conservados e invariantes de norma en el modelo compacto, esperaríamos obtener valores cero para los condensados fermiónicos  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{0,0,0}$  y  $\langle \bar{\psi}\gamma_5\psi \rangle_{0,0,0}$  los cuales miden la cantidad correspondiente de rompimiento de simetría. En realidad este resultado se obtiene aquí como consecuencia de que el vacío físico es no degenerado. Realizamos el cálculo en el sistema original no rotado, donde la función de onda es  $|0, 0, 0\rangle = U|0, 0, 0\rangle_B$ . En este sistema, los bilineales fermiónicos son

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \left( j_{-+}^{m+n,m} + j_{+-}^{m,m-n} \right), \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi &= \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \left( j_{-+}^{m+n,m} - j_{+-}^{m,m-n} \right). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Por ejemplo, en el caso del bilineal  $\bar{\psi}\psi$ , el cálculo se realiza de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle 0, 0, 0 | \bar{\psi}\psi | 0, 0, 0 \rangle &= {}_B \langle 0, 0, 0 | U^\dagger \bar{\psi}\psi U | 0, 0, 0 \rangle_B = \langle \varepsilon_0, 0 | U^\dagger \bar{\psi}\psi U | \varepsilon_0, 0 \rangle \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \langle \varepsilon_0, 0 | U^\dagger \left( j_{-+}^{m+n,m} + j_{+-}^{m,m-n} \right) U | \varepsilon_0, 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \frac{1}{2} \langle \varepsilon_0, 0 | U^\dagger \left[ \bar{Q}_5, j_{-+}^{m+n,m} \right] U | \varepsilon_0, 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \frac{1}{2} \langle \varepsilon_0, 0 | U^\dagger \left[ \bar{Q}_5, j_{+-}^{m,m-n} \right] U | \varepsilon_0, 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.114)$$

donde hemos supuesto una normalización igual a la unidad para la parte electromagnética de la función de onda. Hemos utilizado también los conmutadores apropiados en (1.76) para reescribir  $j_{-+}^{m+n,m}$  y  $j_{+-}^{m,m-n}$ . El valor cero se obtiene debido a que el valor de expectación de cada conmutador en la suma anterior es cero. Esto es porque  $\bar{Q}_5$  conmuta con  $U, U^\dagger$  y los estados  $|\varepsilon_0, 0\rangle$  tienen carga quiral definida (cero en nuestras convenciones). Un cálculo similar se aplica para el condensado quiral.

## 1.7 Conclusiones

Motivados por la formulación en el espacio de lazos de la QED en  $1 + 1$  dimensiones, hemos resuelto exactamente el modelo de Schwinger compacto, definido por la condición de que tanto la coordenada espacial  $x$  como el grado de libertad electromagnético  $c$  se comportan como variables angulares. En otras palabras, consideramos al grupo compacto  $U(1)$  como el grupo de norma correspondiente. Muchos formalismos utilizados para tratar el modelo de Schwinger standard (no-compacto), comienzan también con una variable electromagnética compacta, pero las condiciones de frontera se eligen de forma tal que el grado de libertad electromagnético al final toma valores en la línea [5, 6, 7, 8, 9]. En nuestro trabajo hemos mantenido el carácter angular de la variable electromagnética. La consistencia de este requisito lleva a diferencias importantes entre este modelo y el standard. Las diferencias más importantes son: propiedades de transformación diferentes bajo transformaciones de norma, espectro y funciones de onda diferentes y la existencia de una carga quiral invariante de norma conservada. Sin embargo, las características de solución básicas son las mismas: la transformación de Sugawara del término fermiónico lineal del hamiltoniano y la rotación de Bogoliubov del hamiltoniano completo. Los resultados que hemos obtenido no son sorprendentes si pensamos en la situación análoga de una ecuación diferencial sujeta a diferentes condiciones de frontera, dictadas por la elección de diferente topología en el espacio correspondiente.

La primera consecuencia de la compactificación del modelo es que el único grado de libertad electromagnético  $c$  es invariante bajo ambos tipos de transformaciones de norma, grandes y pequeñas. Todas las consecuencias extras del modelo se siguen directamente de esta invariancia. En particular, esto implica la invariancia de norma de los valores propios individuales  $\epsilon_n$  del hamiltoniano en el espacio de Fock fermiónico, lo cual lleva subsiguientemente a la invariancia de norma completa de los operadores fermiónicos  $a_n$ ,  $b_n$ . Estas propiedades tienen que ser contrastadas con el caso no compacto, donde  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_{n+1}$  y  $a_n \rightarrow a_{n+1}$ ,  $b_n \rightarrow b_{n+1}$  bajo transformaciones de norma grandes.

En cuanto a los espectros de los modelos. En el caso no compacto tenemos un conjunto infinito de sectores etiquetados por el entero  $N$ , los cuales están conectados mediante transformaciones de norma grandes. Los correspondientes modos cero en cada sector tienen energías dadas por  $(n + 1/2)e/\sqrt{\pi}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , independientemente de las etiquetas  $N$ , siendo así infinitamente degenerados. Es precisamente esta propiedad la que hace necesaria la introducción de los vacíos  $\theta$ . En el caso compacto, los sectores etiquetados por  $N$ , correspondientes a los valores propios  $2N$  de  $\hat{Q}_5$ , están también presentes. Ellos están conectados a través de los operadores  $j_{+-}$ ,  $j_{-+}$ . Sin embargo, debido a las condiciones de frontera (1.91) y (1.92) las energías de los modos cero correspondientes dependen de la etiqueta  $N$  y son no degenerados como puede verse en las Figs. 2 y 3. De hecho, el estado de mínima energía corresponde al sector  $N = 0$  y es el estado base del modelo. Así, no es necesaria la introducción de vacíos  $\theta$  en el modelo. Los estados excitados se construyen mediante el mismo procedimiento en ambos casos: por aplicar los operadores de asenso  $(j_{\pm}^m)^\dagger$  a los estados del modo cero. Sin embargo, su acción

produce tanto vectores propios como valores propios que son diferentes respecto al caso no compacto. Dado que el espectro de los modos cero no está igualmente espaciado, esto no nos permite una interpretación de partícula en el modelo compacto, como si ocurre para el caso no compacto.

Finalmente mencionemos nuevamente que para una  $L \neq 0$  dada, las condiciones de frontera para el modelo compacto (ecs.(1.91) y (1.92)) y aquellas del caso no compacto (ecs. (3.15) de la ref. [5], o ec. (48) de la ref.[8]) no pueden ser conectadas continuamente entre ellas. Por tanto ningún modelo puede ser obtenido del otro mediante un adecuado proceso de límite, enfatizando una vez más que la condición de compactificación produce un modelo de Schwinger que es diferente del modelo standard.

Para finalizar, mencionemos las publicaciones en las cuales han aparecido los resultados de las investigaciones presentadas en este capítulo.

### Artículo

R. Linares, Luis F. Urrutia and J. D. Vergara.  
*Exact Solution of the Schwinger Model With Compact  $U(1)$ .*  
Mod. Phys. Lett. **A16** (2001) 121-133.  
e-Print Archive: hep-th/0103057.

### Manuscrito

R. Linares, Luis F. Urrutia and J. D. Vergara.  
*Hamiltonian Solution of the Schwinger Model With Compact  $U(1)$ .*  
ICN-UNAM-00-15, Oct 2000. 37pp. e-Print Archive: hep-th/0010114.

### Publicaciones en memorias

1. R. Linares, L. F. Urrutia and J. D. Vergara.  
*The Doubly Compactified Schwinger Model.*  
In Particles and Fields, Eight Mexican School.  
Ed. J. C. D'Olivo, G. López-Castro and M. Mondragón.  
AIP Conference Proceedings 490, New York, (1999) 364-368.
2. R. Linares, L. F. Urrutia and J. D. Vergara.  
*Doubly Compacted Schwinger Model.*  
In JHEP Proceedings, Third Latin American Symposium on High Energy Physics.  
Ed. Enrico Nardi.

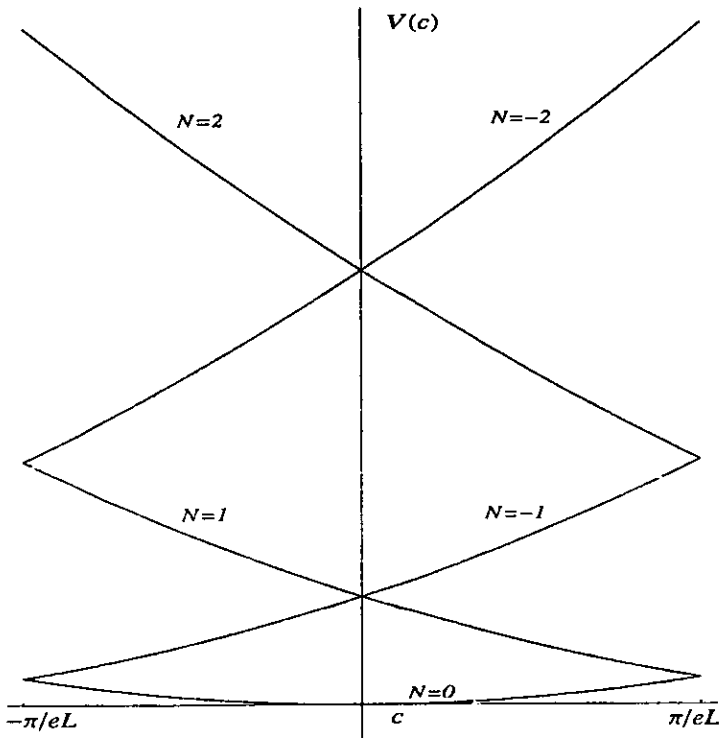


Figura 1.1: Los potenciales  $V_N(c)$  en el modelo de Schwinger compacto

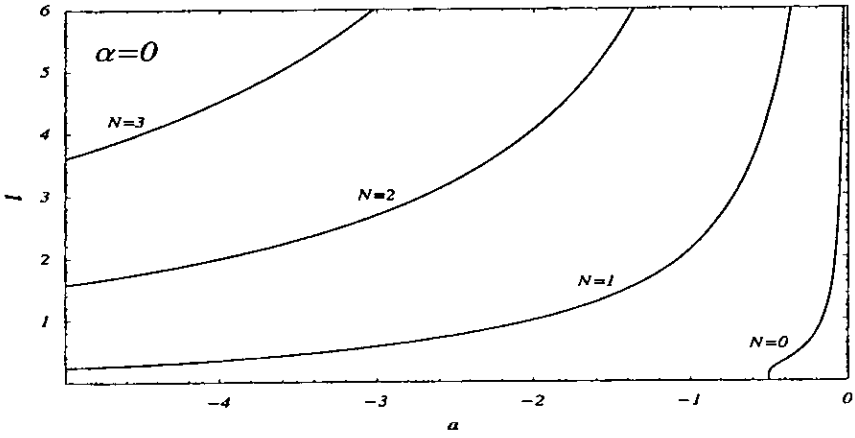


Figura 1.2: La solución numérica para los parámetros  $a_{0,N}(l)$ , para  $N = 0, 1, 2, 3$  y un valor dado de  $l$ . Las energías son  $\mathcal{E}_{0,N,0} = -(e/\sqrt{\pi}) a_{0,N}$

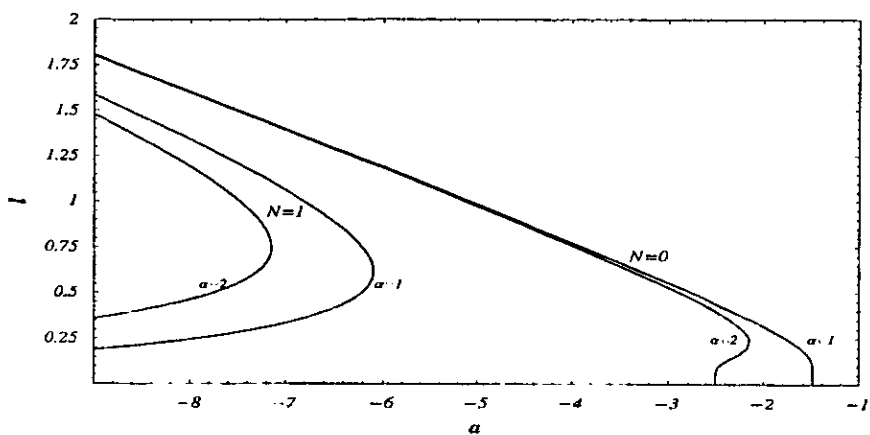


Figura 1.3: Solución numérica de  $a_{\alpha, N}(l)$ , con  $N = 0, 1$  y  $\alpha = 1, 2$ , para un valor dado de  $l$ . Las energías son  $\mathcal{E}_{\alpha, N, 0} = -(e/\sqrt{\pi}) a_{\alpha, N}$



# Referencias

- [1] J. Schwinger, *Gauge invariance and mass*, Phys. Rev. **125**, 397 (1962); *ibid Gauge invariance and mass II*, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [2] L.S. Brown, Nuovo Cim. **XXIX**, 3727 (1963); J.H. Lowenstein and J.A. Swieca, *Quantum electrodynamics in two-dimensions*, Ann. Phys. **68**, 172 (1971); E. Abdalla and M.C.A. Abdalla, *Non-perturbative methods in 2 dimensional quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [3] Para una revisión reciente del modelo de Schwinger standard puede consultarse por ejemplo: C. Adam, *Anomaly and Topological aspects of two-dimensional quantum electrodynamics*, Dissertation, Universitat Wien, october 1993. Ver también: C. Adam, *Perturbative solution of the Schwinger model*, Czech J. Phys. **48**, 9 (1998); C. Adam, *Instantons and vacuum expectation values in the Schwinger Model*, Z. Phys. **C63**, 169 (1994); C. Adam, R. A. Bertlmann and P. Hofer, *Overview on the anomaly and Schwinger term in two-dimensional QED*, Riv. Nuovo Cim. **16**, 1 (1993).
- [4] A. Z. Capri and R. Ferrari, *Schwinger model, Chiral symmetry, anomaly and theta vacua*, Il Nuovo Cimento **62 A**, 273 (1981).
- [5] N.S. Manton, *The Schwinger model and its axial anomaly*, Ann. Phys. **159**, 220 (1985).
- [6] J.E. Hetrick and Y. Hosotani, *QED on a circle*, Phys. Rev. **D38**, 2621 (1988).
- [7] M.A. Shifman, *Anomalies in gauge theories*, Phys. Rep. **209**, 341 (1991).
- [8] R. Link, *Eigenstates of the Schwinger model Hamiltonian*, Phys. Rev. **D42**, 2103 (1990).
- [9] S. Iso and H. Murayama, *Hamiltonian formulation of the Schwinger model*, Prog. Theo. Phys. **84**, 142 (1990).
- [10] J. Hallin and P. Liljenberg, *Explicit gauge-invariant quantization of the Schwinger model on a circle in the functional Schrödinger representation*, Phys. Rev. **D54**, 1723 (1996); J. Hallin, *QED<sub>1+1</sub> by Dirac Quantization*, Preprint Göteborg, ITP 93-8, hep-th/9304101, May 1993.

- [11] M. Creutz, *Quark, Gluons and Lattices*, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [12] R. Gambini and J. Pullin, *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [13] R. Gambini, H. Morales, L. F. Urrutia and J. D. Vergara, *Loop variables for compact two-dimensional quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D57, 3711 (1998).
- [14] H. Fort and R. Gambini,  *$U(1)$  puzzle and the strong CP problem from a holonomy formulation perspective*, Int. Jour. of Theor. Phys. 39, 341 (2000).
- [15] A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, New York, Harwood, 1987.
- [16] M. Asorey, J.G. Esteve and F.A. Pacheco, *Planar rotor: the theta vacuum structure, and some approximate methods in quantum mechanics*, Phys. Rev. D27, 1852 (1983).
- [17] R. Linares, L. F. Urrutia and J.D. Vergara in *Particles and Fields*, Ed. by J. C. D'Olivo, et al, AIP Conference Proceedings 490, (New York, 1999). R. Linares, L. F. Urrutia and J.D.Vergara in JHEP Proceedings, *Third Latin American Symposium on High Energy Physics 2000*, Ed. E. Nardi.
- [18] H. Sugawara, *A field theory of currents*, Phys. Rev. 170, 1659 (1968).
- [19] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover, 1965.
- [20] Ver por ejemplo I.S. Gradshteyn and I.M. Ryshik, *Table of integrals, Series and Products*, Academic Press Inc., New York, (1965), pág. 1074.

## Capítulo 2

# Cuerdas y Supercuerdas

Así como la partícula describe una línea de mundo cuando ésta evoluciona en el tiempo, la cuerda describe una hoja de mundo de dimensión  $d = 2$  que puede ser descrita en términos de dos parámetros  $\xi^i = (\tau, \sigma)$ . En ambos casos se pide que las cantidades físicas tal como la acción, dependan sólo del encajamiento de la línea (hoja) de mundo en el espacio-tiempo de dimensión  $D$  y no de la parametrización. No sólo es atractivo que estas teorías tengan esta propiedad, sino que es necesaria para poder construir una teoría cuántica relativista consistente (una exposición completa de las características básicas de la teoría de cuerdas, puede encontrarse por ejemplo en [1, 2, 3]).

La teoría de cuerdas relevante involucra supersimetría. Existen dos maneras diferentes de implementar supersimetría en teoría de cuerdas, las cuales son equivalentes cuánticamente. La primera de ellas tiene su origen en la interpretación de la acción de Polyakov como una teoría de campos bosónicos de dos dimensiones que describe  $D$  campos escalares  $X^\mu$  acoplados a gravedad, siendo esta acción invariante bajo cambios de coordenadas en la hoja de mundo. Es posible aumentar esta simetría a una supersimetría local en la hoja de mundo al introducir los compañeros supersimétricos  $\lambda_\alpha$  y  $\psi^\mu$  de la métrica  $g_{ij}$  y de los campos escalares  $X^\mu$  respectivamente. Aquí,  $\lambda_\alpha$  es un campo espinorial de dos dimensiones y espín  $3/2$ , mientras que  $\psi^\mu$  es un vector de dimensión  $D$  y un espinor de dos dimensiones. En este modelo los únicos grados de libertad los constituyen el "supermultiplete de materia" ( $X^\mu, \psi^\mu$ ). Los campos de supergravedad ( $g_{ij}, \lambda_\alpha$ ), son norma pura en dos dimensiones. Esta formulación de la cuerda fermiónica lleva al modelo de Neveu-Schwarz-Ramond (NSR) [4, 5]. El principio de acción que surge de este modelo tiene una supersimetría en la hoja de mundo ( $N = 1$ ) y produce una teoría de cuerdas consistente con dimensión crítica  $D = 10$ . Cuando se cuantiza esta teoría aparece un taquión en su espectro, pero al truncar el espectro en una manera propuesta por Gliozzi, Scherk y Olive (GSO) [6], se elimina entre otros estados el taquión y se obtiene supersimetría en el sentido del espacio-tiempo de dimensión  $D = 10$ , con una o dos supercargas de Majorana-Weyl ( $N = 1$  o  $N = 2$ ) dependiendo de la elección de las condiciones de frontera. A pesar de

que el formalismo de (NSR) es simple y elegante, y puede ser cuantizado covariantemente y canónicamente, el hecho de que la supersimetría en el espacio-tiempo, la cual está en el corazón de muchas de las propiedades importantes de la teoría de cuerdas, no sea manifiesta en esta formulación, llevó a buscar un formalismo que diera origen a la misma teoría, pero que esta vez la supersimetría en el espacio-tiempo fuera explícita.

La segunda manera de introducir supersimetría se basa en el hecho de que la cuerda bosónica es invariante bajo transformaciones globales de Poincaré en  $D$  dimensiones. Es posible aumentar esta simetría a una invariancia global bajo el supergrupo de Poincaré, lo cual lleva a la supercuerda de Green y Schwarz (GS) [7]. En esta formulación la supersimetría en el espacio-tiempo es obvia y las condiciones GSO están automáticamente incorporadas sin realizar ninguna truncación. El principio de acción en este caso puede involucrar una o dos supercargas de Majorana-Weyl ( $N = 1$  o  $N = 2$ ) y produce teorías de cuerdas consistentes de dimensión crítica  $D = 10$ .

La equivalencia entre estas dos formulaciones se hace en la norma del cono de luz. Para la cuerda fermiónica (NSR) se conoce su cuantización covariante en el espacio de Minkowski, mientras que para la supercuerda de (GS) no se ha podido desarrollar esta cuantización de forma satisfactoria. Recientemente ha habido un creciente interés en desarrollar la cuantización covariante de la supercuerda de (GS) [8]. Existen varios motivos para hacer esta cuantización, como en cualquier teoría es deseable tener explícitas todas las simetrías con el objetivo de reducir la cantidad de cálculos y simplificar cualquier cancelación que venga de la simetría. Un motivo adicional es el deseo de construir una acción cuantizable para un modelo  $\sigma$  en espacios-tiempo de fondo curvos con flujo de Ramond-Ramond, el ejemplo más importante lo constituye la teoría de supercuerdas IIB en el espacio-tiempo  $AdS_5 \times S_5$ . El interés de cuantizar esta teoría proviene de la correspondencia AdS/CFT, la cual establece la equivalencia entre la teoría de cuerdas IIB en un espacio  $AdS_5 \times S_5$  y una teoría de Super Yang Mills con  $N = 4$  [9]. La formulación clásica de la supercuerda de (GS) en el espacio-tiempo de  $AdS_5 \times S_5$  ha sido construida recientemente [10] y se han realizado avances para su cuantización en el cono de luz [11].

Muchos intentos para cuantizar covariantemente la supercuerda comienzan en la versión clásica de la acción de (GS) con invariancia de super Poincaré. Las características básicas de esta versión (como veremos detalladamente en este capítulo) son una invariancia bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo y una simetría local fermiónica llamada simetría  $\kappa$ . Cuando se hace el análisis canónico de la teoría aparecen además de las constricciones de primera clase que generan la invariancia bajo reparametrizaciones, constricciones fermiónicas reducibles de primera y segunda clase [12]. Es esta reducibilidad de las constricciones, la que está en el fondo del problema de la cuantización.

Una propuesta de cuantización está basada en fijar las simetrías fermiónicas en la norma del "semi cono de luz" [13, 14], esta norma tiene la característica de preservar la supersimetría del espacio-tiempo y simplificar la expresión de la acción original. Sin embargo, aún esta acción simplificada no puede cuantizarse fácilmente debido a que el propagador fermiónico no está bien definido. Por esta razón, no ha sido posible utilizar esta aproximación para calcular amplitudes de dispersión, excepto en un cierto límite que reproduce los cálculos en la norma del cono de luz [15]. Otra propuesta para cuantizar

covariantemente la acción de (GS) se basa en reemplazar las constricciones fermiónicas de segunda clase por un conjunto apropiado de constricciones de primera clase [16], algunas veces utilizando variables armónicas [17, 18, 19] las cuales hacen covariante la elección de norma del “semí cono de luz”. Sin embargo, a pesar de numerosos intentos en esta dirección [20, 21, 22], no fue posible encontrar conjuntos apropiados de constricciones de primera clase que permitieran un cálculo covariante de las amplitudes de dispersión. Recientemente mediante la introducción de variables espinoriales adicionales en el espacio tiempo se mostró en [8], una forma en la cual se pueden calcular amplitudes de dispersión de manera covariante y se hacen avances en la cuantización en la norma del cono de luz para la supercuerda en el espacio-tiempo  $AdS_5 \times S_5$ . Sin embargo la última palabra en este problema no ha sido dicha aún.

Otra propuesta de cuantización va en la dirección de trabajar directamente con las constricciones fermiónicas reducibles. El primer paso es separar de manera covariante las constricciones fermiónicas en constricciones de primera y segunda clase, introduciendo para ello operadores de proyección covariantes. En el caso de la supercuerda de (GS) este proyector puede construirse en términos de las variables originales [23]. Una vez realizada la separación, el problema a resolver es el de un sistema con constricciones infinitamente reducibles. Ha habido varios esfuerzos en esta dirección [24], pero el problema no tiene hasta ahora una solución satisfactoria. Básicamente los problemas surgen debido a que cuando las constricciones de primera clase son reducibles aparece una torre infinita de fantasmas para los fantasmas [25]. Mientras que la reducibilidad en las constricciones de segunda clase (además del problema de la realización cuántica) implica que los paréntesis de Dirac obedecen la identidad de Jacobi únicamente en la superficie de constricciones de segunda clase [26]. Recientemente en [27] se ha propuesto una acción equivalente a la acción de (GS) en la cual las constricciones fermiónicas son separadas de manera covariante y las constricciones de primera clase que surgen de esta separación son irreducibles.

En este capítulo daremos una introducción a la acción de supercuerdas de (GS). Es común por simplicidad discutir primero la formulación de cuerdas bosónicas, para pasar después a la formulación supersimétrica. Aquí se utiliza esta forma de exposición. Comenzaremos a manera de introducción exponiendo brevemente dos diferentes acciones, equivalentes clásicamente, que se utilizan para describir la dinámica de la partícula puntual relativista. A continuación expondremos diferentes acciones también equivalentes clásicamente que describen la dinámica de la cuerda relativista. En ambos casos discutiremos la equivalencia entre las acciones y pondremos énfasis en sus simetrías. Presentamos después el análisis canónico de las diferentes acciones de cuerdas bosónicas. Terminaremos la parte bosónica obteniendo las transformaciones de norma infinitesimales para una de las acciones de cuerdas (acción de Polyakov), utilizando para ello el método del hamiltoniano extendido [28]. Existen varias referencias donde se trata la formulación hamiltoniana de alguna de las acciones de cuerdas bosónicas que aquí se discuten (por ejemplo [29, 30, 31, 32]), nuestra contribución a este desarrollo es la obtención de las transformaciones de norma a través del método canónico. Una vez hecho el análisis bosónico, pasamos al análisis supersimétrico. Comenzaremos discutiendo la forma en que se obtiene la acción de supercuerdas de (GS). Veremos que es posible tener acciones supersimétricas

que involucran una y dos supersimetrías. Se incluye una discusión de la forma en que se construye la acción de cada una de las cinco teorías de supercuerdas consistentes que se conocen. Después de esto se realiza un análisis detallado del formalismo canónico de la supercuerda con dos supersimetrías. Mostramos que la supercuerda es un sistema con constricciones reducibles y eliminaremos las constricciones de segunda clase introduciendo el paréntesis de Dirac. Existen algunas referencias donde se discute la formulación hamiltoniana de la supercuerda [12, 23], sin embargo, la discusión hecha en [12] sufre de inconsistencias [33], mientras que en [23] la discusión es incompleta. En este capítulo completaremos este análisis.

## 2.1 Partícula relativista

Consideremos el movimiento de una partícula puntual de masa  $m$  en un campo gravitacional, o matemáticamente, en una geometría Riemanniana curva descrita por el tensor métrico  $G_{\mu\nu}$ . Asumimos que la métrica tiene un valor propio negativo y  $D - 1$  valores propios positivos, lo cual corresponde a la signatura Minkowskiana de un espacio tiempo de  $D$  dimensiones.

Dicho movimiento está caracterizado por un vector de Lorentz de  $D$  componentes  $\dot{X}^\mu$  y el principio de acción que lo describe es bien conocido. Éste es proporcional al invariante de longitud (tipo tiempo) de la línea de mundo

$$S = -m \int ds, \quad (2.1)$$

donde el invariante de longitud está dado por

$$ds^2 = -G_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu. \quad (2.2)$$

Supongamos que la trayectoria clásica está escrita como  $X^\mu(\tau)$ , donde  $\tau$  es un parámetro auxiliar que etiqueta los puntos a lo largo de la línea de mundo. Entonces (2.1) puede ser escrita en la forma

$$S_1[X^\mu(\tau)] = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2}, \quad (2.3)$$

donde

$$\dot{X}^2 \equiv G_{\mu\nu}(X) \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}. \quad (2.4)$$

El principio de acción (2.3) tiene una propiedad muy importante. Es invariante bajo reparametrizaciones  $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$  de la trayectoria de la partícula. Por tanto la ecuación (2.3) caracteriza realmente la línea de mundo de la partícula y no una elección particular de las coordenadas. Matemáticamente se tiene que para cualquier función monótona  $\tau'(\tau)$ , las dos trayectorias  $X'^\mu$  y  $X^\mu$  son las mismas

$$X'^\mu(\tau'(\tau)) = X^\mu(\tau), \quad (2.5)$$

o en forma infinitesimal

$$\delta X^\mu(\tau) = \eta \dot{X}^\mu(\tau), \quad (2.6)$$

donde  $\eta(\tau)$  es un parámetro infinitesimal que depende arbitrariamente de  $\tau$ . Sin embargo, la raíz cuadrada en la acción es un tanto inconveniente, además, la fórmula no aplica a partículas no-masivas. Para superar estas dificultades es conveniente introducir una coordenada auxiliar  $\varphi(\tau)$ , la cual puede ser interpretada como un 'einbein' para la geometría unidimensional de la línea de mundo. En términos del 'einbein', la acción (2.1) puede ser reexpresada en la forma equivalente clásicamente

$$S_2[X^\mu(\tau), \varphi(\tau)] = \frac{1}{2} \int d\tau (\varphi^{-1} \dot{X}^2 - m^2 \varphi). \quad (2.7)$$

Esta nueva acción es invariante bajo reparametrizaciones si además de (2.5), el campo auxiliar  $\varphi$  transforma de la siguiente manera

$$\varphi'(\tau') d\tau' = \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Infinitesimalmente esta transformación es

$$\delta\varphi = \frac{d}{d\tau}(\eta\varphi). \quad (2.9)$$

La equivalencia clásica entre ambas acciones puede establecerse si se resuelve la ecuación de movimiento para  $\varphi$

$$\dot{X}^2 + \varphi^2 m^2 = 0, \quad (2.10)$$

y se sustituye en (2.7), con lo cual se recupera la acción (2.3). La acción (2.7) también es aplicable al caso no masivo. De manera comparativa, a pesar de que  $S_1$  y  $S_2$  son equivalentes clásicamente, es difícil darle sentido a  $S_1$  en una integral de trayectoria debido a su forma complicada con derivadas dentro de la raíz cuadrada. Por otro lado,  $S_2$  es cuadrática en las derivadas y su integral de trayectoria puede ser evaluada. Así, en mecánica cuántica la propagación de las partículas puede ser descrita por integrales de trayectoria de la forma

$$\int DX D\varphi \exp iS_2(X, \varphi), \quad (2.11)$$

donde la simetría de norma de la acción (2.7) tiene que ser incorporada a dicha integral.

## 2.2 Cuerdas bosónicas

### 2.2.1 Acción de Nambu-Goto

Una cuerda es un objeto extendido de una dimensión. La historia de mundo de la cuerda es una superficie de dos dimensiones (comúnmente llamada hoja de mundo) en el

espacio-tiempo. La generalización natural del caso de la partícula es postular que una cuerda libre (con extremos libres si ésta es abierta), está descrita por una superficie con las siguientes propiedades:

1.- La superficie es tipo tiempo, esto es, posee en todo punto direcciones tipo tiempo y tipo espacio (excepto posiblemente en la frontera).

2.- Tiene área extrema.

Al igual que para la partícula, es conveniente usar una descripción paramétrica de la cuerda. Ésta tiene entre otras propiedades la virtud de producir un formalismo explícitamente covariante. Las ecuaciones paramétricas de la hoja de mundo de la cuerda son  $X^\mu = X^\mu(\xi^i)$ , donde  $\xi^i$  con  $i = 0, 1$  son las coordenadas de la hoja de mundo y  $X^\mu$  con  $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$  son las coordenadas del espacio-tiempo. Se asume que  $\xi^i \equiv (\tau, \sigma)$  es una buena parametrización en el sentido que los vectores tangentes  $\partial X^\mu / \partial \tau$  y  $\partial X^\mu / \partial \sigma$  son en todo punto linealmente independientes y no nulos. Más aún, se asume que  $\partial X^\mu / \partial \tau$  es tipo tiempo (o nulo) y que  $\partial X^\mu / \partial \sigma$  es tipo espacio.

El encajamiento de la hoja de mundo induce una métrica sobre la superficie  $X^\mu(\xi^i)$ , dada explícitamente por

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (2.12)$$

La métrica  $\eta_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo de fondo en el cual la cuerda está sumergida, la tomaremos plana. Ésta puede ser curva sin alterar la teoría clásica de una manera esencial, sin embargo, la curvatura lleva a complicaciones serias en la teoría cuántica que no han sido resueltas completamente. Esto motiva la elección anterior. Se tiene así que la acción invariante bajo reparametrizaciones más simple es la llamada acción de Nambu-Goto [34, 35], la cual es proporcional al área de la hoja de mundo

$$S_{NG}[X^\mu(\xi^i)] = -T \int d^2\xi \sqrt{-h}, \quad (2.13)$$

donde  $h \equiv \det h_{ij}$ . La constante de proporcionalidad  $T$  está dada por la tensión y tiene las unidades necesarias para que la acción sea adimensional  $[T] = [\text{masa}]^2$ .

Las simetrías de esta acción son:

1.- El grupo de isometría del espacio-tiempo plano, esto es, el grupo de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \quad (2.14)$$

con  $\Lambda^\mu_\nu$  una transformación de Lorentz y  $a^\mu$  una traslación.

2.- Invariancia de coordenadas en la hoja de mundo, comúnmente llamada invariancia bajo difeomorfismos. Para nuevas coordenadas  $(\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma))$ , la transformación de simetría se expresa en la forma

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (2.15)$$

Infinitesimalmente esta transformación es

$$\delta X^\mu = \eta^i \partial_i X^\mu, \quad (2.16)$$



donde  $\eta^i$  representa dos parámetros infinitesimales.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de esta acción para las coordenadas  $X^\mu$  son

$$\partial_i(\sqrt{-h}h^{ij}\partial_j X^\mu) = 0. \quad (2.17)$$

La acción de Nambu-Goto es análoga a la acción de la partícula  $S_1$  (2.3), la cual contiene derivadas dentro de la raíz cuadrada. Desde el punto de vista de la hoja de mundo, la ecuación (2.15) define a  $X^\mu(\tau, \sigma)$  como campos escalares, con  $\mu$  visto como un índice interno.

## 2.2.2 Acción de Schild

Como en el caso de la partícula, la acción (2.13) es inconveniente para trabajar debido a la raíz cuadrada. Existe otra acción para describir cuerdas que es equivalente clásicamente a la acción de Nambu-Goto, ésta se obtiene al introducir un campo auxiliar  $\varphi$  de la misma forma como se hizo para el caso de la partícula relativista

$$S_S[X^\mu(\xi^i), \varphi(\xi^i)] = \frac{1}{2} \int d^2\xi (\varphi^{-1}h - T^2\varphi). \quad (2.18)$$

Esta acción se le conoce con el nombre de acción de Schild [36]. Una propiedad de esta acción es que se puede obtener el límite de tensión nula  $T \rightarrow 0$  que corresponde al límite ultra relativista de la cuerda. El análogo de esta acción en el caso de la partícula relativista es evidentemente la acción  $S_2$  (2.7).

La equivalencia clásica entre las acciones  $S_S$  y  $S_{NG}$  se obtiene al resolver la ecuación de movimiento para el campo auxiliar  $\varphi$

$$h + T^2\varphi^2 = 0, \quad (2.19)$$

y sustituir el campo  $\varphi$  en (2.18).

Las simetrías de esta acción son:

1.- El grupo de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau, \sigma) &= \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \\ \varphi'(\tau, \sigma) &= \varphi(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.- Invariancia de coordenadas en la hoja de mundo

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau', \sigma') &= X^\mu(\tau, \sigma), \\ \varphi'(\tau', \sigma')d^2\xi' &= \varphi(\tau, \sigma)d^2\xi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De manera infinitesimal, la invariancia en la hoja de mundo se expresa como

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \eta^i \partial_i X^\mu, \\ \delta \varphi &= \partial_i(\eta^i \varphi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

La ecuación de movimiento que se obtiene para los campos  $X^\mu$  a partir de esta acción es

$$\partial_i (\varphi^{-1} h h^{ij} \partial_j X^\mu) = 0, \quad (2.23)$$

así al combinar esta ecuación con (2.19) se obtiene la ecuación de movimiento (2.17).

### 2.2.3 Acción de Polyakov

Existe otra acción para evitar que las derivadas de los campos  $X^\mu$  estén dentro de la raíz cuadrada. Esta acción también es clásicamente equivalente a la de Nambu-Goto y tiene como característica ser cuadrática en las derivadas de  $X^\mu$

$$S_P[X^\mu(\xi), g_{ij}(\xi)] = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{ij} h_{ij}. \quad (2.24)$$

Aquí  $g_{ij}(\xi)$  es tratada como una variable independiente y representa la métrica intrínseca de la hoja de mundo, en principio, sin relación con la métrica inducida  $h_{ij}$ , la signatura de  $g_{ij}$  es  $(+, -)$  y  $g \equiv \det g_{ij}$ . Con la introducción de  $g_{ij}$ , el principio de acción depende de  $D + 3$  campos. Históricamente esta acción fue propuesta por Brink, Di Vecchia y Howe [37] y por Deser y Zumino [38], en el camino para encontrar una acción que tuviera supersimetría local en la hoja de mundo. Sin embargo fue Polyakov [39] el que enfatizó las virtudes de esta acción cuando se cuantiza mediante el formalismo de integral de trayectoria.

Para obtener la equivalencia de esta acción con  $S_{NG}$ , se utiliza la ecuación de movimiento de la métrica  $g_{ij}$

$$h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} h_{kl} = 0, \quad (2.25)$$

a partir de la cual se encuentra la relación

$$h_{ij} (-h)^{-1/2} = g_{ij} (-g)^{-1/2}. \quad (2.26)$$

Sustituyendo esta ecuación en la acción de Polyakov obtenemos la equivalencia entre las acciones (2.13) y (2.24).

Las simetrías de la acción de Polyakov son las siguientes:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau, \sigma) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \\ g'_{ij}(\tau, \sigma) &= g_{ij}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.- Invariancia bajo difeomorfismos

$$\begin{aligned} X'^\mu(\tau', \sigma') &= X^\mu(\tau, \sigma), \\ \frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\tau', \sigma') &= g_{ij}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.28)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\sigma, \tau)$ .

### 3.- Invariancia de Weyl de 2 dimensiones

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau, \sigma) &= X^{\mu}(\tau, \sigma), \\ g'_{ij}(\tau, \sigma) &= \exp(2\omega(\tau, \sigma))g_{ij}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.29)$$

para  $\omega(\tau, \sigma)$  arbitraria.

La invariancia de Weyl es un reescalamiento local de la métrica intrínseca de la hoja de mundo y no tiene análogo en la acción de Nambu-Goto. Esta simetría se puede entender si se observa que la ecuación (2.26) utilizada para relacionar las acciones de Polyakov y Nambu-Goto, no relaciona a  $g_{ij}$  con  $h_{ij}$  de manera única, sino sólo hasta un reescalamiento local

$$g_{ij}(\tau, \sigma) = \beta(\tau, \sigma)h_{ij}(\tau, \sigma), \quad (2.30)$$

donde  $\beta(\xi)$  es una función arbitraria. Así, las métricas relacionadas por una transformación de Weyl corresponden al mismo encajamiento de la hoja de mundo en el espacio-tiempo. Esta es una redundancia extra de la acción de Polyakov, en adición a la invariancia bajo difeomorfismos.

De manera infinitesimal, las simetrías en la hoja de mundo se expresan como

$$\begin{aligned} \delta X^{\mu} &= \eta^i \partial_i X^{\mu}, \\ \delta g_{ij} &= \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La variación de la acción respecto a la métrica define el tensor de energía-momento

$$T_{ij}(\tau, \sigma) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{ij}} = T \left( h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} h_{kl} \right). \quad (2.32)$$

Este tensor es conservado  $\nabla_i T^{ij} = 0$ , como consecuencia de la invariancia bajo difeomorfismos. Mientras que la invariancia de  $S_P$  bajo transformaciones de Weyl implica que el tensor es de traza nula, ya que

$$\delta S_P = \int d\tau \frac{\delta L_P}{\delta g^{ij}} \delta g_{ij} = - \int d\tau \sqrt{-g} \omega T^{ij} g_{ij} \quad (2.33)$$

con lo cual  $\delta S = 0 \Rightarrow T^i_i = 0$ .

La ecuación de movimiento para el campo  $X^{\mu}$  es

$$\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X^{\mu}) = 0, \quad (2.34)$$

con lo cual las ecuaciones (2.30) y (2.34) juntas, son equivalentes a (2.17).

Como hemos visto, la acción (2.24) se refiere simultáneamente a dos espacios diferentes: el espacio de dos dimensiones de coordenadas  $\xi^i$  y el espacio de Minkowski de  $D$  dimensiones y coordenadas  $X^{\mu}$ . Este último espacio es el espacio cociente del grupo de Poincaré y el grupo de Lorentz. Los campos  $X^{\mu}(\xi^i)$  son un mapeo del primer al segundo espacio. Los mapeos que extremizan la acción (2.24) son conocidos como "mapeos

armónicos” en la literatura matemática, la expresión (2.24) es llamada la “funcional de energía”. En la literatura física, dicho modelo es llamado un “modelo  $\sigma$ ”<sup>1</sup>.

La interpretación de la acción como un modelo  $\sigma$  minimiza el significado geométrico de la acción de Nambu-Goto (área) y se enfoca más en su aspecto como teoría de campo. Este punto de vista es particularmente útil cuando se discuten cuerdas en espacios-tiempo curvos y supercuerdas. Desde este punto de vista, la acción de Polyakov representa  $D$  campos escalares de Klein-Gordon no masivos acoplados a la métrica  $g_{ij}$  y la invariancia de Poincaré es una simetría interna que actúa sobre los campos para  $\tau$  y  $\sigma$  fijos.

## 2.3 Formulación canónica de cuerdas

### 2.3.1 Acción de Nambu-Goto

Para construir la formulación hamiltoniana de la acción de Nambu-Goto necesitamos calcular primeramente el momento canónico asociado al campo  $X^\mu$ . De la acción (2.13) se obtiene

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{T}{\sqrt{-h}} (h_{01} X'_\mu - h_{11} \dot{X}_\mu), \quad (2.35)$$

donde estamos utilizando la notación usual  $\partial_\tau X = \dot{X}$  y  $\partial_\sigma X = X'$ . De esta expresión del momento obtenemos que el hamiltoniano canónico es nulo ( $H_c = 0$ ) y que existen dos constricciones primarias (una exposición completa del método hamiltoniano de Dirac puede encontrarse en [40])

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T h_{11} \right) \approx 0, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{H}_1 = P_\mu X'^\mu \approx 0. \quad (2.37)$$

Tenemos por tanto que la expresión del hamiltoniano total es en este caso

$$H_T[X^\mu, P_\mu, \lambda, \lambda^1] = \int d\sigma (\lambda \mathcal{H} + \lambda^1 \mathcal{H}_1), \quad (2.38)$$

donde  $\lambda$  y  $\lambda^1$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones. Dado que el álgebra de constricciones primarias es cerrada

$$\begin{aligned} \{H[f], H[g]\} &= H_1[f g' - g f'], \\ \{H[f], H_1[g]\} &= H[f g' - g f'], \\ \{H_1[f], H_1[g]\} &= H_1[f g' - g f'], \end{aligned} \quad (2.39)$$

<sup>1</sup>No se debe confundir el nombre del modelo, con la notación que estamos utilizando para denotar una de las coordenadas de la hoja de mundo.

(donde  $H[f] \equiv \int d\sigma f(\tau, \sigma) \mathcal{H}(\tau, \sigma)$  y análogamente para  $H_1[f]$ ) concluimos que éstas son de primera clase y que no aparecen más constricciones en el formalismo hamiltoniano. Por tanto, para esta acción, la expresión del hamiltoniano extendido coincide con la del hamiltoniano total ( $H_E = H_T$ ).

El conteo de grados de libertad en este caso es como sigue. Hay  $2D$  campos ( $X^\mu, P_\mu$ ) en el espacio fase y 2 constricciones de primera clase ( $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$ ). El número de grados de libertad de la cuerda bosónica es entonces  $(2D - 4)/2 = D - 2$ .

### 2.3.2 Acción de Schild

Dado que en la acción de Schild (2.18) tenemos dos tipos de campos, tendremos dos tipos de momentos. El momento canónico asociado al campo  $\varphi$

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\varphi}} \approx 0, \quad (2.40)$$

es una restricción primaria, mientras que el momento canónico asociado al campo  $X^\mu$  es

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{X}^\mu} = \varphi^{-1} (h_{01} X'_\mu - h_{11} \dot{X}_\mu). \quad (2.41)$$

De esta expresión del momento canónico se obtiene la restricción primaria

$$\mathcal{H}_1 = P_\mu X'^\mu \approx 0. \quad (2.42)$$

La expresión del hamiltoniano canónico es en este caso

$$H_c = -T \int d\sigma \frac{\varphi}{h_{11}} \mathcal{H}, \quad (2.43)$$

donde

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T h_{11} \right). \quad (2.44)$$

Mientras que la expresión del hamiltoniano total es

$$H_T = - \int d\sigma \left( \frac{T\varphi}{h_{11}} \mathcal{H} + \lambda_1 \mathcal{H}_1 + \lambda_\varphi \Pi_\varphi \right), \quad (2.45)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_\varphi$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones.

Al requerir que la restricción  $\Pi_\varphi$  se mantenga en el tiempo

$$\dot{\Pi}_\varphi[f] = \{\Pi_\varphi[f], H_T\} \approx 0, \quad (2.46)$$

se obtiene que  $\mathcal{H}$  es una restricción secundaria. Nótese que las constricciones  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_1$  coinciden con las constricciones obtenidas para la acción de Nambu-Goto, con la diferencia que en ese caso ambas aparecen como constricciones primarias, mientras que aquí sólo  $\mathcal{H}_1$

aparece como constricción primaria y  $\mathcal{H}$  aparece como una constricción secundaria. Por tanto, el álgebra entre estas constricciones es nuevamente (2.39)

$$\begin{aligned}\{H[f], H[g]\} &= H_1[fg' - gf'], \\ \{H[f], H_1[g]\} &= H[fg' - gf'], \\ \{H_1[f], H_1[g]\} &= H_1[fg' - gf'].\end{aligned}$$

Las tres constricciones ( $\Pi_\varphi$ ,  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_1$ ) son de primera clase debido a (2.39) y a que el paréntesis de Poisson de cualquier constricción con  $\Pi_\varphi$  es cero. Por tanto la evolución de la constricción  $\mathcal{H}$  no dará origen a una nueva constricción. El conteo de grados de libertad para esta acción es como sigue, tenemos  $2(D+1)$  variables en el espacio fase y 3 constricciones de primera clase, por lo tanto tenemos  $(2(D+1) - 2 \times 3)/2 = D - 2$  grados de libertad por punto.

### 2.3.3 Acción de Polyakov

Para la construcción de la formulación hamiltoniana de la acción de Polyakov, calculamos los momentos canónicos asociados a los campos  $X^\mu$  y  $g_{ij}$ . A partir de éstos se obtienen tres constricciones primarias que denotaremos con la letra  $\phi$

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu} = -T\sqrt{-g}g^{0i}\partial_i X_\mu, \quad (2.47)$$

$$\phi_1 = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{g}_{00}} = \pi^{00} \approx 0,$$

$$\phi_2 = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{g}_{01}} = \pi^{01} \approx 0, \quad (2.48)$$

$$\phi_3 = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{g}_{11}} = \pi^{11} \approx 0,$$

y el hamiltoniano canónico cuya expresión es

$$H_c = \int d\sigma \left( \frac{\sqrt{-g}}{2g_{11}} \left( \frac{1}{T} P_\mu P^\mu + T X'_\mu X'^\mu \right) + \frac{g_{01}}{g_{11}} P_\mu X'^\mu \right). \quad (2.49)$$

El análisis de Dirac produce dos constricciones secundarias

$$\phi_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P_\mu P^\mu + T X'_\mu X'^\mu \right) \equiv \mathcal{H} \approx 0, \quad (2.50)$$

$$\phi_5 = P_\mu X'^\mu \equiv \mathcal{H}_1 \approx 0, \quad (2.51)$$

y ninguna terciaria. Nótese que estas dos constricciones secundarias coinciden con las 2 constricciones primarias de la acción de Nambu-Goto. Por tanto el álgebra de estas

constricciones es nuevamente (2.39)

$$\begin{aligned}\{H[f], H[g]\} &= H_1[fg' - gf'], \\ \{H[f], H_1[g]\} &= H[fg' - gf'], \\ \{H_1[f], H_1[g]\} &= H_1[fg' - gf'].\end{aligned}$$

Los paréntesis de Poisson restantes son cero, por lo que las cinco constricciones son de primera clase. El conteo de grados de libertad en este caso es como sigue, tenemos  $2(D + 3)$  variables de campo en el espacio fase y 5 constricciones de primera clase, por lo que tenemos  $(2(D + 3) - 2 \times 5)/2 = D - 2$  grados de libertad por punto.

## 2.4 Transformaciones de norma

En esta sección obtendremos la expresión de las transformaciones de norma a partir del hamiltoniano extendido, utilizando para ello el algoritmo desarrollado en [28]. En esencia, este algoritmo da una relación precisa entre las transformaciones de norma en forma lagrangiana y hamiltoniana, para cualquier teoría de norma. En [28] se mostró que para definir las simetrías de norma lagrangianas, los coeficientes de las constricciones de primera clase en el generador hamiltoniano de las transformaciones de norma deben satisfacer un conjunto de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones involucran, en general, los multiplicadores de Lagrange. Su solución contiene tantas funciones arbitrarias del tiempo como constricciones primarias de primera clase. Si  $n$  es el número de generaciones de constricciones (primarias, secundarias, terciarias...), las funciones arbitrarias aparecen en la solución general junto con sus derivadas temporales sucesivas hasta de orden  $n - 1$ . Como resultado final este análisis nos provee de (i) una manera sistemática de derivar todas las simetrías de norma de un lagrangiano dado y (ii) un criterio preciso para contar los grados de libertad físicos de una teoría de norma, directamente de la forma de las transformaciones de norma en forma lagrangiana. Un exposición detallada de este algoritmo aplicado a varios ejemplos concretos puede encontrarse en [41].

Aquí, aplicaremos este análisis al caso de la acción de Polyakov. Para las otras dos acciones que hemos discutido (acción de Nambu-Goto y Schild), la aplicación de este algoritmo es similar.

La expresión de la acción extendida para el lagrangiano (2.24) es

$$S_E = \int d^2\xi \left[ \dot{g}_{ij}\pi^{ij} + \dot{X}^\mu P_\mu - \left( \frac{\sqrt{-g}}{g_{11}} + \lambda^4 \right) \mathcal{H} - \left( \frac{g_{01}}{g_{11}} + \lambda^5 \right) \mathcal{H}_1 - \lambda^1 \pi^{00} - \lambda^2 \pi^{01} - \lambda^3 \pi^{11} \right], \quad (2.52)$$

mientras que el generador de las transformaciones de norma de esta acción extendida está dado por

$$G = \int d\sigma (\mu^1 \phi_1 + \mu^2 \phi_2 + \mu^3 \phi_3 + \mu^4 \phi_4 + \mu^5 \phi_5). \quad (2.53)$$

Como hemos mencionado, no todas las funciones  $\mu$  en el generador son independientes. En este caso sólo tres de ellas lo son, ya que tenemos tres constricciones primarias de primera clase. Para construir las expresiones de las ecuaciones diferenciales que satisfacen estos coeficientes, necesitamos obtener las funciones de estructura  $V_A^B(\mu^A)$ , las cuales se obtienen de la ecuación

$$\{H_c, \phi_A[\mu^A]\} = V_A^B(\mu^A)\phi_B. \quad (2.54)$$

Para la acción de Polyakov el índice  $A = \{0, \dots, 5\}$  y las funciones de estructura  $V_A^B(\mu^A)$  diferentes de cero son

$$V_1^4(\mu^1) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\mu^1, \quad (2.55)$$

$$V_2^4(\mu^2) = \frac{g_{01}}{g_{11}\sqrt{-g}}\mu^2, \quad (2.56)$$

$$V_2^5(\mu^2) = \frac{1}{g_{11}}\mu^2, \quad (2.57)$$

$$V_3^4(\mu^3) = -\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}^2} + \frac{g_{00}}{2g_{11}\sqrt{-g}}\right)\mu^3, \quad (2.58)$$

$$V_3^5(\mu^3) = -\frac{g_{01}}{g_{11}^2}\mu^3, \quad (2.59)$$

$$V_4^4(\mu^4) = (\partial_\sigma\mu^4 - \mu^4\partial_\sigma)\left(\frac{g_{01}}{g_{11}}\right), \quad (2.60)$$

$$V_4^5(\mu^4) = (\partial_\sigma\mu^4 - \mu^4\partial_\sigma)\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\right), \quad (2.61)$$

$$V_5^4(\mu^5) = (\partial_\sigma\mu^5 - \mu^5\partial_\sigma)\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\right), \quad (2.62)$$

$$V_5^5(\mu^5) = (\partial_\sigma\mu^5 - \mu^5\partial_\sigma)\left(\frac{g_{01}}{g_{11}}\right). \quad (2.63)$$

Las dos ecuaciones diferenciales que satisfacen estos coeficientes están dadas por [28]

$$\frac{1}{g_{11}}\mu^2 - \frac{g_{01}}{g_{11}^2}\mu^3 = \frac{D\mu^5}{Dt} + \{\mu^5, H_T\} + (\mu^5\partial_\sigma - \partial_\sigma\mu^5)\left(\frac{g_{01}}{g_{11}}\right) + (\mu^4\partial_\sigma - \partial_\sigma\mu^4)\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\right) \quad (2.64)$$

y

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\mu^1 + \frac{g_{01}}{g_{11}\sqrt{-g}}\mu^2 - \left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}^2} + \frac{g_{00}}{2g_{11}\sqrt{-g}}\right)\mu^3 \\ & = \frac{D\mu^4}{Dt} + \{\mu^4, H_T\} + (\mu^4\partial_\sigma - \partial_\sigma\mu^4)\left(\frac{g_{01}}{g_{11}}\right) + (\mu^5\partial_\sigma - \partial_\sigma\mu^5)\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Si elegimos los tres coeficientes independientes  $\mu^3$ ,  $\mu^4$  y  $\mu^5$  en términos de los tres parámetros independientes  $\eta^0$ ,  $\eta^1$  y  $\omega$  en la forma

$$\mu^3 = \eta^i\partial_i g_{11} + 2\partial_1\eta^i g_{i1} + 2\omega g_{11}, \quad (2.66)$$



$$\mu^4 = \eta^0 \frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}, \quad (2.67)$$

$$\mu^5 = \eta^0 \frac{g_{01}}{g_{11}} + \eta^1, \quad (2.68)$$

obtenemos la expresión de  $\mu^1$  y  $\mu^2$  en términos de  $\eta^i$  y  $\omega$  a través de las ecuaciones diferenciales (2.64) y (2.65)

$$\begin{aligned} \mu^1 &= \eta^i \partial_i g_{00} + 2\partial_0 \eta^i g_{i0} + 2\omega g_{00}, \\ \mu^2 &= \eta^i \partial_i g_{01} + \partial_0 \eta^i g_{i1} + \partial_1 \eta^i g_{i0} + 2\omega g_{01}. \end{aligned}$$

Se completa así la expresión del generador de las transformaciones de norma (2.53). Utilizando este generador podemos recobrar la expresión de las transformaciones de norma infinitesimales (2.31) en la hoja de mundo para la acción de Polyakov, a través de un método canónico

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \{X^\mu, G\} = \eta^i \partial_i X^\mu, \\ \delta g_{ij} &= \{g_{ij}, G\} = \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}. \end{aligned}$$

Nótese que este análisis está de acuerdo con lo que hemos mencionado al principio de la sección. Para la acción de Polyakov se tienen tres constricciones primarias de primera clase con lo cual en las transformaciones de norma hay tres funciones arbitrarias del tiempo que son  $\eta^i$  y  $\omega$ . Como se tiene dos constricciones secundarias entonces dos de estas funciones arbitrarias aparecen en las transformaciones de norma junto con sus derivadas temporales.

Por último mencionemos que es más conveniente hacer el análisis canónico de la acción de Polyakov en las coordenadas  $ADM^2$ , estas coordenadas simplifican los cálculos y son más adecuadas geoméricamente. Sin embargo por completez, se hizo el análisis bosónico en las variables originales, dejando la introducción de las variables ADM para el análisis canónico del caso supersimétrico.

## 2.5 Supercuerdas

### 2.5.1 SUSY(N)/SO(D - 1, 1) como espacio de fondo

Los modelos  $\sigma$  heredan sus simetrías internas del espacio de fondo. Por ejemplo, la cuerda de Nambu-Goto (2.13) es invariante de Poincaré (globalmente), porque el espacio de fondo es, en ese caso, el espacio-tiempo de Minkowski ordinario.

Para construir un modelo  $\sigma$  que sea invariante bajo la extensión supersimétrica del grupo de Poincaré, necesitamos un espacio de fondo sobre el cual actúe este supergrupo. El

<sup>2</sup>Estas coordenadas son discutidas en el apéndice B.

espacio apropiado resulta ser el espacio cociente del grupo de supersimetría o “supergrupo” con  $N$  supersimetrías ( $SUSY(N)$ ) y el subgrupo de Lorentz  $SO(D-1, 1)$ . Esta variedad es isomorfa al “subgrupo” de  $SUSY(N)$  que se obtiene al tomar las translaciones y las  $N$  transformaciones de supersimetría.

La supervariiedad  $SUSY(N)/SO(D-1, 1)$  puede ser parametrizada por  $D$  coordenadas  $X^\mu$  (las cuales satisfacen reglas de conmutación) y  $N$  espinores  $\theta^a$  (los cuales satisfacen reglas de anticonmutación) que por simplicidad supondremos, satisfacen la condición de Majorana. Desde luego las coordenadas  $X^\mu$  son las coordenadas del espacio-tiempo de Minkowski.

La acción del supergrupo  $SUSY(N)$  sobre  $SUSY(N)/SO(D-1, 1)$  está dada por las *translaciones*

$$\begin{aligned} X^\mu &\rightarrow X^\mu + a^\mu, \\ \theta^a &\rightarrow \theta^a, \end{aligned} \tag{2.69}$$

y las *supersimetrías*

$$\begin{aligned} X^\mu &\rightarrow X^\mu + i \sum_{a=1}^N \bar{\epsilon}^a \Gamma^\mu \theta^a, \\ \theta^a &\rightarrow \theta^a + \epsilon^a, \end{aligned} \tag{2.70}$$

donde  $\epsilon^a$  son  $N$  parámetros espinoriales reales arbitrarios y  $\Gamma^\mu$  son las matrices  $\Gamma$  en  $D$  dimensiones<sup>3</sup>. De manera adicional, las variables  $X^\mu$  y  $\theta^a$  transforman como vectores y espinores respectivamente bajo rotaciones de Lorentz. Uno puede construir fácilmente formas invariantes para las transformaciones (2.69) y (2.70). Estas son

$$\Pi^\mu = dX^\mu - i\bar{\theta}\Gamma^\mu d\theta, \tag{2.71}$$

y

$$d\theta. \tag{2.72}$$

Un mapeo de la hoja de mundo  $\xi^i \equiv (\tau, \sigma)$  a la supervariiedad  $SUSY(N)/SO(D-1, 1)$  queda definida al dar  $X^\mu$  y  $\theta^a$  como funciones de  $\xi^i$

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma), \quad \theta^a = \theta^a(\tau, \sigma). \tag{2.73}$$

El “pullback” de una forma diferencial de la variedad  $SUSY(N)/SO(D-1, 1)$  sobre el espacio-tiempo de dos dimensiones, se obtiene al reemplazar  $dX^\mu$  por  $\partial_i X^\mu d\xi^i$  y  $d\theta^a$  por  $\partial_i \theta^a d\xi^i$ .

<sup>3</sup>Nuestras convenciones son mostradas en el apéndice C

## 2.5.2 Acciones invariantes

Con el objetivo de construir una acción invariante consideremos primeramente el término cinético, el cual es cuadrático en las derivadas

$$S_1[X^\mu, \theta^a, g_{ij}] = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu}, \quad (2.74)$$

donde estamos tomando

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}^a \Gamma^\mu \partial_i \theta^a, \quad (2.75)$$

( $\Pi^\mu = \Pi_i^\mu d\xi^i$ ). En esta expresión el índice  $a$  está sumado sobre todas las supersimetrías. La forma  $\Pi^\mu$  es invariante bajo translaciones y transformaciones de supersimetría y más aún, rota como un vector ante transformaciones de Lorentz, de tal manera que la acción  $S_1$  es invariante SUSY.

Al principio se pensó que la acción (2.74) era la acción supersimétrica deseada. Sin embargo, ésta no posee suficiente libertad de norma para ser linealizada en  $\dot{\theta}$  (es invariante solamente bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo) o a nivel de grados de libertad se puede mostrar que ésta tiene el doble de grados de libertad fermiónicos de los que se necesitan para que el espectro sea supersimétrico. Debido a su no linealidad, la teoría cuántica no ha sido desarrollada. Todo lo que se puede decir es que esta acción no corresponde a la de la supercuerda libre. Esto significa que la expresión (2.74) es sólo una pieza de la acción completa.

Otra posibilidad es añadir a la expresión (2.74) términos cuadráticos en  $\partial_i \theta^a$  tales como  $b_{ab} \partial_i \theta^a \partial_j \theta^b \sqrt{-g} g^{ij}$ . Sin embargo, tales términos llevan a ecuaciones espinoriales de segundo orden que implican la existencia de estados de norma negativa en el espectro. Por tanto esta posibilidad es también descartada.

Esto nos deja con la posibilidad de los llamados "términos de Wess-Zumino" [42, 43], los cuales son siempre considerados en los modelos  $\sigma$ . Estos términos son invariantes SUSY hasta una divergencia total, y así, las ecuaciones de movimiento son invariantes. Más aún, estos son también cuadráticos en las derivadas de los campos y por tanto "compiten" con el término cinético  $S_1$ .

El lagrangiano de Wess-Zumino  $L_2$  se construye determinando primero las diferentes tres formas cerradas  $H_3$  en el espacio cociente  $SUSY(N)/SO(D-1,1)$  que sean invariante bajo transformaciones de SUSY. Estas tres formas invariantes están dadas por los productos exteriores de las formas invariantes (2.71) y (2.72)

$$H_3 = \frac{1}{3!} \Pi^A \Pi^B \Pi^C H_{CBA}, \quad (2.76)$$

donde los índices  $A, B$  y  $C$  corren sobre las uno formas (2.71) y (2.72) mientras que las  $H_{CBA}$  son constantes. La tres forma (2.76) es invariante de Lorentz si las constantes  $H_{CBA}$  son las componentes de una cantidad apropiada que sea covariante de Lorentz. La única cantidad es  $(\Gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$ , donde  $C$  es la matriz de conjugación de carga y  $M$  es una matriz simétrica imaginaria pura en el espacio interno. Aquí,  $\alpha$  y  $\beta$  son índices

espinoriales.

La matriz  $M_{ab}$  puede ser diagonalizada por una rotación en el espacio interno de las coordenadas  $\theta$ . Así, se puede considerar sin pérdida de generalidad que  $M_{ab} = 0$  para  $a \neq b$

El siguiente paso en la construcción consiste en pedir que  $H_3$  sea cerrada,  $dH_3 = 0$ . Explícitamente se tiene que

$$dH_3 = M_{11}(d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma^\mu d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma_\mu d\theta^1) + (M_{11} + M_{22})(d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma^\mu d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^2 \wedge \Gamma_\mu d\theta^2) \\ + \text{términos similares con } (a,b) = (2,2), (3,3), (1,3), \text{ etc.} \quad (2.77)$$

Los "términos diagonales" en esta ecuación pueden eliminarse si utilizamos la identidad

$$\Gamma_\mu \theta_1 \bar{\theta}_2 \Gamma^\mu \theta_3 + \Gamma_\mu \theta_2 \bar{\theta}_3 \Gamma^\mu \theta_1 + \Gamma_\mu \theta_3 \bar{\theta}_1 \Gamma^\mu \theta_2 = 0 \quad (2.78)$$

la cual es válida para espinores de Majorana-Weyl en  $D = 10$  y espinores de Majorana en  $D = 3$  y  $4$  (esta identidad también es válida para espinores de Weyl en  $D = 6$ , en cuyo caso se puede hacer un análisis similar al que aquí se hace). Sin esta identidad los términos  $(d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma^\mu d\theta^1) \wedge (d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma_\mu d\theta^1)$  no se anularían, la condición  $dH_3 = 0$  impondría entonces  $M_{11} = 0$  (y  $M_{22} = M_{33} = \dots = 0$ ) lo cual implicaría  $H_3 = 0$ . Por tanto, la posibilidad de construir acciones de Wess-Zumino no triviales existe únicamente en dimensiones particulares del espacio-tiempo, con espinores particulares. En lo que sigue consideraremos casos en los cuales la identidad (2.78) es válida.

Si sólo se tiene una supersimetría ( $N = 1$ ), entonces la identidad (2.78) es suficiente para garantizar  $dH_3 = 0$  y no hay condición sobre  $M_{ab}$ . Para  $N \geq 2$ , los términos mezclados en la expresión (2.77) se cancelan si y sólo si

$$M_{aa} + M_{bb} = 0, \quad a \neq b.$$

Esta condición elimina los casos  $N > 2$ , para los cuales se encuentra que  $M_{ab} = 0$  para todo  $a$  y  $b$ . La única posibilidad que queda es  $N = 2$ , con  $M_{11} = -M_{22}$ .

Así, la búsqueda de tres formas invariantes cerradas lleva a los siguientes dos casos

$$N = 1, \quad H_3 = iM\Pi^\mu \wedge d\bar{\theta} \wedge \Gamma_\mu d\theta, \quad (2.79)$$

y

$$N = 2, \quad H_3 = iM(\Pi^\mu \wedge d\bar{\theta}^1 \wedge \Gamma_\mu d\theta^1 - \Pi^\mu \wedge d\bar{\theta}^2 \wedge \Gamma_\mu d\theta^2), \quad (2.80)$$

junto con los valores particulares para la dimensión del espacio-tiempo, mencionados anteriormente. La forma  $H_3$  además de ser cerrada, es también exacta ( $H_3 = dB_2$ ) con

$$M^{-1}B_2 = -idX^\mu \wedge (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu d\theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu d\theta^2) + \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu d\theta^1 \wedge \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu d\theta^2, \quad (2.81)$$

para  $N = 2$ . Para  $N = 1$ , simplemente se omite el término  $\theta^2$  en esta ecuación.

A pesar de que  $H_3$  es invariante bajo SUSY, la dos forma  $B_2$ , la cual contiene las uno formas  $dX^\mu$ , es invariante sólo hasta una derivada total ( $\delta H_3 = 0$  implica  $\delta B_2 = d(\text{algo})$ ).

Este es el término de Wess-Zumino. Su "pullback" sobre la hoja de mundo da como resultado la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_2$ , donde

$$M^{-1}\mathcal{L}_2 = -ie^{ij}\partial_i X^\mu \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_j \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2 \right) + \epsilon^{ij} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_i \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2, \quad (2.82)$$

(para  $N = 2$ ), el cual es invariante SUSY hasta una divergencia total. Nuevamente, la teoría  $N = 1$  puede ser pensada como una truncación del caso  $N = 2$ . En esta ecuación  $\epsilon^{ij}$  es el tensor antisimétrico de Levi-Civita ( $\epsilon^{01} = -1$ ).

Nótese que en el espacio-tiempo de diez dimensiones, es posible tomar espinores de Majorana-Weyl  $\theta^1$  y  $\theta^2$  de igual quiralidad u opuesta, dado que uno obtiene  $dH_3 = 0$  en ambos casos.

Finalicemos esta construcción señalando que aquí hemos considerado como término cinético, la extensión supersimétrica de la acción de Polyakov, sin embargo, se puede tomar como término cinético la extensión supersimétrica de cualquiera de las acciones bosónicas que hemos discutido, y para construir las acciones supersimétricas correspondientes se debe añadir los mismos términos de Wess-Zumino que hemos encontrado.

### 2.5.3 La acción de Green-Schwarz y sus simetrías

Cuando el valor del escalar  $M = \pm T$ , el lagrangiano  $L = L_1 + L_2$  tiene propiedades importantes. Éste no sólo es invariante ante transformaciones de coordenadas, sino también bajo un tipo diferente de simetría local [7], la cual involucra funciones arbitrarias que son simultáneamente, espinores en el espacio-tiempo y escalares en la hoja de mundo. En esta subsección analizaremos las propiedades de la acción de supercuerdas con dos supersimetrías. Para ello nos restringiremos al caso interesante en teoría de cuerdas que es el de  $D = 10$ .

De acuerdo a la discusión hecha en la subsección anterior tenemos que la expresión adecuada de la acción supersimétrica con  $N = 2$  es

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \left( \sqrt{-g} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} + 2i\epsilon^{ij} \Pi_i^\mu \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_j \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2 \right) + 2\epsilon^{ij} \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_i \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2 \right), \quad (2.83)$$

donde  $\theta^1$  y  $\theta^2$  son espinores de Majorana-Weyl y  $\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_i \theta^1 - i\bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_i \theta^2$ . Esta acción es conocida con el nombre de acción de Green-Schwarz. Sus simetrías globales (bosónicas y fermiónicas) están determinadas por las simetrías de Killing del espacio-tiempo supersimétrico de 10 dimensiones. Para el caso plano, ellas corresponden a las transformaciones de super Poincaré

$$\delta X^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu - i\bar{\theta}^a \Gamma^\mu \epsilon^a, \quad (2.84)$$

$$\delta \theta^a = \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \theta^a + \epsilon^a. \quad (2.85)$$

donde  $a^\mu$  y  $\epsilon^a$  son parámetros constantes que corresponden respectivamente a traslaciones y transformaciones de supersimetría, mientras que  $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$  son las matrices de

Lorentz. Por otro lado, las simetrías bosónicas locales están asociadas con la invariancia bajo reparametrización de las coordenadas del volumen de mundo a lo largo de un campo vectorial bosónico  $\eta^i(\xi)$ , infinitesimalmente estas son

$$\delta X^\mu = \eta^i \partial_i X^\mu, \quad (2.86)$$

$$\delta \theta^\alpha = \eta^i \partial_i \theta^\alpha, \quad (2.87)$$

$$\delta g_{ij} = \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}, \quad (2.88)$$

la última ecuación puede escribirse en forma alternativa como

$$\delta(\sqrt{-g}g^{ij}) = \partial_k (\eta^k \sqrt{-g}g^{ij}) - \sqrt{-g}g^{kj} \partial_k \eta^i - \sqrt{-g}g^{ik} \partial_k \eta^j, \quad (2.89)$$

donde la cantidad  $\sqrt{-g}g^{ij}$  es invariante de Weyl.

La acción es también invariante ante las siguientes transformaciones fermiónicas locales conocidas como simetría  $\kappa$

$$\delta X^\mu = i\bar{\theta}^1 \Gamma^\mu (1 + \Gamma) \kappa^1 + i\bar{\theta}^2 \Gamma^\mu (1 - \Gamma) \kappa^2, \quad (2.90)$$

$$\delta \theta^1 = (1 + \Gamma) \kappa^1, \quad (2.91)$$

$$\delta \theta^2 = (1 - \Gamma) \kappa^2, \quad (2.92)$$

$$\delta(\sqrt{-g}g^{ij}) = -4i\delta\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_k \theta^1 g^{k(i} \epsilon^{j)\alpha} \Pi_\alpha^\mu + 4i\delta\bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_k \theta^2 g^{k(i} \epsilon^{j)\alpha} \Pi_\alpha^\mu, \quad (2.93)$$

donde  $\kappa^1(\xi)$  y  $\kappa^2(\xi)$  son parámetros fermiónicos infinitesimales, los cuales son, espinores en el espacio-tiempo de dimensión  $D = 10$  y escalares en la hoja de mundo de dos dimensiones (los paréntesis en los índices de la hoja de mundo en (2.93) significan que dichos índices están simetrizados). La matriz gamma está definida por

$$\Gamma_\beta^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu (\Gamma_{\mu\nu})_\beta^\alpha, \quad (2.94)$$

y satisface la relación

$$1 - \Gamma^2 = \frac{1}{2(\sqrt{-g})^2} \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} (\Pi_k^\mu \Pi_{l\mu} + g_{kl}) (\Pi_i^\nu \Pi_{j\nu} - g_{ij}). \quad (2.95)$$

La variación de la acción (2.83) está dada por la expresión

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^2 \xi \left[ -\frac{T}{2} \delta(\sqrt{-g}g^{ij}) (\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - g_{ij}) + \partial_i P_\mu^i \delta X^\mu \right. \\ \left. + i\delta\bar{\theta}^\alpha \left( 2T\sqrt{-g}g^{ij} (1 + (-1)^\alpha \Gamma) \Gamma_\mu \partial_i \theta^\alpha \Pi_j^\mu + \Gamma^\mu \theta^\alpha \partial_i P_\mu^i \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^\alpha 2T\Gamma_\mu \partial_i \theta^\alpha g^{ik} \epsilon^{jl} (\Pi_k^\nu \Pi_{l\nu} - g_{kl}) \Pi_j^\mu \right) \right. \\ \left. - \partial_i (P_\mu^i \delta X^\mu + \delta\bar{\theta}^\alpha (i\Gamma^\mu \theta^\alpha P_\mu^i + TS^{\alpha i})) \right], \quad (2.96) \end{aligned}$$

donde

$$P_\mu^i \equiv T\sqrt{-g}g^{ij} \Pi_j^\mu - iT\epsilon^{ij} (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_j \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2), \quad (2.97)$$

$$S^{1i} \equiv i\epsilon^{ij} \Gamma_\mu \theta^1 (\partial_j X^\mu - i\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_j \theta^1), \quad (2.98)$$

$$S^{2i} \equiv -i\epsilon^{ij} \Gamma_\mu \theta^2 (\partial_j X^\mu - i\bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_j \theta^2). \quad (2.99)$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos  $g_{ij}$ ,  $X^\mu$ ,  $\theta^1$  y  $\theta^2$  se siguen de la variación anterior y están dadas respectivamente por

$$\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - g_{ij} = 0, \quad (2.100)$$

$$\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}\Pi_{j\mu}) + i\varepsilon^{ij}(\partial_i\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_j\theta^1 - \partial_i\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_j\theta^2) = 0, \quad (2.101)$$

$$\left((1-\Gamma)\Gamma_\mu\partial_i\theta^1\right)_\alpha g^{ij}\Pi_j^\mu = 0, \quad (2.102)$$

$$\left((1+\Gamma)\Gamma_\mu\partial_i\theta^2\right)_\alpha g^{ij}\Pi_j^\mu = 0, \quad (2.103)$$

bajo las siguientes condiciones de borde para la cuerda cerrada (es usual tomar el rango de la variable  $\sigma$  en el intervalo  $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ , para cuerdas cerradas)

$$P_\mu^\sigma(\tau, 0) = P_\mu^\sigma(\tau, 2\pi), \quad (2.104)$$

$$S^{a\sigma}(\tau, 0) = S^{a\sigma}(\tau, 2\pi), \quad \text{con } a = 1, 2, \quad (2.105)$$

y para la cuerda abierta (es usual tomar el rango de la variable  $\sigma$  en el intervalo  $0 \leq \sigma \leq \pi$ , para cuerdas abiertas)

$$P_\mu^\sigma(\tau, 0) = P_\mu^\sigma(\tau, \pi) = 0, \quad (2.106)$$

$$S^{a\sigma}(\tau, 0) = S^{a\sigma}(\tau, \pi) = 0, \quad \text{con } a = 1, 2. \quad (2.107)$$

A menudo se toma una condición de frontera más fuerte para la coordenada fermiónica en el caso de la cuerda abierta, esta es

$$\theta^1 - \theta^2 = 0, \quad (2.108)$$

en lugar de (2.107). Esta condición de borde es consistente si el modelo está definido, por ejemplo, por una expansión en modos que satisfaga (2.108) idénticamente. En tal caso sólo aparece la suma de dos condiciones de frontera (2.107) y ésta es satisfecha por (2.108) si se satisface también

$$\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^2 = 0,$$

debido a la expresión explícita de  $S^{a\sigma}$  (2.98) y (2.99). La condición de frontera (2.97) se reduce en este caso a

$$\Pi_\sigma^\mu(\tau, 0) = \Pi_\sigma^\mu(\tau, \pi) = 0. \quad (2.109)$$

En lo que sigue tomaremos a (2.108) y (2.109) como las condiciones de frontera de la cuerda abierta. Nótese que debido a (2.108),  $\theta^1$  y  $\theta^2$  tienen necesariamente la misma quiralidad para una cuerda abierta.

Las transformaciones (2.86)-(2.93) requieren que

$$\int d^2\xi \partial_i(\eta^i \mathcal{L}) = 0,$$

$$\int d^2\xi \partial_i([(1+(-1)^A\Gamma)\kappa^A]^\alpha S_\alpha^{iA}) = 0.$$

lo cual restringe los parámetros  $\eta$  y  $\kappa^A$  en la frontera.

## 2.5.4 Tipos de cuerdas

Antes de pasar al análisis canónico de la supercuerda, enlistemos los cinco diferentes tipos de supercuerdas consistentes (libres de fantasmas y anomalías) que existen.

Hemos mencionado que en  $D = 10$  las coordenadas  $\theta$  en la acción de la supercuerda deben ser espinores de Majorana-Weyl. Esto significa en particular que a  $\theta^1$  y  $\theta^2$  se les debe asignar quiralidad definida.

En general, un espinor de Dirac en 10 dimensiones tiene 32 componentes complejas. Imponiendo la condición de que el espinor sea real (Majorana) se tiene un espinor de 32 componentes reales y al pedir que el espinor tenga un valor propio definido bajo el operador quiral

$$\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{D+1}), \quad \text{donde } \Gamma_{D+1} \equiv \Gamma_0 \cdots \Gamma_{D-1}, \quad (2.110)$$

el número de componentes se reduce a la mitad, de manera tal que un espinor de Majorana-Weyl en 10 dimensiones tiene 16 componentes reales  $\theta_+ \equiv \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{D+1})\theta$  y  $\theta_- \equiv \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{D+1})\theta$ .

El significado de ser espinores izquierdos o derechos es una convención, sin embargo, hay dos situaciones que son físicamente diferentes. Una está dada por elegir a los espinores  $\theta^1$  y  $\theta^2$  con la misma quiralidad y la otra es elegirlos con quiralidad diferente. En el caso de *cuerdas cerradas* la única condición de contorno necesaria, es imponer periodicidad en la coordenada  $\sigma$  de la hoja de mundo. Esto es posible en ambos casos, dado que esta condición no relaciona a  $\theta^1$  y  $\theta^2$ . Por otro lado, para *cuerdas abiertas*  $\theta^1$  y  $\theta^2$  deben ser igualados en los extremos de la cuerda. Dado que un espinor izquierdo no puede ser igual a uno derecho, sólo se tiene una posibilidad en este caso y es que  $\theta^1$  y  $\theta^2$  tengan la misma quiralidad. Ahora bien, no es posible construir una teoría de cuerdas consistentes que involucre sólo cuerdas abiertas, dado que se debe permitir que los extremos de dos cuerdas abiertas puedan unirse, lo cual da origen a cuerdas cerradas. A diferencia de las cuerdas abiertas, es posible construir teorías de cuerdas que sólo involucren cuerdas cerradas, de manera más precisa se tienen los siguientes tipos de supercuerdas

### Tipo I

La teoría de supercuerdas *tipo I* está basada en supercuerdas abiertas. Parte de la motivación de este nombre se debe a que las condiciones de frontera de la cuerda abierta reducen la supersimetría del espacio-tiempo a  $N = 1$ . En una teoría de cuerdas abiertas es posible añadir invariancia de norma en la teoría al introducir grados de libertad no dinámicos en los extremos de la cuerda, llamados factores de Chan-Paton. Matemáticamente éstos son representados por un grupo de Lie. Cualquier elección del grupo es consistente clásicamente pero cuánticamente la única elección libre de anomalías está dada por el grupo  $SO(32)$ . Así, la teoría de supercuerdas tipo I consiste de cuerdas abiertas no orientadas con grupo de norma  $SO(32)$  que interactúan y cuerdas cerradas que pueden ser rotas.

Si consideramos ahora teorías basadas únicamente en cuerdas cerradas (irrompibles) tenemos:



### Tipo IIA

Si  $\theta^1$  y  $\theta^2$  tienen quiralidad opuesta la teoría resultante involucra necesariamente cuerdas orientadas, dado que  $\theta^1$  describe modos en una dirección a lo largo de la cuerda mientras que  $\theta^2$  describe modos que se propagan en la dirección opuesta. Esta teoría tiene dos supersimetrías conservadas de quiralidad opuesta en  $D = 10$ . La teoría con dos supercargas conservadas de quiralidad opuesta se le conoce con el nombre de *tipo IIA* y es no quiral.

### Tipo IIB

La posibilidad restante es considerar una teoría de supercuerdas cerrada con dos coordenadas  $\theta$  de la misma quiralidad. En este caso se tiene la posibilidad de simetrizar los modos izquierdos y derechos para definir una teoría de cuerdas cerradas no orientadas, pero también pueden no simetrizarse, lo cual nos deja con una teoría de cuerdas cerradas orientadas. En el primer caso uno cae nuevamente en el sector de cuerda cerrada de la teoría  $SO(32)$  y por consistencia, se deben incluir cuerdas abiertas  $SO(32)$  al mismo tiempo, obteniendo con esto la teoría de supercuerda tipo I. En el segundo caso, hay dos supersimetrías del espacio tiempo con la misma quiralidad. Esta es la teoría de supercuerdas *tipo IIB*, la cual es quiral.

### Cuerdas heteróticas

Puede mostrarse fácilmente que una cuerda cerrada tiene modos de oscilación que se mueven hacia la izquierda y modos de oscilación que se mueven hacia la derecha, los cuales no interactúan. La cuerda heterótica es una cuerda cerrada cuyos modos de oscilación izquierdos son puramente bosónicos y viven en un espacio de 26 dimensiones. Al compactificar este espacio a uno de 10 dimensiones, se introduce un grupo de simetría de isospín  $E_8 \otimes E_8$  o  $SO(32)$ . Por otro lado, los modos derechos viven en un espacio de 10 dimensiones y contienen la teoría supersimétrica GS o NSR. Cuando unimos estos dos diferentes sectores se obtiene una teoría consistente, libre de fantasmas, libre de anomalías y finita a un lazo, llamada la supercuerda heterótica  $E_8 \otimes E_8$  o la cuerda heterótica  $SO(32)$ .

Cada una de estas teorías es diferente de las otras, por lo que las acciones que las describen deben reflejar estas diferencias. Si se tiene sólo un fermión quiral de Majorana-Weyl  $\theta_+$  sobre la hoja de mundo, se tiene entonces una supersimetría ( $N = 1$ ), lo cual describe la cuerda heterótica. Si se tienen dos de estos espinores  $\theta_+^1$  y  $\theta_+^2$  de quiralidad opuesta, es posible combinarlos en un sólo espinor  $\theta$  de Majorana de 32 componentes con dos supersimetrías ( $N = 2$ ), esto da origen a la teoría de cuerdas IIA. Pero si los dos espinores  $\theta_+^1$  y  $\theta_+^2$  tienen la misma quiralidad, entonces se tiene la teoría de cuerdas quiral IIB con dos supersimetrías ( $N = 2$ ).

Si consideramos la acción de Green-Schwarz discutida anteriormente tenemos que para cada una de estas teorías podemos escribir el invariante global  $\Pi_4^\mu$  en la forma

$$\Pi_4^\mu = \begin{cases} \partial_i X^\mu - i\bar{\theta}_+ \Gamma^\mu \partial_i \theta_+, & \text{heterótica} \\ \partial_i X^\mu - i\bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta, & \text{IIA} \\ \partial_i X^\mu - i\delta_{ij} \bar{\theta}_+^i \Gamma^\mu \partial_i \theta_+^j, & \text{IIB} \end{cases} \quad (2.111)$$

mientras que el término de Wess-Zumino debe ser escrito en la forma

$$H_3 = \begin{cases} \Pi^\mu d\tilde{\theta}_+ \Gamma_\mu d\theta_+, & \text{heterótica} \\ \Pi^\mu d\bar{\theta} \Gamma_\mu d\theta, & \text{IIA} \\ (\sigma_x)_{ij} \Pi^\mu d\tilde{\theta}_+^i \Gamma_\mu d\theta_+^j, & \text{IIB} \end{cases} \quad (2.112)$$

donde  $\sigma_x$  es la matriz de Pauli. Considerando (2.111) y (2.112) en la acción de Green-Schwarz se obtienen las cinco diferentes teorías de supercuerdas, dado que hay dos tipos de supercuerdas heteróticas y la supercuerda tipo I puede ser derivada de la teoría tipo IIB al introducir un operador de paridad en la hoja de mundo (y sumar cuerda abiertas con grupo de norma  $SO(32)$  para cancelar las anomalías).

## 2.6 Formulación canónica de supercuerdas tipo II

En esta parte del capítulo presentaremos la formulación canónica para la acción de supercuerdas de Green-Schwarz con  $N = 2$ . El análisis es válido tanto para la teoría tipo IIA como para la tipo IIB. El caso de la cuerda heterótica  $N = 1$ , se obtiene de la eliminación de  $\theta^2$ .

### 2.6.1 Hamiltoniano y constricciones

Hemos mencionado que la diferencia entre la teoría de cuerdas IIA y IIB está en la quiralidad relativa de los espinores  $\theta^1$  y  $\theta^2$  involucrados en la acción de Green-Schwarz (2.83). En el siguiente análisis trabajaremos con los espinores sin importarnos su quiralidad relativa y al final para caer en una de las dos teorías lo único que se debe hacer es considerar esta quiralidad.

Para construir el análisis canónico asociado de la acción de Green-Schwarz, asumimos nuevamente que la topología de la hoja de mundo es de la forma  $\Sigma \times \mathfrak{R}$ , donde  $\Sigma$  es una variedad compacta de una dimensión. Con el objetivo de simplificar el análisis canónico utilizaremos las variables ADM (ver apéndice B). Lo que se hace al introducir estas variables es reemplazar las tres componentes independientes de la métrica  $g_{ij}$  de la hoja de mundo, por tres nuevas variables ( $N, N^1, \gamma_{11}$ ) a través de la relación

$$g_{00} = -N^2 \gamma_{11} + (N^1)^2 \gamma_{11}, \quad g_{01} = \gamma_{11} N^1, \quad g_{11} = \gamma_{11}. \quad (2.113)$$

Aquí  $\gamma_{11}$  es la métrica de la variedad compacta de dimensión uno. Después de escribir la acción (2.83) en términos de estas variables, calculamos los momentos canónicos asociados a los campos  $(X^\mu, \theta^{1\alpha}, \theta^{2\alpha}, N, N^1, \gamma_{11})$ . Estos son

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{T}{N} (\Pi_{0\mu} - N^1 \Pi_{\sigma\mu}) + iT (\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^2), \quad (2.114)$$

$$P_\alpha^1 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{1\alpha}} = -i \left( P^\mu + T \left( \Pi_\sigma^\mu + i\bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^2 \right) \right) \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \right)_\alpha, \quad (2.115)$$

$$P_\alpha^2 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{2\alpha}} = -i \left( P^\mu - T \left( \Pi_\sigma^\mu + i\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^1 \right) \right) \left( \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \right)_\alpha, \quad (2.116)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial L}{\partial N} \approx 0, \quad \Pi_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial N^1} \approx 0, \quad \Pi_\gamma \equiv \frac{\partial L}{\partial \gamma^{11}} \approx 0. \quad (2.117)$$

De la definición de momento tenemos dos conjuntos de constricciones fermiónicas primarias

$$F_\alpha^1 \equiv P_\alpha^1 + i \left( \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \right)_\alpha P_\mu + T S_\alpha^1 \approx 0, \quad (2.118)$$

$$F_\alpha^2 \equiv P_\alpha^2 + i \left( \bar{\theta}^2 \Gamma^\mu \right)_\alpha P_\mu + T S_\alpha^2 \approx 0, \quad (2.119)$$

y 3 constricciones bosónicas primarias (2.117). En estas ecuaciones estamos utilizando la notación

$$S_\alpha^1 \equiv i \left( \Pi_\sigma^\mu + i\bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^2 \right) \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \right)_\alpha, \quad (2.120)$$

$$S_\alpha^2 \equiv -i \left( \Pi_\sigma^\mu + i\bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^1 \right) \left( \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \right)_\alpha, \quad (2.121)$$

que no son otra cosa que las ecuaciones (2.98) y (2.99) escritas en variables canónicas.

Utilizando estas expresiones para los momentos canónicos se obtiene la expresión del hamiltoniano canónico

$$H = \int d\sigma \left( P_\mu \dot{X}^\mu + P_\alpha^1 \dot{\theta}^{1\alpha} + P_\alpha^2 \dot{\theta}^{2\alpha} - L \right) = \int d\sigma \left( N\mathcal{H} + N^1 \mathcal{H}_1 \right) \quad (2.122)$$

donde

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) (P_\mu - T S_\mu) + T \Pi_\sigma^\mu \Pi_{\sigma\mu} \right), \quad (2.123)$$

$$\mathcal{H}_1 \equiv \Pi_\sigma^\mu (P_\mu - T S_\mu), \quad (2.124)$$

y

$$S^\mu \equiv i \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^1 - \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^2 \right). \quad (2.125)$$

Considerando las constricciones primarias (2.117), (2.118) y (2.119), la expresión del hamiltoniano total está dada por

$$H_T = \int d\sigma \left( N\mathcal{H} + N^1 \mathcal{H}_1 + \bar{\Lambda}^1 F^1 + \bar{\Lambda}^2 F^2 + \lambda \Pi + \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_\gamma \Pi_\gamma \right), \quad (2.126)$$

donde las funciones  $\Lambda$  y  $\lambda$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones primarias.

El paréntesis de Poisson de dos funciones arbitrarias de las variables canónicas  $A$  y  $B$  a tiempos iguales se define en la forma

$$\{A, B\} \equiv \int d\sigma \left[ \left( (-1)^{\epsilon_A+1} \left( \frac{\delta A}{\delta \theta^{1\alpha}} \frac{\delta B}{\delta P_\alpha^1} + \frac{\delta A}{\delta \theta^{2\alpha}} \frac{\delta B}{\delta P_\alpha^2} \right) + (-1)^{\epsilon_B(1+\epsilon_A)} (A \leftrightarrow B) \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\delta A}{\delta X^\mu} \frac{\delta B}{\delta P_\mu} + \frac{\delta A}{\delta N} \frac{\delta B}{\delta \Pi} + \frac{\delta A}{\delta N^1} \frac{\delta B}{\delta \Pi_1} + \frac{\delta A}{\delta \gamma^{11}} \frac{\delta B}{\delta \Pi_{11}} - (-1)^{\epsilon_A \epsilon_B} (A \leftrightarrow B) \right) \right]. \quad (2.127)$$

Con esta definición, los paréntesis de Poisson básicos están dados por

$$\begin{aligned} \{X^\mu(\sigma), P_\nu(\sigma')\} &= \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), & \{N(\sigma), \Pi(\sigma')\} &= \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{N^1(\sigma), \Pi_1(\sigma')\} &= \delta(\sigma - \sigma'), & \{\gamma^{11}(\sigma), \Pi_\gamma(\sigma')\} &= \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\theta^{1\alpha}(\sigma), P_\beta^1(\sigma')\} &= \delta_\beta^\alpha \delta(\sigma - \sigma'), & \{\theta^{2\alpha}(\sigma), P_\beta^2(\sigma')\} &= \delta_\beta^\alpha \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Empleando el método de Dirac, tenemos que la evolución temporal de las constricciones fermiónicas impone restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $\Lambda$ . Esto se ve de la siguiente manera. La evolución temporal de las constricciones fermiónicas es

$$\dot{F}_\alpha^1[f] = +2i \int d\sigma f (P^\mu - TS^\mu + T\Pi_\sigma^\mu) \left( (N + N_1)(\Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^1)_\alpha - (\Gamma_\mu \Lambda^1)_\alpha \right), \quad (2.129)$$

$$\dot{F}_\alpha^2[f] = -2i \int d\sigma f (P^\mu - TS^\mu - T\Pi_\sigma^\mu) \left( (N - N_1)(\Gamma_\mu \partial_\sigma \theta^2)_\alpha + (\Gamma_\mu \Lambda^2)_\alpha \right), \quad (2.130)$$

al pedir que estas constricciones se mantengan en el tiempo  $\dot{F}_\alpha^i[f] \approx 0$ , obtenemos dos conjuntos de ecuaciones lineales no homogéneas en las incógnitas  $\Lambda^{i\alpha}$ . La solución más general a estas ecuaciones son

$$\dot{F}_\alpha^1[f] \approx 0 \Rightarrow \Lambda^{1\alpha} = (N^1 + N) \partial_\sigma \theta^{1\alpha} + \Lambda^{1\alpha}, \quad (2.131)$$

$$\dot{F}_\alpha^2[f] \approx 0 \Rightarrow \Lambda^{2\alpha} = (N^1 - N) \partial_\sigma \theta^{2\alpha} + \Lambda^{2\alpha} \quad (2.132)$$

donde los términos  $(N^1 + N) \partial_\sigma \theta^{1\alpha}$  y  $(N^1 - N) \partial_\sigma \theta^{2\alpha}$  son una solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y  $\Lambda^{i\alpha}$  es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$(P^\mu - TS^\mu + T\Pi_\sigma^\mu) (\Gamma_\mu \Lambda^1)_\alpha \approx 0, \quad (2.133)$$

$$(P^\mu - TS^\mu - T\Pi_\sigma^\mu) (\Gamma_\mu \Lambda^2)_\alpha \approx 0. \quad (2.134)$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos la matriz  $\bar{\Gamma}$  definida por

$$\bar{\Gamma}^\alpha_\beta = \frac{1}{2\sqrt{-h}} \varepsilon^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu (\Gamma_{\mu\nu})^\alpha_\beta, \quad (2.135)$$

la cual satisface  $\bar{\Gamma}^2 = 1$  ( $h \equiv \det \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \eta_{\mu\nu}$ ). Esta matriz difiere de la matriz  $\Gamma$  definida en (2.94), únicamente por el término del denominador y son iguales modulo la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca (2.100). En términos de las variables canónicas esta matriz se reescribe en la forma

$$\bar{\Gamma} = -\frac{1}{\sqrt{-h}} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\sigma^\nu \Gamma_{\mu\nu}, \quad (2.136)$$

con  $h = (P_\mu - TS_\mu) (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\sigma^2 - \mathcal{H}_1^2$ , y en términos de esta matriz las ecuaciones homogéneas (2.131) y (2.132) se reescriben respectivamente en la forma

$$\left( \Gamma^\mu (1 - \bar{\Gamma}) \Lambda^1 \right)_\alpha \approx 0, \quad (2.137)$$

$$\left( \Gamma^\mu (1 + \bar{\Gamma}) \Lambda^2 \right)_\alpha \approx 0. \quad (2.138)$$

La solución más general a estas ecuaciones está dada por una combinación lineal de las funciones arbitrarias  $\lambda^{\alpha A}$

$$(\Lambda^1)^\alpha = \left( \frac{1}{2}(1 + \bar{\Gamma})\lambda^1 \right)^\alpha, \quad (2.139)$$

$$(\Lambda^2)^\alpha = \left( \frac{1}{2}(1 - \bar{\Gamma})\lambda^2 \right)^\alpha. \quad (2.140)$$

Si sustituimos las expresiones de los multiplicadores de Lagrange (2.131) y (2.132) con  $\Lambda^1$  y  $\Lambda^2$  dados por (2.139) y (2.140), en la expresión del hamiltoniano total (2.126), obtenemos el hamiltoniano total de primera clase

$$H_T = \int d\sigma \left[ N(\mathcal{H} + \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F^1 - \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F^2) + N^1(\mathcal{H}_1 + \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F^1 + \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F^2) \right. \\ \left. + \lambda^1 F_+^1 + \lambda^2 F_-^2 + \lambda \Pi + \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_\gamma \Pi_\gamma \right]. \quad (2.141)$$

donde  $F_+^{1\alpha} \equiv \frac{1}{2}((1 + \bar{\Gamma})F^1)^\alpha$  y  $F_-^{2\alpha} \equiv \frac{1}{2}((1 - \bar{\Gamma})F^2)^\alpha$  son claramente constricciones de primera clase en virtud de (2.133) y (2.134). La evolución temporal de las constricciones primarias  $\Pi$  y  $\Pi_1$  generadas por este hamiltoniano de primera clase, implica las constricciones secundarias siguientes

$$\dot{\Pi}[f] = 0 \Rightarrow \mathcal{T} \equiv \mathcal{H} + \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F^1 - \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F^2 \approx 0, \quad (2.142)$$

$$\dot{\Pi}_1[f] = 0 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{H}_1 + \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F^1 + \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F^2 \approx 0, \quad (2.143)$$

la evolución temporal de la restricción restante  $\Pi_\gamma$  no genera una nueva restricción y la evolución de las constricciones secundarias  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}_1$  no genera nuevas constricciones tampoco. Esto puede observarse al obtener que el álgebra de constricciones es cerrada.

## 2.6.2 Clasificación y álgebra de constricciones

A continuación clasificaremos adecuadamente las constricciones en constricciones de primera y segunda clase, y calcularemos su álgebra. En el apartado anterior hemos calculado el hamiltoniano total de primera clase, sin embargo, no todas las constricciones fermiónicas aparecen en este hamiltoniano, lo cual hace suponer que las constricciones fermiónicas restantes son de segunda clase y este es realmente el caso. Para hacer la clasificación completa de las constricciones necesitamos calcular el paréntesis de Poisson entre dos constricciones fermiónicas. Los paréntesis no nulos son

$$\{F_\alpha^1[f], F_\beta^1[g]\} = -2i \int d\sigma fg \left[ (P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu(1 - \alpha\bar{\Gamma}))_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + (\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( 2\mathcal{H}\Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T}\mathcal{H}_1(P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right], \quad (2.144)$$

$$\{F_\alpha^2[f], F_\beta^2[g]\} = -2i \int d\sigma fg \left[ (P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu(1 + \alpha\bar{\Gamma}))_{\alpha\beta} \right. \\ \left. - (\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( 2\mathcal{H}\Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T}\mathcal{H}_1(P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right], \quad (2.145)$$

donde el escalar  $\alpha$  está dado por

$$\alpha = \left( 1 - \frac{2}{T\Pi_\sigma^2} \mathcal{H} + \frac{1}{T^2\Pi_\sigma^2} (\mathcal{H}_1)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.146)$$

Se puede mostrar que este escalar es precisamente el factor de proporcionalidad entre las dos diferentes definiciones de la matriz gamma  $\Gamma = \alpha\bar{\Gamma}$  cuando ambas están escritas en términos de las variables canónicas. De hecho la expresión de  $\Gamma$  es

$$\Gamma = -\frac{1}{2\Pi_\sigma^2} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\sigma^\nu \Gamma_{\mu\nu}. \quad (2.147)$$

Dado que  $(1 - \bar{\Gamma})\Gamma_\mu(1 - \alpha\bar{\Gamma}) \approx 2(1 - \Gamma)$  y  $(1 + \bar{\Gamma})\Gamma_\mu(1 + \alpha\bar{\Gamma}) \approx 2(1 + \Gamma)$ , concluimos de (2.144) y (2.145) que las constricciones  $F_-^{1\alpha} \equiv \frac{1}{2}((1 - \bar{\Gamma})F^1)^\alpha$  y  $F_+^{2\alpha} \equiv \frac{1}{2}((1 + \bar{\Gamma})F^2)^\alpha$  son constricciones de segunda clase

$$\{F_-^{1\alpha}[f], F_-^{1\alpha}[g]\} \approx -2i \int d\sigma f g (P^\mu - TS^\mu) (\Gamma_\mu(1 - \Gamma))^{\alpha\beta}, \quad (2.148)$$

$$\{F_+^{2\alpha}[f], F_+^{2\alpha}[g]\} \approx -2i \int d\sigma f g (P^\mu - TS^\mu) (\Gamma_\mu(1 + \Gamma))^{\alpha\beta}. \quad (2.149)$$

Las constricciones restantes son de primera clase, la clasificación completa de las constricciones es:

*Constricciones de primera clase* ( $\Pi, \Pi_1, \Pi_\gamma, T, T_1, F_+^{1\alpha}, F_-^{2\alpha}$ ),

*Constricciones de segunda clase* ( $F_-^{1\alpha}, F_+^{2\alpha}$ ).

Esta clasificación se obtiene al calcular el álgebra de Poisson entre todas las constricciones. Si se denotan las constricciones de primera clase como  $G_r$  y las de segunda clase como  $\chi_\alpha$ , el álgebra de Poisson para sistemas con constricciones reducibles tiene la siguiente forma general

$$\begin{aligned} \{G_r, G_s\} &\approx 0, \\ \{G_r, \chi_\alpha\} &\approx 0, \\ \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} &= C_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Nótese que la supercuerda es un sistema con constricciones reducibles dado que las constricciones fermiónicas no son linealmente independientes, ya que estas satisfacen las relaciones

$$((1 + \bar{\Gamma})F_-^1)^\alpha = 0, \quad (2.151)$$

$$((1 - \bar{\Gamma})F_+^1)^\alpha = 0, \quad (2.152)$$

$$((1 - \bar{\Gamma})F_+^2)^\alpha = 0, \quad (2.153)$$

$$((1 + \bar{\Gamma})F_-^2)^\alpha = 0. \quad (2.154)$$

Las constricciones de segunda clase deben ser eliminadas introduciendo para ello el paréntesis de Dirac. Como ha sido discutido en [33] si se considera un sistema con constricciones de segunda clase linealmente dependientes, se debe satisfacer un criterio de consistencia para poder tener una teoría consistente. Este criterio establece que: *Es posible eliminar las constricciones de segunda clase  $\chi_\alpha = 0$  por el método de Dirac, si y sólo si las condiciones de reducibilidad que ellas obedecen no involucran las constricciones de primera clase  $G_a$  esto es*

$$C_a^\alpha \chi_\alpha = 0. \quad (2.155)$$

Si por otro lado, la condición de reducibilidad involucra las constricciones de primera clase, esto es, si (2.155) es reemplazada por

$$C_a^\alpha \chi_\alpha = \lambda_a^\delta G_\delta. \quad (2.156)$$

donde  $\lambda_a^\delta$  no es una combinación de las constricciones  $\chi_\alpha$ , entonces pueden surgir inconsistencias cuando las constricciones de segunda clase son eliminadas por el método de Dirac. Precisamente para satisfacer esta condición es que se ha introducido la matriz gamma (2.135). La expresión del paréntesis de Dirac entre dos funciones arbitrarias de las variables canónicas, está dado por

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} - \frac{1}{4}i \int d\sigma \{A, F_-^1\} \gamma^{-1}(P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu \{F_-^1, B\} \\ &\quad - \frac{1}{4}i \int d\sigma \{A, F_+^2\} \gamma^{-1}(P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu \{F_+^2, B\}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

y el álgebra de Dirac no nula de las constricciones es

$$\{T[f], T[g]\}^* = T_1[fg' - gf'], \quad (2.158)$$

$$\{T[f], T_1[g]\}^* = T[fg' - gf'], \quad (2.159)$$

$$\{T_1[f], T_1\}^* = T_1[fg' - gf'], \quad (2.160)$$

$$\{F_+^1[f], T_1[g]\}^* = -F_+^1[g\partial_\sigma f], \quad (2.161)$$

$$\{F_-^2[f], T_1[g]\}^* = -F_-^2[g\partial_\sigma f], \quad (2.162)$$

$$\{F_+^{1\alpha}[f], T[g]\}^* = \int d\sigma \frac{1}{2} [f(1 + \Gamma)^\alpha_\beta \partial_\sigma (gF^{1\beta})] \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} &+ fg(\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( \left( \Pi_\sigma^\nu \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T^2} (P^\nu - TS^\nu) \partial_\sigma (P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_{\mu\nu} F_+^1)^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} \left( (P_\mu - TS_\mu) \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \Pi_\sigma^\mu \partial_\sigma (P_\mu - TS_\mu) \right) (F_+^1)^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\{F_+^{2\alpha}[f], T[g]\}^* = \int d\sigma \frac{1}{2} [f(1 - \Gamma)^\alpha_\beta \partial_\sigma (gF^{2\beta})] \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} &+ fg(\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( \left( \Pi_\sigma^\nu \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T^2} (P^\nu - TS^\nu) \partial_\sigma (P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_{\mu\nu} F_+^2)^\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T} \left( (P_\mu - TS_\mu) \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \Pi_\sigma^\mu \partial_\sigma (P_\mu - TS_\mu) \right) (F_-^2)^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{F}_+^{1\alpha}[f], \mathcal{F}_+^{1\beta}[g]\}^* &= \int d\sigma i f g (\Pi_\sigma^2)^{-1} \left[ (\Gamma_\mu (1 + \Gamma))^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) \mathcal{T} - \Pi_\sigma^\mu \mathcal{T}_1 \right) \right. \\
&\quad - \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F_+^1 ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right) \\
&\quad + \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F_+^2 ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) + \Pi_\sigma^\mu \right) \\
&\quad + (\Gamma_{\mu\nu} F_+^1)^{(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma^\mu \partial_\sigma \theta)^{\beta)} \left( \frac{1}{T} (P^\nu - T S^\nu) - \Pi_\sigma^\nu \right) \\
&\quad \left. - F_+^{1(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta)^{\beta)} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right) \right], \quad (2.165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{F}_-^{2\alpha}[f], \mathcal{F}_-^{2\beta}[g]\}^* &= \int d\sigma i f g (\Pi_\sigma^2)^{-1} \left[ (\Gamma_\mu (1 - \Gamma))^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) \mathcal{T} - \Pi_\sigma^\mu \mathcal{T}_1 \right) \right. \\
&\quad - \partial_\sigma \bar{\theta}^1 F_-^1 ((1 - \Gamma) \Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right) \\
&\quad + \partial_\sigma \bar{\theta}^2 F_-^2 ((1 - \Gamma) \Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) + \Pi_\sigma^\mu \right) \\
&\quad + (\Gamma_{\mu\nu} F_-^1)^{(\alpha} ((1 - \Gamma) \Gamma^\mu \partial_\sigma \theta)^{\beta)} \left( \frac{1}{T} (P^\nu - T S^\nu) - \Pi_\sigma^\nu \right) \\
&\quad \left. - F_-^{1(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta)^{\beta)} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right) \right], \quad (2.166)
\end{aligned}$$

## 2.7 Análisis canónico de la cuerda heterótica

El análisis canónico de la cuerda heterótica se sigue de manera directa a partir del análisis que hemos hecho para la supercuerda con dos supersimetrías. Lo único que se debe hacer es eliminar el espinor  $\theta^2$  en todas las expresiones anteriores. Parece ocioso dedicarle una sección a este análisis, sin embargo, lo hacemos para comparar este análisis con el que se hará en un capítulo posterior para la super 2-brana. Como veremos, la formulación supersimétrica de  $p$ -branas con  $p > 2$ , sólo involucra una supersimetría y por tanto la formulación canónica de la supermembrana ( $p = 2$ ) es muy similar a la formulación canónica de la cuerda heterótica. No volveremos a hacer en esta sección toda la construcción para obtener la formulación canónica, más bien utilizaremos el trabajo ya hecho y escribiremos las ecuaciones más relevantes.

Como hemos discutido anteriormente la expresión de la acción para la supercuerda heterótica es

$$S[g_{ij}, X^\mu, \theta_+^\alpha] = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \left( \sqrt{-g} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} + \varepsilon^{ij} \Pi_i^\alpha \Pi_j^\beta B_{BA} \right), \quad (2.167)$$

donde

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i \bar{\theta}_+ \Gamma^\mu \partial_i \theta_+, \quad \Pi_i^\alpha = \partial_i \theta_+^\alpha, \quad (2.168)$$

y

$$B_{\mu\alpha} = i(\Gamma_\mu \theta_+)_\alpha, \quad (2.169)$$



es la única componente no nula de la dos forma  $B$ . Sustituyendo estas expresiones en la acción obtenemos

$$S_H [g_{ij}, X^\mu, \theta_+^\alpha] = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \left( \sqrt{-g} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} + 2i\epsilon^{ij} \Pi_i^\mu \bar{\theta}_+ \Gamma_\mu \partial_i \theta_+ \right). \quad (2.170)$$

Después de escribir la acción (2.170) en términos de variables ADM podemos calcular los momentos canónicos asociados a las variables  $(X^\mu, \theta_+^\alpha, N, N^i, \gamma_{11})$ . Estos son

$$P_\mu = \frac{T}{N} (\Pi_{0\mu} - N^i \Pi_{i\mu}) + T S_\mu, \quad (2.171)$$

$$P_\alpha = -i(\bar{\theta}_+ \Gamma^\mu)_\alpha P_\mu - T S_\alpha \quad (2.172)$$

$$\Pi \approx 0, \quad \Pi_1 \approx 0, \quad \Pi_\gamma \approx 0. \quad (2.173)$$

donde

$$S_\mu \equiv \Pi_\sigma^A B_{A\mu} = i\bar{\theta}_+ \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta_+, \quad (2.174)$$

$$S_\alpha \equiv \Pi_\sigma^A B_{A\alpha} = i\Pi_\sigma^\mu (\Gamma_\mu \theta_+)_\alpha. \quad (2.175)$$

De la definición de momento tenemos un conjunto de constricciones fermiónicas primarias

$$F_\alpha \equiv P_\alpha + i(\bar{\theta}_+ \Gamma^\mu)_\alpha P_\mu + T S_\alpha \approx 0, \quad (2.176)$$

y 3 constricciones bosónicas (2.173). Utilizando estas expresiones para los momentos canónicos se obtiene la expresión del hamiltoniano total

$$H_T = \int d\sigma \left( N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i + \bar{\Lambda} F + \lambda \Pi + \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_\gamma \Pi_\gamma \right), \quad (2.177)$$

donde las funciones  $\Lambda$  y  $\lambda$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones primarias y

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - T S^\mu)(P_\mu - T S_\mu) + T \Pi_\sigma^\mu \Pi_{\sigma\mu} \right), \quad (2.178)$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \Pi_\sigma^\mu (P_\mu - T S_\mu). \quad (2.179)$$

Empleando el método de Dirac, tenemos que la evolución temporal de la constricciones fermiónicas imponen restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $\Lambda$

$$\dot{F}_\alpha[f] = -2i \int d\sigma f (P^\mu - T S^\mu - T \Pi_\sigma^\mu) ((N - N_1)(\Gamma_\mu \partial_\sigma \theta_+)_\alpha + (\Gamma_\mu \Lambda)_\alpha), \quad (2.180)$$

al pedir que esta restricción se mantenga en el tiempo  $\dot{F}_\alpha[f] \approx 0$ , obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales no homogéneas en la incógnita  $\Lambda^\alpha$ . La solución más general a esta ecuación es

$$\dot{F}_\alpha[f] \approx 0 \Rightarrow \Lambda^\alpha = (N^1 - N) \partial_\sigma \theta_+^\alpha + \left( \frac{1}{2} (1 + \Gamma) \lambda \right)^\alpha, \quad (2.181)$$

donde el término  $(N^1 - N)\partial_\sigma\theta_+^\alpha$  es una solución particular a la ecuación inhomogénea y  $\frac{1}{2}(1 + \Gamma)\lambda^\alpha$  es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$(P^\mu - TS^\mu - T\Pi_\sigma^\mu)(\Gamma_\mu\Lambda)_\alpha \approx ((1 - \bar{\Gamma})\Gamma_\mu\Lambda)_\alpha \approx 0. \quad (2.182)$$

Si sustituimos la expresión del multiplicador de Lagrange (2.181) en la expresión del hamiltoniano total (2.177), obtenemos el hamiltoniano total de primera clase

$$H_T = \int d\sigma \left( N(\mathcal{H} + \partial_\sigma\bar{\theta}_+F) + N^1(\mathcal{H}_1 + \partial_\sigma\bar{\theta}_+F) + \lambda_\alpha F_+^\alpha + \lambda\Pi + \lambda_1\Pi_1 + \lambda_\gamma\Pi_\gamma \right). \quad (2.183)$$

donde  $F_+^\alpha \equiv \frac{1}{2}((1 + \bar{\Gamma})F)^\alpha$  son constricciones de primera clase en virtud de (2.182). La evolución temporal de las constricciones primarias  $\Pi$  y  $\Pi_1$  generadas por este hamiltoniano de primera clase, implica las constricciones secundarias siguientes

$$\dot{\Pi}[f] = 0 \Rightarrow \mathcal{T} \equiv \mathcal{H} + \partial_\sigma\bar{\theta}_+F \approx 0, \quad (2.184)$$

$$\dot{\Pi}_1[f] = 0 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{H}_1 + \partial_\sigma\bar{\theta}_+F \approx 0, \quad (2.185)$$

la evolución temporal de la restricción restante  $\Pi_\gamma$  no genera una nueva restricción y la evolución de las constricciones secundarias  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}_1$  no genera nuevas constricciones tampoco. La clasificación completa de las constricciones se sigue del paréntesis de Poisson entre dos constricciones fermiónicas

$$\{F_\alpha[f], F_\beta[g]\} = -2i \int d\sigma fg \left[ (P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu(1 - \alpha\bar{\Gamma}))_{\alpha\beta} + (\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( 2\mathcal{H}\Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T}\mathcal{H}_1(P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right], \quad (2.186)$$

donde el escalar  $\alpha$  está dado por (2.146), desde luego con  $S_\mu = i\bar{\theta}_+\Gamma_\mu\partial_\sigma\theta_+$ . Dado que  $(1 - \bar{\Gamma})\Gamma_\mu(1 - \alpha\bar{\Gamma}) \approx 2(1 - \Gamma)$ , concluimos de (2.186) que las constricciones  $F_-^{1\alpha} \equiv \frac{1}{2}((1 - \bar{\Gamma})F^1)^\alpha$  son constricciones de segunda clase

$$\{F_-^{1\alpha}[f], F_-^{1\beta}[g]\} \approx -2i \int d\sigma fg (P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu(1 - \bar{\Gamma}))^{\alpha\beta}, \quad (2.187)$$

Las constricciones restantes son de primera clase, la clasificación completa de las constricciones es:

*Constricciones de primera clase*  $(\Pi, \Pi_1, \Pi_\gamma, \mathcal{T}, \mathcal{T}_1, F_+^\alpha)$ ,

*Constricciones de segunda clase*  $(F_-^\alpha)$ .

Desde luego la supercuerda heterótica es también un sistema con constricciones reducibles dado que las constricciones fermiónicas no son linealmente independientes, ya que estas satisfacen las relaciones

$$((1 + \bar{\Gamma})F_-)^\alpha = 0, \quad (2.188)$$

$$((1 - \bar{\Gamma})F_+)^\alpha = 0. \quad (2.189)$$

La expresión del paréntesis de Dirac entre dos funciones arbitrarias de las variables canónicas, está dado por

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \frac{1}{4}i \int d\sigma \{A, F_-^1\} \gamma^{-1} (P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu \{F_-^1, B\}, \quad (2.190)$$

y el álgebra de Dirac no nula de las constricciones es

$$\{T[f], T[g]\}^* = T_1[fg' - gf'], \quad (2.191)$$

$$\{T[f], T_1[g]\}^* = T[fg' - gf'], \quad (2.192)$$

$$\{T_1[f], T_1\}^* = T_1[fg' - gf'], \quad (2.193)$$

$$\{F_+[f], T_1[g]\}^* = -F_+[g\partial_\sigma f], \quad (2.194)$$

$$\{F_+^\alpha[f], T[g]\}^* = \int d\sigma \frac{1}{2} [f(1 + \Gamma)^\alpha_\beta \partial_\sigma (gF^{1\beta}) \quad (2.195)$$

$$+ fg(\Pi_\sigma^2)^{-1} \left( \Pi_\sigma^\nu \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \frac{1}{T^2} (P^\nu - TS^\nu) \partial_\sigma (P^\mu - TS^\mu) \right) (\Gamma_{\mu\nu} F_+)^{\alpha} \\ + \frac{1}{T} \left( (P_\mu - TS_\mu) \partial_\sigma \Pi_\sigma^\mu - \Pi_\sigma^\mu \partial_\sigma (P_\mu - TS_\mu) \right) (F_+)^{\alpha} \Big],$$

$$\{\mathcal{F}_+^\alpha[f], \mathcal{F}_+^\beta[g]\}^* = \int d\sigma i f g (\Pi_\sigma^2)^{-1} [(\Gamma_\mu (1 + \Gamma))^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - TS^\mu) \mathcal{T} - \Pi_\sigma^\mu \mathcal{T}_1 \right) \quad (2.196)$$

$$- \partial_\sigma \bar{\theta}_+ F_+ ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu)^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - TS^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right) \\ + (\Gamma_{\mu\nu} F_+)^{\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma^\mu \partial_\sigma \theta_+)^{\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\nu - TS^\nu) - \Pi_\sigma^\nu \right) \\ - F_+^{\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma_\mu \partial_\sigma \theta_+)^{\beta} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - TS^\mu) - \Pi_\sigma^\mu \right)],$$

## 2.8 Conclusiones

En este capítulo hemos desarrollado el análisis canónico de la teoría de cuerdas y supercuerdas. En el caso bosónico analizamos tres diferentes acciones. Mostramos que la formulación canónica de la acción de Nambu-Goto tiene dos constricciones primarias de primera clase ( $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_1$ ). Estas mismas constricciones aparecen en la teoría de cuerdas descritas por las dos acciones restantes, acción de Schild y acción de Polyakov. Sin embargo, en la acción de Schild aunque  $\mathcal{H}_1$  sigue siendo una restricción primaria de primera clase,  $\mathcal{H}$  aparece como una restricción secundaria de primera clase, mientras que para la acción de Polyakov, ambas constricciones aparecen como constricciones secundarias de primera clase. Otra diferencia que se tiene en el análisis canónico de las tres acciones es el número total de constricciones. Mientras que la acción de Nambu-Goto sólo tiene dos constricciones de primera clase, la acción de Schild tiene tres constricciones de primera clase y la de Polyakov cinco constricciones de primera clase. Estas constricciones extras de la acción de Schild y Polyakov respecto a la acción de Nambu-Goto, están asociadas a los momentos

canónicos conjugados de los campos auxiliares extras que tienen estas acciones, el campo  $\varphi$  para la acción de Schild y la métrica intrínseca  $g_{ij}$  en la de Polyakov. De este resultado se puede concluir que en teoría de cuerdas cada campo auxiliar independiente tendrá asociado una restricción primaria de primera clase (su momento canónico conjugado). Hemos mostrado también para la acción de Polyakov, como obtener las transformaciones de norma infinitesimales de la acción a partir del hamiltoniano extendido. Corroboramos el resultado general de que existen tantas restricciones primarias de primera clase, como funciones arbitrarias de las transformaciones de norma.

Se desarrolló también el análisis canónico de la supercuerda en los dos casos posibles  $N = 1$  y  $N = 2$ . Siguiendo los trabajos [12] y [23], introducimos un proyector para separar covariantemente las restricciones fermiónicas en restricciones de primera y segunda clase. La contribución que hemos hecho a este análisis se puede resumir en los siguientes tres puntos. i) A diferencia de [23] extendimos el análisis al caso  $N = 2$ . ii) Construimos el hamiltoniano de primera clase utilizando el método de Dirac, esto es, determinamos parte de los multiplicadores de Lagrange al requerir que las restricciones fermiónicas se mantuvieran en el tiempo y iii) calculamos explícitamente el álgebra de restricciones. Fuimos cuidadosos de utilizar un proyector que permite eliminar las restricciones de segunda clase utilizando el paréntesis de Dirac, esto se puede lograr si el proyector satisface el criterio de consistencia discutido en [33]. Este es un requerimiento que el proyector utilizado en [12] no satisface y que por tanto hace que el análisis ahí hecho no este completamente bien. El proyector que utilizamos en este capítulo fue introducido en [23], pero el desarrollo canónico ahí discutido no es completo. Mostramos además que el número de grados de libertad, tanto bosónicos como fermiónicos es  $D - 2$ . Finalmente, podemos decir que un intento de cuantización covariante de la acción de Green-Schwarz debe partir de un análisis canónico similar al que presentamos en este capítulo.

# Referencias

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*, 2 vols. Cambridge University Press, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String Theory*, 2 vols. Cambridge University Press, 1998.
- [3] M. Kaku, *Introduction to superstrings and M-Theory*, 2nd. edition, Springer-Verlag, 1999.
- [4] A. Neveu and J. H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).
- [5] P. Ramond, *Dual theory for free fermions*, Phys. Rev. **D3**, 2415 (1971).
- [6] F. Gliozzi , J. Scherk and D. Olive, *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*, Nucl. Phys. **B122**, 253 (1977); ver también, *Supergravity and the spinor dual model*, Phys. Lett. **B65**, 282 (1976).
- [7] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Covariant description of superstrings*, Phys. Lett. **B136**, 367 (1984).
- [8] N. Berkovits, *Super-Poincaré covariant quantization of the superstring*, hep-th/0001035.
- [9] J. Maldacena, *The large  $N$  limit of the superconformal theory and supergravity*, Adv. Theor. Phys. **2**, 231 (1998).
- [10] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Type IIB superstring action in  $AdS_5 \times S_5$  background*, Nucl. Phys. **B533**, 109 (1998).
- [11] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Superstring action in  $AdS_5 \times S_5$ :  $\kappa$ -symmetry light cone gauge*, Phys. Rev. **D63** (2001).
- [12] T. Hori and K. Kamimura, *Canonical formulation of superstring*, Prog. Theor. Phys. **73**, 476 (1985).
- [13] S. Carlip, *Heterotic string path integrals with Green-Schwarz covariant action*, Nucl. Phys. **B284**, 365 (1987).

- [14] R. E. Kallosh, *Quantization of Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B195**, 369 (1987).
- [15] G. Gilbert and D. Johnston, *Equivalence of the Kallosh and Carlip quantizations of the Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B205**, 273 (1988).
- [16] W. Siegel, *Classical superstring mechanics*, Nucl. Phys. **B263**, 93 (1986).
- [17] E. Sokatchev, *Harmonic superparticle*, Class. Quant. Grav. **4**, 237 (1987).
- [18] E. R. Nissimov and S. J. Pacheva, *Manifestly super-Poincaré covariant quantization of the Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B202**, 325 (1988).
- [19] R. E. Kallosh and M. Rakhmanov, *Covariant quantization of the Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B209**, 233 (1988).
- [20] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, U. Lindstrom, M. Rocek, W. Siegel, P. Van Nieuwenhuizen and A. E. Van de Ven, *Lorentz-covariant quantization of the heterotic superstring*, Phys. Lett. **B225**, 44 (1989).
- [21] R. E. Kallosh, *Covariant quantization of type IIA,B Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B225**, 49 (1989).
- [22] M. B. Green and C. M. Hull, *Covariant quantum mechanics of the superstring*, Phys. Lett. **B225**, 57 (1989).
- [23] J. M. Evans, *Covariant separation of first-class and second class constraints for the Green-Schwarz superstring*, Phys. Lett. **B233**, 307 (1989).
- [24] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, Nucl. Phys. **B381**, 619 (1992); *Unified constrained dynamics*, Phys. Lett. **B317**, 354 (1993); *On the equivalence between the unified and standard versions of constraint dynamics*, Mod. Phys. Lett. **A 8**, 3757 (1993).
- [25] Y. Eisenberg, M. Hatsuda, E. Laenen, W. Siegel, J. Yamron, T. Kimura and A. Micovic, *Covariant quantization of the first ilk superparticle*, Nucl. Phys. **B364**, 67 (1991).
- [26] A. A. Deriglazov, A. V. Galajinsky and S. L. Lyakhovich, *Weak Dirac bracket construction and the superparticle covariant quantization problem*, Nucl. Phys. **B473**, 245 (1996).
- [27] A. A. Deriglazov, *Modified  $N=1$  Green-Schwarz superstring with irreducible first class constraints*, hep-th/0101022.
- [28] M. Heanneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Gauge invariance and degree of freedom count*, Nucl. Phys. **B332**, 169 (1990).

- [29] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
- [30] K. Sundermeyer, *Constrained dynamics*, Springer-Verlag, 1982.
- [31] L. Brink and M. Henneaux, *Principles of string theory*, Plenum Press, New York, 1988.
- [32] K. V. Kuchar and C. G. Torre, *World sheet diffeomorphisms and the canonical string*, J. Math. Phys. **30**, 1769 (1989).
- [33] A. Dresse, J. Fisch, M. Henneaux and C. Schombld, *Consistent elimination of redundant second class constraints*, Phys.Lett. **B210** (1988) 141.
- [34] Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen conference*, 1970.
- [35] T. Goto, *Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model*, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971).
- [36] A. Schild, *Classical null strings*, Phys. Rev. **D16**, 1722 (1977).
- [37] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, *A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string*, Phys. Lett. **B65**, 471 (1976).
- [38] S. Deser and B. Zumino, *A complete action for the spinning string*, Phys. Lett. **B65**, 369 (1976).
- [39] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B103**, 207; *Quantum geometry of fermionic strings*, Phys. Lett. **B103**, 211 (1981).
- [40] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, 1992.
- [41] R. Linares, *Cuantización de sistemas covariantes: una primera aproximación*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (1995).
- [42] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. **B37**, 95 (1971).
- [43] E. Witten, *Global aspects of current algebra*, Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983).

## Capítulo 3

### $p$ -branas y super $p$ -branas

La teoría de membranas tiene una historia extraña que comienza incluso antes que la teoría de cuerdas (una exposición de algunas de las características importantes de la teoría de membranas puede encontrarse en [1, 2, 3, 4]). La idea de que las partículas elementales pueden corresponder a los modos de vibración de una membrana, fue elaborada originalmente por Dirac en 1962 [5] y abandonada rápidamente. En ese trabajo, Dirac concibió la posibilidad de que el muón fuera un estado excitado de una membrana en cuatro dimensiones cuyo estado base correspondería a un electrón. Cuando la teoría de cuerdas apareció en los 70's, hubo algunos intentos poco exitosos de revivir la idea de membranas pero las cosas no cambiaron mucho hasta que en 1986 Hughes, Liu y Polchinski mostraron que era posible combinar membranas con supersimetría [6].

Al irse obteniendo avances en la teoría de cuerdas, la pregunta natural era: Si se ha reemplazado el modelo de partículas puntuales (objetos de dimensión 0) por el de cuerdas (objetos de dimensión 1) ¿Por qué no utilizar membranas de dimensión 2? o en general objetos de dimensión  $p$  (inevitablemente apodados  $p$ -branas).

De la misma manera que las partículas describen una línea de mundo de dimensión 1 cuando ésta evoluciona en el tiempo y una cuerda describe una hoja de mundo de dimensión 2, una  $p$ -brana describe un volumen de mundo de dimensión  $p + 1$ . Al igual que en teoría de cuerdas, las teorías de  $p$ -branas relevantes son aquellas que incluyen supersimetría. Por definición, una super  $p$ -brana es un objeto extendido de  $p$  dimensiones moviéndose en un super espacio-tiempo de "fondo" cuyo subespacio bosónico de dimensión  $D$  puede ser curvo (sujeto a ciertas condiciones de consistencia) o plano. La dimensión del subespacio fermiónico está determinada totalmente por el número de componentes de un espinor de  $D$  dimensiones (posiblemente con factores extras de  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{4}$  para espinores de Majorana y/o Weyl). En el caso bosónico (clásicamente) las dimensiones de  $p$  y  $D$  pueden ser elegidas de manera arbitraria con la única restricción de que  $D \geq p + 1$  (esta condición significa que el espacio-tiempo debe ser tal que la  $p$ -brana pueda moverse en él, así, la dimensión del volumen de mundo debe ser menor que la dimensión del espacio-tiempo).



Existen varios tipos de  $p$ -branas que se distinguen entre sí por los campos involucrados en su definición. Las  $p$ -branas tipo I también conocidas como  $p$ -branas escalares tienen como principal característica el hecho de que involucran únicamente multipletes escalares. En el caso supersimétrico estas  $p$ -branas tienen 1, 2, 4 y 8 grados de libertad escalares que se aparean con los grados de libertad correspondientes a fermiones de espín  $1/2$  [7, 8]. El adjetivo tipo I tiene que ver al igual que en cuerdas con el hecho de que en el caso supersimétrico estas  $p$ -branas involucran sólo una supersimetría. Este tipo de branas juega un papel muy importante dentro de la teoría de cuerdas, por ejemplo, pueden ser vistas como soluciones solitónicas de teorías de campo supersimétricas. Existen también las  $p$ -branas tipo II, las cuales involucran en el caso supersimétrico dos supersimetrías. En la formulación de estas membranas se tiene además de los grados de libertad escalares en el volumen de mundo, multipletes de Maxwell ( $p$ -branas de Dirichlet) o multipletes tensoriales (super 5-brana en  $D=11$ ).

El impulso a la investigación de super  $p$ -branas escalares, las cuales llamaremos simplemente super  $p$ -branas, comenzó cuando en [6] se mostró que la simetría  $\kappa$ , ingrediente importante en la formulación de la superpartícula y la supercuerda de (GS), podía ser generalizada y utilizada para construir una 3-brana con supersimetría explícita en un espacio-tiempo de dimensión  $D = 6$  e invariancia  $\kappa$  sobre el volumen de mundo. Más aún, la motivación original de ese artículo fue encontrar la super 3-brana como un solitón de una teoría de campo supersimétrica en  $D = 6$  dimensiones. El descubrimiento de las otras supermembranas se dio en una dirección opuesta. Primero, en [7] se construyeron las acciones de Green-Schwarz correspondientes a otros valores de  $p$  y  $D$ , en particular, la supermembrana en un espacio-tiempo de 11 dimensiones. Después en [8] se hizo una clasificación completa de los valores de  $p$  y  $D$  para los cuales las super  $p$ -branas pueden existir y en [9] se mostró que la acción de GS para la supercuerda tipo IIA se puede obtener a partir de la supermembrana en  $D = 11$ , mediante un proceso de doble reducción dimensional. Este proceso consiste en compactificar simultáneamente una dimensión, de la dimensión  $D$  del espacio-tiempo y de la dimensión  $p$  del objeto extendido. Más aún, se puede mostrar que partiendo de una de las cuatro super  $p$ -branas "fundamentales" ( $p = 2$  en  $D = 11$ ,  $p = 5$  en  $D = 10$ ,  $p = 3$  en  $D = 6$  y  $p = 2$  en  $D = 4$ ) aplicando la reducción dimensional  $k$  veces, encontramos cuatro secuencias de super  $(p - k)$ -branas en  $(D - k)$  dimensiones, en donde están consideradas todas las super  $p$ -branas posibles, incluyendo las supercuerdas de (GS) en  $D = 10, 6, 4$  y  $3$ . Estas cuatro secuencias se conocen como, las secuencias octoniónicas ( $\mathcal{O}$ ), cuaterniónicas ( $\mathcal{H}$ ), complejas ( $\mathcal{C}$ ) y reales ( $\mathcal{R}$ ). Al conjunto de estas cuatro secuencias se le conoce con el nombre "brane scan".

El siguiente desarrollo solitónico se dio cuando Townsend [10] conjeturó que no solamente la super 3-brana en  $D = 6$ , sino todas las membranas de las secuencias  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{R}$  correspondían a solitones de alguna teoría de campo supersimétrica que rompe la mitad de las supersimetrías del espacio-tiempo, y que las super  $p$ -branas de la secuencia  $\mathcal{O}$  correspondían a solitones de teorías de supergravedad. De hecho en [11] se encontró una solución tipo cuerda para la supergravedad en  $D = 10$ . Poco después se encontró una solución tipo 5-brana para la supergravedad en  $D = 10$  acoplada a Yang-Mills [12]. Estos resultados significan que la teoría de cuerdas contiene objetos solitónicos en su espectro

e implicaron un hecho simple pero importante, los objetos extendidos supersimétricos no podían ser ignorados. El rompimiento parcial de la supersimetría, discutido originalmente en [6], es una idea clave y está íntimamente conectada con la simetría  $\kappa$ . Esta simetría permite eliminar mediante una elección de norma, la mitad de los grados de libertad fermiónicos.

El desarrollo de las  $p$ -branas de Dirichlet, o de manera abreviada, de las  $Dp$ -branas<sup>1</sup>, ha sido más reciente. Debido al importante papel que juegan en la teoría de cuerdas y a que en este capítulo trabajaremos con la acción de  $Dp$ -branas, esbozaremos brevemente como surgen éstas. En teoría de cuerdas las  $Dp$ -branas son definidas como hipersuperficies de  $(p + 1)$  dimensiones en el espacio-tiempo en las cuales las cuerdas abiertas pueden terminar (para una exposición de las características básicas de las  $Dp$ -branas se puede consultar por ejemplo [13, 14, 15, 16, 17]). Más específicamente, hemos mencionado en el capítulo anterior que existen dos tipos de cuerdas, cuerdas abiertas, para las cuales sus extremos pueden moverse libre e independientemente, y cuerdas cerradas, las cuales no tienen extremos. Cuando se considera la cuerda fermiónica, ésta puede definirse como una teoría de campos conforme en la hoja de mundo, con campos bosónicos libres  $X^\mu$  y sus compañeros supersimétricos  $\psi^\mu$ . Los grados de libertad de la cuerda abierta corresponden a los modos de vibración de ondas estacionarias de los campos que se mueven a la izquierda y a la derecha, y para estas hay el doble de modos que los existentes para las cuerdas cerradas. Las condiciones de frontera para los campos bosónicos  $X^\mu$  pueden ser de Neumann o Dirichlet para cada campo por separado. Cuando todas las condiciones de frontera son de Neumann los extremos de las cuerdas se mueven libremente en el espacio. Mientras que cuando  $9 - p$  de los campos tienen condiciones de frontera de Dirichlet, los extremos de la cuerda están sujetas a moverse sobre una hipersuperficie de  $p$  dimensiones, las cuales corresponden a las  $Dp$ -branas. Para los campos fermiónicos sobre la cuerda es posible elegir también diferentes condiciones de frontera. Para la cuerda abierta, las condiciones de frontera corresponden a modos enteros y semienteros referidos como modos de Ramond (R) y Neveu-Schwarz (NS) respectivamente. Para la cuerda cerrada, podemos elegir separadamente condiciones de frontera periódicas o antiperiódicas para los osciladores fermiónicos izquierdos y derechos. Esto da origen a cuatro distintos sectores para la cuerda cerrada: NS-NS, R-R, NS-R y R-NS.

La cuantización de la teoría de cuerdas fermiónicas junto con la proyección GSO, lleva a las cinco diferentes tipos de cuerdas que hemos mencionado en el capítulo anterior Tipo I, heteróticas, IIA y IIB (ver por ejemplo [18]). Desde el punto de vista del espacio-tiempo de 10 dimensiones, los campos no masivos que surgen al cuantizar la cuerda pueden ser caracterizados bajo las propiedades de transformación del grupo espín(8) (este es el grupo cubierta del grupo  $SO(8)$ ) en la siguiente forma. Para la cuerda abierta, en el sector NS hay un campo vectorial  $A_\mu$  que transforma bajo la representación  $8_v$  del grupo espín(8) y en el sector R hay un fermión  $\psi$  en la representación  $8_s$ . Los campos no masivos para las cuerdas cerradas IIA son, en el sector NS-NS:  $g_{\mu\nu}$ ,  $\phi$  y  $B_{\mu\nu}$ , mientras que en el sector R-R:  $A_\mu^{(1)}$  y  $A_{\mu\nu\rho}^{(3)}$ . Para la cuerda IIB se tiene en el sector NS-NS:  $g_{\mu\nu}$ ,  $\phi$  y  $B_{\mu\nu}$  y en

<sup>1</sup>Es claro que aquí la  $D$  viene de Dirichlet y no debe confundirse con la dimensión  $D$  del espacio-tiempo.

el sector R-R:  $A^{(0)}$ ,  $A_{\mu\nu}^{(2)}$  y  $A_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)}$ . Como podemos ver, las cuerdas IIA y IIB tienen los mismos campos en el sector NS-NS que corresponden a la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$ , al dilatón  $\phi$  y al tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$ . Adicionalmente, cada cuerda cerrada tiene un conjunto de campos llamados campos de R-R. Para la teoría IIA estos campos son una 1-forma y una 3-forma. Para la teoría IIB hay un segundo campo escalar (la axión), una 2-forma y una 4-forma auto dual. En ambas teorías hay también campos en los sectores NS-R y R-NS que corresponden a campos fermiónicos en el espacio-tiempo.

Hasta hace poco tiempo, el papel de los campos de R-R en la teoría de cuerdas no era claro. En uno de los artículos más importantes en la revolución de cuerdas reciente [19], Polchinski señaló que las  $Dp$ -branas son los portadores de cargas de estos campos. Otra característica importante es que la física de bajas energías de  $Dp$ -branas puede ser descrita por una teoría de norma supersimétrica. Los avances recientes en teoría de cuerdas como por ejemplo, las relaciones de dualidad entre las diferentes teorías de cuerdas (ver por ejemplo [20]), el cálculo de la entropía de un agujero negro (extremo) [21] y la conjetura de Maldacena [22], no podrían explicarse sin estas  $D$ -branas.

En teoría de cuerdas fue provechoso reemplazar la acción de Nambu-Goto, la cual es proporcional al área de la hoja de mundo de la cuerda, por una acción equivalente clásicamente que involucrara una métrica intrínseca de la hoja de mundo. La acción de Nambu-Goto es no polinomial en las derivadas de las coordenadas de la cuerda, mientras que la acción equivalente es cuadrática en estas derivadas, con lo cual se simplifica considerablemente el análisis (ver capítulo 2). Esto tiene una generalización para la acción de Nambu-Goto de  $p$ -branas (proporcional al volumen de mundo), pero la teoría resultante (el análogo de la acción de Polyakov) es sólo invariante de Weyl (a menudo utilizaremos en el texto invariancia conforme como sinónimo de invariancia de Weyl) para el caso de la cuerda  $p=1$ . Dado que la simetría de Weyl es importante para la cuantización de la cuerda [23], una pregunta inmediata es sobre la posibilidad de construir una acción de  $p$ -branas que sea invariante bajo transformaciones de Weyl. En [24, 25, 26, 27] se construye una acción con esta propiedad, la cual es equivalente clásicamente a la acción tipo Polyakov. Un punto importante es que estas acciones son funcionales de los mismos campos que la acción tipo Polyakov, es decir, no hay necesidad de introducir campos auxiliares adicionales. Varios aspectos de estas  $p$ -branas han sido estudiados, por ejemplo, su reducción dimensional [28], su relación con la invariancia conforme en el espacio-tiempo de fondo [29] y su caracterización como fuente de estructura en el espacio-tiempo [30]. Sin embargo esta acción tiene el problema de que su formulación canónica no puede ser construida por el algoritmo standard, en [31] se intenta resolver este problema introduciendo una forma de obtener las constricciones sin pasar por el algoritmo de Dirac. En esta tesis este problema se resuelve de una manera diferente al proponer una nueva acción que sea invariante de Weyl, y para la cual es posible desarrollar el formalismo canónico en la forma usual. Esto se logra introduciendo un campo auxiliar adicional [32].

En el caso de las  $Dp$ -branas, la acción natural para describir la dinámica de estos objetos es una de tipo Dirac-Born-Infeld (la cual es el análogo de la de Nambu-Goto para  $p$ -branas), esta acción es no polinomial en el campo de fuerza  $F_{\mu\nu}$  [33]. Mediante la introducción de una métrica auxiliar intrínseca del volumen de mundo, se obtiene una acción

equivalente clásicamente que es cuadrática en  $F_{\mu\nu}$  y la cual tiene una simetría conforme clásica en cuatro dimensiones, esto es, para una D3-brana [34]. Como esta nueva acción es cuadrática en  $F_{\mu\nu}$ , la integración sobre los campos de norma es directa y justo como en la teoría de cuerdas, el problema se reduce a la integración de las métricas. Esta acción se utiliza para dualizar el campo de norma en todas las dimensiones, lo cual no se pudo hacer hasta la introducción de dicha acción. Siguiendo la misma lógica que en el caso de las  $p$ -branas, uno puede investigar la posibilidad de extender la invariancia conforme de las  $Dp$ -branas a cualquier dimensión, esto es parte de lo que haremos.

En este tercer capítulo se exponen algunas características de las  $p$ -branas, las super  $p$ -branas y las  $Dp$ -branas bosónicas con simetría de Weyl. Se comienza discutiendo diferentes tipos de acciones equivalentes entre sí clásicamente, para las  $p$ -branas. Se muestra explícitamente su equivalencia y se discuten sus simetrías. Se construye el formalismo canónico para cada una de estas acciones y se discute la imposibilidad de hacer esta construcción para la acción standard de  $p$ -branas con simetría de Weyl. Para resolver este problema se propone una nueva acción que involucra un nuevo campo escalar auxiliar extra. Se utiliza el método del hamiltoniano extendido [35] para obtener las transformaciones de norma de esta nueva acción en la misma forma a como se hizo en el caso de cuerdas. Se presenta también la extensión supersimétrica de la acción de super  $p$ -branas con invariancia de Weyl y se discuten los diferentes valores de  $p$  y  $D$  para los cuales la construcción es válida. La discusión supersimétrica se basa en la construcción de acciones tipo GS. Construimos acciones de este tipo porque es la formulación que ha dominado el desarrollo de las super  $p$ -branas <sup>2</sup>, aunque es importante mencionar que recientemente se ha construido una formulación de las branas que posee tanto supersimetría en el espacio-tiempo como en el volumen de mundo (una revisión de estas acciones está dada en [36]). Comenzaremos por construir las acciones en espacios-tiempo curvos, para pasar después a la construcción explícita de las diferentes acciones existentes de  $p$ -branas conformes en el espacio-tiempo de Minkowski. También se discute en detalle la simetría  $\kappa$  para las acciones en espacios-tiempo curvos. Razonando de manera similar, se exponen las características básicas de varias acciones que describen a las  $Dp$ -branas bosónicas y se presenta una acción que es invariante de Weyl para toda  $p$  y que además es cuadrática en  $F_{\mu\nu}$  [32]. Por último se discute, como construir acoplamientos conformes del campo auxiliar escalar con los campos de norma sobre la  $Dp$ -brana. La introducción de las acciones invariantes de Weyl que involucran un campo auxiliar escalar para  $p$ -branas, super  $p$ -branas y  $Dp$ -branas, junto con el desarrollo canónico de la acción de  $p$ -branas con simetría de Weyl, constituyen la contribución de este capítulo al área de los objetos extendidos. La discusión de del acoplamiento conforme entre el campo escalar auxiliar y los campos de norma sobre la  $Dp$ -brana es también una contribución original.

<sup>2</sup>Las acciones de  $p$ -branas tipo GS llamadas super  $p$ -branas son las que tienen supersimetría explícita en el espacio-tiempo, las  $p$ -branas fermiónicas son las que tienen supersimetría explícita en el volumen de mundo pero no en el espacio-tiempo.

## 3.1 Acciones de $p$ -branas bosónicas

### 3.1.1 Acción de Nambu-Goto

La generalización de la acción de Nambu-Goto para  $p$ -branas se sigue de manera directa a partir de la discusión que se hizo para la partícula y la cuerda en el capítulo anterior. Como hemos mencionado, el volumen de mundo que describe una  $p$ -brana es una superficie de  $p + 1$  dimensiones en el espacio-tiempo y por analogía con los sistemas expuestos anteriormente, este volumen de mundo tiene como características i) es tipo-tiempo y ii) es extremo.

Las ecuaciones paramétricas del volumen de mundo de la  $p$ -brana son  $X^\mu = X^\mu(\xi^i)$ , pero ahora hay  $p + 1$  coordenadas  $\xi^i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) del volumen de mundo,  $X^\mu$  con  $\mu = 0, 1, \dots, D-1$  representan nuevamente las coordenadas del espacio-tiempo. Se asume que  $\xi^i \equiv (\tau, \sigma^r)$  con  $r = 1, \dots, p$  es una buena parametrización del volumen de mundo en el sentido que los vectores tangentes  $\partial X^\mu / \partial \tau$  y  $\partial X^\mu / \partial \sigma^r$  son en todo punto linealmente independientes y no nulos. Más aún, se asume que  $\partial X^\mu / \partial \tau$  es tipo tiempo (o nulo) y que los  $p$  vectores  $\partial X^\mu / \partial \sigma^r$  son tipo espacio.

El encajamiento del volumen de mundo en el espacio-tiempo induce una métrica sobre la superficie  $X^\mu(\xi^i)$ , dada explícitamente por

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (3.1)$$

Nótese que estamos considerando un espacio tiempo plano, la razón para esta consideración es la misma que en el caso de cuerdas, la signatura de la métrica es  $(-, +, \dots, +)$ . Tenemos así que la acción invariante bajo reparametrizaciones más simple es

$$S[X^\mu(\xi^i)] = -T \int d^{p+1} \xi \sqrt{-h}, \quad (3.2)$$

donde  $h \equiv \det h_{ij}$ . La constante de proporcionalidad  $T$  está dada por la tensión de la  $p$ -brana y tiene las unidades necesarias para que la acción sea adimensional  $[T] = [\text{masa}]^{p+1}$ .

Las simetrías de esta acción son:

1.- El grupo de Poincaré de  $D$ -dimensiones,

$$X'^\mu(\xi) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi) + a^\mu \quad (3.3)$$

donde  $\Lambda^\mu_\nu$  es una transformación de Lorentz y  $a^\mu$  una traslación.

2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo. Para nuevas coordenadas  $\xi' = \xi'(\xi)$ , la transformación de simetría se expresa en la forma

$$X'^\mu(\xi') = X^\mu(\xi). \quad (3.4)$$

Infinitesimalmente esta transformación es

$$\delta X^\mu = \eta^i \partial_i X^\mu, \quad (3.5)$$

donde  $\eta^i$  representa  $p + 1$  parámetros infinitesimales.

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas  $X^\mu$  que se obtienen a partir de esta acción son

$$\partial_i (\sqrt{-h} h^{ij} \partial_j X^\mu) = 0. \quad (3.6)$$

Desde el punto de vista del volumen de mundo, la ecuación (3.4) define a  $X^\mu(\xi)$  como campos escalares, con  $\mu$  visto como un índice interno.

### 3.1.2 Acción tipo Schild

Para el caso de la acción de Schild, la generalización a  $p$ -branas es nuevamente directa, lo único que debemos tomar en cuenta es que ahora tenemos un volumen de mundo de dimensión  $p + 1$ .

$$S = \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi (\varphi^{-1} h - T^2 \varphi). \quad (3.7)$$

De esta acción se puede obtener el límite de tensión nula  $T \rightarrow 0$  que corresponde al límite ultra relativista de  $p$ -branas. La equivalencia clásica entre las acciones (3.2) y (3.7) se obtiene al resolver la ecuación de movimiento para el campo auxiliar  $\varphi$

$$h + T^2 \varphi^2 = 0, \quad (3.8)$$

y sustituir la expresión resultante del campo  $\varphi$  en (3.7).

Las simetrías de esta acción son:

1.- El grupo de Poincaré de  $D$ -dimensiones,

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi) + a^\mu, \\ \varphi'(\xi) &= \varphi(\xi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

2.- Invariancia de coordenadas en el volumen de mundo,

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi') &= X^\mu(\xi), \\ \varphi'(\xi') d^{p+1} \xi' &= \varphi(\xi) d^{p+1} \xi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De manera infinitesimal, la invariancia en el volumen de mundo se expresa como

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \eta^i \partial_i X^\mu, \\ \delta \varphi &= \partial_i (\eta^i \varphi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

La ecuación de movimiento que se obtiene para los campos  $X^\mu$  a partir de esta acción es

$$\partial_i (\varphi^{-1} h h^{ij} \partial_j X^\mu) = 0, \quad (3.12)$$

así, si combinamos esta ecuación con (3.8) obtenemos la ecuación de movimiento (3.6).

### 3.1.3 Acción tipo Polyakov

La generalización de la acción de Polyakov (2.24) para el caso de  $p$ -branas, se debe a Howe y Tucker [37] y su expresión es

$$S[X^\mu, g_{ij}] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} (g^{ij} h_{ij} - (p-1)), \quad (3.13)$$

donde nuevamente se introduce un tensor auxiliar  $g_{ij}(\xi^i)$  el cual representa la métrica intrínseca del volumen de mundo. Este principio de acción depende de  $D+(p+1)(p+2)/2$  campos.

Para ver la equivalencia de esta acción con (3.2), utilizamos la ecuación de movimiento de la métrica  $g_{ij}$

$$h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} h_{kl} + \frac{1}{2} (p-1) g_{ij} = 0. \quad (3.14)$$

Tomando su traza encontramos para  $p \neq 1$  que

$$g^{ij} h_{ij} = p+1, \quad (3.15)$$

y así,  $g_{ij}$  es la métrica inducida en el volumen de mundo

$$g_{ij}(\xi^i) = h_{ij}(\xi^i). \quad (3.16)$$

Sustituyendo esta ecuación en la acción obtenemos la equivalencia entre (3.2) y (3.13).

Las simetrías de la acción de Polyakov para  $p$ -branas con  $p \neq 1$  son las siguientes:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi) + a^\mu, \\ g'_{ij}(\xi) &= g_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi') &= X^\mu(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') &= g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\xi)$ .

Nótese que en el caso de  $p$ -branas (con  $p > 1$ ), no se tiene la simetría de Weyl. Este hecho se ve reflejado en la solución de la ecuación de movimiento del campo auxiliar  $g_{ij}$ , o lo que es lo mismo, en la relación que existe entre la métrica intrínseca y la métrica inducida. Mientras que para la cuerda éstas están relacionadas hasta un factor arbitrario ec. (2.30), aquí son exactamente iguales (3.16). Desde el punto de vista del lagrangiano, la diferencia reside en el 'término cosmológico' de la acción (3.13), el cual claramente

desaparece para  $p = 1$  (caso de la cuerda).

De manera infinitesimal, las simetrías del volumen de mundo se expresan como

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \eta^i \partial_i X^\mu, \\ \delta g_{ij} &= \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

La variación de la acción respecto a la métrica intrínseca define el tensor de energía-momento

$$T_{ij}(\xi) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{ij}} = T \left( h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} h_{kl} + \frac{1}{2} (p-1) g_{ij} \right). \quad (3.20)$$

Este tensor es conservado  $\nabla_i T^{ij} = 0$ , como una consecuencia de la invariancia bajo difeomorfismos, pero ya no es de traza nula como lo era en el caso de la cuerda porque no tenemos invariancia de Weyl.

La ecuación de movimiento para el campo  $X^\mu$  es

$$\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X^\mu) = 0, \quad (3.21)$$

con lo cual las ecuaciones (3.16) y (3.21) juntas son equivalentes a (3.6).

### 3.1.4 Acción conforme I

Bajo la premisa de que la simetría de Weyl es importante para la cuantización de la cuerda, uno se pregunta si existe una acción de  $p$ -branas que posea esta simetría y que además sea equivalente a la acción de Nambu-Goto. La respuesta es afirmativa y la acción que tiene esta propiedad es [24, 25, 26, 27]

$$S[X^\mu, g_{ij}] = -T \int d^{p+1} \xi \sqrt{-g} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{(p+1)/2}. \quad (3.22)$$

Esta acción al igual que la tipo Polyakov depende de  $D + (p+1)(p+2)/2$  campos. Nótese además que para el caso de cuerdas  $p = 1$ , esta acción se reduce a la acción de Polyakov. Para ver la equivalencia entre esta acción y la de Nambu-Goto utilizamos la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca  $g_{ij}$

$$g_{kl} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right) = h_{kl}, \quad (3.23)$$

la cual tiene como solución

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) h_{ij}(\xi), \quad (3.24)$$

donde  $\beta(\xi)$  es una función arbitraria.

Esta acción tiene las siguientes simetrías:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned}X'^\mu(\xi) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi) + a^\mu, \\ g'_{ij}(\xi) &= g_{ij}(\xi).\end{aligned}\quad (3.25)$$



2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi') &= X^{\mu}(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') &= g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.26)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\xi)$ .

3.- Invariancia de Weyl de  $p + 1$  dimensiones

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= X^{\mu}(\xi), \\ g'_{ij}(\xi) &= \exp(2\omega(\xi))g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.27)$$

para  $\omega(\xi^i)$  arbitraria. De manera infinitesimal, las simetrías del volumen de mundo se expresan como

$$\begin{aligned} \delta X^{\mu} &= \eta^i \partial_i X^{\mu}, \\ \delta g_{ij} &= \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Debido a que la acción es invariante bajo difeomorfismos del volumen de mundo tendremos que el tensor de energía momento

$$T_{ij}(\xi) = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{ij}} = T \left( \left( \frac{1}{p+1} g^{kl} h_{kl} \right)^{\frac{p-1}{2}} h_{ij} - \left( \frac{1}{p+1} g^{kl} h_{kl} \right)^{\frac{p+1}{2}} g_{ij} \right). \quad (3.29)$$

es conservado  $\nabla_i T^{ij} = 0$  y dado que tenemos invariancia de Weyl este tensor es de traza nula  $g^{ij} T_{ij} = 0$ .

La ecuación de movimiento para  $X^{\mu}$  esta dada por

$$\partial_i \left( \sqrt{-g} \left( \frac{1}{p+1} g^{kl} h_{kl} \right)^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} \partial_j X^{\mu} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Así, las ecuaciones (3.24) y (3.30) juntas son equivalentes a (3.6). Más adelante, mostraremos que el análisis canónico de esta acción no está bien definido debido a la potencia en la acción. Este hecho nos ha llevado a proponer una acción equivalente clásicamente a (3.22), para la cual puede aplicarse el algoritmo hamiltoniano sin problemas. Este es el tema de la siguiente subsección.

### 3.1.5 Acción conforme II

Utilizando la idea de Schild, en [32] se introduce un campo auxiliar  $\varphi$  con el objetivo de eliminar la potencia en el integrando de la acción (3.22). La expresión de la acción que se obtiene es

$$S[X^{\mu}, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} h_{ij} - \varphi(p-1) \right), \quad (3.31)$$

la cual depende de  $D + 1 + (p + 1)(p + 2)/2$  campos. Nótese que para  $p = 1$  se obtiene la acción tipo Polyakov para cuerdas mientras que para  $\varphi = 1$  se recupera la acción de Polyakov para  $p$ -branas. Más aún, utilizando la ecuación de movimiento para el campo auxiliar  $\varphi$

$$\frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} = 0, \quad (3.32)$$

(con  $p \neq 1$ ) en la acción (3.31), obtenemos la equivalencia clásica de esta acción con (3.22). Mientras que la equivalencia con la acción de Nambu-Goto (3.2) se obtiene de utilizar simultáneamente la ecuación de movimiento de  $\varphi$  (3.32) y la ecuación de movimiento de  $g_{ij}$

$$h_{ij} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij} = 0. \quad (3.33)$$

Esta acción tiene las siguientes simetrías:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \\ \varphi'(\xi) &= \varphi(\xi), \\ g'_{ij}(\xi) &= g_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (3.34)$$

2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi') &= X^{\mu}(\xi), \\ \varphi'(\xi') &= \varphi(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} g'_{kn}(\xi') &= g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.35)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\xi)$ .

3.- Invariancia de Weyl de  $p + 1$  dimensiones

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= X^{\mu}(\xi), \\ \varphi'(\xi) &= \exp(-(p+1)\omega(\xi))\varphi(\xi), \\ g'_{ij}(\xi) &= \exp(2\omega(\xi))g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.36)$$

para  $\omega(\xi^i)$  arbitraria.

Tenemos por tanto que las transformaciones infinitesimales de los campos en el volumen de mundo que dejan invariante la acción son

$$\begin{aligned} \delta X^{\mu} &= \eta^i \partial_i X^{\mu}, \\ \delta \varphi &= \eta^i \partial_i \varphi - \omega(p+1)\varphi, \\ \delta g_{ij} &= \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Un punto interesante es que la ley de transformación para el campo auxiliar  $\varphi$  es bastante diferente en las acciones (3.7) y (3.31). En el caso de la acción de Schild  $\varphi$  es un 'einbein',

mientras que en (3.31)  $\varphi$  es un escalar bajo difeomorfismos y cambia de manera similar a la métrica  $g_{ij}$  bajo transformaciones conformes.

Para esta acción, el tensor de energía momento asociado está dado por

$$T_{ij} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} + \frac{\varphi}{2} \frac{\delta S}{\delta \varphi} g_{ij} \right) = T \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \left( h_{ij} - \frac{1}{p+1} g^{kl} h_{kl} g_{ij} \right). \quad (3.38)$$

Nótese que esta no es la definición standard del tensor energía momento, pero es una definición adecuada dictada por la transformación conforme. Este tensor tiene traza cero debido a la invariancia conforme  $T_i^i = 0$ . Por último, la ecuación de movimiento de las coordenadas del espacio-tiempo está dada por

$$\partial_i \left( \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_j X^\mu \right) = 0. \quad (3.39)$$

Así, las ecuaciones (3.32) y (3.39) juntas, son equivalentes a (3.6).

### 3.1.6 Acción generalizada

Antes de pasar al análisis canónico de las acciones que hemos presentado, mencionemos que hay dos generalizaciones útiles a la acción conforme II. La primera es ir a un espacio-tiempo curvo al reemplazar  $\eta_{\mu\nu}$  por  $G_{\mu\nu}(X)$ . La segunda es introducir un campo tensorial antisimétrico  $B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p+1}}(X)$  de rango  $p+1$  el cual se acople a un término de Wess-Zumino (recordemos la discusión hecha en el capítulo anterior acerca de los términos de Wess-Zumino para la supercuerda). La acción (3.31) se generaliza en la siguiente forma

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{p+1} \xi \left[ \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(X) - \varphi(p-1) \right) + \frac{2}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{\mu_1} \partial_{i_2} X^{\mu_2} \dots \partial_{i_d} X^{\mu_{p+1}} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p+1}}(X) \right]. \quad (3.40)$$

La virtud de esta generalización, es que podremos construir de manera directa a partir de esta acción, la versión supersimétrica de las  $p$ -branas o super  $p$ -branas. Esto lo haremos más adelante en este capítulo. Las ecuaciones de movimiento para los campos  $\varphi$ ,  $g_{ij}$  y  $X^\mu$  están dadas respectivamente por las ecuaciones

$$\frac{1}{p+1} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} = 0, \quad (3.41)$$

$$\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij} = 0, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \partial_i \left( \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} \right) + G_{\mu\rho} \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \partial_i X^\kappa \partial_j X^\lambda g^{ij} \\ = \frac{1}{(p+1)!} H_{\mu\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{\mu_{p+1}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde el campo de fuerza  $H$  está dado por

$$H = dB \quad (3.44)$$

y por tanto obedece la identidad de Bianchi  $dH = 0$ .

## 3.2 Formulación canónica de $p$ -branas

### 3.2.1 Acción de Nambu-Goto

Construyamos la formulación hamiltoniana de la acción (3.2). El momento canónico asociado a los campos  $X^\mu$  es

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{T}{\sqrt{-\tilde{h}}} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \partial_i X_\mu h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_p}, \quad (3.45)$$

donde  $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$ . De esta expresión del momento obtenemos que el hamiltoniano canónico es nulo y que existen  $p + 1$  constricciones primarias de primera clase

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T \tilde{h} \right) \approx 0, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{H}_r = P_\mu \partial_r X^\mu \approx 0, \quad (3.47)$$

donde  $\tilde{h} \equiv h h^{00}$  es el determinante de la parte espacial de la métrica inducida. Tenemos por tanto que la expresión del hamiltoniano total es en este caso

$$H_T[X^\mu, P_\mu, \lambda, \lambda^r] = \int d^p \xi (\lambda \mathcal{H} + \lambda^r \mathcal{H}_r). \quad (3.48)$$

Dado que el álgebra de constricciones es cerrada

$$\begin{aligned} \{H[f], H[g]\} &= H_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \tilde{h} h^{rs}], \\ \{H[f], H_r[g]\} &= H[f \partial_r g - g \partial_r f], \\ \{H_r[f], H_s[g]\} &= H_s[f \partial_r g] + H_r[-g \partial_s f], \end{aligned} \quad (3.49)$$

no aparecen más constricciones en el formalismo hamiltoniano. Concluimos entonces que para la acción de Nambu-Goto el hamiltoniano extendido coincide con el hamiltoniano total ( $H_E = H_T$ ).

El conteo de grados de libertad en este caso es como sigue. Hay  $2D$  campos ( $X^\mu, P_\mu$ ) en el espacio fase y  $p + 1$  constricciones de primera clase ( $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ ). El número de grados de libertad de la  $p$ -brana es entonces  $(2D - 2(p + 1))/2 = D - (p + 1)$ .

### 3.2.2 Acción de Schild

Al igual que en el caso de la acción de Schild para cuerdas, tenemos dos tipos de momentos asociados a los dos tipos de campos que involucra la acción (3.7). El momento canónico asociado al campo  $\varphi$

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\varphi}} \approx 0, \quad (3.50)$$

es una constricción primaria, mientras que el momento canónico asociado al campo  $X^\mu$  es

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{X}^\mu} = \varphi^{-1} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \partial_i X_\mu h_{1 i_1} h_{2 i_2} \dots h_{p i_p}. \quad (3.51)$$

De esta expresión del momento canónico se obtienen  $p$  constricciones primarias

$$\mathcal{H}_r = P_\mu \partial_r X^\mu \approx 0. \quad (3.52)$$

La expresión del hamiltoniano canónico es en este caso

$$H_c = -\frac{1}{2} \int d^p \xi \left( \frac{P_\mu P^\mu}{\hbar} + T^2 \right) \varphi. \quad (3.53)$$

Al requerir que la constricción  $\Pi_\varphi$  se mantenga en el tiempo obtenemos la constricción secundaria

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T \hbar \right) \approx 0. \quad (3.54)$$

Nótese que las constricciones  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_r$  coinciden con las constricciones obtenidas para el caso de la acción de Nambu-Goto (3.2), con la diferencia que en ese caso todas las constricciones aparecen como constricciones primarias, mientras que aquí las  $p$  constricciones  $\mathcal{H}_r$  siguen apareciendo como constricción primaria pero  $\mathcal{H}$  aparece como una constricción secundaria. Por tanto el álgebra entre estas constricciones es nuevamente (3.49)

$$\begin{aligned} \{H[f], H[g]\} &= H_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \tilde{h} h^{rs}], \\ \{H[f], H_r[g]\} &= H[f \partial_r g - g \partial_r f], \\ \{H_r[f], H_s[g]\} &= H_s[f \partial_r g] + H_r[-g \partial_s f], \end{aligned} \quad (3.55)$$

y no aparecerán nuevas constricciones. La constricción  $\Pi_\varphi$  es también de primera clase. El conteo de grados de libertad para esta acción es como sigue, tenemos  $2(D+1)$  variables en el espacio fase y  $p+2$  constricciones de primera clase, por lo tanto tenemos  $(2(D+1) - 2 \times (p+2))/2 = D - (p+1)$  grados de libertad por punto.

### 3.2.3 Acción conforme I

Contrariamente a lo que uno podría pensar, cuando queremos construir la formulación canónica de la acción conforme I nos encontramos con el problema de que no es posible

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente:

A los doctores J. David Vergara y Luis F. Urrutia, por haber dirigido el presente trabajo pero también porque durante la elaboración de éste, nunca dejaron de apoyarme ni en lo académico ni en lo personal.

Al Dr. Antonio García, por las muchas discusiones académicas, y también, por las no académicas.

Al Dr. Alejandro Corichi, por formar parte del comité tutorial y por ser un buen amigo.

A los doctores Axel de la Macorra, Rodolfo P. Romero, H. Hugo García Compeán y Cupatitzio Ramirez, por la revisión y las correcciones hechas al texto, que sin duda contribuyeron a mejorarlo.

A la mafia del primer entpiso (el gran toño, el gran chucho y el gran doc) por haber hecho más agradable la jornada de trabajo, al colado del segundo entpiso (el gran Juan Manuel) por 'provocarme' recurrentes reflexiones y a todos los cuates con los que he convivido estos años de trabajo (en realidad apenas fueron minutos).

A la DGAPA y a la DGEP por el apoyo económico recibido durante el doctorado, así como a los proyectos: CONACyT 32431-E, DGAPA-UNAM IN117000, PADEP-Tesis doctorales 003310 y PAEP 202305, por los diferentes apoyos recibidos.

Al Instituto de Ciencias Nucleares por permitirme el uso de sus instalaciones durante la elaboración de la tesis.

Y por supuesto mi mayor AGRADECIMIENTO a esta generosa universidad que me permitió, recorrerla, sentirla, disfrutarla, gozarla, sufrirla,... durante 15 años y medio.

construir el hamiltoniano de manera directa. Este problema surge debido a la no-linealidad de la acción. De manera específica, al introducir la potencia en el lagrangiano que hace que la acción (3.22) sea invariante conforme, introducimos en la teoría una no-linealidad que impide la construcción canónica. La expresión del momento canónico asociado al campos  $X^\mu$  es

$$P_\mu = -T\sqrt{-g} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p-1}{2}} g^{0i} \partial_i X_\mu, \quad (3.56)$$

nótese que el factor entre paréntesis involucra las derivadas temporales de los campos  $X^\mu$  y este factor desaparece sólo para el caso  $p = 1$  que es el caso de la cuerda. Así para  $p = 1$  (recuérdese que en este caso la acción (3.22) coincide con la acción de Polyakov (2.24) para cuerdas) es posible despejar las derivadas temporales en términos de los momentos y la derivada espacial de  $X^\mu$  y por tanto, construir el hamiltoniano (2.49). Pero para  $p > 1$ , este factor no desaparece y no es posible despejar la derivada temporal de los campos  $X^\mu$  en términos de los momentos y las derivadas espaciales de los campos  $X^\mu$ , de ahí viene la dificultad para obtener el hamiltoniano. Uno podría esperar que a pesar de que este despeje no es posible, las diferentes cantidades involucradas para construir el hamiltoniano a través de una transformada de Legendre, se combinaran de tal manera que el hamiltoniano pudiera ser construido, esto pasa por ejemplo en el caso de la partícula, para la cual de la expresión del momento canónico asociado a  $X^\mu$

$$P_\mu = m \frac{\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}}, \quad (3.57)$$

no es posible despejar las velocidades en términos de los momentos debido a la raíz, pero sin embargo se obtiene  $H = 0$ . Para las  $p$ -branas esto no ocurre, de hecho la expresión que se obtiene para el hamiltoniano es

$$H = \int d^p \xi \left[ -\frac{1}{2g^{00}\sqrt{-g}} \left( \frac{1}{T} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{1-p}{2}} P_\mu P^\mu + T \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p-1}{2}} \gamma^{\gamma r s} h_{rs} \right. \right. \\ \left. \left. - T \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p+1}{2}} \gamma(p-1) - \frac{g^{0r}}{g^{00}} P_\mu \partial_r X^\mu \right], \quad (3.58)$$

el cual sigue teniendo una dependencia en las velocidades.

La formulación hamiltoniana para esta acción se discute en [31], pero esta discusión no es completamente canónica. Para obtener las constricciones desarrollan un método que es intermedio entre la formulación lagrangiana y la hamiltoniana, éste consiste en un algoritmo para encontrar las constricciones sin hacer la eliminación explícita de las velocidades en el hamiltoniano. Como conclusión obtienen que salvo la diferencia en la expresión del momento, la única diferencia entre las constricciones de la acción conforme I (3.22) y la correspondiente acción tipo Polyakov (3.13) es que las constricciones son invariantes conformes, pero sus expresiones, el número de ellas y su generación es el

mismo. Sin embargo, esto está en contradicción con las conclusiones de [35]. Como hemos mencionado en el capítulo anterior, el número de parámetros independientes arbitrarios en las transformaciones de norma de una acción singular es el mismo que el número de constricciones primarias de primera clase, y evidentemente, si comparamos la transformación de norma de la métrica en ambas acciones ecs. (3.19) y (3.28), vemos que para la acción conforme hay un parámetro arbitrario adicional, que proviene precisamente de la invariancia de Weyl. Entonces, el número de constricciones no puede ser el mismo, falta una constricción primaria de primera clase. Esta fue nuestra motivación para proponer la acción conforme (3.31) en [32].

### 3.3 Formulación canónica de la acción conforme II

En esta sección presentaremos el análisis canónico para la acción conforme II. Utilizaremos nuevamente por conveniencia variables ADM. En términos de estas variables (ver apéndice B), la acción (3.31) se reescribe como

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \left[ -\frac{1}{N} \dot{X}^2 + 2\frac{N^r}{N} \dot{X}^\mu \partial_r X_\mu + \left( N\gamma\gamma^{rs} - \frac{N^r N^s}{N} \right) h_{rs} \right] \right. \quad (3.59)$$

$$\left. - (p-1)\varphi N\gamma \right). \quad (3.60)$$

El cambio ante una transformación conforme para estas nuevas variables es

$$N \rightarrow N \exp(-\omega(p-1)), \quad N^r \rightarrow N^r, \quad \gamma_{rs} \rightarrow \gamma_{rs} \exp(2\omega), \quad \varphi \rightarrow \varphi \exp(-\omega(p+1)). \quad (3.61)$$

De la definición de momento canónico obtenemos  $\frac{(p+1)(p+2)}{2} + 1$  constricciones primarias

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = T \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \frac{1}{N} (\dot{X}_\mu - N^r \partial_r X_\mu),$$

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \approx 0, \quad (1 \text{ constricción}) \quad (3.62)$$

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad (1 \text{ constricción}) \quad (3.63)$$

$$\Pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^r} \approx 0, \quad (p \text{ constricciones}) \quad (3.64)$$

$$\Pi_{rs} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^{rs}} \approx 0, \quad (p(p+1)/2 \text{ constricciones}) \quad (3.65)$$

con lo cual el hamiltoniano total es

$$H_T = \int d^p \xi \left[ \frac{N}{2} \left( \frac{1}{T} \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} P_\mu P^\mu + T \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \gamma\gamma^{rs} h_{rs} - T \varphi \gamma (p-1) \right) + N^r P_\mu \partial_r X^\mu \right. \quad (3.66)$$

$$\left. + \lambda_\varphi \Pi_\varphi + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r + \lambda^{rs} \Pi_{rs} \right].$$



Los paréntesis de Poisson entre dos funciones arbitrarias de la variables canónicas  $A$  y  $B$  está dado por

$$\{A, B\} \equiv \int d^p \xi \left( \frac{\delta A}{\delta X^\mu} \frac{\delta B}{\delta P_\mu} + \frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \Pi_\varphi} + \frac{\delta A}{\delta N} \frac{\delta B}{\delta \Pi} + \frac{\delta A}{\delta N^r} \frac{\delta B}{\delta \Pi_r} + \frac{\delta A}{\delta \gamma^{rs}} \frac{\delta B}{\delta \Pi_{rs}} - (A \leftrightarrow B) \right).$$

En particular

$$\begin{aligned} \{X^\mu(\xi), P_\nu(\xi')\} &= \delta_\nu^\mu \delta^p(\xi - \xi'), & \{N(\xi), \Pi(\xi')\} &= \delta^p(\xi - \xi'), \\ \{N^r(\xi), \Pi_s(\xi')\} &= \delta_s^r \delta^p(\xi - \xi'), & \{\gamma^{rs}(\xi), \Pi_{tu}(\xi')\} &= \delta_{(t}^r \delta_{u)}^s \delta^p(\xi - \xi'), \\ \{\varphi(\xi), \Pi_\varphi(\xi')\} &= \delta^p(\xi - \xi'), \end{aligned}$$

donde los paréntesis en los índices  $t, u$  significa simetrización respecto a dichos índice. Siempre que aparezcan estos paréntesis en los índices, durante lo que resta de la tesis, debe entenderse la simetrización.

Aplicando el método Dirac, debemos pedir ahora que el hamiltoniano (3.66) tenga paréntesis de Dirac débilmente nulos con las constricciones primarias definidas en (3.62)-(3.65) obtenemos  $(p+1)(p+2)/2$  constricciones secundarias

$$\dot{\Pi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} P_\mu P^\mu + T \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \gamma \gamma^{rs} h_{rs} - T \varphi \gamma (p-1) \right) = -\varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \mathcal{H} \approx 0, \quad (3.67)$$

$$\dot{\Pi}_r = -P^\mu \partial_r X_\mu = -\mathcal{H}_r \approx 0, \quad (3.68)$$

$$\dot{\Pi}_{rs} = -\frac{TN\varphi\gamma}{2} (\delta_{(r}^t \delta_{s)}^u - \gamma_{rs} \gamma^{tu}) \Omega_{tu} \approx 0, \quad (3.69)$$

$$\dot{\Pi}_\varphi = N \left( \frac{p-1}{p+1} \right) \varphi^{-\frac{2p}{p+1}} \mathcal{H} + TN \left( \frac{1-p}{p+1} \right) \gamma \gamma^{rs} \Omega_{rs} \approx 0, \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} P_\mu P^\mu + T \varphi^{\frac{2(p-2)}{p+1}} \gamma \gamma^{rs} h_{rs} - T \varphi^{\frac{2p}{p+1}} \gamma (p-1) \right) \approx 0, \\ \mathcal{H}_r &\equiv P_\mu \partial_r X^\mu \approx 0, \\ \Omega_{rs} &\equiv h_{rs} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} \gamma_{rs} \approx 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nótese que la evolución temporal de la restricción  $\dot{\Pi}_\varphi$  no genera constricciones adicionales a las generadas por las constricciones primarias restantes. El hamiltoniano total (3.66) puede reescribirse en términos de estas nuevas constricciones como

$$H_T = \int d^p \xi \left( N \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \mathcal{H} + N^r \mathcal{H}_r + \lambda_\varphi \Pi_\varphi + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r + \lambda^{rs} \Pi_{rs} \right). \quad (3.72)$$

El siguiente paso en el método de Dirac es ver si las constricciones secundarias producen nuevas constricciones. Para ello es necesario en este caso conocer el álgebra de las constricciones secundarias  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_r$  con ellas mismas

$$\{H[f], H[g]\} = H_r [(f \partial_s g - g \partial_s f) \varphi^{-\frac{2(1-p)}{p+1}} \gamma \gamma^{rs}], \quad (3.73)$$

$$\{H[f], H_r[g]\} = H[f \partial_r g - g \partial_r f], \quad (3.74)$$

$$\{H_r[f], H_s[g]\} = H_s[f \partial_r g] + H_r[-g \partial_s f]. \quad (3.75)$$

De esta álgebra y de las ecuaciones (3.67)-(3.70) es evidente que las constricciones  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_r$  no generan nuevas constricciones. Mientras que la evolución temporal de las constricciones secundarias  $\Omega_{rs}$ , permite obtener el multiplicador de Lagrange  $\lambda^{rs}$

$$\dot{\Omega}_{rs} = \lambda_{rs} \varphi^{\frac{2}{p+1}} + 2\partial_r X^\mu \partial_s \left( \frac{1}{T} N \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} P_\mu + N^t \partial_t X^\mu \right) - \frac{2}{p+1} \lambda_\varphi \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \gamma_{rs} \approx 0. \quad (3.76)$$

Sustituyendo la expresión que se obtiene de esta ecuación para  $\lambda^{rs}$  en el hamiltoniano total (3.72), obtenemos el hamiltoniano total de primera clase

$$H_T = \int d^p \xi \left( N \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \mathcal{T} + N^r \mathcal{T}_r + \lambda_\varphi \Pi_\varphi + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r \right), \quad (3.77)$$

donde  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}_r$  y  $\mathcal{T}_\varphi$  son las constricciones redefinidas

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{H} + \frac{2}{T} P_\mu \partial_r (\varphi^{-\frac{2}{p+1}} \Pi^{rs} \partial_s X^\mu), \quad (3.78)$$

$$\mathcal{T}_r \equiv \mathcal{H}_r + 2\partial_r X^\mu \partial_s (\varphi^{-\frac{2}{p+1}} \Pi^{bc} \partial_c X_\mu), \quad (3.79)$$

$$\mathcal{T}_\varphi \equiv \Pi_\varphi + \frac{2}{p+1} \varphi^{-1} \Pi^{rs} \gamma_{rs}. \quad (3.80)$$

Por tanto concluimos que no existen condiciones terciarias para la acción (3.59). La clasificación de estas constricciones es como sigue

*Constricciones de primera clase:*

$$\Pi \approx 0, \quad (3.81)$$

$$\Pi_r \approx 0, \quad (3.82)$$

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{H} + \frac{2}{T} P_\mu \partial_r (\varphi^{-\frac{2}{p+1}} \Pi^{rs} \partial_s X^\mu), \quad (3.83)$$

$$\mathcal{T}_r \equiv \mathcal{H}_r + 2\partial_r X^\mu \partial_s (\varphi^{-\frac{2}{p+1}} \Pi^{st} \partial_t X_\mu), \quad (3.84)$$

$$\mathcal{T}_\varphi \equiv \Pi_\varphi + \frac{2}{p+1} \varphi^{-1} \Pi^{rs} \gamma_{rs} \approx 0, \quad (3.85)$$

*Constricciones de segunda clase:*

$$\Pi_{rs} \approx 0, \quad (3.86)$$

$$\Omega_{rs} \equiv h_{rs} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} \gamma_{rs} \approx 0, \quad (3.87)$$

Esta clasificación se obtiene al calcular el álgebra de Poisson entre todas las constricciones. Si se denotan las constricciones de primera clase como  $G_A$  ( $A = 1, \dots, 2p+3$ ) y las de segunda clase como  $\chi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, p(p+1)$ ), el álgebra de Poisson tiene la siguiente forma general

$$\begin{aligned} \{G_A, G_B\} &\approx C_{AB}^C G_C + B_{AB}^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta, \\ \{G_A, \chi_\alpha\} &\approx A_{A\alpha}^B G_B + D_{A\alpha}^\beta \chi_\beta, \\ \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} &= C_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Una vez que hemos clasificado las constricciones hagamos el conteo de grados de libertad. Tenemos  $D + 1 + (p + 1)(p + 2)/2$  variables canónicas,  $2p + 3$  constricciones de primera clase ( $\Pi$ ,  $\Pi_r$ ,  $\mathcal{T}_\varphi$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}_r$ ) y  $p(p + 1)$  constricciones independientes de segunda clase ( $\Pi_{rs}$ ,  $\Omega_{rs}$ ), con lo cual el número de grados de libertad por punto es  $D + 1 + (p + 1)(p + 2)/2 - (2(p + 1) + 1) - p(p + 1)/2 = D - (p + 1)$ .

Ahora bien, dado que tenemos constricciones de segunda clase en nuestro formalismo necesitamos construir los paréntesis de Dirac. Como hemos visto tenemos dos tipos de constricciones de segunda clase ( $\Pi_{ab}$ ,  $\Omega_{ab}$ ) y su paréntesis de Poisson está dado por

$$\{\Omega_{rs}[f], \Pi_{tu}[g]\} = \int d^p \xi f g \frac{1}{2} \varphi^{\frac{2}{p+1}} (\gamma_{rt} \gamma_{su} + \gamma_{ru} \gamma_{ts}), \quad (3.89)$$

por lo que el paréntesis de Dirac está dado por la expresión

$$\begin{aligned} \{F, G\}^* &= \{F, G\} + \int d^p \xi \{F, \Omega_{rs}(\xi)\} \gamma^{rt} \gamma^{su} \varphi^{-\frac{2}{p+1}}(\xi) \{\Pi_{tu}(\xi), G\} \\ &\quad - \int d^p \xi \{F, \Pi_{rs}(\xi)\} \gamma^{rt} \gamma^{su} \varphi^{-\frac{2}{p+1}}(\xi) \{\Omega_{tu}(\xi), G\}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

con lo cual los paréntesis de Dirac no nulos de las variables canónicas son

$$\{X^\mu(\xi), p_\nu(\xi')\}^* = \delta_\nu^\mu \delta^p(\xi - \xi'), \quad (3.91)$$

$$\{\gamma^{rs}(\xi), p_\mu(\xi')\}^* = \partial_t [(\gamma^{rt} \gamma^{su} + \gamma^{ru} \gamma^{st}) \varphi^{-\frac{2}{p+1}} \partial_u X_\mu(\xi')] \delta^p(\xi - \xi'), \quad (3.92)$$

$$\{\gamma^{rs}(\xi), \Pi_\varphi(\xi')\}^* = \frac{2}{p+1} \varphi^{-1} \gamma^{rs} \delta^p(\xi - \xi'). \quad (3.93)$$

El álgebra de Dirac para las constricciones de esta teoría se siguen de (3.90) y los paréntesis no nulos hasta cuadrados de constricciones de segunda clase son

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}[f], \mathcal{T}[g]\}^* &= \mathcal{T}_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \varphi^{\frac{2(p-1)}{p+1}} \gamma \gamma^{rs}], \\ \{\mathcal{T}[f], \mathcal{T}_r[g]\}^* &= \mathcal{T}[f \partial_r g - g \partial_r f], \\ \{\mathcal{T}_r[f], \mathcal{T}_s[g]\}^* &= \mathcal{T}_s[f \partial_r g] - \mathcal{T}_r[g \partial_s f]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Nótese que esta álgebra coincide con el álgebra (3.49) de la acción de Nambu-Goto como debe ser.

Para finalizar con esta discusión obtengamos las transformaciones de norma (3.37) a través del hamiltoniano extendido, tal y como lo hicimos para el caso de la cuerda.

La expresión de la acción extendida para el lagrangiano (4.58) es

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^p \xi \left( \dot{X}^\mu P_\mu + \dot{\Pi} \Pi + \dot{N}^a \Pi_r + \dot{\gamma}^{rs} \Pi_{rs} + \dot{\varphi} \Pi_\varphi - N \varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \mathcal{T} - N^a \mathcal{T}_a \right. \\ &\quad \left. - \lambda_\varphi \mathcal{T}_\varphi - \lambda \Pi - \lambda^r \Pi_r - \rho \mathcal{T} - \rho^r \mathcal{T}_r - \rho^{rs} \Omega_{rs} \right), \end{aligned} \quad (3.95)$$

mientras que el generador de las transformaciones de norma de esta acción extendida es

$$G = \int d^p \xi (\nu \Pi + \nu^r \Pi_r + \kappa \mathcal{T}_\varphi + \mu \mathcal{T} + \mu^r \mathcal{T}_r). \quad (3.96)$$

Como hemos discutido anteriormente, no todas las funciones que acompañan a las constricciones en el generador son independientes. En este caso sólo  $p + 2$  lo son, ya que tenemos  $p + 2$  constricciones primarias de primera clase. Las ecuaciones diferenciales que satisfacen los coeficientes que acompañan a las constricciones en el generador son

$$\nu^r = \frac{D\mu^r}{Dt} + \{\mu^r, H_E\} + \varphi^{\frac{2(p-1)}{p+1}} \gamma\gamma^{rs} (\mu\partial_s - \partial_s\mu) N\varphi^{\frac{1-p}{p+1}} + \mu^s \partial_s N^r - N^s \partial_s \mu^r, \quad (3.97)$$

$$\varphi^{\frac{1-p}{p+1}} \nu + \left(\frac{1-p}{p+1}\right) N\varphi^{-\frac{2p}{p+1}} \kappa = \frac{D\mu}{Dt} + \{\mu, H_E\} + (\mu\partial_r - \partial_r\mu) N^r + (\mu^r \partial_r - \partial_r \mu^r) N\varphi^{-\frac{2p}{p+1}}. \quad (3.98)$$

Eligiendo los coeficientes en la forma

$$\mu = \eta^0 N\varphi^{\frac{1-p}{p+1}}, \quad (3.99)$$

$$\mu^r = \eta^0 N^r + \eta^r, \quad (3.100)$$

$$\kappa = \eta^i \partial_i \varphi - \omega(p+1)\varphi, \quad (3.101)$$

obtenemos las siguientes transformaciones de norma de los campos

$$\delta X^\mu = \{X^\mu, G\} = \eta^i \partial_i X^\mu, \quad (3.102)$$

$$\delta\varphi = \{\varphi, G\} - \eta^i \partial_i \varphi - \omega(p+1)\varphi, \quad (3.103)$$

$$\delta\gamma_{rs} = \{\gamma_{rs}, G\} = \eta^i \partial_i \gamma_{rs} + \partial_r \eta^i \gamma_{is} + \partial_s \eta^i \gamma_{ri} + 2\omega\gamma_{rs}, \quad (3.104)$$

$$\delta N = \{N, G\} = \eta^0 \dot{N} + \eta^0 N - 2NN^r \partial_r \eta^0 + \eta^r \partial_r N - N\partial_r \eta^r - (p-1)\omega N, \quad (3.105)$$

$$\delta N^r = \{N^r, G\} = \partial_0(\eta^0 N) - \partial_s \eta^0 (N^2 \gamma\gamma^{rs} + N^r N^s) + \eta^s \partial_s N^r - N^s \partial_s \eta^r. \quad (3.106)$$

Por último mencionemos que el formalismo canónico de la acción tipo Polyakov (3.13) puede obtenerse a partir del de la membrana conforme que hemos discutido, tomando la condición de norma  $\varphi = 1$ .

## 3.4 Acciones supersimétricas

### 3.4.1 Super $p$ -branas en el super espacio curvo de $D$ dimensiones

En [7] se discute el problema general del acoplamiento de objetos extendidos de  $p$  dimensiones a supergravedad en  $D$  dimensiones. En esta subsección discutimos este mismo problema pero aplicado al caso en que adicionalmente tenemos simetría de Weyl<sup>3</sup>. En el capítulo 2 se mostró que la forma adecuada de introducir supersimetría en el espacio-tiempo para la teoría de supercuerdas, es añadiendo a la acción un término de Wess-Zumino. En el caso de  $p$ -branas se utiliza la misma idea. Comenzaremos la construcción

<sup>3</sup>La diferencia entre las convenciones de [7] y las que aquí se utilizan son: a)  $T=1$ , b) un signo global en la acción y c) un factor de  $\frac{1}{(p+1)!}$  en el término de Wess-Zumino

de las super  $p$ -branas considerando la acción bosónica con simetría de Weyl para una  $p$ -brana evolucionando en un espacio-tiempo curvo y que está acoplada a una  $(p+1)$ -forma  $B$  ec. (3.40)

$$S[X^\mu, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \left\{ \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} - \varphi(p-1) \right) + \frac{2}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{\mu_{p+1}} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_2 \mu_1} \right\}. \quad (3.107)$$

Para introducir espinores en una variedad curva, es necesario introducir el 'einbein'  $E_\mu^\alpha$ , el cual se define a través de la expresión

$$G_{\mu\nu} = E_\mu^\alpha E_\nu^b \eta_{ab}, \quad (3.108)$$

donde  $a$  es índice del espacio tangente. Si se define el 'pull-back' del 'einbein' como

$$E_i^\alpha = \partial_i X^\mu E_\mu^\alpha, \quad (3.109)$$

la acción (3.107) se reescribe como

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \left\{ \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} E_i^\alpha E_j^b \eta_{ab} - \varphi(p-1) \right) + \frac{2}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{\mu_1} E_{i_2}^{\mu_2} \dots E_{i_{p+1}}^{\mu_{p+1}} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_2 \mu_1} \right\}. \quad (3.110)$$

La manera de considerar super  $p$ -branas es introducir las coordenadas  $Z^M$  de un super espacio-tiempo curvo

$$Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha), \quad (3.111)$$

y el 'supereinbein'  $E_M^A(Z)$ , donde  $M = \mu, \alpha$  son índices del super-espacio y  $A = a, \alpha$  son índices del espacio tangente. Por simplicidad al igual que en el caso de cuerdas consideraremos que  $\theta^\alpha$  es un espinor de Majorana, además se considera sólo una supersimetría ( $N = 1$ ) debido a que este es el único caso posible para super  $p$ -branas con  $p > 1$  [8]. En este super espacio el 'pull-back' del 'einbein' está dado por

$$E_i^A = \partial_i Z^M E_M^A. \quad (3.112)$$

Para supersimetrizar la acción lo que se hace es reemplazar el 'pull-back' (3.109) del espacio bosónico por el 'pull-back' (3.112) del super-espacio. La acción que se obtiene después de este reemplazo y que describe a las super  $p$ -branas es

$$S[Z^M, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \left\{ \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} E_i^\alpha E_j^b \eta_{ab} - \varphi(p-1) \right) + \frac{2}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{A_1} \dots E_{i_{p+1}}^{A_{p+1}} B_{A_{p+1} \dots A_2 A_1} \right\}. \quad (3.113)$$

Esta acción tiene la virtud de que se reduce a la acción de Green-Schwarz para supercuerdas cuando  $p = 1$ . Nótese que esta acción al igual que (3.40), tiene un término cinético, un término cosmológico y un término de Wess-Zumino. Este último término al igual que en el caso de cuerdas puede ser construido a partir de una  $(p + 2)$  forma  $H$  en el super espacio, que puede ser escrita como  $H = dB$ . El término de Wess-Zumino es entonces la integral del pullback de la  $(p + 1)$  forma sobre el volumen de mundo. La acción (3.113) tiene las siguientes invariancias de norma locales en el volumen de mundo:

*reparametrizaciones del volumen de mundo*

$$\delta Z^M = \eta^i \partial_i Z^M, \quad (3.114)$$

$$\delta \varphi = \eta^i \partial_i \varphi - \omega(p + 1)\varphi, \quad (3.115)$$

$$\delta g_{ij} = \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{jk} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}, \quad (3.116)$$

*transformaciones fermiónicas  $\kappa$*

$$\delta E^a = 0, \quad (3.117)$$

$$\delta E^\alpha = (1 + \Gamma)^\alpha_\beta \kappa^\beta, \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\varphi^{\frac{p-1}{p+1}}g^{ij}) &= -\frac{4i\zeta}{p!}(1 + \Gamma)^\alpha_\beta \kappa^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\alpha} E_n^\gamma \varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{n i_1 \dots i_p} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_p}^{\alpha_p} \\ &+ \frac{2}{(p+1)! \varphi \sqrt{-g}} (\dots 2i\varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{im} E_l^\alpha E_m^\alpha (\Gamma^\alpha)_{\alpha\beta} + (p+1)\Lambda_\beta) \kappa^\beta \times \\ &\quad \varepsilon^{i_1 \dots i_p i} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_1} (E_{i_1}^{\alpha_1} E_{j_1 \alpha_1} \dots E_{i_p}^{\alpha_p} E_{j_p \alpha_p} + \\ &\quad \varphi^{\frac{2}{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} E_{j_1 \alpha_1} \dots E_{i_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} E_{j_{p-1} \alpha_{p-1}} g_{i_p j_p} + \dots + \varphi^{\frac{2p}{p+1}} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p}) \\ &+ 2\sqrt{-g}\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \delta E^\beta \Lambda_\beta, \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde  $\kappa^\beta(\xi)$  es un espinor en el espacio-tiempo y un escalar en el volumen de mundo. La variación de los campos  $E$  está definida como

$$\delta E^A \equiv \delta Z^M E_M^A, \quad (3.120)$$

y la matriz gamma está dada por la expresión

$$(\Gamma)^\alpha_\beta = \frac{\zeta}{(p+1)! \varphi \sqrt{-g}} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} (\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}})^\alpha_\beta. \quad (3.121)$$

donde  $\zeta = (-1)^{(p+1)(p-2)/4}$ . Esta invariancia requiere del siguiente conjunto de condiciones adicionales sobre la  $(p + 2)$  forma  $H$  y sobre la torsión  $T^4$  en el super espacio-tiempo <sup>5</sup>.

$$T_{\alpha\beta}^a = -2i(\Gamma^a)_{\alpha\beta}, \quad (3.122)$$

<sup>4</sup>Aunque para la torsión estamos utilizando la misma letra que hemos utilizado para la tensión, no debe haber confusión debido a que la tensión siempre aparecerá con índices.

<sup>5</sup>En la convención que aquí utilizamos para  $T_{\alpha\beta}^a$  hay un factor de  $-2i$  respecto a la convención utilizada en [7]. Como consecuencia de este factor y de los mencionados anteriormente en otro pie de página, tenemos diferentes factores para las componentes de la  $(p + 2)$  forma  $H$ .

$$\eta_{c(a} T_{b)}^c = \eta_{ab} \Lambda_\alpha, \quad (3.123)$$

$$H_{\alpha a_{p+1} \dots a_1} = (p+1) \Lambda_\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_{p+1}})^\beta_\alpha, \quad (3.124)$$

$$H_{\alpha \beta a_p \dots a_1} = 2i \zeta (-1)^{p+1} (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_\beta \alpha, \quad (3.125)$$

$$H_{\alpha \beta \gamma A_1 \dots A_{p-1}} = 0. \quad (3.126)$$

A continuación se esboza de manera breve la forma en la cual se puede verificar la invariancia fermiónica (3.117)-(3.119) de la acción (3.113) y como está invariancia  $\kappa$  induce condiciones sobre las componentes de las formas  $H$  y  $T$ . El primer paso es calcular la expresión de la variación del 'einbein', para ello se utiliza la ecuación de estructura

$$T^A = dE^A + E^B \Omega_B^A, \quad (3.127)$$

donde la dos forma  $T^A$  es la torsión y la uno forma  $\Omega$  es la conexión en el haz tangente del super espacio

$$T^A = \frac{1}{2} E^B \wedge E^C T_{CB}^A. \quad (3.128)$$

De esta ecuación se obtiene que

$$\delta E_i^A = \partial_i (\delta Z^M E_M^A) - \delta E^B E_i^C T_{CB}^A - E_i^B \delta Z^M \Omega_{MB}^A + \delta E^B \partial_i Z^N \Omega_{NB}^A. \quad (3.129)$$

Considerando el grupo de Lorentz como el grupo de estructura del haz tangente, de forma tal que

$$\Omega_b^a = \Omega_b^a = 0, \quad (3.130)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = \Omega_{(b}^a \eta_{c)a} = 0, \quad (3.131)$$

se obtiene para  $\delta E_i^\alpha$

$$\delta E_i^\alpha = -\delta E^\beta E_i^\gamma T_{\gamma\beta}^\alpha - \delta E^\beta E_i^c T_{c\beta}^\alpha - E_i^b \delta Z^M \Omega_{Mb}^\alpha. \quad (3.132)$$

De esta relación se obtiene que la variación de la acción es

$$\begin{aligned} \delta S = & -T \int d^{p+1} \xi \left[ \frac{1}{2} \delta (\sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij}) (E_i^\alpha E_j^\beta \eta_{\alpha\beta} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij}) - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \delta E^\beta E_i^\alpha T_{\alpha\beta}^\alpha E_{ja} \right. \\ & \left. - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \delta E^\beta E_i^c T_{c\beta}^\alpha E_{ja} + \frac{1}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{A_1} \dots E_{i_{p+1}}^{A_{p+1}} \delta E^\alpha H_{\alpha A_{p+1} \dots A_1} \right] \quad (3.133) \end{aligned}$$

Examinando los términos en  $\delta S$  de acuerdo al número de uno formas  $E^\alpha$  que ellos contienen, podemos ver que aquellos con  $(p+1)$   $E^\alpha$ ,  $(p)$   $E^\alpha$ , ..., y dos  $E^\alpha$ , vienen sólo del término de Wess-Zumino y por tanto ellos deben anularse separadamente, esto requiere las restricciones (3.126)

$$H_{\alpha \beta \gamma A_1 \dots A_{p-1}} = 0.$$

Los términos lineales en  $E^\alpha$  son

$$-\sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \delta E^\beta E_i^\alpha T_{\alpha\beta}^\alpha E_{ja} + \frac{1}{p!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_p}^{\alpha_p} E_{i_{p+1}}^{\beta} \delta E^\alpha H_{\alpha \beta \alpha_p \dots \alpha_1}, \quad (3.134)$$

utilizando la identidad

$$\delta E^\beta = \Gamma_\alpha^\beta \delta E^\alpha + (1 - \Gamma^2) \kappa^\beta, \quad (3.135)$$

en el término cinético e imponiendo las restricciones (3.122) y (3.125)

$$T_{\alpha\beta}^a = -2i(\Gamma^a)_{\alpha\beta}, \quad H_{\alpha\beta a_1 \dots a_p} = 2i\zeta(-1)^{p+1}(\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\beta\alpha},$$

obtenemos que uno de los términos que provienen del primer término en (3.134) se elimina con el segundo término de la misma ecuación (3.134). Los términos lineales en  $E^\alpha$  que no se eliminan pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p!} \varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{ni} E_n^\gamma (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\alpha} \delta E^\alpha \varepsilon^{j i_1 \dots i_p} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_p}^{\alpha_p} (E_i^\alpha E_{j\alpha} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij}) \\ & - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{im} (1 - \Gamma^2) \kappa^\beta E_i^\gamma T_{\gamma\beta}^a E_{ma}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

de la misma manera los términos que no contienen  $E^\alpha$  son

$$-\sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \delta E^\beta E_i^\alpha E_j^\beta (T_a)_{b\beta} + \frac{1}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} \delta E^\alpha H_{\alpha a_{p+1} \dots a_1}. \quad (3.137)$$

Introduciendo nuevamente la identidad (3.135), en el término cinético e imponiendo las restricciones (3.123) y (3.124)

$$\eta_{c(a} T_{b)\alpha}^\zeta = \eta_{ab} \Lambda_\alpha, \quad H_{\alpha a_{p+1} \dots a_1} = \zeta(p+1) \Lambda_\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_{p+1}})^\beta_\alpha,$$

obtenemos nuevamente que uno de los términos que proviene del primer término en (3.137) se elimina con el segundo término de la misma ecuación. Los términos que no contienen a  $E^\alpha$  pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} & - \frac{\zeta}{(p+1)!} \varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{ij} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} \dots E_{i_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} \Lambda_\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_{p+1}})^\beta_\alpha \delta E^\alpha (E_i^\alpha E_{j\alpha} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij}) \\ & - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} E_i^\alpha E_{j\alpha} (1 - \Gamma^2) \kappa^\alpha \Lambda_\alpha. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Utilizando la identidad

$$\Gamma^2 = \frac{1}{(p+1)! (\varphi \sqrt{-g})^2} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} \varepsilon^{j_{p+1} \dots j_1} E_{i_1}^{\alpha_1} E_{j_1 \alpha_1} \dots E_{i_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} E_{j_{p+1} \alpha_{p+1}}, \quad (3.139)$$

la cual puede reescribirse de manera equivalente como

$$\begin{aligned} 1 - \Gamma^2 &= \frac{1}{(p+1)! (\varphi \sqrt{-g})^2} \varepsilon^{i_1 \dots i_p i} \varepsilon^{j j_p \dots j_1} \times \\ & (E_{i_1}^{\alpha_1} E_{j_1 \alpha_1} \dots E_{i_p}^{\alpha_p} E_{j_p \alpha_p} + \varphi^{\frac{2}{p+1}} E_{i_1}^{\alpha_1} E_{j_1 \alpha_1} \dots E_{i_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} E_{j_{p-1} \alpha_{p-1}} g_{i_p j_p} + \dots + \varphi^{\frac{2p}{p+1}} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p}) \\ & \times (E_i^\alpha E_{j\alpha} - \varphi^{\frac{2}{p+1}} g_{ij}), \end{aligned} \quad (3.140)$$

en el segundo término de la ecuación (3.136) y en el segundo término de la ecuación (3.138), e insertando estas ecuaciones en la variación de la acción (3.133) así como considerando la variación (3.117) obtenemos finalmente  $\delta S = 0$ .



### 3.4.2 Super $p$ -branas en el super espacio plano de $D$ dimensiones

Consideremos ahora que el espacio-tiempo de fondo de  $D$  dimensiones tiene métrica de Minkowski [38]

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (3.141)$$

La acción deseada se sigue de la acción (3.113) poniendo la métrica plana

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \left\{ \sqrt{-g} \left( \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \Pi_i^a \Pi_{aj} - \varphi(p-1) \right) + \frac{2}{(p+1)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} \Pi_{i_1}^{A_1} \dots \Pi_{i_{p+1}}^{A_{p+1}} B_{A_{p+1} \dots A_1} \right\}, \quad (3.142)$$

nótese que estamos utilizando la notación  $\Pi_\mu^a$  en vez de  $E_\mu^a$  para enfatizar que estamos en el caso plano. En el super espacio plano con  $N = 1$  tenemos <sup>6</sup>

$$\Pi_\mu^a = (\delta_\mu^a, -i\Gamma_{\alpha\beta}^a \theta^\beta), \quad \Pi_\mu^\alpha = (0, \delta_\beta^\alpha), \quad (3.143)$$

con lo cual

$$\Pi^a = dX^a - i\bar{\theta}\Gamma^a d\theta, \quad \Pi^\alpha = d\theta^\alpha. \quad (3.144)$$

Recuérdese que estas son las formas invariantes ante el grupo de supersimetría, esto se discutió con detalle en el capítulo anterior. En este caso las condiciones requeridas para tener invariancia de norma fermiónica (3.122) y (3.126) se reducen a

$$d\Pi^a = T^a = \frac{1}{2} \Pi^B \Pi^A T_{AB}^a = -id\theta^\alpha d\theta^\beta (\Gamma^a)_{\alpha\beta}, \quad (3.145)$$

$$H = \frac{1}{(p+2)!} \Pi^{A_1} \dots \Pi^{A_{p+2}} H_{A_{p+2} \dots A_1} = -\frac{\zeta^i}{p!} \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_p} d\theta^\alpha d\theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta}, \quad (3.146)$$

por tanto de estas condiciones obtenemos que la  $(p+2)$  forma  $H$  es cerrada si

$$dH = 0 \Leftrightarrow (\Gamma^{a_p})_{(\gamma\delta} (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta}) = 0. \quad (3.147)$$

En el super-espacio plano esta ecuación implica la existencia (global) de una  $(p+1)$  forma  $B$  tal que  $H = dB$  <sup>7</sup>. Los valores de  $(p, D)$  para los cuales la ecuación (3.147) es válida cae en cuatro secuencias llamadas las secuencias  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{O}$ .

$$\begin{array}{ll} \mathcal{R}: & (1,3) \quad (2,4) \\ \mathcal{C}: & (1,4) \quad (2,5) \quad (3,6) \\ \mathcal{H}: & (1,6) \quad (2,7) \quad (3,8) \quad (4,9) \quad (5,10) \\ \mathcal{O}: & (1,10) \quad (2,11). \end{array}$$

<sup>6</sup>La diferencia de convenciones entre [8], [38] y el presente trabajo son: en [8]  $T_{\alpha\beta}^a = -i(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \rightarrow \Pi_\alpha^a = -\frac{i}{2}(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \theta^\beta$  mientras que en [38]  $T_{\alpha\beta}^a = 2i(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \rightarrow \Pi_\alpha^a = i(\Gamma^a)_{\alpha\beta} \theta^\beta$ .

<sup>7</sup>Notese que para  $p = 1$ , la expresión (3.146) coincide con (2.79), mientras que la expresión (3.147) coincide con (2.78), como debe ser.

El tipo de espinor  $\theta$  correspondiente está también determinado (ver apéndice C). En la discusión siguiente seguiremos considerando espinores de Majorana ya que como se discute en [38] y en el apéndice, es posible escribir cualquier espinor en términos de uno que satisfaga condiciones generalizadas de Majorana.

Para determinar  $B$  partimos de una reescritura de la ecuación (3.146)

$$H = d \left( -\frac{i\zeta}{p!} \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_p} d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta} \right) - \frac{i\zeta}{p!} p \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} (-i) d\theta^\gamma d\theta^\delta d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma^{a_p})_{(\gamma\delta} (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha)\beta}, \quad (3.148)$$

pero de la ec.(3.147) tenemos

$$(\Gamma^{a_p})_{(\gamma\delta} (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha)\beta} = -(\Gamma^{a_p})_{\beta(\alpha} (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta)}, \quad (3.149)$$

con lo cual, el segundo término de la ecuación (3.148) se reescribe como

$$-\frac{i\zeta}{p!} p \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} dX^{a_p} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta} - pH, \quad (3.150)$$

y la ecuación (3.148) queda reescrita en la forma

$$(p+1)H = d \left( -\frac{i\zeta}{p!} \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_p} d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta} \right) - \frac{i\zeta}{p!} p \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} dX^{a_p} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta}. \quad (3.151)$$

Aplicando el mismo procedimiento a la  $(p+1)$ -forma del segundo término de la derecha de esta ecuación tenemos

$$p \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta} = d(\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} d\theta^\gamma \theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta}) + (p-1) \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-2}} dX^{a_{p-1}} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta},$$

de hecho es posible mostrar que en general se tienen para la  $(p-r+2)$  forma que

$$(p-r+1) \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-r}} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta} = d(\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-r}} d\theta^\gamma \theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta}) + (p-r) \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-(r+1)}} dX^{a_{p-r}} d\theta^\gamma d\theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\gamma\delta}. \quad (3.152)$$

Con la ayuda de esta relación de recurrencia tenemos

$$\begin{aligned} (p+1)H &= -\frac{i\zeta}{p!} \left[ d(\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_p} d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta}) + d(\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta}) dX^{a_p} \right. \\ &\quad \left. + d(\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-2}} d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta}) dX^{a_{p-1}} dX^{a_p} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + dX^{a_1} \dots dX^{a_p} d\theta^\alpha d\theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{i\zeta}{p!} d \left[ (\Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_p} + \Pi^{a_1} \dots \Pi^{a_{p-1}} dX^{a_p} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + dX^{a_1} \dots dX^{a_p}) d\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\alpha\beta} \right], \end{aligned}$$

sustituyendo  $dX^a = \Pi^a + id\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma^a)_{\alpha\beta}$  y notando que los términos que contienen  $r$  factores de la forma  $id\theta^\alpha \theta^\beta (\Gamma^a)_{\alpha\beta}$  y  $(p-r)$  factores de la forma  $\Pi^a$  tienen coeficiente

$$\sum_{n=r}^p \binom{n}{r} = \binom{p+1}{r+1},$$

obtenemos finalmente

$$H = -\frac{\zeta}{(p+1)!} d \left[ \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r+1} \Pi^{a_p} \dots \Pi^{a_{r+1}} (id\theta^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^{a_r} \theta^\beta) \dots (id\theta^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^{a_1} \theta^\delta) \right] id\theta^\epsilon (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\epsilon\delta} \theta^\delta, \quad (3.153)$$

con lo cual

$$B = -\frac{\zeta}{(p+1)!} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r+1} \Pi^{a_p} \dots \Pi^{a_{r+1}} id\theta^\alpha \theta^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^{a_r} \dots id\theta^\gamma \theta^\delta \Gamma_{\gamma\delta}^{a_1} id\theta^\epsilon \theta^\delta (\Gamma_{a_1 \dots a_p})_{\epsilon\delta}. \quad (3.154)$$

Tenemos ya todos los ingredientes para poder escribir las 12 diferentes acciones de objetos extendidos que evolucionan en un espacio-tiempo supersimétrico, en el capítulo 2 hemos descrito ya esta acción para la cuerda, la cual comprende 4 posibilidades ( $D = 3, 4, 6$  y  $10$ ). Escribamos ahora explícitamente las acciones restantes, las convenciones sobre los espinores están dadas en el apéndice C.

*Supermembranas* ( $D = 4, 5, 7$  y  $11$ )

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^3\xi \left[ \sqrt{-g} (\varphi^{1/3} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - \varphi) + i\epsilon^{ijk} \bar{\theta}_{\mu\nu} \partial_i \theta \left( \Pi_j^\mu \Pi_k^\nu + i\Pi_j^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta - \frac{1}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta \right) \right], \quad (3.155)$$

$$\Gamma = \frac{1}{3! \varphi \sqrt{-g}} \epsilon^{ijk} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (3.156)$$

*Super 3-Brana* ( $D = 6$ )

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^4\xi \left[ \sqrt{-g} (\varphi^{1/2} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - 2\varphi) - \frac{2}{4!} \epsilon^{ijkl} \bar{\theta}_{\mu\nu\rho} \mathcal{M} \partial_l \theta \times (4\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho + 6i\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta - 4\Pi_i^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta - i\bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta) \right] \quad (3.157)$$

$$\Gamma = \frac{-i}{4! \varphi \sqrt{-g}} \epsilon^{ijkl} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \delta\theta = \mathcal{M}(1 + \Gamma)\kappa, \quad (3.158)$$

*Super 3-Brana* ( $D = 8$ )

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^4\xi \left[ \sqrt{-g} (\varphi^{1/2} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - 2\varphi) - \frac{2}{4!} \epsilon^{ijkl} \bar{\theta}_{\mu\nu\rho} \Gamma_9 \partial_l \theta \times (4\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho + 6i\Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta - 4\Pi_i^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta - i\bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta) \right] \quad (3.159)$$

$$\Gamma = \frac{-i}{4! \varphi \sqrt{-g}} \epsilon^{ijkl} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \delta\theta = \Gamma_9(1 + \Gamma)\kappa, \quad (3.160)$$

Super 4-brana ( $D = 9$ )

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^5 \xi \left[ \sqrt{-g} (\varphi^{3/5} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - 3\varphi) + \frac{2}{5!} \varepsilon^{ijklm} \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_m \theta \times \right. \\ \left. (5 \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma + 10i \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta - 10 \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta \right. \\ \left. - 5i \Pi_i^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta + \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta) \right] \quad (3.161)$$

$$\Gamma = \frac{-i}{5! \varphi \sqrt{-g}} \varepsilon^{ijklm} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \Pi_m^\lambda \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}, \quad (3.162)$$

Super 5-brana ( $D = 10$ )

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^6 \xi \left[ \sqrt{-g} (\varphi^{2/3} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - 4\varphi) + \frac{2}{6!} \varepsilon^{ijklmn} \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma\lambda} \partial_n \theta \times \right. \\ \left. (5 \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \Pi_m^\lambda + \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \bar{\theta} \Gamma^\lambda \partial_m \theta \right. \\ \left. + \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta \bar{\theta} \Gamma^\lambda \partial_m \theta + \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta \bar{\theta} \Gamma^\lambda \partial_m \theta \right. \\ \left. + \Pi_i^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta \bar{\theta} \Gamma^\lambda \partial_m \theta \right. \\ \left. + \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\rho \partial_k \theta \bar{\theta} \Gamma^\sigma \partial_l \theta \bar{\theta} \Gamma^\lambda \partial_m \theta) \right], \quad (3.163)$$

$$\Gamma = \frac{1}{6! \varphi \sqrt{-g}} \varepsilon^{ijklmn} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\sigma \Pi_m^\lambda \Pi_n^\tau \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma\lambda\tau}. \quad (3.164)$$

Finalizamos esta discusión de las super  $p$ -branas con invariancia de Weyl, señalando que podemos construir todas las expresiones que aquí hemos deducido a partir de las respectivas expresiones de super  $p$ -branas sin invariancia de Weyl [7], por introducir el campo escalar auxiliar  $\varphi$  elevado a la potencia adecuada, en todas las expresiones donde aparezca la métrica, de manera tal que los términos sean invariantes de Weyl.

## 3.5 D-branas

### 3.5.1 Acción de Dirac-Born-Infeld

Comenzaremos nuestra discusión introduciendo la acción de  $Dp$ -branas análoga a la acción de Nambu-Goto de  $p$ -branas. Esta acción es conocida como la acción de Dirac-Born-Infeld y está dada por

$$S[X^\mu, A_i] = -T \int d^{p+1} \xi \exp(-\phi) \sqrt{-\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij})}, \quad (3.165)$$

donde

$$\mathcal{F}_{ij} \equiv F_{ij} - B_{ij}, \quad (3.166)$$

son las componentes de un campo de fuerza 'modificado',  $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$  es el campo de fuerza  $U(1)$  correspondiente al campo de norma  $A_i$  sobre el volumen de mundo, mientras que  $\phi$ ,  $h_{ij}$  y  $B_{ij}$  son respectivamente los 'pullbacks' al volumen de mundo de los campos: dilatación de fondo, métrica inducida y la dos-forma antisimétrica de Neveu-Schwarz

$$h_{ij}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} \eta_{\mu\nu}(X(\xi)), \quad B_{ij}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^j} B_{\mu\nu}(X(\xi)), \quad (3.167)$$

Las convenciones de los índices son las mismas que utilizamos en el análisis de las  $p$ -branas.

Las simetrías de esta acción son las siguientes:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi) + a^\mu, \\ A'_i(\xi) &= A_i(\xi). \end{aligned} \quad (3.168)$$

2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi') &= X^\mu(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} A'_j(\xi') &= A_i(\xi), \end{aligned} \quad (3.169)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\xi)$ .

3.- Invariancia de norma

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi) &= X^\mu(\xi), \\ B'_{ij}(\xi) &= B_{ij}(\xi) + \partial_i \chi_j(\xi) - \partial_j \chi_i(\xi), \\ A'_i(\xi) &= A_i(\xi) - \chi_i(\xi) + \partial_i \lambda(\xi). \end{aligned} \quad (3.170)$$

Las ecuaciones de movimiento de los campos  $X^\mu$  y  $A_i$  están dadas respectivamente por

$$\partial_i \left( \exp(-\phi) \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} \left( (h + \mathcal{F})^{ij} + (h - \mathcal{F})^{ij} \right) \partial_j X^\mu \right) = 0, \quad (3.171)$$

$$\partial_i \left( \exp(-\phi) \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} \left( (h + \mathcal{F})^{ij} - (h - \mathcal{F})^{ij} \right) \right) = 0, \quad (3.172)$$

en estas ecuaciones  $(h + \mathcal{F})^{ij}$  es la inversa de  $(h + \mathcal{F})_{ij}$  y se ha utilizado la propiedad de que  $(h + \mathcal{F})^{ij} = (h - \mathcal{F})^{ji}$ .

### 3.5.2 Acción de Abou-Hull

Debido a la raíz cuadrada, la acción (3.165) es altamente no lineal y por tanto difícil de estudiar. En [34], Abou y Hull propusieron una acción diferente para describir a

las D-branas, la cual es equivalente clásicamente a la acción de Dirac-Born-Infeld. La característica principal de esta nueva acción es ser cuadrática en el campo de fuerza  $F_{ij}$ . Esto se logra al introducir la métrica intrínseca  $g_{ij}$  del volumen de mundo, de manera tal que la acción se expresa en la forma

$$S[X^\mu, A_i, g_{ij}] = -\frac{T}{4} \int d^{p+1}\xi \exp(-\phi) (-h)^{1/4} (-g)^{1/4} [g^{ij} \mathcal{H}_{ij} - (p-3)]. \quad (3.173)$$

donde

$$\mathcal{H}_{ij} = h_{ij} - h^{kl} \mathcal{F}_{ik} \mathcal{F}_{lj}. \quad (3.174)$$

Para mostrar la equivalencia clásica de esta acción con la acción (3.165), utilizamos la ecuación de movimiento de la métrica  $g_{ij}$

$$\mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} (g^{kl} \mathcal{H}_{kl} - (p-3)) = 0. \quad (3.175)$$

Tomando su traza para  $p \neq 3$  se obtiene

$$g^{ij} \mathcal{H}_{ij} = p+1, \quad (3.176)$$

con lo cual la solución de la ecuación de movimiento (3.175) es

$$g_{ij}(\xi) = \mathcal{H}_{ij}(\xi). \quad (3.177)$$

Al sustituir esta relación en la acción (3.165) obtenemos

$$S = -T \int d^{p+1}\xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}}, \quad (3.178)$$

donde  $\mathcal{H} \equiv \det \mathcal{H}_{ij}$ . Y como

$$\begin{aligned} (-h)^{\frac{1}{4}} [-\det(h_{ij} - h^{kl} \mathcal{F}_{ik} \mathcal{F}_{lj})]^{\frac{1}{4}} &= (-h)^{\frac{1}{4}} [-\det(h_{ik} + \mathcal{F}_{ik}) h^{kl} (h_{lj} - \mathcal{F}_{lj})]^{\frac{1}{4}} \\ &= |\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij})|^{\frac{1}{4}} |\det(h_{ij} - \mathcal{F}_{ij})|^{\frac{1}{4}} \\ &= |-\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij})|^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (3.179)$$

obtenemos la equivalencia clásica entre ambas acciones para  $p \neq 3$ . En el último renglón de la ecuación anterior se utilizó la igualdad

$$\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij}) = \det(h_{ij} - \mathcal{F}_{ij}). \quad (3.180)$$

Para el caso  $p = 3$  la ecuación de movimiento de la métrica  $g_{ij}$  es

$$\mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} g^{kl} \mathcal{H}_{kl} = 0, \quad (3.181)$$

de la cual se obtiene la relación

$$\mathcal{H}_{ij} (-\mathcal{H})^{-\frac{1}{4}} = g_{ij} (-g)^{-\frac{1}{4}}, \quad (3.182)$$

sustituyendo esta relación en (3.173) obtenemos la acción en la forma (3.178) y utilizando la identidad (3.179) obtenemos nuevamente la acción de Dirac-Born-Infeld. Esto prueba la equivalencia entre las acciones (3.165) y (3.173) para todo  $p$ .

Las simetrías de esta acción son las siguientes:

1.- Invariancia de Poincaré de  $D$ -dimensiones

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \\ A'_i(\xi) &= A_i(\xi), \\ g'_{ij}(\xi) &= g_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (3.183)$$

2.- Invariancia bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi') &= X^{\mu}(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} A'_j(\xi') &= A_i(\xi), \\ \frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') &= g_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (3.184)$$

para nuevas coordenadas  $\xi'(\xi)$ .

3.- Invariancia de Weyl para  $p = 3$

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= X^{\mu}(\xi), \\ A'_j(\xi) &= A_j(\xi), \\ g'_{kl}(\xi) &= \exp(4\omega(\xi^i)) g_{ij}(\xi). \end{aligned} \quad (3.185)$$

4.- Invariancia de norma

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\xi) &= X^{\mu}(\xi), \\ g'_{ij}(\xi) &= g_{ij}(\xi), \\ B'_{ij}(\xi) &= B_{ij}(\xi) + \partial_i \chi_j(\xi) - \partial_j \chi_i(\xi), \\ A'_i(\xi) &= A_i(\xi) - \chi_i(\xi) + \partial_i \lambda(\xi). \end{aligned} \quad (3.186)$$

Nótese que esta acción es el análogo de la acción de Polyakov para la cuerda (2.24) y tiene la característica de que es invariante bajo transformaciones de Weyl para  $p = 3$ . Nuevamente esta invariancia se entiende si miramos que la ecuación (3.182) que utilizamos para establecer la equivalencia de la acción de Abou-Hull con la de Dirac-Born-Infeld, no relaciona a  $g_{ij}$  con  $\mathcal{H}_{ij}$  de manera única, sino sólo hasta un reescalamiento local

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) \mathcal{H}_{ij}(\xi). \quad (3.187)$$

El tensor de energía momento  $T_{ij}$  para la acción (3.173) está dado por la ecuación

$$T_{ij} = -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = T \exp(-\phi) (-h)^{\frac{1}{2}} \left( \mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} [g^{kl} \mathcal{H}_{kl} - (p-3)] \right). \quad (3.188)$$

Este tensor es de traza nula ( $g^{ij}T_{ij} = 0$ ) sólo en el caso  $p = 3$  como resultado de la invariancia de Weyl.

Como siempre, si obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos  $X^\mu$  y  $A_i$  a partir de la acción (3.173) y utilizamos la ecuación de movimiento (3.175) de la métrica intrínseca, el par de ecuaciones se reduce a las ecuaciones (3.171) y (3.172).

### 3.5.3 Acción conforme I

Al igual que en el caso de las  $p$ -branas, es posible escribir una acción de  $Dp$ -branas que sea invariante de Weyl para cualquier  $p$ , esta es

$$S[X^\mu, A_i, g_{ij}] = -T \int d^{p+1}\xi \exp(-\phi) (-h)^{1/4} (-g)^{1/4} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} \mathcal{H}_{ij} \right)^{\frac{p+1}{4}}. \quad (3.189)$$

Esta acción depende de los mismos campos que la acción (3.173). Notemos además que para el caso de la D3-brana, la acción (3.189) se reduce a la acción (3.173). Para ver la equivalencia entre esta acción y la de Dirac-Born-Infeld (3.165) utilizamos la ecuación de movimiento para la métrica intrínseca  $g_{ij}$

$$g_{kl} \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} \mathcal{H}_{ij} \right) = \mathcal{H}_{kl}, \quad (3.190)$$

la cual tiene como solución

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) \mathcal{H}_{ij}(\xi), \quad (3.191)$$

para toda  $p$ , desde luego  $\beta(\xi)$  es una función arbitraria.

Esta acción tiene las mismas simetrías que la acción de Abou-Hull (3.173) y adicionalmente posee invariancia de Weyl en el volumen de mundo

$$\begin{aligned} X'^\mu(\xi) &= X^\mu(\xi), \\ A'_i(\xi) &= A_i(\xi) \\ g'_{ij}(\xi) &= \exp(2\omega(\xi)) g_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (3.192)$$

para  $\omega(\xi)$  arbitraria. Debido a esta invariancia el tensor de energía momento

$$T_{ij} = -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = T \exp(-\phi) (-h)^{1/4} \left[ \left( \frac{g^{ij} \mathcal{H}_{ij}}{p+1} \right)^{\frac{p-3}{4}} \mathcal{H}_{ij} - \left( \frac{g^{ij} \mathcal{H}_{ij}}{p+1} \right)^{\frac{p+1}{4}} g_{ij} \right], \quad (3.193)$$

es de traza nula ( $g^{ij}T_{ij} = 0$ ) para cualquier  $Dp$ -brana. Sin embargo, tenemos nuevamente el problema de que esta acción es altamente no lineal y por tanto es difícil de analizar.



### 3.5.4 Acción conforme II

Para resolver la dificultad de la no linealidad de la acción (3.189) introducimos de una manera similar a como lo hicimos en el caso de las  $p$ -branas, un campo auxiliar  $\varphi$  que elimine la potencia  $\frac{p+1}{4}$  en la acción. La expresión resultante es

$$S\{X^\mu, g_{ij}, A_i, \varphi\} = -\frac{T}{4} \int d^{p+1}\xi \exp(-\phi)(-h)^{1/4}(-g)^{1/4} \left[ g^{ij} \mathcal{H}_{ij} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right]. \quad (3.194)$$

Esta acción además de ser invariante ante transformaciones de Poincaré en el espacio-tiempo y transformaciones de difeomorfismos en el volumen de mundo, es invariante bajo la transformación de Weyl siguiente

$$X'^\mu(\xi^i) = X^\mu(\xi^i), \quad (3.195)$$

$$A'_i(\xi^j) = A_i(\xi^j), \quad (3.196)$$

$$\varphi(\xi^i) = \exp\left(-\frac{\omega}{2}(p+1)(\xi^i)\right) \varphi(\xi^i), \quad (3.197)$$

$$g'_{ij}(\xi^i) = \exp(2\omega(\xi^i)) g_{ij}(\xi^i). \quad (3.198)$$

Para ver la equivalencia clásica de esta acción con la acción (3.189), obtenemos la ecuación de movimiento del campo auxiliar  $\varphi$

$$\varphi = \left( \frac{1}{p+1} g^{ij} \mathcal{H}_{ij} \right)^{\frac{p+1}{4}}. \quad (3.199)$$

Usando esta expresión de  $\varphi$  en (3.194) recobramos (3.189), por lo que ambas acciones son clásicamente equivalentes. Nótese que la acción (3.194) es cuadrática en el campo de fuerza  $\mathcal{F}_{ij}$  para cualquier dimensión, mientras que (3.189) es cuadrática sólo para  $p=3$ .

Para la acción (3.194) podemos introducir un tensor de energía momento equivalente a (3.193) que es también de traza nula y que está dado por

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{4}{(-g)^{1/4}} \left( \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} - \frac{\varphi}{4} \frac{\delta S}{\delta \varphi} \gamma_{ij} \right) \\ &= \exp(-\phi)(-h)^{1/4} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} \left[ \mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{p+1} g^{kl} \mathcal{H}_{kl} g_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Si utilizamos la ecuación de movimiento (3.199), el tensor de energía momento (3.200) es exactamente el mismo que (3.193).

De esta nueva forma de la acción invariante de Weyl para  $Dp$ -branas (3.194), podemos construir acoplamientos conformes del campo escalar con los campos de norma sobre la brana. La ley de transformación del campo escalar bajo difeomorfismos sugiere que esta puede ser promovida a un campo dinámico jugando un papel análogo a una coordenada espacio-temporal. Considerando que la transformación (3.197) es equivalente a

una transformación de norma  $U(1)$  con parámetro imaginario, una manera natural para acoplar mínimamente el campo escalar  $\varphi$  a los campos de norma  $A_i$  es introduciendo la derivada covariante de Weyl [39],

$$\mathcal{D}_i = \partial_i + A_i, \quad (3.201)$$

y pidiendo que el vector potencial  $A_i$  transforme bajo la simetría de Weyl como una conexión de norma

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{p+1}{2} \partial_i \omega. \quad (3.202)$$

Como una consecuencia de esta propiedad la derivada covariante resulta ser

$$\mathcal{D}_i \varphi \rightarrow \exp\left(\frac{\omega}{2}(p+1)\right) \mathcal{D}_i \varphi. \quad (3.203)$$

La acción invariante de Weyl con el campo escalar  $\varphi$  promovido a una variable dinámica es

$$S = -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \exp(-\phi) (-h)^{1/4} (-g)^{1/4} \left[ \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} g^{ij} \mathcal{H}_{ij} - \varphi(p-3) \right]. \quad (3.204)$$

donde la nueva métrica inducida es

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu + \varphi^{-2} \mathcal{D}_i \varphi \mathcal{D}_j \varphi. \quad (3.205)$$

Note que además de la métrica inducida standard del espacio-tiempo, los campos escalar y de norma modifican la métrica inducida sobre la brana. En este sentido estos campos inducen curvatura sobre la brana.

Mediante la eliminación de la métrica auxiliar  $g_{ij}$  recobramos una acción tipo Born-Infeld (3.165) con la métrica inducida dada por (3.205). Nótese que este acoplamiento conforme es diferente del propuesto en [39], donde la métrica inducida  $h_{ij}$  no depende del campo escalar y transforma bajo la simetría conforme.

### 3.6 Conclusiones

En la primera parte de este capítulo hemos desarrollado la teoría hamiltoniana de las  $p$ -branas. Comenzamos discutiendo las propiedades de diferentes acciones que describen la evolución de las  $p$ -branas en un espacio-tiempo de Minkowski y desarrollamos su formulación canónica en los casos que es posible. Mostramos que para la acción de Nambu-Goto hay  $p+1$  constricciones primarias de primera clase ( $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ ). Estas mismas constricciones aparecen para la acción tipo Schild y la acción tipo Polyakov. Sin embargo para la acción de Schild, aunque las  $p$  constricciones  $\mathcal{H}_r$  siguen siendo constricciones primarias de primera clase,  $\mathcal{H}$  aparece como una restricción secundaria de primera clase. Para la acción tipo Polyakov las  $p+1$  constricciones aparecen como constricciones secundarias de primera clase. Al igual que en el caso de cuerdas, el número de constricciones para cada una de estas acciones es diferente. Para la acción de Nambu-Goto sólo se tienen estas  $p+1$

constricciones, para la acción tipo Schild se tiene una constricción primaria de primera clase extra asociada al momento canónico conjugado del campo auxiliar  $\varphi$ , mientras que para la acción tipo Polyakov se tienen  $p + 1$  constricciones primarias de primera clase extras asociadas a los momentos canónicos conjugados de las componentes temporales independientes de la métrica intrínseca del volumen de mundo,  $p(p + 1)/2$  constricciones primarias de segunda clase extras asociadas a los momentos canónicos conjugados de las componentes espaciales de la métrica intrínseca y  $p(p + 1)/2$  constricciones secundarias de segunda clase que relacionan las componentes espaciales de la métrica intrínseca con las respectivas componentes de la métrica inducida (aunque no desarrollamos explícitamente el análisis canónico de la acción tipo Polyakov, estas conclusiones se obtienen del análisis canónico de la acción conforme II tomando  $\varphi = 1$ ). Estas tres acciones tienen invariancia de Poincaré en el espacio-tiempo e invariancia de difeomorfismos en el volumen de mundo.

Con el objetivo de tener acciones de  $p$ -branas que incorporen la simetría de Weyl, en el pasado se construyó la que hemos nombrado en el texto, acción conforme I. Esta acción es altamente no lineal y como consecuencia su formulación canónica no se puede desarrollar utilizando el método standard. Con el objetivo de desarrollar la formulación hamiltoniana de una acción de  $p$ -branas con invariancia de Weyl, hemos introducido una nueva acción de  $p$ -branas para la cual el método de Dirac puede aplicarse sin problemas, como consecuencia de que esta acción es cuadrática en las velocidades de las coordenadas. Esta es una de las contribuciones originales del presente trabajo al desarrollo de los sistemas extendidos. Mostramos explícitamente que además de las  $(p + 1)(p + 2)$  constricciones que tiene la acción tipo Polyakov, se tiene una constricción primaria de primera clase asociada al momento canónico conjugado del campo auxiliar  $\varphi$ , y que es precisamente esta constricción la encargada de generar la transformación de Weyl.

Se introdujo también la generalización supersimétrica de esta acción con invariancia de Weyl en espacios-tiempo curvos y se mostró explícitamente su invariancia ante las transformaciones fermiónicas locales conocidas como simetría  $\kappa$ . Para el caso en que el subespacio bosónico del espacio-tiempo es el espacio de Minkowski, construimos explícitamente las doce super  $p$ -branas con simetría de Weyl que existen. La conclusión de esta parte del capítulo es que podemos construir todas las expresiones que aquí hemos deducido a partir de las respectivas expresiones de super  $p$ -branas sin invariancia de Weyl [7], mediante la introducción del campo escalar auxiliar  $\varphi$  elevado a la potencia adecuada en todas las expresiones donde aparezca la métrica, de manera tal que los términos sean invariantes de Weyl.

Por último, en el espíritu de tener una acción de  $Dp$ -branas con simetría de Weyl para todo  $p$  y cuadrática en los campos  $\mathcal{F}_{ij}$ , construimos una acción con estas características introduciendo para ello un campo escalar auxiliar  $\varphi$  de manera análoga a como lo hicimos para las  $p$ -branas. Mostramos que para esta acción se pueden construir acoplamientos conformes del campo escalar con los campos de norma sobre la brana. Ambos desarrollos son también una contribución original al campo de los objetos extendidos.

Para finalizar, mencionemos las publicaciones en las cuales han aparecido los resultados de las investigaciones presentadas en este capítulo.

## Artículo

J. A. García, R. Linares and J. D. Vergara.  
*Weyl Invariant  $p$ -brane and  $Dp$ -brane Actions.*  
Phys. Lett. B503 (2001) 154-162.  
e-Print Archive: hep-th/0011085.

## Publicaciones en memorias

1. J. A. García, R. Linares and J. D. Vergara.  
*Canonical Formulation of a Conformal  $p$ -brane Action.*  
En Aspectos de Gravitación y Física Matemática, III Taller de la DGFM-SMF.  
Eds. N. Bretón, O. Pimentel y J. Socorro.  
Universidad de Guanajuato, ISBN 968-864-220-7, México (2000).
2. J. A. García, R. Linares and J. D. Vergara.  
*Canonical Formulation of the Conformal  $p$ -brane.*  
In JHEP Proceedings, Third Latin American Symposium on High Energy Physics.  
Ed. Enrico Nardi.

# Referencias

- [1] M. J. Duff, R. R. Khuri and J. X. Lu, *String solitons*, Phys. Rep. **259**, 213 (1995).
- [2] M. J. Duff, *Supermembranes*, lectures at TASI 96, hep-th/9611203.
- [3] E. Sezgin, *Topics in M-theory*, hep-th/9809204.
- [4] E. A. Bergshoeff, *Properties of p-branes, D-branes and M-branes*, Nucl. Phys. **B**, (Proc. Suppl.) **61A**, 75 (1998).
- [5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A268**, 57 (1962).
- [6] J. Hughes, J. Liu and J. Polchinski, *Supermembranes*, Phys. Lett. **180B**, 370 (1986).
- [7] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, *Supermembrane and eleven-dimensional supergravity*, Phys. Lett. **B189**, 75 (1987).
- [8] A. Achúcarro, J. M. Evans, P. K. Townsend and D. L. Wiltshire, *Super p-branes*, Phys. Lett. **B198**, 441 (1987).
- [9] M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami and K. S. Stelle, *Superstrings in  $D = 10$  from supermembranes in  $D = 11$* , Phys. Lett. **B191**, 70 (1987).
- [10] P. K. Townsend, *Supersymmetric extended solitons*, Phys. Lett. **B202**, 53 (1988).
- [11] A. Dabholkar, G. W. Gibbons, J. A. Harvey and F. Ruiz Ruiz, Nucl. Phys. **B340**, 33 (1990).
- [12] A. Strominger, *Heterotic solitons*, Nucl. Phys. **B343**, 167 (1990).
- [13] J. Polchinski, *TASI lectures on D-branes*, lectures at TASI 96, hep-th/9611050.
- [14] L. Thorlacius, *Introduction to D-branes*, hep-th/9708078.
- [15] W. Taylor, *Lectures on D-branes, gauge theory and M(atrices)*, hep-th/9801182.
- [16] C. P. Bachas, *Lectures on D-branes*, hep-th/9806199.
- [17] C. Johnson, *D-brane primer*, hep-th/0007170.

- [18] J. Polchinski, *String Theory*, 2 vols. Cambridge University Press, 1998.
- [19] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev.Lett. **75**, 4724 (1995).
- [20] A. Sen, *An introduction to non-perturbative string theory*, hep-th/9802051.
- [21] A. Strominger and C. Vafa, *Microscopic origin of Bekenstein-Hawking entropy*, Phys. Lett. **B379**, 99 (1996).
- [22] J. Maldacena, *The large  $N$  limit of superconformal theory and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).
- [23] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [24] S. Deser, M. J. Duff and C. J. Isham, *finite energy static solutions to chiral models in three space dimensions*, Nucl. Phys. **B114**, 29 (1976).
- [25] U. Lindström, *First order actions for gravitational systems, strings and membranes*, Int. J. Mod. Phys. Lett. **A3**, 2401 (1998).
- [26] U. Lindström and G. Theodoridis, *Weyl-invariant super  $p$ -branes*, Phys. Lett. **B208**, 407 (1988).
- [27] M. S. Alves and J. Barcelos-Neto, *Conformally invariant action for  $n$ -branes without cosmological constant*, Europhys. Lett. **7**, 395 (1988).
- [28] J. A. Nieto and C. Nuñez, *Strings from Weyl-invariant membranes*, Il Nuovo Cimento, **106**, 1045 (1991).
- [29] E. R. C. Abraham, P. S. Howe and P. K. Townsend, *Spacetime versus world-surface conformal invariance for particles, strings and membranes*, Clas. Quant. Grav. **6**, 1541 (1989).
- [30] A. Aurilia, A. Smailagic and E. Spallucci, *Conformal  $p$ -branes as a source of structure in spacetime*, Phys. Rev. **D51**, 4410 (1995).
- [31] C. Alvear, R. Amorim and J. Bancelos-Neto, *Hamiltonian formulation for conformal  $p$ -branes*, Phys. Lett. **B273**, 415 (1991).
- [32] J. A. García, R. Linares and J. D. Vergara, *Conformal invariant  $p$ -branes and  $Dp$ -branes actions*, Phys. Lett. **B503**, 154 (2001).
- [33] R. G. Leigh, *Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet  $\sigma$ -model*, Mod. Phys. Lett. **A4**, 2762 (1989).

- [34] M. Abou Zeid and C. M. Hull, *Geometric actions for D-branes and M-branes*, Phys. Lett. **B428**, 277 (1998).
- [35] M. Heanneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Gauge invariance and degree of freedom count*, Nucl. Phys. **B332**, 169 (1990).
- [36] D. Sorokin, *Superbranes and superembeddings*, Phys. Rep. **329**, 1 (2000).
- [37] P. S. Howe and R. W. Tucker, *A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for spinning membrane*, J. Phys. **A10**, L155 (1977).
- [38] J. M. Evans *Super p-branes Wess-Zumino terms* Class. Quantum Grav. **5**, L87 (1988).
- [39] S. Deser and G. W. Gibbons, *Born-Infeld-Einstein actions?* Class. Quantum Grav. **15**, L35 (1998).

## Capítulo 4

# Supermembrana conforme

Se sabe que si  $p \geq 1$  existen 12 diferentes  $p$ -branas supersimétricas. De todas estas super  $p$ -branas la que atrajo más atención al principio del desarrollo de la teoría de super  $p$ -branas fue la supermembrana  $p = 2$  en  $D = 11$  (para una revisión del estado de la teoría de supermembranas y de su relación con el desarrollo actual de la teoría de cuerdas ver por ejemplo [1, 2, 3, 4, 5]). Este interés no tuvo origen en la necesidad de resolver algún problema físico basado en paradojas o anomalías de la teoría de cuerdas, con la posible excepción de 'explicar' el origen de la supergravedad en  $D = 11$  dimensiones, sino porque la supermembrana estaba ahí, y porque se podía visualizar como una teoría más general que la teoría de cuerdas. Todo comenzó cuando en [6] se sugirió que de la misma manera que la supergravedad en  $D = 10$  dimensiones está relacionada a una teoría de supercuerdas, la supergravedad en  $D = 11$  dimensiones está relacionada a una teoría de supermembranas. Se mostró que la preservación de las simetrías locales de esta acción en un espacio-tiempo de 11 dimensiones requiere que este espacio satisfaga ciertas restricciones, las cuales son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en 11 dimensiones [6, 7]. Después de la formulación de la supermembrana se consideraron varios aspectos de la teoría. Uno de los primeros problemas atacados fue el referente a su espectro [8], se mostró que el espectro es continuo, lo cual indica que no es posible tener una interpretación de los estados de la teoría en términos de un espectro de partículas discreto. También se obtuvo el límite de partícula [9] y el límite de cuerdas [7]. El estudio de los modos cero de la supermembrana en el límite de superpartícula mostró que el modo cero de los osciladores corresponden exactamente al espectro de los estados no masivos de la supergravedad  $D = 11$  [10]. En [11] la supermembrana fue cuantizada en el límite en el cual la membrana es enrollada alrededor de un círculo o un toro.

Otro desarrollo interesante fue el surgimiento del área que preserva difeomorfismos (SDiff) de la supermembrana como una herramienta útil en el estudio de la teoría cuántica [12, 13]. Se descubrió el hecho de que el hamiltoniano de la supermembrana en la norma del cono de luz se convierte en una teoría de Yang-Mills en  $(0+1)$  dimensiones (esto es, la



mecánica cuántica supersimétrica) con grupo de norma  $S\text{Diff} \sim SU(\infty)$ . Este hecho ha sido completamente apreciado recientemente, en el contexto de la formulación de matrices de la teoría  $M$  [14]. De hecho es esta relación con la teoría  $M$ , la que ha hecho que se vuelva la mirada nuevamente a la teoría de supermembranas. Sin embargo, a pesar de todas estas características interesantes de la teoría, sigue siendo difícil hacer avances significativos en el problema de cuantización de la supermembrana, debido a que esta teoría es altamente no lineal. Un resultado reciente es la construcción de los operadores de vértice para la supermembrana [15], con los cuales se tiene la esperanza de poder hacer más manejables algunos cálculos a nivel cuántico.

Inspirados en la importancia de las propiedades de la supermembrana, en la primera parte de este cuarto capítulo hacemos un análisis de algunas características de la supermembrana con invariancia de Weyl. Comenzaremos con discutir la supermembrana conforme en un espacio-tiempo curvo de  $D = 11$  dimensiones y después en un espacio-tiempo plano. Mostramos que la invariancia fermiónica de esta acción (analizada en el capítulo anterior en forma general) también implica las ecuaciones de movimiento de supergravedad en  $D = 11$  dimensiones. Veremos que mediante una doble reducción dimensional la acción de supermembranas con simetría de Weyl se convierte en la acción de cuerdas IIA, el análisis es similar al realizado en [16]. Se discute el análisis canónico de la supermembrana conforme, mostramos que este es un sistema de constricciones reducibles y desarrollaremos una separación covariante de las constricciones fermiónicas, introduciendo para ello un operador de proyección consistente con los paréntesis de Dirac [17]. Este análisis aunque directo, es sutil y corrige el análisis realizado en [18] para la supermembrana sin simetría de Weyl. El análisis canónico de la supermembrana conforme es pues una contribución de este trabajo al desarrollo de los sistemas extendidos y es el principal resultado del presente capítulo. Finalizamos esta parte del capítulo introduciendo la norma del cono de luz. En esta norma la supermembrana conforme se reduce a la misma teoría que la supermembrana standard y por tanto todos los desarrollos hechos para esta membrana en esta norma, aplican también para la supermembrana conforme en la misma norma. En la segunda parte del capítulo hacemos una revisión rápida de las principales características del proceso de cuantización de la supermembrana y del status de algunos de los problemas no resueltos aún en esta teoría. Desde luego hay muchas revisiones excelentes de la teoría de membranas en la literatura de los objetos extendidos como las citadas anteriormente y no se pretende hacer aquí una revisión más, la idea de esta parte de la tesis es exponer brevemente el contexto en el cual este capítulo se encuentra enmarcado. Comenzamos revisando algunas de las soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento de la membrana, que se conocen. Discutimos también el proceso de regularización matricial y la equivalencia de la teoría de supermembranas en el cono de luz con el límite de  $N$  grande de la mecánica cuántica de matrices supersimétricas. El problema del espectro es analizado y se discute la interpretación moderna de este hecho. Se motiva también la relación de la teoría de supermembranas con la teoría  $M$ . Se incluye también una breve discusión del status de algunos problemas aún no resueltos como lo son el de la dimensión crítica de la supermembrana y el de la cuantización covariante.

## 4.1 La supermembrana conforme en $D = 11$

### 4.1.1 Supermembrana conforme acoplada a supergravedad

De la discusión hecha en el capítulo anterior tenemos que la acción que describe a una supermembrana ( $p = 2$ ) en el super espacio curvo de dimensión  $D = 11$  es

$$S[Z^M, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^3\xi \left[ \sqrt{-g} \varphi^{1/3} g^{ij} E_i^a E_j^b \eta_{ab} - \varphi \sqrt{-g} + \frac{2}{3!} \varepsilon^{ijkl} E_i^A E_j^B E_k^C E_l^D B_{CBA} \right], \quad (4.1)$$

Esta acción es invariante bajo difeomorfismos en el volumen de mundo y bajo la transformación de norma fermiónica  $\kappa$

$$\delta E^a = 0, \quad (4.2)$$

$$\delta E^a = (1 + \Gamma)^\alpha_\beta \kappa^\beta, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \varphi^{1/3} g^{ij}) = & -2i(1 + \Gamma)^\alpha_\beta \kappa^\beta (\Gamma_{ab})_{\alpha\gamma} E_n^\gamma \varphi^{-2/3} g^{ni} \varepsilon^{jkl} E_k^a E_l^b \\ & - \frac{2i}{3\sqrt{-g}} \kappa^\alpha (\Gamma_c)_{\alpha\beta} E_k^\beta E_l^c \varphi^{-5/3} g^{ki} \varepsilon^{lmn(i} \varepsilon^{j)pq} \\ & \times (E_m^a E_{pa} E_n^b E_{qb} + E_m^a E_{pa} \varphi^{2/3} g_{nq} + \varphi^{4/3} g_{mp} g_{nq}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde la matriz gamma está definida por

$$(\Gamma)^\alpha_\beta = \frac{1}{3! \varphi \sqrt{-g}} \varepsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c (\Gamma_{abc})^\alpha_\beta. \quad (4.5)$$

Las restricciones para la torsión y la cuatro forma  $H$  que deben satisfacerse en este caso son

$$T_{\alpha\beta}^a = -2i(\Gamma^a)_{\alpha\beta}, \quad H_{\alpha\beta ab} = 2i(\Gamma_{ab})_{\alpha\beta}, \quad (4.6)$$

$$\eta_{\alpha(a} T_{b)\alpha}^c = \eta_{ab} \Lambda_\alpha, \quad H_{\alpha abc} = 3\Lambda_\beta (\Gamma_{abc})^\beta_\alpha, \quad (4.7)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma a} = H_{\alpha\beta\gamma a} = 0, \quad (4.8)$$

Es posible mostrar [7] que mediante una redefinición adecuada de las superconexiones y parte de los 'supervielbein', se puede elegir  $\Lambda_\alpha$ ,  $T_{\alpha\beta}^\gamma$  y  $T_{ab}^c$  igual a cero

$$T_{ab}^c = T_{\alpha\beta}^\gamma = H_{abcd} = 0. \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) corresponden a las ecuaciones de campo de la supergravedad en 11 dimensiones sobre la capa de masa [19, 20]. En conclusión, la preservación de la simetría local  $\kappa$  de la acción de supermembranas conformes en un espacio-tiempo de 11 dimensiones requiere que este espacio este sujeto a ciertas restricciones, las cuales son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en 11 dimensiones.

### 4.1.2 Supermembrana conforme en el espacio-tiempo plano

Como mostramos en el capítulo 3, la acción de la supermembrana conforme en un espacio-tiempo plano de dimensión  $D = 11$  está dada por la acción

$$S[X^\mu, \theta, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^3\xi \left[ \sqrt{-g} \varphi^{1/3} g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - \varphi \sqrt{-g} + i \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_i \theta \left( \Pi_j^\mu \Pi_k^\nu + i \Pi_j^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta - \frac{1}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta \right) \right], \quad (4.10)$$

donde

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta, \quad (4.11)$$

y  $\theta$  es un espinor de Majorana. Esta acción tiene las siguientes simetrías:

Las *simetrías globales* están determinadas por las simetrías de Killing (bosónicas y fermiónicas) de la geometría del espacio tiempo en el cual la supermembrana se mueve. Para un espacio tiempo plano  $D = 11$ , ellas corresponden a las transformaciones de super-Poincaré

$$\delta X^\mu = a^\mu + \Lambda^{\mu\nu} X_\nu - \bar{\varepsilon} \Gamma^\mu \theta, \quad (4.12)$$

$$\delta \theta = \Lambda_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \theta + \varepsilon. \quad (4.13)$$

donde  $a^\mu$  y  $\varepsilon^a$  son parámetros constantes que corresponden respectivamente a traslaciones y transformaciones de supersimetría, mientras que  $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$  son las matrices de Lorentz.

Las *simetrías bosónicas locales* (de norma) están asociadas con la invariancia bajo reparametrizaciones de las coordenadas del volumen de mundo a lo largo de un campo vectorial  $\eta^i(\xi)$

$$\delta X^\mu = \eta^i \partial_i X^\mu, \quad (4.14)$$

$$\delta \varphi = \eta^i \partial_i \varphi, \quad (4.15)$$

$$\delta \theta = \eta^i \partial_i \theta, \quad (4.16)$$

$$\delta g_{ij} = \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik} + 2\omega g_{ij}, \quad (4.17)$$

la última ecuación puede escribirse en forma alternativa como

$$\delta(\sqrt{-g} g^{ij} \varphi^{1/3}) = \partial_k (\eta^k \varphi^{1/3} \sqrt{-g} g^{ij}) - \varphi^{1/3} \sqrt{-g} g^{kj} \partial_k \eta^i - \varphi^{1/3} \sqrt{-g} g^{ik} \partial_k \eta^j, \quad (4.18)$$

donde la cantidad  $\sqrt{-g} g^{ij} \varphi^{1/3}$  es invariante de Weyl.

La acción es también invariante ante las siguientes transformaciones *fermiónicas locales* conocidas como simetría- $\kappa$

$$\delta X^\mu = i \bar{\theta} \Gamma^\mu (1 + \Gamma) \kappa, \quad (4.19)$$

$$\delta \theta = (1 + \Gamma) \kappa, \quad (4.20)$$

$$\delta(\sqrt{-g} \varphi^{1/3} g^{ij}) = 2i \bar{\kappa} (1 + \Gamma) \Gamma_{\mu\nu} \partial_n \theta \varphi^{-2/3} g^{ni} \varepsilon^{jkl} \Pi_k^\mu \Pi_l^\nu + \frac{2i \varphi^{-5/3}}{3\sqrt{-g}} \bar{\kappa} \Gamma^\mu \partial_i \theta \Pi_\mu^i \times (4.21)$$

$$\varepsilon^{mnpq} (\varepsilon^j)^{pq} (\Pi_m^\nu \Pi_{p\nu} \Pi_n^\lambda \Pi_{q\lambda} + \Pi_m^\nu \Pi_{p\nu} \varphi^{2/3} g_{nq} + \varphi^{4/3} g_{mp} g_{nq}),$$

donde  $\kappa(\xi)$  es un parámetro fermiónico infinitesimal, que es un espinor en el espacio-tiempo de dimensión  $D = 11$  y un escalar en el volumen de mundo de tres dimensiones. La matriz  $\Gamma$  está definida por

$$\Gamma = \frac{1}{3! \varphi \sqrt{-g}} \varepsilon^{ijk} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (4.22)$$

y satisface

$$\Gamma^2 = \frac{1}{3! (\varphi \sqrt{-g})^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \Pi_i^\mu \Pi_n^\mu \Pi_j^\nu \Pi_m^\nu \Pi_k^\rho \Pi_l^\rho. \quad (4.23)$$

La variación de la acción (4.10) está dada por

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^3 \xi \left[ -\frac{T}{2} \delta (\sqrt{-g} g^{ij} \varphi^{1/3}) (\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - \varphi^{2/3} g_{ij}) + \partial_i P_\mu^i \delta X^\mu \right. \\ \left. + i \delta \bar{\theta} (2T \sqrt{-g} g^{ij} \varphi^{1/3} (1 - \Gamma) \Pi_i^\mu \Gamma_\mu \partial_j \theta + \Gamma^\mu \theta \partial_i P_\mu^i \right. \\ \left. + T \Gamma_{\nu\rho} \partial_j \theta \varepsilon^{klm} g^{ij} \varphi^{-2/3} (\Pi_k^\mu \Pi_{i\mu} - \varphi^{2/3} g_{ki}) \Pi_l^\nu \Pi_m^\rho \right. \\ \left. - \partial_i (P_\mu^i \delta X^\mu + \delta \bar{\theta} (i \Gamma^\mu \theta P_\mu^i - T S^i)) \right], \quad (4.24) \end{aligned}$$

donde

$$P_\mu^i \equiv T \sqrt{-g} g^{ij} \varphi^{1/3} \Pi_j^\mu - i T \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_j \theta (\Pi_k^\nu + \frac{i}{2} \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta), \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} S_\alpha^i \equiv \varepsilon^{ijk} \left[ \frac{i}{2} (\Gamma_{\mu\nu} \theta)_\alpha (\Pi_j^\mu \Pi_k^\nu + i \Pi_j^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta + \frac{1}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\Gamma^\nu \theta)_\alpha \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_j \theta (\Pi_k^\mu - \frac{2i}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_k \theta) \right]. \quad (4.26) \end{aligned}$$

De esta variación se deduce que las ecuaciones de movimiento para los campos  $g_{ij}$ ,  $\varphi$ ,  $X^\mu$  y  $\theta$  son respectivamente

$$\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - \varphi^{2/3} g_{ij} = 0, \quad (4.27)$$

$$g^{ij} \Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} - 3 \varphi^{2/3} = 0, \quad (4.28)$$

$$\partial_i (\sqrt{-g} \varphi^{1/3} g^{ij} \Pi_{j\mu}) - i \varepsilon^{ijk} \Pi_i^\nu \partial_j \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_k \theta = 0, \quad (4.29)$$

$$(1 - \Gamma) g^{ij} \Pi_i^\mu \Gamma_\mu \partial_j \theta = 0. \quad (4.30)$$

Las transformaciones (4.14)-(4.21) requieren que

$$\int d^3 \xi \partial_i (\eta^i \mathcal{L}) = 0,$$

$$\int d^3 \xi \partial_i ((1 + \Gamma) \kappa)^\alpha S_\alpha^i = 0,$$

lo cual restringe los parámetros  $\eta$  y  $\kappa$  en la frontera. Para que la acción sea supersimétrica se debe satisfacer

$$\begin{aligned} \int d^3 \xi \varepsilon^{ijk} \partial_i \left[ -\frac{i}{2} \varepsilon \Gamma_{\mu\nu} \theta (\Pi_j^\mu \Pi_k^\nu + \frac{5i}{3} \Pi_j^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta - \frac{11}{15} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_j \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_k \theta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\Gamma^\nu \theta)_\alpha \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_j \theta (\Pi_k^\mu - \frac{2i}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_k \theta) \right] = 0. \quad (4.31) \end{aligned}$$

## 4.2 Supercuerdas a partir de supermembranas

El propósito de esta sección es presentar la forma en que se deriva la acción de supercuerda tipo IIA a partir de la acción de supermembrana con simetría de Weyl (4.1), mediante una reducción dimensional del volumen de mundo de tres a dos dimensiones, y simultáneamente, una reducción dimensional del espacio-tiempo de once a diez dimensiones. A este proceso se le conoce como la doble reducción dimensional. El cálculo original de esta doble reducción [7] aplicado a la supermembrana sin simetría de Weyl, fue motivado por el hecho bien conocido de que la supergravedad  $N = 2\alpha$  en diez dimensiones puede obtenerse a partir de una reducción dimensional de la supergravedad  $N = 1$  en once dimensiones. Por otro lado se conocía también que la supergravedad  $N = 2\alpha$  es la teoría de campo límite de la supercuerda IIA mientras que la teoría de supermembranas implica la supergravedad en once dimensiones. Estos hechos hicieron suponer que había una conexión entre la supercuerda tipo IIA y la supermembrana.

Como hemos discutido anteriormente, la acción de supermembranas con simetría de Weyl también implica la supergravedad en once dimensiones, esto sugiere que si aplicamos la doble reducción dimensional a la acción (4.1), debemos obtener también la acción de supercuerda tipo IIA. Esto es precisamente lo que discutiremos en esta sección.

Con el propósito de ilustrar el método de reducción dimensional de una manera clara, trabajaremos con el sector bosónico de la acción de supermembranas ((3.40) con  $p = 2$ )

$$S = -\frac{T}{2} \int d^3\xi (\sqrt{-\hat{g}} (\hat{\varphi}^{1/3} \hat{g}^{\hat{i}\hat{j}} \partial_{\hat{i}} \hat{X}^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\nu}} \hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{X}) - \hat{\varphi}) + \frac{2}{3!} \varepsilon^{\hat{i}_1 \hat{i}_2 \hat{i}_3} \partial_{\hat{i}_1} \hat{X}^{\hat{\mu}_1} \partial_{\hat{i}_2} \hat{X}^{\hat{\mu}_2} \partial_{\hat{i}_3} \hat{X}^{\hat{\mu}_3} \hat{B}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3}(\hat{X})). \quad (4.32)$$

donde  $\hat{\mu}, \hat{\nu} = (0, 1, \dots, 10)$  son índices del espacio-tiempo de 11 dimensiones y  $\hat{i}, \hat{j} = (0, 1, 2)$ .

Las ecuaciones de movimiento de  $\hat{g}_{\hat{i}\hat{j}}$ ,  $\hat{\varphi}$  y  $\hat{X}^{\hat{\mu}}$  están dadas respectivamente por

$$\hat{\varphi}^{2/3} \hat{g}_{\hat{i}\hat{j}} = \partial_{\hat{i}} \hat{X}^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\nu}} \hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (4.33)$$

$$3\hat{\varphi}^{2/3} = \hat{g}^{\hat{i}\hat{j}} \partial_{\hat{i}} \hat{X}^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\nu}} \hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{i}} \left( \sqrt{-\hat{g}} \hat{\varphi}^{1/3} \hat{g}^{\hat{i}\hat{j}} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\mu}} \right) + \hat{\Gamma}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{i}} \hat{X}^{\hat{\nu}} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\sigma}} \hat{g}^{\hat{i}\hat{j}} \varphi^{-2/3} \\ = \frac{1}{3!} \hat{H}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3}^{\hat{\mu}} \varepsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \partial_{\hat{i}} \hat{X}^{\hat{\mu}_1} \partial_{\hat{j}} \hat{X}^{\hat{\mu}_2} \partial_{\hat{k}} \hat{X}^{\hat{\mu}_3} \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $\hat{H}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3 \hat{\mu}_4}$  es el campo de fuerza de  $\hat{B}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3}$

$$\hat{H}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3 \hat{\mu}_4} = 4\partial_{[\hat{\mu}_1} \hat{B}_{\hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3 \hat{\mu}_4]}. \quad (4.36)$$

Hacemos ahora una división de las coordenadas del volumen de mundo y de las coordenadas del espacio-tiempo en la forma

$$\begin{cases} \hat{\xi}^{\hat{i}} = (\xi^i, \rho), & i = 0, 1, \\ \hat{X}^{\hat{\mu}} = (X^\mu, Y), & \mu = 0, \dots, 9, \end{cases} \quad (4.37)$$

y tomamos la elección de norma

$$Y = \rho, \quad (4.38)$$

la cual identifica la onceava dimensión del espacio-tiempo con la tercera dimensión del volumen de mundo. La reducción dimensional es entonces efectuada por pedir que

$$\partial_\rho \hat{X}^\mu = 0, \quad (4.39)$$

$$\partial_Y \hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0, \quad (4.40)$$

$$\partial_Y \hat{B}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3} = 0, \quad (4.41)$$

$$\partial_\rho \hat{\varphi} = 0. \quad (4.42)$$

Estas condiciones permiten escribir los campos del espacio-tiempo en la forma

$$\hat{G}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \Phi^{-2/3} \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} + \Phi^2 A_\mu A_\nu & \Phi^2 A_\nu \\ \Phi^2 A_\mu & \Phi^2 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$\hat{B}_{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_3} = (\hat{B}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}, \hat{B}_{\mu_1 \mu_2 Y}) = (B_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}, B_{\mu_1 \mu_2}), \quad (4.44)$$

y la métrica del volumen de mundo  $\hat{g}_{\hat{i}\hat{j}}$  como

$$\hat{g}_{\hat{i}\hat{j}} = \phi^{-2/3} \begin{pmatrix} e^{-\lambda} g_{ij} + \phi^2 G_i G_j & \phi^2 G_i \\ \phi^2 G_j & \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Sustituyendo estas expresiones en la acción (4.32) se obtiene

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2 \xi \left\{ (\sqrt{-g}) \left[ \varphi^{1/3} \left( \frac{\phi}{\Phi} \right)^{2/3} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu} + e^{-\lambda} \left( \varphi^{1/3} \left( \frac{\Phi}{\phi} \right)^{4/3} - \varphi \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi^{1/3} \phi^{2/3} \Phi^{4/3} g^{ij} (G_i - \partial_i X^\mu A_\mu - \partial_i \lambda) (G_j - \partial_j X^\nu A_\nu - \partial_j \lambda) \right] \right. \\ \left. + \varepsilon^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu} + \dots \right\} \quad (4.46)$$

donde hemos eliminado el factor  $(\int d\rho)$ . Es directo mostrar que las variaciones de esta acción con respecto a los campos  $\phi$ ,  $G_i$  y  $g_{ij}$  llevan a las ecuaciones algebraicas

$$\phi = \Phi \varphi^{-1/2}, \quad (4.47)$$

$$G_i = \partial_i X^\mu A_\mu + \partial_i \lambda, \quad (4.48)$$

$$g_{ij} = \varphi^{-1} e^\lambda \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}. \quad (4.49)$$

Sustituyendo estas expresiones nuevamente en la acción (4.46) obtenemos la acción de cuerdas

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2 \xi \left( \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\nu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \varepsilon^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu B_{\mu\nu}(X) \right). \quad (4.50)$$

Más aún, sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de campo (4.35) obtenemos

$$\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X^\mu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \partial_i X^\nu \partial_j X^\sigma g^{ij} = \frac{1}{2} H_{\nu\sigma}^\mu \varepsilon^{ij} \partial_i X^\nu \partial_j X^\sigma, \quad (4.51)$$

donde  $H_{\mu\nu\sigma}$  es el campo de fuerza de  $B_{\mu\nu}$

$$H_{\mu\nu\sigma} = 3\partial_{[\mu}B_{\nu\sigma]} = \hat{H}_{\mu\nu\sigma Y}, \quad (4.52)$$

en el caso  $X = Y$  la ecuación (4.35) es una identidad, como debe suceder por consistencia.

En resumen, la reducción dimensional corresponde a una compactificación de Kaluza-Klein del espacio-tiempo sobre un círculo en el cual se descartan todos los modos masivos. La diferencia del método convencional de Kaluza-Klein es que por identificar la onceava dimensión del espacio-tiempo con la tercera dimensión del volumen de mundo como en (4.38), el volumen de mundo es compactificado también sobre el mismo círculo. La condición (4.39) significa que también se están ignorando los modos masivos sobre el volumen de mundo.

Para incluir fermiones es necesario repetir directamente el procedimiento pero esta vez en el super espacio. El 'ansatz' de Kaluza-Klein para el 'supervielbein'  $N = 1, D = 11$  es

$$\hat{E}_M^{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \hat{E}_M^{\alpha} & \hat{E}_M^{\alpha} & \hat{E}_M^{11} \\ \hat{E}_Y^{\alpha} & \hat{E}_Y^{\alpha} & \hat{E}_Y^{11} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$= \begin{pmatrix} E_M^{\alpha} & E_M^{\alpha} + A_M \chi^{\alpha} & \Phi A_M \\ 0 & \chi^{\alpha} & \Phi \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

donde  $E_M^{\hat{A}} = (E_M^{\alpha}, E_M^{\alpha})$  es el 'supervielbein' de supergravedad  $N = 2a$  en  $D = 10$ ,  $A_M$  es el campo de norma  $U(1)$  del super espacio y  $\Psi$  y  $\chi^{\alpha}$  son supercampos cuyas componentes principales son el dilatón y el dilatino respectivamente. Al escribir (4.54) se ha hecho la elección de norma parcial  $E_Y^{\alpha} = 0$ . Para el potencial del super espacio  $B_{MNP}$  se tiene

$$\hat{B}_{MNP} = B_{MNP}, \quad (4.55)$$

$$\hat{B}_{MNY} = B_{MN}. \quad (4.56)$$

Todos los supercampos en el espacio-tiempo de dimensión  $D = 10$ ,  $E_M^{\hat{A}}$ ,  $\chi^{\alpha}$ ,  $A_M$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi$ ,  $B_{MN}$  y  $B_{MNP}$ , se toman como independientes de la coordenada  $Y$ . Nótese también que los índices espinoriales corren de 1 a 32 de manera tal que podemos identificar a  $\hat{a}$  y  $\alpha$ . Dividiendo las coordenadas  $\hat{Z}^{\hat{M}} = (Z^M, Y)$ , e imponiendo  $\partial_{\rho}Z^M = 0$  y  $Y = \rho$ , al igual que en el caso bosónico. Obtenemos después de sustituir el 'ansatz' (4.54)-(4.56) en la acción (4.1), la acción de una supercuerda tipo IIA acoplada a supergravedad en diez dimensiones

$$S[Z^M, g_{ij}] = -\frac{T}{2} \int d^3\xi \left[ \sqrt{-g} g^{ij} E_i^{\alpha} E_j^{\beta} \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon^{ij} E_i^{\alpha} E_j^{\beta} B_{BA} \right]. \quad (4.57)$$

Hasta aquí hemos discutido el proceso de doble reducción dimensional para  $p = 2$  en  $D = 11$  dimensiones. Sin embargo como hemos visto en el capítulo anterior, existen 12 diferentes posibilidades de construir objetos extendidos supersimétricos, los cuales caen en 4 secuencias. Comenzando del objeto extendido de mayor dimensión en cada una de las secuencias, es posible mediante este proceso de doble reducción dimensional, obtener los restantes objetos extendidos supersimétricos de cada una de las secuencias. Recordemos que la supermembrana y la supercuerda están en la secuencia octoniónica  $\mathcal{O}$ , es decir, son objetos extendidos con ocho grados de libertad tanto para el sector bosónico como para el sector fermiónico.

### 4.3 Formulación canónica

La supermembrana al igual que la supercuerda es un sistema con constricciones redundantes de primera y segunda clase las cuales están mezcladas en las constricciones fermiónicas. El procedimiento utilizado para dividir estas constricciones es introducir un operador de proyección, el cual al actuar sobre las constricciones fermiónicas da como resultado el mismo número de constricciones de primera y segunda clase. En el capítulo 2 discutimos el caso de la supercuerda y en [18] se discute el caso de la supermembrana. En esta sección discutiremos el caso de la supermembrana conforme, pero a diferencia de [18] utilizamos un proyector diferente que permite una eliminación consistente de las constricciones de segunda clase a través del método de Dirac, esto es, el proyector que utilizamos satisface los criterios de consistencia discutidos en el capítulo 2 y que originalmente fueron discutidos en [17].

Para simplificar el desarrollo de la formulación canónica de la acción (4.10) utilizaremos nuevamente variables ADM. En estas variables la acción se reescribe en la forma

$$S = T \int d^3\xi \left( \frac{\varphi^{1/3}}{2N} \left[ \Pi_0^\mu \Pi_{0\mu} - 2N^r \Pi_0^\mu \Pi_{r\mu} - (N^2 \gamma^r s - N^r N^s) \Pi_r^\mu \Pi_{s\mu} \right] + \frac{1}{2} \varphi N \gamma + \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} \Pi_0^A \Pi_r^B \Pi_s^C B_{CBA} \right). \quad (4.58)$$

El contenido de campos de esta acción es  $(X^\mu, \theta^\alpha, N, N^r, \gamma^{rs}, \varphi)$ , los momentos canónicos asociados a estos campos son respectivamente

$$P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = T \frac{\varphi^{1/3}}{N} (\Pi_{0\mu} - N^r \Pi_{r\mu}) + T S_\mu, \quad (4.59)$$

$$P_\alpha \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}^\alpha} = -i(\bar{\theta} \Gamma^\mu)_\alpha P_\mu - T S_\alpha \quad (4.60)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} \approx 0, \quad \Pi_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^r} \approx 0, \quad \Pi_{rs} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^{rs}} \approx 0, \quad \Pi_\varphi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \approx 0. \quad (4.61)$$

donde

$$S_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} \Pi_r^A \Pi_s^B B_{BA\mu} = -i \varepsilon^{rs} \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_r \theta (\Pi_s^\nu + \frac{i}{2} \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_s \theta), \quad (4.62)$$

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} \Pi_r^A \Pi_s^B B_{BA\alpha} = \frac{i}{2} \varepsilon^{rs} (\Gamma_{\mu\nu} \theta)_\alpha (\Pi_r^\mu \Pi_s^\nu + i \Pi_r^\mu \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_s \theta + \frac{1}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_r \theta \bar{\theta} \Gamma^\nu \partial_s \theta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} (\Gamma^\nu \theta)_\alpha \bar{\theta} \Gamma_{\mu\nu} \partial_r \theta (\Pi_s^\mu - \frac{2i}{3} \bar{\theta} \Gamma^\mu \partial_s \theta), \quad (4.63)$$

De la definición del momento obtenemos 39 constricciones primarias

$$F_\alpha \equiv P_\alpha + i(\bar{\theta} \Gamma^\mu)_\alpha P_\mu + T S_\alpha \approx 0, \quad (32 \text{ constricciones}), \quad (4.64)$$

$$\Pi_\varphi \approx 0, \quad (1 \text{ constricción}), \quad (4.65)$$



$$\Pi \approx 0, \quad (1 \text{ constricción}), \quad (4.66)$$

$$\Pi_r \approx 0, \quad (2 \text{ constricciones}), \quad (4.67)$$

$$\Pi_{r_s} \approx 0, \quad (3 \text{ constricciones}), \quad (4.68)$$

El hamiltoniano total asociado a (4.58) es

$$H_T = \int d^2\xi \left( N\varphi^{-1/3} \mathcal{H} + N^r \mathcal{H}_r + \lambda_\varphi \Pi_\varphi + \bar{\Lambda} F + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r + \lambda^{r_s} \Pi_{r_s} \right), \quad (4.69)$$

aquí los  $\lambda$  y  $\Lambda$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones primarias y

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} (P^\mu - TS^\mu) (P_\mu - TS_\mu) + T\varphi^{2/3} \gamma^r \gamma^s \Pi_r^\mu \Pi_{s\mu} - T\varphi^{4/3} \gamma \right), \quad (4.70)$$

$$\mathcal{H}_r \equiv \Pi_r^\mu (P_\mu - TS_\mu). \quad (4.71)$$

Los paréntesis de Poisson de dos funciones arbitrarias de las variables canónicas  $A$  y  $B$  está definido por

$$\{A, B\} \equiv \int d^2\xi \left[ (-1)^{\varepsilon_A+1} \frac{\delta A}{\delta \theta^\alpha} \frac{\delta B}{\delta P_\alpha} + (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B + \varepsilon_B} \frac{\delta B}{\delta \theta^\alpha} \frac{\delta A}{\delta P_\alpha} \right. \\ \left. + \left( \frac{\delta A}{\delta X^\mu} \frac{\delta B}{\delta P_\mu} + \frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \Pi_\varphi} + \frac{\delta A}{\delta N} \frac{\delta B}{\delta \Pi} + \frac{\delta A}{\delta N^r} \frac{\delta B}{\delta \Pi_r} + \frac{\delta A}{\delta \gamma^{r_s}} \frac{\delta B}{\delta \Pi_{r_s}} - (-)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} (A \leftrightarrow B) \right) \right], \quad (4.72)$$

donde  $\varepsilon_A = 0$  para bosones y  $\varepsilon_A = 1$  para fermiones. A partir de esta definición se tiene que los paréntesis de Poisson básicos son

$$\begin{aligned} \{X^\mu(\xi), P_\nu(\xi')\} &= \delta_\nu^\mu \delta^2(\xi - \xi'), & \{\theta^\alpha(\xi), P_\beta(\xi')\} &= \delta_\beta^\alpha \delta^2(\xi - \xi'), \\ \{N(\xi), \Pi(\xi')\} &= \delta^2(\xi - \xi'), & \{N^r(\xi), \Pi_s(\xi')\} &= \delta_s^r \delta^2(\xi - \xi'), \\ \{\varphi(\xi), \Pi_\varphi(\xi')\} &= \delta^2(\xi - \xi'), & \{\gamma^{r_s}(\xi), \Pi_{t_u}(\xi')\} &= \delta_{(t}^r \delta_{u)}^s \delta^2(\xi - \xi'). \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde los paréntesis son evaluados a tiempos iguales.

Utilizando el método de Dirac observamos que la evolución temporal de las constricciones fermiónicas impone restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $\Lambda$ . Esto se obtiene de la siguiente manera. La evolución temporal de las constricciones fermiónicas es

$$\begin{aligned} \dot{F}_\alpha[f] &= 2i \int d^2\xi f \left[ N\varphi^{-1/3} \varepsilon^{rs} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_r^\nu (\Gamma_{\bar{\mu}\nu} \partial_r \theta)_\alpha + TN^t \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu \Pi_s^\nu (\Gamma_{\mu\nu} \partial_r \theta)_\alpha \right. \\ &\quad - TN\varphi^{1/3} \gamma^r \gamma^s \Pi_r^\mu (\Gamma_\mu \partial_r \theta)_\alpha - N^r (P^\mu - TS^\mu) (\Gamma_\mu \partial_r \theta)_\alpha \\ &\quad \left. - \frac{T}{2} \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu \Pi_s^\nu (\Gamma_{\mu\nu} \Lambda)_\alpha + (P^\mu - TS^\mu) (\Gamma_\mu \Lambda)_\alpha \right], \end{aligned} \quad (4.74)$$

al pedir que estas constricciones se mantengan en el tiempo  $\dot{F}_\alpha[f] \approx 0$ , obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales no homogéneas en las incógnitas  $\Lambda^\alpha$ . La solución más general a estas ecuaciones es

$$\dot{F}_\alpha[f] \approx 0 \Rightarrow \Lambda^\alpha = N^r \partial_r \theta^\alpha + N\varphi^{-1/3} \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu (\Gamma_\mu \partial_s \theta)^\alpha + \Lambda'^\alpha, \quad (4.75)$$

donde los dos primeros términos son una solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y  $\Lambda'^\alpha$  es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$(P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu \Lambda)_\alpha - \frac{T}{2} \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu \Pi_s^\nu (\Gamma_{\mu\nu} \Lambda)_\alpha \approx 0. \quad (4.76)$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos la matriz  $\bar{\Gamma}$  definida por

$$\bar{\Gamma}^\alpha_\beta = \frac{1}{3! \sqrt{-h}} \varepsilon^{ijk} \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Pi_k^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (4.77)$$

la cual satisface  $\bar{\Gamma}^2 = 1$ . Esta matriz difiere de la matriz  $\Gamma$  definida en (4.22), únicamente por el término del denominador y son iguales modulo las ecuación de movimiento de la métrica intrínseca (4.27). En términos de las variables canónicas esta matriz se reescribe en la forma

$$\bar{\Gamma} = -\frac{1}{2\sqrt{-h}} \varepsilon^{ab} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_a^\nu \Pi_b^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (4.78)$$

con  $h = \varepsilon^{rs} \varepsilon^{tu} \left( \frac{1}{2} (P_\mu - TS_\mu) (P^\mu - TS^\mu) \Pi_r^\nu \Pi_t^\nu \Pi_s^\rho \Pi_u^\rho - \Pi_r^\mu \Pi_t^\mu \mathcal{H}_s \mathcal{H}_u \right)$  y en términos de esta matriz la ecuación homogénea (4.76) se reescribe en la forma

$$(\Gamma^\mu (1 - \bar{\Gamma}) \Lambda')_\alpha \approx 0. \quad (4.79)$$

La solución más general a estas ecuaciones está dada por una combinación lineal de las funciones arbitrarias  $\lambda^\alpha$

$$(\Lambda')^\alpha = \left( \frac{1}{2} (1 + \bar{\Gamma}) \lambda \right)^\alpha. \quad (4.80)$$

Si sustituimos la expresión del multiplicador de Lagrange (4.75) con  $\Lambda'$  dado por (4.80) en la expresión del hamiltoniano total (4.69), obtenemos

$$H_T = \int d^3\xi \left( N\varphi^{-1/3} (\mathcal{H} - \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu \partial_s \bar{\theta} \Gamma_\mu F) + N^r (\mathcal{H}_r + \partial_r \bar{\theta} F) + \lambda_\varphi \Pi_\varphi + \lambda_\alpha F_+^\alpha + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r + \lambda^{rs} \Pi_{rs} \right). \quad (4.81)$$

donde  $F_+^\alpha \equiv \frac{1}{2} ((1 + \bar{\Gamma}) F)^\alpha$ .

La evolución temporal de las constricciones primarias restantes

$$\dot{\Pi} = -\varphi^{-1/3} \mathcal{H} \quad (4.82)$$

$$\dot{\Pi}_r = -\mathcal{H}_r \quad (4.83)$$

$$\dot{\Pi}_{rs} = -\frac{N\varphi^{1/3}\gamma}{2} (\delta_{(r}^t \delta_s^u - \gamma_{rs} \gamma^{tu}) \Omega_{tu} \quad (4.84)$$

$$\dot{\Pi}_\varphi = \frac{N}{3} \varphi^{-4/3} \mathcal{H} - \frac{N}{3} \varphi^{-2/3} \gamma \gamma^{rs} \Omega_{rs} \quad (4.85)$$

generan las siguientes 6 constricciones secundarias

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\approx 0, \\ \mathcal{H}_r &\approx 0, \\ \Omega_{rs} &= \Pi_r^\mu \Pi_{s\mu} - \varphi^{2/3} \gamma_{rs} \approx 0.\end{aligned}\quad (4.86)$$

La evolución temporal de las constricciones secundarias  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_r$  no genera nuevas constricciones mientras que la evolución temporal de las constricciones  $\Omega_{rs}$  permite determinar el multiplicador de Lagrange  $\lambda^{rs}$ , explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{rs} &= 2\Pi_{(r}^\mu \partial_s) \left( \frac{1}{T} N \varphi^{-1/3} (P_\mu - T S_\mu) + N^t \Pi_t^\mu \right) - 2i \Pi_{(r}^\mu \bar{\Lambda} \Gamma_\mu (1 + \bar{\Gamma}) \partial_s) \theta \\ &\quad - \frac{2}{3} \varphi^{-1/3} \gamma_{rs} \lambda_\varphi + \varphi^{2/3} \lambda_{rs} \approx 0,\end{aligned}\quad (4.87)$$

ecuación de la cual podemos despejar  $\lambda^{rs}$ . Si sustituimos la expresión de este multiplicador de Lagrange en el hamiltoniano (4.81) obtenemos el hamiltoniano total de primera clase

$$H_T = \int d^2\xi (N \varphi^{-1/3} \mathcal{T} + N^r \mathcal{T}_r + \lambda_\varphi \mathcal{T}_\varphi + \lambda \mathcal{F} + \lambda \Pi + \lambda^r \Pi_r),$$

donde

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{H} + \frac{2}{T} (P_\mu - T S_\mu) \partial_r (\varphi^{-2/3} \Pi^{rs} \Pi_s^\mu) - \varepsilon^{rs} \Pi_r^\mu \partial_s \bar{\theta} \Gamma_\mu F, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{T}_r \equiv \mathcal{H}_r + 2\Pi_r^\mu \partial_s (\varphi^{-2/3} \Pi^{st} \Pi_{t\mu}) + \partial_r \bar{\theta} F, \quad (4.89)$$

$$\mathcal{T}_\varphi \equiv \Pi_\varphi + \frac{2}{3} \varphi^{-1} \Pi^{rs} \gamma_{rs}, \quad (4.90)$$

$$\mathcal{F}_\pm^\alpha \equiv \frac{1}{2} \left( (1 + \bar{\Gamma})(F + 4i\varphi^{-2/3} \Pi^{rs} \Pi_r^\mu \Gamma_\mu \partial_s \theta) \right)^\alpha. \quad (4.91)$$

son constricciones de primera clase.

Al igual que en el caso de teoría de cuerdas el siguiente paso en el análisis es hacer una clasificación de las constricciones en constricciones de primera y segunda clase. De la experiencia adquirida en el capítulo 2 intuimos que utilizando los proyectores  $\frac{1}{2}(1 \pm \bar{\Gamma})$  es posible separar covariantemente las constricciones  $F_\alpha$  en constricciones de primera y segunda clase. De hecho al calcular el hamiltoniano de primera clase hemos obtenido ya como constricciones de primera clase a  $\mathcal{F}_\pm^\alpha$ . Para corroborar esto es necesario calcular el paréntesis de Poisson entre dos constricciones fermiónicas

$$\begin{aligned}\{F_\alpha[f], F_\beta[g]\} &= -2i \int d^2\xi f g \left[ (\Gamma_\mu (1 - \alpha \bar{\Gamma}))_{\alpha\beta} (P^\mu - T S^\mu) - \varepsilon^{rs} (\Gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. \times \Pi_s^\nu \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} \left( \mathcal{H} \Pi_r^\mu - \frac{1}{2} \Pi_r^\mu \varphi^{2/3} \gamma \gamma^{tu} \Omega_{tu} - \frac{1}{T} \mathcal{H}_r (P^\mu - T S^\mu) \right) \right],\end{aligned}\quad (4.92)$$

donde

$$\alpha = \left( 1 - \frac{2}{T \gamma \varphi^{4/3}} \mathcal{H} + \frac{1}{T^2 \gamma \varphi^2} \mathcal{H}_r \mathcal{H}^r + \text{términos proporcionales a } \Omega_{rs} \right)^{1/2}. \quad (4.93)$$

De hecho la expresión de  $\alpha^2$  coincide precisamente con la expresión de  $\Gamma^2$  reportada en [18], más aún, se puede mostrar que este escalar es precisamente el factor de proporcionalidad entre las dos diferentes definiciones de la matriz gamma  $\Gamma = \alpha\bar{\Gamma}$ . Dado que  $(1 - \bar{\Gamma})\Gamma_\mu(1 - \alpha\bar{\Gamma}) \approx 2(1 - \Gamma)$  concluimos de (4.92) que las constricciones  $F_-^\alpha \equiv \frac{1}{2}((1 - \bar{\Gamma})F^1)^\alpha$  son constricciones de segunda clase

$$\{F_-^\alpha[f], F_-^\beta[g]\} \approx -2i \int d^2\xi f g (P^\mu - TS^\mu)(\Gamma_\mu(1 - \Gamma))^{\alpha\beta}. \quad (4.94)$$

Es conveniente sin embargo añadir a este conjunto de constricciones un término similar al que se añadió al conjunto de constricciones fermiónicas de primera clase

$$\mathcal{F}_-^\alpha \equiv \frac{1}{2} \left( (1 - \bar{\Gamma})(F + 4i\varphi^{-2/3} \Pi^{rs} \Pi_r^\mu \Gamma_\mu \partial_s \theta) \right)^\alpha. \quad (4.95)$$

La conveniencia de esta corrección es clara cuando se calcula el paréntesis de Poisson  $\{\Omega_{rs}, F_-^\alpha\}$ , el cual es diferente de cero, mientras que el paréntesis  $\{\Omega_{rs}, \mathcal{F}_-^\alpha\} \approx 0$ . Por tanto la diferencia entre redefinir o no la restricción tendrá una consecuencia práctica cuando introduzcamos el paréntesis de Dirac. Si no redefinimos la restricción el paréntesis tendrá un término extra. La clasificación completa de las constricciones es:

*Constricciones de primera clase* ( $\Pi, \Pi_r, \mathcal{T}, \mathcal{T}_r, \mathcal{T}_\varphi$  y  $\mathcal{F}_+^\alpha$ ),

*Constricciones de segunda clase* ( $\Pi^{rs}, \Omega_{rs}$  y  $\mathcal{F}_-^\alpha$ ).

Esta clasificación se obtiene al calcular el álgebra de Poisson entre todas las constricciones. Si se denotan las constricciones de primera clase como  $G_m$  y las de segunda clase como  $\chi_m$ , el álgebra de Poisson para sistemas con constricciones reducibles tiene la siguiente forma general

$$\begin{aligned} \{G_m, G_n\} &\approx 0, \\ \{G_m, \chi_n\} &\approx 0, \\ \{\chi_m, \chi_n\} &= C_{mn}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

La supermembrana es un sistema con constricciones reducibles ya que las constricciones fermiónicas no son linealmente independientes. Éstas satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} ((1 + \bar{\Gamma})\mathcal{F}_-^\alpha) &= 0, \\ ((1 - \bar{\Gamma})\mathcal{F}_+^\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (4.97) \quad (4.98)$$

Dado que tenemos constricciones de segunda clase necesitamos introducir el paréntesis de Dirac. Los únicos paréntesis de Poisson no nulos entre las constricciones de segunda clase son

$$\{\mathcal{F}_-^\alpha(\xi), \mathcal{F}_-^\beta(\xi')\} \approx -2i(P_\mu - TS_\mu)(\Gamma^\mu(1 - \Gamma))^{\alpha\beta} \delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.99)$$

$$\{\Pi_{rs}(\xi), \Omega_{tu}(\xi')\} \approx -\frac{1}{2}(\gamma_{rt}\gamma_{su} + \gamma_{st}\gamma_{ru})\delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.100)$$

por lo que el paréntesis de Dirac está dado por

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} + \int d^2\xi \{A, \Omega_{rs}(\xi)\} \gamma^{rt} \gamma^{su} \varphi^{-\frac{2}{3}}(\xi) \{\Pi_{tu}(\xi), B\} \\ &\quad - \int d^2\xi \{A, \Pi_{rs}(\xi)\} \gamma^{rt} \gamma^{su} \varphi^{-\frac{2}{3}}(\xi) \{\Omega_{tu}(\xi), B\} \\ &\quad - \frac{1}{4} i \int d^2\xi \{A, \mathcal{F}_-\} \gamma^{-1} \varphi^{-\frac{2}{3}}(P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu \{\mathcal{F}_-, B\}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Bajo este paréntesis, el álgebra no nula de las constricciones densitizadas de primera clase es, hasta constricciones de segunda clase

$$\{\mathcal{T}[f], \mathcal{T}[g]\}^* = \mathcal{T}_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \varphi^{2/3} \gamma \gamma^{rs}], \quad (4.102)$$

$$\{\mathcal{T}[f], \mathcal{T}_r[g]\}^* = \mathcal{T}[f \partial_r g - g \partial_r f], \quad (4.103)$$

$$\{\mathcal{T}_r[f], \mathcal{T}_s[g]\}^* = \mathcal{T}_s[f \partial_r g] - \mathcal{T}_r[g \partial_s f], \quad (4.104)$$

$$\{\mathcal{F}_+[f], \mathcal{T}_r[g]\}^* = -F_+[g \partial_r f], \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}_+[f], \mathcal{T}[g]\}^* &= \int d^2\xi \left( fg [ie^{rs}(1 + \Gamma) \partial_r \theta \mathcal{T}_s - \Gamma_{\mu\nu} \partial_r \mathcal{F}_+(P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\sigma \gamma^{rs} \varphi^{-2/3} \right. \\ &\quad \left. - 2i \Gamma_{\mu\nu} \mathcal{F}_+(P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\rho \Pi_\rho^\sigma \partial_r \theta \Gamma_\rho \partial_\mu \theta \gamma^{rs} \varphi^{-4/3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \varphi^{-4/3} \gamma^{-1} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{tu} \Gamma_{\rho\sigma} \mathcal{F}_+(P^\mu - TS^\mu) \Pi_\mu^\rho \Pi_\nu^\sigma \partial_r \theta \Gamma_\mu \partial_s \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \varepsilon^{rs} \Gamma_\mu \mathcal{F}_+ \partial_r \theta \Gamma^\mu \partial_s \theta + \frac{i}{4} \varepsilon^{rs} \Gamma_{\mu\nu} \mathcal{F}_+ \partial_r \theta \Gamma^{\mu\nu} \partial_s \theta \right] \\ &\quad + \partial_r f g \Gamma_{\mu\nu} \mathcal{F}_+(P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\sigma \gamma^{rs} \varphi^{-2/3}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}_+^\alpha[f], \mathcal{F}_+^\beta[g]\}^* &= \int d^2\xi f g \left[ i(\Gamma_\mu(1 + \Gamma))^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{T} \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} (P^\mu - TS^\mu) \mathcal{T} - \varphi^{-2/3} \Pi_\nu^\mu \mathcal{T}^\nu \right) \right. \\ &\quad \left. + i(\Gamma_\mu(1 + \Gamma))^{\alpha\beta} \varphi^{-2/3} \gamma^{rs} \Pi_\nu^\sigma \partial_r \theta \Gamma_\nu \mathcal{F}_+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{T} \varphi^{-4/3} \gamma^{-1} \varepsilon^{rs} (\Gamma_\mu(1 + \Gamma))^{\alpha\beta} (\partial_r \theta \Gamma_\nu \mathcal{F}_+) (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{T} \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} \varepsilon^{rs} (\Gamma_{\mu\nu\rho} \mathcal{F}_+)^{(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma^\rho \partial_r \theta)^{\beta)} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{tu} (\Gamma_{\mu\nu\rho} \mathcal{F}_+)^{(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma^{\mu\sigma} \partial_r \theta)^{\beta)} \Pi_{s\sigma} \Pi_\nu^\mu \Pi_\rho^\sigma \right. \\ &\quad \left. + i \mathcal{F}_+^{(\alpha} [(1 + \Gamma) \Gamma^\mu \partial_r \theta]^{\beta)} \Pi_{\mu\nu} \varphi^{-2/3} \gamma^{rs} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{T} \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} \varepsilon^{rs} \mathcal{F}_+^{(\alpha} ((1 + \Gamma) \Gamma_{\mu\nu} \partial_r \theta)^{\beta)} (P^\mu - TS^\mu) \Pi_\nu^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Si se compara esta álgebra con la obtenida en [18] podemos ver que el paréntesis de Dirac (4.107) entre dos constricciones fermiónicas no es el mismo (desde luego, además del factor de  $\varphi$  que hace conforme estas expresiones). Específicamente las diferencias son los dos últimos términos que aparecen en dicho paréntesis, el penúltimo término aparece sólo una vez a diferencia de [18] donde aparece con un factor de 2 y el último término no tiene paralelo en el álgebra obtenida en [18]. Estas diferencias en el álgebra son consecuencia

exclusiva de las diferentes matrices que hemos utilizado para hacer la proyección de las constricciones fermiónicas.

## 4.4 Norma del cono de luz

Al discutir las teorías de norma, relatividad general y teoría de cuerdas, la elección de la norma del cono de luz es a menudo conveniente porque ésta permite la eliminación de todos los grados de libertad no físicos. La cuantización de estas teorías en la norma del cono de luz es entonces directa porque la unitariedad es garantizada. El precio que se paga es que en esta norma la invariancia de Lorentz no es manifiesta y puede perderse mediante el procedimiento de cuantización. En realidad, en el caso de teoría de cuerdas esta simetría se pierde a menos que se introduzcan grados de libertad adicionales o que la dimensión  $D$  del espacio-tiempo tome uno de los varios valores 'críticos' posibles.

El papel de la norma del cono de luz en la teoría de supermembranas es bastante diferente. Esta norma no permite una eliminación de todos los grados de libertad no físicos. La razón para esto es fácil de entender. En el sector bosónico, para ir a la norma del cono de luz hacemos la división de las coordenadas  $X^\mu$  en la forma

$$X^\mu \rightarrow \left\{ X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}); \quad X^I, \quad I = 1, \dots, (D-2), \right. \quad (4.108)$$

y entonces se elige la condición de norma  $\dot{X}^+ = P_0^+$ . En teoría de cuerdas esta condición de norma permite resolver para la variable  $X^-$ , con el resultado de que quedan únicamente las  $D-2$  variables  $X^I$ . Como hemos visto en el capítulo 2, este es el número correcto de variables físicas para el caso de la cuerda. Sin embargo aunque para la membrana esta condición de norma permite resolver para  $X^-$ , sabemos que sólo  $D-3$  de las  $D-2$  variables  $X^I$  son físicas. concluimos entonces que la norma del cono de luz para la supermembrana deja una invariancia de norma residual que debe servir en principio para eliminar una variable adicional. A nivel de constricciones esto significa que en la norma del cono de luz todavía quedan constricciones de primera clase.

Debido a la importancia que tiene en la teoría esta condición de norma, la discutiremos en el contexto de la teoría de Dirac. Introducimos entonces las condiciones de norma del cono de luz como nuevas constricciones  $G$

$$G \equiv N - 1 \approx 0, \quad (4.109)$$

$$G^\tau \equiv N^\tau \approx 0, \quad (4.110)$$

$$G_\varphi \equiv \varphi - 1 \approx 0, \quad (4.111)$$

$$G_1 \equiv X^+ - P_0^+ \tau \approx 0, \quad (4.112)$$

$$G_2 \equiv P^+ - P_0^+ \approx 0, \quad (4.113)$$

$$G^\alpha \equiv (\Gamma^+ \theta)^\alpha + \frac{i}{4} \gamma^{-1} \varphi^{-4/3} (P_\mu - T S_\mu) (\Gamma^+ \Gamma^\mu \mathcal{F}_-)^\alpha \quad (4.114)$$

$$+\frac{i}{8}\gamma^{-1}\varphi^{-4/3}(P_{\mu}-TS_{\mu})(\Gamma^{+}\Gamma^{\mu}\mathcal{F}_{+})^{\alpha},$$

donde  $P_0^{+}$  es el modo constante de  $P^{+}$  y  $\Gamma^{+}$  es definida como

$$\Gamma^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^{10}). \quad (4.115)$$

Los últimos dos términos en (4.114) se añaden para que el único paréntesis de Poisson no nulo de  $G_{\alpha}$  sea con la constricción de primera clase  $\mathcal{F}_{+}^{\alpha}$ . En la práctica esto no complica el cálculo dado que las constricciones de segunda clase se eligen fuertemente igual a cero después de que los paréntesis son evaluados, al final estaremos trabajando con la condición de norma más simple  $\Gamma^{+}\theta \approx 0$ .

Los únicos paréntesis de Poisson no nulos de las condiciones de norma son

$$\{G_1(\xi), \mathcal{T}(\xi')\} \approx P_0^{+}\delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.116)$$

$$\{G_2(\xi), \mathcal{T}_r(\xi')\} \approx P_0^{+}\partial_r\delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.117)$$

$$\{G^{\alpha}(\xi), \mathcal{F}_{+\beta}(\xi')\} \approx \frac{1}{2}(\Gamma^{+}(1 + \Gamma))_{\beta}^{\alpha}\delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.118)$$

$$\{G(\xi), \Pi(\xi')\} \approx \delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.119)$$

$$\{G^r(\xi), \Pi_s(\xi')\} \approx \delta_s^r\delta^2(\xi - \xi'), \quad (4.120)$$

$$\{G_{\varphi}(\xi), \Pi_{\varphi}(\xi')\} \approx \delta^2(\xi - \xi'). \quad (4.121)$$

Como hemos discutido anteriormente, no todas las simetrías han sido fijadas por las condiciones de norma (4.109)-(4.114). Del paréntesis (4.117) podemos observar que mientras  $\nabla_r\mathcal{T}^r$  es una constricción de segunda clase,  $\epsilon^{rs}\nabla_r\mathcal{T}_s$  es una constricción de primera clase. De

$$\int d\xi' \{f\gamma^{-1/2}\epsilon^{rs}\nabla_r\mathcal{T}_s(\xi'), X^{\mu}(\xi)\} = -\epsilon^{rs}\gamma^{-1/2}\partial_s f\partial_r X^{\mu}, \quad (4.122)$$

donde  $f(\xi)$  es un parámetro de transformación arbitraria, observamos que la constricción de primera clase  $\epsilon^{rs}\nabla_r\mathcal{T}_s$  genera las reparametrizaciones  $\delta X^{\mu} = \eta^i\partial_i X^{\mu}$ , con  $\eta^0 = 0$  y  $\eta^r = -\epsilon^{rs}\gamma^{-1/2}\partial_s f$ .

Finalmente, si la membrana es conexa pero no simplemente conexa, habrá ciertas constricciones globales de primera clase. Estas constricciones surgen de la siguiente forma. De acuerdo al teorema de Hodge un vector sobre una variedad compacta arbitraria puede ser descompuesto en una parte de divergencia nula, una de rotacional nulo y una parte armónica. Los vectores armónicos son vectores de divergencia y rotacional nulo y hay tantos vectores armónicos como el primer número de Betti de la variedad. Ahora, una superficie de Riemann compacta de orden  $g$ , tiene número de Betti igual a  $2g$ . Por tanto al considerar la descomposición de Hodge de  $\mathcal{T}_r$  se obtienen  $2g$  constricciones globales  $\oint \mathcal{T}_r dl^r$ , donde  $l$  es cualquiera de los  $2g$  lazos no contractibles sobre la membrana. En resumen, dadas las condiciones de norma (4.109)-(4.114), las únicas constricciones de primera clase que quedan en la teoría son

$$C_1 \equiv \epsilon^{rs}\nabla_r\mathcal{T}_s \approx 0, \quad (4.123)$$

$$C_2 \equiv \oint \mathcal{T}_r dl^r(w) \approx 0, \quad w = 1, \dots, 2g. \quad (4.124)$$

Note que (4.124) tiene el mismo contenido que (4.123) para lazos contractibles.

El paréntesis de Dirac de la teoría, en la norma del cono de luz es

$$\begin{aligned}
 \{A, B\}^* &= \{A, B\} - \int d^2\xi \{ \{A, \Pi_{rs}(\xi)\} \gamma^{rt} \gamma^{su} \varphi^{-2/3}(\xi) \{ \Omega_{tu}(\xi), B\} - \{A, \Pi(\xi)\} \{G(\xi), B\} \\
 &\quad - \frac{i}{8} \{A, \mathcal{F}_-\} \gamma^{-1} \varphi^{-2/3} (P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu \{ \mathcal{F}_-, B\} - \{A, \Pi_\varphi(\xi)\} \{G_\varphi(\xi), \hat{B}\} \\
 &\quad - \{A, \mathcal{T}(\xi)\} (P_0^+)^{-1}(\xi) \{G_1(\xi), B\} - \{A, \Pi_r(\xi)\} \gamma^{rs}(\xi) \{G_s(\xi), B\} \quad (4.125) \\
 &\quad + \{A, \nabla_r \mathcal{T}^r(\xi)\} (P_0^+ \nabla^s \partial_s)^{-1}(\xi) \{G_2(\xi), B\} \\
 &\quad + i \{A, G(\xi)\} (P_0^+)^{-1} (P_\mu - TS_\mu) \Gamma^\mu(\xi) \{ \mathcal{F}_+(\xi), B\} - (-1)^{AB} (AB) \}.
 \end{aligned}$$

Uno podría considerar fijar los difeomorfismos generados por  $C_1$ . Esto puede hacerse por ejemplo, al tomar las condiciones de norma  $X^1 - \rho \approx 0$  y  $P^1|_{\sigma=\sigma_0} \approx 0$ . Sin embargo, en este caso los paréntesis de Dirac se vuelven enormemente complicados. Por tanto es más conveniente no fijar las simetrías generadas por  $C_1$ . El precio a pagar es la necesidad de imponer las constricciones  $C_1$  y  $C_2$  como condiciones físicas sobre los estados.

Una vez que se introduce el paréntesis de Dirac, todas las constricciones de segunda clase pueden tomarse fuertemente igual a cero y pueden utilizarse para obtener unas variables en términos de las otras

$$X^+ = P_0^+ \tau, \quad P^+ = P_0^+, \quad \Gamma^+ \theta = 0, \quad (4.126)$$

$$N^r = 0 \quad N = 1, \quad \varphi = 1, \quad (4.127)$$

$$\gamma_{rs} = \partial_r \mathbf{X} \cdot \partial_s \mathbf{X}, \quad P_\alpha = iP_\mu (\Gamma^\mu \theta)_\alpha - S_\alpha, \quad (4.128)$$

De  $\mathcal{T} = 0$  podemos resolver para  $P^-$

$$P^- = S^- + \frac{1}{2P_0^+} [P^2 + \gamma] \quad (4.129)$$

mientras de  $\nabla_r \mathcal{T}^r = 0$  podemos resolver para  $X^-$

$$X^- = X_0^- + \Delta^{-1} \nabla^r [i\bar{\theta} \Gamma^- \partial_r \theta + \frac{1}{P_0^+} \partial_r \mathbf{X} \cdot \mathbf{P}], \quad (4.130)$$

donde  $X_0^-$  es una constante de integración,  $\Delta = \nabla^r \partial_r$  y las letras en negritas representan las nueve dimensiones transversas, por ejemplo  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^I \mathbf{P}_I$ , etc. En resumen, las variables canónicas independientes son  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $X_0^-$ ,  $P_0^+$  y  $\Gamma^+ \Gamma^- \theta$ . La expresión de la densidad hamiltoniana que se tiene después de fijar la norma es

$$H = \frac{\mathbf{P}^2 + \gamma}{2P_0^+} - \epsilon^{rs} \partial_r X^I \bar{\theta} \Gamma^- \Gamma_I \partial_s \theta. \quad (4.131)$$

## 4.5 Soluciones clásicas

Antes de introducir los elementos necesarios para discutir la cuantización de la supermembrana discutamos algunas de las características básicas de sus ecuaciones de movimiento y el procedimiento que se utiliza para obtener soluciones a estas ecuaciones.



Las ecuaciones de movimiento de la supermembrana (4.27)-(4.30) aún en la norma del cono de luz son intrínsecamente no lineales

$$\partial_r X^I \partial_r X_I \equiv h_{rs} = \gamma_{rs}, \quad (4.132)$$

$$-\ddot{X}^I + \partial_r (h h^{rs} \partial_s X^I) - \sqrt{2} i P^+ \epsilon^{rs} (\partial_r \bar{S} \Gamma^I \partial_s S) = 0, \quad (4.133)$$

$$\dot{S} + \epsilon^{rs} \partial_r X^I \Gamma_I \partial_s S = 0. \quad (4.134)$$

a diferencia de las ecuaciones de movimiento de la supercuerda. En estas ecuaciones  $S$  es un espinor real de 16 componentes que pertenece a  $SO(9)$  y está definido por  $\theta = (0, S)$ , la cual es solución de la condición de norma (4.114).

Debido a la no linealidad no podemos esperar encontrar una solución general a las ecuaciones de movimiento, a diferencia de lo que sucede en teoría de supercuerdas. Lo que puede hacerse es encontrar soluciones específicas y considerar entonces la cuantización semiclásica de éstas. El primer paso es elegir un espacio-tiempo que resuelva las ecuaciones de campo de la supergravedad de 11 dimensiones. El siguiente paso es resolver las ecuaciones bosónicas y fermiónicas. La ecuación fermiónica siempre puede resolverse tomando  $\theta = \text{cte.}$  y la ecuación se reduce a la correspondiente de una membrana bosónica. Dada esta solución el siguiente paso es investigar su posible extensión supersimétrica. En esta sección haremos una revisión de algunas de las soluciones clásicas que se conocen para la membrana en diferentes espacios-tiempo, utilizaremos la siguiente notación para las coordenadas del volumen de mundo de la membrana  $\xi^i = (\tau, \sigma, \rho)$ .

(1) *Soluciones de cuerda.*

Si el espacio-tiempo de dimensión  $D = 11$  es  $(\text{Mink})_{10} \times T^1$  entonces, como fue mostrado en [7], el 'ansatz' de doble reducción dimensional

$$X^0 = \rho, \quad \partial_\rho X^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, 9 \quad (4.135)$$

para una membrana toroidal, reduce las ecuaciones de la membrana a aquellas de una cuerda. Por tanto, cualquier solución de las ecuaciones de la cuerda, junto con  $X^{10} = \rho$ , resuelve las ecuaciones de la membrana.

(2) *Membrana toroidal estática.*

Mediante un 'ansatz' que considere dos diferentes doble reducción dimensional

$$X^{10} = \rho, \quad X^9 = \sigma, \quad \partial_\rho X^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, 8, \quad (4.136)$$

las ecuaciones de la membrana se reducen a aquellas de una partícula puntual masiva. Esta masa  $m$  es justo la energía almacenada en la superficie de la membrana toroidal (esto es, la tensión superficial veces el área). Una solución a la ecuación de la membrana es por tanto

$$X^\mu(\tau) = a^\mu + p^\mu \tau, \quad p^2 = m^2, \quad (4.137)$$

junto con (4.136) [11].

### (3) Soluciones esféricas.

Una solución esférica de las ecuaciones de la membrana fue considerada por Dirac en [21]. Él encontró una solución estática al suponer que la membrana posee una carga eléctrica. En este caso hay un radio crítico para el cual la repulsión electrostática balancea la tensión superficial. Para una membrana sin carga eléctrica (el cual es el caso de interés aquí) no es posible tener una solución esférica estática. En [22] Colling y Tucker consideraron una membrana que pulsa periódicamente, donde el pulso consta del colapso esférico a un punto, seguido de una reexpansión. La solución es

$$X^0 = \tau, \quad X^1 = r(\tau) \sin \sigma \cos \rho, \quad X^2 = r(\tau) \sin \sigma \sin \rho, \quad X^3 = \dots = X^{10} = 0, \quad (4.138)$$

donde  $r(\tau)$  satisface

$$\tau + \frac{1}{r_0^2} \sqrt{(r_0^4 - \tau^4)} = 0, \quad (4.139)$$

para algún  $\tau_0 > 0$ . Esta ecuación puede ser resuelta en términos de funciones especiales [22].

### (4) Membranas crepé.

Este tipo de membranas fueron introducidas inicialmente como una solución de la membrana abierta por Kikkawa y Yamasaki [23] para un espacio-tiempo de Minkowski de  $D$ -dimensiones con  $D \geq 5$ . La solución puede ser escrita como

$$X^0 = \tau, \quad X^1 + iX^2 = \sigma e^{i\omega\tau}, \quad X^3 + iX^4 = \rho e^{i\omega\tau}, \quad X^5 = \dots = X^{10} = 0, \quad (4.140)$$

Esta representa un disco girando en los planos  $X^1, X^2$  y  $X^3, X^4$ . La frontera de una membrana abierta se mueve a la velocidad de la luz [22, 24] de tal manera que la frontera de la membrana crepé está en  $(\rho^2 + \sigma^2) = \omega^{-2}$ .

Esta solución que es claramente aplicable a un espacio-tiempo de dimensión  $D = 11$  de la forma  $(\text{Mink})_d \times T_{(11-d)}$  para  $d \geq 5$ , fue generalizada a la membrana cerrada por Mezincescu et. al. [25], ellos tomaron dos copias de la membrana abierta en forma de disco, una sobre la otra y las identifican a lo largo de sus fronteras. La curvatura intrínseca de esta membrana es singular en la frontera pero como no hay término de curvatura en la acción, esta es una solución regular de las ecuaciones de membrana cerrada. Estas soluciones son no supersimétricas.

### (5) Soluciones Hoppe-Nicolai.

Estas soluciones son superficies cerradas de orden  $g$  arbitrario que pulsan y rotan en un espacio de Minkowski de  $D$  dimensiones [26] (para la supermembrana se toma  $D = 11$ ). Las soluciones están dadas por

$$X^\mu = (\tau; r(\tau) \cos \phi(\tau) \mathbf{n}(\sigma, \rho), r(\tau) \sin \phi(\tau) \mathbf{n}(\sigma, \rho), 0, \dots, 0), \quad (4.141)$$

donde  $r(\tau)$  y  $\phi(\tau)$  son funciones de  $\tau$  que satisfacen

$$r^2(\tau) \phi(\tau) = \text{const} \neq 0, \quad (4.142)$$

y  $\mathbf{n}$  es un  $k$ -vector ( $3 \leq k \leq 5$ ), que satisface

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad (\nabla^2 + 2)\mathbf{n} = 0, \quad (4.143)$$

con

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_a (\bar{h} \bar{h}^{ab} \partial_b), \\ \bar{h} &= \det \bar{h}_{ab}, \quad \bar{h}_{ab} \equiv \partial_a \mathbf{n} \cdot \partial_b \mathbf{n}, \quad \partial_a \equiv (\partial_\sigma, \partial_\rho). \end{aligned} \quad (4.144)$$

Las ecuaciones (4.143) son las ecuaciones para las superficies mínimas en  $S^{k-1}$ . Para  $k = 4$  dichas superficies existen para cualquier orden  $g$ . Para  $g = 0$  se puede tomar por ejemplo  $\mathbf{n} = (\sin \sigma \cos \rho, \sin \sigma \sin \rho, \cos \sigma, 0)$  [26]. Esto da una membrana que es homeomorfa a una 2-esfera, pero la cual no es métricamente una 2-esfera (y por tanto no viene con el nombre de solución esférica). Tales membranas no se colapsan necesariamente a un punto. Para una discusión detallada de estas soluciones debe consultarse [26].

#### (6) Membranas Colapsadas.

En este tipo de soluciones la membrana se colapsa a una configuración de área cero, esto es, a una línea o un punto. Siguiendo [10] observamos que mediante una elección de norma es posible elegir a  $g_{ij}$  en la forma

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h_{ab} \end{pmatrix}, \quad (4.145)$$

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (4.146)$$

donde  $h = \det(h_{ab})$ . Entonces

$$\sqrt{-g} g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & -h_{12} \\ 0 & -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.147)$$

de tal forma que las ecuaciones de onda de la brana son

$$-\partial_\tau^2 X^\mu + \partial_\sigma (h_{22} \partial_\sigma X^\mu - h_{12} \partial_\rho X^\mu) + \partial_\sigma (h_{11} \partial_\rho X^\mu - h_{12} \partial_\sigma X^\mu) = 0, \quad (4.148)$$

( $\mu = 0, 1, \dots, 10$ ). La soluciones de membrana colapsada para esta ecuación (y las condiciones de norma  $g_{00} \equiv -h$ ,  $g_{0i} = 0$ ) tienen la forma

$$X^\mu = X^\mu(\sigma) + p^\mu \tau, \quad p^2 = 0, \quad p \cdot \partial_\sigma X(\sigma) = 0, \quad (4.149)$$

donde  $p^\mu$  es constante. Por ejemplo

$$p^\mu = (p, 0, 0, \dots, 0, p), \quad X^\mu(\sigma) = (0, f_1(\sigma), f_2(\sigma), \dots, f_9(\sigma), 0) = 0, \quad (4.150)$$

esto es, una membrana colapsada a una línea y moviéndose (sin cambiar su forma) a la velocidad de la luz. El caso especial para el cual todas las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_9$  son constantes corresponden a la solución en [10] de una membrana colapsada a un punto. Estas soluciones pueden extenderse al caso supersimétrico.

## 4.6 Supermembrana como una teoría de matrices

### 4.6.1 Area preservando difeomorfismos

Como hemos visto en una sección anterior, la teoría de supermembranas en la norma del cono de luz posee simetrías residuales conocidas como 'área que preserva difeomorfismos' (APD). Para analizar esta simetría residual es conveniente introducir el siguiente paréntesis definido sobre el espacio de funciones  $A, B$  de las coordenadas espaciales de la membrana

$$\{A, B\}(\xi) = \frac{\varepsilon^{rs}}{\sqrt{w(\xi)}} \partial_r A(\xi) \partial_s B(\xi). \quad (4.151)$$

Este es el paréntesis de Poisson asociado con la forma simpléctica

$$\omega = \frac{\varepsilon^{rs}}{\sqrt{w(\xi)}} d\xi^r \wedge d\xi^s, \quad (4.152)$$

la cual, como cualquier dos forma en dos dimensiones, es cerrada. El paréntesis es manifestamente antisimétrico

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad (4.153)$$

y obedece la identidad de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0, \quad (4.154)$$

y por tanto tiene todas las propiedades de un paréntesis de Lie. Consecuentemente las funciones sobre la membrana forman naturalmente un álgebra de Lie de dimensión infinita con el paréntesis anterior. La dimensión de la membrana  $p = 2$  es esencial aquí, ya que estas conclusiones no son válidas para  $p > 2$ . Utilizando este paréntesis podemos reescribir la densidad potencial como

$$\gamma = \det(\partial_r X \cdot \partial_s X) = (\{X^I, X^J\})^2. \quad (4.155)$$

Similarmente, la parte del hamiltoniano que no incluye los modos cero y que nos da la fórmula de la masa, puede escribirse en la forma

$$M^2 = \int d^2\xi \left[ \frac{1}{2\sqrt{w(\xi)}} [P^2(\xi)] + \sqrt{w(\xi)} \left( \frac{1}{2} \{X^I, X^J\}^2 + \bar{\theta} \Gamma^{-I} \{X^I, \theta\} \right) \right]. \quad (4.156)$$

La ventaja de reescribir las formulas anteriores en esta forma peculiar es que su similaridad con las teorías de Yang-Mills se vuelve bastante evidente. La energía potencial se anula si  $\{X^I, X^J\} = 0$ , lo cual es equivalente a la afirmación de que  $X^I$  pertenece al subálgebra de Cartan del álgebra de Lie introducida anteriormente. Cuando se trunca esta

álgebra de Lie de dimensión infinita a una álgebra matricial de Lie de dimensión finita, las configuraciones de energía cero corresponden a matrices diagonales. Dado que

$$\{X^I, X^J\} = \frac{\epsilon^{rs}}{\sqrt{w(\xi)}} \partial_r X^I \partial_s X^J, \quad (4.157)$$

no es otra cosa que la proyección del elemento de área de la membrana sobre el espacio-tiempo la invariancia residual consiste precisamente de aquellos difeomorfismos que dejan la densidad de área invariante. Estos corresponden a los difeomorfismos

$$\xi^r \mapsto \xi^r + \eta^r(\xi), \quad (4.158)$$

generados por campos vectoriales de divergencia nula

$$\partial_r (\sqrt{w(\xi)} \epsilon^r(\xi)) = 0. \quad (4.159)$$

Esta ecuación es resuelta localmente

$$\eta^r(\xi) = \frac{\epsilon^{rs}}{\sqrt{w(\xi)}} \partial_s \eta(\xi). \quad (4.160)$$

Para membranas de topología no trivial, hay campos vectoriales adicionales que corresponden a las uno formas armónicas en la descomposición de Hodge standard. Esto es precisamente lo que hemos encontrado en nuestro análisis canónico al fijar la norma del cono de luz. Sólo que aquí hemos mostrado su relación con el álgebra de Lie

## 4.6.2 Regularización matricial

En 1982 Goldstone y Hoppe introdujeron una regularización de la teoría de membranas en el cono de luz, en el caso en el que la membrana es una esfera [27]. De acuerdo a este procedimiento de regularización es necesario truncar la teoría de membranas a un modelo de matrices con número de grados de libertad finito, esto es, las funciones sobre la superficie de la supermembrana son mapeadas a un modelo de matices finitas de  $N \times N$ . Justo como en la cuantización de un sistema de mecánica clásica definido en términos de un paréntesis de Poisson, el paréntesis de Poisson que aparece en la teoría de membranas es reemplazada en la regularización de matrices de la teoría por un conmutador de matrices. La idea es entonces definir la membrana cuántica como el límite donde la truncación es removida, tomando en cuenta posibles renormalizaciones. El modelo truncado puede ser obtenido de manera alternativa mediante una reducción original de una teoría de Yang-Mills  $SU(N)$  máximamente supersimétrica de  $1+9$  a  $1+0$  dimensiones. Esta reducción fue investigada originalmente en [28, 29, 30].

La forma general de proceder es expandir todas las coordenadas del super espacio en términos de algún conjunto ortonormal completo de funciones  $Y_A(\xi)$  sobre la membrana

$$X(\xi) = X_0 + \sum_A X^A Y_A(\xi). \quad (4.161)$$

Se define entonces una métrica sobre esta función de espacios

$$\int d^2\xi \sqrt{w(\xi)} Y_A(\xi) Y_B(\xi) = \eta_{AB}, \quad (4.162)$$

mediante la cual puede subirse o bajarse los índices, de forma tal que tenemos las relaciones de ortogonalidad

$$\int d^2\xi \sqrt{w(\xi)} Y_A(\xi) Y^B(\xi) = \delta_A^B. \quad (4.163)$$

Por ejemplo, en el caso de membranas esféricas, podemos tomar los  $Y^A$  como los armónicos esféricos standard  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , en cuyo caso el subir y bajar índices está dado por la conjugación compleja  $Y^{lm} = (Y_{lm})^* = Y_{l,-m}$ . Para la membrana toroidal, los índices son de la forma  $A = (n_1, n_2)$  donde cada índice representa un modo de Fourier, explícitamente tenemos

$$X(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} X_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.164)$$

$$X(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{n_1, n_2} X_{n_1 n_2} e^{i(n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2)}. \quad (4.165)$$

También se tiene la relación de completos general

$$\sum_A Y^A(\xi) Y_A(\xi') = \frac{1}{\sqrt{w(\xi)}} \delta(\xi - \xi'). \quad (4.166)$$

A partir de esta relación de completos, se puede expresar el paréntesis de Lie en términos de la nueva base

$$\{Y_A, Y_B\} = f_{AB}^C Y_C, \quad (4.167)$$

donde las constantes de estructura están dadas por

$$f_{AB}^C = \int d^2\xi \varepsilon^{rs} \partial_r Y_A \partial_s Y_B Y^C. \quad (4.168)$$

Explotando estas observaciones se trunca ahora la teoría a otra con un número finito de grados de libertad. Esta 'regularización' de la membrana está dada por introducir un corte sobre el número de modos, de manera tal que los índices  $A, B, \dots$ , estén restringidos a un rango finito de valores  $1, \dots, \Lambda$ . Por consistencia se debe entonces demandar que el grupo de APD debe ser aproximado por un grupo de Lie finito  $G_\Lambda$  con  $\dim G_\Lambda = \Lambda$  en el sentido que

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_{AB}^C(G_\Lambda) = f_{AB}^C(APD) \quad (4.169)$$

para cualesquiera tres índices fijos  $A, B, C$ . El resultado crucial es que

$$G_\Lambda = SU(N) \quad \text{con} \quad \Lambda = N^2 - 1. \quad (4.170)$$

Como hemos mencionado este resultado fue establecido primero para membranas esféricas en [27]. Poco después fue extendido a membranas toroidales [31, 32, 33] y finalmente a

membranas de orden arbitrario [34]. El álgebra de Lie APD es por tanto reemplazada por un álgebra de Lie de dimensión finita, que es el álgebra de Lie de las matrices  $SU(N)$ . Para enfatizar el carácter matricial de esta regularización, se reemplaza el paréntesis de Lie por un conmutador

$$\{ \cdot, \cdot \} \rightarrow [ \cdot, \cdot ]. \quad (4.171)$$

La correspondencia entre las expresiones de la membrana y las expresiones de matrices son las siguientes

$$\int d^2\xi \sqrt{w} Y_A = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(T_A) = 0, \quad (4.172)$$

$$\{ Y_A, Y_B \} = f_{AB}^C Y_C \Leftrightarrow [T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C, \quad (4.173)$$

$$f_{ABC} = \int d^2\xi \sqrt{w} Y_A \{ Y_B, Y_C \} \Leftrightarrow f_{ABC} = \text{Tr}(T_A [T_B, T_C]), \quad (4.174)$$

$$\eta_{AB} = \int d^2\xi \sqrt{w} Y_A Y_B \Leftrightarrow \eta_{AB} = \text{Tr}([T_A, T_B]), \quad (4.175)$$

$$\int d^2\xi \sqrt{w} \{ Y_A, Y_B \} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}([T_A, T_B]) = 0. \quad (4.176)$$

### 4.6.3 Espectro de la supermembrana

A finales de los ochenta utilizando la idea de la regularización de membranas Wit, Hoppe y Nicolai mostraron [12] que la teoría de supermembranas regularizadas podía ser descrita en términos de la mecánica cuántica de matrices supersimétricas, la esperanza general era de que la teoría de supermembranas cuantizada tendría un espectro discreto de estados. En teoría de cuerdas el espectro de estados en el espacio de Hilbert de la cuerda puede ser puesto en correspondencia uno a uno con estados de partícula en el espacio-tiempo. El hecho de que el espectro de partículas no masivas contiene un gravitón y que existe una brecha en la escala de masas que separa los estados no masivos de los estados masivos es crucial para esta interpretación. Sin embargo, para la teoría de supermembranas el espectro no parece tener estas propiedades. Esto puede observarse tanto en la teoría de membranas clásica como cuántica.

No daremos aquí una demostración rigurosa de la continuidad del espectro, para ello el lector puede consultar la literatura original [8], más bien presentaremos una idea intuitiva de esta característica. La manera más simple de ver esta inestabilidad de la teoría de membranas es considerar una membrana clásica cuya energía es proporcional al área de la membrana multiplicada por la tensión  $T$ . Una membrana de éstas puede tener espigas largas y delgadas a un costo de energía muy pequeño. Si aproximamos a la espiga con un cilindro de radio  $r$  y longitud  $L$  entonces la energía de la espiga es  $2\pi T r L$ . Para una espiga muy larga pero de radio pequeño  $r \ll 1/TL$  el costo de energía es muy pequeño pero la espiga es muy larga. Esto indica que una membrana cuántica tenderá a tener muchas fluctuaciones de este tipo, haciendo difícil pensar simplemente en la membrana como un objeto puntual. La demostración matemática de este hecho geométrico en el caso de la

teoría de matrices supersimétricas fue probado por de Wit, Lüscher y Nicolai en [8]. Ellos mostraron que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier energía  $E \in [0, \infty)$  existe un estado  $\psi$  en el modelo de matrices supersimétrico  $N = 2$ , el cual es normalizable ( $\int |\psi|^2 = \|\psi\|^2 = 1$ ) y el cual tiene

$$\|(H - E)\psi\|^2 < \varepsilon.$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Esto implica que el espectro de la teoría cuántica de matrices supersimétricas es continuo. Este resultado indica que no es posible tener una interpretación simple de los estados de la teoría en términos de un espectro de partículas discretas. Debe mencionarse que esto no resuelve la pregunta de si existe un estado con energía nula. Después de que este trabajo fue hecho, hubo muy poco desarrollo adicional en la teoría cuántica de membranas supersimétrica como una teoría de membranas o gravedad casi hasta una década después.

#### 4.6.4 Cuantización covariante

Es natural pensar en generalizar el formalismo de regularización matricial a la formulación covariante de la teoría de membranas bosónica y supersimétrica. Algunos progresos se han realizado recientemente en esta dirección por Fujikawa y Okuyama en [35]. Para la membrana bosónica es directo implementar el procedimiento de regularización matricial. El único inconveniente es que la carga BRST necesaria para implementar el procedimiento de fijar la norma no puede ser expresada de manera simple en términos del paréntesis de Poisson sobre la membrana. Para la supermembrana existe una complicación más seria relacionada con la simetría  $\kappa$  de la teoría. Esencialmente esto se debe a que cualquier norma que fije la simetría  $\kappa$  rompe la invariancia de Lorentz en el espacio-tiempo de 11 dimensiones. Esta es la misma dificultad que uno encuentra cuando trata de construir una cuantización covariante de la supercuerda de Green-Schwarz. El método discutido en el segundo artículo de [35] es fijar la simetría  $\kappa$  de forma tal que rompe el 32 de  $SO(10, 1)$  en  $16_L + 16_R$  de  $SO(9, 1)$ . Así ellos pueden construir una formulación matricial de una teoría con simetría de Lorentz  $SO(9, 1)$  explícita. Sin embargo esta teoría no tiene la simetría de Lorentz  $SO(10, 1)$  deseada.

### 4.7 Invariancia de Lorentz

En esta sección se discute el problema de la invariancia de Lorentz del modelo de matrices en el límite de  $N$  grande.

Se sabe que para el modelo de matrices la truncación a una  $N$  finita rompe la invariancia de Lorentz aún a nivel clásico, pero la simetría es restaurada cuando se toma el límite  $N \rightarrow \infty$  [33, 36]. La pregunta crucial, cuya respuesta espera aún, es si esta



invariancia sigue siendo válida a nivel cuántico. Dado que el modelo de matrices está bien definido para cualquier  $N$  finita, es posible atacar este problema al menos en principio. El primer paso es escribir las expresiones explícitas para los generadores de Lorentz en la norma del cono de luz. Para hacer esto, uno simplemente trabaja con las cargas de Noether asociadas con la simetría original  $SO(1, 10)$  y como en la teoría de cuerdas en el cono de luz, uno reemplaza  $X^-$  por (4.130) en todos lados. Este procedimiento lleva a las expresiones [33]

$$M^{IJ} = \int d^2\xi (-P^I X^J + P^J X^I - \frac{i}{4} \bar{\theta} \Gamma^{IJ} \theta), \quad (4.177)$$

$$M^{+-} = \int d^2\xi (-P^+ X^- + P^- X^+), \quad (4.178)$$

$$M^{+I} = \int d^2\xi (-P^+ X^I + P^I X^+), \quad (4.179)$$

$$M^{-I} = \int d^2\xi (-P^- X^I + P^I X^- - \frac{i}{4P_0^+} \bar{\theta} \Gamma^{IJ} \theta P_J - \frac{i\sqrt{w(\xi)}}{8P_0^+} \{X_J, X_K\} \bar{\theta} \Gamma^{JK} \theta) \quad (4.180)$$

Como es bien conocido de la teoría de supercuerdas, la parte crucial en el chequeo de la invariancia de Lorentz es el paréntesis de dos generadores de 'impulso'

$$\{M^{-a}, \bar{M}^{-b}\} \approx 0, \quad (4.181)$$

el cual debe anularse sobre los estados físicos. Para la supermembrana, esto puede mostrarse clásicamente después de una buena cantidad de álgebra [37, 38]. La teoría de cuerdas nos ha enseñado que aunque el álgebra clásica de Lorentz sea cerrada esto no garantiza que lo mismo suceda en la teoría cuántica. Por el contrario, las teorías de (super)cuerdas son consistentes cuánticamente sólo en ciertas dimensiones críticas donde las anomalías se cancelan. Recordemos cual es el procedimiento que se sigue en ese caso. Se define primeramente el espacio de Hilbert por medio de las constricciones de Virasoro. Entonces las ambigüedades de ordenamiento en los generadores de Lorentz son removidos por requerir que ellos estén bien definidos, esto es, que tengan elementos de matriz finitos entre cualesquiera dos de estados. Esto se logra al introducir un ordenamiento normal. Sólo después de este paso cobra sentido calcular el álgebra y determinar la anomalía, con el bien conocido resultado de que la cuerda puede vivir únicamente en un espacio-tiempo de 26 dimensiones y la supercuerda en uno de 10 dimensiones.

En el caso del álgebra de Lorentz de la membrana, la situación es considerablemente más complicada. el álgebra de los  $M^{\mu\nu}(N)$  para  $N$  finita no cierra aún clásicamente, sino sólo en el límite  $N \rightarrow \infty$ . Reemplazando las cantidades del espacio fase por operadores cuánticos, uno cae inmediatamente en ambigüedades de ordenamiento cuánticas aún para  $N < \infty$  (donde todo está bien definido). Para proceder en el cálculo uno debería establecer primero la existencia del límite  $N \rightarrow \infty$ . Además de las ambigüedades de ordenamiento, las cuales pueden contribuir con términos de  $O(N)$  o  $O(N^2)$  al álgebra y por tanto producir contribuciones extras no deseadas en el límite de  $N$  grande, la construcción de los generadores de Lorentz cuánticos puede requerir renormalizaciones extra como es el

caso de los operadores compuestos en cualquier teoría de campo cuántica renormalizable tal como *QCD*. Sería importante poder mostrar que este tipo de renormalización es, en realidad, innecesaria para la supermembrana en  $D = 11$ . Un cálculo reciente [39] muestra que los términos no triviales de menor orden inducidos por el ordenamiento de operadores cuánticos se ¡cancela! Sorprendentemente, este cálculo parece trabajar para todas las dimensiones clásicas permitidas, así que no hay una indicación de dimensión crítica en  $D = 11$  al orden considerado.

## 4.8 Desarrollos recientes

El hecho de que la teoría de supermembranas pueda ser regularizada y descrita por una teoría de mecánica cuántica supersimétrica en la norma del cono de luz se ha conocido desde finales de los ochenta. Sin embargo, en el tiempo en que esta teoría fue desarrollada por primera vez, se creyó que la teoría de supermembranas cuántica sufría de inestabilidades que hacían que su interpretación como una teoría de gravedad cuántica a bajas energías era imposible. En 1996 la teoría cuántica supersimétrica de Yang-Mills cobró nueva fuerza al presentarse por Banks, Fischler, Shenker y Susskind (BFSS) como un candidato para una descripción microscópica cuántica de la teoría *M*. La propuesta BFSS, la cual es conocida como la ‘Conjetura de teoría de matrices’ no fue motivada por la teoría de membranas, sino por considerar la teoría de bajas energías de un sistema de muchas *D0*-branas como una descripción partónica de la teoría *M* en un sistema coordinado particular (llamado en inglés ‘light-front’).

### 4.8.1 Teoría *M*

El concepto de teoría *M* ha jugado un papel central en el desarrollo de las simetrías de dualidad. Esta teoría relaciona las cinco teorías de cuerdas entre sí y la teoría de supergravedad [40, 41, 42, 43, 44]. Se conjetura la teoría *M* como una teoría en 11 dimensiones cuyo límite de bajas energías corresponde a la supergravedad de 11 dimensiones. A pesar de que hay dificultades en construir una versión cuántica de la supergravedad en 11 dimensiones, esta es una teoría clásica bien definida con el siguiente contenido de campos [45]:

$e^{\hat{a}}_{\hat{b}}$ : un ‘vielbein’ (campo bosónico, con 44 componentes),

$\psi_I$ : un gravitino de Majorana (campo fermiónico, con 128 componentes),

$A_{IJK}$ : una 3-forma (potencial) (campo bosónico, con 84 componentes).

Además de tener una teoría de gravedad local con un campo potencial (3 forma) extra, la teoría M también contiene objetos extendidos. Estas son una supermembrana y una super 5-brana, las cuales se acoplan eléctrica y magnéticamente a la tres forma.

Una manera de definir la teoría M es como el límite de acoplamiento fuerte de la cuerda tipo IIA. La teoría de supercuerdas IIA es equivalente a la teoría M compactificada sobre un círculo  $S^1$ , donde el radio de compactificación  $R$  del círculo en la dirección 11 está relacionado a la constante de acoplamiento  $g$  de la cuerda a través de la relación  $R = g^{2/3} l_p = g l_s$ , donde  $l_p$  y  $l_s = \sqrt{\alpha'}$  son respectivamente la longitud de Planck de la teoría M y la longitud de la cuerda. El límite de descompactificación  $R \rightarrow \infty$  corresponde entonces al límite de acoplamiento fuerte de la teoría de cuerdas IIA.

Dada esta relación entre la teoría M compactificada y la teoría de cuerdas IIA, se puede construir una correspondencia entre los varios objetos en las dos teorías. Por ejemplo, el fotón de Kaluza-Klein asociado con la componente  $g_{\mu 11}$  del tensor métrico de 11 dimensiones puede ser asociado con el campo de norma  $A_\mu$  del sector R-R de la teoría de cuerdas IIA. El único objeto que está cargado bajo este campo de norma R-R en la teoría de cuerdas IIA es la D0-brana; así, la D0-brana pueden ser asociados con un supergravitón con momento  $p_{11}$  en la dirección compacta. La supermembrana y la super 5-brana de la teoría M pueden ser asociados con objetos diferentes de la teoría IIA dependiendo de si estas branas están enrolladas o no en la dirección compacta.

#### 4.8.2 La conjetura BFSS

En 1996, motivados por los avances hechos en D-branas y dualidades de cuerdas, Banks, Fischler, Shenker y Susskind (BFSS) propusieron que el límite de  $N$  grande del modelo de matrices cuánticas supersimétricas puede describir la teoría M en el sistema coordinado 'light-front'[14]. A pesar de que esta conjetura encaja en el contexto de la teoría cuántica de supermembranas, el punto de partida de BFSS fue considerar la teoría M compactificada sobre un círculo  $S^1$ , con momento grande en la dirección compactificada. como hemos discutido, cuando la teoría M es compactificada sobre  $S^1$  la teoría correspondiente en 10 dimensiones es la teoría de cuerdas IIA, y el cuanto de momento correspondiente en la dirección compacta son las D0-branas de la teoría IIA. En el límite donde el radio de compactificación  $R$  y el momento  $p_{11}$  son grandes, esta correspondencia relaciona la teoría M en el 'sistema de momento infinito' a la teoría no relativista de muchas D0-branas en la teoría de cuerdas IIA.

El lagrangiano de bajas energías para un sistema de muchas D0-branas es el lagrangiano de la mecánica cuántica de matrices que surge de la reducción dimensional a 0+1 dimensiones del lagrangiano de super Yang-Mills en 10 dimensiones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g l_s} \text{Tr} \left[ X^I X^I + \frac{1}{2} [X^I, X^J]^2 + \theta^T (i\theta - \Gamma_I [X^I, \theta]) \right]. \quad (4.182)$$

El correspondiente hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2g l_s} \text{Tr} \left( X^I X^I - \frac{1}{2} [X^I, X^J] [X^I, X^J] + \theta^T \Gamma_I [X^I, \theta] \right). \quad (4.183)$$

Utilizando las relaciones  $R = g^{2/3} l_{11} = g l_s$ , se observa que en unidades de cuerdas ( $2\pi l_s^2 = 1$ ) se puede reemplazar  $g l_s = R = 2\pi l_{11}^3$ . De tal manera que este hamiltoniano que surge de la mecánica cuántica de matrices es en realidad equivalente al hamiltoniano de la supermembrana regularizada (4.156). Esta conexión y su posible significado físico fueron discutidos por vez primera por Townsend [46]. El hamiltoniano de la teoría de matrices es a menudo escrito, siguiendo a BFSS, en la forma

$$H = \frac{R}{2} \text{Tr} \left( P^I P^I - \frac{1}{2} [X^I, X^J] [X^I, X^J] + \theta^T \Gamma_I [X^I, \theta] \right). \quad (4.184)$$

donde se ha reescalado  $X/g^{1/3} \rightarrow X$  y escrito en unidades planckianas  $l_{11} = 1$ .

La conjetura original BFSS fue hecha en el contexto de la teoría de  $N$  grande. Poco después Susskind argumentó que la teoría cuántica de matrices con  $N$  finita debe ser equivalente al sector cuantizado discretamente en el 'light-front' de la teoría M con  $N$  unidades de momento compacto [47].

Mientras la conjetura BFSS se basó en un contexto diferente al de la cuantización matricial de la supermembrana, el hecho de que la membrana aparezca naturalmente como un estado coherente en la mecánica cuántica de matrices fue una pieza sustancial de evidencia adicional para la validez de la conjetura. Dos evidencias adicionales fueron dadas por BFSS para mostrar la validez de su conjetura, la primera fue el mostrar que el espacio de Hilbert de la teoría cuántica de matrices contiene de manera natural estados de muchas partículas. Esta observación resuelve el problema del espectro continuo discutido anteriormente, la segunda evidencia fue el hecho de que los efectos cuánticos en teoría de matrices da origen a interacciones de largo alcance entre un par de cuantos gravitacionales (D0-branas) la cual tiene precisamente la forma correcta esperada de la supergravedad en el 'light-front'. Este resultado fue mostrado en [48]

### 4.8.3 Teoría de matrices como una teoría de segunda cuantización

Las ecuaciones clásicas de movimiento para una configuración de matrices bosónica con Hamiltoniano (4.156) son

$$\ddot{X}^I = -[[X^I, X^J], X^J]. \quad (4.185)$$

Si consideramos un conjunto de matrices diagonales en bloques

$$X^I = \begin{pmatrix} \hat{X}^I & 0 \\ 0 & \tilde{X}^I \end{pmatrix}. \quad (4.186)$$

con primeras derivadas temporales  $\dot{X}^I$ , las cuales son también diagonales en bloques, entonces las ecuaciones de movimiento clásicas para cada uno de los bloques es separable

$$\dot{X} = -[[\hat{X}^I, \hat{X}^J], \hat{X}^J], \quad (4.187)$$

$$\dot{\tilde{X}} = -[[\hat{X}^I, \tilde{X}^J], \tilde{X}^J]. \quad (4.188)$$

Si pensamos que cada uno de estos bloques describe un objeto en teoría de matrices con centro de masa

$$\hat{x}^I = \frac{1}{N} \text{Tr} \hat{X}^I, \quad (4.189)$$

$$\tilde{x}^I = \frac{1}{N} \text{Tr} \tilde{X}^I, \quad (4.190)$$

entonces tenemos dos objetos que obedecen clásicamente ecuaciones de movimiento independientes. Es directo generalizar esta construcción a una configuración de matrices diagonal en bloques que describa  $k$  objetos clásicamente independientes. Esto da una indicación de como la teoría de matrices puede contener, aún en matrices finitas de  $N \times N$ , una configuración de objetos múltiples, en este sentido es natural pensar en la teoría de matrices como una teoría en segunda cuantización desde el punto de vista del espacio-tiempo.

Dada la interpretación de que la teoría de matrices puede describir una teoría en segunda cuantización, el problema considerado anteriormente sobre el espectro continuo de la teoría es fácilmente resuelto. Sí hay un estado en la teoría de matrices que corresponde a un gravitón de la teoría  $M$  con  $H = 0$  el cual es aproximadamente un estado localizado, entonces por tomar dos de dichos estados con una separación grande y una velocidad relativa pequeña  $v$  es posible construir un estado de dos cuerpos con una energía total arbitrariamente pequeña. Dado que las D0-branas de la teoría IIA corresponden a gravitones en la teoría  $M$  con momento longitudinal, esperaríamos tener de manera natural un espectro continuo de energías aún en la teoría con  $N = 2$ . Esto resuelve el problema encontrado por de Wit, Lüscher y Nicolai de una manera aceptable, lo cual sugiere que la teoría de matrices es tal vez aún más poderosa que la teoría de cuerdas, la cual sólo es una teoría de primera cuantización en el espacio-tiempo.

La naturaleza de la segunda cuantización en la teoría de matrices puede ser vista de manera natural en la teoría de membranas continua. Recordemos que la inestabilidad de la teoría de membranas aparece en la teoría clásica de una membrana continua cuando consideramos la posibilidad de tener una espiga larga y delgada de energía despreciable. De manera similar, es posible para una membrana clásica de topología fija ser mapeada a una configuración en el espacio-tiempo que parezca como un sistema de múltiples distintas membranas macroscópicas conectadas por tubos infinitesimales de energía despreciable. En el límite donde los tubos llegan a ser muy pequeños, su efecto sobre la dinámica clásica de la configuración de múltiples membranas desaparece y se tiene efectivamente un sistema de múltiples membranas independientes moviéndose en el espacio-tiempo. A nivel clásico, la suma del género de las membranas en el espacio tiempo debe ser igual o más

pequeño que el orden del volumen de mundo de la membrana, pero cuando se incluyen los efectos cuánticos se pueden añadir o remover asas de la membrana. Estas consideraciones parecen indicar que cualquier teoría cuántica consistente, la cual contiene una membrana continua, debe contener en su teoría efectiva de bajas energías configuraciones de membrana con topología arbitraria y por tanto debe ser una teoría en segunda cuantización desde el punto de vista del espacio-tiempo.

## 4.9 Conclusiones

En este capítulo hemos discutido las propiedades de la supermembrana con invariancia de Weyl tanto en un espacio-tiempo curvo como en el espacio de Minkowski. La conclusión general de este análisis es que la supermembrana con simetría de Weyl tiene las mismas implicaciones físicas que la membrana sin invariancia de Weyl, es decir, en el caso curvo ambas imponen las ecuaciones de supergravedad en  $D = 11$  como restricciones al espacio-tiempo en el cual la supermembrana evoluciona y ambas se producen mediante el procedimiento de doble reducción dimensional, la teoría de supercuerda IIA. Más aún, en la norma del cono de luz ambas teorías son exactamente iguales.

Se desarrolló también el análisis canónico de la supermembrana con invariancia de Weyl. Generalizando la discusión realizada en el capítulo 2 para el caso de teoría de cuerdas, introducimos un proyector para separar covariantemente las constricciones fermiónicas de la supermembrana conforme en constricciones de primera y segunda clase. La contribución que hemos hecho a este análisis se puede resumir en los siguientes tres puntos. i) Determinamos las constricciones de primera clase de la teoría a través de la construcción del hamiltoniano de primera clase utilizando el método de Dirac, esto es, determinamos los multiplicadores de Lagrange de las constricciones de segunda clase, ii) introducimos un operador de proyección diferente al utilizado en [18]. Este operador de proyección es consistente con la eliminación de las constricciones de segunda clase mediante el paréntesis de Dirac [17] y iii) calculamos explícitamente el álgebra de Dirac de las constricciones y mostramos los términos extras que aparecen en el álgebra como consecuencia del operador de proyección que utilizamos. El análisis canónico de la supermembrana conforme considerando estas sutilezas en el cálculo, constituye la contribución principal de este capítulo al campo de los objetos extendidos. Finalmente, podemos decir que un intento de cuantización covariante de la acción tipo Green-Schwarz para la supermembrana debe partir de un análisis canónico similar al que presentamos en este capítulo.

# Referencias

- [1] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, *Properties of the eleven-dimensional supermembrane theory*, Ann. Phys. **185**, 330 (1988).
- [2] B. de Wit, *Supermembranes and super matrix theory*, hep-th/9802073.
- [3] H. Nicolai and R. Helling, *Supermembranes and M(atriz) theory*, hep-th/9809103.
- [4] B. de Wit, *Supermembranes and super matrix models*, hep-th/9902051.
- [5] W. Taylor IV, *The M(atriz) model of M-theory*, hep-th/0002016.
- [6] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, *Supermembrane and eleven-dimensional supergravity*, Phys. Lett. **B189**, 75 (1987).
- [7] M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami and K. S. Stelle, *Superstrings in  $D = 10$  from supermembranes in  $D = 11$* , Phys. Lett. **B191**, 70 (1987).
- [8] B. de Wit, M. Lüscher and H. Nicolai, Nucl. *The supermembrane is unstable*, Nucl. Phys. **B320**, 135 (1989).
- [9] B. de Wit, U. Marquard and H. Nicolai, *Area preserving diffeomorphisms and supermembrane Lorentz invariance*, Commun. Math. Phys. **129**, 39 (1990).
- [10] I. Bars, C. N. Pope and E. Sezgin, *Massless spectrum and critical dimensions of the supermembrane*, Phys. Lett. **B198**, 455 (1987).
- [11] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin and K. S. Stelle, *Semiclassical quantization of the supermembrane*, Nucl. Phys. **B297**, 515 (1988).
- [12] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *On the quantum mechanics of supermembranes*, Nucl. Phys. **B305**, 545 (1988).
- [13] E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tanii and P. K. Townsend, *Super  $p$ -branes as gauge theories of volume preserving diffeomorphisms*, Ann. Phys. **199**, 340 (1990).
- [14] T. Banks, W. Fisler, S. H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model: A conjecture*, Phys. Rev. **D55**, 5112 (1997).

- [15] A. Dasgupta, H. Nicolai and J. Plefka, *Vertex operators for the supermembrane*, hep-th/0003280.
- [16] J. A. Nieto and C. Nuñez, *String from Weyl-Invariant membranes*, II Nuovo Cimento **106B**, 1045 (1991).
- [17] A. Dresse, J. Fisch, M. Henneaux and C. Schomblond, *Consistent elimination of redundant second class constraints*, Phys.Lett. **B210**, 141 (1988).
- [18] E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tanii, *Canonical formulation of supermembrane*, Nucl. Phys. **B298**, 187 (1988).
- [19] E. Cremmer and S. Ferrara, *Formulation of eleven-dimensional supergravity in superspace*, Phys. Lett. **B91**, 61 (1980).
- [20] L. Brink and P. Howe, *Eleven dimensional supergravity on the maaa-shell in superspace*, Phys. Lett. **B91**, 384 (1980).
- [21] P. A. M. Dirac, *An extensible model of the electron*, Proc. Roy. Soc. **A268**, 57 (1962).
- [22] P. A. Collins and R. W. Tucker, *Classical and quantum mechanics of free relativistic membranes*, Nucl. Phys. **B112**, 150 (1976).
- [23] K. Kikkawa and M. Yamasaki, *Can the membrane be a unification model?* Prog. Theor. Phys. **76**, 379 (1988).
- [24] M. E. Laziev and G. K. Savvidy, Phys. Lett. **B198**, 451 (1988).
- [25] L. Mezincescu, R. I. Nepomechie and P. Van Nieuwenhuizen, *Do Supermembranes contain massless particles?* preprint UMTG-139, ITP-SB 87, 43 (1987).
- [26] J. Hoppe and H. Nicolai, *Relativistic minimal surfaces*, Phys. Lett. **B196**, 451 (1987).
- [27] J. Goldstone, unpublished; J. Hope, MIT Ph. D. thesis (1982); J. Hoppe, in proc. Int. Workshop on Constraint's Theory and Relativistic Dynamics; eds. G. Longhi and L. Lusanna (World Scientific, 1987).
- [28] M. Claudson and M. B. Halpern, *Supersymmetric ground state wave functions*, Nucl. Phys. **B250**, 689 (1985).
- [29] M. Baake, M. Reinicke and V. Rittenberg, *Fierz identities for real Clifford algebras and the number of supercharges*, J. Math. Phys. **26**, 1070 (1985).
- [30] R. Flume, *On quantum mechanics with extended supersymmetry and nonabelian gauge constraints*, Ann. Phys. **164**, 189 (1985).
- [31] D. Fairlie, P. Fletcher and C. N. Zachos, *Trigonometric structure constants for new infinite algebras*, Phys. Lett. **B218**, 203 (1989).



- [32] J. Hoppe, *Diff( $T^2$ ) and the curvature of some infinite dimensional manifolds*, Phys. Lett. **B215**, 706 (1988).
- [33] B. de Wit, U. Marquard and H. Nicolai, *Area preserving diffeomorphisms and supermembrane Lorentz invariance*, Commun. Math. Phys. **165**, 281 (1994).
- [34] M. Bordemann, E. Meinenken and M. Schlichenmaier, *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and  $gl(N)$ ,  $N \rightarrow \infty$  limits*, Commun. Math. Phys. **165**, 281 (1994).
- [35] K. Fujikawa and K. Okuyama, *On a Lorentz covariant matrix regularization of membrane theories*, hep-th/9706027,  *$SO(9,1)$  invariant matrix formulation of supermembrane*, hep-th/9709044.
- [36] K. Ezawa, Y. Matsuo and K. Murakami, *Lorentz symmetry of supermembrane in light cone gauge formulation*, Prog. Theor. Phys. **98**, 485 (1997).
- [37] P. Claus, *Super M-brane actions in  $AdS_4 \times S^7$  and  $AdS_7 \times S^4$* , hep-th/9809045.
- [38] P. van Nieuwenhuizen, in *supersymmetry and supergravity '84*, eds. B. de Wit, P. Fayet and P. van Nieuwenhuizen (World Scientific, 1984) 239, I. Castellani, R. D'Auria and P. Fré, *supergravity and superstrings theory: a geometric perspective* (World Scientific, 1990).
- [39] D. Lowe, *Eleven-dimensional Lorentz symmetry from susy quantum mechanics*, hep-th/9807229.
- [40] C. M. Hull and P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438**, 109 (1995).
- [41] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443**, 85 (1995).
- [42] M. J. Duff, J. T. Liu and R. Minasian, *Eleven dimensional origin of string duality: a one loop test*, Nucl. Phys. **B452**, 261 (1995).
- [43] J. H. Schwarz, *The power of M theory*, Phys. Lett. **B367**, 97 (1996).
- [44] P. Horava and E. Witten, *Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions*, Nucl. Phys. **B460**, 506 (1996).
- [45] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Supergravity theory in eleven dimensions*, Phys. Lett. **B76**, 409 (1978).
- [46] P. K. Townsend, *D-branes from M-branes*, Phys. Lett. **B373**, 68 (1996).
- [47] L. Susskind, *Another conjecture about M(atrrix) theory*, hep-th/9704080.
- [48] M. R. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot and S. Shenker, *D-branes and short distances in string theory*, Nucl. Phys. **B485**, 85 (1997).

## Apéndice A. Relaciones de conmutación

Comencemos por mostrar como se obtienen las relaciones de conmutación (1.46), las cuales son válidas cuando actúan sobre el espacio de Fock fermiónico. Haremos esta prueba para corrientes en el sector quirral positivo. El caso del sector quirral negativo es análogo. El conmutador entre las corrientes regularizadas es

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} \sum_p \left( \frac{1}{\lambda_{p+m,s} \lambda_{p+n,r}} - \frac{1}{\lambda_{p,s+r}} \right) a_{p+m}^\dagger a_{p+n}, \quad (4.191)$$

Actuando el conmutador sobre el vacío lleva a

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} \sum_{p=-\infty}^{N-1-n} \left( \frac{1}{\lambda_{p+m,s} \lambda_{p+n,r}} - \frac{1}{\lambda_{p,s+r}} \right) a_{p+m}^\dagger a_{p+n} \prod_{t=-\infty}^{N-1} a_t^\dagger |0\rangle \otimes \prod_{t=N}^{\infty} b_t^\dagger |0\rangle. \quad (4.192)$$

sin pérdida de generalidad, en lo siguiente tomaremos  $n$  como un entero positivo y separaremos el cálculo en tres partes:

(i)  $n = m$ : aquí obtenemos

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = \sum_{p=N-n}^{N-1} |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = n |\mathcal{E}_N, 2N\rangle. \quad (4.193)$$

(ii)  $n > m$ : dado que aquí  $p+m < p+n$  para todo  $p$ , tenemos que cada término en la suma (4.192) contendrá siempre un operador de creación fermiónico. Obtenemos entonces

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = 0. \quad (4.194)$$

(iii)  $n < m$ : aquí necesitamos ser más cuidadosos porque tenemos una suma finita que se anula después de tomar los límites correspondientes

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} \sum_{p=N-m}^{N-1-n} \left( \frac{1}{\lambda_{p+m,s} \lambda_{p+n,r}} - \frac{1}{\lambda_{p,s+r}} \right) \times a_{p+n}^\dagger a_{p+n} \prod_{t=-\infty}^{N-1} a_t^\dagger |0\rangle \otimes \prod_{t=N}^{\infty} b_t^\dagger |0\rangle = 0. \quad (4.195)$$

Sin embargo, este no es el fin de la historia porque queremos estar seguros de que las relaciones de conmutación (1.46) son válidas, no solo cuando se actúa sobre el vacío, sino en el espacio de Fock completo. En otras palabras, necesitamos mostrar que

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] \prod_{p=1}^k (j_+^{i_p})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = n \delta_{n,m} \prod_{p=1}^k (j_+^{i_p})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle, \quad (4.196)$$

para un número arbitrario  $k$  de corrientes actuando sobre el vacío. Esto puede hacerse por inducción. Para  $k = 1$  tenemos

$$[j_+^n, (j_+^m)^\dagger] \left( (j_+^{i_1})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle \right) = \left[ [j_+^n, (j_+^m)^\dagger], (j_+^{i_1})^\dagger \right] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle + n \delta_{n,m} \left( (j_+^{i_1})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle \right). \quad (4.197)$$

Ahora, es fácil mostrar que para los tres diferentes casos,  $n > p + m$ ,  $n < p + m$ ,  $n = p + m$ , el primer término en el lado derecho de la ecuación anterior es cero, probando así la afirmación (4.196) para  $k = 1$ . Después asumimos que (4.196) es válida para  $k$  corrientes y probaremos que esto es también cierto para  $k + 1$  de ellas. Para este fin, consideremos

$$\begin{aligned} & [j_+^n, (j_+^m)^\dagger] \prod_{p=1}^{k+1} (j_+^{i_p})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle \\ &= \left[ \dots \left[ [j_+^n, (j_+^m)^\dagger], (j_+^{i_1})^\dagger \right], (j_+^{i_2})^\dagger \right], \dots, (j_+^{i_{k+1}})^\dagger \right] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle \\ & \quad + n \delta_{n,m} \prod_{p=1}^{k+1} (j_+^{i_p})^\dagger |\mathcal{E}_N, 2N\rangle. \end{aligned} \quad (4.198)$$

el primer término en el lado derecho de la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} & \left[ \dots \left[ [j_+^n, (j_+^m)^\dagger], (j_+^{i_1})^\dagger \right], (j_+^{i_2})^\dagger \right], \dots, (j_+^{i_{k+1}})^\dagger \right] \\ &= \lim_{\substack{r,s \rightarrow 0 \\ i_1, \dots, i_k \rightarrow 0}} \sum_q C_k(q, n, m, i_1, \dots, i_k) a_{q+m+i_1+\dots+i_k}^\dagger a_{q+n}, \end{aligned} \quad (4.199)$$

donde las cantidades  $C_k(q, n, m, i_1, \dots, i_k)$  están definidas en términos de sus relaciones de recursión

$$\begin{aligned} C_k(q, n, m, i_1, \dots, i_k) &= C_{k-1}(q + i_k, n, m, i_1, \dots, i_{k-1}) \frac{1}{\lambda_{q+n, i_k}} \\ & \quad - C_{k-1}(q, n, m, i_1, \dots, i_{k-1}) \frac{1}{\lambda_{q+m+i_1+\dots+i_{k-1}, i_k}}, \\ C_0(q, n, m) &= \frac{1}{\lambda_{q+m, s} \lambda_{q+n, r}} - \frac{1}{\lambda_{q, s+r}}. \end{aligned} \quad (4.200)$$

De lo anterior, es posible mostrar que en los tres casos  $n(>, <, =)m + i_1 + \dots + i_k$ , tenemos

$$\left[ \dots \left[ [j_+^n, (j_+^m)^\dagger], (j_+^{i_1})^\dagger \right], (j_+^{i_2})^\dagger \right], \dots, (j_+^{i_{k+1}})^\dagger \right] |\mathcal{E}_N, 2N\rangle = 0, \quad (4.201)$$

Así la prueba queda completa.

Verifiquemos ahora que las corrientes regularizadas (1.45) satisfacen la propiedad de hermiticidad  $(j_\pm^n)^\dagger = j_\pm^{-n}$ . Concentremos en una corriente + y definamos el operador

$$D_+^n = (j_+^n)^\dagger - j_+^{-n} = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_{m-n, s}} - \frac{1}{\lambda_{m, s}} \right) a_m^\dagger a_{m-n}. \quad (4.202)$$

Apliquemos ahora el operador anterior a un vector arbitrario

$$| \{m_i\} \rangle = \prod_i a_{m_i}^\dagger |0\rangle \quad (4.203)$$

en el sub-espacio de fock fermiónico de quiralidad positiva. En general, el subíndice  $m_i$  tomará valores sobre un subconjunto infinito de números enteros.

Para  $n = 0$  el operador regularizado (4.202) es trivialmente cero, concentrémonos así en el caso  $n \neq 0$ . Aquí, únicamente los valores  $m \in \{m_i + n\}$  dan un resultado no nulo. La acción en cada término  $m$  de la suma (4.202) reemplaza el fermión  $m_i$  en el estado por un fermión  $m_i + n$ . de esta manera, los vectores resultantes son linealmente independientes y el límite  $s \rightarrow 0$  debe tomarse separadamente en cualquiera de estas contribuciones, llevando a cero en cada caso. En otras palabras, la única suma infinita que podría haber aparecido corresponde al caso  $n = 0$ . La prueba para el sector de quiralidad negativa se sigue bajo los mismos argumentos.

## Apéndice B. Variables ADM

Para construir la teoría hamiltoniana en la teoría de cuerdas y en la de  $p$ -branas es conveniente introducir nuevas variables, las cuales consisten en una reparametrización de las componentes de la métrica en términos del vector "shift"  $N^\alpha$  y la función "lapse"  $N^1$ . Por propósitos de simplicidad y claridad, haremos la discusión para el caso de cuerdas y mencionaremos su generalización para el caso de  $p$ -branas.

El primer paso es descomponer el vector  $\partial/\partial\tau$  el cual es tangente a las líneas de  $\sigma$  constante en el sistema coordenado  $(\mathbf{n}, \partial/\partial\sigma)$ . Aquí,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a las líneas de  $\tau$  constante.

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1, \quad (4.204)$$

mientras que  $\partial/\partial\sigma$  es el vector tangente a las líneas de  $\tau$  constante <sup>2</sup>.

Las funciones "lapse"  $N$  y "shift"  $N^1$  están definidas por

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = N\sqrt{\gamma}\mathbf{n} + N^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} \quad (4.205)$$

donde para la cuerda  $\gamma$  es el determinante de la métrica espacial  $\gamma_{11}$  (en una dimensión) inducida sobre las líneas  $\tau = \text{ctes}$ . De la expresión de  $g_{ij}$  en términos de los vectores base de la hoja de mundo  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$  se obtiene de manera directa el cambio de coordenadas entre las tres componentes de la métrica  $g_{ij}$  por un lado y  $(N, N^1, \gamma_{11})$  por el otro

$$g_{00} = -N^2\gamma + (N^1)^2\gamma_{11}, \quad g_{01} = N^1\gamma_{11}, \quad g_{11} = \gamma_{11}, \quad \sqrt{-g} = N\gamma. \quad (4.206)$$

mientras que para  $g^{ij}$

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2\gamma}, \quad g^{01} = \frac{N^1}{N^2\gamma}, \quad g^{11} = \gamma^{11} - \frac{(N^1)^2}{N^2\gamma}, \quad (4.207)$$

<sup>1</sup>Estas variables fueron introducidas originalmente en la gravedad de Einstein y se les conoce con el nombre de variables ADM (Arnowitt, Deser, Misner)

<sup>2</sup>Las componentes del vector  $\partial/\partial\sigma$  en el espacio tiempo de  $D$  dimensiones son  $\partial X^\mu/\partial\sigma$ , de manera similar, las componentes del vector  $\partial/\partial\tau$  son  $\partial X^\mu/\partial\tau$ , etc. Notece que el vector  $\mathbf{n}$  es desde luego tangente a la hoja de mundo.

en el sub-espacio de fock fermiónico de quiralidad positiva. En general, el subíndice  $m_i$  tomará valores sobre un subconjunto infinito de números enteros.

Para  $n = 0$  el operador regularizado (4.202) es trivialmente cero, concentrémosnos así en el caso  $n \neq 0$ . Aquí, únicamente los valores  $m \in \{m_i + n\}$  dan un resultado no nulo. La acción en cada término  $m$  de la suma (4.202) reemplaza el fermión  $m_i$  en el estado por un fermión  $m_i + n$ . de esta manera, los vectores resultantes son linealmente independientes y el límite  $s \rightarrow 0$  debe tomarse separadamente en cualquiera de estas contribuciones, llevando a cero en cada caso. En otras palabras, la única suma infinita que podría haber aparecido corresponde al caso  $n = 0$ . La prueba para el sector de quiralidad negativa se sigue bajo los mismos argumentos.

## Apéndice B. Variables ADM

Para construir la teoría hamiltoniana en la teoría de cuerdas y en la de  $p$ -branas es conveniente introducir nuevas variables, las cuales consisten en una reparametrización de las componentes de la métrica en términos del vector "shift"  $N^a$  y la función "lapse"  $N$ <sup>1</sup>. Por propósitos de simplicidad y claridad, haremos la discusión para el caso de cuerdas y mencionaremos su generalización para el caso de  $p$ -branas.

El primer paso es descomponer el vector  $\partial/\partial\tau$  el cual es tangente a las líneas de  $\sigma$  constante en el sistema coordenado  $(n, \partial/\partial\sigma)$ . Aquí,  $n$  es el vector normal a las líneas de  $\tau$  constante.

$$n \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma} = 0, \quad n \cdot n = -1, \quad (4.204)$$

mientras que  $\partial/\partial\sigma$  es el vector tangente a las líneas de  $\tau$  constante<sup>2</sup>.

Las funciones "lapse"  $N$  y "shift"  $N^1$  están definidas por

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = N\sqrt{\gamma}n + N^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} \quad (4.205)$$

donde para la cuerda  $\gamma$  es el determinante de la métrica espacial  $\gamma_{11}$  (en una dimensión) inducida sobre las líneas  $\tau = \text{ctes.}$  De la expresión de  $g_{ij}$  en términos de los vectores base de la hoja de mundo  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$  se obtiene de manera directa el cambio de coordenadas entre las tres componentes de la métrica  $g_{ij}$  por un lado y  $(N, N^1, \gamma_{11})$  por el otro

$$g_{00} = -N^2\gamma + (N^1)^2\gamma_{11}, \quad g_{01} = N^1\gamma_{11}, \quad g_{11} = \gamma_{11}, \quad \sqrt{-g} = N\gamma. \quad (4.206)$$

mientras que para  $g^{ij}$

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2\gamma}, \quad g^{01} = \frac{N^1}{N^2\gamma}, \quad g^{11} = \gamma^{11} - \frac{(N^1)^2}{N^2\gamma}, \quad (4.207)$$

<sup>1</sup>Estas variables fueron introducidas originalmente en la gravedad de Einstein y se les conoce con el nombre de variables ADM (Arnowitt, Deser, Misner)

<sup>2</sup>Las componentes del vector  $\partial/\partial\sigma$  en el espacio tiempo de  $D$  dimensiones son  $\partial X^\mu/\partial\sigma$ , de manera similar, las componentes del vector  $\partial/\partial\tau$  son  $\partial X^\mu/\partial\tau$ , etc. Notece que el vector  $n$  es desde luego tangente a la hoja de mundo.

donde  $\gamma^{11}$  es la inversa de  $\gamma_{11}$ . Para la transformación inversa se obtiene

$$N^1 = -\gamma^{11}\gamma_{01}, \quad N = -\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}\gamma}} \quad (4.208)$$

La generalización de este cambio de coordenadas para el caso de  $p$ -branas es directo, sólo que ahora en lugar de la función "shift  $N^1$ " tendremos un vector "shift"  $N^r$  de  $p$  componentes y el vector  $\mathbf{n}$  será también de  $p$  componentes. Si denotamos las componentes temporales del volumen de mundo con los índices  $r, s$ , etc. los cuales corren de  $1, \dots, p$  tendremos que la descomposición del vector  $\partial/\partial\tau$  en el sistema coordinado  $(\mathbf{n}, \partial/\partial\xi^i)$  está dada por

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = N\sqrt{\gamma}\mathbf{n} + N^r \frac{\partial}{\partial\xi^r}, \quad (4.209)$$

desde luego tenemos que

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial\xi^r} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1. \quad (4.210)$$

Aplicando el mismo procedimiento que para la cuerda se tiene que el cambio de coordenadas entre las  $(p+1)(p+2)/2$  componentes independientes de la métrica  $g_{ij}$  por un lado y las coordenadas  $(N, N^r, \gamma_{rs})$  por el otro están dadas por la relación

$$g_{00} = N^2\gamma + \gamma_{rs}N^rN^s, \quad g_{0r} = \gamma_{rs}N^s, \quad g_{rs} = \gamma_{rs}, \quad (4.211)$$

mientras que para  $g^{ij}$

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2\gamma}, \quad g^{0r} = \frac{N^r}{N^2\gamma}, \quad g^{rs} = \gamma^{rs} - \frac{N^rN^s}{N^2\gamma}. \quad (4.212)$$

La transformación inversa es

$$N^r = -\frac{g^{0r}}{g^{00}}, \quad N = -\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}\gamma}}. \quad (4.213)$$

las ecuaciones (4.213) muestran que el cambio de variables es invertible, de tal manera que es permisible adoptar el segundo conjunto de variables como un nuevo conjunto de variables independientes.

## Apéndice C. Notación y convenciones

En este apéndice se presenta la notación y las convenciones utilizadas a lo largo de la tesis. También se presentan algunas relaciones útiles que satisfacen las matrices gamma y los espinores.

### Convenciones generales

Se utilizan las letras intermedias del abecedario como índices en la hoja de mundo  $i, j, k, \dots$

donde  $\gamma^{11}$  es la inversa de  $\gamma_{11}$ . Para la transformación inversa se obtiene

$$N^1 = -\gamma^{11}\gamma_{01}, \quad N = -\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}\gamma}} \quad (4.208)$$

La generalización de este cambio de coordenadas para el caso de  $p$ -branas es directo, sólo que ahora en lugar de la función "shift  $N^1$ " tendremos un vector "shift"  $N^r$  de  $p$  componentes y el vector  $\mathbf{n}$  será también de  $p$  componentes. Si denotamos las componentes temporales del volumen de mundo con los índices  $r, s$ , etc. los cuales corren de  $1, \dots, p$  tendremos que la descomposición del vector  $\partial/\partial\tau$  en el sistema coordinado  $(\mathbf{n}, \partial/\partial\xi^i)$  está dada por

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = N\sqrt{\gamma}\mathbf{n} + N^r \frac{\partial}{\partial\xi^r}, \quad (4.209)$$

desde luego tenemos que

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial\xi^r} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1. \quad (4.210)$$

Aplicando el mismo procedimiento que para la cuerda se tiene que el cambio de coordenadas entre las  $(p+1)(p+2)/2$  componentes independientes de la métrica  $g_{ij}$  por un lado y las coordenadas  $(N, N^r, \gamma_{rs})$  por el otro están dadas por la relación

$$g_{00} = -N^2\gamma + \gamma_{rs}N^rN^s, \quad g_{0r} = \gamma_{rs}N^s, \quad g_{rs} = \gamma_{rs}, \quad (4.211)$$

mientras que para  $g^{ij}$

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2\gamma}, \quad g^{0r} = \frac{N^r}{N^2\gamma}, \quad g^{rs} = \gamma^{rs} - \frac{N^rN^s}{N^2\gamma}. \quad (4.212)$$

La transformación inversa es

$$N^r = -\frac{g^{0r}}{g^{00}}, \quad N = -\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}\gamma}}. \quad (4.213)$$

las ecuaciones (4.213) muestran que el cambio de variables es invertible, de tal manera que es permisible adoptar el segundo conjunto de variables como un nuevo conjunto de variables independientes.

## Apéndice C. Notación y convenciones

En este apéndice se presenta la notación y las convenciones utilizadas a los largo de la tesis. También se presentan algunas relaciones útiles que satisfacen las matrices gamma y los espinores.

### Convenciones generales

Se utilizan las letras intermedias del abecedario como índices en la hoja de mundo  $i, j, k, \dots$

Otras matrices que necesitamos introducir son los productos antisimetrizados (en los índices de espacio-tiempo) de las matrices gamma

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_n]} \quad (4.218)$$

En muchos casos es necesario restringir al espinor  $\chi$  para que este sea Majorana y/o Weyl. Un espinor de Majorana se define como aquel que satisface

$$\bar{\chi} = \chi^T C, \quad (4.219)$$

donde la matriz de conjugación de carga  $C$  es unitaria, y puede ser elegida de tal manera que sea real ( en dicho caso  $\theta$  será real o puramente imaginaria). Dependiendo de la dimensión  $d$  del espacio-tiempo, esta matriz  $C$  es simétrica ó antisimétrica

$$C^T = -\varepsilon C \quad (4.220)$$

donde  $\varepsilon = \pm 1$ . Adicionalmente se tiene que bajo una transformación de similaridad inducida por  $C$ , las matrices gamma son transformadas en su transpuesta hasta un signo

$$\Gamma_\mu^T = -\eta C \Gamma_\mu C^{-1} \quad (4.221)$$

con  $\eta = \pm 1$ . Usualmente uno está interesado en las propiedades de simetría de las matrices gamma y de sus productos antisimetrizados, pero tal y como están definidas estas matrices no pueden ser utilizadas ya que no es posible intercambiar índices superiores e inferiores. Para tal propósito se introducen las matrices  $C^{\alpha\beta}$  y  $C_{\alpha\beta}$  las cuales están relacionadas con la matriz de conjugación de carga  $C$  y las cuales se pueden ver como una "métrica" para subir y bajar índices espinoriales. La convención que aquí adoptamos es

$$\chi^\alpha = C^{\alpha\beta} \chi_\beta, \quad \chi_\alpha = \chi^\beta C_{\beta\alpha}, \quad C^{\alpha\beta} C_{\gamma\beta} = \delta_\gamma^\alpha, \quad C_{\beta\alpha} C^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (4.222)$$

Comparando (4.219) y (4.222) concluimos que  $C_{\alpha\beta}$  es  $C^T$  y  $C^{\alpha\beta}$  es  $C^{-1}$ . De (4.220) y (4.221) se tiene que las matrices  $C \Gamma_\mu$  y  $\Gamma_\mu C^{-1}$  son simétricas o antisimétricas

$$(C \Gamma_\mu)^T = \varepsilon \eta (C \Gamma_\mu), \quad (\Gamma_\mu C^{-1})^T = \varepsilon \eta (\Gamma_\mu C^{-1}). \quad (4.223)$$

Con las convenciones (4.222) se tiene que los índices de estas son <sup>3</sup>

$$(C \Gamma_\mu)_{\alpha\beta}, \quad (\Gamma_\mu C^{-1})^{\alpha\beta} \quad (4.224)$$

En la literatura es común escribir estas matrices sin poner explícitamente la matriz  $C$ ,  $(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}$ ,  $(\Gamma_\mu)^{\alpha\beta}$ . Así por ejemplo tendremos

$$\bar{\chi} \lambda = \chi_\alpha \lambda^\alpha = -\varepsilon \chi^\alpha \lambda_\alpha, \quad (\bar{\chi} \Gamma)_\beta = \chi_\alpha (\Gamma^\mu)^\alpha_\beta = -\varepsilon \chi^\alpha (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} = -\varepsilon (\Gamma^\mu \chi)_\beta \quad (4.225)$$

<sup>3</sup>si en vez de las convenciones utilizadas aquí se utiliza  $\chi \rightarrow \chi_\alpha$ ,  $\bar{\chi} \rightarrow \chi^\alpha$  y  $(\Gamma_\mu)_\alpha^\beta$  entonces  $C_{\alpha\beta}$  es  $C^{-1}$ ,  $C^{\alpha\beta}$  es  $C^T$  y  $(C \Gamma_\mu)^{\alpha\beta}$ ,  $(\Gamma_\mu C^{-1})_{\alpha\beta}$



Se utilizan las letras finales del abecedario como índices de las superficies tipo espacio en la hoja de mundo  $p, q, r, \dots$

Se utilizan las letras intermedias del abecedario griego como índices de espacio-tiempo  $\mu, \nu, \rho, \dots$

Se utilizan las letras iniciales del abecedario como índices en el espacio tangente al espacio tiempo  $a, b, c, \dots$

Se utilizan las letras iniciales del abecedario griego como índices espinoriales  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$$\text{Signatura de } g^{ij} = (-, +, \dots, +), \quad g = \det g_{ij}.$$

$$\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} = -g g_{ij} \delta g^{ij}$$

$$\text{Signatura de } \eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +),$$

En el caso en que  $p = 2$  y  $d = 11$  tenemos

$$\varepsilon_{012} = -\varepsilon^{012} = 1;$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} = -(\sqrt{-g})^2 (g^{il} (g^{jm} g^{kn} - g^{jn} g^{km}) - g^{im} (g^{jl} g^{kn} - g^{jn} g^{kl}) + g^{in} (g^{jl} g^{km} - g^{jm} g^{kl}))$$

$$\frac{1}{(\sqrt{-g})^2} \varepsilon^{0pq} \varepsilon^{0rs} = \frac{1}{N^2 \gamma} (\gamma^{pr} \gamma^{qs} - \gamma^{ps} \gamma^{rq}), \quad \varepsilon^{0pq} \equiv \varepsilon^{pq}.$$

Las matrices Gamma satisfacen un álgebra de Clifford

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$$

## Índices espinoriales

Es común que las expresiones que involucran espinores se escriban omitiendo los índices espinoriales. Daremos aquí la forma en la cual se pueden incluir estos índices en las diferentes expresiones espinoriales utilizadas en la tesis.

La definición del espinor adjunto  $\bar{\chi}$  es

$$\bar{\chi} = \chi^\dagger \Gamma_0, \quad (4.214)$$

consideraremos que los espinores tienen un índice superior y que sus adjuntos tienen un índice inferior

$$\chi \rightarrow \chi^\alpha, \quad \bar{\chi} \rightarrow \chi_\alpha. \quad (4.215)$$

Los índices espinoriales de las matrices gamma serán considerados como sigue

$$(\Gamma_\mu)^\alpha_\beta \quad (4.216)$$

de tal modo que cuando los índices no aparezcan explícitamente entenderemos lo siguiente

$$\lambda = \chi_\alpha \lambda^\alpha, \quad \bar{\chi} \Gamma_\mu \lambda = \chi_\alpha (\Gamma_\mu)^\alpha_\beta \lambda^\beta, \quad \text{etc.} \quad (4.217)$$

Propiedades adicionales de  $C$  y la posibilidad de tener la condición de Majorana depende de la dimensión  $d$ . Para  $p \geq 2$  hay un total de ocho valores de  $d$  que pueden ser considerados,  $d = 4, \dots, 11$ . A continuación especificaremos las convenciones para cada uno de estos casos. con la idea de incluir también el caso de la cuerda ( $p = 1$ ) necesitaremos también especificar las convenciones para  $d = 3$ . Para  $d = 3, 4, 10$  y  $11$  tenemos espinores de Majorana con

$$C^T = -C, \quad (C\Gamma_\mu)^T = (C\Gamma_\mu)$$

para  $d = 10$  tenemos la restricción quiral adicional

$$\Gamma_{11}\theta = \pm\theta, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_0\Gamma_1 \cdots \Gamma_9.$$

Debido a la propiedad de simetría de la matriz de conjugación de carga tenemos que

$$\chi_\alpha\lambda^\alpha = -\chi^\alpha\lambda_\alpha, \quad \chi_\alpha(\Gamma^\mu)^\alpha_\beta\lambda^\beta = -\chi^\alpha(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}\lambda^\beta.$$

Las propiedades de simetría de las matrices Gamma () respecto a sus índices espinoriales son  $(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}$  y  $(\Gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$  son simétricas mientras que  $(\Gamma_{\mu\nu\rho})_{\alpha\beta}$  es antisimétrica.

Resumiendo tenemos la siguiente tabla

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	M	MW	M	M <sup>+</sup>		SMW		M <sup>-</sup>	M	MW	M

Las siguientes idéntidades entre las matrices gamma son

$$\Gamma_\mu\Gamma_{\nu_1\dots\nu_n} = \Gamma_{\mu\nu_1\dots\nu_n} + \frac{1}{(n-1)!}\eta_{\mu[\nu_1}\Gamma_{\nu_2\dots\nu_n]} \quad (4.226)$$

$$\Gamma_{\nu_1\dots\nu_n}\Gamma_\mu = \Gamma_{\nu_1\dots\nu_n\mu} + \frac{1}{(n-1)!}\eta_{\mu[\nu_n}\Gamma_{\nu_1\dots\nu_{n-1}]} \quad (4.227)$$

Los diferentes espinores que hemos mencionado anteriormente satisfacen además algunas idéntidades que son:

en  $d = 3, 4, 6$  y  $10$

$$\Gamma_\mu\theta_{[1}\bar{\theta}_2\Gamma^\mu\theta_3] = 0 \quad (4.228)$$

mientras que en  $d = 4, 5, 7$  y  $11$  se satisface

$$\bar{\theta}_{[1}\Gamma_{\mu\nu}\theta_2\bar{\theta}_3\Gamma^\mu\theta_4] = 0 \quad (4.229)$$

en  $d = 6$  y  $8$

en  $d = 9$  y en  $d = 10$

(ii) Convenciones para el superespacio

Las coordenadas en el superespacio son  $Z^M = (X^\mu, \theta^{\dot{\alpha}})$ , el supervielbein es  $E_M^A(A = \alpha, \dot{\alpha})$ .

$$E^A = dZ^M E_M^A (E^a E^b = -E^b E^a) \quad \text{pero} \quad (E^\alpha E^\beta = -E^\beta E^\alpha)$$

$$F = \frac{1}{p!} E^{A_1} \dots E^{A_p} F_{A_p \dots A_1}$$

$$dF = \frac{1}{p!} dZ^{M_1} \dots dZ^{M_p} dZ^N \frac{\partial}{\partial Z^N} F_{M_p \dots M_1}$$

$$d(FG) = FdG + (-1)^q dFG \quad \text{para una } p \text{ forma } F \text{ y una } q \text{ forma } G.$$

$$H = dB; H_{MNPQ} = \partial_M B_{NPQ} + \dots$$

para una  $p$  forma  $F$  y una  $q$  forma  $G$ .

$$H = dB; H_{MNPQ} = \partial_M B_{NPQ} + \dots$$