00365

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

# ESPACIOS COCIENTE DE G-ESPACIOS



## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**

P R E S E N T A :

**L.M.A. ANGELINA ALVARADO MONROY**

DIRECTOR(A) DE TESIS. DRA. SYLVIA DE NEYMET URBINA



MEXICO, D.F. 2001

## *AGRADECIMIENTOS*

*A la Dra. Sylvia de Neymet Urbina, por su dirección, apoyo y confianza, elementos sin los cuales este trabajo no hubiera podido ser. Es enorme mi admiración por su gran compromiso con la investigación y la docencia además de su gran calidad humana.*

*Al Dr Sergey Antonyan, por su presencia en mi formación, celebro haberlo conocido, ser su alumna ha sido un privilegio.*

*A mi familia por su cariño, por esa respuesta siempre inmediata y por supuesto por su apoyo incondicional; asimismo a la familia de mi esposo, por dejarme entrar en su corazón y hacerme sentir como en mi casa.*

*A todos mis amigos, que de una ú otra forma han contribuido para que este trabajo se realize.*

*A Armando por coincidir conmigo, por su gran amor y por decidirse a ser mi compañero en esta vida. A Oscar por que con su sonrisa hace que todo sea maravilloso. A Nohemí por enseñarme el juego de la maternidad A los tres por ser, por todo lo que hay detrás de este trabajo y por darme más de lo que merezco les dedico esta tesis*

*A mis sinodales Dra. Sylvia de Neymet, Dr. Sergey Antonyan, Dr. Rolando Jiménez Dr. Adalberto García-Maynez, Dr Carlos Prieto, Dr. Angel Tamariz y Dra. Isabel Puga por la revisión preliminar del trabajo y porque con sus acertadas y bien recibidas críticas se logró mejorarlo.*

# Contenido

# Introducción

El estudio de las simetrías de estructuras matemáticas tales como conjuntos, anillos, campos, espacios topológicos y variedades diferenciables, constituye la teoría de grupos de transformaciones, la cual aporta una amplia gama de aplicaciones en diversas ramas de la matemática.

A una función de un conjunto en sí mismo se le conoce como *transformación*. Cuando un conjunto de transformaciones forma un grupo, donde la multiplicación esta definida por la composición de transformaciones, se le llama *grupo de transformaciones*.

La importancia de reconocer a un conjunto de transformaciones como un grupo se originó en la Teoría de Galois.

En nuestro caso, los objetos de estudio son los espacios topológicos y cada transformación es un homeomorfismo.

Un *grupo topológico* $G$ es un grupo y además un espacio de Hausdorff provisto de una topología tal que las operaciones multiplicación e inversión son funciones continuas

Un *grupo topológico de transformaciones* $(G, X, \theta)$ consiste de un grupo topológico $G$, un espacio topológico $X$ y una acción continua $\theta : G \times X \to X$ En este caso la función inducida $\theta_g : X \to X$ definida por $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ es un homeomorfismo. Brevemente diremos que $X$ es un $G$-espacio.

Así, esta tesis se enmarca en la categoría $G$-TOP donde los objetos son los $G$-espacios y los morfismos son las funciones equivariantes es decir, aquéllas que son continuas y que conmutan con la acción

Aquí estudiamos algunos espacios cociente de $G$-espacios, en especial el espacio de adjunción, el cilindro de una transformación y el cono De hecho el cono y el cilindro de una transformación son un caso especial de espacios de adjunción. Mostramos que cuando el grupo que actúa en los espacios base es localmente compacto, a los espacios cociente mencionados se les puede dotar de una acción continua y considerarlos como $G$-espacios.

Este trabajo se relaciona también con las acciones propias en el sentido de R. Palais. En [Pa2] se define, para un grupo $G$ localmente compacto, a un $G$-espacio $X$ de Tychonoff como *propio* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $U_x$ tal que para todo punto $y \in X$ existe una vecindad $U_y$ con la propiedad de que el conjunto$< U_x, U_y >= \{g \in G : gU_x \bigcap U_y \neq \emptyset\}$ tenga cerradura compacta en $G$. En tal caso se dice que $U_x$ y $U_y$ están $t$-relacionadas.

Como antes mencionamos una construcción clave a lo largo de este trabajo, es el espacio de adjunción para el cual se presentan varios resultados, mismos que en algunos casos se aplican al cono y/o al cilindro de la transformación de $f$. A este respecto uno de los problemas sugeridos es: bajo qué condiciones el espacio de adjunción de $G$-espacios propios resulta ser un $G$-espacio propio. Respuestas a esto las podemos encontrar en el capítulo III.

La estructura del trabajo consta de cuatro capítulos.

El capítulo I se ocupa de dar definiciones y resultados sobre identificaciones, grupos topológicos y de Lie, $G$-espacios y cuestiones básicas que nos servirán de soporte para los capítulos posteriores. Para consulta sobre estos temas podemos ver [Du], [En], [GM-T], [Hu] y [dN].

En el capítulo II se abordan las acciones de grupos compactos y las acciones propias y de Cartan definidas por R. Palais [Pa2] para un grupo $G$ localmente compacto y $X$ un $G$-espacio de Tychonoff. Ambas acciones poseen propiedades muy especiales y de hecho las acciones de grupos compactos en un espacio de Tychonoff resultan propias y las acciones propias son siempre de Cartan.

De gran importancia en esta tesis es el desarrollo del capítulo III en el cual se tratan las identificaciones equivariantes, se estudia y demuestra el teorema III.4.5 de Erick Elfving [Elf] que se enuncia como sigue: El espacio de adjunción de dos $G$-espacios propios paracompactos con espacio de órbitas paracompacto, es un $G$ espacio con esta misma propiedad. Su demostración se basa en una técnica de tubos y rebanadas en el sentido de [Pa2], donde para garantizar su existencia usa la condición de que el grupo $G$ sea un grupo de Lie. También utiliza resultados previos que se demuestran sosteniéndose en la hipótesis de paracompacidad.

En este capítulo se establecen y muestran dos resultados nuevos como alternativa al resultado de [Elf]. El primer resultado se enuncia de la siguiente manera:

*Sean $X$ e $Y$ $G$-espacios propios, $A$ un cerrado invariante de $X$, $f : A \to Y$ una función equivariante y $X \bigcup_f Y$ un espacio de Tychonoff. Si se cumplen:*

*i) para todo $x$ en $X - A$ existen vecindades $U_x$ de $x$ y $M_x$ de $A$, $t$ -relacionadas,*

*ii) existen una vecindad abierta invariante $M$ de $A$ y $f' : M \to Y$ una extensión equivariante de $f$.*

*Entonces $X \bigcup_f Y$ es un $G$-espacio propio.*

Para el segundo resultado se quita la propiedad del espacio de adjunción de ser de Tychonoff pero se pide que $X$ sea normal además de cambiar las hipótesis i) y ii) por las siguientes:

*i') para todo $x$ en $X - A$ existe vecindad invariante $M_x$ de $A$ tal que $x$ no pertenece a la cerradura de $M_x$.*

*ii') existe vecindad invariante $M$ de $A$ tal que $A$ es retracto equivariante de $M$.*

Por último el capítulo IV está destinado a las homotopías y cofibraciones equivariantes. Aquí introducimos los conceptos análogos de retracto absoluto de vecindades, extensor absoluto de vecindades, propiedad de extensión de homotopía, cofibraciones y cuadrado cocartesiano, todos ellos en la versión equivariante.

Se obtienen también aquí resultados en versión equivariante enfocados al espacio de adjunción, así como al cilindro de una transformación. Un estudio más detallado de la teoría de homotopía equivariante puede verse en [tD]. Para consultar más ampliamente sobre la teoría equivariante de retractos se puede consultar [An].

En cuanto al formato de este trabajo cuando se define un término éste aparecerá en negritas. Los resultados que son complejos y ya están probados en otro texto o artículo no se demuestran haciendo sólo referencia a ellos en el momento en que se utilizan. Para los resultados de topología general muy conocidos se hace exactamente lo mismo. Respecto a definiciones, teoremas, lemas y proposicion es se enumeran antecediendo el número de capítulo y de sección, y se presentan en negritas. Cuando tienen un nombre en especial, éste se escribe con letra itálica y entre paréntesis. Para hacer referencias a un texto o artículo se escribe entre paréntesis cuadrados la primera sílaba del apellido y en caso de que el autor citado tenga más de un artículo se agrega un número respetando la cronología, si una obra tiene más de un autor se escribe la inicial del apellido de los autores en orden alfabético.

# Capítulo 1

# Preliminares

En la parte I.1 de este capítulo se abordará el concepto de identificación, se considerarán construcciones de espacios mediante identificaciones como el espacio de adjunción, el cono y el cilindro de una transformación y se darán resultados importantes de la teoría de identificaciones, así como algunas cuestiones básicas de topología general útiles para el desarrollo de capítulos posteriores.

En el apartado I.2 se establecerán conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos y de Lie.

Por último en I.3 se definen los $G$-espacios, el concepto de función equivariante y resultados referentes a ellos.

## I.1 IDENTIFICACIONES.

**Definición I.1.1** Sean $Y$ un conjunto arbitrario, $X$ un espacio topológico y $p : X \to Y$ una función sobreyectiva. La **topología identificación** en $Y$ determinada por $p$ está definida como sigue: $U$ es abierto en $Y$ si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $X$.

Un **conjunto saturado** respecto a $p$ es un conjunto $A \subset X$ tal que $p^{-1}p(A) = A$. Por tanto, si $A$ es un conjunto saturado abierto en $X$ entonces $p(A)$ es abierto en $Y$.

También es cierto, tomando complementos, que $C$ es cerrado en $Y$ si y sólo si $p^{-1}(C)$ es cerrado en $X$ y si $A$ es un conjunto saturado cerrado en $X$ entonces $p(A)$ es cerrado en $Y$.

**Definición I.1.2** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos. Una función continua y sobreyectiva $p : X \to Y$ es llamada una **identificación** cuando la topología en $Y$ es la topología identificación. A continuación daremos algunos resultados sobre identificaciones, sus demostraciones pueden verse en [Du] .

**Teorema I.1.3** Si $p : X \to Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta o cerrada entonces $p$ es una identificación.

**Proposición I.1.4** Si $p : X \to Y$ es una identificación cerrada y $X$ es un espacio $T_1$, normal, $T_4$, compacto o conexo entonces también lo es $Y$ respectivamente.

**Demostración.** Sea $X$ un espacio $T_1$. Como $p$ es sobreyectiva entonces para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Luego $\{x\}$ es cerrado en $X$ y por ser $p$ cerrada, $\{y\}$ es cerrado en $Y$. Así $Y$ es $T_1$.

Si $X$ es normal y $C_1$, $C_2$ son cerrados ajenos en $Y$ entonces $p^{-1}(C_1)$ y $p^{-1}(C_2)$ son cerrados ajenos de $X$. Como $X$ es normal, existe $U$ abierto de $X$ tal que $p^{-1}(C_1) \subset U$ y $\overline{U} \bigcap p^{-1}(C_2) = \emptyset$. Por lo tanto $Y - p(X - U)$ es un abierto de $Y$ que contiene a $p\left(p^{-1}(C_1)\right) = C_1$ y $\overline{Y - p(X - U)} \bigcap C_2 = \emptyset$. Es decir, $Y$ es normal.

Si $X$ es compacto (conexo), dado que la imagen continua de un compacto (conexo) es compacta (conexa) y $p$ es sobreyectiva se sigue que $Y$ es compacto (conexo). □

**Teorema I.1.5** (*Propiedad Universal del Cociente*) : Sea $p : X \to Y$ una función continua sobreyectiva. Entonces $p$ es una identificación si y sólo si para cada espacio $Z$ y cada función $g : Y \to Z$ la continuidad de $gp$ implica la de $g$.

**Teorema I.1.6** *(Transgresión).* Sean $p : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ una función continua. Supongamos que $hp^{-1}$ es univaluada (esto es, $h$ es constante sobre cada fibra $p^{-1}(y)$). Entonces $hp^{-1} : Y \to Z$ es continua.

La composición de identificaciones es una identificación. Ahora bien, la función producto de dos identificaciones abiertas es sobreyectiva, continua y abierta y, por tanto, es una identificación. Pero en general el producto de identificaciones no siempre lo es. A este respecto tenemos el siguiente resultado .

**Teorema I.1.7** La función producto $h = f \times g$ de dos identificaciones $f : X \to P$ y $g : Y \to Q$ es una identificación si para cada abierto $W$ en $Q$ y cada $y \in g^{-1}(W)$ existe un abierto $V$ en $Q$ tal que $y \in g^{-1}(V)$ y $\overline{g^{-1}(V)}$ es un compacto contenido en $g^{-1}(W)$.

**Demostración.** Sea $M$ un conjunto en $P \times Q$ tal que $h^{-1}(M)$ es abierto en $X \times Y$. Es suficiente probar que $M$ es abierto en $P \times Q$ porque $h$ es continua y sobreyectiva.

Para ello, sea $(p_0, q_0)$ un punto arbitrario en $M$. Elegimos $x_0 \in f^{-1}(p_0)$ y $y_0 \in g^{-1}(q_0)$. Dado que $h^{-1}(M)$ es abierto en $X \times Y$, existe un abierto $G$ en $Y$ tal que $x_0 \times G = (x_0 \times Y) \bigcap h^{-1}(M)$. Mostraremos que $G$ es un conjunto saturado respecto a $g$

Sean $W = g(G)$ y $y_1 \in g^{-1}(W)$. Entonces existe $y_2 \in G$ tal que $g(y_1) = g(y_2)$ Así, tenemos que $h(x_0, y_1) = (f(x_0), g(y_1)) = (f(x_0), g(y_2)) = h(x_0, y_2) \in M$

Esto implica que $G = g^{-1}(W)$, por lo tanto $W$ es abierto de $Q$.

Por nuestras aseveraciones acerca de $g$, existe un abierto $V$ en $Q$ tal que $y_0 \in g^{-1}(V)$ y el conjunto $C = \overline{g^{-1}(V)}$ es un compacto contenido en $G$. Sea $F$ el conjunto en $X$ que consta de todos los puntos $x \in X$ tales que $x \times C$ está contenido en $h^{-1}(M)$. Claramente tenemos que $x_0 \in F$ y $F \times C \subset h^{-1}(M)$.

Para probar que $F$ es abierto en $X$, tomamos $x \in F$. Entonces $x \times C \subset h^{-1}(M)$, como $C$ es compacto y $h^{-1}(M)$ es abierto, existe una vecindad abierta $H$ de $x$ en $X$ con $H \times C \subset h^{-1}(M)$, de ahí $H \subset F$ Esto prueba que $F$ es abierto Ahora sea $U = f(F)$ Si $x_1 \in f^{-1}(U)$, existe entonces $x_2 \in F$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ Para cada $y \in C$, tenemos que $h(x_1, y) = (f(x_1), g(y)) = (f(x_2), g(y)) = h(x_2, y) \in M$. Esto implica que $x_1 \in F$, por lo que $f^{-1}(U) = F$. Dado que $f$ es identificación y $F$ es abierto saturado en $X$ respecto a $f$, se sigue que $U$ es abierto en $P$.

Entonces $(p_0, q_0) = (f(x_0), g(x_0))$ pertenece al abierto $U \times V$ de $P \times Q$ contenido en $M$ porque $U \times V \subset f(F) \times g(C) = h(F \times C) \subset M$. Esto prueba que $M$ es un abierto del producto topológico $P \times Q$. □

**Corolario I.1.8** Sea $p : X \to Y$ una identificación y sea $Z$ localmente compacto. Entonces la función $p \times id : X \times Z \to Y \times Z$ es una identificación.

Como ilustración, veremos en el siguiente ejemplo tomado de [ADQ] en el cual $Z = \mathbb{Q}$ no es localmente compacto, que el producto de una identificación por la identidad no es siempre una identificación.

**Ejemplo.** Consideremos el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la topología euclideana y el cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ obtenido al identificar el conjunto $\mathbb{Z}$ a un sólo punto. Sea $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la proyección canónica. A continuación probaremos que

$$h = p \times id : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$$

no es identificación. Para ello encontraremos un cerrado en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, saturado por $h$, cuya imagen no será un cerrado de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el número irracional $r_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$. Sea $U_n$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ contenido en $[n, n+1] \times [r_{n+1}, r_n]$, de modo que

$$\overline{U_n} \bigcap (\{n, n+1\} \times \mathbb{R}) = \{(n, r_n), (n+1, r_{n+1})\}.$$

Observemos que la familia $\{\overline{U_n}\}$ es localmente finita. Por lo tanto, $C = \bigcup \overline{U_n}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ y, en consecuencia, $A = C \bigcap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ es un cerrado de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Puesto que los puntos $r_n$ son irracionales, $A \bigcap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}) = \emptyset$. Luego, $A$ es un conjunto saturado por $h$. Como $([0], 0) \notin h(A)$, para probar que $h(A)$ no es cerrado, basta demostrar que $([0], 0)$

pertenece a $\overline{h(A)}$. Sean, entonces, dos abiertos $U$ y $V$ tales que $([0], 0) \in U \times V$. De $[0] \in U$ se deduce que $p^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{Q}$ tal que $\mathbb{Z} \subseteq p^{-1}(U)$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo $(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$ de modo que

$$U' = \bigcup \{(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \bigcap \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq p^{-1}(U),$$

luego $U' \times V \subseteq p^{-1}(U) \times V = h^{-1}(U \times V)$. Pero es fácil observar que $(U' \times V) \bigcap A \neq \emptyset$, por lo que $h(U' \times V) \bigcap h(A) \neq \emptyset$. En particular, $(U \times V) \bigcap h(A) \neq \emptyset$. Como los abiertos $U \times V$, tal como han sido escogidos, forman una base de vecindades de $([0], 0)$, queda probado lo que nos proponíamos. $\square$

**Definición I.1.9** Sean $X$ un espacio, $\sim$ una relación de equivalencia en $X$, $X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia y $p : X \to X/\sim$ la proyección natural que asigna a $x$ su clase de equivalencia $[x]$. Al espacio $X/\sim$ con la topología identificación se le llama **espacio cociente** de $X$ y a $p$ **función cociente**.

**Observación**: Toda identificación $q : X \to Y$ es una función cociente ya que $Y = X/\sim$ donde $x_1 \sim x_2$ si $q(x_1) = q(x_2)$ Incluso cualquier descomposición de $X$ induce también una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son los elementos de la descomposición, la cual determina un espacio cociente.

**Ejemplos**:

**a) Colapsando A a un punto: X/A**

Sea $X$ un espacio y $A$ un conjunto no vacío de $X$ El espacio cociente inducido por la descomposición $\{A\} \bigcup \{\{x\} \mid x \in X - A\}\}$ de $X$ es llamado el espacio obtenido de $X$ colapsando $A$ a un punto. Si $A$ es un cerrado de $X$ entonces la función cociente $p : X \to X/A$ es cerrada porque dado un cerrado $C$ de $X$, $p^{-1}p(C) = C$ si $C \bigcap A = \emptyset$ o $p^{-1}p(C) = C \bigcup A$ si $C \bigcap A \neq \emptyset$ en ambos casos $p^{-1}p(C)$ es cerrado por tanto $p(C)$ es cerrado en $X/A$

Así por ejemplo, el cono de $X$ es el espacio $Con(X) = X \times I/X \times \{0\}$ y $p : X \times I \to Con(X)$ es cerrada.

**b) Espacio de adjunción: Z=X$\cup_f$Y.**

Sea $f : A \to Y$ continua con $A$ un subespacio cerrado de $X$. Consideremos la suma topológica ajena $X \sqcup Y$ de los espacios $X$ y $Y$. Su topología se define como sigue:

$U$ abierto en $X \sqcup Y$ si y sólo si $U \bigcap X$ es abierto en $X$ y $U \bigcap Y$ abierto en $Y$.

La relación de equivalencia $\sim$ en $X \sqcup Y$ generada por $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$, es decir $w_1 \sim w_2$ si y sólo si

(1) $w_1 = w_2 \; \forall w_1, w_2 \in X \sqcup Y$

(2) $w_2 = f(w_1)$ para $w_1 \in A$ y $w_2 \in Y$ ó $w_1 = f(w_2)$ con $w_2 \in A$ y $w_1 \in Y$

(3) $f(w_1) = f(w_2)$ para $w_1, w_2 \in A$.

espacio cociente $Z = X \sqcup Y/\sim$ es el obtenido adjuntando $X$ a $Y$ mediante $f : A \to Y$. La proyección natural $p : X \sqcup Y \to Z$ es la función cociente que asigna a $w$ su clase de equivalencia $[w]$ satisface:

(1) La restricción $p\,|_Y \colon Y \to Z$ es un encaje cerrado, es decir $p\,|_Y \colon Y \to p(Y)$ es un homeomorfismo y la imagen es un subespacio cerrado del espacio de adjunción. En efecto, $p\,|_Y$ es continua e inyectiva. Veremos que es cerrada. Para todo $C$ cerrado en $Y$, $p^{-1}(p\,|_Y(C)) = C \bigcup f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado en $X \sqcup Y$ por tanto $p(C)$ es cerrado en $Z$.

(2) La restricción $p\,|_{X-A} \colon X - A \to Z$ es un encaje abierto. De acuerdo a la definición de $Z$ es claro que $p\,|_{X-A}$ es inyectiva y continua, falta probar que es abierta. Esto se sigue del hecho que para todo $U \subset X - A$ es saturado respecto a $p$, luego $p^{-1}(p\,|_{X-A}(U)) = U$.

(3) $p(Y)$ y $p(X-A)$ son disjuntos y $Z = p(Y) \bigcup p(X-A)$.

(4) Para $E \subset X$ y $B \subset Y$, tenemos las siguientes igualdades:

$$p^{-1}p(E) = E \bigcup f^{-1}(f(E \bigcap A)) \bigcup f(E \bigcap A) \quad \text{y} \quad p^{-1}p(B) = B \bigcup f^{-1}(B) \qquad (1.1)$$

En virtud de (1) se considera al espacio $Y$ como el subespacio cerrado $p(Y)$, esto es identificamos $y$ con su clase $[y] = p(y)$.

**c) El cilindro $\mathbf{Z}_f$ de $f$.**

Sea $f : X \to Y$ continua. El espacio cociente obtenido de la suma topológica ajena de $X \times I$ con $Y$ identificando $(x, 0) \in X \times I$ con $f(x) \in Y$ para cada $x \in X$ es el espacio cociente $Z_f$ llamado el cilindro de la transformación de $f$. Esto es, $Z_f$ es el espacio de adjunción $X \times I \bigcup_f Y$ para la función $A = X \times \{0\} \xrightarrow{f} Y$ definida por $(x, 0) \mapsto f(x)$.

Sea $[x, t]$ el punto de $Z_f$ imagen de $(x, t) \in X \times I$ bajo la identificación y sea $[y]$ el punto de $Z_f$ imagen de $y \in Y$, así $[x, 0] = [f(x)]$ para $x \in X$.

Las funciones $i : X \to Z_f$ con $i(x) = [x, 1]$ y $j : Y \to Z_f$ con $j(y) = [y]$ son encajes cerrados por lo que podemos considerar a $X$ e $Y$ como subespacios de $Z_f$ cerrados y ajenos.

**d) El cono $\mathbf{C}_f$.**

El espacio cociente obtenido del cilindro $Z_f$ colapsando $\imath(X)$ a un punto $v$ es llamado el cono de $f$, denotado por $C_f$. El punto $v$ es llamado el vértice de $C_f$. El espacio $Y$ puede considerarse como un subespacio de $C_f$.

**Proposición I.1.10** Sean $A$ un cerrado de $X$, $f : A \to Y$ continua y $Z = X \bigcup_f Y$ . Entonces $Z$ es $T_1$ si $X$ e $Y$ lo son.

**Demostración**. Supongamos que $X$ e $Y$ son $T_1$, sea $z \in Z$.

$$p^{-1}(z) = \begin{cases} \{x\} \text{ si } z = p(x), x \in X - A \\ f^{-1}(y) \bigcup \{y\} \text{ si } z = p(y),\ y \in Y \end{cases}$$

$p^{-1}(z)$ es cerrado, esto implica que $z$ es cerrado y por lo tanto $Z$ es $T_1$ $\square$

**Teorema I.1.11** Sean $X$ e $Y$ espacios Hausdorff, $A$ cerrado de $X$ y $f : A \to Y$ continua. Si se cumplen las dos condiciones siguientes

(1) para cada $x \in X \setminus A$ existen vecindades ajenas $U$ de $A$ y $V$ de $x$,

(2) existe una extensión continua, $f' : X \to Y$ de $f$ a una vecindad $N$ de $A$ en $X$, es decir $f' |_A = f$.

Entonces $X \bigcup_f Y$ es Hausdorff

**Demostración.** Sean $z_1, z_2$ puntos distintos de $Z = X \bigcup_f Y$.

*Caso* 1. $z_1, z_2 \in p(X - A)$.

Dado que $x_1 = p^{-1}(z_1)$ y $x_2 = p^{-1}(z_2)$ son puntos distintos del espacio de Hausdorff $X \setminus A$, existen $U_1, U_2$ vecindades abiertas ajenas de $x_1$ y $x_2$ en $X - A$ respectivamente. Entonces $p(U_1)$ y $p(U_2)$ son vecindades abiertas ajenas de $z_1, z_2$ puesto que $p^{-1}p(U_j) = U_j$ para $j = 1, 2$.

*Caso* 2. $z_1 \in p(Y)$ y $z_2 \notin p(Y)$.

Entonces $z_1 = p(y)$ con $y \in Y$ y $z_2 = p(x)$ con $x \in X - A$. Sean $U$ y $W$ vecindades ajenas de $A$ y de $x$ en $X$. Para cualquier vecindad $V$de $y$ en $Y$. Tenemos que $p(U \bigcup V)$ es vecindad abierta de $z_1$ en $Z$ porque $p^{-1}p(U \bigcup V) = U \bigcup V$ es abierto en $X \sqcup Y$. además $p(W) \bigcap p(U \bigcup V) = \emptyset$, con $p(W)$ vecindad abierta de $z_2$ dado que $p^{-1}p(W) = W$ es abierto.

*Caso* 3. $z_1, z_2 \in p(Y)$.

Consideremos $y_1, y_2 \in Y$ para los cuales $p(y_1) = z_1$ y $p(y_2) = z_2$. Como $z_1 \neq z_2$ entonces $y_1 \neq y_2$ y, por ser $Y$ Hausdorff, podemos elegir $U_1, U_2$ vecindades ajenas de $y_1, y_2$ respectivamente. Por hipótesis se tiene que existe $N$ vecindad de $A$ y $f' : N \to Y$ extensión continua de $f$ . Luego tenemos que $f'^{-1}(U_1) \bigcup U_1$ y $f'^{-1}(U_2) \bigcup U_2$ son abiertos de $X \sqcup Y$ saturados respecto a $p$. Además $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ implica $f'^{-1}(U_1) \bigcap f'^{-1}(U_2) = \emptyset$. Por consiguiente $p\left(f'^{-1}(U_1) \bigcup U_1\right)$ y $p\left(f'^{-1}(U_2) \bigcup U_2\right)$ son vecindades abiertas ajenas de $z_1$ y $z_2$. □

**Teorema I.1.12** Si $X$ es $T_4$ y $Y$ es de Urysohn (dos puntos ajenos tienen vecindades cerradas ajenas) entonces $X \bigcup_f Y$ es Hausdorff.

**Demostración.** Sean $z_1$ y $z_2$ dos puntos distintos de $X \bigcup_f Y$ . Los casos 1 y 2 son análogos a la demostración del teorema anterior.

Caso 3. $z_1, z_2 \in p(Y)$.

Sean $y_1, y_2 \in Y$ para los cuales $p(y_1) = z_1$ y $p(y_2) = z_2$. Como $z_1 \neq z_2$ se tiene $y_1 \neq y_2$ y $f^{-1}(y_1) \bigcap f^{-1}(y_2) = \emptyset$. Por hipótesis existen $V_1$ y $V_2$ vecindades abiertas ajenas en $Y$

de $y_1$ y $y_2$ respectivamente tal que $\overline{V_1} \bigcap \overline{V_2} = \emptyset$. Dado que $X$ es normal existen $U_1$ y $U_2$ vecindades abiertas en $X$ de $f^{-1}(\overline{V_1})$ y $f^{-1}(\overline{V_2})$ tal que $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$. Considérese $B_i = p(U_i - A) \bigcup p(V_i)$ vecindad de $z_i$. Veamos que $p^{-1}(B_i) = (U_i - A) \bigcup f^{-1}(V_i) \bigcup V_i$ es abierto en $X \sqcup Y$. En efecto $V_i$ es abierto en $Y$ y dado que $f^{-1}(V_i)$ es abierto en $A$ existe $W_i$ abierto en $X$ tal que $W_i \bigcap A = f^{-1}(V_i)$ entonces

$$(U_i - A) \bigcup f^{-1}(V_i) = (U_i \bigcap X - A) \bigcup f^{-1}(V_i) = (U_i \bigcap X - A) \bigcup (W_i \bigcap A) =$$
$$= U_i \bigcap ((X - A) \bigcup (W_i \bigcap A)) = U_i \bigcap ([(X - A) \bigcup W_i] \bigcap X)$$

es abierto en $X$. Por lo tanto $B_i$ es abierto en $Z$ y es fácil ver que $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$. □

**Observación.** Si $X$ es $T_4$ y $Y$ es $T_3$ (lo cual implica que $Y$ es de Urysohn) entonces $X \bigcup_f Y$ es de Hausdorff.

**Proposición I.1.13** Sean $X$ e $Y$ paracompactos, $A$ cerrado en $X$ y $f : A \to Y$ continua, entonces $X \bigcup_f Y$ es paracompacto.

**Demostración.** Ver [Ha] □

**Definición I.1.14** Una función continua $f : A \to B$ es **propia** si para cada compacto $K$ de $B$ su imagen inversa $f^{-1}(K)$ es compacta; en particular para cada $b \in B$ su **fibra** $f^{-1}(b)$ es compacta. Se dice que una función continua $f : A \to B$ es **perfecta** cuando es suprayectiva, cerrada y con fibras compactas.

Claramente la composición de funciones propias o perfectas es propia o perfecta respectivamente. Como consecuencia del siguiente lema tenemos que las funciones perfectas son las identificaciones cerradas propias, y toda función propia cerrada es la composición de una perfecta con una función inclusión cerrada.

**Lema I.1.15** Si $f : A \to B$ es continua, cerrada y con fibras compactas entonces:

*i*) para todo $B' \subseteq f(A)$ la función $f' : f^{-1}(B') \to B'$ definida por $f$, es perfecta

*ii*) $f$ es propia;

*iii)* para todo espacio $C$, la función $f \times 1_C : A \times C \to B \times C$ es cerrada.

**Demostración.** Ver Lema 4.4 [dN]. $\square$

**Proposición I.1.16** Sea $f : A \to Y$ una función continua de un subespacio cerrado $A$ de $X$. Si $f$ es cerrada entonces $p : X \sqcup Y \to X \bigcup_f Y$ es cerrada y si $f$ tiene fibras compactas, $p$ también las tiene. Por lo tanto $p$ es perfecta si $f$ es cerrada con fibras compactas.

**Demostración.** Sea $C$ un cerrado en $X \sqcup Y$. Probemos que $p^{-1}(p(C))$ es cerrado en $X \sqcup Y$ suponiendo que $f$ es cerrada. Como $C \bigcap A$ es cerrado en $X$, $f(C \bigcap A)$ es cerrado en $Y$, lo que implica

$$p^{-1}(p(C)) \bigcap Y = (C \bigcap Y) \bigcup f(C \bigcap A)$$

es unión de cerrados en $Y$ y

$$p^{-1}(p(C)) \bigcap X = (C \bigcap X) \bigcup f^{-1}(C \bigcap Y)$$

es unión de cerrados en $X$. Así $p^{-1}(p(C))$ es cerrado en $X \sqcup Y$ y por lo tanto $p(C)$ es cerrado en $X \bigcup_f Y$ .

Sea ahora $z \in X \bigcup_f Y$. Luego:

$$p^{-1}(z) = \begin{cases} x & \text{si } z \in p(X - A) \\ f^{-1}(y) \cup \{y\} & \text{si } z \in p(Y) \end{cases}$$

Si $f$ tiene fibras compactas es claro que $p^{-1}(z)$ es un compacto de $X \sqcup Y$ en cualquiera de los dos casos anteriores. $\square$

En particular si $Y$ es de Hausdorff y $A$ compacto entonces $f$ es cerrada con fibras compactas por tanto $p$ es perfecta.

**Teorema I.1.17** Sea $p : X \to Y$ una función perfecta. Entonces:

(1) Si $X$ es Hausdorff, regular, metrizable, paracompacto o 2º numerable entonces también lo es $Y$ respectivamente.

(2) Si $Y$ es paracompacto, compacto, de Lindelöf entonces también lo es $X$ respectivamente.

**Demostración.** Ver [Du] teorema 5.2. y 5.3. □

**Corolario I.1.18** Si $f$ es cerrada con fibras compactas y $X$ e $Y$ son espacios de Hausdorff o regulares o paracompactos o metrizables entonces $Z = X \bigcup_f Y$ también lo es respectivamente.

Las propiedades mencionadas son invariantes bajo funciones perfectas. La propiedad Tychonoff no es invariante bajo estas funciones. Con el fin de obtener las condiciones suficientes en $X$ e $Y$ para que $X \bigcup_f Y$ sea de Tychonoff, propiedad indispensable en resultados del capítulo III, introduciremos el concepto de push-out.

**Definición I.1.19** El diagrama conmutativo de espacios topológicos y funciones continuas

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & Z \\ & Y_2 \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

es un cuadrado **cocartesiano** o **push-out** si para todo espacio $W$ y $\xi_j : Y_j \to W$ continua $j = 1, 2$ tales que $\xi_1 \varphi_1 = \xi_2 \varphi_2$ existe una única función $\xi : Z \to W$ que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[dr, "\xi_1"] & \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] & Z \arrow[r, dashed, "\xi"] & W \\ & Y_2 \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[u, "\psi_1"'] \arrow[ur, "\xi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Se dice que $Z$ o más preciso $Y_1 \xrightarrow{\psi_1} Z \xleftarrow{\psi_2} Y_2$ es el push-out de $Y_1 \xleftarrow{\varphi_1} X \xrightarrow{\varphi_2} Y_2$. De la definición se sigue que $Z$ es único salvo por homeomorfismos.

**Proposición I.1.20** Si $f : A \to Y$ es una función continua de un subespacio cerrado $A$ de $X$ entonces el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "p_X"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "p_Y"'] & \end{tikzcd}$$

es cocartesiano donde $i$ es la inclusión, $Z = X \bigcup_f Y$, $p_X = p\,|_X$, $p_Y = p\,|_Y$ con $p : X \sqcup Y \to Z$ la proyección natural.

**Demostración.** Dadas las funciones continuas $\varphi_X : X \to W$ y $\varphi_Y : Y \to W$ sea $\varphi_X \sqcup \varphi_Y$ la función de $X \sqcup Y$ en $W$ definida por $(\varphi_X \sqcup \varphi_Y)\,|_X = \varphi_X$ y $(\varphi_X \sqcup \varphi_Y)\,|_Y = \varphi_Y$.

Supongamos que $\varphi_X i = \varphi_Y f$ esto es, $\varphi_X(a) = \varphi_Y(f(a))$ para todo $a \in A$. Veremos que $(\varphi_X \sqcup \varphi_Y)(p^{-1}(z))$ es un sólo punto de $W$. En efecto, si $z \in p(X - A)$, $p^{-1}(z) = x$ y $(\varphi_X \sqcup \varphi_Y)(p^{-1}(z)) = \varphi_X(x)$ es un punto de $W$; si $z \in p(Y)$, $p^{-1}(z) = y \bigcup f^{-1}(y)$ y $(\varphi_X \sqcup \varphi_Y)(f^{-1}(y) \bigcup y) = \varphi_Y(f^{-1}(y)) \bigcup \varphi_Y(y) = \varphi_Y(y)$ porque para cada $a \in f^{-1}(y)$, $\varphi_X(a) = \varphi_Y(f(a)) = \varphi_Y(y)$. Así aplicando el teorema de transgresión I.1.6, concluimos que existe una única función continua $\varphi$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & W \\ & X \sqcup Y \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "\varphi_X \sqcup \varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

□

**Proposición I.1.21** Sean $X$ e $Y$ de Tychonoff ($T_1$ y completamente regular) $A$ cerrado en $X$, $f : A \to Y$ continua. Si $X$ es normal entonces $Z = X \bigcup_f Y$ es de Tychonoff.

**Demostración.** Tenemos primero que $Z$ es $T_1$ por proposición I.1.10. Sean $z \in Z$ y $C$ cerrado en $Z$ tal que $z \notin C$.

*Caso 1.* $z = p(x)$ con $x \in X - A$.

Por ser $X$ de Tychonoff existe $\varphi_X : X \to I$ tal que $\varphi_X(x) = 0$ y para $B = A \bigcup p_X^{-1}(C)$ cerrado en $X$, $\varphi_X(B) = 1$. Sea $\varphi_Y : Y \to I$ la función constante $\varphi_Y(Y) = 1$, entonces por el resultado anterior existe $\varphi : Z \to I$ continua tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p_X"] \arrow[dr, "\varphi_X"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "p_Y"] & W \\ & Y \arrow[ur, "\varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Veamos que $\varphi$ envía el punto $z$ en 0 y el cerrado $C$ en $1 \cdot \varphi(z) = \varphi p_X(x) = \varphi_X(x) = 0$ Ahora si $c \in C \bigcap X$, $\varphi(c) = \varphi_X(c) \in \varphi_X(B)$ por lo tanto $\varphi(c) = 1$, si $c \in C \bigcap Y$, $\varphi(c) = \varphi_Y(c) = 1$ tenemos que $\varphi(C) = 1$.

*Caso 2* $z = p(y)$ con $y \in Y$.

En este caso existe $\varphi_Y : Y \to I$ continua tal que $\varphi_Y(y) = 0$ y $\varphi_Y(C \bigcap Y) = 1$ por ser $Y$ de Tychonoff. Consideremos la composición $\varphi_Y \cdot f : A \to I$ y su extensión $\psi . A \bigcup p_X^{-1}(C) \to I$ definida de la siguiente manera $\psi |_A = \varphi_y f$ y $\psi |_{p^{-1}(C)} = 1$. Para ver que $\psi$ está bien definida basta mostrar que $\psi \left(p_X^{-1}(C) \bigcap A\right) = 1$ Sea $a \in A \bigcap p_X^{-1}(C)$, $\psi(a) = \varphi_Y\left(f(a)\right) \in \varphi_Y(C \bigcap Y) = 1$ Además es claro que $\psi$ es continua.

Dado que $X$ es normal, por el teorema de Tietze-Urysohn existe una extensión $\varphi_X$ continua de $\psi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi_X"] & I \\ A \bigcup p_X^{-1}(C) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

como en el caso 1 existe $\varphi : Z \longrightarrow I$ continua que hace conmutativo el diagrama, se tiene: $\varphi_X(a) = \varphi_Y(f(a))$ para todo $a \in A$ por construcción y $\varphi(z) = \varphi(p(y)) = \varphi_Y(y) = 0$ si $c \in C \bigcap Y$, $\varphi(c) = \varphi_Y(c) = 1$.

Si $c \in C - Y$, $p_X^{-1}(c) \neq \emptyset$ por lo tanto $\varphi(c) = \varphi_X\left(p_X^{-1}(c)\right) = 1$. Con lo cual concluimos la prueba de la regularidad completa de $Z$. □

**Proposición I.1.22** Sean $A$ un cerrado de $X$, $f : A \rightarrow Y$ continua y $Z = X \bigcup_f Y$. Entonces $Z$ es normal (ó $T_4$) si $X$ e $Y$ lo son.

**Demostración.** Supongamos que $X$ e $Y$ son normales. Si $F, G$ son cerrados ajenos en $Z$ entonces por lema de Urysohn existe $\varphi_Y : Y \longrightarrow I$ continua tal que

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \in p^{-1}(F) \bigcap Y \\ 1 \text{ si } y \in p^{-1}(G) \bigcap Y \end{cases}$$

Sea $B = (p^{-1}(F) \bigcap X) \bigcup A \bigcup (p^{-1}(G) \bigcap X)$ y sea $\psi : B \rightarrow I$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \in p^{-1}(F) \bigcap X \\ \varphi_Y(f(x)) \quad \text{si } x \in A \\ 1 \quad \text{si } x \in p^{-1}(G) \bigcap X \end{cases}$$

Por la definición de $\varphi_Y$, $\psi$ está bien definida y es continua lo cual veremos a continuación. Si $a \in A \bigcap p^{-1}(F)$ entonces $a \in p^{-1}(F) \bigcap X$; por tanto $\psi(a) = 0$ pero también $f(a) \in p^{-1}(F) \bigcap Y$, luego $\varphi_Y(a) = 0$ y por definición $\psi(a) = \varphi_Y(a) = 0$, análogamente para $a \in A \bigcap p^{-1}(G)$. Entonces dado que $B$ es cerrado en $X$ espacio normal, por el teorema de extensión de Tietze existe $\varphi_X : X \longrightarrow I$ continua tal que $\varphi_X|_B = \psi$.

Como $\varphi_X(a) = \varphi_Y(f(a))$ para todo $a \in A$, por la proposición I.1.20 existe $\varphi : X \longrightarrow I$ continua tal que $\varphi p_X = \varphi_X$ y $\varphi p_Y = \varphi_Y$. Por construcción $\varphi_X(p^{-1}(F) \bigcap X) = 0$ y $\varphi_Y(p^{-1}(F) \bigcap Y) = 0$ por lo tanto $\varphi(F) = 0$. análogamente se prueba que $\varphi(G) = 1$. De lo anterior concluimos que $Z$ es normal. □

## I.2 GRUPOS TOPOLÓGICOS Y GRUPOS DE LIE.

Un **grupo topológico** es un grupo $G$ provisto de una topología tal que las operaciones multiplicación $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g,h) = gh$, e inversión $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ son funciones continuas, por lo tanto la estructura de grupo y la estructura topológica de $G$ no son independientes. Es fácil comprobar que la condición de continuidad de ambas funciones $\mu$ e $\iota$ equivale a la condición de continuidad de la función "división" $\nu : G \times G \to G$, dada por $\nu(g,h) = gh^{-1}$.

Para $A$ y $B$ subconjuntos de un grupo topológico $G$ sean

$AB = \mu(A \times B) = \{ab : a \in A, b \in B\}$

$A^{-1} = \iota(A) = \{a^{-1} : a \in A\}$

$AB^{-1} = \nu(A \times B) = \{ab^{-1} : a \in A, b \in B\}$

$A^2 = AA = \{a_1a_2 : a_1 \in A, a_2 \in A\}$.

La inversión $g \mapsto g^{-1}$ es un homeomorfismo involutivo de $G$, es decir $\iota^2 = 1_G$ Se dice que $A$ es **simétrico** si $A = A^{-1}$. Las traslaciones o multiplicaciones por $h$, $g \rightarrowtail hg$ y $g \rightarrowtail gh$ también son homeomorfismos. $G$ es un espacio homogéneo, pues dados $g_1, g_2 \in G$ existe un homeomorfismo $\varphi$ tal que $\varphi(g_1) = g_2$, en efecto tome $\varphi$ como la traslación izquierda por $g_2g_1^{-1}$.

Si $A$ es abierto, $AB$ y $BA$ son abiertos para todo $B \subseteq G$, ya que $AB = \bigcup_{b\in B} Ab$ es unión arbitraria de abiertos De la misma forma vemos que $BA$ es abierto.

Si $A$ es cerrado y $B$ finito, $AB$ y $BA$ son cerrados, como antes $AB = \bigcup_{b\in B} Ab$ y $BA = \bigcup_{b\in B} bA$ son uniones finitas de cerrados.

En virtud de la homogeneidad, para probar que $G$ satisface cierta propiedad local bastará probarlo para un punto, en particular para el elemento identidad $e$ de $G$. Como $e$ es un elemento especial de $G$ y cualquier vecindad de $g \in G$ es de la forma $gV$ o $Vg$ con $V$ una vecindad de $e$, el papel que juegan las vecindades de $e$ es sumamente importante

**Proposición I.2.1** Sean $G$ un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base de vecindades de $e$ en $G$. Entonces dada $N \in \mathcal{B}$ existen $U, V$ y $W$ en $\mathcal{B}$ tales que

$$U^2 \subseteq N,\ V^{-1} \subseteq N \text{ y } WW^{-1} \subseteq N.$$

Más aún, las vecindades abiertas y simétricas de $e$ forman una base de vecindades de $e$ en $G$.

**Demostración.** La continuidad de la multiplicación implica que existen vecindades $U_1$ y $U_2$ de $e$ tales que $U_1U_2 \subseteq N$. considere $U \in \mathcal{B}$ contenido en $U_1 \bigcap U_2$, entonces $U^2 \subseteq N$. Como la inversión es continua, hay un elemento $V$ en $\mathcal{B}$ que cumple $V^{-1} \subseteq N$. Finalmente en forma análoga al primer caso, la continuidad de $\nu$ implica la existencia de $W$ tal que $WW^{-1} \subseteq N$. Nótese que $V \bigcap V^{-1}$ y $WW^{-1}$ son conjuntos simétricos, de lo anterior se sigue que las vecindades abiertas simétricas de $e$ constituyen una base de vecindades de $e$. □

Los subconjuntos compactos de grupos topológicos tienen propiedades similares a los puntos respecto a axiomas de separación por ejemplo, ahora en grupos topológicos tenemos la siguiente proposición.

**Proposición I.2.2** Para un compacto $K$ de un grupo topológico $G$,

(1) Cada vecindad $A$ de $K$ en $G$ contiene abiertos de la forma $UK$ y $KU'$. donde $U$ y $U'$ son vecindades abiertas de $e$.

(2) Si $C$ es un cerrado de $G$, $CK$ y $KC$ son cerrados,

(3) Para cada vecindad $N$ de $e$ hay una vecindad $V$ de $e$ tal que $\bigcup_{k \in K} k^{-1}Vk \subseteq N$.

**Demostración.** Ver proposición 3.2 [dN]. □

**Proposición I.2.3** Un subgrupo $H$ de $G$ es grupo topológico con la topología relativa. Designamos por $G/H$ al conjunto de clases laterales izquierdas con la topología identificación respecto a $q : G \to G/H$, con $q(g) = gH$. Entonces $q$ es abierta y el espacio $G/H$ es **homogeneo.** Si $H \lhd G$ entonces el grupo cociente $G/H$ es un grupo topológico con esta topología.

**Demostración.** Veamos primero que $q$ es abierta. En efecto dado un abierto $A$ en $G$, $q^{-1}q(A) = AH = \bigcup_{h\in H} Ah$ unión de abiertos en $G$ y de la definición de topología cociente $q(A)$ es abierto en $G/H$. Ahora $G/H$ es un espacio homogéneo, pues para $g_1H$, $g_2H$ existe un homeomorfismo $\varphi$, $\varphi : gH \to g_2g_1^{-1}gH$ tomado como la traslación izquierda, tal que $\varphi(g_1H) = g_2H$. Dado que $H \lhd G$ tenemos que $G/H$ es un grupo. Probemos que las operaciones de grupo son continuas Sea $\nu' : G/H \times G/H \to G/H$ definida por $\nu'(g_1H, g_2H) = g_1g_2^{-1}H$ veamos que es continua. Para ello, considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{v} & G \\ q \times q \downarrow & & q \downarrow \\ G/H \times G/H & \xrightarrow[\nu']{} & G/H \end{array}$$

$q$ abierta, $q \times q$ es sobreyectiva y abierta, y $vq$ continua por lo tanto $\nu'$ continua $\square$

Enseguida se introducen los grupos de Lie y se discuten algunas cosas de importancia para resultados posteriores.

**Definición I.2.4** Un grupo topológico es un **grupo de Lie** si tiene una estructura de una variedad diferenciable tal que las operaciones de grupo $\mu$ e $\iota$ son diferenciables.

Por la homogeneidad de $G$ basta que exista una vecindad abierta $U$ de $e$ en $G$ y un homeomorfismo $x : U \to W$ sobre un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ para algún $n$ con $x(e) = 0$ y tal que las operaciones del grupo sean diferenciables cerca de $e$ en estas coordenadas locales. Más precisamente, sea $x_i(g)$ la i-ésima coordenada de $x(g) \in \mathbb{R}^n$ para $g \in U$. Entonces para todo $g$ y $h$ en alguna vecindad abierta $V \subset U$ de $e$ donde las funciones $\varphi_i$ son de clase $\mathbb{C}^\infty$en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, $x_i(gh) = \varphi_i\,(x_1(g), ..., x_n(g), x_1(h), ..., x_n(h))$. Similarmente $x_i(g^{-1}) = \psi_i\,(x_1(g), ..., x_n(g))$ para $g$ cercano a $e$, donde las funciones $\psi_i$ son $\mathbb{C}^\infty$ alrededor de $0 \in \mathbb{R}^n$.

**Ejemplos.**

(1) El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie. En efecto con la topología usual, $\mathbb{R}^n$es una variedad diferenciable y es un grupo topológico abeliano con las operaciones definidas por $(x, y) \mapsto x + y$ y $x \mapsto -x$ que son diferenciables.

(2) El circulo unitario $\mathbb{S}^1$ es de Lie compacto. El toro $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ es grupo de Lie dado que el producto finito de grupos de Lie es un grupo de Lie.

(3) El grupo general lineal $\mathbf{GL(n,\mathbb{R})}$ =$\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Tenemos que $\mathbf{GL(n,\mathbb{R})}$ es una subvariedad de $\mathbf{M(n,\mathbb{R})}$ y es un grupo con respecto a la multiplicación de matrices. El producto $AB$ en $\mathbf{GL(n,\mathbb{R})}$ tiene entradas polinomiales en las componentes de $A$ y $B$, y estas entradas son las expresiones en coordenadas locales de la función producto, que es diferenciable. Las entradas de $A^{-1}$ son funciones racionales de las entradas de $A$ con denominadores diferentes de cero y es también diferenciable. Así $\mathbf{GL(n,\mathbb{R})}$ es un grupo de Lie.

**Teorema I.2.5** Sea $G$ un grupo de Lie y $H$ un subgrupo cerrado de $G$. Existe una vecindad $U$ de $eH$ en $G/H$ y una función continua $s : U \to G$ tal que $\pi s = 1_U$, con $\pi : G \to G/H$ la proyección canónica.

**Demostración.** Ver la prueba del teorema 3.37 en [Ka]. □

## 1.3 G-ESPACIOS.

Sea $G$ un grupo topológico. Un **G-espacio** es un espacio provisto de una **acción continua** de $G$ sobre $X$, esto es, una función continua $\theta : G \times X \to X$ definida como $(g, x) \mapsto gx$ que satisface $ex = x$, donde $e$ es la identidad del grupo y $h(gx) = (hg)x$, para todos $x \in X$, $g, h \in G$.

Para cada $g \in G$, la acción $\theta$ induce la función continua $\theta_g : X \to X$, $\theta_g(x) = x$, la cual es un homeomorfismo puesto que $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Para $x \in X$, $A \subset X$ y $H \subseteq G$ usaremos las notaciones y términos siguientes:

$HA = \{ha : \forall h \in H,\ a \in A\}$

$Gx = \{gx \mid g \in G\}$ es la órbita de $x$

$G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$ es el estabilizador de $A$.

$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ es el grupo de isotropía de $x$.

Si $G_x = G$, $x$ es un punto fijo o estacionario $X^G$ es el conjunto de puntos fijos.

Se dice que $A$ es **invariante** si $gA = A$ para todo $g \in G$ La unión, intersección y diferencia de dos conjuntos invariantes es un conjunto invariante

Sea $X/G$ el conjunto de órbitas con la topología identificación respecto a la **proyección orbital** $\pi . X \to X/G$, dada por $\pi(x) = Gx$ A $X/G$ se le llama el **espacio de órbitas**

**Proposición I.3.1** $\pi$ es abierta y cuando $G$ es compacto $\pi$ es además cerrada

**Demostración.** Sea $A$ un abierto de $X$, $\pi^{-1}\pi(A) = GA = \bigcup_{g \in G} gA$ es unión de abiertos en $X$ por lo tanto $\pi(A)$ es abierto en $X/G$. Para el caso $G$ compacto mostraremos que si $C$ es un cerrado en $X$ entonces $GC = \pi^{-1}\pi(C)$ tambien lo es

En general se cumple para todo $K \subset G$ y $B, C \subset X$ las siguientes equivalencias

$B \bigcap KC = \emptyset \Leftrightarrow K^{-1}B \bigcap C = \emptyset \Leftrightarrow (K^{-1} \times B) \bigcap \theta^{-1}(C) = \emptyset$

Sea $x \in X - GC$, $Gx \bigcap C = \emptyset$ esto implica que $Gx \subset [G \times X - \theta^{-1}(C)]$ abierto en $G \times X$ donde $\theta$ es la accion de $G$ en $X$ Como $G$ es compacto existe $V$ vecindad de $x$ tal que $G \times V \subset [G \times X - \theta^{-1}(C)]$ y de las equivalencias antes mencionadas se sigue que $V \bigcap GC = \emptyset$ y por lo tanto $GC$ es cerrado en $X$. De la definición de topología cociente tenemos que $\pi(C)$ es cerrado en $X/G$. □

**Definición I.3.2** Supongamos que $G$ actúa en los espacios $X$ e $Y$. Se dice que una función continua $f : X \to Y$ es **equivariante** o $G$**−aplicación** cuando $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$, $g \in G$. Tenemos que toda función equivariante $f$ satisface $G_x \subset G_{f(x)}$ para todo $x \in X$. Además $f$ transforma órbitas en órbitas puesto que $f(Gx) \subseteq Gf(x)$ e induce una función en los espacios de órbitas, como veremos a continuación.

**Proposición I.3.3** Cada función equivariante $f : X \to Y$ induce una única función continua $f/G$ entre los espacios de órbitas que hace el siguiente diagrama conmutativo, donde $\pi$ y $\pi'$ son las proyecciones orbitales.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G \end{array}$$

**Demostración.** Se define $(f/G)(Gx) = Gf(x)$. Como $(f/G)\pi = f\pi'$ es continua, por la propiedad universal del cociente $f/G$ es continua. □

Si $H$ es un subgrupo de $G$. Dado un $H$-espacio $X$, podemos construir un $G$-espacio asociado con $X$ como sigue: consideremos la $H$-acción sobre el espacio producto $G \times X$ definida por $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$. el espacio de órbitas de esta $H$-acción se denota por $G \times_H X$ y la $H$−órbita de $(g, x)$ por $[g, x]$. Finalmente se define una $G$-acción sobre $G \times_H X$ por $g'[g, x] = [g'g, x]$. El $G$-espacio $G \times_H X$ asociado a $X$, es llamado **producto torcido** y tiene las siguientes propiedades.

**Proposición I.3.4** Sea $H$ un subgrupo compacto de $G$ un grupo de Hausdorff Entonces

($a$) $\imath : X \to G \times_H X$, $x \longmapsto [e, x]$, es un $H$-encaje cerrado.

($b$) La proyección $G \times X \to G$ induce una proyección $p : G \times_H X \to G/H$, definida por $p([g, x]) = gH$, la cual es una identificación abierta.

**Demostración.**

(a) Sean la proyección orbital $\pi : G \times X \to G \times_H X$ y la función continua $\jmath : X \to G \times X$ definida por $\jmath(x) = (e, x)$. La función $i$ de (a) es la composición $\pi\jmath$ por lo tanto es continua. Para $h \in H$ tenemos que

$i(hx) = [e, hx] = [h, x] = h[e, x] = h\imath(x)$

esto prueba que $\imath$ es $H-$equivariante.

Probemos ahora que $i$ es inyectiva. Sean $\imath(x) = \imath(y)$ para $x, y \in X$ esto es, $[e, x] = [e, y]$. Por definición existe $h \in H$ tal que $h(e, x) = (e, y)$ lo que implica que $(eh^{-1}, hx) = (e, y)$ y así $e = h$, $x = y$.

Mostremos que $i$ es cerrada. Sea $C$ un cerrado en $X$ entonces $\jmath(C) = \{e\} \times C$ es cerrado en $G \times X$ dado que $G$ es Hausdorff, además como $H$ es compacto $\pi$ es cerrada por proposición I.3.1 y entonces $\pi\jmath(C) = \imath(C)$ es cerrado en $G \times_H X$. De lo anterior se sigue que $\imath$ es encaje cerrado.

(b) Primero veamos que $p$ está bien definida. En efecto $[g_1, x_1] = [g_2, x_2]$ implica que para algún $h \in H$, $g_2 = g_1 h^{-1}$ y $hx_2 = x_1$, luego $g_1 H = g_2 H$ por lo tanto

$$p([g_1, x_1]) = g_1 H = g_2 H = p([g_2, x_2])$$

Considérese $G \times X \xrightarrow{p_1} G$ la proyección sobre la primera coordenada y $G \xrightarrow{q} G/H$ la identificación $q(g) = gH$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{p_1} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ G \times_H X & \xrightarrow[p]{} & G/H \end{array}$$

Como $p\pi = \pi' q$ es continua y $\pi$ identificación, $p$ continua. Además $p$ es abierta porque lo son $p_1$ y $q$. $\square$

# Capítulo 2

# Acciones especiales

Las acciones de grupos compactos y las acciones propias en el sentido de R. Palais [Pa2], poseen propiedades especiales muy interesantes, es por eso que dedicamos este capítulo para su tratamiento. Además, los resultados que de ellas se derivan son clave para la obtención de resultados del siguiente capítulo.

## II.1 ACCIONES DE GRUPOS COMPACTOS.

En esta sección supondremos que $G$ es compacto. Algunos de los resultados que aquí se exponen no se demuestran, para su demostración se puede consultar [dN].

Consideremos un $G$- espacio $X$ con acción $\theta$ y proyección orbital $\pi$

Mostraremos primero que la acción $\theta : G \times X \to X$ es cerrada. Se tiene entonces que para todo cerrado o compacto $C$ de $X$, $GC$ es cerrado o compacto respectivamente. En particular las órbitas $Gx$ son siempre compactas

**Proposición II.1.1** La acción $\theta : G \times X \to X$ es cerrada

**Demostración.** Sea $C$ un cerrado de $G \times X$ y $x$ un punto de la cerradura de $\theta(C)$, entonces hay una red $((g_\lambda, x_\lambda))$ en $C$ tal que la red $(g_\lambda x_\lambda)$ converge a $x \in X$. Como $G$ es compacto, alguna subred $(g_{\lambda_i})$ de $(g_\lambda)$ converge a un elemento $g$ de $G$ luego $(g_{\lambda_i}^{-1})$

converge a $g^{-1}$ y por continuidad de la acción $(x_{\lambda_\gamma}) = (g_{\lambda_\gamma}^{-1}(g_{\lambda_\gamma}x_{\lambda_\gamma}))$ converge a $g^{-1}x$. Entonces la red $((g_{\lambda_\gamma}, x_{\lambda_\gamma}))$ en $C$ converge a $(g, g^{-1}x)$ un punto de $C$ y por lo tanto $x = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(C)$. □

Para cada $x \in X$ la acción $\theta$ induce una función continua, sobreyectiva $\theta^x : G \to Gx, \theta^x(g) = gx$.

A su vez, $\theta^x$ induce $\overline{\theta^x} : G/G_x \to Gx$, $gG_x \mapsto gx$ biyectiva y continua porque $\theta^x(g) = \theta^x(h)$ si y sólo si $h^{-1}g \in G_x$. Esto es válido para cualquier grupo topológico $G$.

Cuando $X$ es de Hausdorff, el grupo de isotropía $G_x$ es cerrado y en nuestro caso $G$ compacto, el espacio de clases laterales $G/G_x$ es compacto por lo tanto $\overline{\theta}^x : G/G_x \to Gx$ es un homeomorfismo. Ahora bien, la órbita $Gx$ es un $G$-espacio y el espacio de clases laterales $gG_x$ es también un $G$-espacio respecto a la translación izquierda. resulta entonces que $\overline{\theta}^x$ es un homeomorfismo equivariante.

**Proposición II.1.2** La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es perfecta.

**Demostración.** Ya mostramos en la proposición I.3.1 que $\pi$ es cerrada. La fibra $\pi^{-1}(p)$ de cualquier punto $p \in X/G$ es una órbita por tanto es compacta. □

Así para $\pi : X \to X/G$ tenemos que es suprayectiva, continua, abierta, cerrada y propia. Muchas propiedades topológicas son invariantes bajo este tipo de identificaciones, por ejemplo la conexidad, la compacidad, ser $1^0$ numerable, ser $2^0$ numerable ser espacio $T_1$, normal, paracompacto (Teorema de Michael [En] 5.1.33, p.310) y metrizable. [Du] Cap. XI sec. 5.

**Proposición II.1.3** Toda vecindad de un conjunto invariante $A$ contiene una vecindad abierta invariante de $A$.

**Demostración.** Supongamos que $V$ es una vecindad abierta de $A$, el conjunto $U = X/G - \pi(X - V)$ es un abierto de $X/G$, contiene a $\pi(A)$ y $\pi^{-1}(U) \subseteq V$ porque si

$u \in U$, $\pi^{-1}(u) \bigcap (X - V) = \emptyset$. Y así, $\pi^{-1}(U) = X - G(X - V)$ es la vecindad abierta invariante de $A$ contenida en $V$. $\square$

Para acciones de grupos compactos en espacios de Hausdorff tenemos el siguiente resultado sobre extensiones equivariantes.

**Proposición II.1.4** Sea $C$ un cerrado de un $G$-espacio de Hausdorff X. Si una función continua $\varphi : C \to Y$ en un $G$-espacio $Y$ satisface $\varphi(gc) = g\varphi(c)$ siempre que $g$ y $gc$ pertenecen a $C$, entonces $\varphi$ tiene una extensión equivariante única $\varphi' : GC \to Y$.

**Demostración.** Pongamos $\varphi'(gc) = g\varphi(c)$ para todo $g \in G$ y $c \in C$, entonces $\varphi'(c) = \varphi(c)$ para $c \in C$ y cuando también $gc \in C$ por la hipótesis $\varphi(gc) = g\varphi(c) = \varphi'(gc)$ lo cual implica que $\varphi' : GC \to Y$ está bien definida. Probaremos la continuidad de $\varphi'$ mostrando que para $F$ cerrado en $Y$, $\varphi'^{-1}(F)$ es cerrado en $X$. Sea $x$ un punto de $\overline{\varphi'^{-1}(F)}$ y sea $(x_\lambda)$ una red en $\varphi'^{-1}(F)$ que converge a $x$. Ya que $x_\lambda = g_\lambda c_\lambda$ con $g_\lambda \in G$ y $c_\lambda \in C$, hay una subred $(g_{\lambda_\alpha})$ de $(g_\lambda)$ que converge a algún punto $g$ de $G$, entonces la red $(c_{\lambda_\alpha}) = (g_{\lambda_\alpha}^{-1} x_{\lambda_\alpha})$ converge al punto $g^{-1}x$, luego $g^{-1}x \in C$ y tenemos que la red en $F$, $(\varphi'(x_{\lambda_\alpha})) = (g_{\lambda_\alpha}\varphi(c_{\lambda_\alpha}))$ converge a $g\varphi(g^{-1}x) = \varphi'(x)$, por lo tanto $\varphi'(x) \in F$ y $x \in \varphi'^{-1}(F)$. $\square$

**Definición II.1.5** Una **sección** de una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es una función continua $s : Y \to X$ tal que $fs = 1_Y$. Una **sección local** en un punto $y \in Y$ es una función $s' : U \to X$ con $U$ vecindad de $y$ tal que $\pi s' = 1_U$.

**Proposición II.1.6** Sea $C$ un cerrado de un $G$-espacio de Hausdorff X. Si la intersección de $C$ con cada órbita consta de exactamente un punto entonces $\pi$ tiene una sección cuya imagen es $C$.

**Demostración.** La restricción $\pi \mid C : C \to X/G$ es, por las propiedades de $C$ biyectiva y cerrada, por tanto es un homeomorfismo. La composición de $(\pi \mid C)^{-1} : X/G \to C$ seguida de la inclusión $C \hookrightarrow X$ es la sección buscada. $\square$

Enseguida presentamos la integral de Haar sobre un grupo compacto de Hausdorff. Aunque exista para grupos de Hausdorff localmente compactos para nuestros fines sólo consideraremos el caso compacto. En este caso existe una medida de Haar $\mu$ normalizada, es decir $\mu(G) = 1$, y la integral de Haar sobre $G$ que consideramos será invariante izquierda y derecha, respecto a la medida de Haar normalizada.

Sea $C(G)$ el espacio vectorial real de todas las funciones continuas $\varphi : G \to \mathbb{R}$. Como es costumbre para r$\in \mathbb{R}$ designaremos con $r$ a la función constante $r(G) = r$, para $\varphi$ y $\psi$ $r \in C(G)$. $\varphi \geqslant \psi$ significa $\varphi(g) \geqslant \psi(g)$ para toda $g \in G$. Las translaciones izquierda y derecha de $G$ por un elemento $h$ inducen los siguientes automorfismos de $C(G)$ :

$R_h, L_h : C(G) \to C(G)$, con $R_h(\varphi)(g) = \varphi(gh)$ y $L_h(\varphi)(g) = \varphi(h^{-1}g)$, en efecto son transformaciones lineales biyectivas esto último es consecuencia de

$R_h R_{h'} = R_{h'h}, L_h L_{h'} = L_{hh'}$.

**Teorema II.1.7** Existe una función única $I : C(G) \to \mathbb{R}$ que cumple:
(a) $I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2)$ y $I(c\varphi) = cI(\varphi)$ para $c \in \mathbb{R}$,
(b) $I(R_h\varphi) = I(\varphi) = I(L_h\varphi)$ para todo $h \in G$,
(c) Si $\varphi \geqslant 0$, $I(\varphi) \geqslant 0$,
(d) $I(1) = 1$.

La función $I$ es la **integral de Haar** (normalizada) se denota

$$I(\varphi) = \int \varphi(g)dg.$$

La propiedad (a) implica la linealidad de la integral, así

$$\int (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(g)dg = c_1 \int \varphi_1(g)dg + c_2 \int \varphi_2(g)dg$$

ahora (b) significa que es invariante derecha e izquierda:

$$\int \varphi(gh)dg = \int \varphi(g)dg. = \int \varphi(h^{-1}g)dg.$$

por (c) se tiene que si $\varphi \geqslant 0$ entonces $\int \varphi(g)dg \geqslant 0$.

y (d) es la condición de medida de Haar normalizada, esto es, $\int dg = 1$.

Por ejemplo si $G$ es un grupo finito de orden m, la función $I(\varphi) = [\sum_{g \in G} \varphi(g)]/m$ satisface las condiciones del teorema anterior por tanto es la integral de Haar sobre $G$ ; esta integral es una funcional que asigna a cada $\varphi$ su valor medio.

**Proposición II.1.8**

(1) $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$ implica $\int \varphi_1(g)dg \geqslant \int \varphi_2(g)dg$.

(2)$| \int \varphi(g)dg | \leq \sup \{| \varphi(g) | : g \in G\}$.

(3) Si $\varphi \geqslant 0$ pero $\varphi \neq 0$ entonces $\int \varphi(g)dg > 0$.

**Definición II.1.9** Se dice que una función continua $f$ de un $G-$espacio $X$ en un espacio $Y$ es **invariante** cuando $f(gx) = f(x)$ para todo $g \in G$ y cada $x \in X$, dicho de otra manera $f$ es equivariante respecto a la acción trivial de $G$ en $Y$.

**Proposición II.1.10** Sean $X$ un $G$-espacio y $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua. La función $\Phi : X \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = \int \phi(gx)dg$ es continua y satisface $\Phi(hx) = \Phi(x)$ para todo $h \in G$. Además si $A$ es un conjunto invariante de $X$ y $\phi(A) \subseteq [b, c]$ entonces $\Phi(A) \subseteq [b, c]$.

Las demostraciones del resultado que damos a continuación utilizan la integral de Haar normalizada sobre $G$ y pueden verse en [Bre], [Pal] .

**Proposición II.1.11** Sea $X$ un $G-$espacio. Si $X$ es completamente regular o de Tychonoff o paracompacto o metrizable entonces también lo es $X/G$ respectivamente.

La integral de Haar sobre $G$ de funciones continuas de $G$ en $\mathbb{R}$ se extiende a la integral de funciones continuas de $G$ con valores vectoriales integrando coordenada por coordenada. Precisando, sea $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ continua con $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, se define

$$\int \varphi(g)dg = \left(\int \varphi_1(g)dg, \ldots, \int \varphi_n(g)dg\right) \in \mathbb{R}^n.$$

La propiedad de linealidad de la integral de Haar implica que toda transformación lineal $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisface

$$\int f\varphi(g)dg = f(\int \varphi(g)dg),$$

asimismo, de la invariancia izquierda y derecha de la integral de Haar resulta la igualdad

$$\int \varphi(gh)dg = \int \varphi(g)dg = \int \varphi(hg)dg.$$

Además, para cada función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ de un $G$-espacio $X$ en $\mathbb{R}^n$ se obtiene una función invariante $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi(x) = \int \varphi(gx)dg$$

**Teorema II.1.12** *(Teorema de Extensión de Gleason).* Sean $X$ un $G$-espacio normal, $A$ un cerrado invariante de $X$, $\rho : G \to GL(n,\mathbb{R})$ una representación de $G$ es decir $\rho$ es un homeomorfismo continuo. Entonces toda función $\rho$- equivariante $\phi : A \to \mathbb{R}^n$, esto es $\phi(ga) = \rho(g)\phi(a)$, admite una extensión $\rho$-equivariante $\upsilon : X \to \mathbb{R}^n$.

## II.2 ACCIONES PROPIAS.

En esta sección supondremos que $G$ es un grupo de Hausdorff localmente compacto. Definiremos los $G-$espacios propios para $X$ un $G$ -espacio de Tychonoff, concepto introducido en 1961 por R. Palais [Pa2] con el propósito de extender gran parte de la teoría de grupos de transformaciones compactos a localmente compactos.

**Definición II.2.1** Dados $U$ y $V$ subconjuntos de un $G$-espacio $X$, sea $< U, V >= \{g \in G \mid gU \bigcap V \neq \emptyset\}$.

En la siguiente proposición se muestran algunas de las propiedades del conjunto anterior.

**Proposición II.2.2** El conjunto $< U, V >$ cumple con las siguientes propiedades:

(1) $< U, V >^{-1} \quad = \quad < V, U >$

(2) $< g_1U, g_2V > \quad = \quad g_2 < U, V > g_1^{-1}, \quad g_1, g_2 \in G$ .

(3) $< \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha, V > \quad = \quad \bigcup\limits_{\alpha} < U_\alpha, V >$ .

(4) $< \bigcup\limits_{i} U_i, \bigcap\limits_{i} V_i > \quad \subseteq \quad \bigcup < U_i, V_i >$

**Demostración.** (1) $g \in< V, U >$ si y sólo si $gV \bigcap U \neq \emptyset$ lo cual implica que existen $x \in V$ y $y \in U$ tal que $gx = y$, o bien, $x = g^{-1}y$ Así, $g^{-1}U \bigcap V \neq \emptyset$ por lo tanto $g^{-1} \in< U, V >$ y $g \in< U, V >^{-1}$ .

(2) $g \in< g_1U, g_2V >$ si y sólo si $g(g_1U) \bigcap (g_2V) \neq \emptyset$. Luego, existen $x \in U$, $y \in V$ tal que $g(g_1x) = g_2y$, esto es, $g_2^{-1}gg_1x = y$; de donde concluimos que $g_2^{-1}gg_1 \in< U, V >$ y por lo tanto, $g \in g_2 < U, V > g_1^{-1}$.

(3) i) Sea $g \in< \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha, V >$ esto implica que $g(\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ Luego existen $x \in \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, $y \in V$ tal que $gx = y$, como $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha$ entonces $g \in< U_\alpha, V >$ y por lo tanto $g \in \bigcup\limits_{\alpha} < U_\alpha, V >$

ii) Sea $g \in \bigcup\limits_{\alpha} < U_\alpha, V >$, entonces $g \in < U_\alpha, V >$ para algún $\alpha$, esto implica que existen $x \in U_\alpha$, $y \in V$ tales que $gx = y$. Pero si $x \in U_\alpha$ entonces $x \in \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ y $g(\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha) \bigcap V \neq \emptyset$. Así $g \in < \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha, V >$.

De i) y ii) se tiene $< \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha, V > \;=\; \bigcup\limits_{\alpha} < U_\alpha, V >$.

(4) Sea $g \in < \bigcup\limits_{i} U_i, \bigcap\limits_{i} V_i >$ entonces existen $x \in \bigcup\limits_{i} U_i$ y $y \in \bigcap\limits_{i} V_i$ tal que $gx = y$, lo cual implica que $x \in U_i$ para algún $i$ pero $y \in V_i$ para todo $i$, y así $g \in < U_i, V_i > \;\subseteq\; \bigcup < U_i, V_i >$. □

**Definiciones II.2.3** Sea $X$ un $G$-espacio y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

(a) $A$ es **delgado** si $< A, A >$ tiene cerradura compacta en $G$.

(b)$A$ es **pequeño** si cada $x \in X$ tiene una vecindad $U$ $t-$**relacionada** con $A$ (lo que denotaremos por $A \overset{t}{\sim} U$), es decir, $< A, U >$ tiene cerradura compacta.

(c) Un $G$-espacio $X$ de Tychonoff es de **Cartan** si cada punto de $X$ tiene una vecindad delgada.

(d) $X$ de Tychonoff es un $G$-espacio **propio** si cada punto de $X$ tiene una vecindad pequeña.

**Observación.** Toda acción de grupo compacto de Hausdorff $G$ en $X$ de Tychonoff es propia porque cada subconjunto de $X$ es pequeño.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de $G$-espacios de Cartan y $G$-espacios propios.

**Ejemplos.**

(1) Sea el grupo topológico $G = (\mathbb{R}, +)$ actúando sobre $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ por $\varphi : G \times X \to X$, definida como $\varphi(t, (x, y)) = (e^t x, e^{-t} y)$. Entonces $X$ es un $G$-espacio de Cartan y no es $G$-espacio propio. [Elf]

(2) Si $H$ es un subgrupo compacto de un grupo topológico $G$ localmente compacto entonces el espacio homogéneo de clases laterales $G/H$ es un $G$-espacio propio.

(3) Si $G$ es un grupo localmente compacto, $H$ un subgrupo compacto de $G$ y $X$ un $H$-espacio entonces $G \times_H X$ es un $G$-espacio propio. Ver proposición 1.3 en [Elf].

(4) El espacio $N(E)$ de todas las normas sobre $E$, el espacio lineal de dimensión $n$, es un $G$-espacio propio bajo la acción natural de el grupo general lineal $G = GL(n)$. Ver [An1]

Otros ejemplos interesantes de $G$-espacios propios los podemos encontrar en [Ab].

**Proposición II.2.4.** Si $X$ es un $G$-espacio de Cartan y $X/G$ es $T_3$ entonces $X$ es un $G$-espacio propio.

**Demostración.** Ver [Pa2] Proposición 1.2.5. □

Enseguida enumeramos algunas propiedades elementales de conjuntos pequeños cuyas pruebas se siguen de las propiedades de la proposición II.2.2.

(1) Un subconjunto de un conjunto pequeño es pequeño.

(2) La unión finita de conjuntos pequeños es pequeña.

(3) Si $S \subset X$ es pequeño y $K$ es un compacto de $X$ entonces $K$ tiene una vecindad $t-$relacionada con $S$.

(4) Si $X$ es un $G$-espacio propio y $K$ es compacto de $X$ entonces $< K, K >$ es un cerrado compacto de $G$, por lo tanto $K$ es delgado e incluso tiene una vecindad delgada.

(5) Si $X$ es $G$-espacio propio entonces cada conjunto compacto de $X$ es pequeño y tiene una vecindad pequeña.

**Demostración.** Como ejemplo probaremos (5)

Para cada $k \in K$ existe $U_k$ vecindad pequeña de $k$, así obtenemos $\bigcup_{k \in K} U_k$ una cubierta abierta de $K$. Dado que $K$ es compacto existen $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} = W$

Como cada $U_{k_i}$ es pequeña entonces $W$ es vecindad pequeña de $K$ por (2) y por (1) $K$ es pequeño. □

**Proposición II.2.5** Un $G$-espacio propio es un $G$-espacio de Cartan.

**Demostración.** La proposición se cumple porque toda vecindad pequeña $U$ de $x$ contiene una vecindad delgada $U \bigcap V$, donde $V$ es una vecindad de $x$ tal que $U \overset{t}{\sim} V$. □

**Lema II.2.6** Sean $X, Y$ $G$-espacios y $f : X \to Y$ equivariante. Entonces

(a) $< A_1, A_2 > \subseteq < f(A_1), f(A_2) >$ para todo $A_1, A_2 \subset X$. Si $f$ es inyectiva se da la igualdad.

(b) $< f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) > \subseteq < B_1, B_2 >$ para todo $B_1, B_2 \subset Y$. Se cumple la igualdad cuando $f$ es suprayectiva.

**Demostración.** (a) Sea $g \in < A_1, A_2 >$, es decir $gA_1 \bigcap A_2 \neq \emptyset$. Esto implica que $f(gA_1 \bigcap A_2) \neq \emptyset$. Luego $f(gA_1 \bigcap A_2) \subseteq gf(A_1) \bigcap f(A_2) \neq \emptyset$. Así $g \in < f(A_1), f(A_2) >$ y $< A_1, A_2 > \subseteq < f(A_1), f(A_2) >$.

Si $f$ es inyectiva se cumple la igualdad $f(gA_1 \bigcap A_2) = gf(A_1) \bigcap f(A_2)$, de donde tenemos que si $g \in < f(A_1), f(A_2) >$ entonces $g \in < A_1, A_2 >$.

Por tanto $< f(A_1), f(A_2) > \subseteq < A_1, A_2 >$.

b) Veamos que $< f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) > \subseteq < B_1, B_2 >$ para todo $B_1, B_2 \subset Y$.

Por (a) $< f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) > \subseteq < f(f^{-1}(B_1)), f(f^{-1}(B_2)) >$ y aplicando $f(f^{-1}(B_i)) \subseteq B_i$ obtenemos (b). Sea ahora $g \in < B_1, B_2 >$, si $f$ es suprayectiva se tiene que $f^{-1}(gB_1 \bigcap B_2) \neq \emptyset$. Así $gf^{-1}(B_1) \bigcap f^{-1}(B_2) \neq \emptyset$ y $g \in < f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) >$, de donde se concluye que $< B_1, B_2 > \subseteq < f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) >$. □

**Corolario II.2.7** Si $B$ es delgada o pequeña en $Y$ entonces $f^{-1}(B)$ es delgada o pequeña en $X$ respectivamente.

**Lema II.2.8** Sea $U$ abierto pequeño en un $G$-espacio $X$. Entonces $O = < U, U >$ es vecindad abierta de $e$ en $G$.

**Demostración.** Sea $U$ un abierto pequeño. Considérese la acción $\theta : G \times X \to X$, su restricción $\theta_U : G \times U \to X$ y $p_1 : G \times U \to G$ la proyección sobre la primera coordenada.

Dado que $U$ es abierto, $\theta_U^{-1}(U) = \{(g,x) \in G \times U \mid gx \in U\}$ también lo es, luego $p_1(\theta_U^{-1}(U))$es abierto. Veamos que $p_1(\theta_U^{-1}(U)) = O$, para $h \in p_1(\theta_U^{-1}(U))$ $\exists\, y \in U$ tal que $hy \in U$. entonces $hy \in hU \bigcap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $h \in < U, U >= O$. Sea $g \in O$, entonces $\exists z \in U$ tal que $gz \in U$. Por lo tanto $(g,z) \in \theta_U^{-1}(U)$ y $g \in p_1(\theta_U^{-1}(U))$. Esto prueba que $O$ es abierto en $G$ y claramente $e \in O$. $\square$

# Capítulo 3

# G-Espacios de Adjunción

En este capítulo trataremos uno de los temas principales de esta tesis, los espacios de adjunción de $G$-espacios propios en el sentido de R. Palais [Pa2]. Lo iniciaremos tratando con identificaciones equivariantes y resultados básicos para el desarrollo de los temas aquí contenidos

Posteriormente probamos algunos resultados en donde, bajo ciertas condiciones, el espacio de adjunción de un $G$-espacio propio (de Cartan) resulta ser un $G$-espacio propio (de Cartan)

En la sección III.3 veremos algunos resultados sobre rebanadas en su mayoría con grupos de Lie o compactos. Con estos resultados podemos finalmente demostrar el Teorema III.4 5 de E. Elfving [Elf], el cual afirma que si $X$, $Y$ son $G$-espacios propios, paracompactos entonces el espacio de adjunción es $G$-espacio propio paracompacto.

## III.1 IDENTIFICACIONES EQUIVARIANTES.

Consideraremos aquí **identificaciones equivariantes** entre $G-$espacios, i.e. son identificaciones y funciones equivariantes

**Teorema III.1.1** *(Transgresión Equivariante).* Sea $p : X \to Y$ una identificación equivariante y sea $\varphi : X \to Z$ una función equivariante tal que $\varphi p^{-1}(z)$ es univaluada para todo $z \in Z$. Entonces $\varphi p^{-1}(z)$ es una función equivariante.

**Demostración.** Por el teorema I.1.6 sabemos que $\varphi p^{-1} : Z \to Y$ es una función continua, falta probar que $(\varphi p^{-1})(gz) = g(\varphi p^{-1}(z))$ para todo $g \in G$ y $z \in Z$. Pero debido a la equivariancia de $\varphi$ es suficiente mostrar que $p^{-1}(gz) = gp^{-1}(z)$ lo cual resulta de lo siguiente: $x \in p^{-1}(gy) \Leftrightarrow p(x) = gy \Leftrightarrow p(g^{-1}x) = g^{-1}gy = y \Leftrightarrow g^{-1}x \in p^{-1}(y) \Leftrightarrow x \in gp^{-1}(y)$. $\square$

**Definición III.1.2** Una relación de equivalencia $\sim$ es **invariante** si $x_1 \sim x_2$ implica $gx_1 \sim gx_2$ para toda $g \in G$.

**Lema III.1.3** Si $p : X \to Y$ es una identificación equivariante entonces la relación en $X$ definida por $x_1 \sim x_2$ cuando $p(x_1) = p(x_2)$ es una relación de equivalencia invariante.

**Demostración.** Si $x_1 \sim x_2$, $p(x_1) = p(x_2)$ esto implica que para todo $g \in G$ $p(gx_1) = gp(x_1) = gp(x_2) = p(gx_2)$ por lo tanto $gx_1 \sim gx_2$. $\square$

**Proposición III.1.4** Si $\sim$ es relación de equivalencia invariante en un $G$-espacio $X$ y $G$ es localmente compacto y Hausdorff. Entonces existe una acción continua en $Y = X/\sim$ tal que la función cociente $p : X \to X/\sim$ es equivariante.

**Demostración.** Para $[x] \in X/\sim$ la clase de equivalencia de $x$. definamos $g[x] = [gx]$. Con esta acción la función cociente $p$ es equivariante, en efecto

$gp(x) = g[x] = [gx] = p(gx)$.

Resta probar que esta acción es continua. Sea $\theta$ la acción de $G$ en $X$ y $\theta'$ la acción de $G$ en $X/\sim$. Luego $\theta'(g, [x]) = [gx] = [\theta(g, x)]$ por lo tanto el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\theta} & X \\ id \times p \downarrow & & \downarrow p \\ G \times X/\sim & \xrightarrow{\theta'} & X/\sim \end{array}$$

Como $G$ es localmente compacto y Hausdorff $id \times p$ es identificación por el corolario I.1.8 y dado que $\theta'(id \times p) = \theta p$ es continua entonces $\theta'$ también lo es. □

**Proposición III.1.5** Sean $G$ un grupo localmente compacto y Hausdorff, $X$ e $Y$ $G$-espacios, $A$ cerrado invariante de $X$ y $f : A \to Y$ equivariante. Entonces $Z = X \bigcup_f Y$ es un $G$-espacio con la proyección $p : X \sqcup Y \to Z$ equivariante.

**Demostración.** Para que el espacio $X \sqcup Y / \sim$ sea un $G$-espacio y $p : X \sqcup Y \to Z$ sea equivariante basta probar, por la proposición anterior, que es invariante la relación $\sim$ en $X \sqcup Y$ generada por $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$. Dado que $f$ es equivariante $gf(a) = f(ga)$ y claramente $a \sim f(a)$ implica $ga \sim f(ga)$ por lo tanto $ga \sim gf(a)$ para todo $a \in A$ y $g \in G$. De aquí se infiere que $\sim$ es una relación de equivalencia invariante.□

**Proposición III.1.6** Con las hipótesis de la proposición anterior, el espacio de órbitas $Z/G$ es homeomorfo a $X/G \bigcup_{f/G} Y/G$.

**Demostración.** Tenemos las proyecciones orbitales y las funciones cociente canónicas:

$$\begin{array}{l} W = X \sqcup Y \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{\pi} Z/G \\ \qquad\quad \downarrow \pi' \\ W/G = X/G \sqcup Y/G \xrightarrow{p'} X/G \bigcup_{f/G} Y/G \end{array}$$

Aplicando el teorema de transgresión existe $\varphi : Z/G \to X/G \bigcup_{f/G} Y/G$ tal que $\varphi\pi p = p'\pi'$ si y sólo si para todo $Gz \in Z/G$, $p'\pi'((\pi p)^{-1}(Gz))$ es un sólo punto de $X/G \bigcup_{f/G} Y/G$. Pero $(\pi p)^{-1}(Gz) = Gp^{-1}(z)$ es conjunto invariante de $W$, la fibra $p^{-1}(z)$ o es un sólo punto $x \in X - A$ por lo tanto $p'\pi'(Gx)$ es un punto, o bien es un conjunto de la forma $f^{-1}(y) \bigcup \{y\}$ entonces, $p'\pi'(f^{-1}(y) \bigcup \{y\}) = p'(Gf^{-1}(y) \bigcup Gy) = p'(G(y))$ porque $(f/G)(Gf^{-1}(y)) = Gf(f^{-1}(y)) = Gy$, luego $p'\pi'(f^{-1}(y) \bigcup \{y\}) = p'(Gy)$ es un punto

Así $\varphi : Z/G \to X/G \bigcup_{f/G} Y/G$ es la función definida como $\varphi(G[w]) = [Gw]$ con $w \in X \sqcup Y$.

Como $\varphi(\pi p) = p'\pi'$ es sobreyectiva tambien lo es $\varphi$, veremos que es inyectiva. En efecto, supóngase que $\varphi(Gz_1) = \varphi(Gz_2)$ tenemos que $[Gw_1] = [Gw_2]$ con $z_1 = [w_1]$ y $z_2 = [w_2]$, luego $Gw_1 \sim Gw_2$, es decir se cumple cualquiera de los siguientes casos:

$(i)$ $Gw_1 = Gw_2$.

$(ii)$ $Gw_1 = f/G(Gw_2) = Gf(w_2)$, luego $gf(w_2) = w_1$ y como $f$ es equivariante $f(gw_2) = w_1$.

$(iii)$ $f/G(Gw_1) = f/G(Gw_2)$ en este caso se tienen las siguientes implicaciones: $Gf(w_1) = Gf(w_2) \Rightarrow f(w_1) = gf(w_2) \Rightarrow f(w_1) = f(gw_2)$.

En los tres casos tenemos que $w_1 \sim gw_2$ para algún $g \in G$.

De donde $[w_1] = [gw_2] = g[w_2]$ y por lo tanto $G[w_1] = G[w_2]$ o $Gz_1 = Gz_2$ con lo que concluimos que $\varphi$ es inyectiva.

La función inversa $\varphi^{-1}$ satisface $\varphi^{-1}p'\pi' = p\pi$ y por la propiedad universal del cociente se sigue que es continua. □

## III.2 ESPACIOS DE ADJUNCIÓN DE G-ESPACIOS PROPIOS.

En lo que sigue supondremos que $G$ es de Hausdorff y localmente compacto, $(X, A)$ es $G$-**par**, esto es, $X$ un $G$-espacio y $A$ un subespacio cerrado invariante de $X$. Diremos que $A$ es un retracto equivariante de una vecindad invariante $M$ de $A$ en $X$ cuando existe una retracción equivariante $r : M \to A$, es decir $r(a) = a$ para toda $a \in A$.

**Teorema III.2.1** Sean $X$ e $Y$ $G$-espacios de Cartan y $f : A \to Y$ equivariante. Si $A$ es retracto equivariante de una vecindad abierta invariante $M$ de $A$ en $X$ y $Z = X \bigcup_f Y$ de Tychonoff, entonces $Z$ es $G$-espacio de Cartan.

**Demostración.** Designaremos con $p : X \sqcup Y \to X \bigcup_f Y$ la proyección canónica, como $Z = p(X - A) \sqcup p(Y)$ se mostrará que cualquier punto $z_0 \in Z$ tiene una vecindad delgada para los casos $z_0 \in p(X - A)$ y $z_0 \in p(Y)$.

*Caso I.* $z_0 = p(x_0)$, $x_0 \in X - A$

Sea $V$ vecindad abierta delgada de $x_0$ contenida en $X - A$. Como $V$ es un conjunto saturado, es decir $p^{-1}p(V) = V$ tenemos que $p(V) = U$ es vecindad abierta de $z_0$ en $Z$. Finalmente por el lema II.2.6 (b), $< U, U > = < p^{-1}(U), p^{-1}(U) > = < V, V >$ y por lo tanto $U$ es vecindad delgada.

*Caso II.* $z_0 = p(y_0)$, $y_0 \in Y$.

Sean $V$ vecindad delgada de $y_0$ en $Y$, $r : M \to A$ una retracción equivariante. $W = (fr)^{-1}(V) \bigcup V$ y $U = p(W)$. Puesto que

$$p^{-1}(U) = [(fr)^{-1}(V) \bigcup f^{-1}(V)] \sqcup [V] = [(fr)^{-1}(V)] \sqcup [V]$$

es abierto en $X \sqcup Y$, tenemos que $U$ es vecindad abierta de $z_0$ en $Z$.

Aplicando proposición II.2.2,

$$< U, U > = < (fr)^{-1}(V), (fr)^{-1}(V) > \bigcup < (fr)^{-1}(V), V > \bigcup$$
$$\bigcup < V, (fr)^{-1}(V) > \bigcup < V, V >$$

De nuevo por el lema II.2.6 se tiene que $< (f r)^{-1}(V), (f r)^{-1}(V) > \subseteq < V, V >$, como $(f r)^{-1}(V) \subset X$, $V \subset Y$ y $X, Y$ son conjuntos invariantes ajenos de $X \sqcup Y$, $< (f r)^{-1}(V), V > = < V, (f r)^{-1}(V) > = \emptyset$. Concluimos que $\overline{< U, U >} \subseteq \overline{< V, V >}$, por lo tanto $U$ es una vecindad delgada de $z_0$. $\square$

**Teorema III.2.2** Sean $X$ e $Y$ $G$-espacios propios, $A$ cerrado invariante de $X$, $f : A \to Y$ equivariante y $Z = X \bigcup_f Y$ de Tychonoff. Si se cumplen

$(i)$ $\forall x \in X - A$ existen vecindades $U_x$ de $x$ y $M_x$ de $A$ $t$-relacionadas

$(ii)$ $\exists$ vecindad abierta invariante $M$ de $A$ y $f' : M \to Y$ extensión equivariante de $f$.

Entonces $Z$ es $G$-espacio propio.

**Demostración.** Probaremos por casos que cualquier punto $z_0 \in Z$ tiene una vecindad pequeña.

*Caso I.* Si $z_0 = p(x_0) \in p(X - A)$, sean $U_0$ vecindad pequeña de $x_0$ contenida en $X - A$ y $U_{x_0}$ una vecindad de $x_0$ que satisface $(i)$. Entonces $U = U_0 \bigcap U_{x_0}$ es vecindad pequeña de $x_0$ contenida en $X - A$, tal que $< U, M_{x_0} >$ tiene cerradura compacta, probaremos que $p(U)$ es una vecindad pequeña de $z_0$.

a) Para $z \in p(X - A)$ existe una vecindad $V$ de $x = p^{-1}(z)$ contenida en $X - A$ tal que $\overline{< U, V >}$ es compacto. Los conjuntos $U$ y $V$ son saturados, luego $p(U)$ y $p(V)$ son vecindades de $z_0$ y $z$ en $Z$, y por el lema II.2.6 $< p(U), p(V) > = < U, V >$ , así concluimos que la cerradura de $< p(U), p(V) >$ es compacta.

b) Para $z \in p(Y)$, el conjunto $V = Y \bigcup M_{x_0}$ es saturado porque $A \subset M_{x_0}$, luego $p(V)$ es vecindad abierta de $z$. Tenemos que

$$< p(U), p(V) > = < U, V > = < U, Y > \bigcup < U, M_{x_0} > \subset < U , M_{x_0} >$$

por tanto $< p(U), p(V) >$ tiene cerradura compacta.

*Caso II.* Si $z_0 \in p(Y)$, sea ahora $U_0$ una vecindad pequeña de $y_0 = p^{-1}(z_0) \bigcap Y$ en $Y$. Entonces el abierto $U = f'^{-1}(U_0) \bigcup U_0$ en $X \sqcup Y$ es saturado porque

$$p^{-1}p(U) = [f'^{-1}(U_0)] \sqcup [U_0 \bigcup f(f'^{-1}(U_0) \bigcap A)] = [f'^{-1}(U_0)] \sqcup [U_0]$$

esta última igualdad se justifica porque si $a \in f'^{-1}(U_0) \bigcap A$ entonces $f'(a) \in U_0$ y $a \in A$ por lo tanto $f'(a) = f(a)$, luego $f(a) \in U_0$ y $f(f'^{-1}(U_0) \bigcap A) = U_0$.

a) Para $z \in p(X - A)$, $p^{-1}(z) = x \in X - A$.

Ya que $U_0$ es un conjunto pequeño de $Y$, por el corolario II.2.7 $f'^{-1}(U_0)$ es pequeña en $X$, entonces existe una vecindad $V$ de $x \in X$ contenida en $X - A$ con $f'^{-1}(U_0)$ y $V$ $t$-relacionadas. Como $V$ es saturado, $p(V)$ es vecindad de $z$. Tenemos

$$< p(U), p(V) > = < U, V > = < f'^{-1}(U_0), V >.$$

ya que $< U_0, V > = \emptyset$, por lo tanto $p(U)$ y $p(V)$ están $t$-relacionadas..

b) Para $z \in p(Y)$, existe una vecindad abierta $V_y$ de $y = p^{-1}(z) \bigcap Y$ $t$-relacionada con $U_0$. Sea $V = f'^{-1}(V_y) \cup V_y$ como antes $p^{-1}p(V) = V$ es abierto. Por lo tanto aplicando el lema II.2.6

$$< p(U), p(V) > = < f'^{-1}(U_0) \bigcup U_0, f'^{-1}(V_y) \bigcup V_y > =$$
$$< f'^{-1}(U_0), f'^{-1}(V_y) > \bigcup < U_0, V_y > = < U_0, V_y >.$$

Y como la cerradura de $< U_0, V_y >$ es compacta también $\overline{< p(U), p(V) >}$ es compacto

De los casos I y II concluimos que $Z$ es $G$-espacio propio. $\Box$

**Lema III.2.3** Si $X$ e $Y$ son $G$-espacios propios, $X$ es normal y el $G$-par $(X, A)$ satisface las dos condiciones siguientes

$(i')$ $\forall x \in X - A$ $\exists$ vecindad invariante $M_x$ de $A$ tal que $x \notin \overline{M_x}$.

$(ii')$ $\exists$ vecindad invariante $M$ de $A$ tal que $A$ es retracto equivariante de $M$.

Entonces para cualquier función equivariante $f : A \to Y$, $X \bigcup_f Y$ es un $G$-espacio propio

**Demostración.** Por la proposición I.1.21 el espacio de adjunción $X \bigcup_f Y$ es de Tychonoff. Tenemos que $(i')$ implica $(i)$ del teorema III.2.2. En efecto basta tomar la vecindad abierta invariante $U_x = X - \overline{M_x}$ de $x$, por tanto $< U_x, M_x >= \emptyset$. Tambien $(ii')$ implica $(ii)$ porque $f' = fr$, con $r : M \to A$ retracción equivariante, es una extensión equivariante de $f$. □

Por ejemplo, el $G$-par $(X \times I, X \times \{0\})$ utilizado para construir el cilindro de $f : X \to Y$, cumple con las condiciones del corolario anterior.

**Proposición III.2.4** Sean $X$ e $Y$ $G$-espacios de Cartan y $f : X \to Y$ equivariante. Si $X \times I$ es normal $Z_f$ es $G$-espacio de Cartan, además si $X$ e $Y$ son $G$-espacios propios, $Z_f$ es $C$-espacio propio.

**Demostración.** Por el teorema III.2.1 $Z_f$ es de Cartan y para $X$ e $Y$ $G$-espacios propios el lema III.2.3 implica que $Z_f$ es $G$-espacio propio. □

## III.3 TUBOS Y REBANADAS.

En esta sección desarrollamos la técnica de $H$-rebanadas, herramienta necesaria para dar los resultados de Erik Elfving en la siguiente sección.

**Definiciones III.3.1** Sean $X$ un $G$−espacio y $H$ un subgrupo cerrado de $G$. Un subconjunto $S$ de $X$ es una $H$-rebanada si cumple con lo siguiente:

a) $S$ cerrado en $GS$

b) $S$ invariante bajo $H$

c) $gS \bigcap S \neq \emptyset$ implica $g \in H$

d) $GS$ es abierto en $X$.

Una **rebanada** en $x \in X$ es una $G_x$-rebanada $S$ que contiene a $x$; la vecindad $GS$ de la órbita $G(x)$ se llama una vecindad tubular.

Un subconjunto $S$ de $X$ es llamado un $H$-**kernel** si existe una función equivariante $f : GS \longrightarrow G/H$ tal que $f^{-1}(eH) = S$, donde la acción de $G$ en el espacio de las clases laterales $G/H$ es $g'(gH) = g'gH$.

**Proposición III.3.2** Si $S$ es un $H$-kernel en un $G$-espacio $X$ y $GS$ es abierto en $X$, $S$ es una $H$-rebanada en $X$

**Demostración.** En virtud de que $S$ es un $H$-kernel existe $f : GS \longrightarrow G/H$ equivariante tal que $f^{-1}(eH) = S$. Veamos que $S$ cumple las condiciones de $H$-rebanada.

En principio $eH$ es cerrado en $G/H$ provisto de la topología cociente y dado que $f$ es continua tenemos que $f^{-1}(eH)$ es cerrado en $GS$. Luego $f(hs) = hf(s) \in eH$ por lo tanto $hs \in S$ para todo $h \in H$ y $s \in S$. Por último $gS \bigcap S \neq \emptyset$ implica que $\emptyset \neq f(gS \bigcap S) \subset f(gS) \bigcap f(S) = gH \bigcap eH$, esto es, existe $h \in H$ tal que $gh = e$, por lo tanto $g \in H$ □

**Proposición III.3.3** Sea $H$ un subgrupo cerrado de $G$ y $X$ un $G$-espacio Si $f : X \to G/H$ es equivariante, entonces $A = f^{-1}(eH)$ es invariante bajo $H$

y $\varphi : G \times_H A \to X$, definido por $\varphi[g, a] = ga$ es una función equivariante biyectiva. Cuando la función cociente $\pi : G \to G/H$ tiene una sección local en $eH$ entonces $\varphi$ es un **homeomorfismo.**

**Demostración.** $A = f^{-1}(eH)$ es un cerrado $H$−invariante. En efecto, $A \subset HA$ es trivial. Sea $a \in A$ y $h \in H$ entonces $f(ha) = hf(a) \in eH$ de ahí $ha \in A$ por tanto $HA = A$.

Veremos que $\varphi$ esta bien definida. Si $[g, a] = [g', a']$ existe $h \in H$ tal que $(gh^{-1}, ha) = (g', a')$ entonces, $gh^{-1} = g'$ y $ha = a'$, luego

$$\varphi[(g, a)] = ga = g'hh^{-1}a' = g'a' = \varphi[(g', a')] \ .$$

Observamos primero que $f$ es sobreyectiva. Dado $gH \in G/H$, tomemos $x \in gA$, entonces $f(x) = gH$. De hecho $X = GA$ ya que para $x \in X$ arbitrario, si $f(x) = gH$, $x \in gA$ porque $f(g^{-1}x) = eH$. Como $(g^{-1}x) \in A$, $x = g(g^{-1}x) = \varphi[g, g^{-1}x]$, lo cual demuestra que $\varphi$ es sobreyectiva.

$\varphi$ es inyectiva. En efecto supongamos que $\varphi([g, a]) = \varphi([g', a'])$. Entonces

$$ga = g'a' \text{ y } gH = g(f(a)) = f(ga) = f(g'a') = g'f(a') = g'H.$$

Por tanto $g^{-1}g' = h \in H$ y así $a = g^{-1}g'a' = ha'$. De ahí se sigue que $[g, a] = [g'h^{-1}, ha'] = [g', a']$ y por tanto $\varphi$ inyectiva.

Para probar la continuidad de $\varphi$ considérese el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G \times A & \\ & {\scriptstyle p} \swarrow \quad \searrow {\scriptstyle \psi} & \\ G \times_H A & \to & X \end{array}$$

donde $\psi(g, a) = ga$ es la restricción de la acción de $G$ en $A$. Entonces $\psi = \varphi p$. Como $\psi$ es continua y $p$ es identificación $\varphi$ es continua.

Supongamos que $\pi : G \to G/H$ tiene una sección local $s : U \to G$ donde $U$ es una vecindad de $eH \in G/H$.

Si $x \in f^{-1}(U)$, probaremos primero que $(sf(x))^{-1}x \in A$, o sea que $f\left((sf(x))^{-1}x\right) = eH$ .

Sean $f(x) = gH$ y $s(gH) = g'$, por ser $s$ sección local de $\pi$, $\pi(s(gH)) = gH$ pero como $\pi(g) = gH$ entonces existe $h \in H$ tal que $g' = gh$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f\left(sf(x)\right)^{-1}x &= (sf(x))^{-1}f(x) = (s(gH))^{-1}gH = (g')^{-1}gH \\ &= (gh)^{-1}gH = h^{-1}g^{-1}gH = eH. \end{aligned}$$

Consideremos la función $q = f\varphi : G \times_H A \to G/H$, $q([g,a]) = gH$ y definamos $\varphi^* \cdot f^{-1}(U) \to q^{-1}(U)$ por $\varphi^*(x) = [sf(x), (sf(x))^{-1}x]$. Su imagen está efectivamente en $q^{-1}(U)$ porque $q\varphi^*(x) = sf(x)H = \pi sf(x) = f(x) \in U$. Probemos que $\varphi^*$ es la inversa de $\varphi\,|_{q^{-1}(U)}$: $q^{-1}(U) \to f^{-1}(U)$. Tenemos que para $a \in A$ y $g \in G$,

$$sf(ga) = sgf(a) = s(gH)$$

y como antes si $s(gH) = g'$ entonces $g' = gh$ con $h \in H$. Por lo tanto, $sf(ga) = gh$ de donde

$$\varphi^*(ga) = \left[sf(ga), (sf(ga))^{-1}ga\right] = [gh, (gh)^{-1}ga] = [gh, h^{-1}a] = [g,a]$$

porque $h \in H$ y obtenemos $\varphi^*(\varphi[g,a]) = \varphi^*(ga) = \varphi^*[g,a]$.

Ahora bien $\varphi(\varphi^*(x)) = sf(x)\left(sf(x)\right)^{-1}x = x$ para todo $x \in f^{-1}(U)$ De ahí concluimos que $\varphi^*$ es inversa de $\varphi \mid q^{-1}(U)$ y así. $\varphi \mid q^{-1}(U)$ es un homeomorfismo.

Si ahora $[g,a] \in G \times_H A$, entonces $gq^{-1}(U)$ es una vecindad de $[g,a]$ y $gf^{-1}(U)$ es una vecindad de $ga$ en $X$. Ahora $\varphi \,|\cdot\, gp^{-1}(U) \to gf^{-1}(U)$ es la composición de los homeomorfismos

$gq^{-1}(U) \xrightarrow{t^{-1}} q^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi|} f^{-1}(U) \xrightarrow{t} gf^{-1}(U)$

donde $t$ es translación izquierda por $g$. Esto prueba que $\varphi : G \times_H A \to X$ es un homeomorfismo $\square$

**Observación.** La función $\varphi$ de la proposición anterior es un homeomorfismo equivariante para $G$ un grupo de Lie o $G$ compacto. En el primer caso la prueba se sigue del teorema I.2.5 y de la definición II.1.5 ya que existe una sección local de $\pi$ en $eH$ y para el caso $G$ compacto $\varphi$ es cerrada porque la composición $(g, a) \mapsto [g, a] \overset{\varphi}{\mapsto} ga$ es cerrada y $\varphi q = \psi$.

**Lema III.3.4** Sea $G$ de Lie o compacto. Si $S$ es un $H$-kernel en un $G$-espacio $X$ entonces la restricción de la acción continua $G \times S \to GS$, $(g, s) \mapsto gs$, es una identificación abierta.

**Demostración.** Considérese el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} G \times S & & \\ p \downarrow & \searrow \alpha & \\ G \times_H S & \underset{\varphi}{\to} & GS \end{array}$$

donde $p$ es la proyección orbital del $H-$espacio $G \times S$ sobre su espacio de órbitas, por la observación anterior $\varphi$ es un homeomorfismo. Dado que $p$ y $\varphi$ son abiertas el resultado se sigue. □

**Lema III.3.5** Sea $H$ subgrupo cerrado de $G$ un grupo de Lie o compacto y $X$ un $G-$espacio. Si $S'$ es un $H$-kernel en $X$ y $S$ es un subconjunto $H$-invariante de $S'$, entonces $S$ es un $H$-kernel en $X$. Si $S'$ es una $H$-rebanada y $S$ es un abierto $H$-invariante de $S'$ entonces $S$ es una $H$-rebanada.

**Demostración.** Si $f : GS' \to G/H$ es equivariante para la cual $f^{-1}(eH) = S'$, entonces la restricción $f| : GS \to G/H$ es equivariante y $(f|)^{-1}(eH) = GS \cap S' = S$. Supongamos que. $S$ es abierto de $S'$ entonces $GS$ es abierto en $GS'$ porque la acción $G \times S \to S$ es abierta. Entonces si $S'$ es una $H$-rebanada, $GS'$ es abierto en $X$ por tanto $GS$ es abierto en $X$ lo cual implica por la proposición III.3.2 que $S$ es una $H$-rebanada. □

**Lema III.3.6** Sean $G$ grupo de Lie o compacto, $X$ un $G-$espacio de Hausdorff y $x_0 \in X$ para el cual $G_{x_0}$ es compacto. Si $S'$ es una rebanada en $x_0$ y $W$ es una vecindad de $x_0$, entonces existe una rebanada $S$ en $x_0$ abierta en $S'$ y una vecindad abierta $D$ de $e$ en $G$ tales que $DS \subset W$. Más aún, $DS$ abierto en $X$.

**Demostración.** Denotemos $H = G_{x_0}$ entonces $H$ es un subgrupo cerrado de $G$ porque $X$ es de Hausdorff. Como la acción $G \times X \xrightarrow{\alpha} X$ es continua, entonces existen vecindades abiertas $D$ de $e$ en $G$ y $B$ de $x_0$ en $X$, tales que $DB \subset W$. Dado que $H$ es compacto, $Hx_0 = x_0$ y $\alpha\mid_{H\times S'}: H \times S' \to S'$ es continua, existe una vecindad $V$ de $x_0$ en $S'$ tal que $\alpha(H \times V) \subset S' \cap B$. Ahora, por el lema anterior $S = \alpha(H \times V)$ es una rebanada en $x_0$ contenida en $S'$, además $DS \subset DB \subset W$. Finalmente por lema III.3.4 $DS$ es abierto en $GS$ y por lo tanto lo es en $X$ $\square$

### III.4 El CASO $G$ UN GRUPO DE LIE.

En esta sección se abordarán resultados en donde el grupo que actúa es un grupo de Lie. El concepto de rebanada como lo define R. Palais en [Pa2], juega un papel importante en el desarrollo de esta sección. En su mayoría los resultados aquí mencionados se deben a Erick Elfving [Elf] y son una herramienta útil en la demostración del teorema III.4.5 donde suponiendo que $X$ e $Y$ sean $G$-espacios propios paracompactos con espacios de órbitas paracompactos, el espacio de adjunción $X \bigcup_f Y$ resulta $G$-espacio propio.

**Teorema III.4.1** Sea $G$ un grupo de Lie. Entonces para cada punto $x$ de un $G$-espacio propio existe una rebanada.

**Demostración.** Ver [Pa2] Proposición 2.3.1. □

En particular si $G$ es compacto de Lie, cualquier órbita de un $G$-espacio de Tychonoff tiene una vecindad tubular. Ver teorema 5.4 Cap. II [Bre].

Si $X$ es un $G$-espacio de Cartan, esto supone que $X$ espacio de Tychonoff, por lo que para cada $x$, $G_x$ es cerrado y como está contenido en el compacto $\overline{<V,V>}$ con $V$ vecindad delgada de $x$, entonces $G_x$ es compacto. El siguiente resultado proporciona una relación entre la propiedad que una acción de un grupo de Lie $G$ sea de Cartan y la propiedad que para todo $x \in X$, $G_x$ es compacto y existe una rebanada en $X$.

**Teorema III.4.2** Sea $G$ un grupo de Lie y $X$ un $G$-espacio de Tychonoff. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para cada $x \in X$, $G_x$ es compacto y existe una rebanada en $x$.

b) $X$ es $G$-espacio de Cartan.

**Demostración.** Ver [Pa2], Teorema 2.3.3. □

**Lema III.4.3** Sea $G$ un grupo de Lie y $X$ un $G$-espacio propio. Si $V$ es un subconjunto pequeño de $X$ y $T$ es una órbita en $X$ tal que cada vecindad tubular de $T$ corta a $V$, entonces $T \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

**Demostración.** Fijamos $x_0 \in T$ y una vecindad $U_0$ de $x_0$ para la cual $\overline{< U_0, V >}$ es compacto no vacío. Por el teorema III.4.1 hay una rebanada en $x_0$ y por el lema III.3.6 podemos encontrar una rebanada $S$ en $x_0$ y una vecindad $D$ de $e$ en $G$ tal que $DS \subset U_0$. Entonces $\overline{< DS, V >}$ es compacto y tenemos que $(V \bigcap GS) \subset < DS, V > S$, porque si $v \in V \bigcap GS$, $v = gs$ con $s \in S$ entonces $gs \in gS \subset gDS$ y como $gs \in V$ se tiene que $g \in < DS, V >$ .

Denotemos $T' = T \bigcap \overline{< DS, V >} S$ Supongamos que cada $x \in T'$ tiene una vecindad $U_x$ para la cual $U_x \bigcap V = \emptyset$ mostraremos que esto nos lleva a una contradicción.

Veamos que se cumple la siguiente igualdad $T' = \alpha(<\overline{DS, V}> \times \{x_0\})$ donde $\alpha : G \times S \to GS$ es la acción $(g, s) \mapsto gs$.

Si $gx_0 \in <\overline{DS, V}> x_0 \subseteq <\overline{DS, V}> S$ como $gx_0 \in Gx_0 = T$, tenemos que $gx_0 \in T \bigcap <\overline{DS, V}> S = T'$. Ahora, sea $m \in T \bigcap <\overline{DS, V}> S$, tal que $m = gx_0 = g's$, con $g \in G$ $g' \in <\overline{DS, V}>$ y $s \in S$.

Entonces, $x_0 = g^{-1}g's \in g^{-1}g'S$ por lo tanto $x_0 \in g^{-1}g'S \bigcap S$ y así $g^{-1}g'S \bigcap S$ es diferente del vacío; esto implica que $g^{-1}g' \in G_{x_0}$, es decir $g'x_0 = gx_0 = g's$ Entonces $x_0 = s$ Así $m = gx_0 = g'x_0$ con $g' \in <\overline{DS, V}>$ por lo tanto $m \in <\overline{DS, V}> x_0$ En virtud de que la igualdad se cumple $T'$ es compacto.

Para $x \in T'$ sea $g_x \in G$ tal que $x = g_x x_0$ Ahora $g_x^{-1}U_x$ es una vecindad de $x_0$ y usando el lema III.3.6 encontramos una rebanada $S_x$ de $x_0$, la cual es subconjunto abierto de $S$, y una vecindad $D_x$ de $e \in G$ tal que $D_x S_x$ es abierto en $X$ contenido en $g_x^{-1}U_x$. Entonces $g_x D_x S_x$ es una vecindad de $x$ y $g_x D_x S_x \bigcap V \subset U_x \bigcap V = \emptyset$. Como los conjuntos $g_x D_x S_x$, variando $x \in T'$, forman una cubierta abierta del compacto $T'$ podemos elegir una subcubierta finita $\{g_{x_n} D_{x_n} S_{x_n}\}_{n=1}^{N}$. El conjunto $S^* = \bigcap_{n=1}^{N} S_{x_n}$ es una vecindad abierta de $x_0$ en $S$, $G_{x_0}$-invariante y entonces, por el Lema III.3.5, $S^*$ es una rebanada de $x_0$

Mostremos finalmente que la vecindad tubular $GS^*$ de $T$ y $V$ son ajenos, lo cual es una contradicción. Sea $x = gs$, con $g \in G, s \in S^*$. Si $g \notin \overline{< DS, V >}$ entonces $gDS \bigcap V = \emptyset$ y $x \notin V$. Si $g \in \overline{< DS, V >}$ entonces $gx_0 \in T'$, por tanto $gx_0 \in g_{x_n} D_{x_n} S_{x_n}$ para algún $n \in \{1, ..., N\}$; pero como $S_{x_n}$ es una rebanada en $x_0$, $S_{x_n} \bigcap Gx_0 = \{x_0\}$.

Además $d_{x_n}^{-1} g_{x_n}^{-1} gx_0 \in S_n$, para algún $d_{x_n} \in D_{x_n}$, y esto implica que $d_{x_n}^{-1} g_{x_n}^{-1} g \in G_{x_0}$. Dado que $g^{-1}x \in S^*$ y $S^*$ es $G_{x_0}$-invariante, tenemos que $d_{x_n}^{-1} g_{x_n}^{-1} gg^{-1}x = d_{x_n}^{-1} g_{x_n}^{-1} x \in S^*$ por lo tanto $x \in g_{x_n} d_{x_n} S^* \subset g_{x_n} D_{x_n} S_{x_n}$. Ahora bien por hipótesis, $g_{x_n} D_{x_n} S_{x_n} \bigcap V = \emptyset$, entonces $x \notin V$. Esto completa la prueba. $\square$

**Lema III.4.4** Sean $G$ un grupo de Lie, $X$ e $Y$ $G$-espacios propios paracompactos con espacios de órbitas paracompactos, $A$ cerrado invariante de $X$ y $f : A \to Y$ equivariante. Si $V'$ es una vecindad abierta pequeña de $y \in Y$ para la cual $\overline{< V', V' >}$ es compacto y $V$ es vecindad abierta de $y$ tal que $\overline{V} \subset V'$, entonces existe un conjunto abierto $U$ en $X$ tal que $U \bigcap A = f^{-1}(V)$ y $\overline{< U, U >}$ es compacto.

**Demostración.** Denotemos $< V', V' > = N$. Entonces $N$ es una vecindad abierta de $e$. por lema II.2.8 y por hipótesis $\overline{N}$ es compacto. Dividimos la prueba en 3 partes.

*Paso I.* Para cada órbita $T \subset X$ construiremos una vecindad tubular $GS_T$, con $S_T$ una rebanada en un punto $x_T \in T$, y construimos una vecindad $U_T$ del conjunto $f^{-1}(V) \bigcap GS_T$ contenida en $GS_T$ tal que $< U_T, U_T > \subset NNN^{-1}$.

Si la órbita $T$ tiene una vecindad tubular que no corta a $f^{-1}(V)$. por ejemplo cuando $T \subset X - A$, escogemos un punto $x_T \in T$ arbitrario, una rebanada $S_T$ de $x_T$ para la cual $GS_T \bigcap f^{-1}(V) = \emptyset$ y definimos $U_T = \emptyset$.

Ahora supongamos que cada vecindad de $T$ corta $f^{-1}(V)$. Dado que $V'$ es pequeña en $Y$, $V$ es pequeña en $Y$ y por el corolario II.2.7. $f^{-1}(V)$ es pequeña en $A$. Como $A$ es cerrado invariante en $X$, $f^{-1}(V)$ es pequeña en X y por lema III.4.3, existe un punto $x_T \in T \bigcap f^{-1}(V)$ . Ahora bien $x_T \in A$, $f(x_T) \in f(f^{-1}(V) \subset \overline{V} \subset V'$ por tanto $f^{-1}(V')$ es una vecindad de $x_T$ en $A$. Enseguida elegimos una vecindad $M$ de $x_T$ en $X$ para la cual $M \bigcap A = f^{-1}(V')$. Como $G$ es de Lie, existe una rebanada $S$ del punto $x_T$ , además dado que $G_{x_T}$ es compacto y por el lema III.3.6, existe una rebanada $S_T$ en el punto $x_T$ tal que $S_T$ es abierto en $S$ y $S_T \subset M$.

Luego tenemos que $< S_T, f^{-1}(V) > \subset < M, f^{-1}(V) > = < f^{-1}(V')$ y $f^{-1}(V) > \subset N$. Así $f^{-1}(V) \bigcap GS_T \subset NS_T$.

Dado que $N$ es abierto en $G$ por lema II.2.8 y la acción $G \times S_T \to GS_T$ es abierta, el lema III.3.4 implica que $NS_T$ es abierto en $GS_T$.

De esta manera $< NS_T, NS_T >= N < S_T, S_T > N^{-1}$ por proposición II.2.2 (2). Además $gS_T \bigcap S_T \neq \emptyset$ implica que $g \in G_{x_T}$, luego $< S_T, S_T >= G_{x_T}$.

Como $x_T \in f^{-1}(V)$, $G_{x_T} \subset < f^{-1}(V), f^{-1}(V) > \subseteq < V', V' >= N$ entonces $< NS_T, NS_T > \subset NNN^{-1}$ y podemos elegir $U_T = NS_T$ completando así la primera parte de la prueba.

*Paso II.* En la segunda parte construiremos un conjunto abierto $U'$ de $X$ tal que $f^{-1}(V) \subset U'$ y $< \overline{U', U'} >$ compacto. Sea $\mathcal{U} = \{GS_T \mid T$ es órbita en $X\}$. Dado que $X/G$ es paracompacto, $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento invariante abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ elegimos una órbita $T$ tal que $W_\alpha \subset GS_T$ y denotamos $U_\alpha^* = U_T \bigcap W_\alpha$. Cada conjunto $U_\alpha^*$ es abierto en $X$, $f^{-1}(V) \subset \bigcup\{U_\alpha^* \mid \alpha \in A\}$ y $< U_\alpha^*, U_\alpha^* > \subset < U_T, U_T > \subset NNN^{-1}$.

Sea $Z'_T$ una vecindad abierta invariante de la órbita $T$ tal que $Z'_T \subset W_{\alpha_I}$ para algún $\alpha_I \in \mathcal{A}$ y $Z'_T \bigcap W_\alpha = \emptyset$ para casi todo $\alpha \in A$. Tenemos así una cubierta abierta invariante $\mathcal{Z}' = \{Z'_T \mid T$ una órbita en $X\}$. Finalmente, sea $\mathcal{Z} = \{Z_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ un refinamiento estrella de $\mathcal{Z}'$ de abiertos no vacíos invariantes, esto es, para cada $\beta \in B$ $\exists$ una órbita $T$ tal que $St(Z_\beta, \mathcal{Z}) = \bigcup\{Z_{\beta'} \mid \beta' \in B, Z_\beta \bigcap Z_{\beta'} \neq \emptyset\} \subset Z'_T$. Esto existe por la paracompacidad de $X/G$, [Du. p 167-168].

Para cada $\beta \in \mathcal{B}$ dado que $Z_\beta \subset Z'_T$ para algún $T$, $Z'_T \bigcap W_\alpha = \emptyset$ para casi todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y $Z_T \subset W_\alpha$ para algún $\alpha \in A$ tenemos que $Z_\beta \bigcap W_\alpha = \emptyset$ para casi todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y así $Z_\beta \subset W_\alpha$ para sólo un número finito de $\alpha \in \mathcal{A}$. Como $Z_\beta$ es no vacío podemos definir $\mathcal{A}_\beta = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid Z_\beta \subset W_\alpha\}$, $\mathcal{A}_\beta$ es no vacío y finito. Entonces el conjunto $U'_\beta = Z_\beta \bigcap (\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_\beta} U^*_\alpha)$ es abierto en $X$. Además $f^{-1}(V) \bigcap Z_\beta \subset f^{-1}(V) \bigcap W_\alpha \subset U^*_\alpha$ para todo $\alpha \in A_\beta$ y así $f^{-1}(V) \bigcap Z_\beta \subset U'_\beta$.

Definamos $U' = \bigcup\limits_{\beta \in \mathcal{B}} U'_\beta$. claramente $U'$ es abierto en $X$ y $f^{-1}(V) \subset U'$. Puesto que $< U', U' > = \bigcup\{< U'_\beta, U'_\gamma > \mid \beta, \gamma \in \mathcal{B}\}$, consideremos los conjuntos $< U'_\beta, U'_\gamma >$ para $\beta, \gamma \in \mathcal{B}$. Supongamos que $Z_\beta \bigcap Z_\gamma \neq \emptyset$, de otra forma $< U'_\beta, U'_\gamma > = \emptyset$. Entonces $Z_\gamma \subset St(Z_\beta, \mathcal{Z})$ y existe una órbita $T$ tal que $Z_\beta \bigcup Z_\gamma \subset Z'_T$. Pero $Z'_T \subset W_{\alpha_T}$ para algún $\alpha_T \in A$, así que $Z_\beta \subset W_{\alpha_T}$ y $Z_\gamma \subset W_{\alpha_T}$ , esto es, $\alpha_T \in \mathcal{A}_\beta$ y $\alpha_T \in \mathcal{A}_\gamma$. Por tanto $U'_\beta = Z_\beta \bigcap (\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_\beta} U^*_\alpha) \subset U^*_{\alpha_T}$. De manera semejante obtenemos $U'_\gamma \subset U^*_{\alpha_T}$ . Y así $< U'_\beta, U'_\gamma > \subset < U^*_{\alpha_T}, U^*_{\alpha_T} > \subset NNN^{-1}$. De ello se infiere que $< U', U' > \subset NNN^{-1}$ lo cual completa la segunda parte de la prueba.

*Paso III.* Finalmente mostraremos que $U = (U' \bigcap (X - A)) \bigcup f^{-1}(V)$ tiene las propiedades deseadas. Mostraremos primero que $U$ es abierto en $X$. En efecto, dado que $f^{-1}(V)$ es abierto relativo en $A$. existe $W$ abierto en $X$ tal que

$W \bigcap A = f^{-1}(V) \subset U' \bigcap A$, luego

$$U = (U' \bigcap X - A) \bigcup (U' \bigcap W \bigcap A) = U' \bigcap [(X - A) \bigcup (W \bigcap A)]$$
$$= U' \bigcap [((X - A) \bigcup W) \bigcap ((X - A) \bigcup A)] = U' \bigcap ((X - A) \bigcup W)$$

y por lo tanto $U$ es abierto en $X$.

Ahora $U \bigcap A = ((U' \bigcap (X - A)) \bigcap A) \bigcup (f^{-1}(V) \bigcap A) = f^{-1}(V)$.

Por último

$$< U, U > = < U' \bigcap (X - A), U' \bigcap (X - A) > \bigcup < U' \bigcap (X - A) , f^{-1}(V) >$$
$$\bigcup < f^{-1}(V) , U' \bigcap (X - A) > \bigcup < f^{-1}(V) , f^{-1}(V) >.$$

pero

$< U' \bigcap (X - A), f^{-1}(V) > = < f^{-1}(V) , U' \bigcap (X - A) > = \emptyset$ .

Como $f^{-1}(V) \subset U'$ y $\overline{< U', U' >}$ es compacto entonces $\overline{< f^{-1}(V), f^{-1}(V) >}$ y $\overline{< U' \bigcap (X - A), U' \bigcap (X - A) >}$ son compactos. Por tanto $\overline{< U, U >}$ es compacto. □

**Teorema III.4.5** Sean $G$ un grupo de Lie. $X$ e $Y$ $G$-espacios propios paracompactos con espacios de órbitas paracompactos, $A$ un cerrado invariante de $X$ y $f : A \to Y$ equivariante. Entonces el espacio de adjunción $Z = X \bigcup_f Y$ es un $G$-espacio propio paracompacto y $Z/G$ es paracompacto.

**Demostración.** Por la proposición III.1.5 $Z$ es un $G$-espacio. Dado que los espacios $X$ y $Y$ son paracompactos, el espacio de adjunción $Z$ es paracompacto por la proposición I.1.13. El espacio de órbitas $Z/G$ es paracompacto, porque $Z/G \simeq X/G \bigcup_{f/G} Y/G$ y por hipótesis $X/G$ y $Y/G$ son paracompactos.

Por otra parte como $Z/G$ es paracompacto de Hausdorff luego es regular, y aplicando la proposición II.2.4 es suficiente probar que $Z$ es un $G$-espacio de Cartan para que sea un $G$-espacio propio

Para cada $z \in Z$ encontraremos una vecindad $U_z$ tal que $< U_z, U_z >$ tiene cerradura compacta Sea $p : X \sqcup Y \to Z$ la proyección canónica. Consideremos dos casos:

*Caso I)* Si $z \in p(X - A)$. $p^{-1}(z) = x \in X - A$ como $X$ es un $G$-espacio propio. $x$ tiene una vecindad $U$ delgada contenida en $X - A$ . Así $p^{-1}p(U) = U$ y $p(U) = U_z$ es la vecindad requerida.

*Caso II)* Si $z \in p(Y)$, tomamos $y \in Y$ para el cual $p(y) = z$ Dado que $Y$ es $G$-propio encontramos para $y$ una vecindad pequeña $V'$ tal que $\overline{< V'. V' >}$ es compacto. Por ser $Y$ regular, existe $V$ vecindad de $y$ tal que $V \subset \bar{V} \subset V'$ y por el lema III 4.4 existe $U$ abierto de $X$ tal que $U \bigcap A = f^{-1}(V)$ y $\overline{< U. U >}$ es compacto. Claramente $p^{-1}(p(U \bigcup V) = U \bigcup V$ y es abierto en $X \sqcup Y$, así $U_z = p(U \bigcup V)$ es vecindad abierta de $z$ en $Z$ sólo falta mostrar que $\overline{< U_z. U_z >}$ es compacto. Aplicando el lema II 2.6,

$$< U_z. U_z > = < p^{-1}(U_z)\ p^{-1}(U_z) > = < U \bigcup V. U \bigcup V >$$
$$= < U,U > \bigcup < U.V > \bigcup < V,U > \bigcup < V.V > .$$

Dado que $\overline{< U.U >}$ y $\overline{< V.V >}$ son compactos y $< U.V > = < V.U > = \emptyset$ resulta que $\overline{< U_z, U_z >}$ es compacto. Así hemos probado que $Z$ es un $G$-espacio de Cartan $\square$

**Observación.** Para $G$ un grupo compacto de Hausdorff, $A$ un cerrado invariante de un $G$-espacio $X$ normal, $(X, A)$ un $G$-par y $f : A \to Y$ equivariante en un $G$-espacio de Tychonoff, el $G$-espacio $Z = X \bigcup_f Y$ es propio porque la proposición I.1.21 implica que $Z$ es de Tychonoff y siendo $G$ compacto todo conjunto de $Z$ es pequeño.

**Ejemplo.** Cualquier subgrupo cerrado $G$ del grupo ortogonal $O(n)$ es compacto porque $O(n)$ lo es; $G$ actúa en $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ y la esfera $S^{n-1}$ es un subconjunto cerrado invariante del $n$-celda.

Si $Y$ es un $G$-espacio de Tychonoff y $f : S^{n-1} \to Y$ es equivariante entonces $Z = D^n \bigcup_f Y$ es un $G$-espacio propio. A $Z$ se le llama el espacio que resulta adjuntandole a $Y$ una $n$-celda, construcción básica para la definición de complejos celulares.

# Capítulo 4

# Homotopía y cofibraciones equivariantes

En este apartado introduciremos, en la versión equivariante, los conceptos de deformación continua conocida técnicamente como homotopía y la propiedad de extensión de homotopía con que cuentan las funciones llamadas cofibraciones. En [t D] capítulo II, se sugiere estudiar cofibraciones equivariantes, para el caso no equivariante en [AGP]. A este respecto, daremos algunos resultados importantes sobre los $G$-espacios de adjunción y veremos los casos particulares del cilindro $Z_f$ y cono $C_f$ de una función equivariante $f$

### IV.1 RETRACTOS Y EXTENSIONES EQUIVARIANTES.

En los siguientes resultados supondremos que $G$ es localmente compacto y Hausdorff y consideraremos un $G$-par $(X, A)$

**Teorema IV.1.1** Sea $f : A \to Y$ equivariante. Entonces $f$ tiene una extensión equivariante $f' : V \to Y$ a una vecindad invariante $V$ de $A$ en $X$ si y sólo si $Y$ es un retracto equivariante de una vecindad $W$ de $Y$ en $Z = X \bigcup_f Y$

**Demostración.**$\Rightarrow$)Supongamos que existe $f'$ equivariante con $V$ vecindad invariante de $A$ en $X$. Sea $W = p(V) \cup Y$ con $p : X \sqcup Y \to Z$ la proyección natural. Dado que

$p^{-1}(W) = V \sqcup Y$ es un abierto de $X \sqcup Y$. $W$ es vecindad abierta de $Y$ en $Z$. Definimos $r : W \to Y$ por transgresión de $p' = p \mid V \sqcup Y$ y la función $F : V \sqcup Y \to Y$. dada por $F(v) = f'(v)$ si $v \in V$, $F(y) = y$ para $y \in Y$. En efecto como la restricción $p'$ es una identificación equivariante, $F$ es equivariante y $Fp'^{-1}(w)$ es un sólo punto de la forma $f'(v)$ o bien $y$, podemos aplicar la transgresión a $Fp^{-1}$ obteniendo una función equivariante $r$ que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd} V \sqcup Y \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, "F"] & \\ W \arrow[r, "r"] & Y \end{tikzcd}$$

Mostraremos que $r$ es la retracción equivariante buscada

$y \in Y \subset W$, $r(y) = Fp'^{-1}(y) = F\left(f'^{-1}(y) \bigcup \{y\}\right) = y$.

$\Leftarrow$)Supongamos ahora que existe $r : W \to Y$ una retracción equivariante. Entonces $V = p^{-1}(W) \bigcap X$ es un abierto invariante de $X$. Definimos $f' = rp\,|_V$. si $a \in A$ entonces $f'(a) = r(p(a)) = r(f(a)) = f(a)$. $\square$

**Corolario IV.1.2** Sea $f : A \to Y$ equivariante. Entonces $f$ tiene una extensión equivariante a $X$, si y sólo si $Y$ es retracto equivariante de $Z = X \bigcup_f Y$.

**Demostración.** En la prueba anterior si $V = X$ y $W = Z$, de donde se sigue el resultado e inversamente. $\square$

Sea $\mathcal{C}$ una clase topológica débilmente hereditaria. es decir si $X \in \mathcal{C}$ todo espacio homeomorfo a $X$ pertenece a $\mathcal{C}$ y todo subespacio cerrado de $X$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Denotaremos por $G$-$\mathcal{C}$ la clase de todos los $G$-espacios $X$ tales que $X$ como espacio topológico pertenece a $\mathcal{C}$.

**Definición IV.1.3** Un $G$-espacio $Y$ es llamado un $G$**-extensor absoluto de vecindad** para $\mathcal{C}$ o brevemente $G - ANE(\mathcal{C})$ (resp. $G$**-extensor absoluto** para

$\mathcal{C}$ ó $G - AE(\mathcal{C})$) si para cada $X \in G\text{-}\mathcal{C}$ y cada subconjunto cerrado invariante $A$ de $X$, toda función equivariante $f : A \to Y$ puede ser extendida a una función equivariante $f : U \to Y$, donde $U$ es una vecindad invariante de $A$ en $X$ (resp. $U = X$).

**Definición IV.1.4** Un $G$-espacio $Y$ es llamado un **$G$-retracto absoluto de vecindad** para $\mathcal{C}$ o un $G - ANR(\mathcal{C})$ (resp. un **$G$-retracto absoluto** para $\mathcal{C}$ o un $G$ - $AR(\mathcal{C})$), si $Y \in \mathcal{C}$ y siempre que $Y$ sea un cerrado invariante de un $Z \in G\text{-}\mathcal{C}$, entonces $Y$ es un retracto equivariante de alguna vecindad de $Y$ en $Z$ (respectivamente, un retracto equivariante de $Z$).

**Proposición IV.1.5** Sean $\mathcal{N}$ la clase de los espacios normales de Hausdorff $G$ un grupo de Hausdorff localmente compacto y $Y$ un $G$-espacio con $Y \in \mathcal{N}$. Entonces $Y \in G - ANE(\mathcal{N})$ si y sólo si $Y \in G - ANR(\mathcal{N})$.

**Demostración.** $\Rightarrow$)Siempre se cumple para toda clase.

$\Leftarrow$)Sea $(X, A)$ $G-$par, $X \in \mathcal{N}$ y $f : A \to Y$ equivariante, probemos que $f$ tiene una extensión equivariante a una vecindad invariante de $A$ en $X$. Por teorema IV.1.1 basta probar que $Y$ es retracto de una vecindad $W$ de $Y$ en $Z = X \cup_f Y$, lo cual se cumple. En efecto, por hipótesis, $Y \in G - ANR(\mathcal{N})$ y $Y$ es cerrado en el $G$-espacio $Z$ por ser $p|_Y : Y \to Z$ un encaje cerrado, además por el teorema I.1.22 $Z$ es un espacio normal $\square$

## IV.2 G-HOMOTOPÍAS Y G-COFIBRACIONES.

Para $X$ un $G$-espacio se considerará en $X \times I$ la acción diagonal de $G$ con $G$ actuando trivialmente en $I$.

**Definición IV.2.1** Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ dos funciones equivariantes entre $G$-espacios. Si existe $H : X \times I \to Y$ equivariante tal que para todo $x \in X$, $H(x,0) = f_0(x)$ y $H(x,1) = f_1(x)$ se dice que $f_0$ y $f_1$ son $G$-**homotópicas**, lo cual se denota por $f_0 \underset{G}{\simeq} f_1$. Si además para algún conjunto invariante $E$ de $X$, $H(x,t) = f_0(x)$ para todo $x \in E$ se dice que $G$ es una homotopía equivariante relativa a $E$ y se escribe $f_0 \underset{G}{\simeq} f_1$ rel $E$.

Como en el caso no equivariante, la relación $\underset{G}{\simeq}$ es una relación de equivalencia. La homotopía equivariante $H : X \times I \to Y$ se denota también por la familia de funciones equivariantes $\{h_t : X \to Y\}_{t \in I}$ dadas por $h_t(x) = H(x.t)$.

Sea $A$ un conjunto invariante de un $G$-espacio $X$. Si existe una homotopía equivariante $H : X \times I \to X$ tal que $h_0$ es la función idéntica y $h_1$ es una retracción de $X$ sobre $A$ seguida de la inclusión de $A$ en $X$ entonces el subespacio $A$ es llamado un $G$-**retracto por deformación** de $X$. Si además la homotopía es relativa a $A$, se dice que $A$ es un $G$-**retracto fuerte por deformación** de $X$.

Dada una función equivariante $f : X \to Y$, consideramos $Z_f$ su cilindro, $p : X \times I \sqcup Y \to Z_f$ la proyección natural y los encajes cerrados equivariantes $k : X \hookrightarrow Z_f$, $k(x) = p[(x,1)]$ e $i : Y \hookrightarrow Z_f$, $i(y) = p(y)$, los cuales nos permiten identificar $X$ con $k(X)$ y $Y$ con $i(Y)$, así $X$ e $Y$ son cerrados ajenos de $Z_f$.

**Proposición IV.2.2** Sean $f : X \to Y$ equivariante, $Z_f$ su cilindro e $i$ la inclusión de $Y$ en $Z_f$. Entonces existe retracción equivariante $r : Z_f \to Y$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & Z_f \arrow[d, shift left, "r"] \\
 & Y \arrow[u, shift left, "i"]
\end{tikzcd}
$$

con $k(x) = [x, 1]$. Más aún $ir \underset{G}{\simeq} id_{Z_f}$, es decir $Y$ es un $G$-retracto fuerte por deformación de $Z_f$.

**Demostración.** Tenemos que $f' : X \times I \to Y$ definida por $f'(x,t) = f(x)$ para todo $t$, es extensión equivariante de $f$, por el corolario IV.2.1 existe una retracción equivariante $r : Z_f \to Y$. Por tanto $ri = id_Y$.

Sea $F : Z_f \times I \to Z_f$ definida por

$$F(z, t') = \begin{cases} [x, tt'] \text{ si } z = [x, t] \\ y \text{ si } z = y \in Y \end{cases}$$

Comprobemos primero que $F$ está bien definida.

$F([x,0], t) = [x, 0] = [f(x)] = F(f(x), t)$

La continuidad de $F$ resulta de la continuidad de $Fp\,|_{X \times I \times I}$ y de $Fp\,|_{Y \times I}$. Veremos que $ir \simeq id_{Z_f}$ rel $Y$.

i)$F([x,t], 0) = [(x, 0] = [f(x)] = i([f(x)]) = ir([x,t])$.

ii)$F([x,t], 1) = [(x,t)] = id_{Z_f}$.

iii)$F([y], t) = [y] = ir[y]$. □

A continuación introduciremos la versión equivariante de la propiedad de extensión de homotopía, abreviada $PEH$

**Definición IV.2.3** (Propiedad de la extensión de homotopía equivariante).Un **$G$-par** $(X, A)$ tiene la **$PEH$-equivariante respecto a un $G$-espacio** $W$, si dadas $f : X \to W$ y $H : A \times I \to W$ equivariantes que cumplen $H(a, 0) = f(a)$ para todo $a \in A$, existe $H' : X \times I \to W$ equivariante tal que $H'(a,t) = H(a,t)$ para todo $a \in A$, $t \in I$ y además $H'(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$; es decir la homotopía equivariante $H$ que empieza con $f\downharpoonright_A$ puede extenderse a una homotopía $H'$ que empieza con $f$. Esto es, $H'$ hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A\times\{0\} \arrow[rr, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & A\times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& W & \\
X\times\{0\} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & X\times I \arrow[ul, "H'"']
\end{tikzcd}$$

Cuando $(X, A)$ tiene la $PEH$–equivariante para todo $G$-espacio se dirá simplemente que $(X, A)$ tiene la **$PEH$-equivariante.**

**Lema IV.2.4** Para $G$ de Hausdorff localmente compacto y $(X, A)$ un $G$-par. son equivalentes:

$(a)$ $(X, A)$ tiene la $PEH-$ equivariante respecto a un $G$-espacio $W$

$(b)$ Toda función equivariante $X\times\{0\}\bigcup A\times I\rightarrow W$ tiene una extensión equivariante a $X\times I$.

**Demostración.** $(a)\Rightarrow(b)$ Dada $F : X\times\{0\}\bigcup A\times I\rightarrow W$ equivariante. definiendo $f = F\mid_{X\times 0}$ y $H = F\mid_{A\times I}$ obtenemos el diagrama de funciones equivariantes

$$\begin{tikzcd}
A\times\{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & A\times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& W & \\
X\times\{0\} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & X\times I
\end{tikzcd}$$

por (a) existe $H' : X\times I\rightarrow W$ equivariante que extiende a $H$ y empieza en $f$ claramente $H'$ es una extensión equivariante de $F$.

$(b)\Rightarrow(a)$ Dadas ahora, $f$ y $H$ que hacen conmutativo el diagrama anterior. sea $F : X\times\{0\}\bigcup A\times I\rightarrow W$, definida por $F(x.0) = f(x.0)$ y $F(a.t) = H(a.t)$. Obviamente cualquier extensión equivariante $H'$ de $F$ a $X \times I$ es una homotopía equivariante que extiende a $H$ y comienza con $f$. $\square$

**Proposición IV.2.5** Para $G$ de Hausdorff localmente compacto y $(X, A)$ un $G$-par, son equivalentes:

($a$) $(X, A)$ tiene la $PEH-$ equivariante

($b$) $X \times \{0\} \bigcup A \times I$ es retracto equivariante de $X \times I$.

**Demostración.** ($a$) $\Rightarrow$ ($b$) Supongamos que $(X, A)$ tiene la $G - PEH$ respecto a todo espacio, en particular respecto a $X \times \{0\} \bigcup A \times I$. Por el lema anterior la función identidad de $X \times \{0\} \bigcup A \times I$ tiene una extensión equivariante $X \times I \to X \times \{0\} \bigcup A \times I$ que obviamente es una retracción.

($b$) $\Rightarrow$ ($a$) Sea $W$ cualquier $G$-espacio. Para probar que $(X, A)$ tiene la $PEH$-equivariante respecto a $W$ basta probar por el lema anterior, que una función equivariante $F : X \times \{0\} \bigcup A \times I \to W$ arbitraria tiene una extensión equivariante a $X \times I$

Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \times I \arrow[dr] & \\ X \times \{0\} \bigcup A \times I \arrow[ur, "r"] \arrow[rr, "F"] & & W \end{tikzcd}$$

donde $r$ es retracción equivariante.

Obviamente $F \circ r$ es extensión equivariante de $F$. $\square$

**Teorema IV.2.6** *(Teorema de Borsuk en versión equivariante).* Sean $G$ compacto de Hausdorff y $(X, A)$ un $G$-par con $X \in \mathcal{N}$. Entonces $(X, A)$ tiene la $PEH-$equivariante respecto a todo espacio $G - ANR(\mathcal{N})$

**Demostración.** Sea $W \in G - ANR(\mathcal{N})$ esto implica que $W \in G - ANE(\mathcal{N})$. Por el lema IV 2.4 basta probar que toda función equivariante $F : X \times \{0\} \bigcup A \times I \to W$ tiene una extensión equivariante a $X \times I$. Como $W \in G - ANE(\mathcal{N})$ existe vecindad invariante $U$ de $X \times \{0\} \bigcup A \times I$ en $X \times I$ y una extensión equivariante $F' : U \to W$ de $F$.

Tenemos que $A \times I \subset U \subset X \times I$, y por ser $I$ compacto existe $V'$ vecindad abierta de $A$ en $X$ tal que $A \times I \subset V' \times I \subset U$. Como $G$ es compacto, existe una vecindad abierta invariante $V$ de $A$ tal que $V \subset V'$, esto implica que $A \times I \subset V \times I \subset U$.

Puesto que $X$ es normal, por el Lema de Urysohn existe una función continua $\varphi : X \to I$ tal que $\varphi(A) = 1$ y $\varphi(X \backslash V) = 0$. Mediante la integral de Haar, $\Psi(x) = \int_G \varphi(gx)dg$ resulta de la proposición II.1.10 que $\Psi : X \to I$ es equivariante con $G$ actuando trivialmente en $I$ y $\Psi(A) = 1$, $\Psi(X \backslash V) = 0$. Finalmente, la función $R : X \times I \to X \times \{0\} \cup V \times I$, dada por $R(x,t) = (x, t\Psi(x))$, es equivariante porque $R(g(x,t)) = R((gx,t)) = (gx, t\Psi(gx)) = (gx, t\Psi(x)) = gR(x,t)$.

Veamos que $F'R$ es extensión de $F$ :

Para todo $x \in X$ se tiene que $F'R(x,0) = F'(x,0) = F(x,0)$, y para $a \in A$ y $t \in I$, tenemos $F'R(a,t) = F'(a,t) = F(a,t)$. $\square$

En $G$ -TOP, la categoría de $G$-espacios y funciones equivariantes, al igual que en la categoría TOP, de espacios topológicos y funciones continuas, se tiene la definición de cuadrado cocartesiano o push-out y el hecho de que $Z = X \bigcup_f Y$ es un push-out en $G$-TOP, el cual para TOP se demostró en la proposición I.1.20.

**Definición IV.2.7** El diagrama conmutativo de $G$-espacios y funciones equivariantes

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ X \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & Z \\ & Y_2 \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

es un cuadrado $G$-**cocartesiano** o $G$-**push-out** si para todo $G$-espacio $W$ y $\xi_j : Y_j \to W$ equivariante $j = 1, 2$ tales que $\xi_1\varphi_1 = \xi_2\varphi_2$ existe una única función equivariante $\xi : Z \to W$ que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y_1 & & \\ & \varphi_1 \nearrow & & \downarrow\psi_1 \searrow \xi_1 & \\ X & & Z & \overset{\xi}{\dashrightarrow} & W \\ & \varphi_2 \nwarrow & & \uparrow\psi_1 \nearrow \xi_2 & \\ & & Y_2 & & \end{array}$$

De la definición se sigue que $Z$ es único salvo por homeomorfismos equivariantes.

**Proposición IV.2.8** Si $(X, A)$ es un $G$-par y $f : A \to Y$ equivariante entonces es $G$-cocartesiano el cuadrado

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \imath \nearrow & & \searrow p_X & \\ A & & & & Z \\ & f \searrow & & \nearrow p_Y & \\ & & Y & & \end{array}$$

donde $Z = X \bigcup_f Y$, $p_X = p\,|_X$, $p_Y = p\,|_Y$ con $p : X \sqcup Y \to Z$ la proyección natural

**Demostración.** La demostración es igual que en la proposición I.1.20 pidiendo equivariancia a las funciones, puesto que la transgresión en teoría equivariante también se cumple como lo vimos en el teorema III.1.1. $\square$

**Definición IV.2.9** Una función equivariante $\varphi : A \to X$ entre dos $G$-espacios $A$ y $X$ es una $G$-**cofibración** si para todo $G$-espacio $W$ y todo par de funciones equivariantes $f : X \to W$ y $H : A \times I \to W$ que cumplen $H(a, 0) = f(\varphi(a))$, $\forall a \in A$, existe una homotopía equivariante $\widehat{H} : X \times I \to W$, tal que $\widehat{H}(\varphi(a), t) = H(a,t)$ y $\widehat{H}(x,0) = f(x)$, para todo $a \in A, x \in X$ y $t \in I$. El diagrama correspondiente es:

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dd, "\varphi \times id_{\{0\}}"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"] \arrow[dd, "\varphi \times id_I"] \\
& W & \\
X \times \{0\} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[ur, "f"] & & X \times I \arrow[ul, "\widehat{H}"']
\end{tikzcd}$$

De la definición se sigue si $(X, A)$ es un $G$-par con la $PEH-$ equivariante entonces la inclusión $i : A \to X$ es una $G-$cofibración. De hecho el siguiente resultado nos dice que las $G-$cofibraciones son todas inclusiones equivariantes salvo por $G-$homeomorfismos.

**Proposición IV.2.10** La función $k : X \to Z_f$, $k(x) = [x, 1]$ de la proposición IV.2.2, es una $G$-cofibración.

**Demostración.** Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[d, "\Phi"'] & \\
W & Z_f \times I \arrow[l, dashed, "\Phi'"'] \\
Z_f \arrow[u, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

con $\varphi(k(x)) = \varphi([x, 1]) = \Phi(x, 0)$.

Definamos $\Phi'$ como $\Phi'([y], s) = \varphi([y])$ para $y \in Y$, y

$$\Phi'([x,t], s) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi(x, s - (1-s)(1-t)/t) \text{ si } t + s \geq 1 \\ \varphi[(x, t + st/(1-s))] \text{ si } t + s \leq 1 \end{array} \right\}$$

Veamos que $\Phi'$ está bien definida. En efecto, si $[y] = [(x, 0)]$ entonces

$\Phi'([y], t) = \varphi([y]) = \varphi[(x,0)] = \Phi'[(x,0), t]$.

Además tenemos que

$\Phi'(k(x),t) = \Phi'([x,1],t) = \Phi(x,t)$ y $\Phi'([y],0) = \varphi[y]$ .

Por último que coinciden cuando $t+s=1$, puesto que

$\Phi(x, s - ts/t) = \Phi(x,0) = \varphi([x,1]) = \varphi[(x, t + st/t)]$.

Así $k$ es una $G$-cofibración. □

De lo anterior podemos decir que toda función equivariante $f$ seguida de la inclusión $i$ es del mismo tipo de $G$-homotopía que una $G$-cofibración.

**Proposición IV.2.11** Sean $G$ un grupo de Hausdorff localmente compacto, $f: X \to Y$ equivariante y $Z_f$ su cilindro, entonces existe una única función equivariante $F: Z_f \to Y \times I$ tal que $F \circ p\,|_{X\times I} = f \times id_I$ y $F \circ p\,|_Y = i_0$ (con $i_0(y) = (y,0)$ y $p: X \times I \sqcup Y \to Z_f$ la proyección natural).

**Demostración.** Sea $F: Z_f \to Y \times I$ como sigue:

$$F(z) = \begin{cases} (f(x),t) \text{ si } z = p(x,t) \\ (y,0) \text{ si } z = p(y) \end{cases}$$

la cual está bien definida, puesto que si $p(x,t) = p(y)$ se tiene que $y = f(x)$ y $t = 0$ , entonces $F[p(x,t)] = (f(x),0) = (y,0) = F[p(y)]$.

Para verificar la continuidad de $F$ observamos que como $F \circ p: X \times I \sqcup Y \to Y \times I$ es equivariante porque son equivariantes $F \circ p\,|_{X\times I} = f \times id_I$ y $F \circ p\,|_Y = i_0$.

Es fácil ver que la función es única y cumple con las condiciones requeridas. □

**Proposición IV.2.12** Sea $f: X \to Y$ equivariante, y sean $p: X \times I \sqcup Y \to Z_f$, $j_0: X \hookrightarrow X \times I$ con $j_0(x) = (x,0)$ y $i_0: Y \hookrightarrow Y \times I$ definida por $i_0(y) = (y,0)$.

(a) Si $(Y, f(X))$ tiene la $G-PEH$ respecto a $Z_f$ entonces existe $H: Y \times I \to Z_f$ equivariante tal que $H \circ (f \times id_I) = p\,|_{X\times I}$, $H \circ i_0 = p\,|_Y$ y $H \circ F = id_{Z_f}$ con $F$ dada en la proposición anterior.

(*b*) Si existen $F$ y $H$ equivariantes definidas como antes y cumplen que $H \circ F = id_{Z_f}$ y $H \circ (f \times id_I) = p\,|_{X \times I}$, $H \circ i_0 = p\,|_Y$ entonces $f$ es una $G$-cofibración.

**Demostración.** (*a*) Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "j_0"] \arrow[dd, "f"'] & & X \times I \arrow[dl, "p_{X\times I}"] \arrow[dd, "f \times id_I"] \\
& Z_f \arrow[dr, "F"'] & \\
Y \arrow[ur, "p_Y"] \arrow[rr, hook, "i_0"'] & & Y \times I \arrow[ul, bend right, "H"']
\end{tikzcd}$$

dado que $(Y, f(X))$ tiene la $G-PEH$ respecto a $Z_f$. $p\,|_Y$ y $p\,|_{X \times I}$ determinan una $G$-homotopía $H$ que hace el diagrama conmutativo.

Veamos que $H \circ F = id_{Z_f}$.

$H\left(F(p(x,t))\right) = H\left((f(x),t\right) = H\left((f \times id)(x,t)\right) = p(x,t) = [x,t]$.

$H\left(F(p(y))\right) = H(y,0) = H \circ i_0(y) = p(y) = [y]$.

(*b*) Para cualquier $G$-espacio $W$, dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "j_0"] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & & X \times I \arrow[dl, "\Phi"] \arrow[dd, "f \times id_I"] \\
& W & \\
Y \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, hook, "i_0"'] & & Y \times I
\end{tikzcd}$$

por encontrar $\Phi' : Y \times I \to W$ equivariante que cumple $\Phi' \circ (f \times id_I) = \Phi$ y $\Phi' \circ i_0 = \varphi$.

Por la proposición IV.2.8 dado el diagrama en $G$-TOP

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j_0"] \arrow[dd, "f"'] & & X\times I \arrow[dl, "\Phi"'] \arrow[dd, "p_{X\times I}"] \\ & W & \\ Y \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "p_Y"'] & & Z_f \end{tikzcd}$$

existe $\Psi : Z_f \to W$ que lo hace conmutativo.

Defina $\Phi' : Y \times I \to W$ como $\Phi' = \Psi \circ H$ por tanto es equivariante y satisface $\Phi' \circ (f \times id_I) = \Psi \circ H \circ (f \times id_I) = \Psi \circ p_{X\times I} = \Phi$ y $\Phi' \circ i_0 = \Psi \circ H \circ i_0 = \Psi \circ p_Y = \varphi$.
y por lo tanto $f$ es una $G$-cofibración. $\square$

**Proposición IV.2.13** Toda $G-$cofibración $\varphi : A \to X$ es un encaje equivariante y $(X, \varphi(A))$ es un $G-$par con la $PEH-$equivariante.

**Demostración.** Sean $F : Z_f \to Y \times I$ y $H : Y \times I \to Z_f$, como en la proposicion IV.2.12, $H \circ F$ es la identidad en $Z_f$. Así $F$ define una función equivariante de $Z_f$ sobre $F(Z_f) = f(X) \times I \bigcup Y \times 0 \subset Y \times I$

Ya que $p\mid_{X\times 1}$ es homeomorfismo de $X \times \{1\}$ sobre $p(X \times \{1\})$, se tiene por la definición de $F$ en la proposición IV 2.11 un homeomorfismo $F \circ p\mid_{X\times\{1\}} : X \times \{1\} \to f(X) \times \{1\}$ Pero dado que $X \times \{1\}$ y $f(X) \times \{1\}$ son homeomorfos se tiene que $f$ es un homeomorfismo sobre su imagen y por lo tanto $f$ es un encaje equivariante. $\square$

# Bibliografía


[Ab] Abels, H. *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups,* Math. Ann., No. 212 (1974), pp. 1-19.

[ADQ] Ayala, R., Dominguez, E., Quintero,A., *Elementos de la topología general.* Addison-Wesley Iberoamericana, (1997).

[AGP] Aguilar, M., Gitler. S., Prieto, C. *Topología Algebraica.* Mc Graw-Hill, (1998).

[An] Antonian, S. *Equivariant embeddings into G-AR's,* Glasnik Mat. , Vol 22. No 42 (1987), pp. 503-533.

[An1] Antonian,S , *The Banach-Mazur Compacta are Absolute Retracts.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol.46. No 2. (1998).

[Bre] Bredon, G. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press. (1972).

[Du] Dujundji J. *Topology.* Allyn and Bacon Inc.. Boston (1966)

[Elf] Elfving. E. *The G-homotopy type of proper locally linear G-manifolds.* Ann.Acad. Sci. Fenn., Math Dissertationes 108. (1996).

[En] Engelking R. *General Topology.* Heldermann Verlag Berlin. (1989).

[GM-T] García-Máynez, A , Tamariz Mascarúa, A *Topología General.* Porrúa, México. (1988).

[Ha] Hanner , O. *Retraction and extension of mappings of metric and non metric spaces.* Arkiv. Math. Vol. 2 (1952) pp. 315-360

[Hu] Hu S T *Elements of general topology* Holden-Day, Inc (1965)

[Ka] Kawakubo, K. *The theory of transformation groups,* Oxford University Press (1991).

[dN] De Neymet, S. *Grupos Topológicos de Transformaciones,* Apuntes del curso "Grupos Topológicos de Transformaciones", Facultad de Ciencias UNAM, 1996.

[Pa1] Palais, R., *The classification of G-spaces,* Mem. Amer. Math. Soc., No. 36 (1960).

[Pa2] Palais, R., *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups,* Ann. Math., No. 73 (1961), pp. 295-323..

[Sa] Salicrup, G., *Introducción a la topología,* Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Textos Nivel Medio (1997).

[tD] tom Dieck, T. *Transformation groups,* Walter de Gruyter. (1987).

# Índice de Materias