

03073

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

3

CENTRO DE INVESTIGACION EN ENERGIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**ESTUDIO TEORICO DE UN GENERADOR
MAGNETOHIDRODINAMICO ALTERNO ACOPLADO
A UNA FUENTE SOLAR**

T E S I S

QUE PARA OPTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRO EN ENERGIA SOLAR

P R E S E N T A:

RAUL ALEJANDRO AVALOS ZUÑIGA

DIRECTOR DE TESIS: **DR. SERGIO CUEVAS GARCIA**

2001

TEMIXCO, MORELOS

2001



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice General

INTRODUCCIÓN	4
Capítulo 1. Los Generadores MHD como Máquinas Térmicas	6
1.1. Antecedentes	6
1.2. Principales sistemas solares de potencia MHD	7
1.3. Máquina termoacústica MHD	9
1.4. Factibilidad de Acoplamiento de una Máquina Termoacústica MHD a un sistema solar	12
Capítulo 2. Fundamentos de Magnetohidrodinámica	15
2.1. Ecuaciones del Campo Electromagnético	15
2.2. Ecuaciones de Balance de un Medio Continuo	17
2.3. Aproximación MHD	20
2.4. Ecuaciones Fundamentales de la MHD	21
Capítulo 3. Flujos Oscilatorios MHD en Capa Límite	24
3.1. Flujos en capa límite en ausencia de campos magnéticos	25
3.2. Flujos en capa límite en presencia de campos magnéticos	29
Capítulo 4. Análisis del Generador MHD y de su Acoplamiento a un Sistema Solar	40
4.1. Modelo unidimensional de un generador MHD alterno	40
4.2. Análisis del acoplamiento del generador MHD a un sistema solar	49
4.3. Modelo bidimensional de un generador MHD alterno	52
Capítulo 5. Conclusiones	67
Bibliografía	69

Resumen

Se realizó un estudio teórico de un generador eléctrico termoacústico magnetohidrodinámico (MHD) que puede acoplarse a un sistema de potencia solar. Se estudió el comportamiento de los flujos oscilatorios de fluidos conductores bajo un campo magnético que tienen lugar en el ducto del generador MHD. Por un lado, se analizó el flujo laminar oscilatorio en la región de capa límite, bajo un campo magnético transversal y se obtuvieron soluciones analíticas desde distintos sistemas de referencia. Se encontró que a pesar de la naturaleza no inercial de los sistemas de referencia, en algunos casos existen transformaciones similares a las Galileanas. Asimismo, se elaboró un modelo unidimensional del generador MHD a partir del flujo de Hartmann oscilatorio y se obtuvo una expresión analítica de su eficiencia. Con esta eficiencia y la de los componentes de un sistema de concentración solar se pudo estimar la eficiencia global del sistema de potencia.

Se realizó también un análisis numérico bidimensional del flujo oscilatorio bajo un campo magnético transversal en un ducto de sección transversal rectangular, cuando las paredes son aislantes o bien conductoras delgadas. Se encontró que los efectos inerciales dan lugar a altas velocidades en la capa límite lateral (paralela al campo) cuando las paredes del ducto son aislantes. Cuando éstas son conductoras delgadas, las altas velocidades que aparecen en el caso estacionario, desaparecen al intensificarse los efectos inerciales. Tentativamente puede afirmarse que el flujo oscilatorio MHD en ductos con paredes conductoras delgadas podría ser más estable que con paredes aislantes.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realiza un estudio teórico de un generador eléctrico alterno magneto-hidrodinámico (MHD) que puede acoplarse a una fuente calorífica solar. El estudio está encaminado a profundizar la comprensión del funcionamiento de este tipo de dispositivos y determinar los principales factores que afectan su desempeño y su acoplamiento a una fuente solar.

Los generadores alternos MHD transforman la energía del movimiento oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor bajo un campo magnético, en energía eléctrica. En los dispositivos estudiados aquí el movimiento oscilatorio del fluido se obtiene por medio de una máquina termoacústica que transforma calor en energía mecánica, estrictamente, en potencia acústica. Debido a que las temperaturas necesarias para su funcionamiento se encuentran dentro del intervalo de temperaturas de las tecnologías solares existentes, estas máquinas pueden ser acopladas a fuentes solares tales como colectores parabólicos.

A nivel internacional, existe un extenso programa de investigación y desarrollo de las máquinas termoacústicas; en particular, en el Centro de Investigación en Energía de la UNAM, se han desarrollado estudios interesantes encaminados a la comprensión de los fenómenos básicos involucrados en el funcionamiento de las máquinas termoacústicas. Sin embargo, un aspecto que ha sido muy poco explorado, es el comportamiento dinámico de los flujos oscilatorios de fluidos conductores bajo un campo magnético, que tienen lugar en un generador termoacústico MHD. Este aspecto es precisamente uno de los que se aborda en esta tesis, ya que es de fundamental importancia tanto para la comprensión del funcionamiento de estos generadores como para el desarrollo de modelos que permitan elaborar diseños factibles de los mismos. El estudio de los flujos que se presentan en el generador MHD y por lo tanto el diseño de estos dispositivos, necesariamente se basa en la teoría MHD aplicada a metales líquidos.

El otro aspecto que se aborda en esta tesis, a saber, el acoplamiento de las máquinas termoacústicas a una fuente solar, se basa en el conocimiento de los requerimientos térmicos de tales máquinas y en el análisis de una propuesta específica de utilización del recurso solar.

El trabajo está dividido en cinco capítulos que se describen brevemente a continuación:

En el capítulo 1 se presenta un panorama general de los sistemas MHD de conversión de energía, particularmente de aquellos que utilizan metales líquidos como fluido de trabajo en un intervalo de temperaturas que los hacen susceptibles de ser acoplados a fuentes solares. Asimismo, se describe el funcionamiento de las máquinas termoacústicas MHD. Posteriormente se realiza un

análisis de los parámetros de interés de la máquina termoacústica MHD que determinan la factibilidad de acoplamiento a una fuente calorífica solar, tales como las temperaturas de la fuente y del sumidero, los flujos de calor a la temperatura caliente y fría y la potencia de salida de la máquina. A partir de lo anterior, se presenta una propuesta de acoplamiento de una máquina termoacústica MHD con un sistema de concentración solar que transfiere la energía por medio de una fibra óptica

En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones del campo electromagnético y las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos, y a partir de ellas se obtienen las ecuaciones fundamentales de la MHD utilizando lo que se conoce como la aproximación MHD. Estas ecuaciones fundamentales se utilizan posteriormente en la modelación del generador eléctrico MHD.

En el capítulo 3, se inicia el estudio de los flujos oscilatorios que tienen lugar en un generador eléctrico MHD alterno. Se realiza el análisis del flujo laminar oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor en un ducto rectangular, inmerso en un campo magnético uniforme transversal, en la región de capa límite. Primero se presentan las ecuaciones básicas de la MHD en forma adimensional y se simplifican utilizando la aproximación de bajo número de Reynolds magnético que, esencialmente supone que el campo magnético no se ve alterado por el movimiento del fluido. Se analiza entonces el flujo de capa límite un fluido conductor en un campo magnético transversal en régimen laminar. Posteriormente, se obtienen y discuten diversas soluciones desde distintos sistemas de referencia. El estudio de los flujos oscilatorios MHD en capa límite es de gran importancia ya que es en esta región donde se concentran esencialmente los efectos disipativos que evidentemente afectan la eficiencia del generador.

En el capítulo 4, se presenta la solución analítica para el flujo oscilatorio MHD en un canal MHD unidimensional, lo que se conoce como el flujo de Hartmann oscilatorio. A partir de esta solución, se elabora un modelo sencillo del generador MHD y se obtienen expresiones analíticas para la corriente total, la potencia de flujo, la potencia eléctrica de salida y la eficiencia eléctrica. Con base en esta última y en un modelo de concentración solar basado en fibra óptica, se analiza la eficiencia total del sistema MHD termoacústico solar. Posteriormente, con el fin de determinar el efecto de la resistencia eléctrica de las paredes del ducto resonador, se formula el problema para el flujo oscilatorio bidimensional completamente desarrollado de metal líquido en un ducto rectangular bajo un campo magnético uniforme transversal en régimen laminar. Se obtiene una solución numérica para el flujo en la región del núcleo-capa límite lateral con condiciones de frontera para paredes conductoras delgadas así como para paredes aislantes. Se presentan entonces soluciones numéricas para diferentes intensidades de campo magnético, frecuencia de oscilación, así como para diferentes valores de conductividad eléctrica de las paredes.

Finalmente, en el capítulo 5 se establecen las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 1

Los Generadores MHD como Máquinas Térmicas

1.1. Antecedentes

La producción de electricidad mediante sistemas de conversión directa de energía acoplados a una fuente alterna de energía ha sido uno de los principales retos tecnológicos recientes.

Entre los diversos métodos de conversión directa de energía térmica en eléctrica, tales como la generación termoeléctrica o la termoiónica, el método magnetohidrodinámico (MHD) presenta diversas ventajas atractivas. En esencia este método consiste en hacer pasar un fluido conductor a través de un campo magnético uniforme, transversal al movimiento, generándose así una corriente eléctrica al cortar el fluido conductor el flujo magnético. El generador eléctrico MHD es un dispositivo que convierte energía mecánica (y/o térmica) en energía eléctrica mediante la interacción de un fluido eléctricamente conductor con un campo magnético. El generador MHD típico (ver figura 1.1) consiste de un ducto de sección transversal rectangular, inmerso en un campo magnético externo, por donde fluye el fluido conductor. Las paredes transversales al campo son aislantes eléctricos mientras que las paralelas al campo son electrodos conectados a un circuito externo. El movimiento relativo del fluido y el campo induce una corriente eléctrica directa que puede ser extraída a través del circuito externo. Una de las ventajas evidentes en este tipo de dispositivos, además de la simplicidad de diseño, es la ausencia de partes mecánicas móviles lo que permite alcanzar altas eficiencias de conversión que superan a las eficiencias de los generadores convencionales. De hecho el generador MHD combina en un diseño muy simple las funciones de una turbina y de un generador convencionales [1].

La temperatura a la que trabajan los sistemas MHD está determinada esencialmente por el fluido de trabajo utilizado. Una opción es utilizar un gas ionizado o plasma, pero debido a que se requieren muy altas temperaturas para que el plasma alcance una conductividad eléctrica adecuada, los sistemas MHD que utilizan este fluido conductor requieren fuentes caloríficas convencionales o bien nucleares [1]. La posibilidad de trabajar a temperaturas más bajas se presenta al utilizar metales líquidos como fluidos de trabajo. La utilización de un metal líquido presenta ventajas respecto al gas ionizado sobre todo en lo que respecta a la conductividad eléctrica del fluido. De hecho, la conversión de energía MHD basada en metales líquidos es uno de los métodos más prometedores para convertir la energía térmica de fuentes de calor de baja temperatura, como las solares o las geotérmicas, en energía eléctrica [2]. El desarrollo de esta tecnología se ha dado principalmente a través de los generadores MHD de metal líquido en una o dos fases que se incorporan a un ciclo

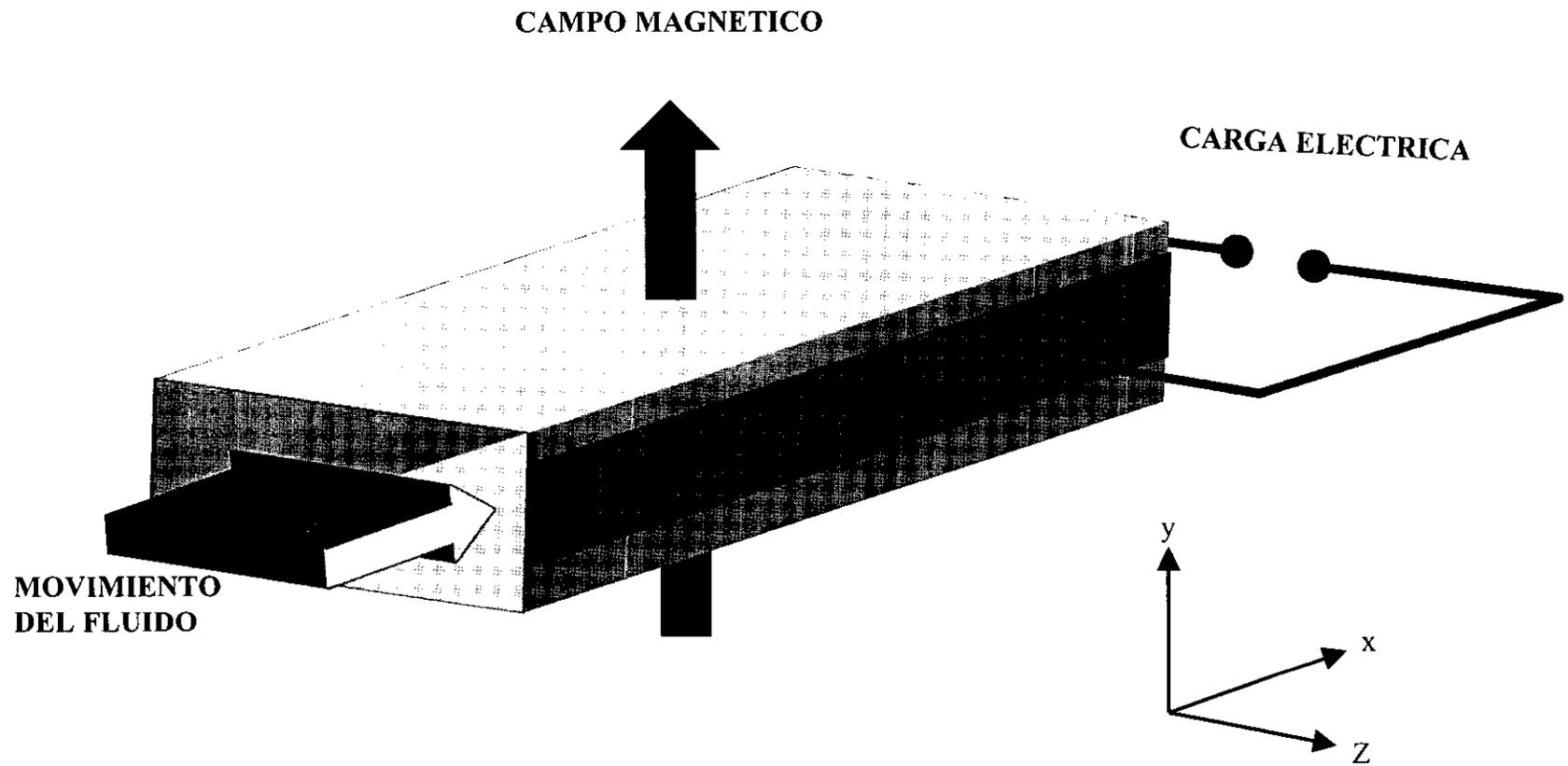


Figura 1.1. Generador Magnetohidrodinámico (MHD) típico

termodinámico. Estos sistemas son susceptibles de ser acoplados a un sistema de colección solar como colectores de plato plano (350 -370 K) o colectores de baja concentración (400-700 K).

En la gran mayoría de los sistemas MHD con metal líquido incorporados a un ciclo termodinámico solar, se involucra la presencia de una fase compresible (gas o vapor) en determinadas regiones del ciclo dando lugar a un flujo en dos fases que permite la conversión de energía térmica en mecánica. Se tiene entonces una mezcla de metal líquido caliente con gas o vapor en íntimo contacto. Así, al expandirse, el gas transforma energía calorífica en trabajo mecánico, impulsando al conductor líquido [3, 4]. Este trabajo mecánico a su vez es transformado en energía eléctrica por el metal líquido mediante la interacción con el campo magnético aplicado. El uso de dos fluidos de trabajo da flexibilidad en acoplar diferentes fuentes caloríficas. En algunos sistemas MHD, se utiliza un flujo estacionario de metal líquido que fluye por el generador MHD y que posteriormente circula por el receptor de un colector solar; una vez que el fluido es calentado, se mezcla con un fluido volátil. En otros sistemas el fluido que pasa directamente a través del generador MHD es la mezcla del metal líquido con un gas o vapor, la que posteriormente también circula en el receptor de un colector solar [5].

A partir de finales de los años sesenta, se desarrollaron un gran número de ciclos termodinámicos que involucran generadores MHD de metal líquido acoplados a fuentes caloríficas solares. Originalmente estos desarrollos estaban enfocados a proporcionar energía a estaciones espaciales [6]. Posteriormente surgió un programa muy intenso encaminado a desarrollar sistemas de generación eléctrica MHD de mediana escala con fuentes solares para proporcionar energía a comunidades pequeñas.

1.2. Principales sistemas solares de potencia MHD

Existen muchos ciclos termodinámicos para los sistemas MHD de metal líquido. Dependiendo de la fuente calorífica, estos sistemas pueden operar eficientemente en ciclos Rankine cuando se trabaja a temperaturas entre 350 y 850 K o bien en ciclos Brayton para una gama de temperaturas de 800 a 1400 K.

El empleo de generadores MHD de metal líquido para la conversión de energía solar en electricidad es factible para intervalos de temperatura entre 350 K y más de 1100 K [5]. Estos sistemas son muy atractivos debido a su eficiencia y su costo por unidad de potencia instalada y son definitivamente capaces de competir con los sistemas de conversión fotovoltaica y los sistemas termodinámicos convencionales [5].

Uno de los sistemas solares de potencia MHD propuestos en la Universidad de Ben-Gurion en Israel [5] se muestra en la figura 1.2 y opera de la siguiente manera: Un metal líquido pasa directamente a través del colector solar (plano o concentrador) y entonces entra al mezclador. Un líquido orgánico se inyecta dentro del metal líquido y se evapora debido a la transferencia de calor entre ambos fluidos. El gas orgánico experimenta una expansión isotérmica y acelera el flujo de la

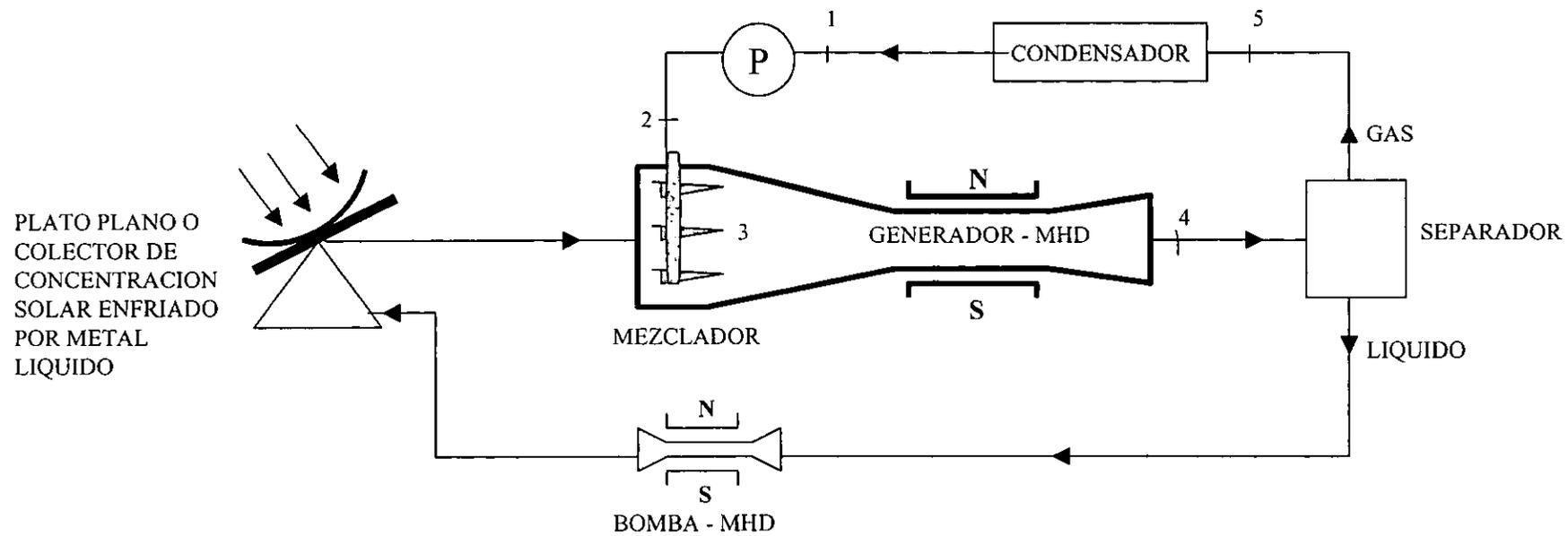


Figura 1.2. Sistema Solar de potencia MHD de Metal Líquido

mezcla en dos fases dentro del generador MHD, (proceso 3-4 en el diagrama del ciclo fig. 1.2). El gas es separado del metal líquido y es entonces enfriado y condensado(1-4). La presión del líquido orgánico es incrementada a la presión de evaporación mediante una bomba (1-2).

En la misma Universidad de Ben-Gurion se propuso un sistema de potencia más sencillo sin un mezclador y un separador (Fig. 1.3). La potencia en este sistema es generada a partir de energía solar que también es utilizada para el calentamiento industrial o doméstico. La inversión en este tipo de sistemas, por razones obvias, es mucho menor que el descrito anteriormente.

Una planta piloto que utiliza los conceptos mencionados anteriormente, denominada ETGAR 3 [7], fue construido a mediados de los ochentas. El ETGAR 3, mostrado esquemáticamente en la figura 1.4, es un sistema muy simple de conversión directa con circulación natural que emplea una aleación de plomo-bismuto como fluido de trabajo y opera entre un intervalo de temperaturas de 338-423 K, y rinde una potencia eléctrica de salida de 8kW, con una eficiencia global de 8.2 por ciento. En operación, en la parte inferior del dispositivo se calienta un metal líquido y se dirige a un mezclador donde se inyecta un gas o vapor a una presión y temperaturas apropiadas. Se crea entonces un flujo en dos fases con una densidad inferior al metal líquido y conforme fluye al separador, la fase gaseosa experimenta expansión desde la alta presión del mezclador a la baja presión del separador, acelerando al fluido y disminuyendo su densidad. La fase gaseosa es separada en el tanque superior por fuerzas de flotación (gravedad), de modo que únicamente el metal regresa por el ducto de descenso. La presión diferencial que existe entre los tubos de ascenso y descenso debida a la diferencia de densidades hace que el metal líquido circule por el sistema y al pasar a través del generador MHD genere una diferencia de potencial y se extraiga la energía eléctrica. Ya que el vapor en el ducto de ascenso está completamente rodeado por metal líquido caliente, el calor es suministrado al vapor continuamente durante su expansión, ocasionando que el ciclo termodinámico pueda ser considerado de recalentamiento infinito. La mayor parte del calor sensible contenido en el vapor, después de haber sido separado del metal líquido, regresa al sistema por regeneración. El sistema puede diseñarse para aprovechar al máximo estas características únicas y producir eficiencias sustancialmente mayores a las de los ciclos convencionales.

El generador MHD puede ser acoplado a un ciclo Rankine lo cual es muy factible para bajas temperaturas con colectores planos (350-370 K), y con colectores de baja concentración (400-700 K) [8], es decir, con tubos evacuados, CPCs (Colectores solares compuestos), y lentes de Fresnell. En un sistema MHD el uso del metal líquido en los colectores solares, sin un intercambiador intermedio y con ayuda de un calentador de contacto directo, puede obtener un incremento del 25% en la temperatura más alta del fluido termodinámico esencialmente con la misma eficiencia del colector, lo cual no es factible en los ciclos Rankine convencionales; además de que no se necesita un regenerador, ni una turbina. Pero quizá lo más importante para este sistema simple es que el generador MHD puede usar imanes permanentes, que no requieren de una fuente de potencia extra. Como se mencionó, en estos sistemas el metal líquido pasa directamente a través de los

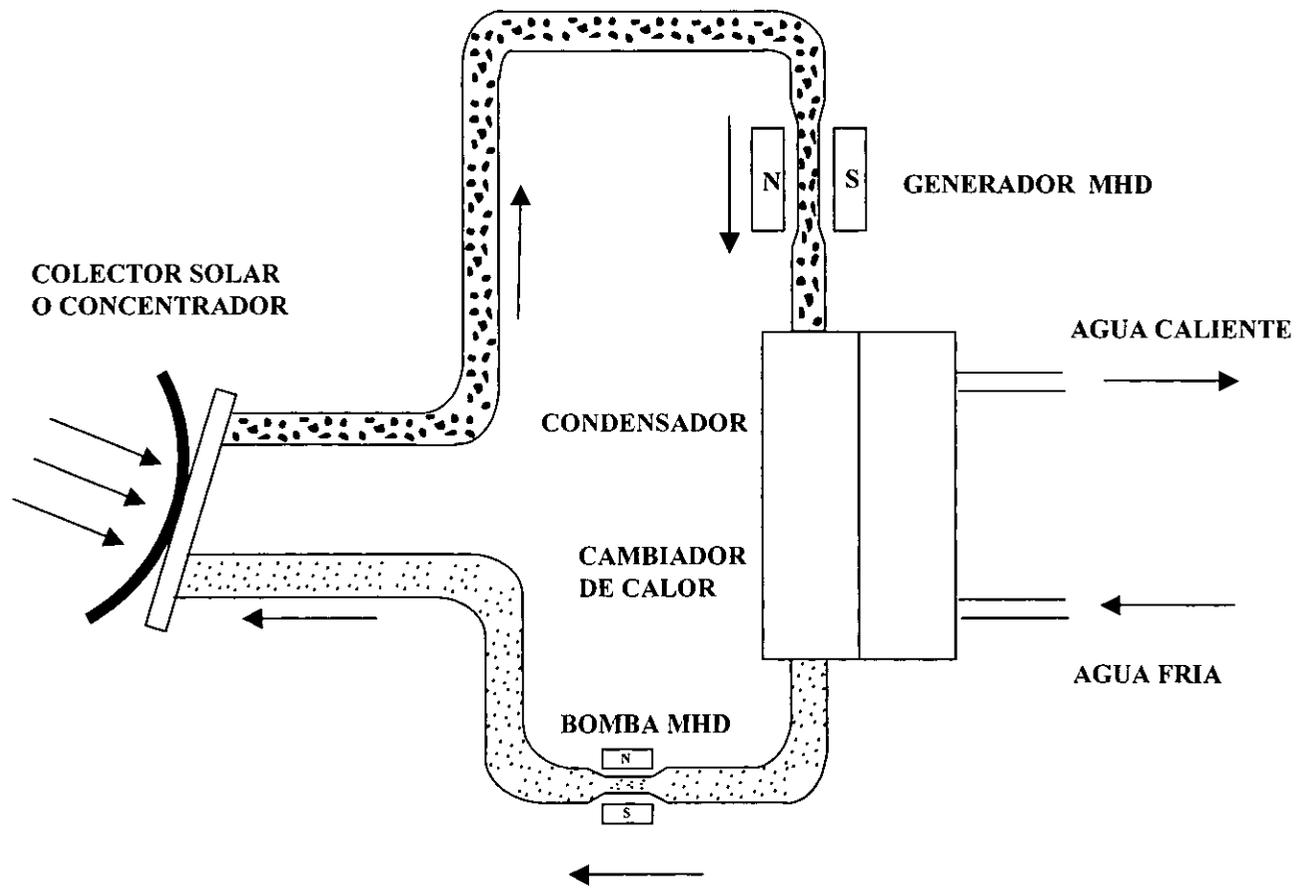


Figura 1.3. Sistema solar de potencia MHD de Metal Líquido sin mezclador y separador

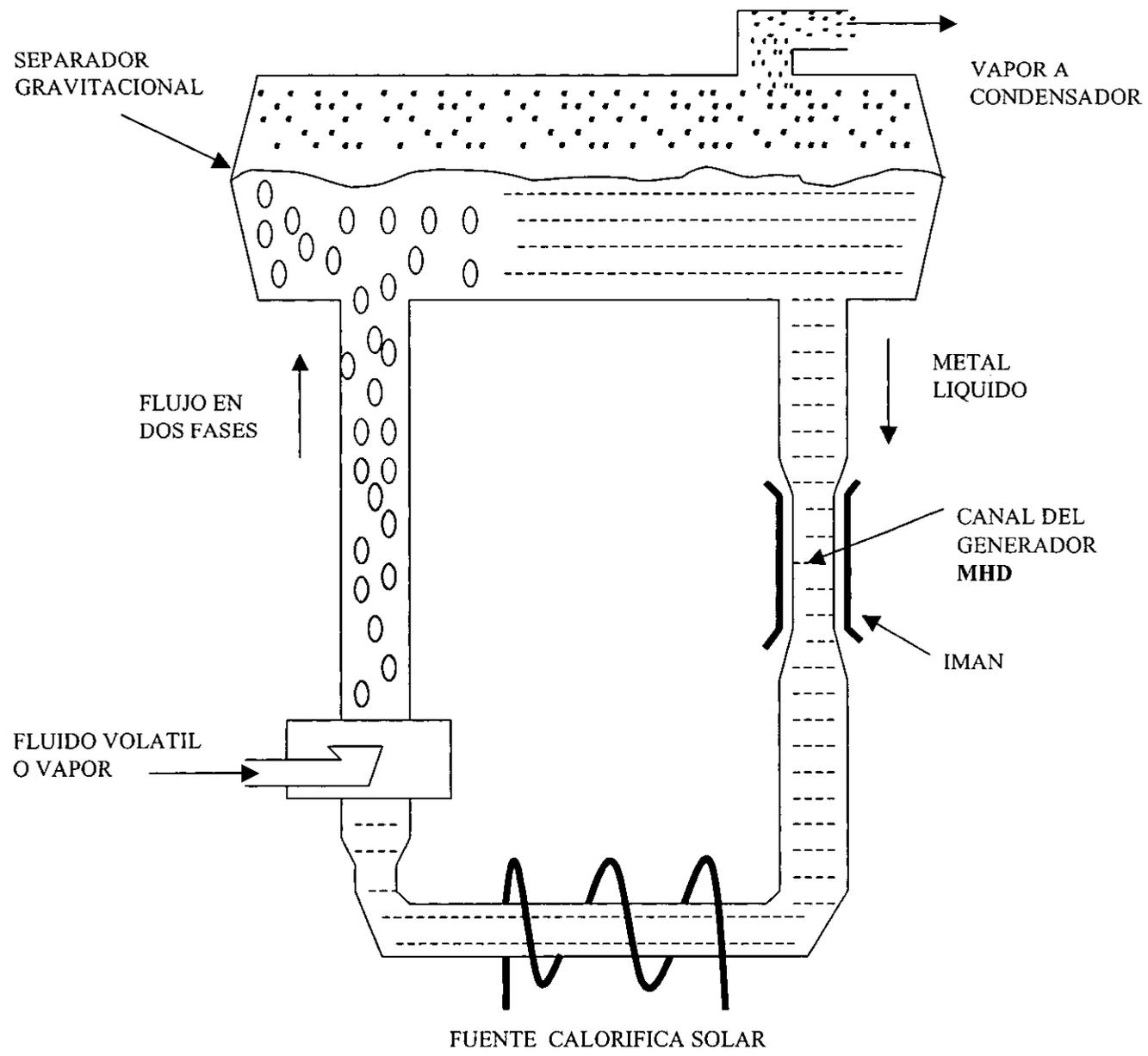


Figura 1.4. Planta pilot ETGAR 3

colectores solares y un fluido orgánico compatible se evapora al contacto directo en el mezclador al inyectarlo como pequeñas gotas dentro del metal líquido caliente.

Para aplicaciones de sistemas que trabajan con temperaturas intermedias (510 a 850 K), el sistema MHD acoplado al ciclo Rankine de metal líquido-vapor[8], es atractivo porque da eficiencias de conversión más altas que el ciclo Rankine convencional de vapor para el mismo intervalo de temperatura del vapor, y si estos sistemas están bien acoplados a todo tipo de colectores, permite el uso de metales líquidos para enfriar los colectores y así mejorar el funcionamiento del colector sin la necesidad de un riesgo potencial en un intercambiador de calor de metal líquido a agua; además es atractivo a niveles de potencia más bajos.

Para temperaturas arriba de 800 K, el sistema de un generador MHD acoplado al ciclo Brayton usando centrales solares se vuelve atractivo debido a su eficiencia, a su simplicidad (pocos componentes, sin turbina), y a la baja sensibilidad de la eficiencia al nivel de la potencia de diseño (la eficiencia en los generadores MHD depende de un efecto de volumen) [8]. El uso de metales líquidos en los colectores es apropiado ya que éstos tienen buenas propiedades de transferencia térmica, baja presión de vapor a altas temperaturas, no hay descomposición térmica y el costo inicial de instalación es bajo.

En resumen, el diseño sencillo de estos sistemas, la ausencia de partes móviles, la alta eficiencia de conversión y la facilidad de acoplamiento de fuentes alternas de energía son algunas de las características que hacen atractivos a estos dispositivos. A la fecha, estos sistemas no han alcanzado el estatus de una tecnología madura, sin embargo, el interés en ellos permanece latente [2].

1.3. Máquina termoacústica MHD

Las máquinas termoacústicas proveen una nueva forma de convertir calor en energía mecánica con una eficiencia comparable a la tecnología existente, pero con un potencial a incrementarse debido a la ausencia de partes móviles. En esencia, una máquina termoacústica como las desarrolladas en el Laboratorio Nacional de los Alamos [9], utiliza el flujo de calor de una fuente de alta temperatura a un sumidero de baja temperatura para generar potencia acústica, en la forma de una onda de sonido de gran amplitud en un gas o en un metal líquido tal como sodio líquido. Esta máquina puede combinarse con un transductor MHD [11] para transformar la potencia acústica en potencia eléctrica con alta eficiencia, como se describe a continuación.

Las máquinas termoacústicas desarrolladas en el Laboratorio de los Álamos [9] y que utilizan un transductor MHD (ver fig. 1.5) consisten en un resonador cilíndrico de acero inoxidable repleto de sodio líquido o bien de una aleación de sodio potasio(NaK). En su interior se monta un conjunto de placas de molibdeno apiladas, en cuyos extremos se dispone un intercambiador de calor caliente y uno frío. De esta forma, los extremos de las placas apiladas se mantienen a temperaturas T_c y T_f , con la temperatura caliente T_c adyacente al extremo cerrado más cercano del resonador.

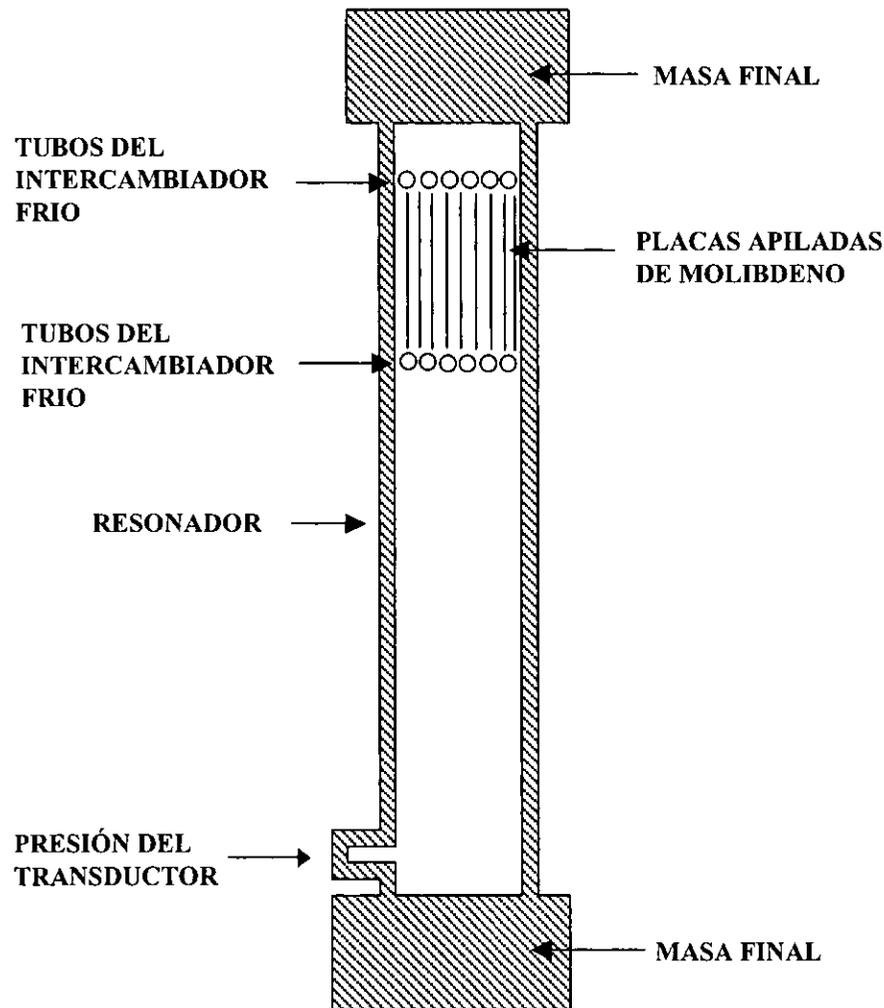


Figura 1.5. Máquina Termoacústica de Sodio líquido

Cuando el gradiente de temperatura entre las placas es suficientemente grande, provoca que el sodio oscile espontáneamente, estableciéndose una onda de sonido estacionaria de gran amplitud en el sodio dentro del resonador. Es decir, en la vecindad de las placas de molibdeno el sodio oscila de un lado a otro. Una cierta parcela de sodio experimenta entonces una temperatura oscilante y por ende una expansión y contracción periódicas que producen trabajo a la frecuencia acústica. Parte de este trabajo se necesita para mantener la onda estacionaria contra las pérdidas parásitas; el resto puede extraerse del resonador y producir energía eléctrica mediante un transductor. La frecuencia de oscilación de la máquina termoacústica se determina por la geometría del resonador, principalmente por su longitud. La potencia es substancialmente proporcional al área de la sección transversal de las placas apiladas y al cuadrado de la amplitud de la presión acústica. La eficiencia es menor pero substancialmente proporcional a la eficiencia de Carnot $1 - T_f/T_c$ [10]. Aunque hay gran cantidad de mecanismos de transducción, el MHD es particularmente adecuado para ondas de sonido en metales líquidos. En tal caso, se aplica un campo magnético en el centro del resonador, perpendicular a la dirección de la velocidad acústica. Se tiene entonces un dispositivo muy similar al generador MHD con flujo estacionario mostrado en la figura 1.1, sólo que en este caso el movimiento del metal líquido a través del campo magnético no es unidireccional sino oscilatorio. Por tanto, la corriente eléctrica generada por el movimiento relativo entre el fluido y el campo será una corriente alterna que puede ser extraída para propósitos útiles a través de los electrodos en contacto con el sodio. El mecanismo de transducción MHD promete ser un mecanismo eficiente de conversión de potencia acústica en eléctrica. Globalmente la máquina tiene la capacidad de producir una alta potencia eléctrica a partir de calor con una eficiencia modesta [11]. Una ventaja adicional de los generadores termoacústicos MHD es que la potencia eléctrica es proporcionada como corriente alterna, y no como corriente directa como en muchas tecnologías de conversión directa, lo que evita el requerimiento de un inversor.

Los componentes básicos de una máquina termoacústica MHD de metal líquido [12] son la estructura activa, el resonador y el transductor, además obviamente, del fluido de trabajo.

La estructura activa, la cual es el corazón de la máquina termoacústica, permite mantener el gradiente de temperatura a lo largo de la estructura y permite que todo el fluido de trabajo se encuentre en contacto térmico. El material debe ser poco conductor de calor para evitar el flujo de calor desde la parte caliente a la parte fría de las placas. El elevado gradiente de temperatura es generado por una fuente de calor y/o un sumidero de calor. En esta componente, la presencia de una onda estacionaria estimula un flujo convectivo promedio en el tiempo a través del gradiente de temperatura, acompañado por la producción de potencia acústica. Se requiere (en general) un intercambiador de calor en la parte caliente y otro en la parte fría para mantener el gradiente de temperatura a lo largo de la estructura activa. El intercambiador caliente suministra calor y el intercambiador frío extrae calor. En principio, el calor necesario para alcanzar la alta temperatura

de la parte caliente se puede obtener de un sistema de colección solar de baja temperatura como colectores de plato plano (350 -370 K) o colectores de baja concentración (400-700 K).

El resonador es necesario para contener las placas y al intercambiador de calor y es imprescindible para la generación de las ondas acústicas estacionarias. El resonador debe proveer tanto la frecuencia de resonancia como la impedancia acústica de la pila de placas requeridas. El resonador debe tener un alto factor de calidad acústica para minimizar la disipación de la potencia acústica en calor, y por tanto existen diversas geometrías que tratan de cumplir este objetivo.

El transductor es requerido para convertir la potencia acústica en electricidad. Varios mecanismos básicos de transducción son aplicables, tales como el electrodinámico, el electrostático, el pizoeléctrico, el MHD, etc. El transductor debe ser simple, confiable y eficiente. El transductor MHD de metal líquido cumple con todos estos requerimientos.

La máquina termoacústica MHD de sodio líquido (Fig. 1.6) desarrollada por Swift y su grupo en el Laboratorio de los Álamos [11], está compuesta de un resonador de la mitad de una onda acústica que contiene dos pilas de placas simétricas con intercambiadores, uno caliente y uno frío, cada una de las pilas. En el centro hay un antinodo de la velocidad acústica, y es la región donde es extraída la potencia eléctrica mediante el transductor MHD. En corridas experimentales del generador termoacústico MHD de sodio líquido se utilizó una frecuencia de operación de 1 kHz, a la cual la longitud de onda en el sodio es de 2 m. La diferencia de temperatura que se utilizó para generar potencia acústica en el sodio fue de 600 °C, manteniendo la fuente de calor en 700°C y una temperatura de 100°C para el sumidero de calor. Utilizando una área transversal de 10 cm², (1.2 cm de separación entre paredes aislantes y 7.6 cm entre los electrodos del generador MHD) se obtuvo una potencia acústica y eléctrica cercana a los 500 W. En este prototipo se utilizaron campos magnéticos de hasta 2.3 T que de manera uniforme abarcaron todo el canal, que tiene una longitud de 20 cm. El canal es capaz de soportar una presión interna de hasta 200 bares, necesaria para que la máquina funcione adecuadamente [9, 11].

Aunado a la posibilidad de alcanzar altas eficiencias, este tipo de máquinas termoacústicas MHD tiene la ventaja de evitar la circulación global del metal líquido, manteniéndolo confinado en el resonador y sin la presencia de partes mecánicas móviles. Estudios preliminares indican la viabilidad de este sistema, sin embargo, quedan aún diversas interrogantes por contestar. Asimismo, el desarrollo de un modelo simple que caracterice su funcionamiento y que sirva de guía para su diseño es aún una tarea incompleta. La energía térmica necesaria para el funcionamiento de las máquinas termoacústicas puede ser obtenida a partir de fuentes caloríficas convencionales, o bien, en principio, de fuentes caloríficas solares [13]. La factibilidad de acoplamiento con estos últimos se analiza a continuación.

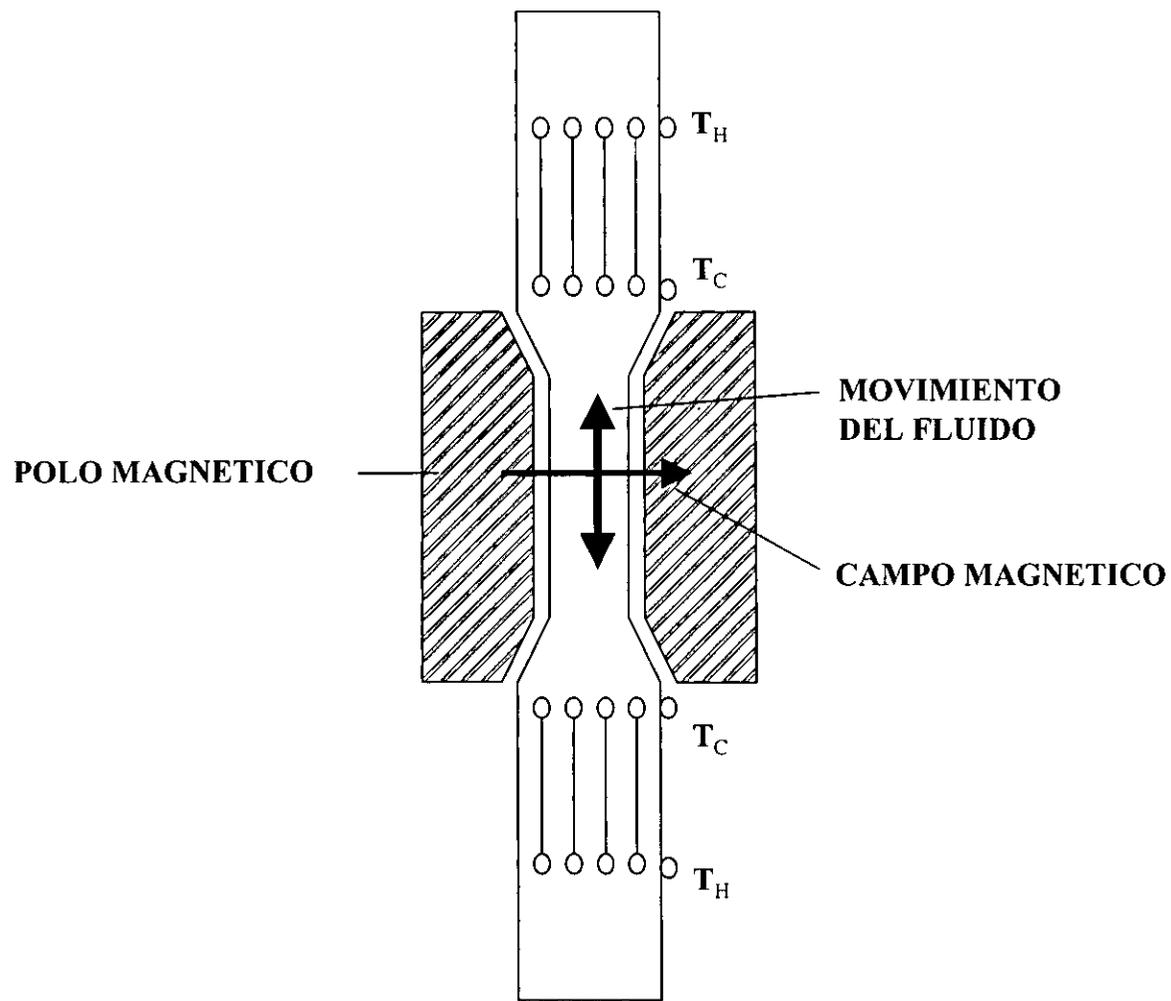


Figura 1.6. Modelo avanzado de la Máquina Termoacústica MHD de sodio líquido

1.4. Factibilidad de Acoplamiento de una Máquina Termoacústica MHD a un sistema solar

El acoplamiento de un sistema termoacústico a una fuente calorífica determinada se realiza principalmente en el intercambiador de calor de alta temperatura, desde donde el calor se transfiere al conjunto de placas apiladas que producen la oscilación espontánea del fluido. Debido al gradiente de temperaturas generado por los intercambiadores, se genera entonces una onda estacionaria de sonido que se propaga a lo largo del resonador. El intercambiador de calor debe tener una longitud apropiada, es decir, una longitud aproximada a la amplitud de desplazamiento de pico a pico de la onda sonora. Si la longitud es mayor, algunos paquetes de fluido solamente tienen contacto con el intercambiador de calor en ambos extremos de sus posiciones y su presencia es puramente disipativa. Si el intercambiador de calor es más corto, algunos paquetes de fluido pasan “saltando” el intercambiador y nunca tienen contacto del todo con el intercambiador, por lo que existe un transporte de calor poco eficiente. Evidentemente, estas características dependen del tipo de fluido a usar en el resonador, de la frecuencia de operación y de la potencia de salida del sistema.

Las variables de interés para analizar el tipo de acoplamiento son las temperaturas caliente (fuente) y fría (sumidero), el flujo de calor a la temperatura caliente, el flujo de calor a la temperatura fría y la potencia.

Recientemente se ha propuesto la posibilidad de acoplar una fuente de energía solar a una máquina termoacústica [13]. La utilización de energía solar como fuente de calor en principio puede simplificar la conversión termoacústica ya que si se iluminan directamente las placas del resonador, es posible eliminar la necesidad de utilizar un intercambiador de calor para la parte caliente de la máquina termoacústica.

En las mediciones realizadas en la Universidad Estatal de Pennsylvania en una máquina termoacústica solar [13] se utilizó aire como fluido de trabajo y se compararon resultados usando calentamiento solar y calentamiento eléctrico. Para el acoplamiento solar utilizaron como concentrador solar lentes de Fresnel con un diámetro de 35” y una distancia focal de 30”, produciendo una mancha solar de 7 cm. De esta forma se garantizó un flujo de energía solar suficiente para la parte caliente del resonador. Se determinó la concentración de flujo solar en este sistema, encontrando una producción de 275 W de calor, correspondiente a un factor de concentración de 85. Debido a la carencia de días soleados en el lugar del experimento, se fabricó un calentador eléctrico que se utilizó para mediciones de laboratorio. Se realizaron mediciones de temperatura en las placas apiladas así como de la amplitud de presión máxima, ambas para distintos flujos de calor. Aunque se detectaron fluctuaciones en estas cantidades debido a la variabilidad temporal de la fuente solar, se encontró que los resultados concuerdan con la teoría establecida por Swift [14] para las máquinas termoacústicas. En particular, se determinó que la diferencia de temperatura a través de las placas es esencialmente independiente de la potencia calorífica de entrada después del comienzo del calentamiento. Asimismo, se encontró que el cuadrado de la amplitud de presión es linealmente

proporcional a la potencia del calentador. En resumen, puede afirmarse que estos primeros resultados indican que la utilización de energía solar para la alimentación de una máquina termoacústica es factible. Evidentemente aún quedan por evaluar múltiples factores necesarios para asegurar un acoplamiento exitoso de una fuente solar con una máquina termoacústica que utilice sodio como fluido de trabajo. Sin embargo, la temperatura reportada por Swift [11] de 700°C para la fuente de calor requerida para el funcionamiento de un generador termoacústico MHD, es fácilmente alcanzable mediante concentradores solares [15], como CPCs (Colectores solares compuestos) y lentes de Fresnell. En la Figura 1.7, se muestra un sistema de potencia solar utilizando lentes de Fresnell como concentrador. El sistema consiste de un heliostato que sigue el movimiento relativo del sol que a su vez refleja la luz solar en la lente de Fresnell. El generador termoacústico MHD se coloca en el foco de la lente en un lugar fijo. En este caso, en el resonador existe solamente un conjunto de placas apiladas cerca del extremo donde se recibe la radiación solar, similarmente al sistema mostrado en la figura 1.5. Este puede ser un sistema factible ya que, como se mencionó anteriormente, las temperaturas que se obtienen de la fuente solar son las requeridas para el funcionamiento del generador.

Es precisamente la temperatura de la fuente de calor el parámetro principal que determina la factibilidad de acoplamiento de una máquina termoacústica y una fuente solar. De hecho la variación de este parámetro afecta a la amplitud del gradiente de presión oscilatorio producido y en consecuencia la oscilación del fluido en el generador. Chen & Garrett [13] obtuvieron experimentalmente que el cuadrado de la amplitud de presión en el generador varía linealmente a la potencia calorífica. Para simular las variables de interés en un Generador Termoacústico MHD acoplado a una fuente calorífica solar es conveniente encontrar una expresión analítica, ya sea a partir de un modelo o bien del experimento, que pueda relacionar el gradiente de presión con la temperatura caliente suministrada por el colector solar. La variación de la temperatura caliente se puede encontrar de expresiones bien conocidas para los diferentes sistemas de colección de solar [15].

Existen otros mecanismos posibles para acoplar una fuente calorífica solar a una máquina térmica. Abraham et al. [16], realizaron un estudio del uso potencial de las fibras ópticas para la generación de potencia térmica solar. Uno de estos mecanismos es el de fibras ópticas para un sistema de disco/Brayton y de disco/Stirling. Uno de los principales beneficios potenciales del uso de fibras consiste en la posibilidad de remover el receptor y la máquina térmica del punto focal de seguimiento a un lugar fijo sobre el pedestal del plato concentrador o en el piso. El uso de fibras ópticas para aplicaciones solares ha sido recientemente explorado en el CIE y actualmente existe un proyecto de investigación en esta dirección [17].

En este trabajo proponemos el uso de fibras ópticas para la transmisión de energía solar concentrada para alimentar un generador termoacústico MHD, conformando entonces un sistema solar de generación de potencia. El sistema consistirá entonces de un colector solar, un arreglo de fibras

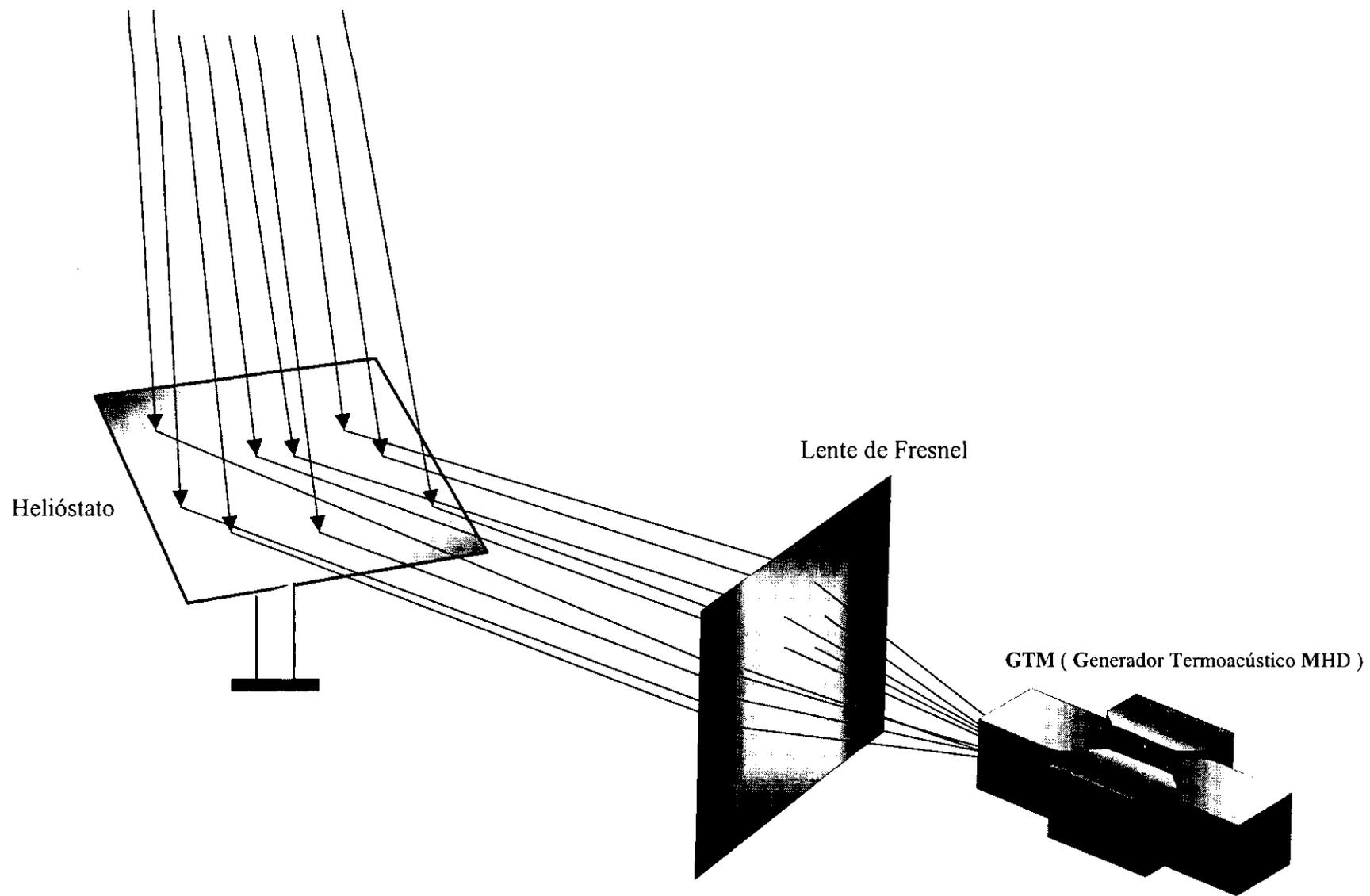


Figura 1.7. Sistema solar usando lente de Fresnell

ópticas para la transmisión de energía y la unidad de conversión de potencia, es decir, la máquina termoacústica MHD.

Dentro de estos sistemas existen diferentes configuraciones posibles, las cuales podrían usarse para el acoplamiento a un generador termoacústico MHD. Estas se describen a continuación.

I. La fibra guía se coloca en el foco del disco (Figura 1.8), instalando la apertura de entrada del paquete de fibras en el punto focal del disco y las fibras se acanalan a un lugar fijo.

II. Disco “Cassegrainian” con fibra guía (Figura 1.9). La luz concentrada se dirige hacia el disco usando un espejo hiperboloide [18], y se coloca el paquete de fibra óptica en la apertura localizada en el foco trasero de la hipérbola .

III. Mini-Disco Colector (Figura 1.10). Se instalan varios pequeños mini-platos, cada uno alimentando a una fibra en particular, sobre un marco que sirve como helióstato y sigue al sol como unidad. Todas las puntas de cada fibra son colectadas a un paquete dirigido al receptor o al generador.

Evidentemente para evaluar la factibilidad de un sistema MHD termoacústico solar basado en la transmisión por fibra óptica es necesario conocer la eficiencia total del sistema y por ende la de cada componente del mismo. Uno de los principales aportes de este trabajo es precisamente la obtención de una expresión analítica para la eficiencia del generador termoacústico MHD a partir de la cual y tomando en cuenta la eficiencia de los otros componentes, es posible estimar la eficiencia global del sistema.

La expresión para la eficiencia del generador MHD se basa en un modelo sencillo que permite evaluar diversos parámetros que determinan su funcionamiento. A su vez, el modelo está sustentado en el estudio del comportamiento dinámico de los flujos oscilatorios del sodio líquido que tienen lugar en el resonador bajo la acción de un campo magnético transversal. Del entendimiento de la dinámica de estos flujos depende en gran medida el desarrollo de modelos adecuados de un generador termoacústico MHD, que sirva para elaborar diseños realistas de un dispositivo de este tipo.

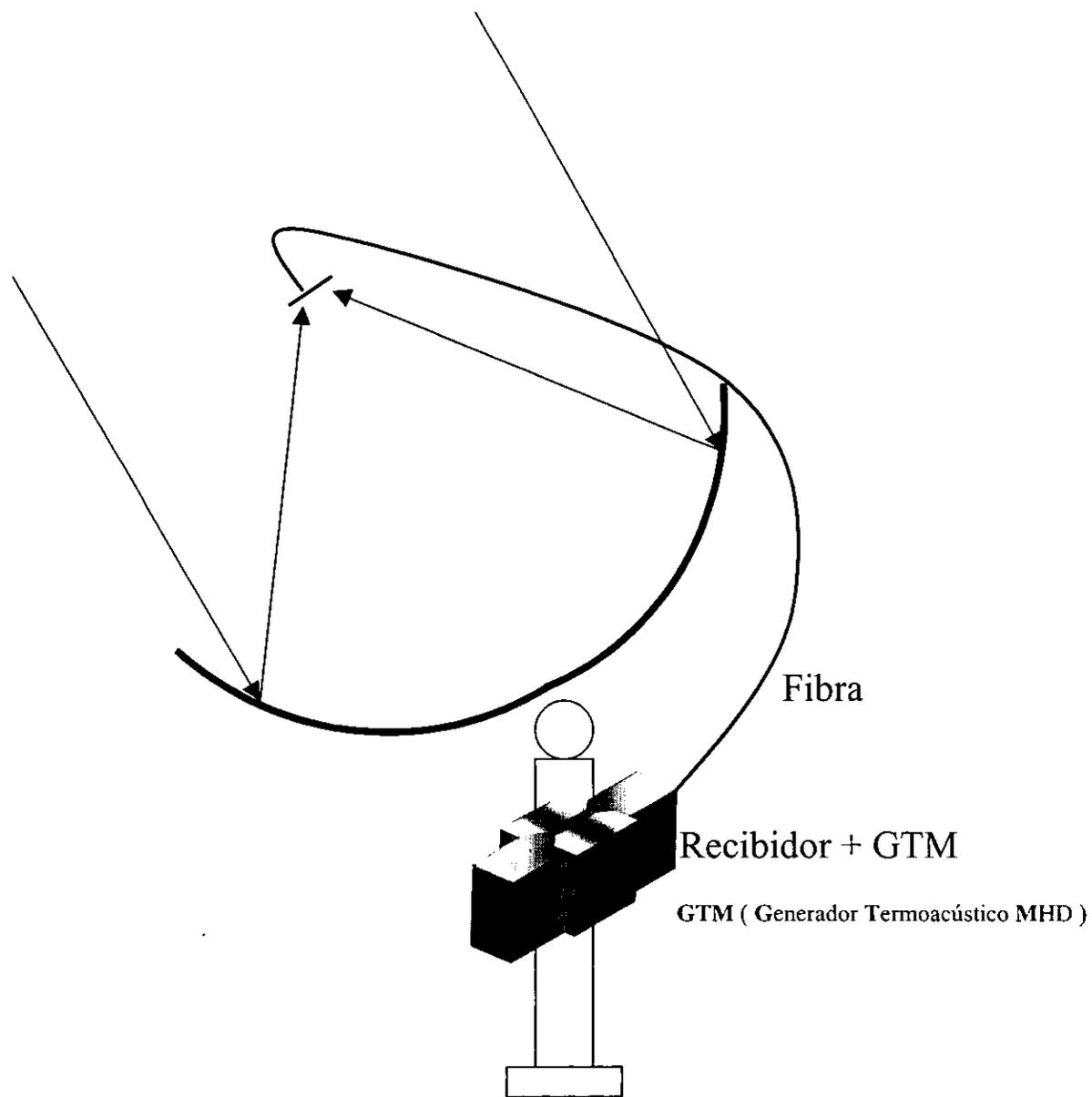


Figura 1.8. Sistema Fibra guía en el foco del disco

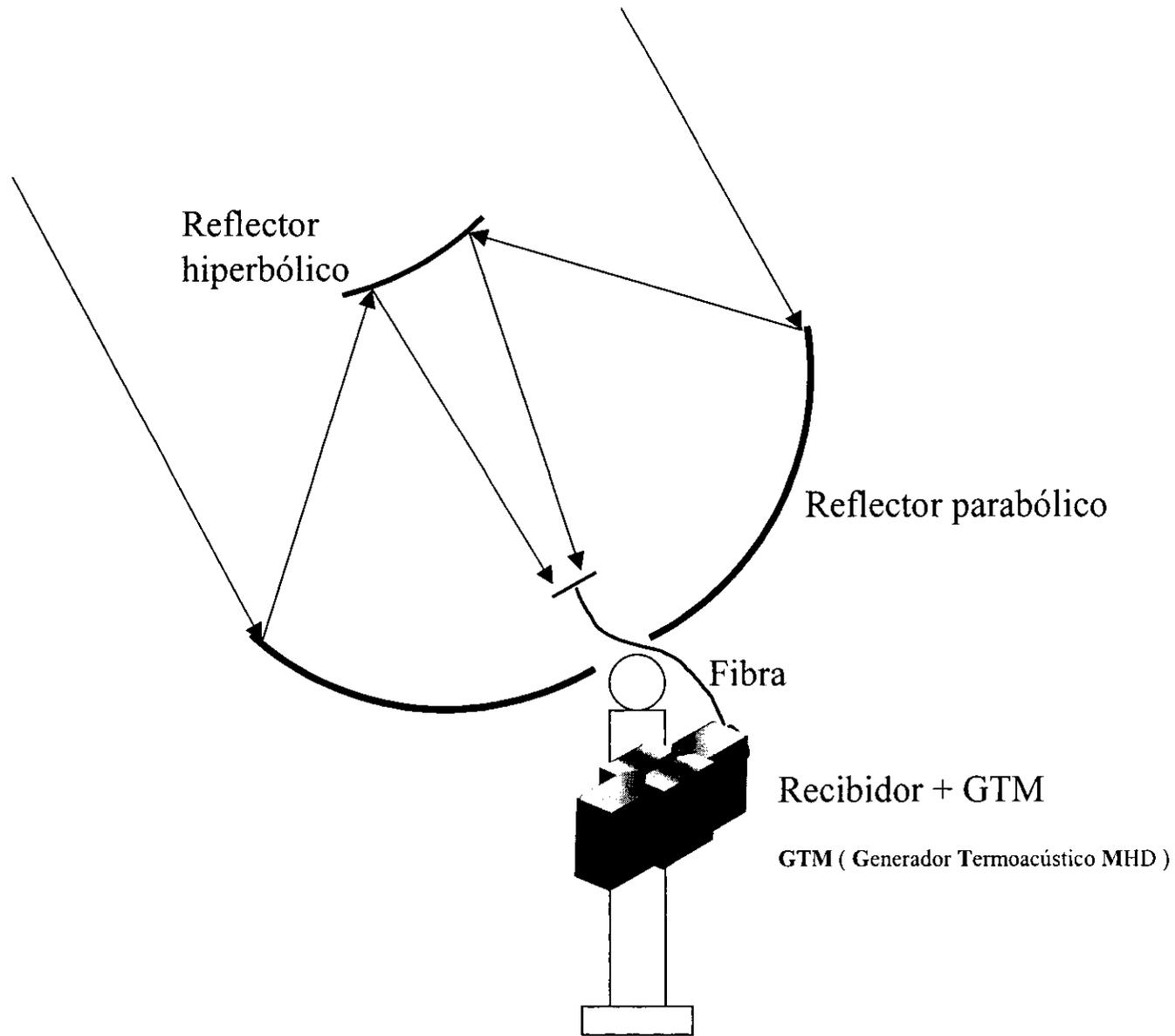


Figura 1.9. Sistema "Cassegrainian" con fibra guia

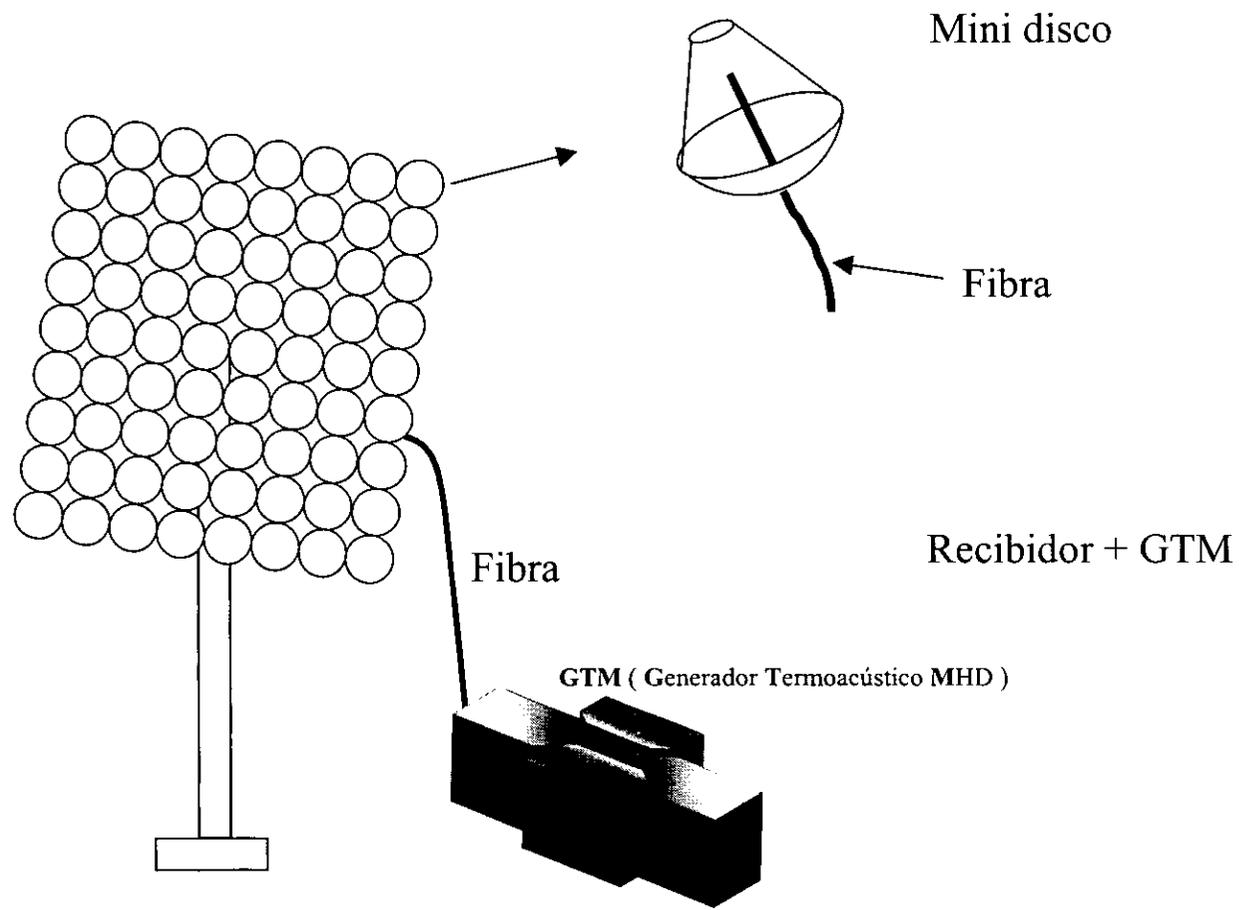


Figura 1.10. Sistema mini-disco colector

CAPÍTULO 2

Fundamentos de Magnetohidrodinámica

En este capítulo presentaremos las ecuaciones fundamentales de la MHD que posteriormente serán utilizadas en la modelación del generador eléctrico alterno MHD.

La MagnetoHidroDinámica estudia el movimiento de un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. Las corrientes eléctricas inducidas en el fluido como resultado de su movimiento relativo con el campo, modifican el campo magnético original; al mismo tiempo, el flujo de las corrientes en el campo magnético produce fuerzas que modifican el movimiento del fluido. De esta forma, el estudio de la MHD requiere del acoplamiento de las ecuaciones ordinarias del electromagnetismo y de la dinámica de fluidos, bajo aproximaciones específicas.

A continuación presentaremos las ecuaciones del campo electromagnético y las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos, y a partir de ellas obtendremos las ecuaciones fundamentales de la MHD utilizando lo que se conoce como la aproximación MHD. Adicionalmente, haremos suposiciones específicas que se aplican al considerar que el fluido de trabajo es un metal líquido.

2.1. Ecuaciones del Campo Electromagnético

Las ecuaciones generales de electromagnetismo, conocidas como las ecuaciones de Máxwell, escritas en su forma diferencial en el sistema MKS [19] son:

La ley de Coulomb

$$(2.1.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e;$$

la no existencia de monopolos magnéticos

$$(2.1.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

la ley de inducción de Faraday

$$(2.1.3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

y la ley de Ampere-Maxwell

$$(2.1.4) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

donde \mathbf{D} es la densidad de flujo eléctrico, \mathbf{E} la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{H} la intensidad del campo magnético, \mathbf{B} la inducción magnética, \mathbf{j} la densidad de corriente eléctrica y ρ_e la densidad de carga eléctrica. Estas ecuaciones deben complementarse con ecuaciones constitutivas para los campos. Para un medio lineal e isotrópico en el sistema de laboratorio estas ecuaciones están dadas por

$$(2.1.5) \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

$$(2.1.6) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Para la mayoría de los materiales de interés en problemas MHD (metales líquidos, gases y soluciones, por ejemplo), la permeabilidad magnética μ se puede suponer igual a la permeabilidad magnética en el vacío, μ_0 [19]. En algunos gases, principalmente en plasmas, se puede considerar la permitividad eléctrica ε aproximadamente igual a la permitividad del vacío ε_0 , lo que no es estrictamente cierto para metales líquidos.

La otra ecuación constitutiva que debemos considerar es la ley de Ohm, que para medios lineales e isotrópicos (como los metales líquidos) en el sistema de laboratorio se escribe como

$$(2.1.7) \quad \mathbf{j} = \rho_e \mathbf{u} + \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio, que como una buena aproximación puede suponerse constante, y \mathbf{u} es la velocidad del material. El término $\rho_e \mathbf{u}$ se conoce como la corriente de convección y como se verá más adelante, en problemas MHD puede despreciarse. La ecuación (2.1.7) no incluye el efecto Hall, que puede suponerse despreciable al tratar el flujo de metales líquidos en campos magnéticos.

Por otra parte, la densidad de fuerza de Lorentz para un medio continuo está dada por

$$(2.1.8) \quad \mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

donde el primer término está asociado a la fuerza eléctrica presente cuando existe una densidad de carga ρ_e vista desde el sistema de laboratorio y el segundo a la fuerza de interacción entre la corriente y el campo magnético.

Una forma alternativa de la densidad de fuerza de Lorentz puede obtenerse utilizando las ecuaciones de Maxwell (2.1.1)-(2.1.4) y las ecuaciones constitutivas (2.1.5) -(2.1.6) obteniendo así

$$(2.1.9) \quad \mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}},$$

donde $\tilde{\mathbf{T}}$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell dado por

$$(2.1.10) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \epsilon \mathbf{E}\mathbf{E} + \mu \mathbf{H}\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\epsilon |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{2} \right),$$

siendo $\tilde{\mathbf{I}}$ la matriz unitaria. A su vez, \mathbf{M} es la densidad de momento asociado con el campo electromagnético dado por

$$(2.1.11) \quad \mathbf{M} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

En la práctica, en la mayoría de los problemas de MHD esta densidad de flujo de momento es una cantidad muy pequeña, y puede ser despreciada [19].

2.2. Ecuaciones de Balance de un Medio Continuo

2.2.1. Balance de Masa. La ecuación diferencial que expresa la conservación de la masa en el fluido es

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u},$$

donde ρ es la densidad de masa y \mathbf{u} la velocidad del fluido. Esta ecuación puede reescribirse en la forma

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_m,$$

donde el vector $\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{u}$ es la densidad de flujo de masa. Su dirección es la del movimiento del fluido y su magnitud es igual a la masa de fluido que atraviesa por unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la velocidad.

Para que el efecto termoacústico tenga lugar evidentemente es indispensable que el fluido de trabajo sea compresible. Sin embargo, para efectos del análisis MHD puede suponerse que el fluido conductor es incompresible siempre y cuando la longitud de onda acústica, λ , sea mucho mayor que la longitud característica del flujo, L , es decir, $\lambda \gg L$. Tal es el caso en las máquinas

termoacústicas desarrolladas en el Laboratorio de los Alamos [11], donde $\lambda = 2m$ para frecuencias del orden de $1KHz$ en sodio líquido, mientras que L es del orden de $2cm$. Por tal motivo, en este trabajo supondremos que la hipótesis de incompresibilidad es válida.

Para un fluido incompresible, la densidad es constante y la ecuación (2.2.1) se reduce a

$$(2.2.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

En general, en ausencia de reacciones químicas el balance de masa no se modifica por la interacción electromagnética.

2.2.2. Balance de Momento. En su forma más general, la ecuación de balance de momento en forma diferencial puede escribirse como

$$(2.2.4) \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{f},$$

donde \mathbf{f} representa la densidad de fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido, tal como la fuerza de gravedad o la fuerza electromagnética dada por la ecuación (2.1.8). El tensor de esfuerzos mecánico, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, puede ser separado en una parte de presión y otra que considera los esfuerzos viscosos [20], es decir,

$$(2.2.5) \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}^v$$

donde p es la presión y τ_{ij}^v es el tensor de esfuerzos viscosos. Para un fluido Newtoniano e incompresible (como los metales líquidos) con viscosidad dinámica μ_f constante, la fuerza viscosa se reduce a [21]

$$(2.2.6) \quad \nabla \cdot \tau_{ij}^v = \mu_f \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Por otra parte, en problemas MHD la densidad de fuerza de cuerpo \mathbf{f} relevante es la electromagnética, dada por (2.1.8). Sustituyendo esta fuerza junto con la fuerza viscosa (2.2.6) en la ecuación (2.2.4), se obtiene

$$(2.2.7) \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Con la ayuda de la ecuación de balance de masa (2.2.1) y de la ecuación (2.1.9), la ecuación (2.2.4) se puede reescribir en la forma

$$(2.2.8) \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}},$$

donde la densidad de flujo total de momento está dado por $\tilde{\Pi} = \rho \mathbf{u}\mathbf{u} + \tilde{\tau} + \tilde{\mathbf{T}}$ y la densidad de momento total por $\mathbf{G} = \rho \mathbf{u} + \mathbf{M}$. La ecuación (2.2.8) indica que la variación en el tiempo de la densidad de momento total (fluido más campo electromagnético) en un elemento de volumen infinitesimal es debida al flujo de momento a través de las fronteras del elemento, que a su vez comprende una parte mecánica y otra debida al campo electromagnético.

2.2.3. Balance de energía. La primera ley de la termodinámica aplicada a un elemento de fluido en presencia de un campo electromagnético (bajo la hipótesis de equilibrio local) establece que la razón de cambio de energía total (energía interna más energía cinética) de un elemento de fluido en movimiento es igual al flujo de energía a través de la superficie tanto por transporte de masa como por procesos de fricción interna, más el flujo de calor \mathbf{q} por conducción térmica, más la tasa a la que el campo electromagnético hace trabajo sobre el volumen de fluido. De esta forma, la ecuación de balance de energía se puede expresar en su forma diferencial como

$$(2.2.9) \quad \rho \left(\frac{De}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D|\mathbf{u}|^2}{Dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\tilde{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

donde e es la densidad de energía interna específica. Despejando el campo eléctrico \mathbf{E} de la ley de Ohm dada por la ecuación (2.1.7) (despreciando la corriente de convección) y sustituyendo el resultado en el término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ obtenemos

$$(2.2.10) \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde a la energía perdida por disipación óhmica al fluir la corriente eléctrica a través del conductor (calor de Joule), mientras que el segundo término representa la razón a la que la fuerza electromagnética hace trabajo sobre el conductor creando energía cinética o ayudando a vencer otras fuerzas (potencia magnética).

Por otra parte, usando las ecuaciones (2.1.1)-(2.1.4) así como las ecuaciones constitutivas (2.1.5) y (2.1.6) el término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ se puede reescribir como

$$(2.2.11) \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t},$$

donde

$$(2.2.12) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

es el vector de Poynting que representa la densidad de flujo de energía electromagnética y

$$(2.2.13) \quad w = \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E},$$

es la densidad de energía electromagnética. La ecuación (2.2.11) se conoce como el Teorema de Poynting, y establece un balance de la energía electromagnética. Sustituyendo la ecuación (2.2.11) en la ecuación (2.2.9) y con ayuda de las ecuaciones de balance de masa y momento, la ecuación de balance de energía se puede expresar como

$$(2.2.14) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{K},$$

donde

$$(2.2.15) \quad W = \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}),$$

es la densidad de energía total del sistema y

$$(2.2.16) \quad \mathbf{K} = \rho \mathbf{u} \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \tilde{\tau} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} + \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

es la densidad de flujo total de energía. La ecuación (2.2.14) expresa que el cambio temporal en la energía total del sistema contenida en un volumen infinitesimal es igual al flujo de energía a través de la superficie que encierra a dicho volumen.

2.3. Aproximación MHD

Es bien sabido que las ecuaciones del campo electromagnético son invariantes ante las transformaciones de Lorentz. Por su parte, las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos presentan una invariancia Galileana. Por lo tanto, la mezcla de estos dos sistemas de ecuaciones presenta, en principio, una inconsistencia fundamental. Para los problemas tratados en MHD es posible introducir aproximaciones que permiten simplificar las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético y las ecuaciones de balance del medio continuo, y obtener un sistema consistente con la invariancia Galileana.

Esta simplificación se conoce como la aproximación MHD y puede resumirse de la siguiente manera [19]:

- a) Las velocidades consideradas son mucho menores que la velocidad de la luz c , es decir, $u \ll c$.
- b) El campo eléctrico \mathbf{E} se supone del orden de magnitud de los efectos inducidos, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

c) No se consideran los fenómenos que involucran altas frecuencias. Esto implica que la corriente de desplazamiento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ es despreciable comparada con la corriente de conducción \mathbf{j} . Con esta aproximación la ecuación (2.1.4) se reduce a la ecuación de Ampere,

$$(2.3.1) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

d) La energía eléctrica es despreciable comparada con la energía magnética, ya que la primera es del orden $u^2/c^2 \ll 1$ y la segunda es de orden uno. Debido a que la corriente de desplazamiento y la energía del campo eléctrico son despreciadas, la interacción principal es entre el campo magnético y el fluido.

e) En la ley de Ohm, la corriente de convección $\rho_e \mathbf{u}$ puede ser despreciada en comparación a la corriente de conducción \mathbf{j} . Por lo tanto, la ecuación (2.1.7) puede escribirse en la forma

$$(2.3.2) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

f) En la fuerza de Lorentz, dada por la ecuación (2.1.8), la parte eléctrica $\rho_e \mathbf{E}$ es comunmente despreciada ya que el cociente de la magnitud de los términos $\rho_e \mathbf{E}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, suponiendo que $|\mathbf{E}| \sim |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$, es de orden u^2/c^2 . Esta aproximación no es estrictamente válida para gases que no son eléctricamente neutros, ya que la fuerza eléctrica puede ser muy importante.

g) Aplicando la divergencia a la ecuación (2.3.1), se sigue la condición $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, que equivale a despreciar la corriente de desplazamiento. En esta aproximación es apropiado ignorar la ecuación de la conservación de la carga eléctrica (2.1.1), ya que el campo eléctrico está completamente determinado por las ecuaciones rotacionales y la ley de Ohm. En sí misma, la distribución de cargas no es de interés en MHD, sin embargo es importante notar que no se está afirmando que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Un análisis detallado de las aproximaciones realizadas en los incisos anteriores pueden encontrarse en las referencias [19] y [22].

2.4. Ecuaciones Fundamentales de la MHD

En resumen las ecuaciones básicas del campo electromagnético bajo la aproximación MHD son [23]:

Ecuaciones de Maxwell

$$(2.4.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(2.4.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

$$(2.4.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

$$(2.4.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

la ley de Ohm

$$(2.4.5) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

y la fuerza de Lorentz:

$$(2.4.6) \quad \mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Combinando las ecuaciones (2.4.2)-(2.4.5) y la ecuación constitutiva $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, obtenemos una ecuación de transporte para el campo magnético, es decir,

$$(2.4.7) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde $\eta = 1/\sigma\mu$ se conoce como la difusividad magnética. La ecuación (2.4.7) tiene la misma forma que la ecuación de transporte de vorticidad [24]. En esta ecuación, dominará el término convectivo $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ si la conductividad eléctrica es alta o el término difusivo $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ si la conductividad es baja. La ecuación (2.4.7) junto con $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, contienen toda la información acerca de \mathbf{B} contenida en las ecuaciones de Maxwell bajo la aproximación MHD.

La ecuación de balance de masa para un fluido incompresible es

$$(2.4.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

A su vez, la ecuación de balance de momento en la aproximación MHD queda

$$(2.4.9) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

donde $\nu = \mu_f/\rho$ es la viscosidad cinemática del fluido.

Por otra parte, usando las ecuaciones (2.1.6) y (2.3.1), la fuerza de Lorentz puede escribirse como

$$(2.4.10) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}.$$

Con ayuda de identidades vectoriales, la ecuación anterior toma la forma

$$(2.4.11) \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right),$$

donde el primer término corresponde a la contribución rotacional de la fuerza magnética mientras que el segundo término corresponde al gradiente de la presión magnética.

Sustituyendo la ecuación (2.4.11) en la ecuación (2.4.9) y despreciando la fuerza gravitacional obtenemos

$$(2.4.12) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

donde la presión total P está dada por

$$(2.4.13) \quad P = p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu}.$$

Bajo la aproximación MHD, la ecuación de balance de energía (2.2.9) puede reescribirse utilizando las ecuaciones de balance de masa y momento, obteniendo la ecuación de transferencia de calor, a saber,

$$(2.4.14) \quad \rho C_p \frac{DT}{Dt} = -\kappa \nabla^2 T + \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma} + \Phi,$$

donde C_p y κ son la capacidad calorífica y conductividad térmica del fluido, respectivamente, y Φ es la función de disipación viscosa para un fluido Newtoniano [25]. El término $\frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma}$ corresponde obviamente al calor disipado por efecto Joule. En la obtención de la ecuación (2.4.14) se ha hecho uso de la relación termodinámica $e = C_p T$, donde T es la temperatura del fluido, además de la ley de Fourier para la conducción de calor,

$$(2.4.15) \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T.$$

En resumen, las ecuaciones (2.4.1)-(2.4.5) más las ecuaciones (2.4.8), (2.4.9) y (2.4.14) (o bien (2.4.4), (2.4.7), (2.4.8), (2.4.12) y (2.4.14)) constituyen un sistema completo de ecuaciones que puede utilizarse en la solución de problemas de flujo de fluidos eléctricamente conductores (en particular, metales líquidos) en campos magnéticos. Evidentemente, estas ecuaciones deben complementarse con condiciones iniciales y de frontera específicas.

CAPÍTULO 3

Flujos Oscilatorios MHD en Capa Límite

En este capítulo iniciaremos el estudio de los flujos oscilatorios que tienen lugar en un generador eléctrico MHD alterno. El comprender la dinámica de los flujos oscilatorios MHD es muy importante ya que ésta afecta directamente el funcionamiento del generador MHD.

El estudio del flujo oscilatorio en ductos debido a un gradiente de presión pulsante en presencia de un campo magnético es bastante complejo. Una manera de atacar el problema es analizar el flujo en diferentes regiones a, saber, el núcleo del ducto donde puede suponerse un flujo invíscido y las regiones de la capa límite cercanas a las paredes donde los efectos viscosos son importantes. A lo largo de este trabajo consideraremos únicamente flujos laminares. El estudio de inestabilidades y la aparición de turbulencia están fuera del alcance de este trabajo.

En este capítulo realizaremos el análisis del flujo laminar oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor en un ducto rectangular, inmerso en un campo magnético uniforme transversal a éste, en la región de capa límite que se forma en las paredes transversales al campo. Las capas límite que se forman en las paredes paralelas al campo serán estudiadas en el capítulo 4. La principal justificación para el estudio de los flujos oscilatorios MHD en capa límite la presenta el hecho de que los efectos disipativos que afectan el funcionamiento de un generador alterno MHD, tienen lugar esencialmente en estas regiones. El sistema de interés puede modelarse visualizando una placa infinita que limita al fluido, el cual realiza un movimiento oscilatorio (con media cero) debido ya sea al movimiento oscilante de la placa o bien a un gradiente de presión pulsante. Se supone que la placa está completamente lisa y que la amplitud de oscilación del fluido es lo suficientemente pequeña, de manera que los efectos no lineales son despreciables. Asimismo, el análisis se lleva a cabo en una región suficientemente alejada de los bordes de la placa, de modo que el flujo puede considerarse completamente desarrollado.

Con el fin de comprender claramente el efecto del campo magnético, primero efectuaremos un análisis puramente hidrodinámico y posteriormente supondremos la existencia de un campo magnético uniforme transversal a la placa. A continuación investigaremos analíticamente diferentes casos que ayudan a comprender situaciones más complicadas, como aquellas que se presentan cuando el flujo es inestable. En particular, estudiaremos los flujos desde distintos sistemas de referencia lo que ocasiona la aparición de distintas fuerzas inerciales o ficticias.

3.1. Flujos en capa límite en ausencia de campos magnéticos

3.1.1. El segundo problema de Stokes. Los flujos oscilatorios laminares en capa límite pueden generarse mediante movimientos periódicos de amplitud pequeña de cuerpos rígidos inmersos en fluidos viscosos o bien mediante gradientes de presión que varían periódicamente. De hecho estas dos distintas situaciones físicas pueden visualizarse como un mismo problema desde dos diferentes sistemas de referencia no inerciales. Fue Lighthill [26] quien observó la equivalencia completa de los sistemas de referencia en la hidrodinámica de fluidos incompresibles siempre que los sistemas se encuentren en movimiento traslacional uniforme, pero no necesariamente constante, relativo uno a otro. Esta equivalencia se debe a que cualquier fuerza inercial uniforme por unidad de volumen, se cancela automáticamente por un gradiente de presión uniforme de igual magnitud. Lighthill notó que la cancelación se debe a la acción de ondas de sonido que pueden considerarse instantáneas siempre que la hipótesis de incompresibilidad se satisfaga.

Cuando dos sistemas de referencia se mueven uno con respecto al otro con velocidad constante, se puede establecer una relación entre ambos a través de las transformaciones Galileanas. Sin embargo, cuando un sistema de referencia se encuentra en movimiento acelerado respecto a otro, el cambio de sistema introduce fuerzas espurias o inerciales en la ecuación de balance de momento. Uno de los ejemplos más conocidos es la existencia de las aceleraciones centrífuga y de Coriolis en la descripción de flujos en rotación. Los flujos oscilatorios son otro ejemplo donde se hace patente la existencia de sistemas de referencia acelerados. Una estrategia conveniente para el análisis de los flujos es identificar el sistema de referencia donde la descripción del fenómeno y las condiciones de frontera son más simples. Para ilustrar este punto, consideraremos primero un problema sencillo, el llamado segundo problema de Stokes, en dos distintos sistemas de referencia y posteriormente tomaremos en cuenta la presencia de campos magnéticos en los flujos oscilatorios de capa límite.

El flujo viscoso oscilatorio más sencillo corresponde a la solución clásica obtenida por Stokes [25, 27]. El segundo problema de Stokes consiste en el movimiento de un fluido viscoso incompresible semi-infinito causado por la oscilación armónica de una placa infinita en dirección paralela a si misma. El fluido ocupa el plano medio superior sobre la placa, la cual se encuentra a lo largo del eje x , mientras que la dirección y es transversal a la placa. El sistema de referencia está fijo en infinito, es decir, muy lejos de la placa donde el fluido se encuentra en reposo, y se supone que la velocidad del fluido sólo tiene componente en la dirección x , y que ésta depende sólo del tiempo y de la coordenada transversal. Por otra parte no existe gradiente de presión en la dirección x , de modo que el movimiento es producido únicamente por el movimiento oscilatorio de la placa [25].

Con estas aproximaciones, la ecuación de continuidad se satisface idénticamente y la ecuación de movimiento (2.4.9) en ausencia de campo magnético se reduce a

$$(3.1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, \quad y > 0;$$

además se deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera que en notación compleja se expresan como

$$u(0, t) = U_o e^{i\omega t},$$

$$u(\infty, t) = 0,$$

donde ω representa la frecuencia de oscilación, U_o la amplitud máxima de la velocidad de la placa, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. Como de costumbre, en cualquier expresión compleja que aparezca aquí se asume que la parte real es la que tiene significado físico.

En términos adimensionales las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en la forma

$$(3.1.2) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}, \quad \tau > 0, \quad Y > 0,$$

$$u^*(0, \tau) = e^{i\tau},$$

$$u^*(\infty, \tau) = 0,$$

donde $u^* = u/U_o$, $Y = y/\delta$, siendo δ el grosor de la capa de Stokes dado por $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$, y $\tau = \omega t$. Por tratarse de una ecuación diferencial lineal, se propone que la solución sea de la forma

$$(3.1.3) \quad u^*(Y, \tau) = f(Y) e^{i\tau}.$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de movimiento adimensional y eliminando el término $e^{i\tau}$ se obtiene

$$\frac{d^2 f}{dY^2} - 2if = 0.$$

La solución a esta ecuación es de la forma $f(Y) = c_1 e^{kY} + c_2 e^{-kY}$ con $k = 1 + i$, y debe satisfacer las condiciones

$$f(0) = 1,$$

$$f(\infty) = 0.$$

La constante de integración c_1 debe ser igual cero ya que cuando Y tiende a infinito la función f diverge, mientras que la constante c_2 debe ser igual a uno para que satisfaga la condición de frontera. Por lo tanto, y la solución es

$$u = e^{-Y} e^{i(\tau - Y)},$$

donde por simplicidad se ha omitido el símbolo *. Tomando la parte real de u , la solución se reduce a

$$(3.1.4) \quad u_s(Y, \tau) = u(Y, \tau) = e^{-Y} \cos(\tau - Y).$$

De la forma dimensional de (3.1.4), puede verse que la solución anterior representa una onda transversal viajando hacia fuera de la placa con velocidad de fase $\sqrt{2\nu\omega}$ [28]. Las oscilaciones del movimiento decaen exponencialmente conforme la distancia a la frontera se incrementa. De hecho, la pared oscilante actúa como una fuente de vorticidad que cambia de signo conforme se difunde hacia fuera, generando una capa límite con espesor $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Por lo tanto, disminuyendo la viscosidad o incrementando la frecuencia decrece la profundidad de penetración de los efectos de la placa oscilante en el fluido viscoso. También se puede observar que las oscilaciones tienen la misma frecuencia en todo el fluido, pero existe una fase relativa con respecto a la placa dada en términos dimensionales por $\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y$ [29]. Es decir, existe un desfaseamiento entre el movimiento de la placa y el fluido debido a los efectos viscosos.

3.1.2. El segundo problema de Stokes desde otro sistema de referencia. Resulta ilustrativo analizar el problema de Stokes desde otro sistema de referencia. Si consideramos que nuestro sistema de referencia ahora se encuentra fijo en la placa, debemos introducir una fuerza que genere el flujo ya que ahora la placa se encuentra en reposo. Es decir, el movimiento del fluido debe atribuirse a un gradiente de presión oscilatorio que provoca un flujo potencial lejos de la placa (donde los efectos viscosos son despreciables) en dirección paralela al movimiento, es decir, $U_o e^{i\omega t}$, donde U_o es una constante. A su vez, el flujo potencial externo, induce un flujo de capa límite cerca de la placa, donde los efectos viscosos juegan un papel preponderante; evidentemente, sobre la placa deben satisfacerse las condiciones de no deslizamiento. En otras palabras, un observador montado en la placa oscilante, vería que el fluido oscila armónicamente muy lejos de ésta y que este movimiento induce un flujo de capa límite cerca de la placa, de tal forma que la velocidad del fluido es cero sobre ésta.

La ecuación de movimiento que describe el flujo en la capa límite en este sistema, está dada por la ecuación (3.1.1) más el término del gradiente de presión en la dirección x , es decir, en términos dimensionales,

$$(3.1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, \quad y > 0,$$

y las condiciones de frontera que ahora deben satisfacerse son

$$(3.1.6) \quad u(0, t) = 0,$$

$$(3.1.7) \quad u(y, t) \rightarrow U_0 e^{i\omega t}, \text{ cuando } y \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, fuera de la capa límite la velocidad del flujo potencial, $U = U_0 e^{i\omega t}$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

Adimensionalizando la ecuación de movimiento en la capa límite dada por (3.1.5) y las condiciones (3.1.6)-(3.1.7) se obtiene lo siguiente

$$(3.1.8) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \tau} = -\frac{Re_\delta}{2} \frac{dp^*}{dX} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^2}, \quad \tau > 0, \quad Y > 0,$$

$$(3.1.9) \quad u^*(0, \tau) = 0,$$

$$(3.1.10) \quad u^*(Y, \tau) \rightarrow e^{i\tau}, \text{ cuando } Y \rightarrow \infty,$$

donde se han usado las mismas variables adimensionales que en la sección anterior, agregando para la presión $p^* = p/\rho U_0^2$, y para la coordenada axial $X = x/\delta$; adicionalmente se ha introducido el número de Reynolds en la capa límite dado por $Re_\delta = U_0 \delta/\nu$.

La ecuación adimensional que satisface el flujo potencial es

$$(3.1.11) \quad \frac{\partial U^*}{\partial \tau} = -\frac{Re_\delta}{2} \frac{dp^*}{dx},$$

donde $U^*(\tau) = Re\{e^{i\tau}\} = \cos(\tau)$. Sustituyendo la ecuación (3.1.11) en la ecuación (3.1.8) obtenemos

$$\frac{\partial(u - U)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

donde nuevamente se ha eliminado el símbolo * por simplicidad en la notación.

La solución a este problema que satisface las condiciones (3.1.9) y (3.1.10) es

$$u = e^{i\tau} - e^{-Y} e^{i(\tau-Y)},$$

o bien, tomando la parte real

$$(3.1.12) \quad u_m(Y, \tau) = u(Y, \tau) = \cos(\tau) - e^{-Y} \cos(\tau - Y).$$

A partir de esta ecuación y la solución (3.1.4) observamos que la relación entre las soluciones en los dos sistemas de referencia es $u_m(Y, \tau) = U(\tau) - u_s(Y, \tau)$. Por lo tanto, a pesar de la naturaleza no inercial de los sistemas de referencia, obtenemos una transformación entre ellos similar a la Galileana.

3.2. Flujos en capa límite en presencia de campos magnéticos

En esta sección analizaremos el flujo oscilatorio en capa límite de un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético transversal a la pared.

Cuando el fluido es eléctricamente conductor, un campo magnético \mathbf{B} puede modificar el flujo principalmente debido a la existencia de una fuerza de cuerpo, a saber, la fuerza de Lorentz dada por la ecuación (2.4.6). Dicha fuerza se genera al interaccionar la corriente eléctrica inducida, ocasionada por el movimiento relativo entre el fluido y el campo magnético, con el mismo campo. La corriente eléctrica, a su vez, induce un campo magnético \mathbf{B}_i que altera el campo original. Sin embargo, en aplicaciones tecnológicas o de laboratorio utilizando metales líquidos, el campo magnético inducido es generalmente despreciable. Una estimación de la magnitud del campo inducido respecto al campo aplicado, la da el número de Reynolds magnético $R_m = U_o L / \eta$, donde U_o y L representan una velocidad y longitud características del flujo y $\eta = 1 / \mu_o \sigma$ es la difusividad magnética. En la mayoría de las aplicaciones de interés tecnológico se tiene que $R_m \ll 1$, de modo que el campo inducido se puede despreciar.

Al estudiar los flujos MHD en capa límite supondremos que los efectos convectivos (no lineales) son despreciables. Esto se logra considerando el flujo laminar sobre una placa plana donde los bordes de la misma se encuentran muy alejados. Asimismo debe suponerse que la amplitud de oscilación del fluido es pequeña comparada con una longitud característica, de modo que se evite el desprendimiento de la capa límite [30]. El flujo será analizado desde distintos sistemas de referencia y por lo tanto se presentarán diversas fuerzas inerciales dependiendo del sistema que se elija. Es importante enfatizar que la fuerza de Lorentz aparece únicamente cuando existe un movimiento relativo entre el fluido y el campo magnético.

Los flujos que estudiaremos aquí tienen lugar en el plano formado por la placa que limita al fluido y el campo magnético transversal a ella, es decir, son flujos bidimensionales. Ya que en general supondremos que el movimiento del fluido se presenta en una dirección transversal al campo magnético aplicado, de la ley de Ohm se tiene que las corrientes inducidas serán ortogonales tanto a la velocidad como al campo aplicado, es decir, perpendiculares al plano de movimiento. Esto a su vez implica que la fuerza de Lorentz estará en la dirección del movimiento del fluido, y de hecho se opondrá a él.

Aunque suponemos que el problema es esencialmente bidimensional, la corriente perpendicular al plano de movimiento debe necesariamente completar su trayectoria. Aquí supondremos que muy lejos del plano en cuestión existen paredes que permiten completar las trayectorias de corriente ya sea, a través del mismo fluido, de las paredes (conductoras) o bien de un circuito eléctrico externo. Precisamente las condiciones eléctricas en estas paredes lejanas son las que determinan el valor del campo electrostático \mathbf{E} . Puede demostrarse que en el caso en que el campo magnético está inmerso en el plano de movimiento, el campo \mathbf{E} no depende de las coordenadas espaciales, es decir, es a lo más una función del tiempo [31].

En general, la fuerza de Lorentz puede ser rotacional, lo que significa que es capaz de modificar la vorticidad del fluido. Si sustituimos la densidad de corriente \mathbf{j} dada por la ley de Ohm (2.4.5), en la fuerza de Lorentz y utilizamos algunas identidades vectoriales obtenemos

$$(3.2.1) \quad \mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \sigma [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})],$$

y ya que $\mathbf{B} \perp \mathbf{u}$, la expresión para la fuerza se escribe como

$$(3.2.2) \quad \mathbf{f} = \sigma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \sigma B_o^2 \mathbf{u},$$

donde se observa que el segundo término tiene signo opuesto a la velocidad.

Aplicando el rotacional a la expresión anterior y reescribiendo usando identidades vectoriales, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{f} = \sigma [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{E})] - \sigma B_o^2 \nabla \times \mathbf{u}.$$

Ya que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y \mathbf{E} no depende de las coordenadas espaciales tenemos que

$$(3.2.3) \quad \nabla \times \mathbf{f} = -\sigma B_o^2 \nabla \times \mathbf{u}.$$

Esto indica que la fuerza eléctrica es irrotacional, y por tanto no modifica la vorticidad del flujo. Cuando las condiciones eléctricas en las paredes laterales son tales que la corriente eléctrica se cortocircuita, se tiene que el campo electrostático es cero, $\mathbf{E} = 0$. En tal caso, la fuerza de Lorentz se reduce a

$$(3.2.4) \quad \mathbf{f} = -\sigma B_o^2 \mathbf{u}.$$

Como en cualquier problema de MHD, la solución del flujo oscilatorio de capa límite en presencia de un campo magnético debe satisfacer las ecuaciones de la dinámica de fluidos y del campo electromagnético, es decir, las ecuaciones MHD obtenidas en el capítulo 2.

3.2.1. Ecuaciones fundamentales de la MHD en términos adimensionales. Del capítulo 2, tenemos que las ecuaciones fundamentales de la MHD se expresan dimensionalmente en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Ahora procederemos a adimensionalizar estas ecuaciones de acuerdo al tipo de problemas físicos que deseamos de analizar. Si suponemos que el flujo se produce por un gradiente de presión oscilatorio en dirección axial, se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = G \cos(\omega t) = \rho U_o \omega \cos(\omega t),$$

donde G es la amplitud de dicho gradiente. De esta forma, podemos definir una velocidad característica a partir de G , es decir,

$$U_o = \frac{G}{\rho \omega}.$$

En el caso de que el flujo sea producido por una pared oscilatoria, U_o sería la amplitud de la velocidad de la pared, o bien puede ser la amplitud de velocidad del flujo potencial.

Si ahora consideramos las siguientes variables adimensionales,

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_o}, \quad \tau = \omega t, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Z = \frac{z}{L},$$

$$p^* = \frac{p}{\sigma U_o B_o^2 L}, \quad \mathbf{j}^* = \frac{\mathbf{j}}{\sigma u_o B_o}, \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_o}, \quad \mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{E}}{U_o B_o},$$

donde B_o es la magnitud del campo magnético aplicado y L una longitud característica del flujo, tenemos que las ecuaciones fundamentales de la MHD se transforman en

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \tau} + \varepsilon (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -N_\omega \nabla p^* + \frac{1}{R_\omega} \nabla^2 \mathbf{u}^* + N_\omega \mathbf{j}^* \times \mathbf{B}^*,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0,$$

$$\varepsilon \nabla \times \mathbf{E}^* = -\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial \tau},$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^* = R_m \mathbf{j}^*,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^* = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^* = 0,$$

$$\mathbf{j}^* = \mathbf{E}^* + \mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*,$$

donde el operador ∇ está dado por $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z})$ y además

$$\varepsilon = \frac{U_o}{\omega L}, \quad R_\omega = \frac{\omega L^2}{\nu}, \quad N_\omega = \frac{\sigma B_o^2}{\rho \omega} \equiv \frac{M^2}{R_\omega}.$$

El parámetro ε puede interpretarse como el cociente de la amplitud de desplazamiento del fluido U_o/ω y la longitud característica L . Aquí supondremos que se cumple la condición de oscilaciones de amplitud pequeña, es decir, $\varepsilon \ll 1$. Esta condición asegura la ausencia de separación de la capa límite [30]. Por otra parte, el parámetro R_ω es el número de Reynolds oscilatorio. La cantidad $R_\omega^{1/2}$ puede interpretarse como el cociente de la longitud característica L y “la longitud viscosa” $(\nu/\omega)^{1/2}$. A su vez, N_ω se conoce como el parámetro de interacción y da una estimación de la intensidad de la fuerza magnética comparada con la inercial. También puede interpretarse como la razón del tiempo característico asociado al transporte de vorticidad inercial y el tiempo característico de la atenuación magnética (tiempo de Joule, $\tau_J = \rho/\sigma B_o^2$).

Asimismo, M es el número de Hartmann y da una estimación de la magnitud de la fuerza magnética comparada con la viscosa.

El sistema de ecuaciones previo puede simplificarse sustancialmente si suponemos que $R_m \ll 1$. Como se mencionó anteriormente, tal condición implica que el campo magnético no se altera por el movimiento del fluido, pero éste sí se ve afectado por el campo a través de la fuerza de Lorentz. Bajo la aproximación $R_m \ll 1$, el campo magnético está gobernado por las ecuaciones magnetostáticas, es decir,

$$(3.2.5) \quad \nabla \times \mathbf{B}^* = 0,$$

$$(3.2.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^* = 0.$$

Esto implica que \mathbf{B}^* puede determinarse independientemente de \mathbf{u}^* , y además, que \mathbf{B}^* no depende del tiempo. En otras palabras, \mathbf{B}^* no se ve alterado por el movimiento del fluido.

Entonces, ya que $\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial \tau} = 0$, la ecuación de Faraday queda

$$(3.2.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}^* = 0,$$

de donde $\mathbf{E}^* = -\nabla \phi^*$, siendo ϕ^* el potencial eléctrico, adimensionalizado por $U_o B_o L$.

Entonces bajo la aproximación $R_m \ll 1$, las ecuaciones fundamentales de la MHD para un fluido incompresible se reducen a

$$(3.2.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(3.2.9) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -N_\omega \nabla p + \frac{1}{R_\omega} \nabla^2 \mathbf{u} + N_\omega \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$(3.2.10) \quad \mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

$$(3.2.11) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0,$$

donde se ha eliminado el símbolo* por simplicidad.

En este trabajo, nos interesa analizar flujos en ductos o sobre paredes bajo un campo magnético transversal de modo que tomamos

$$(3.2.12) \quad \mathbf{B} = \hat{y},$$

donde \hat{y} es el vector unitario en la dirección transversal y . Evidentemente, la ecuación (3.2.12) satisface las ecuaciones magnetostáticas (3.2.11).

De esta forma, en la aproximación de capa límite las ecuaciones a resolver son

$$(3.2.13) \quad \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0$$

$$(3.2.14) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = -N_\omega \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} - N_\omega j_z$$

$$(3.2.15) \quad j_z = -\frac{\partial\phi}{\partial Z} + u, \quad \frac{\partial j_z}{\partial Z} = 0$$

donde la longitud característica se ha tomado igual al grosor de la capa de Stokes, $L = \delta$, de modo que $R_\omega = 2$. En este flujo bidimensional, la única componente de la corriente está en la dirección z , perpendicular al plano de movimiento. En todos los flujos de capa límite, supondremos que la pared que limita al fluido es eléctricamente aislante, de modo que la corriente eléctrica no penetra en la pared. Adicionalmente, las condiciones de frontera que se deben satisfacer cuando el sistema de referencia está fijo en la pared, son

$$(3.2.16) \quad u = v = 0 \quad \text{en } Y = 0;$$

$$(3.2.17) \quad u \rightarrow U, \quad \text{cuando } Y \rightarrow \infty,$$

donde U es el flujo potencial externo a la capa límite.

En la ecuación (3.2.14) el término convectivo aparece modulado por el parámetro ε . Para $\varepsilon \neq 0$, este término es distinto de cero en la cercanía de los bordes de la placa, o bien cuando la superficie es curva. En estos casos, es posible encontrar soluciones analíticas mediante el método de perturbaciones, suponiendo que $\varepsilon \ll 1$ [32, 33]. En los casos que analizaremos aquí, supondremos que la placa es plana e infinita de manera que la aceleración convectiva es idénticamente cero. Esto a su vez implica que la velocidad axial u es función sólo de Y y τ , y por continuidad (Ec.(3.2.13)) se tiene entonces que no existe componente transversal de la velocidad ($v = 0$).

Finalmente entonces, debemos resolver la ecuación

$$(3.2.18) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -N_\omega \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - N_\omega \left(-\frac{\partial \phi}{\partial Z} + u \right),$$

con las condiciones de frontera

$$(3.2.19) \quad u = 0 \quad \text{en } Y = 0,$$

$$(3.2.20) \quad u \rightarrow U, \quad \text{cuando } Y \rightarrow \infty$$

Debe notarse que estas condiciones pueden variar dependiendo del sistema de referencia utilizado, como veremos en los siguientes problemas.

Fuera de la capa límite, el flujo potencial $U = U(\tau)$ satisface la ecuación de Euler MHD

$$(3.2.21) \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} = -N_\omega \frac{\partial p}{\partial X} - N_\omega \left(-\frac{\partial \phi}{\partial Z} + U \right).$$

Notese que el campo eléctrico $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial Z}$, que sólo depende del tiempo, es el mismo que en la capa límite. Sin embargo, la densidad de corriente eléctrica, $J_z = -\frac{\partial \phi}{\partial Z} + U$, difiere de la de la capa límite.

3.2.2. El segundo problema de Stokes con campo magnético fijo relativo al fluido. Primeramente analizaremos el flujo de un fluido eléctricamente conductor producido por una placa plana que oscila armónicamente de manera similar al segundo problema de Stokes, pero bajo la presencia de un campo magnético transversal a la placa.

En este caso suponemos que el sistema de referencia y el campo magnético están fijos en infinito donde el fluido se mantiene en reposo. De esta forma el movimiento relativo aparece sólo en la vecindad de la pared oscilante, donde se forma la capa límite. En esta región, se induce una densidad de corriente eléctrica en la dirección z , perpendicular al movimiento de la placa y al campo magnético.

Además, se supone que la presión en la dirección X es constante, de manera que su gradiente se elimina. Si además suponemos condiciones de corto circuito $\frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0$, la ecuación que describe el flujo (ecuación(3.2.18)), se transforma en

$$(3.2.22) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + N_\omega u = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, \tau) = e^{i\tau},$$

$$u(\infty, \tau) = 0.$$

La solución completa a este problema viene dada por

$$u(Y, \tau) = e^{-kY} e^{i\tau},$$

donde $k = \sqrt{2(N_\omega + i)} = \sqrt{r + N_\omega} + i\sqrt{r - N_\omega}$ con $r = \sqrt{N_\omega^2 + 1}$. Obteniendo la parte real de la expresión anterior, la solución final se expresa como

$$(3.2.23) \quad u_{SB}(Y, \tau) = u(Y, \tau) = e^{-Y\sqrt{r+N_\omega}} \cos(\tau - Y\sqrt{r - N_\omega}).$$

Observamos que cuando $N_\omega = 0$, es decir, cuando no hay campo magnético externo, la expresión anterior se reduce a la solución de Stokes, dada por la ecuación (3.1.4). A su vez si $N_\omega \rightarrow \infty$, se tiene que $U(Y, \tau) = 0$. Esto indica que el campo magnético es capaz de frenar el movimiento del

fluido, atenuando el momento lineal y la energía cinética del flujo e incrementando su energía térmica a través del efecto Joule. Nótese además que la existencia del campo modifica el desfaseamiento entre el movimiento de la placa y el fluido.

La destrucción total del momento lineal y la energía cinética del flujo que lleva a frenar completamente el flujo cuando el campo magnético es suficientemente intenso es un efecto introducido por la bidimensionalidad del problema. Al considerar un flujo tridimensional, el frenado magnético no es total y se presenta una redistribución de energía y de momento lineal y angular del sistema. Este tópico ha sido estudiado a profundidad por Davidson [34].

3.2.3. El segundo problema de Stokes con campo magnético fijo relativo a la placa. Ahora resolveremos el problema manteniendo el sistema de referencia fijo en infinito pero fijando el campo magnético transversal a la placa oscilante. Por lo tanto, debe tomarse en cuenta la velocidad relativa \mathbf{v} entre el campo magnético y el fluido. En estas condiciones, se induce una corriente en la dirección del eje Z dada por $\mathbf{j} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{y}}$. Entonces, la fuerza de Lorentz en condiciones de corto circuito ahora está dada por $\mathbf{f}' = -N_\omega \mathbf{v}$, donde la magnitud de la velocidad relativa es $v = u - e^{i\tau}$, siendo u la velocidad del fluido y $e^{i\tau}$ la velocidad de la placa.

La ecuación de movimiento y las condiciones de frontera que determinan el flujo son

$$(3.2.24) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + N_\omega(u - e^{i\tau}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$u(0, t) = e^{i\tau},$$

$$u(\infty, \tau) < \infty.$$

La solución completa a este problema viene dada por

$$u(Y, \tau) = (ie^{-kY} + N_\omega) \frac{e^{i\tau}}{N_\omega + i}.$$

Explícitamente, la parte real de la solución anterior tiene la forma

$$(3.2.25) \quad u = \frac{e^{-Y\sqrt{r+N_\omega}}}{N_\omega^2 + 1} [\cos(\tau - Y\sqrt{r - N_\omega}) - N_\omega \sin(\tau - Y\sqrt{r - N_\omega})] + \frac{N_\omega}{N_\omega^2 + 1} [N_\omega \cos(\tau) + \sin(\tau)].$$

En ausencia de campo magnético, cuando $N_\omega = 0$, la solución anterior se reduce a la solución de Stokes. Cuando N_ω es finita, el primer término del lado derecho de la solución (3.2.25) tiende a cero conforme la distancia a la pared crece (i.e. $Y \rightarrow \infty$). Sin embargo, el segundo término que es independiente de Y permanece, indicando un movimiento armónico en el tiempo muy lejos de la placa. Por otra parte cuando $N_\omega \rightarrow \infty$, el primer término de (3.2.25) se anula y el segundo tiende

a $\cos \tau$; es decir, el fluido se mueve como un cuerpo rígido con la misma frecuencia y fase que la placa oscilante.

En los siguientes dos casos se fija el sistema de referencia en la placa y se analiza el movimiento del fluido debido a un gradiente de presión oscilatorio muy lejos de la placa, pero con un campo magnético constante B_0 perpendicular al movimiento del fluido. En un caso, el campo está fijo a la placa, mientras que en otro éste oscila junto con el fluido en infinito.

3.2.4. Capa límite oscilatoria con $\frac{\partial P}{\partial X} \neq 0$ y campo magnético fijo a la placa. Cuando el flujo es producido por un gradiente de presión, se genera una región de flujo potencial lejos de la placa y una región de capa límite cerca de ella. Ya que las velocidades en cada región son distintas, la corriente inducida y por tanto la fuerza de Lorentz será distinta en cada región. Como en este caso el campo magnético está fijo a la placa, la fuerza de Lorentz en la capa límite está dada por $\mathbf{f}_i = \mathbf{j} \times \hat{\mathbf{y}}$, donde \mathbf{j} es la densidad de corriente en la capa límite dada por la ley de Ohm, $\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}$. Fuera de ésta la fuerza está dada por $\mathbf{f}_o = \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{y}}$, donde \mathbf{J} es la densidad de corriente en el flujo potencial, $\mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \hat{\mathbf{y}}$. En este caso no se suponen condiciones de corto circuito de manera que el campo eléctrico \mathbf{E} es distinto de cero.

Entonces, las ecuaciones que gobiernan el flujo en la capa límite están dadas por (3.2.18)-(3.2.20), mientras que el flujo potencial satisface la ecuación (3.2.21). Despejando el gradiente de presión en la ecuación(3.2.21) y sustituyendo el resultado en la ecuación (3.2.18), obtenemos

$$(3.2.26) \quad \frac{\partial(u - U)}{\partial \tau} + N_\omega(u - U) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, \tau) = 0,$$

$$u(Y \rightarrow \infty, \tau) = U,$$

donde $U(\tau) = e^{i\tau}$. La solución de la ecuación(3.2.26) que satisface las condiciones a la frontera está dada por

$$u(Y, \tau) = (1 - e^{-kY})e^{i\tau}.$$

Explícitamente, la parte real de la solución anterior es

$$(3.2.27) \quad u_{mB}(Y, \tau) = u(Y, T) = \cos[\tau] - e^{-Y\sqrt{r+N_\omega}} \cos(\tau - Y\sqrt{r - N_\omega}).$$

Si $N_\omega = 0$, la ecuación (3.2.27) se reduce a la solución de Stokes desde un sistema de referencia fijo en la placa dada por la ecuación (3.1.12), estudiada en la sección 3.1.2. Observamos que la solución es igual a la velocidad de oscilación del fluido muy lejos de la placa menos la velocidad

de Stokes con campo magnético fijo relativo al movimiento del fluido dada por $u_{sB}(Y, \tau)$, es decir, $u_{mB}(Y, \tau) = \cos(\tau) - u_{sB}(Y, \tau)$.

Para N_ω finita, el segundo término de la ecuación (3.2.27) tiende a cero conforme $y \rightarrow \infty$ y entonces el fluido se mueve armónicamente como el $\cos(\tau)$. Por otra parte, cuando $N_\omega \rightarrow \infty$ el segundo término de la ecuación (3.2.27) nuevamente tiende a cero y el fluido se mueve como el $\cos(\tau)$ dentro y fuera de la capa límite, es decir, presenta un movimiento de cuerpo rígido.

3.2.5. Capa límite oscilatoria con $\frac{\partial P}{\partial X} \neq 0$ y campo magnético fijo al fluido. Ahora resolveremos el problema suponiendo que el campo magnético oscila armónicamente junto con el flujo potencial en el infinito. Es decir, el campo magnético se mueve junto con el fluido fuera de la capa límite, por lo que no existe una corriente inducida en esa región debido a que no hay una velocidad relativa entre el fluido y el campo. De esta forma, la fuerza de Lorentz está dada en esa región únicamente por $f_o = -N_\omega \frac{\partial \phi}{\partial Z}$. En la capa límite, sí hay movimiento relativo entre el campo y el fluido [35] por lo que la fuerza de Lorentz está dada por $f_i = -N_\omega(-\frac{\partial \phi}{\partial Z} + v)$, donde la velocidad relativa es $v = u - U$, siendo u la velocidad del fluido y $U = e^{i\tau}$ la velocidad del campo magnético que coincide con la del flujo potencial.

La ecuación de movimiento y las condiciones de frontera que describen el flujo en la capa límite están dadas nuevamente por las ecuaciones (3.2.18)-(3.2.20). Sin embargo, la ecuación que satisface el flujo potencial es

$$(3.2.28) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -N_\omega \frac{\partial p}{\partial x} + N_\omega \frac{\partial \phi}{\partial Z}.$$

Despejando el gradiente presión en la ecuación(3.2.28) y sustituyendo el resultado en la ecuación (3.2.18), obtenemos

$$\frac{\partial(u - U)}{\partial \tau} + N_\omega(u - U) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}.$$

Esta ecuación, tiene la misma forma que (3.2.26) con las mismas condiciones dadas por

$$u(0, \tau) = 0,$$

$$u(Y \rightarrow \infty, \tau) = U.$$

Por lo tanto su solución está dada por la Ec. (3.2.27) como

$$u_{mB}(Y, \tau) = u(Y, T) = \cos[\tau] - e^{-Y\sqrt{r+N_\omega}} \cos(\tau - Y\sqrt{r - N_\omega}),$$

es decir, tenemos el mismo caso de la sección 3.2.4 de modo que la discusión física es la misma que en ese caso.

CAPÍTULO 4

Análisis del Generador MHD y de su Acoplamiento a un Sistema Solar

En este capítulo analizaremos el funcionamiento de un generador alterno MHD y para tal efecto realizaremos un estudio del flujo laminar oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor en un ducto rectangular, inmerso en un campo magnético uniforme transversal. Primero consideraremos el caso límite en que las paredes laterales del ducto, paralelas al campo magnético, son eléctricamente conductoras y están muy alejadas entre si, y de la región donde se analiza el flujo. Por su parte las paredes perpendiculares al campo se consideran aislantes eléctricos. Este problema, se puede modelar físicamente como el flujo oscilatorio unidimensional entre placas paralelas infinitas, conocido como el flujo de Hartmann oscilatorio, que presenta una solución analítica sencilla. A partir del flujo de Hartmann es posible establecer un modelo simplificado del generador alterno MHD y determinar la potencia eléctrica y la potencia de flujo del mismo, así como su eficiencia eléctrica en función de la intensidad del campo magnético, la frecuencia de oscilación y la resistencia de carga. A partir de la expresión para la eficiencia del generador MHD, se obtiene una eficiencia global para un sistema que utiliza este generador acoplado a una fuente solar por medio de fibras ópticas, y se analiza la factibilidad de acoplamiento. Posteriormente, con el fin de analizar el efecto de la conductividad eléctrica finita de las paredes del ducto resonador, se formula el problema para el flujo oscilatorio laminar completamente desarrollado de metal líquido en un ducto rectangular bajo un campo magnético transversal uniforme. Se obtiene una solución numérica para el flujo en la región del núcleo- capa límite lateral con condiciones de frontera para paredes conductoras delgadas así como para paredes aislantes. Se presenta el método de solución del sistema de ecuaciones, a saber, el método espectral de colocación, y se discuten algunos aspectos relacionados a su implementación numérica. Posteriormente, se presentan soluciones numéricas para diferentes intensidades de campo magnético, frecuencia de oscilación, así como para diferentes valores de conductividad eléctrica de las paredes.

4.1. Modelo unidimensional de un generador MHD alterno

Primero consideraremos un canal con la estructura típica de un generador MHD, el cual consiste de un ducto rectangular de longitud X_l inmerso en un campo magnético B transversal uniforme, a través del cual oscila armónicamente un metal líquido en flujo laminar. Las paredes del ducto perpendiculares al campo tienen una longitud $2W$ y se suponen no conductoras de la electricidad mientras que las paredes paralelas al campo se consideran conductores ideales de anchura $2H$

haciendo un contacto eléctrico perfecto con el fluido. Debido a que existe un movimiento relativo entre el fluido y el campo magnético se induce una corriente eléctrica alterna \mathbf{j} , como se describió explícitamente en el capítulo 3, y que puede ser extraída a través de un circuito externo.

Por otra parte, si suponemos que W y X_l son mucho mayores que H y que la región de análisis se encuentra muy alejada de los extremos del ducto, entonces el flujo puede aproximarse como el flujo entre dos placas paralelas infinitas, conocido como flujo de Hartmann oscilatorio. Este flujo es el análogo en MHD al flujo de Poiseuille oscilatorio en la mecánica de fluidos ordinaria. Su solución analítica permite verificar claramente los límites para campos magnéticos nulos o muy intensos, y por otra parte, reproduce en gran medida la estructura característica de los flujos oscilatorios laminares en canales MHD, dando una información hidrodinámica importante para el estudio de flujos más complicados.

Explícitamente el problema consiste en el flujo oscilatorio laminar de un fluido conductor entre dos planos paralelos infinitos separados una distancia $2H$. Se supone que el fluido es viscoso e incompresible y se considera un campo magnético externo constante normal a los planos. El flujo está completamente desarrollado de manera que el problema es unidimensional existiendo sólo una componente de la velocidad (componente en dirección x) que depende de la coordenada normal a los planos (coordenada y). El flujo es producido por una gradiente de presión en la dirección axial que oscila armónicamente como $G \cos(\omega t)$.

Las ecuaciones adimensionales que describen el flujo MHD en ductos están dadas por (3.2.8)-(3.2.11) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \varepsilon (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -N_\omega \nabla p + \frac{1}{R_\omega} \nabla^2 \mathbf{u} + N_\omega \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0,$$

donde ahora la longitud característica, L , del flujo está dada por la mitad de la distancia entre las paredes paralelas al campo, es decir $L = W$. Como se mencionó previamente, se considera que el flujo es incompresible ya que la longitud de onda acústica es mucho mayor que la longitud característica del flujo, es decir, $\lambda \gg W$.

Al igual que el flujo oscilatorio MHD en capa límite, el campo magnético adimensionalmente está dado por $\mathbf{B} = \hat{y}$, donde \hat{y} es el vector unitario en la dirección transversal y . Además, también supondremos que se cumple la condición de oscilaciones de amplitud pequeña, es decir, $\varepsilon \ll 1$, aunque independientemente de esta suposición, por tratarse de un flujo completamente desarrollado

el término convectivo se anula idénticamente. Por lo tanto tenemos sólo una componente de la velocidad en dirección axial y una componente de la corriente en dirección z y éstas sólo son funciones de Y y τ , es decir, $u = u(Y, \tau)$ y $j_z = j_z(Y, \tau)$.

Con estas simplificaciones las ecuaciones anteriores se reducen a

$$(4.1.1) \quad N_\omega^{-1} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial X} + M^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - j_z,$$

$$j_z = -\frac{\partial \phi}{\partial Z} + u, \quad \frac{\partial j_z}{\partial Z} = 0.$$

Definimos además el factor de carga como

$$(4.1.2) \quad K = \frac{\partial \phi}{\partial Z},$$

y puede demostrarse que para este tipo de flujos que tienen lugar en un plano que contiene al campo aplicado, K es a lo más una función del tiempo [31]. En principio, el valor K depende de las condiciones del circuito eléctrico externo.

Entonces, la ecuación a resolver para el flujo de Hartmann es

$$(4.1.3) \quad N_\omega^{-1} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial X} + M^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + K - u.$$

Si suponemos que el sistema coordenado se encuentra a la mitad de la distancia entre las placas (Ver figura 4.2), las condiciones de frontera son

$$(4.1.4) \quad u(\pm a) = 0,$$

donde $a = H/W$ es la razón de aspecto del ducto que en este caso se supone mucho menor que 1.

A su vez, el gradiente de presión impuesto es de la forma

$$\frac{\partial p}{\partial X} = G \cos(\tau),$$

donde G es la amplitud adimensional del gradiente. O bien, en notación compleja

$$\frac{\partial p}{\partial X} = G e^{i\tau},$$

donde la parte real de la expresión anterior es la que tiene significado físico. Además suponemos que

$$(4.1.5) \quad u(Y, \tau) = u_o(Y) e^{i\tau},$$

$$(4.1.6) \quad K = K_o e^{i\tau},$$

donde $K_o = cte$. Para un generador eléctrico conectado a una resistencia de carga, K_o toma valores en un intervalo que va de cero (condiciones de corto circuito) a uno (condiciones de circuito abierto) [1].

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de movimiento (4.1.3) obtenemos

$$iN_w^{-1}u_o = G + M^{-2}\frac{du_o}{dY_2} + K_o - u_o,$$

o bien

$$(4.1.7) \quad \frac{d^2u_o}{dY^2} - \lambda^2 u_o = M^2(G - K_o),$$

donde $\lambda^2 = M^2(1 + iN_w^{-1})$. El valor característico λ puede escribirse en la forma $\lambda = \alpha + i\beta$ donde

$$(4.1.8) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = M \left[\frac{\sqrt{1 + N_w^{-2}} \pm 1}{2} \right]^{1/2}.$$

La solución a la ecuación (4.1.7) que satisface las condiciones (4.1.4) es

$$(4.1.9) \quad u_o(Y) = u_{op} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda Y)}{\cosh(\lambda a)} \right],$$

donde $u_{op} = -\frac{G-K_o}{1+iN_w^{-1}}$. La solución completa de la ecuación (4.1.3) es entonces

$$(4.1.10) \quad u(Y, \tau) = u_{op} \left[1 - \frac{\cosh(\lambda Y)}{\cosh(\lambda a)} \right] e^{i\tau}.$$

La velocidad $u(Y, \tau)$ está normalizada por una velocidad U_o es decir

$$u(Y, \tau) = \frac{u_d(y)e^{i\omega t}}{U_o}$$

donde $u_d(y)$ es una cantidad dimensional, dada por [36]

$$(4.1.11) \quad u_d(y) = \frac{H^2}{\lambda^2} \left(\frac{G}{\eta} + \frac{M}{H} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} E_o \right) \left(\frac{\cosh\left(\lambda \frac{y}{H}\right)}{\cosh(\lambda)} - 1 \right).$$

Es decir, esta ecuación es la solución de la ecuación (4.1.7) con condiciones (4.1.4) en términos dimensionales.

Si hacemos que U_o sea la velocidad espacial promedio en la sección transversal, es decir

$$(4.1.12) \quad U_o = \frac{1}{2H} \int_{-H}^H u_d(y) dy = \frac{H^2}{\lambda^2} \left(\frac{G}{\eta} + \frac{M}{H} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} E_o \right) \left(\frac{\tanh(\lambda)}{\lambda} - 1 \right),$$

entonces adimensionalmente

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a u_o(Y) dY = 1,$$

ya que $u_o(Y) = u_d(y)/U_o$, donde $u_o(Y)$ está dada por la ecuación (4.1.9). Es decir,

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a u_o(Y) dY = u_{op} \left[1 - \frac{\tanh(\lambda a)}{\lambda a} \right] = 1,$$

de donde encontramos que

$$(4.1.13) \quad u_{op} = \frac{\lambda a}{\lambda a - \tanh(\lambda a)}.$$

Entonces, la ecuación de la velocidad dada por (4.1.10) también puede expresarse como

$$(4.1.14) \quad u(Y, \tau) = \lambda a \left(\frac{\cosh(\lambda a) - \cosh(\lambda Y)}{\lambda a \cosh(\lambda a) - \sinh(\lambda a)} \right) e^{i\tau}.$$

Con el fin de separar los efectos de la frecuencia de oscilación ω y de la intensidad de campo magnético B_o , para la descripción de los perfiles de velocidad dados por la ecuación (4.1.14) se utilizan los parametros R_ω y M , en vez de N_ω y M , recordando que $N_\omega = M^2/R_\omega$.

Una manera conveniente de analizar los perfiles de velocidad es haciendo referencia a la ecuación de movimiento (4.1.1), que expresa el balance entre las distintas fuerzas involucradas. Cuando N_ω es muy grande, el término inercial es muy pequeño ($N_\omega^{-1} \partial u / \partial \tau \approx 0$). En tal caso el gradiente de presión que origina al flujo se equilibra con la fuerza viscosa y la fuerza de Lorentz, y se tiene una velocidad que está en fase con el gradiente de presión. La fuerza viscosa sólo es considerable cerca de las paredes en la capa límite mientras que en el núcleo el balance se establece principalmente entre el gradiente de presión y la fuerza de Lorentz. Por su parte, esta última siempre está en la dirección contraria al movimiento del fluido y tenderá a frenarlo, achatando el perfil de velocidades en el núcleo del flujo. Cuando N_ω disminuye, lo que puede ocurrir al disminuir B_o o aumentar la frecuencia de oscilación ω , el término inercial se vuelve considerable y entonces se introduce un desfase de $\pi/2$ entre la velocidad y el gradiente de presión. Esto da lugar a diferencias de velocidad entre el núcleo y las capas límite puesto que las fuerzas viscosas son distintas en cada región. Como veremos a continuación, al incrementar la interacción magnética, estas diferencias pueden suavizarse obteniendo un flujo uniforme (tipo tapón) que alcanza la velocidad cero en las capas límite.

En las figuras 4.1a y 4.1b se pueden observar los perfiles de velocidad en un cuarto de ciclo como función de la coordenada transversal Y a diferentes tiempos para un valor fijo de R_ω , a saber, $R_\omega = 1.37 \times 10^6$. Este valor corresponde a sodio líquido a 130°C y a una frecuencia $f = 1\text{KHz}$, que son las condiciones experimentales reportadas por Swift [11]. Las figuras corresponden a valores del número de Hartmann de $M = 100$ y $M = 1000$, respectivamente. El principal efecto del campo magnético es el aplanamiento del perfil de la velocidad en la región central. Para $M = 100$ se observa que cuando $\tau = 0$ la velocidad en la región cercana a las paredes es mayor que en el centro. Al aumentar τ , la velocidad se va uniformizando en el núcleo del flujo, mientras que cerca de las paredes la velocidad empieza a tomar valores negativos ya que es en esta región donde el fluido se frena primero. En la gráfica se observa cómo, al principio del ciclo en las regiones cercanas al centro, el perfil de velocidad se aplanan mientras que en las paredes el cambio de sentido es más rápido debido a que en esta región la inercia es menor. El cambio de sentido en la velocidad del fluido manifiesta el hecho de que el fluido experimenta un gradiente de presión armónico. En la segunda figura se grafican los perfiles de velocidad para las mismas condiciones que en la gráfica anterior, pero con $M = 1000$. En esta gráfica, el comportamiento de los perfiles de velocidad es muy parecido al comportamiento anterior con la diferencia de que el aplanamiento del perfil es más pronunciado de modo que la velocidad es uniforme en la mayor parte de la sección transversal. Es decir, el perfil de la velocidad es muy similar al perfil del flujo de Hartmann estacionario.

En las siguientes figuras se muestran los efectos de la intensidad del campo magnético y de la frecuencia de oscilación para un tiempo fijo.

En la figura 4.2 se muestra el perfil de velocidades como función de la coordenada transversal Y en un cuarto de la sección transversal del ducto a un tiempo fijo, $\tau = 0$, para $R_\omega = 1.37 \times 10^6$ y diferentes valores del número de Hartmann, a saber, 100, 1000, 3000. En la gráfica se puede observar que para $M = 100$, en la región cercana a la pared la velocidad es mayor que en el núcleo. Este efecto se ve disminuido conforme aumenta la intensidad del campo magnético, ya que el perfil de velocidad se aplanan conforme aumenta el número de Hartmann. En la figura 4.3 se muestra el perfil de velocidad para un número de Hartmann de $M = 1000$ y diferentes valores del número de Reynolds oscilatorio, R_ω . Conforme éste aumenta, la velocidad cerca de la pared se incrementa con respecto a la velocidad en el centro del ducto.

En la figura 4.4, analizamos el efecto de la frecuencia de oscilación es decir, de R_ω , a un tiempo fijo $\tau = 0$, para una intensidad baja del campo magnético, $M = 10$. En la gráfica se muestra como el perfil parabólico que se obtiene a frecuencias bajas (R_ω menores que 10^6) se va aplanando en el centro conforme R_ω aumenta al tiempo que la velocidad se incrementa en la capa límite.

En general, podemos observar que cuando el efecto inercial determinado por R_ω es mayor que el efecto del campo magnético, el fluido que se encuentra en la región cercana a la pared tiende a aumentar su velocidad respecto al núcleo del flujo, conforme aumenta la frecuencia de oscilación.

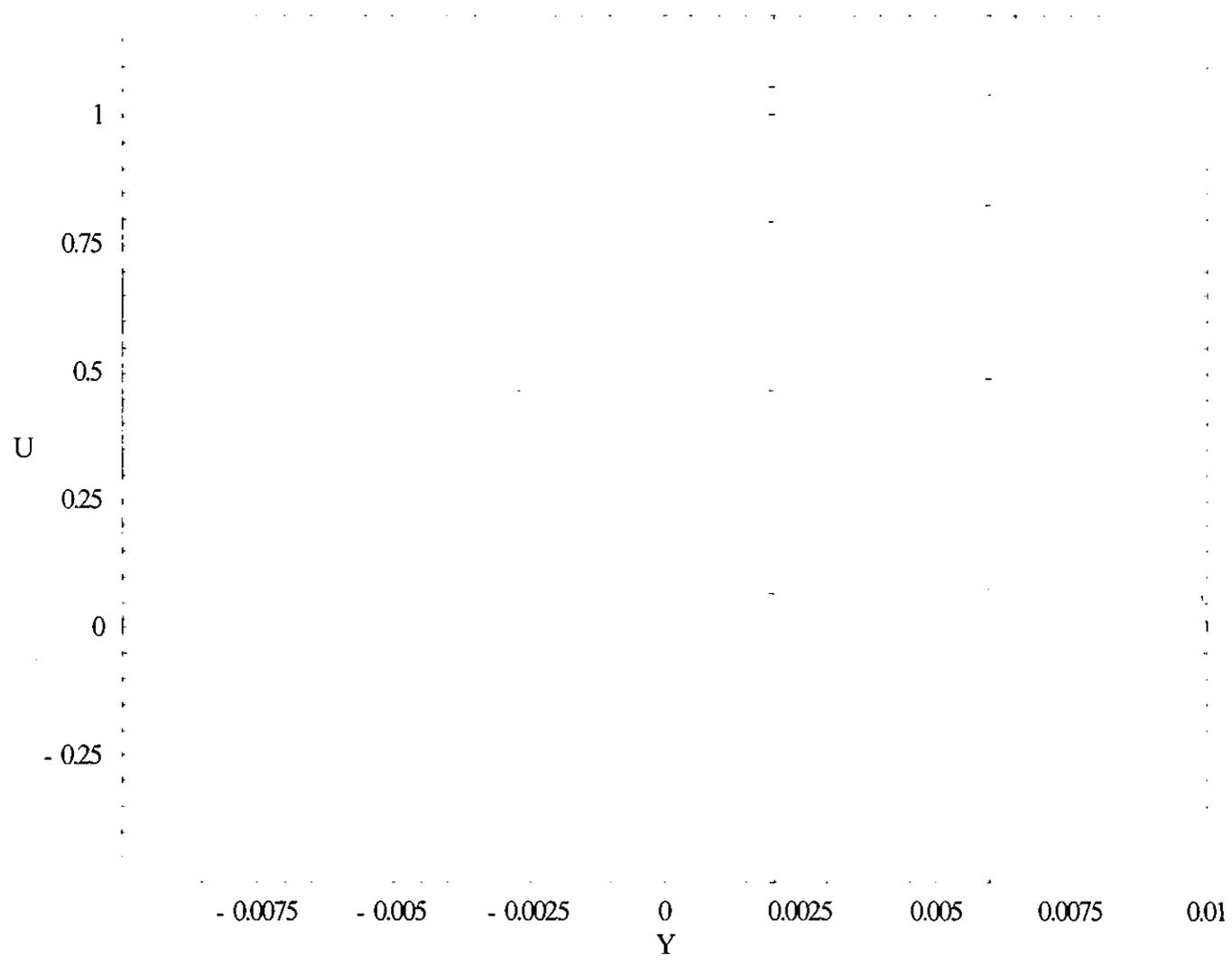


Figura 4.1a. Velocidad vs Y hasta un cuarto de ciclo. $M=100$ y $R_{\omega}=1.37 \times 10^6$

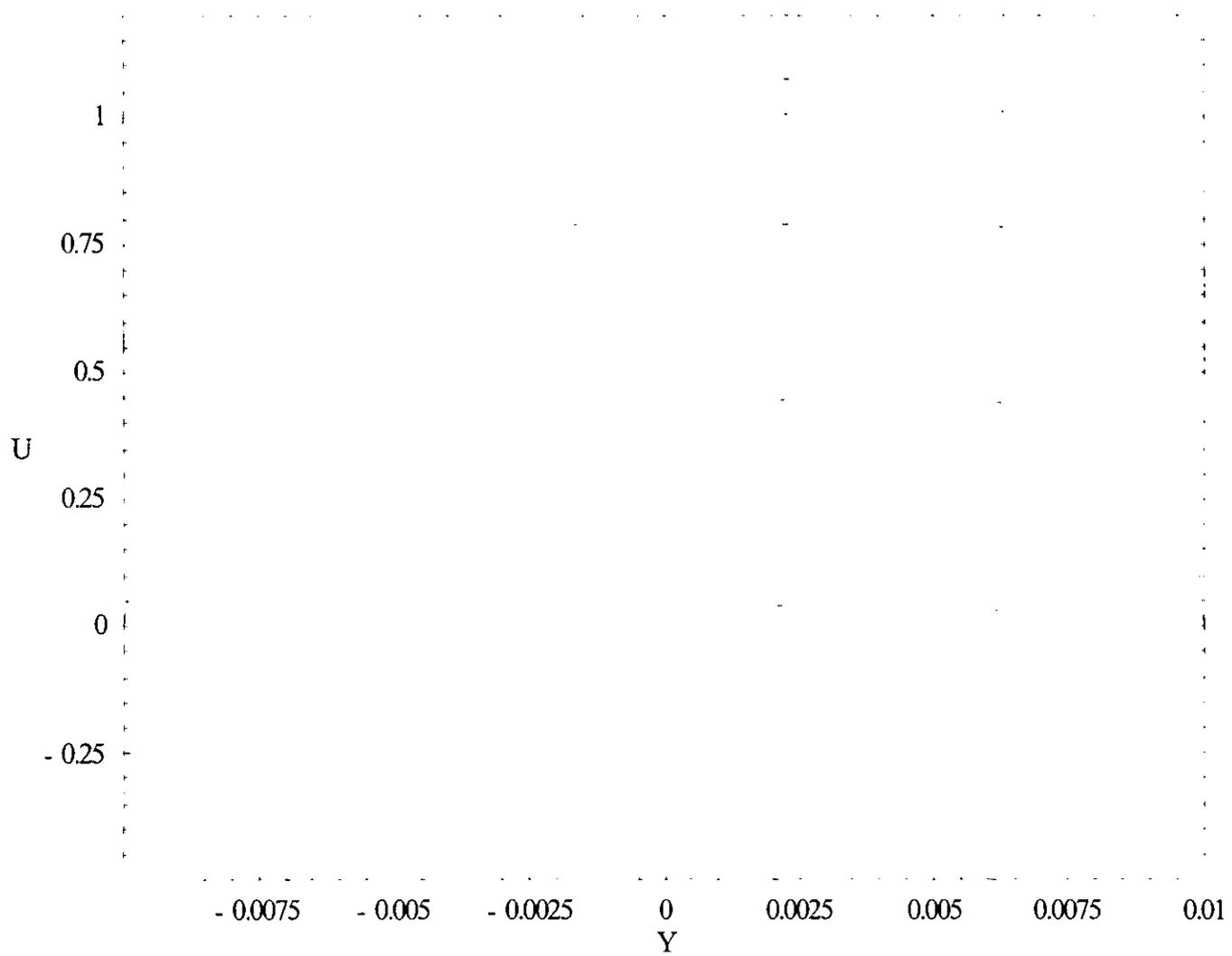


Figura 4.1b. Velocidad vs Y hasta un cuarto de ciclo. $M=1000$ y $R_{\omega}=1.37 \times 10^6$

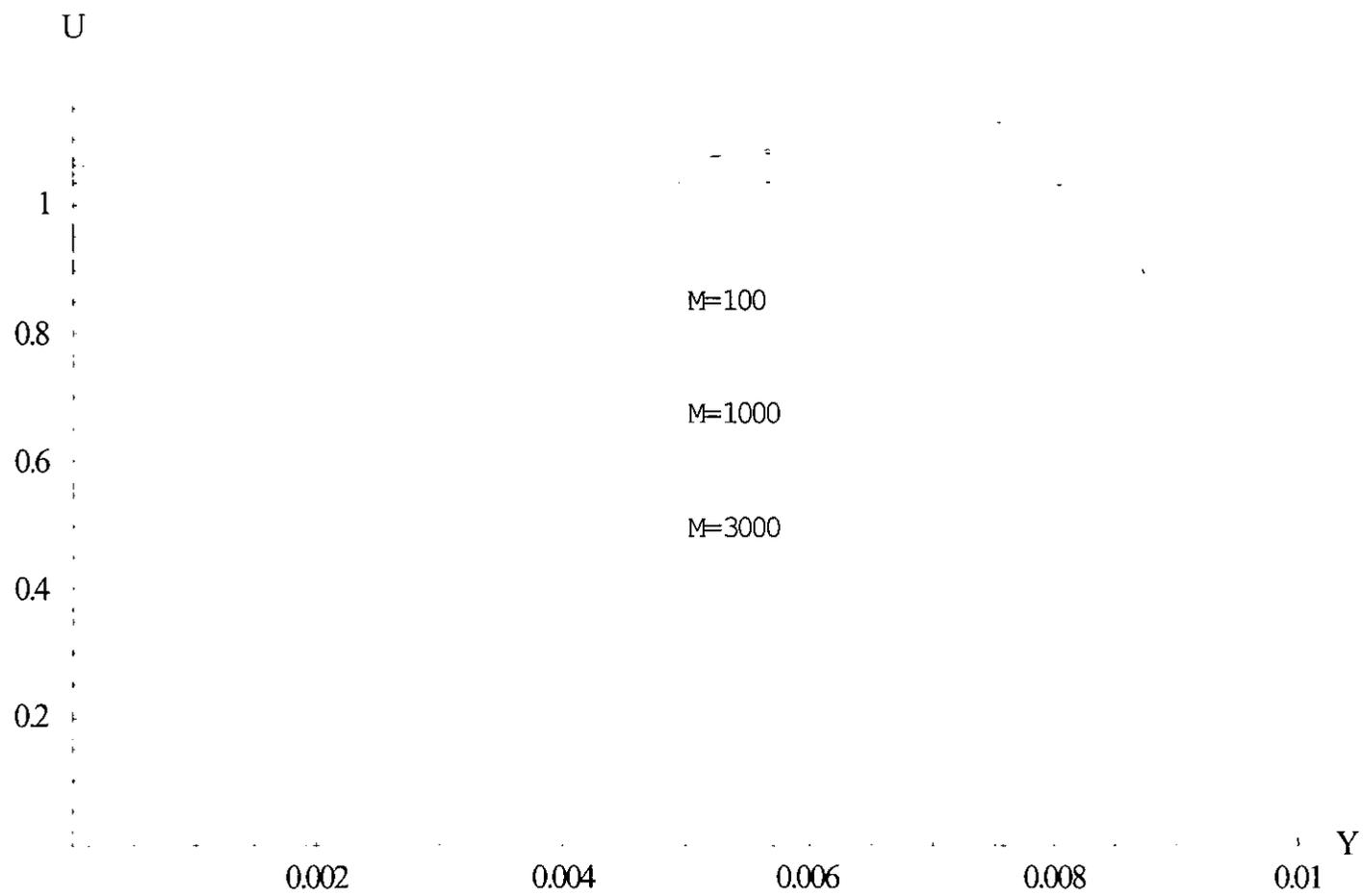


Figura 4.2. Velocidad vs Y para diferentes M. $\tau=0$ y $R_{\omega}=1.37 \times 10^6$

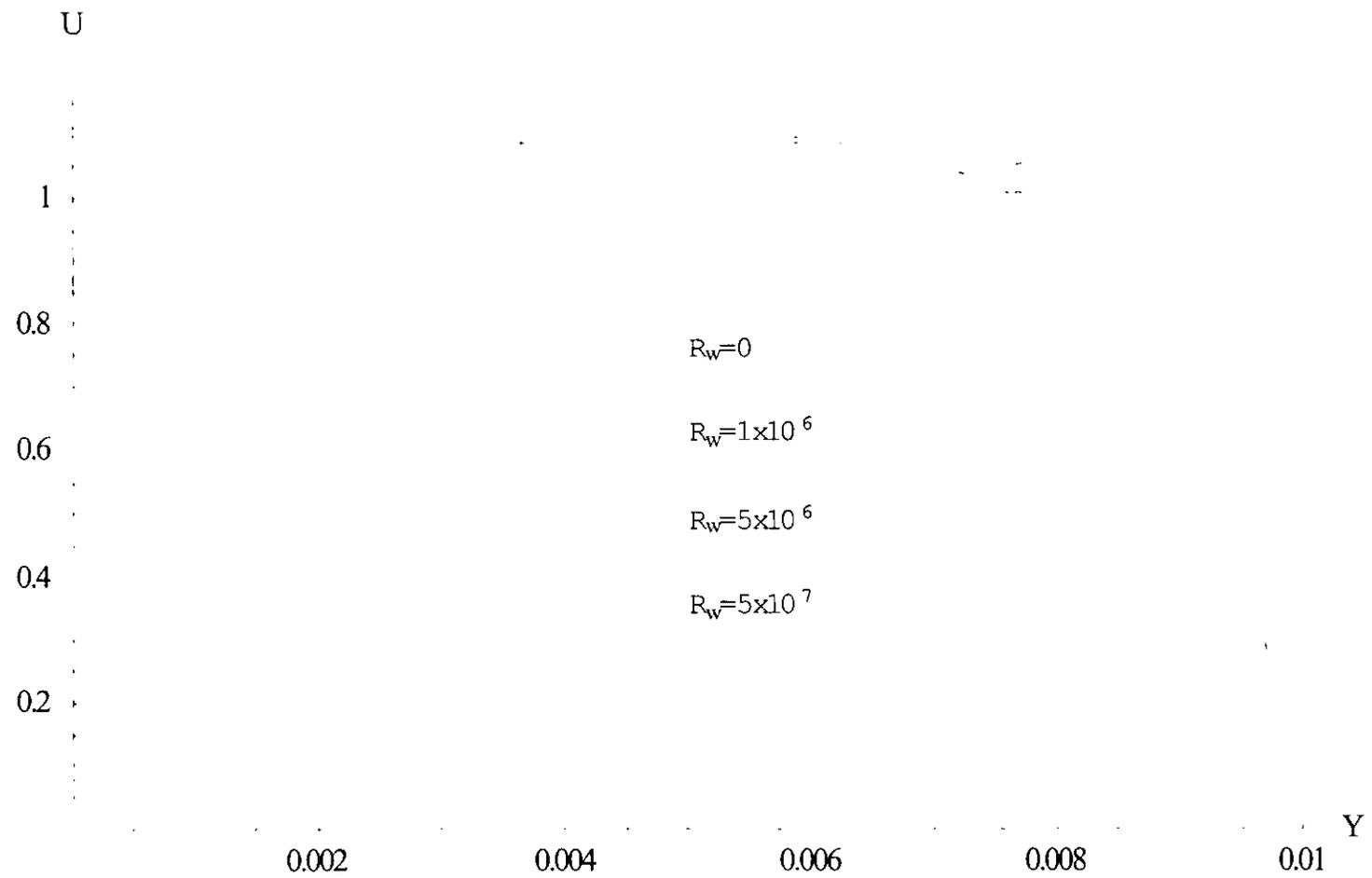


Figura 4.3. Velocidad vs Y para diferentes R_w . $\tau=0$ y $M=1000$

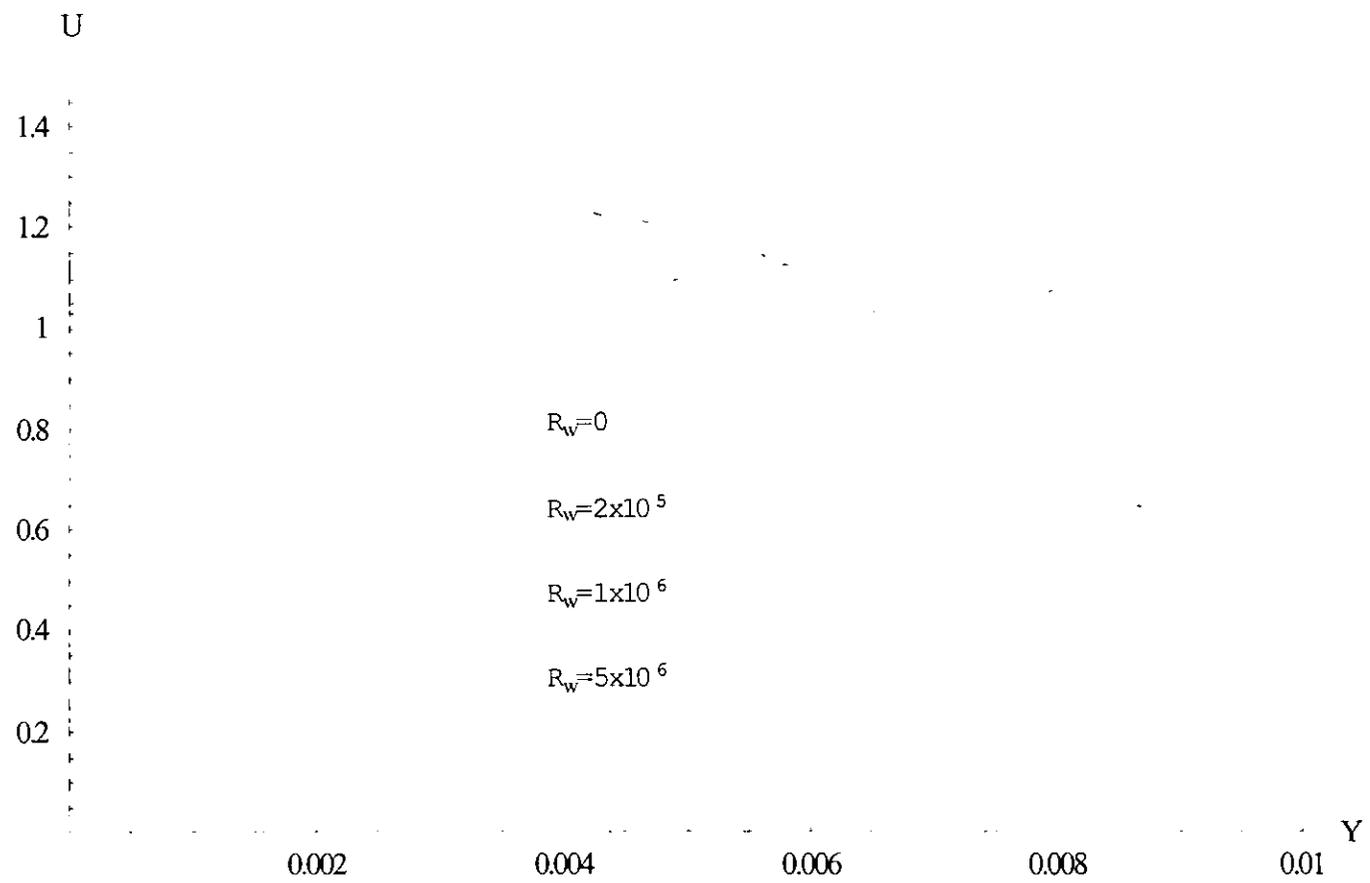


Figura 4.4. Velocidad vs Y para diferentes R_w , $\tau=0$ y $M=10$

Ahora bien, la potencia local instantánea del generador está dada por $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. En el sistema de referencia del laboratorio el término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ es igual a la tasa de disipación de Joule más la tasa de trabajo hecho en contra de la fuerza de Lorentz ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$) que se opone al movimiento del fluido. Por otra parte, de la ley de Ohm (Ec.(3.2.10)), en términos del factor de carga $K = K_o e^{i\tau}$, se tiene

$$(4.1.15) \quad j_z = (u_o(y) - K_o)e^{it}.$$

Notese que en el caso particular en el que la corriente neta en la sección transversal es cero (condiciones de circuito abierto) tenemos

$$\int_{-1}^1 j_z dY = 0, \quad \Rightarrow \quad K_o = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_o(y) dY = 1.$$

De la ley de Ohm expresada por la ecuación (4.1.15) y de las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.6) el término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ se puede expresar como

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \text{Re} \{ (u_o(y) - K_o)e^{i\tau} \} \text{Re} \{ -K_o e^{i\tau} \}.$$

La potencia eléctrica total de salida del generador se obtiene promediando en el tiempo durante un ciclo τ o un número par de ciclos $2n\tau$ la cantidad $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ e integrando en el volumen total V del generador. Entonces

$$\langle P_e \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV d\tau.$$

Se puede observar que la expresión $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ contiene productos de funciones armónicas en el tiempo, lo que da lugar a una contribución armónica temporal que oscila con el doble de la frecuencia original y una parte estacionaria. Después de la integración en el tiempo, la parte armónica temporal desaparece y la estacionaria nos da un valor diferente de cero.

Entonces, una vez realizada la integración encontramos que la expresión adimensional para la potencia eléctrica total, $\langle P_e \rangle$, está dada por

$$(4.1.16) \quad \langle P_e \rangle = 2l(1 - K_o)K_o,$$

donde l es la longitud adimensional del canal MHD y K_o va de 0 (corto circuito) a 1 (circuito abierto). Es importante hacer notar que aún cuando en la forma adimensional dada por la ecuación (4.1.16), la potencia eléctrica no depende explícitamente de la intensidad del campo magnético ni de la frecuencia de oscilación, la potencia eléctrica total en su forma dimensional si depende de estas cantidades. Es decir,

$$\langle P_e \rangle = \frac{\langle P_e \rangle'}{\rho U_o^2 B_o^2 L^3},$$

donde $\langle P_e \rangle'$ es la potencia eléctrica total dimensional y U_o está dada por la ecuación (4.2.1).

En la figura 4.5, graficamos la potencia eléctrica total $\langle P_e \rangle$ por unidad de longitud l como función de K_o . En la gráfica se observa que el comportamiento de la potencia eléctrica es parabólico y que su máximo valor se obtiene para $K_o = 0.5$. Este valor se obtiene cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna del generador, lo que se conoce como condición de igualdad de impedancias [19].

Ahora bien, definimos la potencia de flujo total como

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \, dV d\tau.$$

El término $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ representa la tasa a la que el campo electromagnético hace trabajo sobre el fluido, transformándose en energía cinética o ayudando a vencer otras fuerzas. Dicho de otra forma, $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ es la energía por unidad de tiempo que debe suministrarse al fluido (por medio del gradiente de presión) para vencer la fuerza de Lorentz y mantener el movimiento oscilatorio.

Ya que $\mathbf{B} = \hat{y}$, $\mathbf{j} = j_z \hat{k}$ y $\mathbf{u} = u \hat{i}$, tenemos que

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = -Re \{j_z\} Re \{u\}.$$

De la ley de Ohm expresada por la ecuación (4.1.15) y de las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.6) el término $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ se puede expresar como

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = -Re \{ (u_o(y) - K_o) e^{i\tau} \} Re \{ u_o e^{i\tau} \}.$$

Al igual que con el término $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ contiene funciones armónicas en el tiempo y términos estacionarios. Estos últimos dan una contribución distinta de cero una vez realizada la integración temporal.

Explícitamente, se tiene que la expresión para $\langle P_f \rangle$ está dada como

$$\langle P_f \rangle = \frac{\{ (2\alpha\beta(-(\alpha^2 + \beta^2) + K_o(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \cosh(2\alpha) + \alpha(2\beta(-(\alpha^2 + \beta^2) + K_o(-1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \cos(2\beta) - (\alpha^2 + (-3 + 4K_o)\beta^2) \sin(2\beta)) - \beta((-3 + 4K_o)\alpha^2 + \beta^2) \sinh(2\alpha) \}}{\{ \alpha\beta(-\cos(2\beta) + \alpha^2 \cos(2\beta) + \beta^2 \cos(2\beta) + (1 + (\alpha^2 + \beta^2)) \cosh(2\alpha) - 2\beta \sin(2\beta) - 2\alpha \sinh(2\alpha) \}},$$

donde α y β están dadas por (4.1.8). Al igual que la potencia eléctrica total la potencia de flujo $\langle P_f \rangle'$ está adimensionalizada como

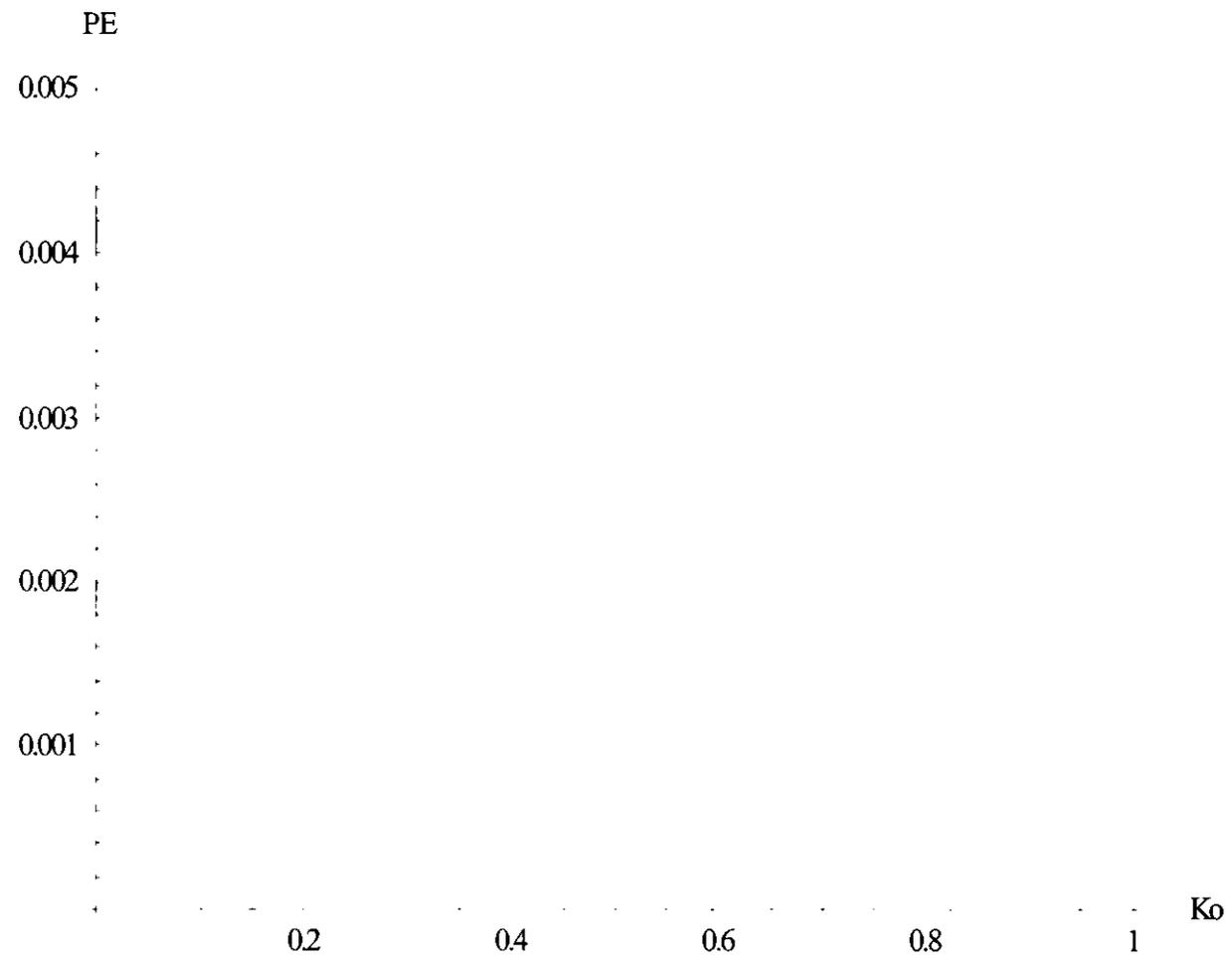


Figura 4.5. Potencia Eléctrica, PE vs Factor de carga, Ko

$$\langle P_f \rangle = \frac{\langle P_f \rangle'}{\rho U_o^2 B_o^2 L^3}.$$

En la figura 4.6, se presenta $\langle P_f \rangle / l$ como función del número de Hartmann M , para diferentes valores del Reynolds oscilatorio R_ω , y para la condición de potencia máxima, $K_o = 0.5$. En la gráfica se observa que la potencia se incrementa de manera significativa conforme disminuye R_ω , para valores del número de Hartmann M menores que 500. Para valores de M mayores que 4000, se observa que la potencia prácticamente es la misma para cualquier valor de R_ω y conforme el número de Hartmann se incrementa la potencia de flujo tiende a un valor constante. De la gráfica podemos deducir que la potencia de flujo prácticamente no depende de R_ω para valores grandes de M (mayores que 4000 aprox.).

Por otra parte, en la figura 4.7, se muestra $\langle P_f \rangle / l$ como función del número de Reynolds oscilatorio R_ω , para diferentes números de Hartmann M característicos de un generador MHD, y para $K_o = 0.5$. Consistentemente con la figura 4.6, en la gráfica se puede observar que la potencia disminuye conforme aumenta R_ω para diferentes M , pero para valores de R_ω mayores que 6×10^7 la potencia es prácticamente la misma para cualquier valor de M . De estos análisis podemos deducir que en el límite cuando R_ω o M tienden a infinito la potencia de flujo tiende a un valor constante.

La eficiencia es fundamental en el diseño de un generador MHD. Comúnmente, la eficiencia isotrópica está definida como la razón entre la potencia eléctrica de salida, P_e , y la potencia de flujo, P_f , integrada sobre el volumen total V del canal MHD [1]. En el caso de un generador MHD alterno, también se integra en el tiempo sobre un periodo τ , (o en un número par de periodos). Por lo tanto, la eficiencia eléctrica isotrópica del generador esta definida como

$$(4.1.17) \quad \eta_e = \frac{\langle P_e \rangle}{\langle P_f \rangle} = \frac{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV \, d\tau}{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \, dV \, d\tau}.$$

La eficiencia η_e da la fracción de trabajo mecánico hecho por el fluido para vencer la fuerza magnética, que es convertida en potencia útil.

Tomando en cuenta las expresiones anteriores de $\langle P_e \rangle$ y $\langle P_f \rangle$, explícitamente se tiene que

$$\eta_e = \frac{2\alpha\beta K_o(K_o - 1) \{((\alpha^2 + \beta^2) - 1) \cos(2\beta) + ((\alpha^2 + \beta^2) + 1) \cosh(2\alpha) - 2(\beta \sin(2\beta) + \alpha \sinh(2\alpha))\}}{2\alpha\beta \{(-(\alpha^2 + \beta^2) + K_o((\alpha^2 + \beta^2) - 1) \cos(2\beta)) + (K_o((\alpha^2 + \beta^2) + 1) - (\alpha^2 + \beta^2)) \cosh(2\alpha) - \alpha(\alpha^2 + (4K_o - 3)\beta^2) \sin(2\beta) - \beta(\beta^2 + (4K_o - 3)\alpha^2) \sin(2\alpha)\}}.$$

En la figura 4.8, se muestra la eficiencia eléctrica, η_e , como función del factor de carga, K_o , para $R_\omega = 1.37 \times 10^6$. En esta gráfica se observa que conforme K_o se incrementa la eficiencia eléctrica también aumenta hasta llegar a un valor máximo, el cual crece al incrementar M . Finalmente,

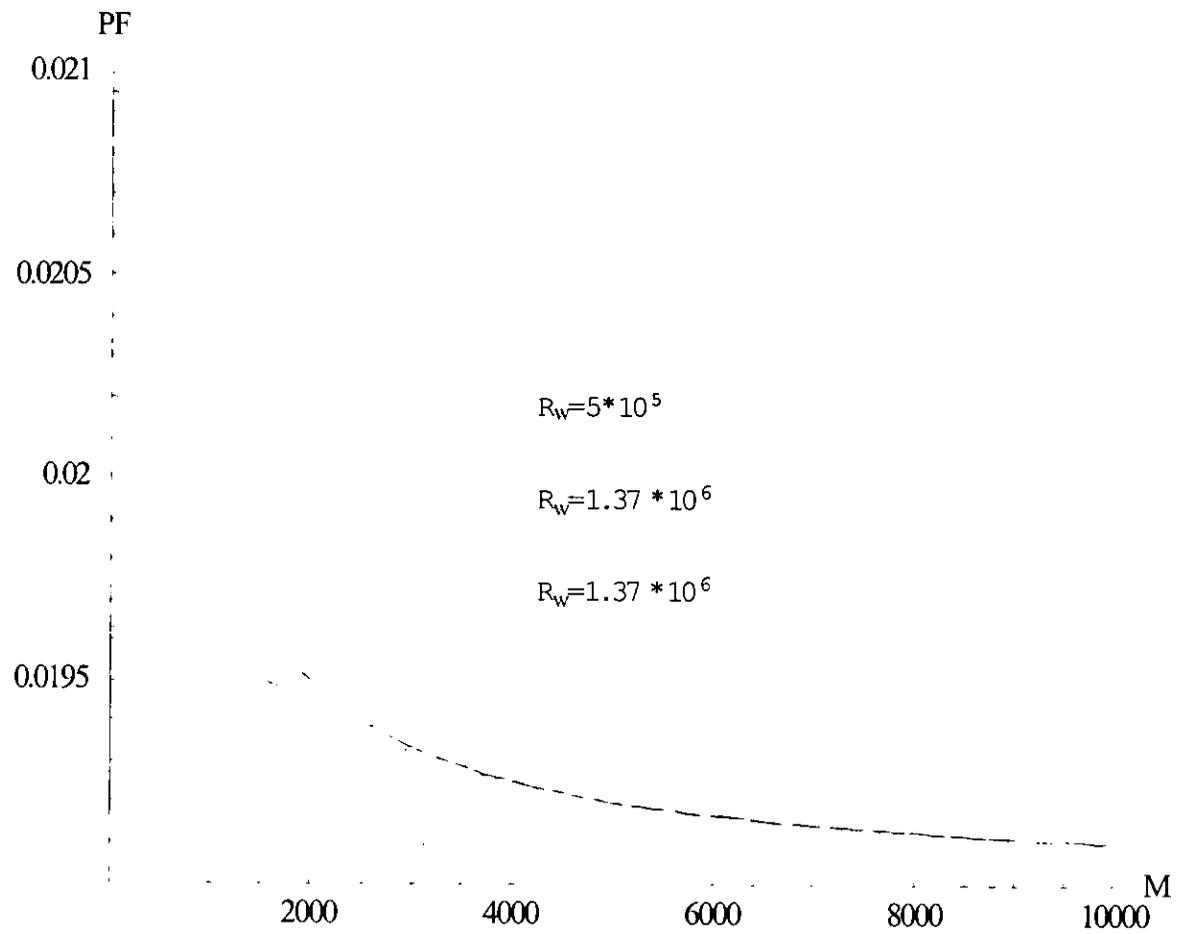


Figura 4.6. Potencia de Flujo, PF vs M para diferentes R_w . $Ko=0.5$

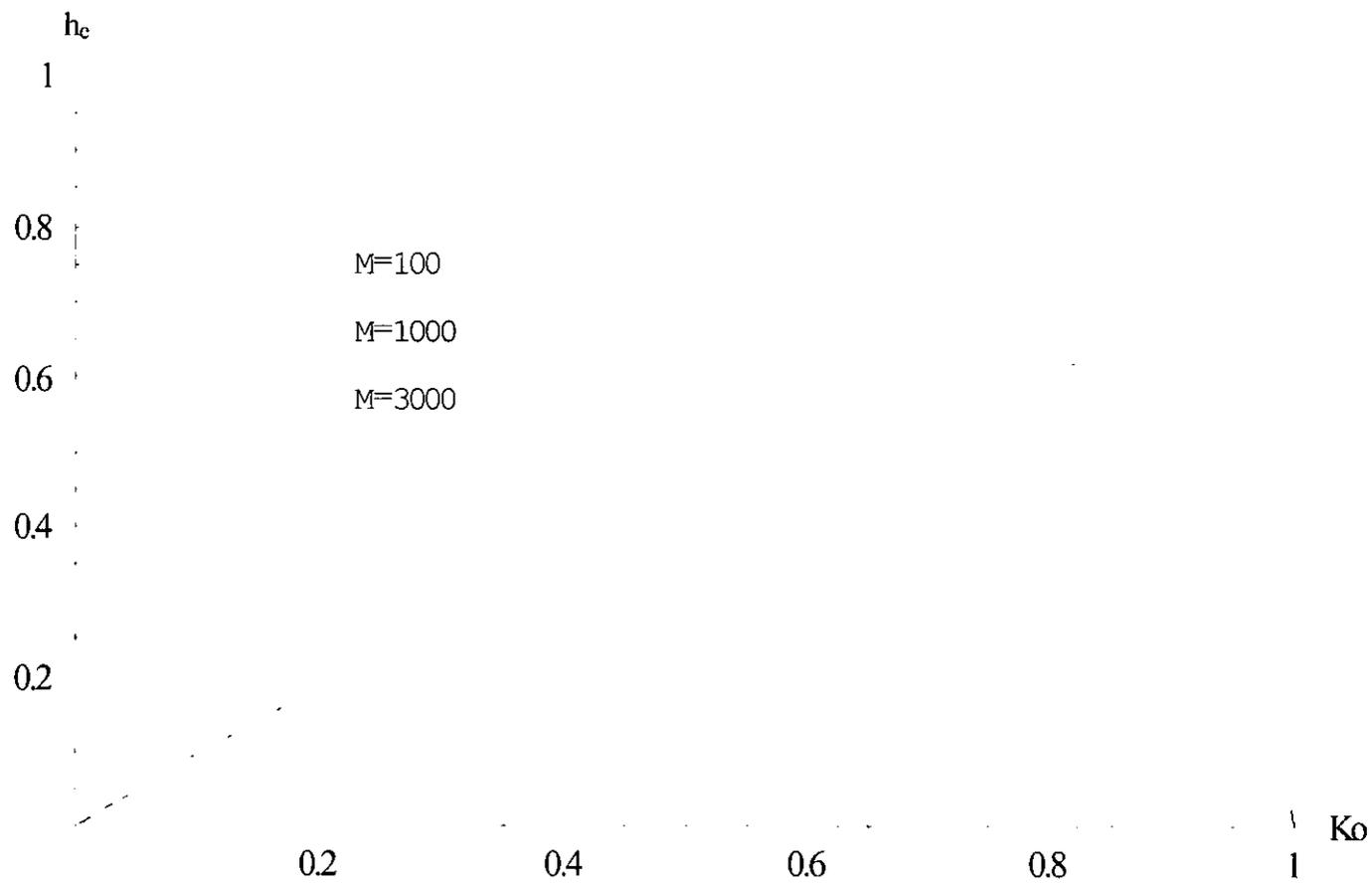


Figura 4.8. Eficiencia Eléctrica vs K_o para diferentes M . $R_\omega = 1.37 \times 10^6$

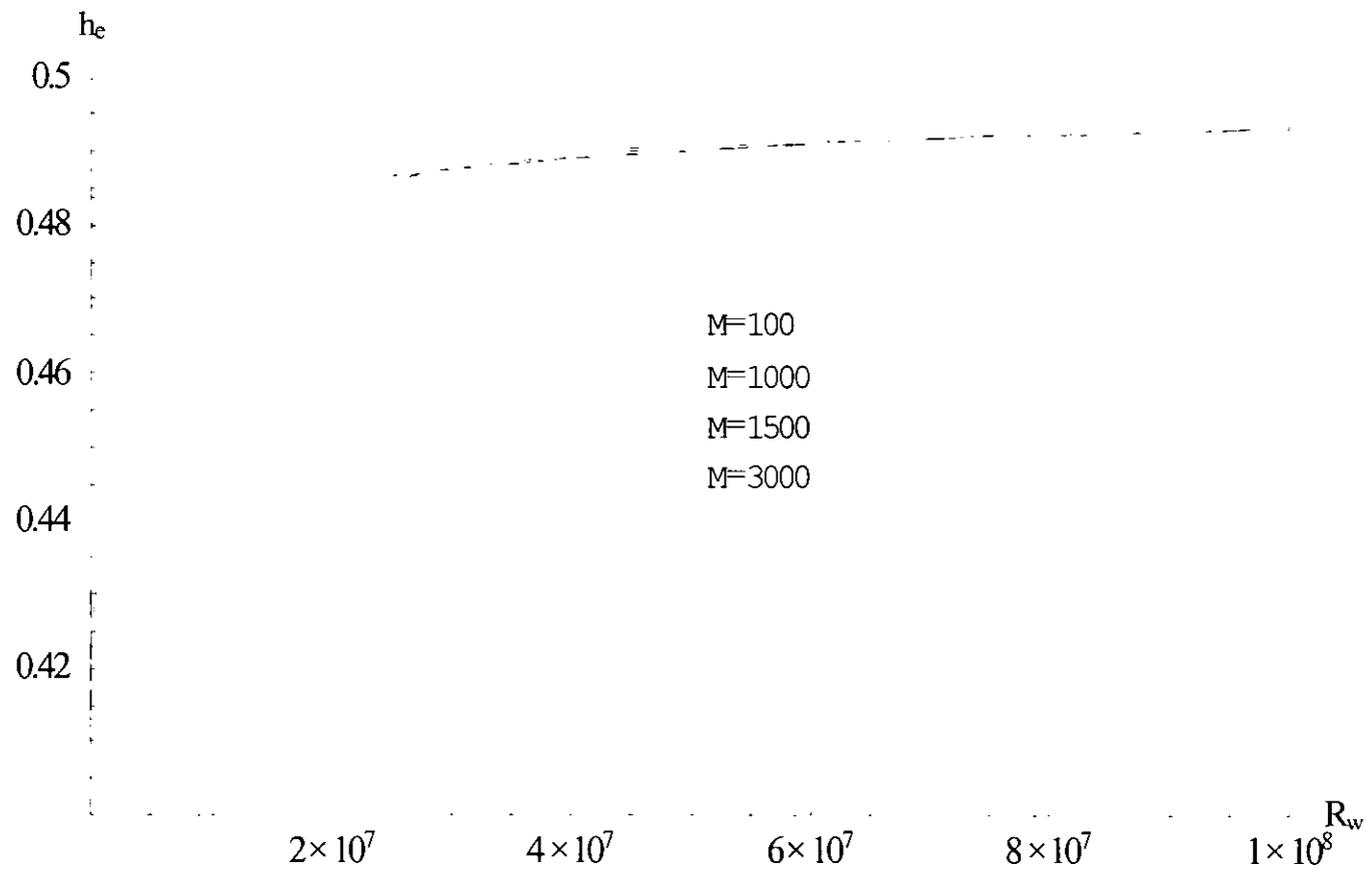


Figura 4.9. Eficiencia Eléctrica vs R_w para diferentes M . $K_o=0.5$.

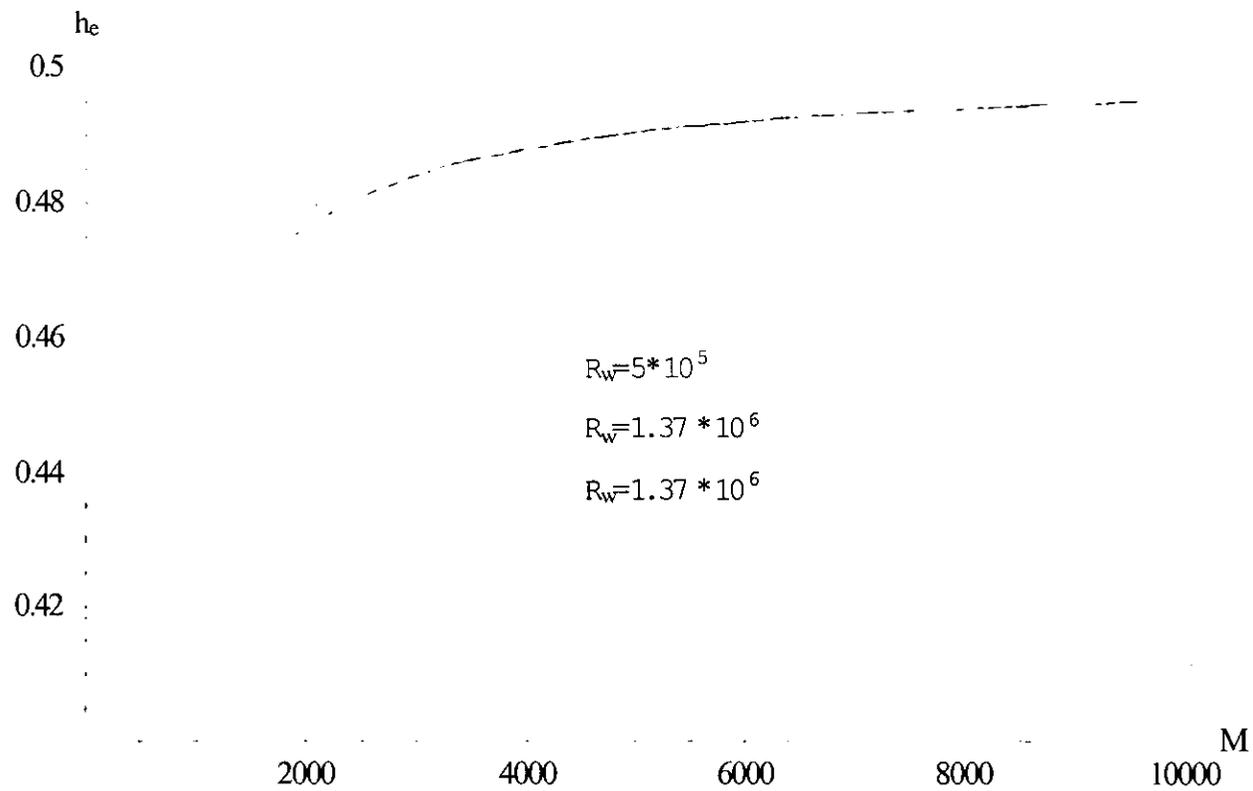


Figura 4.10. Eficiencia Eléctrica vs M para diferentes R_w . $Ko=0.5$

conforme K_o se sigue incrementando hasta llegar a uno, η_e decae hasta cero. En el gráfica también se puede observar que conforme M aumenta, el máximo de la eficiencia se incrementa.

En la figura 4.9, graficamos la eficiencia eléctrica como función de R_ω para diferentes valores de M y para la potencia eléctrica máxima, es decir, para $K_o = 0.5$. En el gráfico se observa que la eficiencia eléctrica aumenta conforme aumenta R_ω , para diferentes valores de M , pero aproximadamente a partir de $R_\omega = 6 \times 10^7$ en adelante la eficiencia prácticamente ya no depende de M y tiende al valor de 0.5. Por otra parte, se puede observar que para valores de R_ω menores que 2×10^7 la eficiencia es mayor con forme M se incrementa.

De la misma manera, en la figura 4.10, graficamos la eficiencia eléctrica como función del número de Hartmann M , para diferentes R_ω con $K_o = 0.5$. En la gráfica se observa que la eficiencia se incrementa de manera significativa, conforme aumenta R_ω , para valores de M menores que 2000 aproximadamente. Para valores de M mayores que 4000, la eficiencia prácticamente es la misma para cualquier valor de R_ω y conforme M se incrementa la eficiencia tiende al valor de 0.5.

De estas dos últimas gráficas podemos deducir que la eficiencia eléctrica, η_e , tiende a un valor asintótico de 0.5, es decir, al valor de K_o , conforme R_ω y M se incrementan. Este comportamiento es típico de un generador MHD de Faraday ideal para números de Hartmann grandes, $M \gg 1$, donde la eficiencia eléctrica tiende al valor del factor de carga, $\eta_e \rightarrow K_o$ [1].

4.2. Análisis del acoplamiento del generador MHD a un sistema solar

Existen diversos sistemas posibles para acoplar una fuente calorífica solar a un generador termoacústico MHD. En la sección 1.4 se comentaron diferentes sistemas de generación de potencia eléctrica por fuentes caloríficas solares que usan fibras ópticas y que son factibles de ser acoplados al generador termoacústico MHD [16]. El principal beneficio potencial del uso de éstos sistemas consiste en la posibilidad de remover el recibidor y la máquina térmica del punto focal de seguimiento a un lugar fijo sobre el pedestal del plato concentrador o en el piso.

En esta parte del trabajo se propone acoplar un generador termoacústico MHD a un sistema de concentración solar del tipo disco-Stirling que utiliza fibras ópticas como medio de transporte de la energía concentrada. Se realiza un primer cálculo de la eficiencia total de este sistema y de algunas variantes del mismo, y se comparan con la eficiencia de otros sistemas.

En general, la eficiencia total η_{total} de una planta solar está compuesta de las eficiencias de cada una de las componentes de la cadena de conversión [16], es decir,

$$(4.2.1) \quad \eta_{total} = \eta_{colector} \cdot \eta_{fibra} \cdot \eta_{recibidor} \cdot \eta_{GT M},$$

donde η_{fibra} es la eficiencia de transmisión de la fibra dada por [15]

$$\eta_{fibra} = \frac{Q_{salida}}{Q_{entrada}},$$

donde $Q_{entrada}$ y Q_{salida} son las tasas de energía máxima a la entrada y salida de la fibra óptica respectivamente. η_{GTM} es la eficiencia del Generador Termoacústico MHD (GTM), aunque en principio podría ser cualquier otra máquina térmica, $\eta_{recibidor}$ es la eficiencia del receptor y $\eta_{colector}$ es la eficiencia del colector primario. Esta última, incluye varias contribuciones dependiendo del diseño del sistema, y puede estimarse de acuerdo a la expresión [16]

$$\eta_{colector} = \rho_r \cdot \rho_{hyp} \cdot \eta_{interc} \cdot \eta_{sombra},$$

donde ρ_r es la reflectividad del reflector primario, disco o heliostato, ρ_{hyp} es la reflectividad del reflector hiperboloide secundario, en el caso que se emplee un diseño de tipo "Cassegrainian" (en otro caso esta eficiencia vale uno), η_{interc} es la fracción de la mancha focal interceptada, y η_{sombra} es la fracción del reflector primario que no es sombreada por el reflector secundario en un diseño "Cassegrainian".

Por otra parte, la eficiencia del concentrador parabólico primario cuando no se emplea un diseño "Cassegrainian", para el caso de un concentrador ideal, puede calcularse como [15]

$$\eta_{colector} = \frac{\sin^2(\phi_r) - \sin^2(\theta_{min})}{4 \tan^2(\theta_{max}/2)} \rho_r,$$

donde ϕ_r es el ángulo de borde, el cual debe ser menor o igual que el ángulo de admisión de la fibra óptica θ_i , y θ_{max} es el ángulo de aceptación de la radiación solar en donde ocurren las reflexiones internas totales. Este ángulo está determinado por la relación entre el índice de refracción del núcleo n_1 y el índice de refracción del revestimiento n_2 de la fibra, es decir [17]

$$\sin \theta_{max} = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}.$$

La expresión para la eficiencia del receptor se puede basar en un modelo simple de un absorbedor negro [16], es decir,

$$\eta_{recibidor} = 1 - \frac{\sigma_s (T_{aire} + \Delta T)^4}{F} - L_{con},$$

donde σ_s es la constante de Stefan-Boltzman y T_{aire} es la temperatura de trabajo del gas. La emisión de pérdidas del receptor es de acuerdo a la temperatura del absorbedor, la cual es más grande que la temperatura de trabajo del gas por una cantidad estimada de ΔT . El flujo incidente en la apertura del receptor, F , se calcula a partir de la concentración geométrica del subsistema óptico (colector primario y fibras), y la eficiencia óptica total. L_{con} representa la fracción de pérdidas debido a conducción y convección.

La eficiencia del generador termoacústico MHD η_{GTM} , la calculamos en la sección anterior basado en el flujo de Hartmann oscilatorio. Su expresión está dada por

$$\eta_{GTM} = \frac{2\alpha\beta K_o(K_o - 1) \{((\alpha^2 + \beta^2) - 1) \cos(2\beta) + ((\alpha^2 + \beta^2) + 1) \cosh(2\alpha) - 2(\beta \sin(2\beta) + \alpha \sinh(2\alpha))\}}{2\alpha\beta \{(-(\alpha^2 + \beta^2) + K_o((\alpha^2 + \beta^2) - 1) \cos(2\beta)) + (K_o((\alpha^2 + \beta^2) + 1) - (\alpha^2 + \beta^2)) \cosh(2\alpha) - \alpha(\alpha^2 + (4K_o - 3)\beta^2) \sin(2\beta) - \beta(\beta^2 + (4K_o - 3)\alpha^2) \sin(2\alpha)\}}.$$

Para condiciones de potencia máxima, $K_o = 0.5$, un valor calculado de esta eficiencia es $\eta_{GTM} = 0.45$, que se obtiene para $M = 1500$ y una frecuencia de oscilación del fluido de $1kHz$. Estos valores son muy cercanos a las condiciones experimentales analizadas por Swift [11] en su transductor de sodio líquido.

Como una primera aproximación, a continuación se hace una estimación de la eficiencia total de los sistemas solares de potencia considerados acoplados a un generador termoacústico MHD. Los valores de las eficiencias de los distintos componentes, se han tomado de la literatura especializada en estos sistemas y son valores estándar obtenidos por diversos autores.

El primer sistema del tipo disco-Stirling (en nuestro caso, en lugar de una máquina Stirling está el generador termoacústico MHD), consiste de un disco "Cassegrainian" con fibra guía (ver Figura 1.8). En este caso la luz concentrada se pliega de regreso hacia el disco usando un espejo hiperboloide, donde la apertura de entrada del paquete de fibra se coloca en el foco trasero de la hipérbola.

La eficiencia del colector primario con un área de apertura de $197m^2$ [15, 16, 17], puede estimarse como $\eta_e = 0.77$; a su vez, la eficiencia de transmisión de la fibra óptica está dada por $\eta_{fibra} = 0.86$ [16, 17]. Además suponemos que la eficiencia del receptor es $\eta_{receptor} = 1$, debido a que la radiación concentrada llega directamente al generador termoacústico, que realiza también la función de receptor. De ahí que la eficiencia del receptor ya está incluida en la eficiencia del generador. Entonces, de la ecuación (4.2.1) la eficiencia total del sistema está dada por

$$\eta_{total} = (0.77)(0.86)(1)(0.45) \approx 0.3.$$

Abraham et al. [16], analizan este mismo sistema para una eficiencia de la máquina térmica de 0.40 y una eficiencia del receptor de 0.96. El cálculo aproximado para la eficiencia total de tal sistema es

$$\eta_{total} = (0.77)(0.96)(0.4) \approx 0.25.$$

En el segundo sistema, la fibra guía se coloca en el foco del disco (Figura 1.7). Es decir, la apertura de entrada del paquete de fibras se coloca en el punto focal del concentrador. Estas fibras se fijan al soporte del receptor del sistema de concentración. Para este sistema la eficiencia del colector primario es de $\eta_{colector} = 0.9$ [15, 16] para un área de apertura de $155m^2$. La eficiencia de transmisión de la fibra es de $\eta_{fibra} = 0.85$ [16, 17]. Por tanto, la eficiencia de total del sistema es

$$\eta_{total} = (0.9)(0.85)(1)(0.45) \approx 0.34.$$

El tercer sistema está compuesto de varios Mini-Discos Colectores (ver Figura 1.9). En este sistema se instalan varios pequeños mini-platos donde cada uno de ellos alimenta a una fibra en particular, sobre un marco unitario que funciona como helióstato siguiendo el movimiento relativo del sol. Por otra parte, las puntas de cada fibra son colectadas a un paquete que es dirigido directamente al generador termoacústico MHD. Para este sistema de potencia, la eficiencia total se calcula tomando en cuenta una eficiencia del colector primario de $\eta_{colector} = 0.95$ con un área de apertura de $264m^2$, y una eficiencia de transmisión de la fibra dada por $\eta_{fibra} = 0.69$ [16]. Además, también suponemos, como en el caso anterior, una eficiencia del receptor $\eta_{receptor} = 1$. Por lo tanto, el valor estimado de la eficiencia total es

$$\eta_{total} = (0.95)(0.69)(1)(0.45) \approx 0.29.$$

Para este mismo sistema pero con una eficiencia de la máquina térmica de 0.30 y una eficiencia del receptor de 0.96, la eficiencia total aproximada del sistema es de 0.19 [16].

En un sistema convencional de disco con una máquina Stirling, con un área de apertura de $155m^2$, la eficiencia estimada es de 0.32 [16]. Para este mismo sistema pero con un generador termoacústico MHD, la eficiencia estimada es de 0.4. Cabe mencionar que aunque la eficiencia de este sistema es la más alta, el problema del acoplamiento es principalmente operacional, ya que el generador termoacústico MHD debe colocarse en el foco del concentrador, lo cual afectaría su funcionamiento.

En una primera aproximación podemos decir que los sistemas solares de potencia, usando fibras ópticas, acoplados a un generador termoacústico MHD tienen una eficiencia ligeramente mayor que los sistemas acoplados a otras máquinas térmicas. En general, podemos decir que el acoplamiento de estos sistemas solares de potencia a un generador termoacústico MHD es en principio factible. No obstante es necesario realizar un análisis mucho más detallado y que considere otros sistemas solares de potencia que sean susceptibles de ser acoplados.

4.3. Modelo bidimensional de un generador MHD alterno

El flujo de Hartmann oscilatorio, que hasta ahora hemos utilizado para modelar el generador alterno MHD, es una idealización sencilla del flujo que tiene lugar en un dispositivo de este tipo. Al tratarse de un flujo entre placas paralelas infinitas, la existencia de paredes laterales que limiten al flujo y que sirvan de trayectoria de retorno para la corriente eléctrica, se desprecia. Es por esto que el circuito eléctrico en el generador se modela a través del factor de carga. En esta sección desarrollaremos un modelo más realista para describir el flujo en un generador alterno MHD. Para tal efecto, consideraremos que el flujo laminar oscilatorio tiene lugar no entre placas paralelas

infinitas, sino en un ducto de sección transversal rectangular constante que se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme, transversal a dos de las paredes del ducto.

Suponemos que la región de análisis se encuentra alejada de los extremos del ducto (entrada o salida) de modo que el flujo está completamente desarrollado, existiendo solamente una componente de la velocidad que no depende de la coordenada axial (en dirección del movimiento). Sin embargo, la presencia de paredes laterales (paralelas al campo) introduce una dependencia adicional de la velocidad en la coordenada z , es decir, $u = u(y, z, t)$. Asimismo, al considerar la existencia de paredes laterales la densidad de corriente eléctrica tiene una componente en la dirección del campo (\hat{y}), además de la componente en dirección perpendicular a éste (\hat{z}). De esta forma, los circuitos de corriente eléctrica pueden cerrarse en los planos que forman la sección transversal del ducto.

En este trabajo consideraremos que las paredes que conforman el ducto tienen tanto un grosor como una conductividad eléctrica finitas, incluyendo el caso de paredes eléctricamente aislantes. Por simplicidad, suponemos que éstas no se encuentran conectadas a un circuito externo, es decir, analizaremos únicamente el caso de circuito abierto. Entonces, dependiendo de la conductividad de las paredes, los circuitos de corriente pueden cerrarse completamente a través del fluido o bien parcial o totalmente a través de las paredes del ducto. La modelación del flujo en el generador MHD tomando en cuenta paredes de conductividad y grosor finitos es relevante ya que, en la práctica, la construcción de un ducto resonador capaz de soportar las presiones de trabajo y el contacto con un metal líquido corrosivo, puede requerir la utilización de materiales metálicos como el acero inoxidable.

En la figura 4.11 se muestra el arreglo geométrico considerado, así como el sistema coordenado. La longitud característica del flujo, denotada por W , se toma como la mitad de la distancia entre las placas paralelas al campo magnético mientras que la razón de aspecto del canal se denota por $a = H/W$.

El flujo oscilatorio de metal líquido en ductos de sección rectangular en un campo magnético intenso ($M \gg 1$), al igual que los flujos estacionarios unidireccionales, puede dividirse en varias subregiones, a saber, el núcleo, las capas límite de Hartmann adyacentes a las paredes superior e inferior perpendiculares al campo magnético, las capas límite laterales adyacentes a las paredes paralelas al campo y la región de las esquinas [37, 38]. Una estimación del orden de magnitud de estas subregiones en el caso estacionario muestra que, en términos adimensionales, el grosor de las capas de Hartmann y de las paredes laterales es $O(M^{-1})$ y $O(M^{-1/2})$, respectivamente, mientras que en las regiones de las esquinas se tiene $O(M^{-1}) \times O(M^{-1/2})$ [39]. En el caso de un flujo oscilatorio estas estimaciones pueden variar. En general, las capas límite se adelgazarán conforme la frecuencia de oscilación aumente. Es claro entonces que para valores de M muy grandes, las capas límite son muy delgadas y el flujo en el núcleo se puede considerar invíscido. Los valores de la velocidad y el potencial eléctrico en el núcleo se ajustan con los valores en la

pared a través de las capas límite, donde los efectos viscosos se concentran. Estas capas proveen un camino alternativo para los circuitos de las corrientes eléctricas y tienen un rol decisivo en las características de la dinámica del fluido y de la transferencia de calor. En particular, se puede demostrar que en contraste con las capas encontradas en la mecánica de fluidos ordinaria, que se adaptan a las propiedades del flujo exterior, las capas de Hartmann controlan el flujo exterior [23], en el sentido que hay una relación de proporcionalidad entre la corriente que fluye en la capa y la velocidad en el núcleo. Por otro lado, como veremos más adelante, dependiendo de las magnitudes de la razón de conductancia c , del número de Hartmann M y de N_w , la velocidad en las capas de las paredes laterales puede ser más grande que la velocidad en el núcleo y, bajo ciertas circunstancias, pueden acarrear una parte sustancial del flujo volumétrico total.

Para el análisis del problema partimos de las ecuaciones generales de la MHD en su forma adimensional dadas por las ecs. (3.2.8)-(3.2.11), las cuales se simplifican considerando el caso de un flujo oscilatorio en un ducto de sección transversal constante bajo un campo magnético uniforme, $\mathbf{B} = \hat{y}$. Suponemos que $R_m \ll 1$ y que el flujo está totalmente desarrollado en la dirección x , es decir, $\mathbf{u} = (u(Y, Z, \tau), 0, 0)$, de manera que desaparece el término convectivo de la ecuación de movimiento. Además suponemos que $\phi = \phi(Y, Z, \tau)$ y $p = p(X, \tau)$. De esta forma, las ecuaciones (3.2.8)-(3.2.11) se reducen a

$$(4.3.1) \quad N_w^{-1} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial X} + M^{-2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \right] - j_z,$$

$$(4.3.2) \quad j_y = -\frac{\partial \phi}{\partial Y},$$

$$(4.3.3) \quad j_z = -\frac{\partial \phi}{\partial Z} + u,$$

$$(4.3.4) \quad \frac{\partial j_y}{\partial Y} + \frac{\partial j_z}{\partial Z} = 0.$$

Adicionalmente se deben satisfacer la ley de Ohm y la conservación de corriente en la pared del ducto, es decir,

$$(4.3.5) \quad j_{yw} = -\left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right) \frac{\partial \phi_w}{\partial Y},$$

$$(4.3.6) \quad j_{zw} = -\left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right) \frac{\partial \phi_w}{\partial Z},$$

$$(4.3.7) \quad \frac{\partial j_{yw}}{\partial Y} + \frac{\partial j_{zw}}{\partial Z} = 0,$$

donde σ_w y ϕ_w son la conductividad eléctrica y el potencial eléctrico en la pared del ducto, y j_{yw} y j_{zw} las componentes de la densidad de corriente en la pared.

Para la solución de este problema seguiremos un método similar al utilizado en [39, 40] para el caso de un flujo estacionario MHD. Primeramente, suponemos que todas las variables tienen un comportamiento armónico en el tiempo, de modo que pueden expresarse en la forma

$$u = u_o(Y, Z)e^{i\tau}, \quad \phi = \phi_o(Y, Z)e^{i\tau}, \quad \frac{\partial p}{\partial X} = Ge^{i\tau},$$

$$\phi_\omega = \phi_{\omega o}(Y, Z)e^{i\tau}, \quad j_y = j_{y o}(Y, Z)e^{i\tau}, \quad j_z = j_{z o}(Y, Z)e^{i\tau},$$

donde nuevamente la parte real es la que tiene significado físico.

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones (4.3.1)-(4.3.7), tenemos que en la región del fluido se deben satisfacer las ecuaciones

$$(4.3.8) \quad M^{-2} \left[\frac{\partial^2 u_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial Z^2} \right] - j_{z o} - iN_\omega^{-1} u_o = G,$$

$$(4.3.9) \quad j_{y o} = -\frac{\partial \phi_o}{\partial Y},$$

$$(4.3.10) \quad j_{z o} = -\frac{\partial \phi_o}{\partial Z} + u_o,$$

$$(4.3.11) \quad \frac{\partial j_{y o}}{\partial Y} + \frac{\partial j_{z o}}{\partial Z} = 0,$$

mientras que en la pared del ducto, se tiene

$$(4.3.12) \quad j_{y \omega o} = -\left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right) \frac{\partial \phi_{\omega o}}{\partial Y},$$

$$(4.3.13) \quad j_{z \omega o} = -\left(\frac{\sigma_w}{\sigma}\right) \frac{\partial \phi_{\omega o}}{\partial Z},$$

$$(4.3.14) \quad \frac{\partial j_{y \omega o}}{\partial Y} + \frac{\partial j_{z \omega o}}{\partial Z} = 0.$$

Las ecuaciones (4.3.11) y (4.3.14) se cumplen idénticamente si introducimos una función de corriente eléctrica h para el fluido y h_w para las paredes, tales que

$$j_{yo} = -\frac{\partial h}{\partial Z}, \quad j_{zo} = \frac{\partial h}{\partial Y},$$

$$j_{yw} = -\frac{\partial h_w}{\partial Z}, \quad j_{zw} = \frac{\partial h_w}{\partial Y}.$$

Debido a la simetría del problema en ambas direcciones Y y Z , consideramos únicamente un cuarto de la sección transversal del ducto, entonces tenemos que en la región del fluido $0 \leq Y \leq a$ y $0 \leq Z \leq 1$ (ver figura 4.12), las ecuaciones (4.3.8)-(4.3.11) se escriben como

$$(4.3.15) \quad M^{-2} \left[\frac{\partial^2 u_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial Z^2} \right] - \frac{\partial h}{\partial Y} - iN_w^{-1} u_o = G,$$

$$(4.3.16) \quad \frac{\partial h}{\partial Z} = \frac{\partial \phi_o}{\partial Y},$$

$$(4.3.17) \quad \frac{\partial h}{\partial Y} + \frac{\partial \phi_o}{\partial Z} = u_o.$$

Por su parte, en las paredes para $a \leq Y \leq a + T$ y $0 \leq Z \leq 1 + T$, $1 \leq Z \leq 1 + T$ y $0 \leq Y \leq a$, donde $T = t_w/L$ es la adimensionalización del espesor de la pared del ducto (Ver figura 4.13), las ecuaciones (4.3.12)-(4.3.14) quedan

$$(4.3.18) \quad \frac{\partial h_w}{\partial Z} = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \right) \frac{\partial \phi_{wo}}{\partial Y},$$

$$(4.3.19) \quad \frac{\partial h_w}{\partial Y} + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \right) \frac{\partial \phi_{wo}}{\partial Z} = 0.$$

Adicionalmente, tenemos que las condiciones a la frontera que se deben satisfacer son

En $Y = 0$:

$$(4.3.20) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \phi_o}{\partial Y} = 0, \quad h = 0;$$

en $Z = 0$:

$$(4.3.21) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Z} = 0, \quad \phi_o = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial Z} = 0;$$

en $Y = a$ y $Z = 1$:

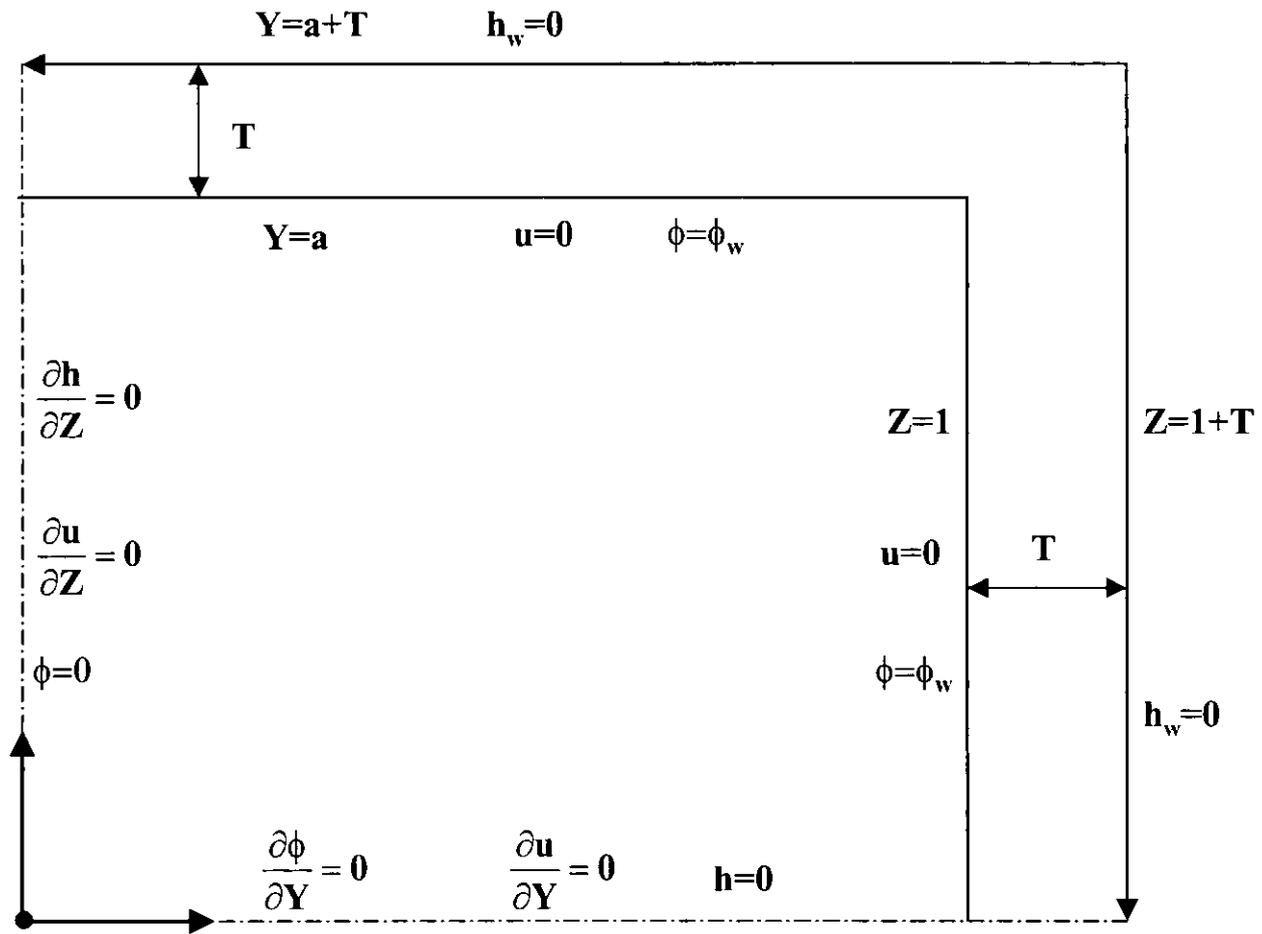


Figura 4.12. Condiciones de frontera y de simetría en un cuarto de la sección transversal del ducto

$$(4.3.24) \quad M^{-2} \left[\frac{\partial^2 u_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial Z^2} \right] - \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - iN_\omega^{-1} u_o = G,$$

$$(4.3.25) \quad u_o = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2},$$

para $0 \leq Y \leq a$ y $0 \leq Z \leq 1$. Por su parte, en las paredes

$$(4.3.26) \quad \frac{\partial^2 F_w}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_w}{\partial Z^2} = 0,$$

para $a \leq Y \leq a + T$ y $0 \leq Z \leq 1 + T$. Además,

En $Y = 0$:

$$(4.3.27) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F_w}{\partial Y} = 0,$$

en $Z = 0$:

$$(4.3.28) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial F_w}{\partial Z} = 0,$$

en $Y = a + T$:

$$(4.3.29) \quad \frac{\partial F_w}{\partial Y} = 0,$$

en $Z = 1 + T$:

$$(4.3.30) \quad F_w = 0,$$

en $Z = 1$:

$$(4.3.31) \quad u_o = 0,$$

$$(4.3.32) \quad F = F_w,$$

$$(4.3.33) \quad \frac{\partial F_w}{\partial Z} = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \right) \frac{\partial F}{\partial Z};$$

y en $Y = a$:

$$(4.3.34) \quad u_o = 0,$$

$$(4.3.35) \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F_w}{\partial Y},$$

$$(4.3.36) \quad \frac{\partial F_w}{\partial Z} = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma} \right) \frac{\partial F}{\partial Z}.$$

En principio, la interacción electromagnética generada por el flujo del metal líquido en el campo magnético aplicado, se extiende más allá del fluido, a las paredes y al medio circundante. Esto significa que la densidad de corriente eléctrica y la función potencial eléctrico del fluido, así como de las paredes y el medio circundante están acoplados, y las ecuaciones de Maxwell deben satisfacerse en todo el espacio. Sin embargo, suponiendo que las paredes son delgadas (es decir, $T \ll 1$) y que el medio circundante es un aislante eléctrico, es posible derivar una condición de frontera únicamente en las variables del fluido [38], desacoplando el problema del fluido del problema de la pared. La derivación detallada de estas condiciones puede encontrarse en [39, 40], en donde se generaliza el análisis para considerar también paredes eléctricamente aislantes.

Entonces, el sistema de ecuaciones y las condiciones de frontera que rigen el problema bidimensional del flujo oscilatorio MHD en ductos rectangulares para el caso de paredes conductoras delgadas o aislantes [39] es

$$(4.3.37) \quad M^{-2} \left[\frac{\partial^2 u_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial Z^2} \right] - \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - iN_w^{-1} u_o = G,$$

$$(4.3.38) \quad u_o = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2},$$

para $a \leq Y \leq a$ y $0 \leq Z \leq 1$.

En $Y = 0$:

$$(4.3.39) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Y} = 0,$$

$$(4.3.40) \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 0;$$

en $Z = 0$:

$$(4.3.41) \quad \frac{\partial u_o}{\partial Z} = 0$$

$$(4.3.42) \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = 0;$$

en $Z = 1$:

$$(4.3.43) \quad u_o = 0,$$

$$(4.3.44) \quad F + c \frac{\partial F}{\partial Z} = 0;$$

y en $Y = a$:

$$(4.3.45) \quad u_o = 0,$$

$$(4.3.46) \quad \frac{\partial F}{\partial Y} - (c + M^{-1}) \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = M^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2},$$

donde la razón de conductancias está definida como $c = T \frac{\sigma_w}{\sigma}$.

Adicionalmente, se debe satisfacer la condición de conservación del flujo volumétrico, la cual está dada por

$$(4.3.47) \quad \int_0^a \int_0^1 u_o dZ dY = a.$$

En este trabajo, nuestro principal interés radica en el entendimiento de los fenómenos que ocurren en las capas límite laterales (paralelas al campo). En flujos MHD estacionarios se presentan diversos patrones de flujo dependiendo del valor de M y c . En particular, cuando $M \gg 1$ y $M^{-1} \ll c \ll 1$ (paredes conductoras delgadas) [40] se encuentra que la velocidad en la capa límite lateral es mucho mayor que en el núcleo dando lugar a chorros de fluido. El entendimiento de la dinámica de estos chorros es importante pues pueden dar origen a inestabilidades en el flujo. Evidentemente, en el caso de un flujo oscilatorio estos chorros se verán afectados por efectos inerciales debidos a la oscilación y su estructura se verá modificada. Es precisamente la determinación de estos patrones de flujo lo que primordialmente nos interesa aquí. Por su parte, las capas de Hartmann juegan más bien un papel pasivo en cuanto a la estabilidad del fluido. La solución numérica completa de todas las regiones del flujo, especialmente las capas de Hartmann, implica

una tarea muy cara en términos de tiempo de cómputo y almacenamiento, ya que para M grande las capas de Hartmann son extremadamente delgadas. Una manera de simplificar este problema consiste en considerar una solución únicamente para el flujo entre la capa lateral y el núcleo, que ocupa la región $0 \leq Y \leq a$, $0 \leq Z \leq 1$. En esta aproximación, suponiendo que M es lo suficientemente grande, el flujo en las capas de Hartmann y en las esquinas se ignora. De hecho, las capas de Hartmann son sólo parcialmente ignoradas ya que permitimos su existencia como un camino de retorno para las corrientes eléctricas (mientras estemos interesados en el límite $c \rightarrow 0$), pero no las resolvemos numéricamente. Por lo tanto, satisfacemos la condición (4.3.46) pero no satisfacemos la condición (4.3.45) en la pared superior (inferior). El flujo núcleo-capla lateral no distingue entre el núcleo y la capa lateral y está gobernado por un problema de valores a la frontera con M , N_ω y c como parámetros. Teniendo en cuenta lo anterior, nuestra solución será válida únicamente en regiones suficientemente alejadas de las paredes transversales al campo. Concretamente, la distancia de separación debe ser mucho mayor a una distancia de orden $O(M^{-1})$, que es el grosor de la capa de Hartmann.

El problema de valores a la frontera dado por el conjunto de ecuaciones (4.3.37)-(4.3.46), con excepción de la condición de no deslizamiento (4.3.45), modelan el flujo bidimensional núcleo-capla lateral del generador MHD alterno. Este conjunto de ecuaciones se resolvió usando el método espectral de colocación [41, 42], expresando la función desconocida F , que satisface el problema de valores a la frontera, como una serie finita en términos de los polinomios pares de Chebyshev $T_{2l}(\frac{Y}{a})$ y $T_{2n}(Z)$, es decir,

$$(4.3.48) \quad F = \sum_{l=0}^{NY} \sum_{n=0}^{NZ} A_{ln} T_{2l} \left(\frac{Y}{a} \right) T_{2n}(Z),$$

donde en nuestro caso, los coeficientes a determinar, A_{ln} , pueden ser complejos. NY y NZ son los límites de truncación de las series de Chebyshev en Y y Z . El objetivo es reducir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema simultáneo de ecuaciones lineales algebraicas para los coeficientes A_{ln} . El número de estos coeficientes desconocidos esta dado por $NT = (NY+1)(NZ+1)$ y es el número de ecuaciones que tenemos que generar. El sistema de ecuaciones algebraicas se puede resolver por el método eliminación de Gauss.

Un conjunto de puntos adecuados para este problema está dado por los puntos de colocación de Gauss-Lobatto [42],

$$(4.3.49) \quad Y_i = a \cos \left(\frac{i\pi}{2NY} \right), \quad \text{para } i = 0 \text{ to } NY,$$

$$(4.3.50) \quad Z_k = \cos \left[\frac{k\pi}{2(NZ - 1)} \right], \quad \text{para } k = 0 \text{ to } (NY - 1),$$

los cuales dan una buena resolución numérica en la capa límite, ya que los puntos se encuentran mayormente concentrados cerca de las paredes ($Y = a$, $Z = 1$).

Los coeficientes A_{ln} se puede expresar como un vector de incógnitas, es decir,

$$(4.3.51) \quad \mathbf{V}(JC) = A_{ln},$$

donde

$$(4.3.52) \quad JC = l * (NZ + 1) + n + 1,$$

con $l = 0$ a NY y $n = 0$ a NZ de modo que $JC = 1$ a NT . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones simultaneas algebraicas puede expresarse como

$$(4.3.53) \quad \sum_{JC=1}^{NT} \mathbf{A}(IR, JC) \mathbf{V}(JC) = \mathbf{R}(IR),$$

donde $IR = 1$ a NT . La matriz $\mathbf{A}(IR, JC)$ y el vector $\mathbf{R}(IR)$ se obtienen al introducir la expresión (4.3.48) en el sistema de ecuaciones (4.3.37)-(4.3.46), excluyendo (4.3.45). La matriz \mathbf{A} y los vectores \mathbf{V} y \mathbf{R} en nuestro caso son complejos, es decir

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} + i\mathbf{S},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + i\mathbf{w},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{e} + i\mathbf{h}.$$

De modo que sustituyendo lo anterior en el sistema de ecuaciones (4.3.53) tenemos

$$\sum_{JC=1}^{NT} [\mathbf{Q}(IR, JC) + i\mathbf{S}(IR, JC)] [\mathbf{v}(JC) + i\mathbf{w}(JC)] = \mathbf{e}(IR) + i\mathbf{h}(IR).$$

Este es un sistema de $NT \times NT$ ecuaciones complejas. Separando las partes real e imaginaria encontramos que

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{e},$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{h},$$

lo que puede reescribirse como un sistema de $2NT \times 2NT$ ecuaciones reales, es decir,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix},$$

que es equivalente a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{B}$. Este sistema se resolvió con el método de eliminación Gauss-Jordan. Todas las soluciones se normalizaron aplicando la condición 4.3.47 y para un ducto de sección transversal cuadrada ($a=1$) [39].

Los parámetros relevantes que gobiernan el comportamiento del flujo son M , R_ω , o bien N_ω , y c . A continuación analizamos los perfiles de velocidad para diferentes valores de estos parámetros. Exploramos tres valores del número de Hartmann M , a saber, 100, 1000, y tres valores de c , a saber, 0.05, 0.01 y 0. Asimismo, consideramos tres valores de N_ω , a saber, 10, 100 y 1000. En todos los casos se calculan los perfiles de velocidad para un cuarto del ducto y se comparan con el flujo en estado estacionario.

Como referencia en las figuras 4.11a y 4.11b se muestran los perfiles de velocidad, del flujo estacionario (no oscilatorio) en régimen permanente para paredes aislantes, $c = 0$, y para paredes ligeramente conductoras, $c = 0.05$, respectivamente. Evidentemente, este flujo es independiente de N_ω . La solución estacionaria puede obtenerse al resolver el sistema de ecuaciones en el límite $N_\omega \rightarrow \infty$. En este límite la aceleración local desaparece. El flujo se analiza en tres planos que cortan el eje Y , en 0, 0.5 y 0.75, y para $M = 1000$. Los perfiles se grafican de $Z = 0.7$ a $Z = 1$, que abarca una porción del flujo en el núcleo y la capa límite lateral. El resto del flujo en el núcleo no presenta variaciones. Para $c = 0$, las corrientes eléctricas se cierran completamente dentro del fluido (a través de las capas laterales y de las capas de Hartmann). En este caso la fuerza magnética origina un aplanamiento uniforme del perfil de velocidades en toda la región del flujo, excepto en la capa límite donde se presenta un gradiente de velocidades muy intenso que empata la alta velocidad del núcleo con la velocidad cero en las paredes. Por otra parte, observamos que el comportamiento de los perfiles de velocidad es prácticamente el mismo en los tres planos a lo largo del ducto. Sin embargo, en la región cercana a la pared, es decir, de $Z = 0.9$ a $Z = 1$, la velocidad del fluido disminuye ligeramente conforme disminuye el valor Y . En la figura 4.11b para $c = 0.05$, se puede observar cómo la conductividad eléctrica de la pared afecta el perfil de velocidades del fluido. El efecto se puede ver principalmente en la región cercana a la pared (a partir de $Z = 0.9$ a $Z = 1$) donde la velocidad del fluido es mayor que la velocidad en la región del núcleo. La existencia de las altas velocidades o chorros en la capa límite lateral puede entenderse analizando la magnitud de la fuerza de Lorentz en dicha región y en el núcleo. La fuerza de Lorentz que se opone al flujo está dada por $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Mientras que en el núcleo del flujo la componente de la densidad de corriente en dirección Z es máxima ($j_y = 0$), en las capas laterales j_z puede disminuir ya que j_y toma un valor finito, que dependen de la razón de conductancias, c . Por lo tanto, en el núcleo la fuerza será mayor ya que toda la corriente contribuye a $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, mientras que en las capas laterales la fuerza disminuye

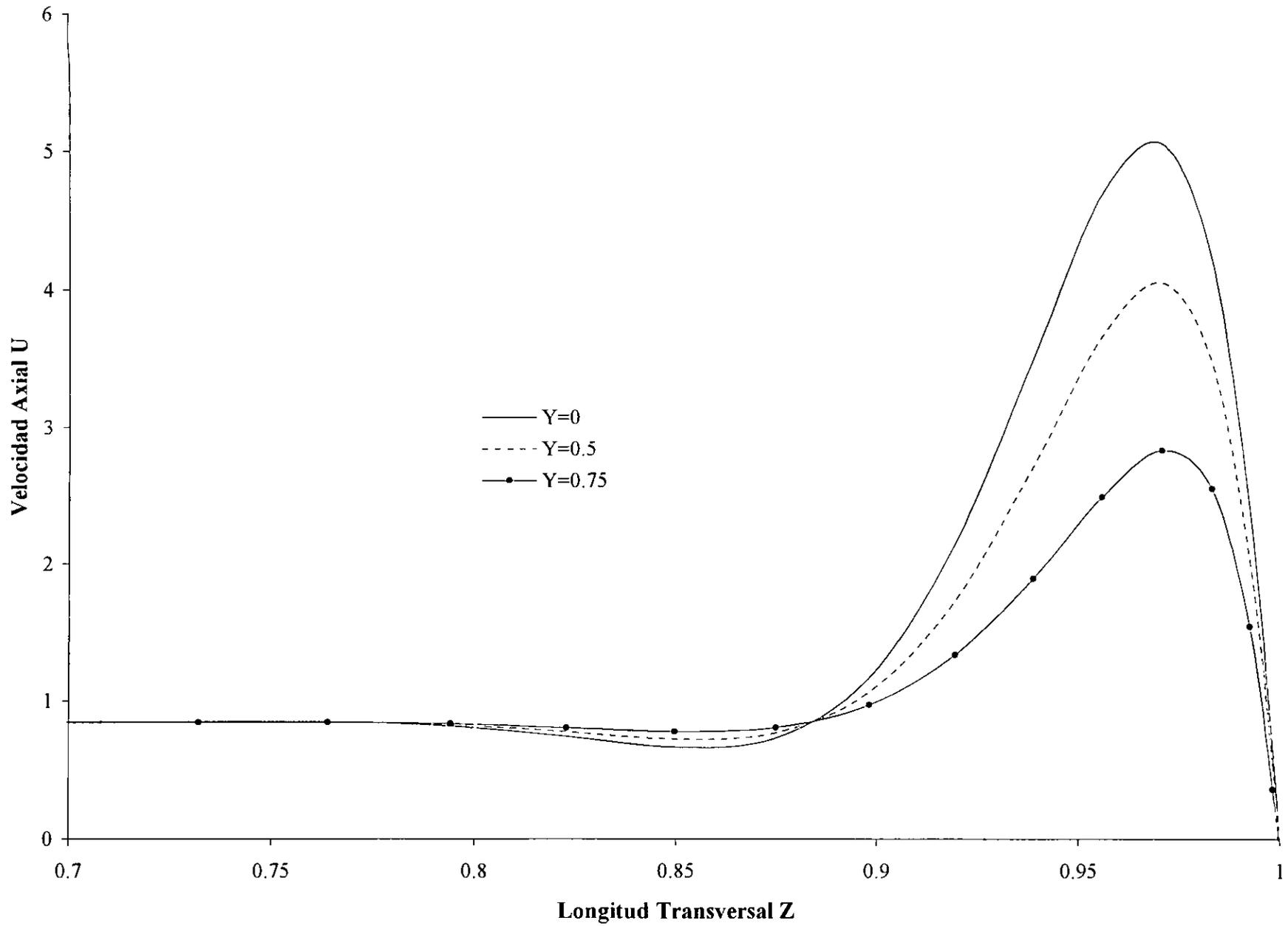


Figura 4.11b. Velocidad vs Z en Y=0 para flujo estacionario. $M=1000$ y $c=0.05$

ya que j_y no contribuye a la fuerza de Lorentz por ser paralela al campo. La diferencia entre la fuerza en el núcleo y la capa límite es entonces lo que origina las altas velocidades en ésta última. Esta explicación supone que al llegar a las paredes superior o inferior (paredes de Hartmann) toda la corriente o al menos la mayor parte de ella, regresa a través de estas paredes. Cuando las paredes son aislantes, las corrientes regresan por el fluido a través de las capas de Hartmann y se tiene una fuerza de Lorentz en sentido opuesto que tiende a suprimir las altas velocidades en las capas laterales. La velocidad más alta y lenta del flujo, corresponde a la posición $Y = 0$, esto es, en el plano medio.

En las siguientes figuras, analizamos el comportamiento del flujo al tiempo $\tau = 0$ en el plano $Y = 0$ como función de la coordenada Z para diferentes valores N_ω y para valores fijos de M y c .

En la figura 4.12a, se muestran los perfiles de velocidad para $M = 100$ y paredes aislantes, es decir, $c = 0$. Los diversos perfiles corresponden a distintos valores de N_ω , y como referencia se muestra a demás el perfil correspondiente al estado estacionario. Para este último puede observarse que no existen altas velocidades en la capa límite. Al disminuir el valor de N_ω , se puede observar que la velocidad del fluido en la región cercana a la pared es mayor que la velocidad en la región del núcleo. Este efecto puede atribuirse a que las fuerzas inerciales son mayores que las fuerzas viscosas en esa región. El efecto se ve magnificado para valores de N_ω del orden de 10, y además se observa una disminución en la velocidad (en la región $Z = 0.7$ a $Z = 0.9$). Se tiene entonces que en un ducto de paredes aislantes, a diferencia del caso estacionario, un flujo oscilatorio puede dar lugar a velocidades mucho mayores que las del núcleo, cuando el término inercial es suficientemente importante. Para valores de N_ω muy altos las fuerzas inerciales son despreciables en la región cercana a la pared y entonces el perfil de velocidad es del estado estacionario. De hecho éste coincide con el correspondiente a $N_\omega = 1000$.

En la figura 4.12b, se muestra el comportamiento de la velocidad para un valor de la conductividad eléctrica en las paredes de $c = 0.01$ y $M = 100$, y para distintos valores de N_ω . Para este valor de c , el flujo estacionario ya presenta una velocidad más alta en la capa límite que en el núcleo. El perfil para $N_\omega = 1000$, coincide nuevamente con el del flujo estacionario mientras que para $N_\omega = 100$ existe una pequeña diferencia entre los perfiles, pero la velocidad en la capa límite sigue siendo de la misma magnitud que las anteriores. Cuando $N_\omega = 10$, se presenta una alta velocidad en la capa límite acompañada de una disminución en la velocidad (en la región $Z = 0.7$ a $Z = 0.9$) como en el caso $c = 0$. Sin embargo, la máxima velocidad en la capa límite es inferior a la obtenida en el caso $c = 0$. En la figura 4.12c se muestran los perfiles para los diversos N_ω , con $M = 100$ pero incrementando el valor de c a 0.05. El perfil correspondiente al estado estacionario muestra una velocidad en la capa límite aproximadamente 60% mayor que la velocidad en el núcleo. Nuevamente, el perfil correspondiente a $N_\omega = 1000$ coincide con el estacionario, mientras que para $N_\omega = 100$ la velocidad en la capa límite es ligeramente menor que la del flujo estacionario. Para $N_\omega = 10$, se observa una disminución en el flujo en la capa límite pero la velocidad máxima en

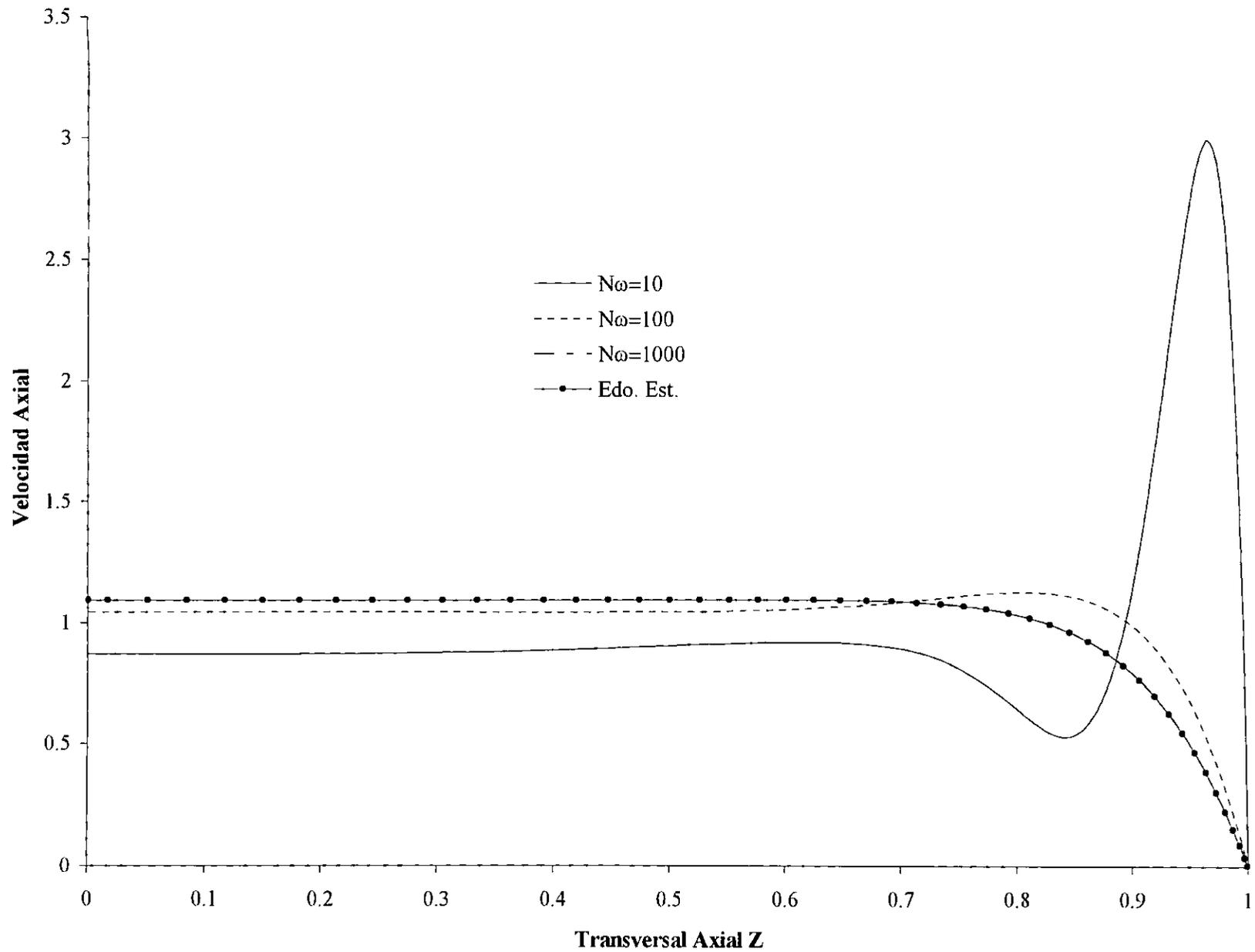


Figura 4.12a. Velocidad vs Z en $Y=0$ para diferentes $N\omega$. $M=100$ y $c=0$

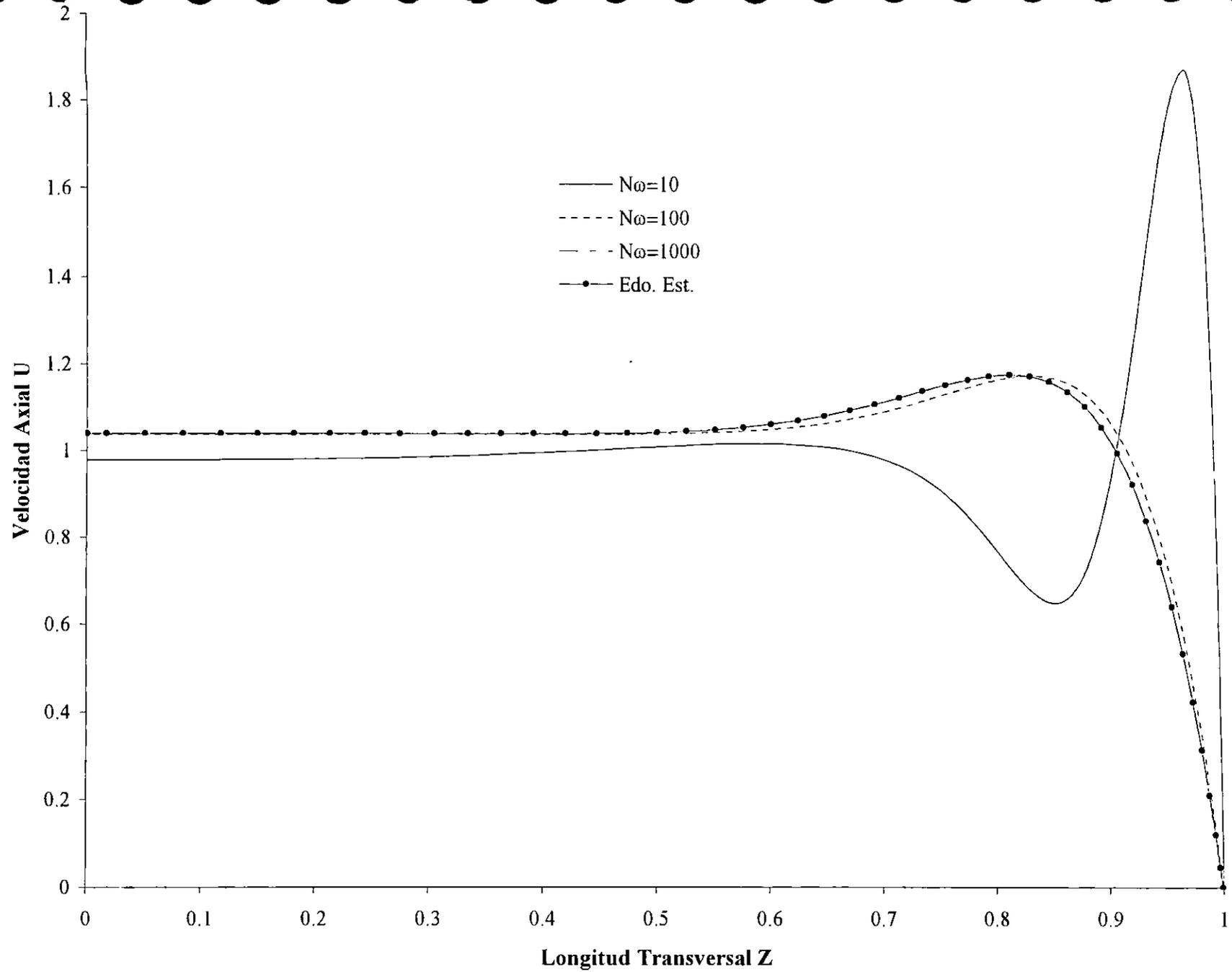


Figura 4.12b. Velocidad vs Z para Y=0 para diferentes $N\omega$. $M=100$ y $c=0.01$

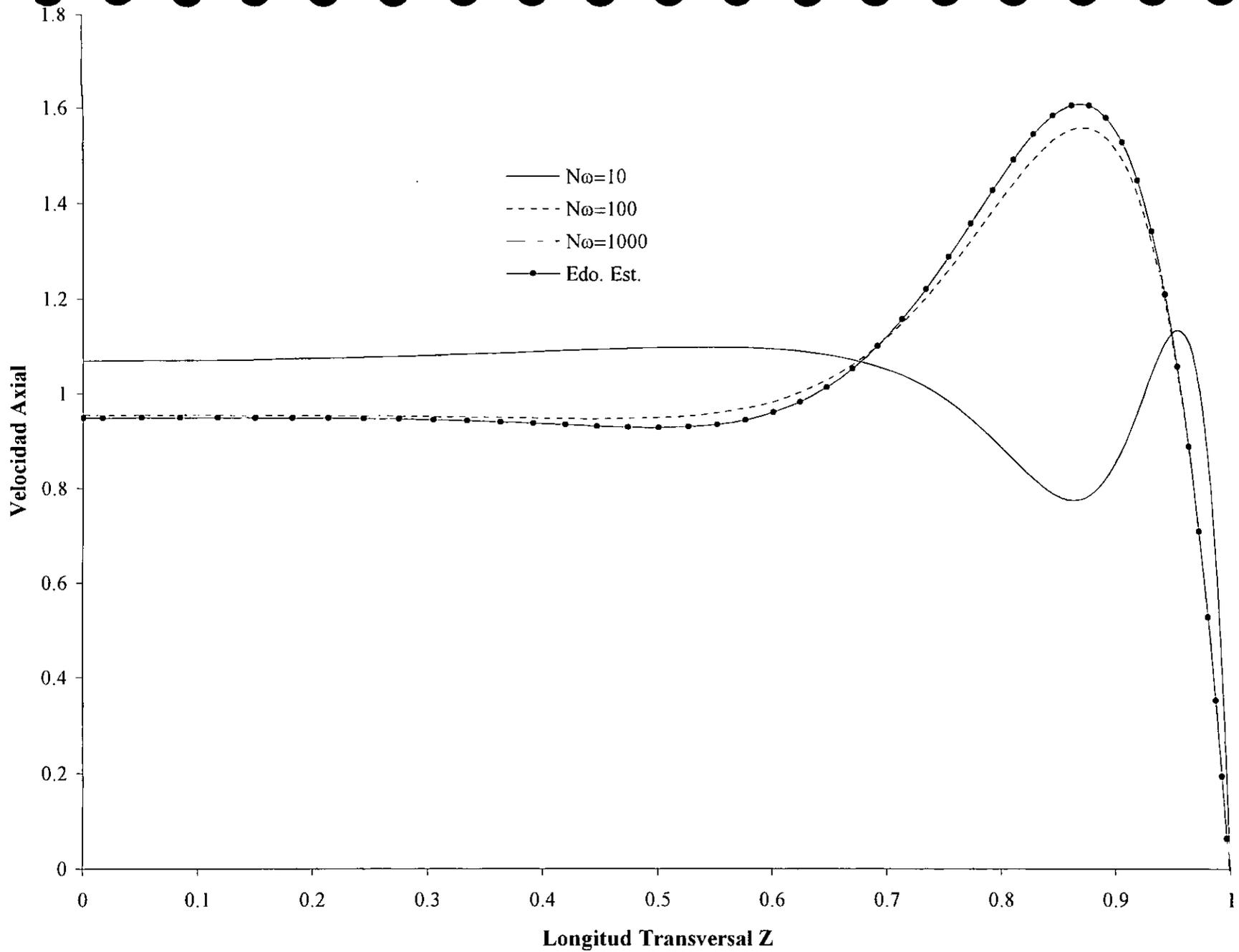


Figura 4.12c. Velocidad vs Z en Y=0 para diferentes $N\omega$. $M=100$ y $c=0.05$

esa región es prácticamente la misma que en el núcleo. Puede decirse entonces que la diferencia en la fuerza magnética que da lugar a la existencia de chorros en la capa lateral en ductos de paredes conductoras delgadas, es contrarrestada por los efectos inerciales introducidos por la oscilación del fluido.

En las siguientes figuras se muestran los perfiles de velocidad similares a los anteriores pero con $M = 1000$ por lo que el efecto del campo magnético se ve magnificado. En la figura 4.13a, se muestra el perfil de velocidad para el caso $c = 0$ en una sección del núcleo y la capa lateral ($Z = 0.7$ a $Z = 1$). La región restante del núcleo no presenta variaciones significativas en el flujo. El comportamiento cualitativo de los perfiles conforme N_ω disminuye es muy similar al observado en el caso $M = 100$, es decir, la velocidad en la capa límite aumenta al disminuir N_ω . Sin embargo, para $N_\omega = 10$ la velocidad máxima es más de ocho veces la alcanzada cuando $M = 100$ (Fig. 4.12a). Para este efecto, también se observa una disminución en el flujo en esta misma región. Para $N_\omega = 100$ también se forma un pico en el perfil de la velocidad y su magnitud también se incrementa con respecto al de la figura 4.12a para el mismo valor de N_ω . En el caso de $N_\omega = 1000$ se observa un resultado similar al de los resultados mostrados anteriormente, donde el efecto de la fuerza inercial es despreciable y entonces el perfil de la velocidad es muy similar al perfil del estado estacionario.

En la figura 4.13b, se muestran los perfiles de velocidad en un intervalo del núcleo y la capa límite que va de $Z = 0.4$ a $Z = 1$, para $c = 0.01$. En la porción del núcleo restante los cambios en el flujo son poco apreciables. Sin embargo, en la región cercana a la pared, que va de $Z = 0.9$ a $Z = 1$, los efectos sobre el flujo debido a la conductividad eléctrica de las paredes y a la oscilación del flujo se ven magnificados. Para $N_\omega = 1000$ y el estado estacionario, el pico formado en el perfil de la velocidad es más grande que el mostrado en la figura 4.12b para $M = 100$. Por otra parte, para $N_\omega = 100$, la velocidad del fluido disminuye ligeramente en la región cercana a la pared con respecto a la velocidad en el núcleo, contrariamente a lo obtenido en los casos anteriores. Para el caso $N_\omega = 10$, se presenta una disminución considerable en la velocidad a partir de $Z = 0.75$, mientras que en una región muy cercana a la pared la velocidad aumenta al triple de su valor en el núcleo, aunque la velocidad máxima es mucho menor que la alcanzada cuando $c = 0$ (Fig. 4.13a).

En la figura 4.13c, se muestran los perfiles de velocidad en el misma región del ducto, pero para $c = 0.05$. Se observa que los picos de los perfiles de velocidad para $N_\omega = 1000$ y en estado estacionario, ubicados en la misma región cercana a la pared, se incrementan aún más que los formados en el caso $c = 0.01$. Para $N_\omega = 100$, la velocidad en la capa límite es casi el doble que en el núcleo. Por otro lado, para $N_\omega = 10$ las fuerzas inerciales son aumentadas considerablemente en la región cercana a la pared, lo que ocasiona que los chorros que aparecen en el flujo estacionario desaparezcan y la velocidad en la capa límite disminuya, alcanzando un valor máximo muy similar al de la velocidad en el núcleo.

Aunque es preciso efectuar un estudio más amplio que el presentado aquí, puede concluirse tentativamente que el utilizar paredes conductoras delgadas en el ducto resonador podría tener un efecto estabilizador sobre el flujo oscilatorio, ya que los efectos inerciales parecen contrarrestar la fuerza magnética que da lugar a chorros en la capa lateral, los cuales son altamente inestables.

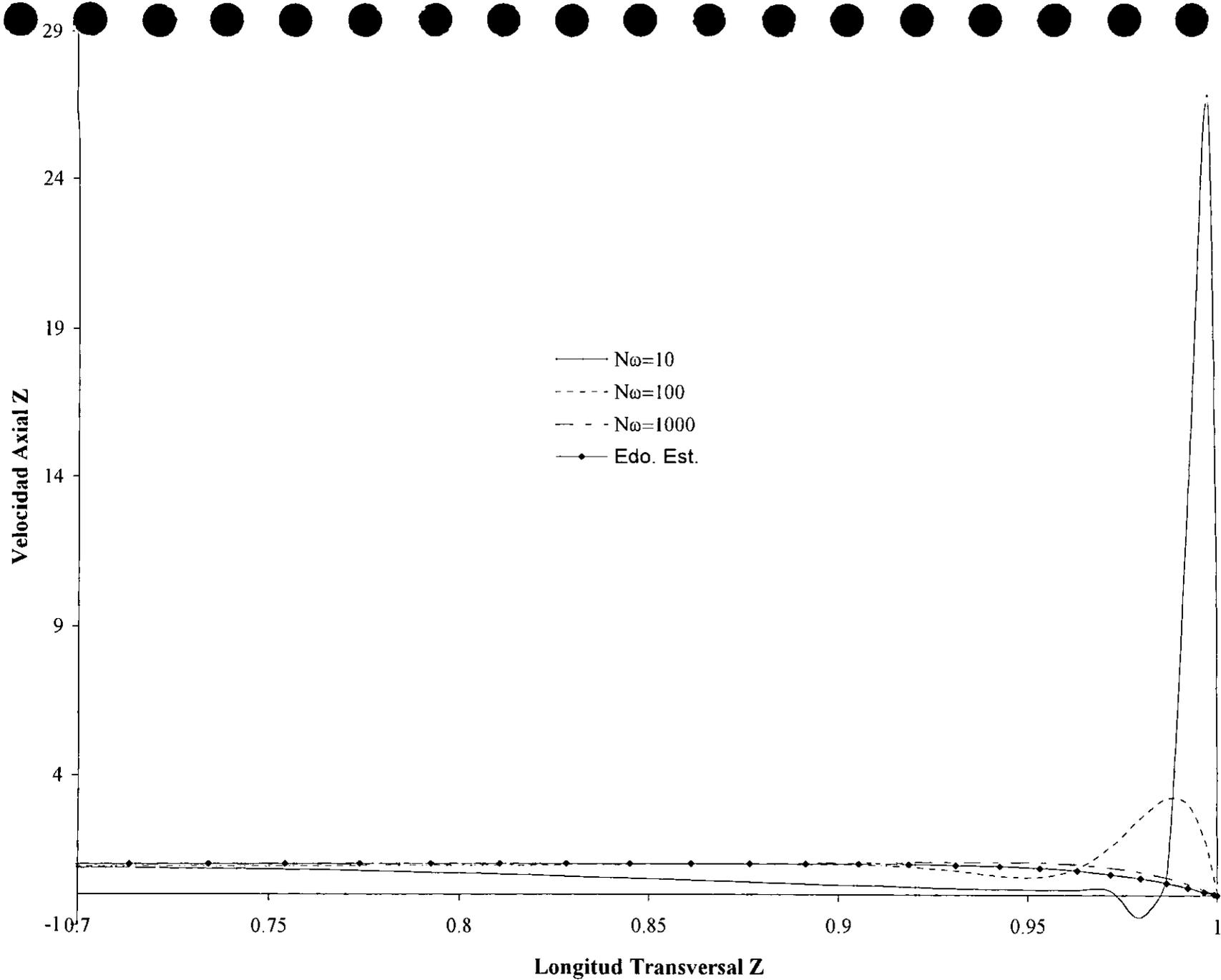


Figura 4.13a. Velocidad vs Z en Y=0 para diferentes $N\omega$. $M=1000$ y $c=0$

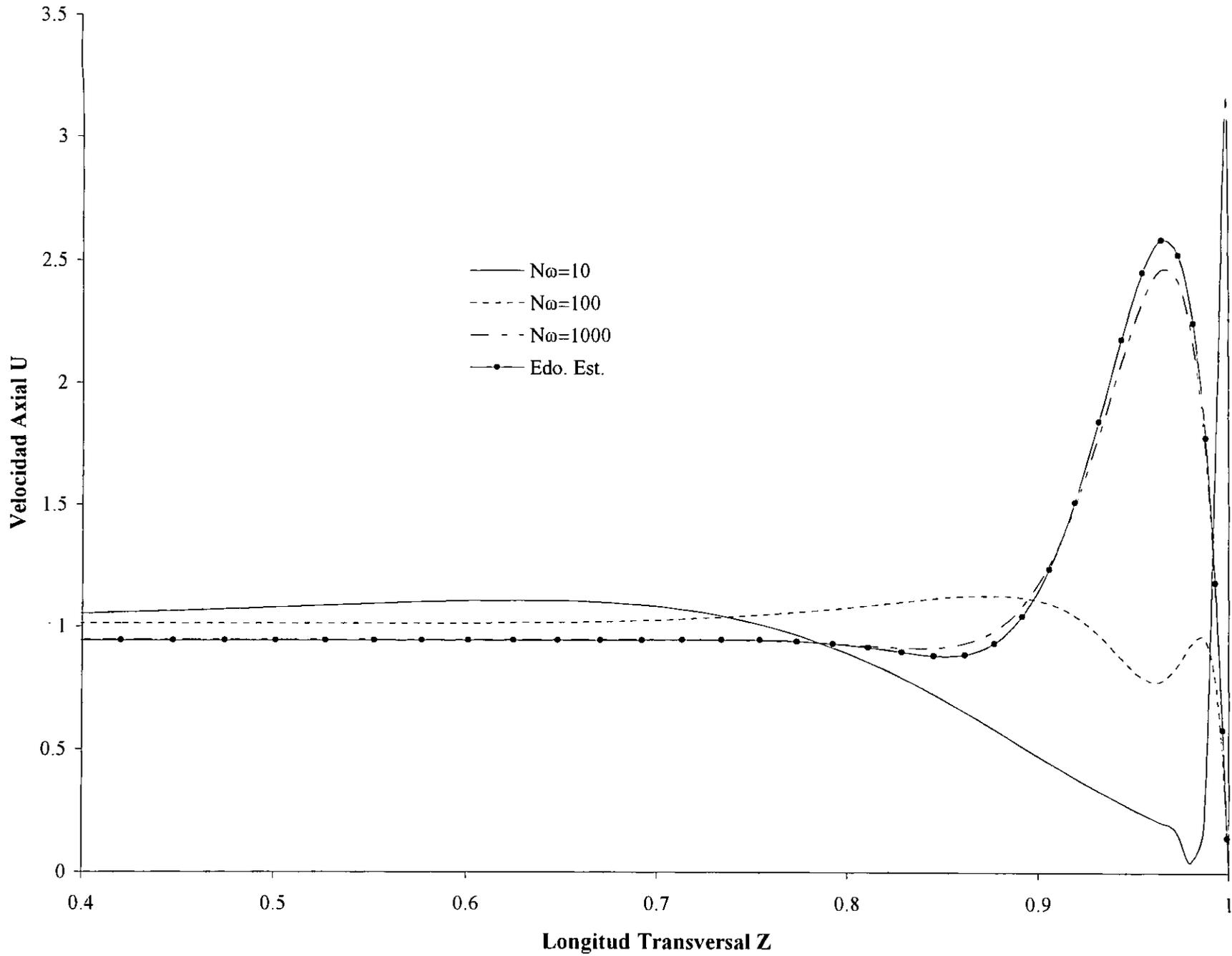


Figura 4.13b. Velocidad vs Z en Y=0 para diferentes $N\omega$. $M=1000$ y $c=0.01$

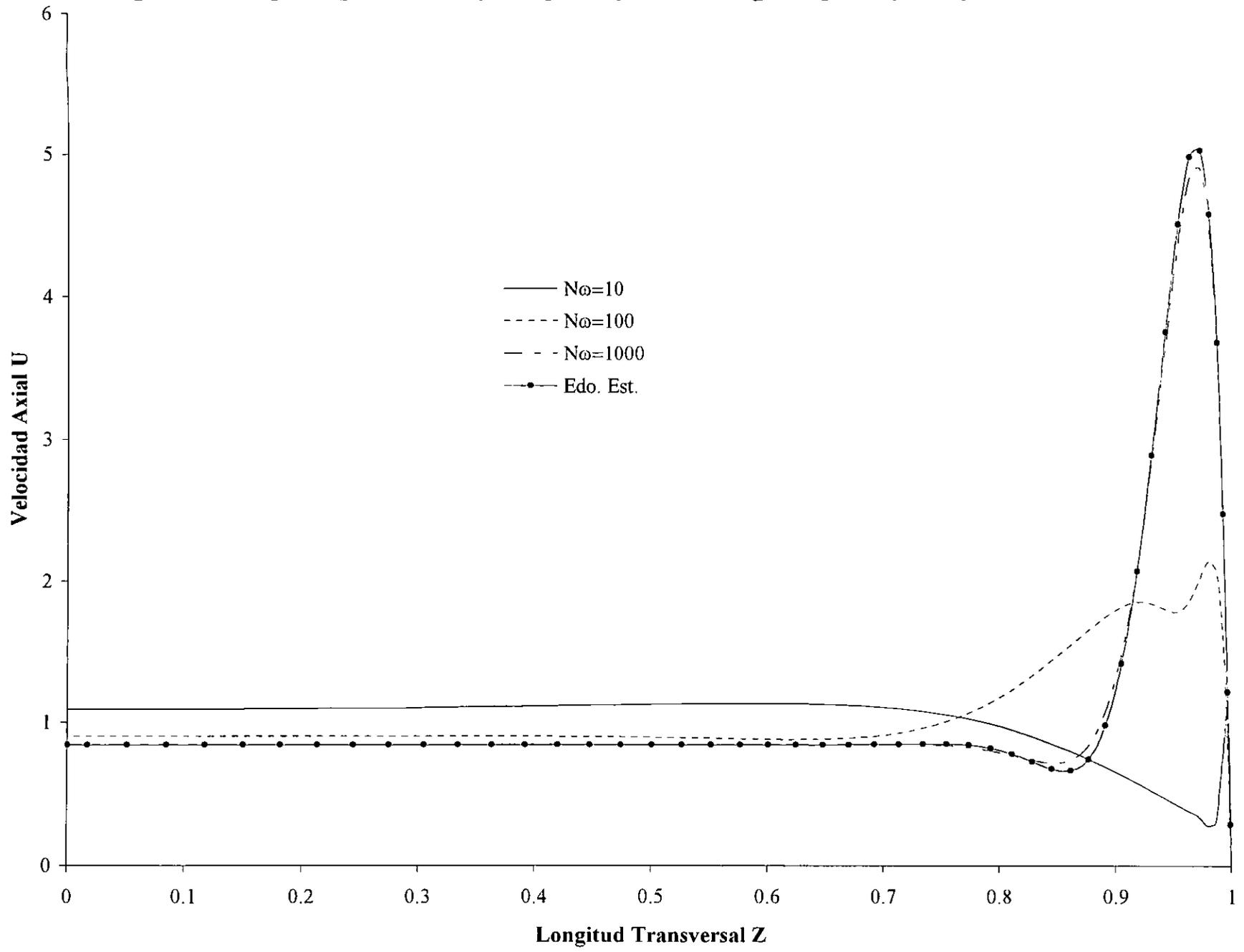


Figura 4.13c. Velocidad vs Z en Y=0 para diferentes N_ω . $M=1000$ y $c=0.05$

CAPÍTULO 5

Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio teórico de un generador eléctrico alterno magnetohidrodinámico (MHD) que puede acoplarse a una fuente calorífica solar. Su principal aportación radica en la comprensión de la dinámica de los flujos MHD que se presentan en el generador y que afectan el funcionamiento de este tipo de dispositivos y, además en la determinación de los principales factores que afectan su desempeño y su acoplamiento a una fuente calorífica solar. Esto se llevó a cabo analizando el comportamiento dinámico de los flujos oscilatorios de fluidos conductores bajo un campo magnético, que tienen lugar en el generador termoacústico MHD. Asimismo, con base en los requerimientos térmicos de tales máquinas se realizó una propuesta específica del acoplamiento del generador MHD y una fuente solar.

Primeramente, se describió un panorama general de los sistemas MHD de conversión de energía, principalmente de aquellos que utilizan metales líquidos como fluido de trabajo en un intervalo de temperaturas, de 300K a 800K, que los hacen susceptibles de ser acoplados a fuentes caloríficas solares como CPCs (Colectores solares compuestos) y lentes de Fresnell. Asimismo, se describió el funcionamiento de las máquinas termoacústicas MHD y posteriormente se realizó el análisis de los parámetros de interés que determinan la factibilidad de acoplamiento a una fuente calorífica solar, tales como las temperaturas de la fuente y del sumidero, los flujos de calor a la temperatura caliente y fría y la potencia de salida de la máquina. A partir de lo anterior, se propuso el uso de fibras ópticas para la transmisión de energía solar concentrada para alimentar un generador termoacústico MHD, conformando entonces un sistema solar de generación de potencia.

Se realizó el análisis del flujo laminar oscilatorio de un fluido eléctricamente conductor en un ducto rectangular, inmerso en un campo magnético uniforme transversal, en la región de capa límite, y se obtuvieron diversas soluciones desde distintos sistemas de referencia. En particular, para el caso puramente hidrodinámico y para algunos casos MHD, encontramos que a pesar de la naturaleza no inercial de los sistemas de referencia, se obtiene una transformación entre ellos similar a la Galileana.

Se obtuvo una solución analítica para el flujo de Hartmann oscilatorio y a partir de esta solución, se elaboró un modelo unidimensional del generador MHD. Se encontraron expresiones analíticas para la potencia de flujo, la potencia eléctrica de salida y la eficiencia eléctrica. Uno de los principales aportes de este trabajo fue precisamente la obtención de una expresión analítica para la eficiencia del generador MHD a partir de la cual y tomando en cuenta la eficiencia de los otros

componentes del sistema de concentración solar, basado en el uso de la fibra óptica, fue posible estimar la eficiencia global del sistema solar de potencia. De hecho, en este análisis se encontró que la eficiencia global del sistema de potencia solar era ligeramente mayor que la obtenida para ese mismo sistema con otra máquina térmica. Posteriormente, con el fin de determinar el efecto de la resistencia eléctrica de las paredes del ducto resonador, se formuló el problema para el flujo laminar oscilatorio completamente desarrollado, en un ducto rectangular bajo un campo magnético transversal uniforme, en régimen laminar. Se obtuvo una solución numérica para el flujo en la región del núcleo-capa límite lateral con condiciones de frontera para paredes conductoras delgadas así como para paredes aislantes. Se analizaron entonces soluciones numéricas para diferentes intensidades del campo magnético, frecuencia de oscilación, así como para diferentes valores de conductividad eléctrica de las paredes. Para el caso de paredes eléctricamente aislantes, se encontró que los efectos inerciales debidos a la oscilación del fluido dan lugar a altas velocidades en la capa límite lateral, las cuales no existen en el caso estacionario. Por su parte, cuando las paredes son conductoras delgadas, las altas velocidades en la capa límite que se presentan en el flujo estacionario por efectos magnéticos, desaparecen al intensificarse los efectos inerciales. A reserva de un estudio más detallado, puede afirmarse tentativamente que el flujo oscilatorio MHD en ductos con paredes conductoras delgadas podría ser más estable que el que se presenta en ductos aislantes. Por otra parte, en todos los casos se obtiene que para valores de $N_w \gg 1$ el perfil de velocidad es el mismo que el perfil en estado estacionario.

Bibliografía

- [1] Rosa, R. J. "Magnetohydrodynamic Energy Conversion", Edit. Hemisphere, New York, 1987.
- [2] Thiagarajan, T. K., Et all, Progress in Astronautics and Aeronautics, Edited by Herman Branover & Yeshajahu Unger, 148, 261-283, 1990.
- [3] Branover, H y Claesson, S. "MHD systems for converting solar energy into electricity", *Chemica Scripta*, vol. 19, 209, 1982.
- [4] Branover, H y El-Boher, A. "The ETGAR program for the development of liquid metal MHD energy conversion technology", Proc. 10th Int. Conf. on MHD Electrical Power Generation, Tiruchirappalli, India, pp. 4-8, diciembre, 1989.
- [5] Branover H., Yakhot A. y El-Boher, A., "Solar-Powered Liquid-Metal MHD Generators and some Peculiarities of the Performance of Two-Phase Generators", VII Int. Conference on MHD Electrical Power Generation, Cambridge Mass, 1980.
- [6] Pertick, M. y Roberts "Performance of Space-power liquid metal MHD cycles utilizing a two-phase flow generator", *J. Spacecraft*, vol. 4, 18.
- [7] Branover, H. y A. El-Boher, "The ETGAR program for de Development of Liquid Metal MHD Energy Conversion Technology", Proc. 10th Int. Conf. on MHD Electrical Power Generation, Tiruchirappalli, India, pp. 4-8, diciembre, 1989.
- [8] E. S. Pierson, H. Branover, G. Fabris and B. Reed "Solar Powered Liquid-Metal MHD Power Systems", *Mechanical Engineering*, pp. 32-37, october, 1980.
- [9] A. Migliori and G. W. Swift "Liquid-Sodium Thermoacoustic Engine" *Appl. Phys. Lett.*, vol. 5, 53, August, 1988.
- [10] Ward, W. C., Swift, G. W., Martin, R. A. y Merrigan, M. A. "Thermoacoustic Engine Scaling, acoustic, and, safety study" Technical Report Los Alamos Nat. Lab. LA-12103-M5, Mayo, 1991.
- [11] Swift, G. W. " A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 1, 83, pp. 350-361, 1988.
- [12] Hamann, D. y Gerbeth, G., "Recent Developments of Liquid Metal MHD Thermoacoustic Engines", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Edited by Herman Branover & Yeshajahu Unger, 148, pp. 441-453, 1990.
- [13] Chen R. and Garrett S. L. , "Solar/Heat Driven Thermoacoustic Engine" Proc. 16th Int. Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acous. Soc. Am., Seattle, Washintong, vol. 2, 20-26, pp. 813-814, June, 1998.
- [14] Swift, G. W., "Thermoacoustic Engines", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 4 , 84, pp. 1145-1180. 1988.
- [15] Duffie, J. M. y Beckman, W., "Solar Energy of Thermal Processes", Wiley-Interscience, New York, 1991
- [16] Kribus A., Zik, O. y Kami J. "Optical Fibers and Solar Power Generation", *Solar Energy*, Vol. 68, No. 5, pp. 405-416, UK, 2000.
- [17] Jaramillo O. A., Del Rio, J. A. y Huelsz G. "A thermal Study of Optical Fibres Transmitting Concentrated Solar Energy", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 32, 1000-1005, UK, 1999.
- [18] Mauk, C. E., Prengle, H. W. y Eddy, C. H. S. "Optical and Thermal Analysis of a Cassegrainian Solar Concentrator", *Solar Energy*, vol. 23, UK, 1979.

- [19] Huges, W. F. & Young, F. J. "The Electromagnetodynamics of Fluids". Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1989.
- [20] Currie, I. G. "Fundamental Mechanics of fluids", McGraw-Hill, Inc., USA, 1993.
- [21] Acheson, D. J., "Elementary Fluids Dynamics" Oxford University Press, New York, 1990.
- [22] Shercliff, J. A. "A Textbook of Magnetohydrodynamics", Pergamon Press, 1965,
- [23] Moreau, R. J."Magnetohydrodynamics", Edit. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Netherlands, 1990.
- [24] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. "Fluid Mechanics" Edit. Pergamon Press, 1959
- [25] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill, USA, 1960.
- [26] Lighthill, M. J. "Laminar Boundary Layers", Editado por L. Rosenhead, Clarendon Press, Oxford, pp. 1-45, 1963.
- [27] Panton, R., J. Fluid Mech., vol. 31, 4, pp. 819-825, 1968.
- [28] Stuart, J. T., "Laminar Boundary Layers", Oxford Press, p.p. 357-408, 1963.
- [29] S. Cuevas & G. Huelsz, "Oscilatory Boundary-Layers Flows", Recent Res. Devel. Fluid Dynamics, vol. 2, pp. 35-61, 1999.
- [30] Stuart, J. T., "Double Boundary Layers in oscillatory viscous flow" J. Fluid Mech., vol. 24, p.p. 673-687, 1966
- [31] Moffatt, H. K. & Toomre, J. "The annihilation of a two-dimensional jet by a transverse magnetic field", J. Fluid Mech., vol. vol. 30, 65-82, 1967.
- [32] Cuevas, S. & Ramos, "Steady Streaming in Oscillatory Viscous Flow under a Transverse Magnetic Field" E., Phys. Fluids, vol. 9, pp. 1430-1434, 1997
- [33] Cuevas, S. & Ramos, "Transport of Momentum and Heat in Oscillatory MHD Flow" E. In: Fluids Dynamics and its Applications, Ed. A. Alemany, J. P. Thibault & Ph. Marty. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998 .
- [34] Davidson, P. A. "Magnetic Damping of Jets and Vortices", J. Fluid Mech., vol. 299, 153, 1995.
- [35] Rossow, V. J. "On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field", Technical Note 3971, NACA, Washintong, May, 1957.
- [36] Ibáñez, G., Cuevas S., and López de Haro, M. "Optimization Analysis of an Alternate MHD Generator", Enviado a Energy Conv. Mngmt.
- [37] Roberts, P. H., "An Introduction to Magnetohydrodynamics", Longmans, London, 1967.
- [38] Walker, J.S., "Magnetohydrodynamics Flows in a Rectangular Ducts with Thin Conducting Walls. Part I. Constant Area and Variable Area Ducts with Strong Magnetics Fields", J. Méc., vol. 20, pp. 79-112, 1981
- [39] Cuevas, S. "Dinámica y Transferencia de calor en Flujos de Metales Líquidos en Campos Magnéticos Intensos", Tesis de Doctorado en Ciencias, FC-UNAM, México, D.F., 1994.
- [40] Cuevas, S., Picologlou, B. F., Walker J. S. y Talmage G., "Liquid-Metal Flow in Rectangular Ducts with Thin Conducting or Insulating Walls: Laminar and Turbulent Soluciones", Edit. Pergamon, Int. J. Engng Sci., Vol. 35, No. 5, Gran Bretaña, 1997.
- [41] Ting, A., "Combined Analitical and Numerical Solutions in Liquid-Metal Flows in a Rectangular Duct with Uniform or Non-Uniform, Strong Magnetic Fields", Ph. D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaing, USA, 1991.
- [42] Canuto, C., Hussani, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., "Spectral Methods in Fluid Dynamics". Springer-Verlag, New York, 1987.
- [43] Malghan, V. R. "Towards commercialization of MHD power plants : A look at the international programmes", Energy Convs. Mgmt., vol. 25, pp. 225-247, 1985.
- [44] Walker, J.S., "Periodic fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetics field", angew. Math. Phys., vol. 23, pp. 353-366, 1974.

- [45] Walker, J.S., "Periodic fluid transients in rectangular ducts with transverse magnetic field II", *Angew. Math. Phys.*, vol. 27, pp. 71-81, 1976.
- [46] Huelsz, G. y Ramos, E., "On the phase difference of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect", *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, vol. 1, 22, pp. 71-80, 1995.
- [47] Huelsz, G. y Ramos, E., "A physical interpretation of the thermoacoustic effect", *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, vol. 21, pp. 278-284, 1996
- [48] Rudraiah, N., *Phys. Fluids*, vol. 10, 13, Research Notes, pp. 2616-2619, 1970.
- [49] Ong R. S. & Nicholls J. A. , *J. of Aero/Space Science, Reader's Forum*, 313-314, May 1989.
- [50] Cowling, T. G., "Magnetohydrodynamics", Interscience Publishers, Inc., New York, 1957
- [51] Cuevas, S. "Transferencia de Calor en un flujo MHD con condiciones a la frontera de tercer tipo", Tesis de Maestría en Ciencias, FC-UNAM, México, D.F., Feb. 1988.