



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CASIFIBRACIONES Y PERIODICIDAD DE BOTT"

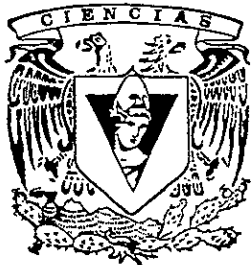
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LUIS EDOARDO LOPEZ VAZQUEZ



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



292491

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis.

"Casifibraciones y Periodicidad de Bott"

realizado por Luis Edoardo López Vázquez

con número de cuenta 9653452-2 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Carlos Prieto de Castro

Propietario

Dr. Marcelo Alberto Aguilar González

Propietario

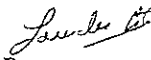
Dr. José Seade Kuri

Suplente

Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta

Suplente

Dr. Herbert Kanarek Blando

  
Consejo Departamental de



FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
de  
MATEMÁTICAS

# Casifibraciones y Periodicidad de Bott

Luis Edoardo López Vázquez

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas que de alguna forma colaboraron para la realización de esta tesis. En primer lugar quiero agradecer al Dr. Carlos Prieto por su apoyo, su paciencia y su guía. Espero haber aprovechado sus virtudes como maestro, matemático y editor. También agradezco al Dr. Marcelo Aguilar quien me motivó a buscar las distintas perspectivas que se tienen sobre los haces. Agradezco también a mis compañeros del Instituto de Matemáticas y de la Facultad de Ciencias por crear un buen ambiente de trabajo. Finalmente quiero dar las gracias a toda mi familia, en particular, a mi hermana Mónica y a mi madre, quienes fueron un gran apoyo durante la realización de esta tesis.

---

*A mi madre*

# ÍNDICE GENERAL

1	VARIETADES DE STIEFEL Y DE GRASSMANN	7
1.1	Introducción . . . . .	7
1.2	Algunas propiedades de las variedades de Stiefel y de Grassmann	13
1.3	Las Grassmannianas como variedades algebraicas . . . . .	21
1.4	G-Haces principales . . . . .	26
1.5	Cálculos Homotópicos . . . . .	51
2	CASIFIBRACIONES	61
2.1	Introducción . . . . .	61
2.2	Criterio de Dold para Casifibraciones . . . . .	64
3	PERIODICIDAD DE BOTT	71
3.1	Introducción . . . . .	71

---

3.2	Construcción de la Casifibración . . . . .	73
3.2.1	Caso finito . . . . .	79
3.2.2	Estabilización del caso finito . . . . .	86
3.2.3	Criterio de Dold . . . . .	88
4	HACES VECTORIALES SOBRE VARIETADES AL- GEBRAICAS REALES	97
4.1	Introducción . . . . .	97
4.2	Un Cálculo Explícito . . . . .	107



# INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta tesis es dar una demostración del teorema de periodicidad de Bott compleja, siguiendo las líneas de las pruebas dadas en los artículos [Be] y [AP]. La prueba utiliza únicamente herramienta propia de la topología algebraica y del algebra lineal.

El primer capítulo de esta tesis presenta desde varios puntos de vista a las variedades de Stiefel y de Grassmann. Estas variedades son, junto con el grupo unitario, los espacios en los que se basan la mayor parte de las construcciones ocupadas en la prueba del teorema de periodicidad.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de casifibración y se enuncia el criterio de Dold-Thom para casifibraciones, podríamos decir que el criterio de Dold-Thom es el resultado más “avanzado” de la topología algebraica que se utiliza en la prueba que se da del teorema de periodicidad.

El tercer capítulo se ocupa de la prueba en sí del teorema; la prueba se disecta y se presenta en partes utilizando la herramienta desarrollada en los primeros dos capítulos.

---

El teorema de periodicidad de Bott tiene varias aplicaciones en la topología algebraica (ver por ejemplo [AGP], capítulo 9). Después de haber sido probado por Bott en [Bott], Atiyah y Hirzebruch utilizaron la interpretación del teorema en Teoría  $\mathbf{K}$  para definir la Teoría  $\mathbf{K}$  como una teoría de cohomología generalizada.

En el cuarto capítulo de esta tesis se presenta una aplicación del teorema de periodicidad de Bott junto con el teorema de Swan-Serre (4.1.15) que nos permite comparar los haces vectoriales topológicos y los haces vectoriales algebraicos sobre una variedad algebraica real compacta.

## CAPÍTULO 1

# VARIETADES DE STIEFEL Y DE GRASSMANN

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de dar la definición formal de los espacios de Stiefel y de Grassmann, analizaremos estos espacios de manera intuitiva. Comencemos pues, por el más simple de todos estos espacios,  $G_1(\mathbb{R}^2)$ .

Uno de los conceptos más elementales es el de la proporción, es decir, el de medir la comparación de una cierta magnitud en relación con otra. Esta medición sugiere una relación de equivalencia en el conjunto de parejas de números reales (excluyendo a las parejas de la forma  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ).

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$  entonces diremos que  $(a, b) \cong (c, d) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $a = \lambda b$  y  $c = \lambda d$ . Si identificamos a la pareja de números  $(a, b)$  con el cociente  $\frac{a}{b}$ , utilizando la relación de equivalencia antes

dada, obtenemos el conjunto de números reales con la igualdad, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} & \xrightarrow{\quad} & \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \approx \mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \approx & \\ \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} & & \end{array}$$

El significado geométrico de la identificación anterior es el siguiente: El número  $\frac{a}{b}$  corresponde al valor de la pendiente de la recta generada por el vector  $(b, a)$ : Si realizamos la compactación de Alexandroff de la recta real, es decir, si “le

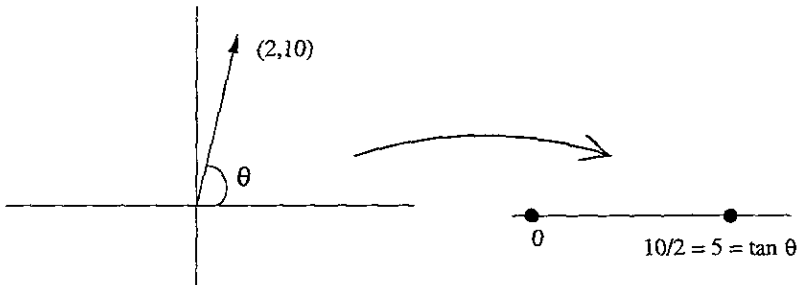


Figura 1.1: A la recta generada por el vector  $(2, 10)$  le corresponde el número  $\frac{10}{2} = 5 = \tan \theta$

pegamos el punto al infinito a la recta real”, parecería razonable hacer corresponder el punto al infinito con la recta generada por el vector  $(0, 1)$ , ya que en cierta forma ésta es una recta con pendiente infinita. Ahora bien, si intersecamos cada recta con el círculo unitario, tendríamos una correspondencia entre las rectas del plano y las parejas de puntos antípodas en el círculo

unitario, de tal manera que rectas con pendientes “cercanas” corresponden a parejas de puntos antípodas “cercanos”. Para terminar, podemos observar en la figura 1.2, que el círculo con las parejas de puntos antípodas identificadas es homeomorfo al círculo.

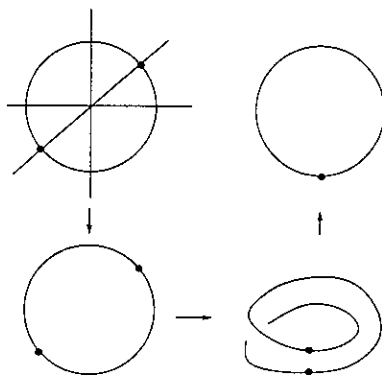


Figura 1.2: El conjunto de rectas por el origen  $G_1(\mathbb{R}^2)$  es homeomorfo al círculo unitario

Para generalizar el proceso antes realizado, notemos cuáles fueron las características esenciales de éste:

1. Tomamos al conjunto de rectas (*reales*) en  $\mathbb{R}^2$ .
2. Identificamos a todos los puntos de cada recta (*real*), de manera que la identificación respete la idea intuitiva de “cercanía” entre las rectas.

Una generalización que parece ser razonable es la siguiente:

1. Tomamos los subespacios vectoriales (*reales, complejos*) de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ), a los que llamaremos *k-planos*.
2. Identificamos a todos los puntos de cada *k-plano* (*real, complejo*) de manera que la identificación respete la idea intuitiva de “cercanía” entre los *k-planos*.

A esta generalización, podríamos objetarle la vaguedad de la “idea intuitiva de cercanía entre los *k-planos*”, analicemos pues cuál fue en primera instancia nuestra idea de cercanía entre las rectas. Habíamos dicho que dos rectas con pendientes “cercanas” corresponderían a parejas de puntos antípodas “cercanas”; recordemos que la pendiente está en correspondencia biunívoca y bicontinua con el ángulo determinado entre la recta dada y el eje  $x$  (por medio de la función  $\tan \theta$ ), ahora bien, para definir la magnitud de un ángulo, una manera de hacerlo es tomar las intersecciones de las rectas que determinan el ángulo con el círculo unitario y medir la longitud del arco determinado por estos dos puntos (ver figura 1.3).

Para generalizar la idea de cercanía entre dos espacios veamos cuáles son las características esenciales de esta medición:

1. Dadas dos rectas  $A$  y  $B$  por el origen en  $\mathbb{R}^2$  tomamos sus intersecciones

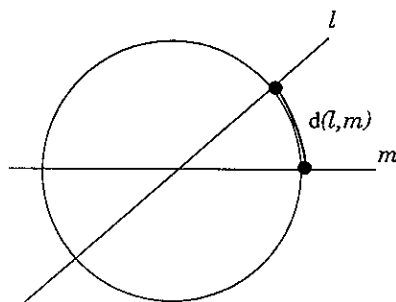


Figura 1.3: La distancia entre las rectas  $l$  y  $m$

con el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ , estas intersecciones son dos parejas de puntos antípodas  $\{a, -a\}$  y  $\{b, -b\}$ .

2. Definimos la distancia entre  $A$  y  $B$  como  $\max\{d(a, \{b, -b\}), d(-a, \{b, -b\})\}$ .

Tomando la distancia  $d$  como la distancia en  $\mathbb{S}^1$  (La distancia dada por las geodésicas).

La generalización de esta manera de medir sería la siguiente:

1. Dados dos  $k$ -planos  $A$  y  $B$  por el origen en  $\mathbb{R}^n$  tomamos sus intersecciones con la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\mathbb{S}_1^{k-1}$  y  $\mathbb{S}_2^{k-1}$ .

2. Definimos la distancia entre  $A$  y  $B$  como  $d(A, B) = \max_{a \in \mathbb{S}_1^{k-1}} \{\hat{d}(a, \mathbb{S}_2^{k-1})\}$ .

Tomando la distancia  $\hat{d}$  como la distancia geodésica en  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

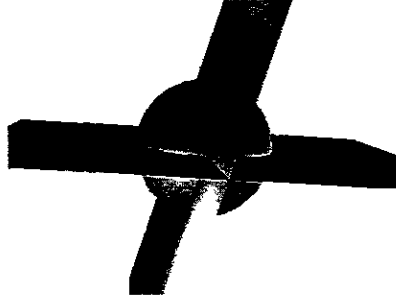


Figura 1.4: Dos 2-planos en  $\mathbb{R}^3$  (i.e. Dos puntos de  $G_2(\mathbb{R}^3)$ ), su distancia es la distancia  $d$  en  $\mathbb{S}^2$  entre los dos círculos  $\mathbb{S}_1^1$  y  $\mathbb{S}_2^1$

Con esta métrica, los  $k$ -planos en  $\mathbb{R}^n$  forman un espacio topológico, las variedades de Grassmann son estos espacios, es decir, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$   $G_k(\mathbb{R}^n)$  es el espacio cuyos puntos son los  $k$ -planos por el origen con la métrica antes definida. Con esta idea procederemos a dar una definición formal de las variedades de Stiefel y de Grassmann .

1.1.1 DEFINICIÓN. La *variedad de Stiefel de  $k$ -marcos ortonormales* en  $\mathbb{F}^n$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ), denotada como  $V_k(\mathbb{R}^n)$ , es el conjunto  $\{(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{F}^{nk} \mid (v_i | v_j) = \delta_{ij}\}$  con la topología de subespacio heredada de  $\mathbb{F}^{nk}$ , donde  $(v_i | v_j)$  denota el producto escalar de  $\mathbb{F}^n$ . A los elementos  $(v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{F}^n)$  se les llama  *$k$ -marcos*.

A cada  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$  de la variedad de Stiefel le podemos asociar



un subespacio vectorial de  $\mathbb{F}^n$ , a saber, el subespacio  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  generado por el  $k$ -marco. Por el proceso de ortonormalización Gram-Schmidt, dada cualquier base de un subespacio vectorial de  $\mathbb{F}^n$  podemos asociarle un  $k$ -marco ortonormal que lo genere, es decir, todo subespacio vectorial de  $\mathbb{F}^n$  es de la forma  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  donde  $(v_1, \dots, v_k)$  es un  $k$ -marco ortonormal.

1.1.2 DEFINICIÓN. La *variedad de Grassmann de  $k$ -planos en  $\mathbb{F}^n$*  denotada como  $G_k(\mathbb{F}^n)$ , es el conjunto de  $\mathbb{F}$ -subespacios vectoriales de dimensión  $k$  de  $\mathbb{F}^n$ , con la topología del cociente inducida por la función  $p : V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$  tal que  $p(v_1, \dots, v_k) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ . A los elementos de  $G_k(\mathbb{F}^n)$  se les llama  $k$ -planos en  $\mathbb{F}^n$ .

1.1.3 NOTA. Aún no se ha demostrado que las variedades de Stiefel o de Grassmann de hecho sean variedades (diferenciables y algebraicas).

## 1.2 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS VARIETADES DE STIEFEL Y DE GRASSMANN

En esta sección examinaremos algunas de las propiedades topológicas de las variedades de Stiefel y de Grassmann. Denotaremos por  $\nu$  a la dimensión como espacio vectorial real de  $\mathbb{F}$ .

Si definimos  $q_{ij} : (\mathbb{F}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  como  $q_{ij}(v_1, \dots, v_k) = (v_i | v_j)$ , entonces, de acuerdo con la definición de la variedad de Stiefel que hemos dado,  $V_k(\mathbb{F}^n) =$

$\bigcap_{i,j \leq k} q_{ij}^{-1}(\delta_{ij})$ ; como cada una de las preimágenes  $q_{ij}^{-1}(\delta_{ij})$  es un cerrado en  $(\mathbb{F}^n)^k = \mathbb{F}^{nk}$ ,  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  es un conjunto cerrado de  $\mathbb{F}^{nk}$ , además como  $(v_i|v_j) = \delta_{ij}$ ,  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \subset (\mathbb{S}^{\nu n-1})^k$ . Por ser  $\mathbb{S}^{\nu n-1}$  compacto (gracias al teorema de Heine-Borel) y, por tanto también,  $(\mathbb{S}^{\nu n-1})^k$  (gracias al teorema de Tychonoff), entonces  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  resulta ser un espacio compacto. Además, por ser  $\mathbb{S}^{\nu n-1}$  un espacio métrico,  $(\mathbb{S}^{\nu n-1})^k$  es un espacio métrico, por lo que también  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  es un espacio métrico. Como  $\mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  se define como la imagen directa de un compacto a través de una identificación,  $\mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  mismo es un espacio compacto.

Probaremos ahora que las variedades de Grassmann son espacios de Hausdorff, es decir, que dados dos puntos distintos existen dos vecindades ajenas que los contienen respectivamente. Para este fin probaremos un lema que nos da condiciones necesarias y suficientes para que el cociente de un espacio topológico  $X$  bajo una relación  $\sim$  resulte ser un espacio de Hausdorff.

**1.2.1 Lema.** *Sea  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  una identificación tal que  $\pi$  es abierta. Entonces  $R = \{(x, y) \mid \pi(x) = \pi(y)\}$  es un conjunto cerrado de  $X \times X$  si y sólo si  $X/\sim$  es un espacio de Hausdorff*

*Demostración:* Supongamos que  $X/\sim$  es de Hausdorff, probaremos que el complemento de  $R$ ,  $R^c$ , es abierto. Sea  $(x, y) \in R^c$ , luego  $\pi(x) \neq \pi(y)$ , por ser  $X/\sim$  de Hausdorff existen  $\bar{U}$  vecindad de  $x$  y  $\bar{V}$  vecindad de  $y$  tales que  $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ . Como  $\pi$  es continua,  $U = \pi^{-1}(\bar{U})$  y  $V = \pi^{-1}(\bar{V})$  son abiertos,

por lo que  $U \times V$  es un abierto en  $X \times X$  que contiene a  $(x, y)$  y es tal que  $(U \times V) \cap R = \emptyset$ , ya que si existiera  $(x', y') \in (U \times V) \cap R$ , entonces  $\pi(x') = \pi(y')$  lo cual contradiría el hecho de que  $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ .

Supongamos ahora que  $R$  es cerrado, es decir que  $R^c$  es abierto. Sean  $\pi(x)$  y  $\pi(y)$  dos puntos distintos de  $X/\sim$ , luego existe una vecindad  $U \times V$  de  $(x, y)$  tal que  $(U \times V) \cap R = \emptyset$ . Como por hipótesis  $\pi$  es abierta,  $\pi(U)$  y  $\pi(V)$  son dos vecindades que separan a  $\pi(x)$  y a  $\pi(y)$ , ya que si  $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$  entonces  $\emptyset \neq (U \cap V \times U \cap V) = (U \cap V \times U \cap V) \cap R \subset (U \times V) \cap R!$   $\square$

Para poder utilizar este lema necesitamos verificar que se cumplen las hipótesis en el caso que nos interesa, pero primero procederemos a dar una descripción más explícita de  $V_k(\mathbb{R}^k)$ .

Si tomamos a  $U = (u_1, \dots, u_k) \in V_k(\mathbb{R}^k)$ , podemos ver a  $U$  como una matriz de  $k \times k$  de la siguiente forma, las entradas de la  $i$ -ésima columna de la matriz son las entradas del vector  $u_i$ . De esta manera la condición que cumplen los  $k$ -marcos de la variedad de Stiefel i.e.  $(u_i | u_j) = \delta_{ij}$  es equivalente a que los vectores columna de la matriz asociada a  $U$  sean ortonormales, es decir,  $\sum_{l=1}^k u_{il}u_{jl} = \delta_{ij}$ . Sean ahora  $v, w \in \mathbb{R}^k$ , calcularemos una expresión para  $\langle Uv, Uw \rangle$ :

$$Uv = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^k u_{1l}v_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^k u_{kl}v_l \end{bmatrix}$$

y

$$Uw = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^k u_{1l}w_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^k u_{kl}w_l \end{bmatrix}$$

por lo tanto reagrupando términos tenemos que

$$\langle Uv, Uw \rangle = v_1w_1 \sum_{l=1}^k u_{1l}u_{1l} + \dots + v_iw_j \sum_{l=1}^k u_{il}u_{jl} + \dots = \sum_{i=1, j=1}^k v_iw_j\delta_{ij} = \langle v, w \rangle.$$

Luego hemos probado que los elementos de  $V_k(\mathbb{F}^k)$  definen operadores que preservan el producto escalar. Una consecuencia de que estos operadores preserven el producto escalar es que manden bases ortonormales en bases ortonormales, por lo tanto, la multiplicación de dos matrices que representen elementos de  $V_k(\mathbb{F}^k)$  nos da otro elemento de  $V_k(\mathbb{F}^k)$ , además, como son matrices de rango  $k$  (ya que sus vectores columna forman una base de  $\mathbb{F}^k$ ), estas matrices son invertibles y sus inversas siguen preservando el producto escalar (ya que  $\langle U^{-1}v, U^{-1}w \rangle = \langle UU^{-1}v, UU^{-1}w \rangle = \langle v, w \rangle$ ). De esta manera hemos probado que los elementos de  $V_k(\mathbb{F}^k)$  forman un grupo bajo la multiplicación de matrices, a este grupo se le denotará en general por  $U_k$  y se le llama el *grupo unitario*; en el caso particular en que  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  se le denotará por  $O_k$  y se le llamará *grupo ortogonal*.

Dada esta definición podemos probar el siguiente lema.

1.2.2 Lema. La proyección  $p : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  es abierta

*Demostración:* Basta probar que la saturación de un abierto  $U$  de  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  (i.e  $p^{-1}p(U)$ ) es abierta. Notemos que dos  $k$ -marcos  $u = (u_1, \dots, u_k)$  y  $v = (v_1, \dots, v_k)$  están relacionados por medio de  $p$  si y sólo si generan el mismo espacio vectorial, es decir si existe una matriz de cambio de base  $A$  tal que  $Au = v$  (más adelante en la sección 1.4 se profundizará en esta descripción de las variedades de Stiefel y de Grassmann como espacios base de  $G$ -haces principales) por lo tanto la saturación de  $U$  es  $\bigcup_{A \in \mathcal{U}_k} AU$ , que es un abierto, ya que  $AU$  es abierto para cada  $A$ , (definimos  $\varphi_A : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  como  $\varphi_A(v) = Av$ . Ya que  $\varphi_A$  es un homeomorfismo, se sigue de inmediato que  $AU$  es abierto) □

1.2.3 Lema.  $R = \{(x, y) \mid p(x) = p(y)\}$  es un conjunto cerrado en  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$

*Demostración:* Definiremos una función  $\Phi : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  y obtendremos a  $R$  como  $\Phi^{-1}(0)$ .

Como ya dijimos, un elemento de  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  lo podemos ver como una matriz  $A$  de  $k \times n$  acomodando los vectores del  $k$ -marco como renglones de la matriz  $A$ , es decir, si  $v \in \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  es un  $k$ -marco tal que  $v = (v_1, \dots, v_k)$  donde

$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$  entonces

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

Por ser  $v$  un  $k$ -marco los renglones de la matriz  $A$  son linealmente independientes, luego existen  $k$  columnas de  $A$  que son linealmente independientes, es decir, existe un menor  $B$  de  $A$ , invertible de rango  $k$ ; por ser  $B$  de rango  $k$  podemos escribir los vectores canónicos de  $\mathbb{F}^k$  como combinación lineal de los vectores renglón de  $B$ , lo cual es equivalente a decir que podemos transformar a  $B$  en la matriz identidad de  $k \times k$  por medio de operaciones con los renglones, estas operaciones las podemos realizar en los renglones de  $A$  y obtenemos una matriz  $A'$  que contiene a la identidad de  $k \times k$  como menor. Como los renglones de  $A'$  se obtuvieron como combinaciones lineales de los renglones de  $A$ , el espacio de renglones de  $A'$  es el mismo que el espacio de renglones de  $A$ , es decir,  $p(A) = p(A')$

Tomando un elemento de  $V_k(\mathbb{F}^n) \times V_k(\mathbb{F}^n)$  en su representación matricial  $(A, B)$  formamos la matriz  $C$  de  $2k \times n$  de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

y definimos  $\Phi : V_k(\mathbb{F}^n) \times V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\Phi(A, B) = \sum_{D < C} |\det(D)|$  donde  $D < C \Leftrightarrow D$  es un menor de  $(k+1) \times (k+1)$  de  $C$  y  $C$  es la matriz antes

especificada a partir de  $A$  y de  $B$ . Supongamos que  $\Phi(A, B) = 0$  donde

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kn} \end{bmatrix}$$

entonces los determinantes de todos los menores de  $(k+1) \times (k+1)$  de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \\ u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ u_{k1} & \dots & u_{kn} \end{bmatrix}$$

son idénticamente cero; recordemos que habíamos probado que  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A')$ , donde  $A'$  es una matriz que contiene a la identidad de  $k \times k$  como menor. Probaremos que para  $1 \leq i \leq k$ ,  $u_i$  está contenido en el subespacio generado por los renglones de  $A'$  y, por lo tanto, en el subespacio generado por los renglones de  $A$

Supongamos que el menor de  $k \times k$  en  $A'$  que es la identidad de  $k \times k$  corresponde a los vectores columna  $v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ , donde  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  es un subconjunto de cardinalidad  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , y sea  $I$  el complemento de  $J$  en  $\{1, \dots, n\}$ . Sea  $m \in I$  y sea  $D$  el menor de  $(k+1) \times (k+1)$  de  $C$  que se obtiene de borrar todos los vectores columna  $v_{j_{k+1}}, \dots, v_{j_n}$  donde  $\{j_{k+1}, \dots, j_n\} = I - \{m\}$

y todos los renglones  $u_l$  para  $l \neq i$ . Luego, si por ejemplo  $m > j_k$ , entonces  $D$  es de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} & & v_{1m} \\ & I_k & \vdots \\ & & v_{km} \\ u_{ij_1} \dots u_{ij_k} & & u_{im} \end{bmatrix}$$

Como por hipótesis  $\det(D) = 0$ , el vector  $w_m = (u_{ij_1}, \dots, u_{ij_k}, u_{im})$  es combinación lineal de los otros vectores renglón de  $D$ , pero como  $D$  contiene a la identidad de  $k \times k$  entonces  $w_m = \sum_{s=1}^k u_{ij_s} \hat{e}_s$  donde  $\hat{e}_s = e_s \oplus v_{sm}$  (el símbolo  $\oplus$  significa agregar la coordenada  $sm$  en el lugar debido). Observemos que los coeficientes  $u_{ij_s}$  de esta suma no dependen de  $m$ , por lo tanto  $u_i = \sum_{s=1}^k u_{ij_s} \bar{e}_s$ , donde  $\bar{e}_s = e_s \oplus v_{t_1} \oplus \dots \oplus v_{t_{n-k}}$  y  $\{t_1, \dots, t_{n-k}\} = I$ , es decir  $u_i$  está en el espacio de renglones de  $A'$ . Como esto se cumple para toda  $i$ , entonces  $\langle B \rangle = \langle B' \rangle = \langle A' \rangle = \langle A \rangle$ , lo cual es equivalente a decir que  $p(A) = p(B)$

Trivialmente, si  $p(A) = p(B)$ , se cumple que  $\Phi(A, B) = 0$ ; por lo tanto, hemos demostrado que  $\Phi^{-1}(0) = R$ . Como  $\{0\}$  es cerrado en  $\mathbb{R}$  y  $\Phi$  es continua,  $R$  es cerrado en  $V_k(\mathbb{R}^n) \times V_k(\mathbb{R}^n)$  □

Los tres lemas anteriores implican directamente que  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es un espacio de Hausdorff

El siguiente lema de la topología general, que es consecuencia del Teorema de metrizabilidad de Urysohn, muestra que  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es un espacio métrico (No daremos detalles por estar fuera del contexto, la demostración se puede



consultar en [Will] pág 175).

1.2.4 **Lema.** *La imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio de Hausdorff es metrizable*

Así como una identificación es suprayectiva obtenemos que por ser  $V_k(\mathbb{F}^n)$  métrico y compacto, y  $G_k(\mathbb{F}^n)$  de Hausdorff, entonces  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es un espacio metrizable.

### 1.3 LAS GRASSMANNIANAS COMO VARIETADES ALGEBRAICAS

En esta sección probaremos que existe una variedad algebraica real afín  $H_k(\mathbb{R}^n)$  tal que  $H_k(\mathbb{R}^n) \approx G_k(\mathbb{R}^n)$ , análogamente existe una variedad algebraica real afín  $\tilde{H}_k(\mathbb{C}^n)$  tal que  $\tilde{H}_k(\mathbb{C}^n) \approx G_k(\mathbb{C}^n)$ .

Sean

$$H_k(\mathbb{R}^n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = A, \quad A^2 = A, \quad \text{tr}(A) = k\}$$

y

$$\tilde{H}_k(\mathbb{C}^n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^* = A, \quad A^2 = A, \quad \text{tr}(A) = k\}$$

con la topología de subespacios euclidianos de  $\mathbb{F}^{n^2}$  respectivamente. Notemos que los conjuntos subyacentes a estos espacios son variedades algebraicas afines reales en el sentido clásico (ver [Shaf] ó [BCR]).

Construiremos aplicaciones  $\phi : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_k(\mathbb{R}^n)$  y  $\tilde{\phi} : V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow H_k(\mathbb{C}^n)$  que inducirán homeomorfismos  $\psi$  y  $\tilde{\psi}$  en los siguientes diagramas respectivamente.

$$(1.3.0) \quad \begin{array}{ccc} V_k(\mathbb{R}^n) & & \\ p \downarrow & \searrow \phi & \\ G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\psi} & H_k(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

$$(1.3.0) \quad \begin{array}{ccc} V_k(\mathbb{C}^n) & & \\ p \downarrow & \searrow \tilde{\phi} & \\ G_k(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{H}_k(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Realizaremos la construcción únicamente para el caso real ya que el caso complejo es totalmente análogo. Sea pues  $(v_1, \dots, v_k)$  un  $k$ -marco en  $V_k(\mathbb{R}^n)$ . Mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt podemos completar este  $k$ -marco a un  $n$ -marco  $(v_1, \dots, v_n)$ , a este  $n$ -marco le podemos asociar la transformación lineal  $A_{(v_1, \dots, v_n)}$  tal que

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

Esta transformación la podemos representar por distintas matrices eligiendo una base de  $\mathbb{R}^n$ , definimos  $\phi((v_1, \dots, v_k))$  como la matriz de la transformación  $A_{(v_1, \dots, v_n)}$  que corresponde a la base ordenada canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Notemos que respecto a la base ordenada  $(v_1, \dots, v_n)$ , la matriz de la transformación  $A_{(v_1, \dots, v_n)}$  es:

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además como la base ordenada  $(v_1, \dots, v_n)$  es ortonormal, la matriz inversa de la matriz  $M$  cuyos vectores columna son los  $v_i$  es  $M^t$ . De esta manera obtenemos que

$$\phi((v_1, \dots, v_n)) = M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t$$

Probemos ahora que  $\phi$  está bien definida. Primero mostraremos que  $\phi$  no depende de cómo completamos al  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$ ; realizando el producto de matrices obtenemos que:

$$\left( M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t \right)_{ls} = \sum_{i=1}^k v_{is} v_{il} \quad ,$$

donde el primer índice denota la columna a la que pertenece el elemento  $ij$ -ésimo de la matriz. De esta manera, es claro que la matriz que definimos sólo depende del  $k$ -marco y no de los vectores que lo extienden a un  $n$ -marco. Ahora mostraremos que  $\phi((v_1, \dots, v_k))$  satisface las ecuaciones que definen a  $H_k(\mathbb{R}^n)$ . Como  $M^{-1} = M^t$  tenemos que :

$$\left( M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t \right)^2 = M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t = M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t \quad ;$$

además como  $(AB)^t = B^t A^t$  y  $(A^t)^t = A$  obtenemos:

$$\left( M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t \right)^t = (M^t)^t \left( M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^t = M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t$$

y como la traza es multiplicativa:

$$\text{tr} \left( M \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^t \right) = \text{tr}(M) k \text{tr}(M^{-1}) = k$$

La aplicación  $\phi$  claramente es continua, ya que tanto  $V_k(\mathbb{R}^n)$  como  $H_k(\mathbb{R}^n)$  tienen la topología de subespacios euclidianos.

Probemos ahora que  $\phi$  pasa al cociente y que la aplicación inducida es un homeomorfismo.

Supongamos que  $p((v_1, \dots, v_k)) = p((w_1, \dots, w_k))$ ; entonces existe una matriz unitaria  $A$  que transforma al  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$  en el  $k$ -marco  $(w_1, \dots, w_k)$ , por lo tanto podemos expresar a cada  $v_i$  en términos de los  $w_l$ , es decir, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ :

$$v_i = \sum_{l=1}^k a_{il} w_l;$$

de esta forma la transformación

$$\sum_{l=1}^k a_{il} w_l \mapsto \sum_{l=1}^k a_{il} w_l$$

es la identidad en el  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$ ; además, por ser lineal, esta transformación es tal que

$$\sum_{l=1}^k a_{il} v_l \mapsto \sum_{l=1}^k a_{il} v_l$$

por lo tanto  $\phi((v_1, \dots, v_k)) = \phi((w_1, \dots, w_k))$ .

Supongamos ahora que  $\phi((v_1, \dots, v_k)) = \phi((w_1, \dots, w_k))$ , entonces la transformación  $A_{(v_1, \dots, v_k)}$  asociada a la matriz  $\phi((v_1, \dots, v_k))$  es tal que  $A_{(v_1, \dots, v_k)} v_i = v_i$  para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ , además por hipótesis  $A_{(v_1, \dots, v_k)} w_i = w_i$ . Por otra parte como la matriz  $\phi((v_1, \dots, v_k)) = \phi((w_1, \dots, w_k))$  tiene rango  $k$  y tanto  $(v_1, \dots, v_k)$  como  $(w_1, \dots, w_k)$  son conjuntos linealmente independi-

entes debemos tener que  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , es decir,  $p(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) = p(\langle w_1, \dots, w_k \rangle)$ .

Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

**1.3.1 Teorema.** *La aplicación  $\psi$  (respectivamente  $\tilde{\psi}$ ) inducida por la aplicación  $\phi$  (respectivamente  $\tilde{\phi}$ ) es un homeomorfismo entre la variedad algebraica real  $H_k(\mathbb{R}^n)$  (respectivamente  $\tilde{H}_k(\mathbb{C}^n)$ ) y  $G_k(\mathbb{R}^n)$  (respectivamente  $G_k(\mathbb{C}^n)$ )*

**1.3.2 NOTA.** No hemos probado que la variedad algebraica de Grassmann de  $k$ -planos en  $\mathbb{F}^n$  definida clásicamente (ver por ejemplo [Shaf]) sea isomorfa como variedad algebraica a la variedad algebraica  $H_k(\mathbb{F}^n)$ . Éste es el caso para  $H_k(\mathbb{R}^n)$  y la prueba se puede consultar en el capítulo 3 de [BCR]. En el caso complejo, la variedad algebraica de Grassmann no puede ser isomorfa como variedad algebraica compleja a una variedad algebraica compleja afín. La prueba de este hecho se puede consultar en el capítulo 1 de [Wells]; sin embargo la variedad algebraica compleja de Grassmann sí es isomorfa a  $\tilde{H}_k(\mathbb{C}^n)$ , vistas ambas como variedades algebraicas reales. Una consecuencia notable de estos hechos es que las variedades algebraicas reales proyectivas son de hecho variedades algebraicas afines. En el capítulo 4 de esta tesis utilizaremos este hecho para comparar haces vectoriales algebraicos y topológicos sobre variedades algebraicas reales afines.

Como consecuencia del teorema anterior podemos concluir que las grass-

mannianas tienen la topología de un subespacio cerrado (de hecho ya sabemos que es compacto) euclidiano, por lo tanto son espacios métricos, de Hausdorff, etc.

## 1.4 G-HACES PRINCIPALES

Como se probó en la primera sección,  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es un espacio que se obtiene a partir  $V_k(\mathbb{F}^n)$  identificando dos  $k$ -marcos si generan el mismo espacio vectorial, es decir, si representamos a un  $k$ -marco como una matriz de  $n \times k$  la clase de una matriz  $A \in V_k(\mathbb{F}^n)$  está formada por todas las matrices  $B \in V_k(\mathbb{F}^n)$  tales que  $B = A\alpha$  donde  $\alpha$  es una matriz invertible de  $k \times k$ , es decir, una matriz de cambio de base. Esta construcción se puede generalizar de la siguiente manera: Dado un espacio topológico  $X$  y una acción de un grupo topológico  $G$  en  $X$  identificamos (topológicamente) las órbitas del grupo. Ahora formalizaremos esta construcción y probaremos algunas propiedades que serán útiles para calcular algunos grupos de homotopía de  $V_k(\mathbb{F}^n)$ .

1.4.1 DEFINICIÓN. Un *grupo topológico*  $G$  es un conjunto  $G$  con una topología y una estructura de grupo tales que la función  $(s, t) \rightarrow st^{-1}$  es continua.

1.4.2 EJEMPLO. Con la topología heredada de la topología euclidiana los siguientes subespacios del conjunto de matrices de  $n \times n$  (reales o complejas), son grupos topológicos con la multiplicación usual de matrices:

1. El grupo de las matrices no singulares reales de  $n \times n$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$
2. El grupo de las matrices no singulares complejas de  $n \times n$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$
3. El grupo ortogonal  $O(n)$ , i.e. el grupo de matrices  $u \in GL(n, \mathbb{R})$  tales que  $(ux \mid uy) = (x \mid y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4. El grupo unitario  $U(n)$ , i.e. el grupo de matrices  $u \in GL(n, \mathbb{C})$  tales que  $(ux \mid uy) = (x \mid y) \forall x, y \in \mathbb{C}^n$
5. El grupo ortogonal especial  $SO(n)$ , i.e. el grupo de matrices  $u \in O(n)$  tales que  $\det(u) = 1$
6. El grupo unitario especial  $SU(n)$ , i.e. el grupo de matrices  $u \in U(n)$  tales que  $\det(u) = 1$

1.4.3 DEFINICIÓN. Para un grupo topológico  $G$  un  $G$ -espacio es un espacio  $X$  con una aplicación  $X \times G \rightarrow X$ ; si denotamos a la imagen de  $(x, s)$  bajo esta aplicación por  $xs$ , supondremos que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $x(st) = (xs)t$ , para cada  $x \in X$ ,  $s, t \in G$ ,
2.  $x1 = x$ , para cada  $x \in X$  donde 1 es el elemento idéntico de  $G$

Un subconjunto  $A$  de un  $G$ -espacio se dice que es *invariante* si  $ga \in A$  para toda  $a \in A$  y  $g \in G$  y al subespacio  $Gx = \{gx \mid g \in G\}$  se le llama la *órbita* de  $x$

1.4.4 EJEMPLO. Si  $G$  es un grupo topológico y  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$ , entonces  $G$  es un  $H$ -espacio con la acción dada por  $(g, h) \mapsto gh$

1.4.5 EJEMPLO.  $U(n)$  es un  $U(n-k)$ -espacio para  $1 \leq k \leq n-1$ , la acción es la siguiente: dada  $u \in U(n-k)$  y  $v \in U(n)$  multiplicamos a la submatriz cuadrada de  $v$ ,  $[v_{ij}] \mid n-k \leq i, j \leq n$  por  $u$ . Más adelante veremos que identificando cada órbita de esta acción en un punto obtenemos  $V_k(\mathbb{C}^n)$

1.4.6 EJEMPLO.  $V_k(\mathbb{C}^n)$  es un  $U(k)$ -espacio para  $1 \leq k \leq n-1$ ; la acción es la siguiente: dado un  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$  en  $V_k(\mathbb{C}^n)$  y una matriz  $u \in U(k)$ , formamos la matriz de  $n \times k$  cuyas columnas son los vectores  $(v_1, \dots, v_k)$  y la multiplicamos por  $u$ ; a los vectores columna del producto de estas matrices  $(w_1, \dots, w_k)$  les asociamos el siguiente elemento en  $V_k(\mathbb{C}^n)$ :  $(v_1, \dots, v_k)u = (w_1, \dots, w_k)$ . Más adelante veremos que identificando las órbitas de esta acción obtenemos  $G_k(\mathbb{C}^n)$

1.4.7 DEFINICIÓN. Una aplicación  $h : X \rightarrow Y$  entre dos  $G$ -espacios se le llama  $G$ -morfismo o se dice que es  $G$ -equivariante si  $h(xs) = h(x)s$  para toda  $x \in X$  y toda  $s \in G$ .

Diremos que en un  $G$ -espacio  $X$  dos elementos  $x, x' \in X$  son  $G$ -equivalentes si existe  $s \in G$  tal que  $xs = x'$ , es decir, si están en la misma órbita. Esta relación es una relación de equivalencia entre los elementos de  $X$  donde las



clases laterales son las órbitas de  $X$ .  $X/G$  será el espacio cociente (topológico) que se obtiene de identificar a los elementos de  $X$  con la relación antes descrita. Como los elementos de este cociente son de la forma  $xG$ , es decir, son las órbitas de  $X$  bajo la acción de  $G$ , llamaremos al espacio cociente  $X/G$  el *espacio de órbitas*.

**1.4.8 Proposición.** *Para un  $G$ -espacio  $X$  y  $s \in G$ , la aplicación  $x \mapsto xs$  es un homeomorfismo, y la proyección  $\pi : X \rightarrow X/G$  es una aplicación abierta.*

*Demostración:* La inversa de  $x \mapsto xs$  es la aplicación  $x \mapsto xs^{-1}$ ; por ser  $X$  un  $G$ -espacio, ambas son continuas, por lo tanto  $x \mapsto xs$  es un homeomorfismo. Para probar que la proyección  $\pi$  es abierta basta probar que la saturación de un abierto  $W \subset X$  es un conjunto abierto en  $X$ , pero  $\pi^{-1}\pi(W) = \bigcup_{s \in G} Ws$  es un conjunto abierto por ser una unión de conjuntos abiertos, ya que  $Ws$  es la imagen directa de  $W$  bajo el homeomorfismo  $x \mapsto xs$ . □

De lo anterior obtenemos que todo  $G$ -espacio  $X$  determina un haz  $\alpha(X) = (X, \pi, X/G)$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es equivariante, tenemos que  $f(xG) \subset f(x)G$  para cada  $x \in X$ . Así  $f(xG) = \pi_2(f(x))$  y por la propiedad universal del cociente  $\pi_2 \circ f$  se factoriza como:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow \pi_1 & \searrow \varphi = \pi_2 \circ f & \downarrow \pi_2 \\
 X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G
 \end{array}$$

es decir,  $\pi_2 \circ f$  es compatible con la identificación  $\pi_1$ , por lo tanto existe  $\hat{f}$ .

1.4.9 DEFINICIÓN. Un haz  $(X, p, B)$  es un  $G$ -haz si  $(X, p, B)$  y  $\alpha(X)$  son isomorfos para alguna estructura de  $G$ -espacio en  $X$  mediante un isomorfismo  $(1, \varphi) : \alpha(X) \rightarrow (X, p, B)$ , donde  $\varphi : X/G \rightarrow B$  es un homeomorfismo, es decir, si se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id} & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ X/G & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & B \end{array}$$

1.4.10 DEFINICIÓN. Se dice que un  $G$ -espacio  $X$  es *libre* si tiene la propiedad de que  $xs = x \Leftrightarrow s = 1$ . Si el espacio de órbitas que se obtiene al dividir entre la acción de  $G$  consta de un sólo punto se dice que la acción es *transitiva*.

En un  $G$ -espacio libre  $X$ , sea  $X^*$  el subespacio de  $X \times X$  que consiste de todas las parejas  $(x, xs) \in X \times X$ , donde  $x \in X$  y  $s \in G$ . Existe una función  $\tau : X^* \rightarrow G$  tal que  $x\tau(x, x') = x'$  para todo  $(x, x') \in X^*$ . A esta única función  $\tau$  se le llama la función de translación de la acción libre de  $G$  en  $X$ .

De la definición de la función de translación  $\tau(x, x')$ , obtenemos las siguientes propiedades:

1.  $\tau(x, x) = 1$
2.  $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$

$$3. \tau(x, x') = \tau(x', x)^{-1}$$

1.4.11 DEFINICIÓN. Un  $G$ -espacio  $X$  es *principal* si  $X$  es un  $G$ -espacio libre cuya función de translación  $\tau : X^* \rightarrow G$  es continua. Un  $G$ -haz principal es un  $G$ -haz  $(X, p, B)$ , donde la estructura de  $X$  lo hace un  $G$ -espacio principal.

1.4.12 Proposición. Sea  $\xi = (E, p, B)$  un  $G$ -haz principal. Entonces  $\xi$  es un haz con fibra  $G$ .

*Demostración:* Sea  $x \in p^{-1}(b)$  un elemento fijo, definimos la aplicación biyectiva  $u : G \rightarrow p^{-1}(b)$  tal que  $u(s) = xs$  (es biyectiva ya que la acción es libre y transitiva en la fibra). La inversa de  $u$  está dada por  $x' \mapsto \tau(x, x')$ , la cual por hipótesis es continua. El hecho de que sean inversas una de la otra se sigue de la definición de  $\tau$ :

$$\begin{aligned} s &\mapsto xs \mapsto \tau(x, xs) = s \\ x' &\mapsto \tau(x, x') \mapsto x\tau(x, x') = x' \end{aligned}$$

□

1.4.13 DEFINICIÓN. Un morfismo  $(u, f) : (X, p, B) \rightarrow (X', p', B')$  entre  $G$ -haces principales es un *morfismo principal* si  $u : X \rightarrow X'$  es una aplicación equivariante y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Como  $p^{-1}p(x) = xG$  y como  $f(xG) = u(x)G$ , la aplicación  $u$  determina a  $f$ . Si  $B = B'$  y si  $f = 1_B$ , entonces a  $u$  se le llama un  $B$ -morfismo principal.

Como la composición de morfismos principales, resp.  $B$ -morfismos principales, es un morfismo principal, resp. un  $B$ -morfismo principal, se puede hablar de la categoría  $\mathbf{Bun}(G)$  cuyos objetos son los  $G$ -haces principales y sus morfismos los morfismos de  $G$ -haces principales y de la subcategoría  $\mathbf{Bun}_B(G)$  cuyos objetos son los  $G$ -haces principales sobre  $B$  y sus morfismos son los  $B$ -morfismos principales.

El siguiente teorema lo utilizaremos posteriormente para probar que la proyección de  $V_k(\mathbb{F}^n)$  sobre  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es localmente trivial.

**1.4.14 Teorema.** *Todo morfismo de  $\mathbf{Bun}_B(G)$  es un isomorfismo en esa categoría.*

*Demostración:* Sea  $u : (X, p, B) \rightarrow (X', p', B)$  un  $B$ -morfismo de  $G$ -haces principales, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

$u$  es inyectiva ya que si suponemos que  $u(x_1) = u(x_2)$ , como  $p(x_1) = p'(u(x_1)) = p'(u(x_2)) = p(x_2)$ , tenemos que existe  $s \in G$  tal que  $x_1s = x_2$ . Como  $u(x_1) = u(x_2) = u(x_1s) = u(x_1)s$ , tenemos que, por ser la acción libre,  $s = 1$ ;

por lo tanto  $x_1 = x_2$ . Ahora probaremos que  $u$  es suprayectiva. Para cada  $x' \in X'$  tomemos  $x \in X$  tal que  $p(x) = p'(x')$ . Luego  $p'(x') = p(x) = p'(u(x))$ ; por lo tanto existe  $s \in G$  tal que  $x' = u(x)s$ , luego  $x' = u(xs)$  y  $u$  es suprayectiva.

Para probar la continuidad de  $u^{-1}$  en  $a' \in X'$ , sea  $u(a) = a'$  en  $X'$ , y sea  $V$  una vecindad abierta de  $a$  en  $X$ . Por la continuidad de la acción de  $G$  en  $X$ , existen vecindades abiertas  $V_1$  de  $a$  en  $X$  y  $N$  de  $1$  en  $G$  tales que  $V_1N \subset V$ . Como la función de translación  $\tau'$  de  $X'$  es continua, existe una vecindad abierta  $W$  de  $a'$  en  $X'$  tal que  $\tau'((W \times W) \cap X'^*) \subset N$ . Como  $u$  es continua,  $V_2 := V_1 \cap u^{-1}(W)$  es una vecindad de  $a$  tal que  $u(V_2) \subset W$ . Ahora  $p(V_2) = U$  es una vecindad abierta de  $b = p(a) = p(a')$  en  $B$ , por ser  $p$  abierta. Sea  $W_1 := W \cap (p')^{-1}(U)$  de esta manera se tiene que  $p'(W_1) = U = p(V_2)$ .

Para cada  $x' \in W_1$ , escogemos  $x \in V_2$  tal que  $p(x) = p'(x')$ . Luego tenemos que  $u(x), x' \in W_1$  y  $u(x)s = x'$  para alguna  $s \in N$ , y  $x' = u(x)s = u(xs)$ , donde  $xs \in V_1N \subset V$ . Por lo tanto, para cada  $x' \in W_1$ , tenemos que  $u^{-1}(x') \in V$  por lo tanto  $u^{-1}(W_1) \subset V$  y  $u^{-1}$  es continua.  $\square$

Ahora procederemos a dar la descripción explícita de las variedades de Stiefel y de Grassmann como cocientes bajo la acción de un grupo; esto nos permitirá demostrar que  $(V_k(\mathbb{F}^n), p, G_k(\mathbb{F}^n))$  es un haz principal localmente trivial con fibra  $U_{\mathbb{F}}(k)$ , hecho que utilizaremos para calcular algunos grupos de homotopía de  $V_k(\mathbb{F}^n)$  y para construir una fibración de Serre que ocuparemos para la

prueba del teorema de periodicidad de Bott.

Como espacios vectoriales podemos considerar a  $\mathbb{F}^k \subset \mathbb{F}^{k+1}$ , la inclusión está dada por  $i_k((x_1, \dots, x_k)) = (x_1, \dots, x_k, 0)$ . Como el valor de  $(x|y)$  es el mismo para  $x, y \in \mathbb{F}^k$  y para  $x, y$  vistos como elementos de  $\mathbb{F}^{k+1}$ ,  $i_k$  nos induce una inclusión  $\widehat{i}_k$  de  $U_{\mathbb{F}}(k)$  en  $U_{\mathbb{F}}(k+1)$ , dada por

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} \end{bmatrix} \xrightarrow{\widehat{i}_k} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de manera que si se tiene una matriz  $u \in U_{\mathbb{F}}(k)$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^k & \xrightarrow{u} & \mathbb{F}^{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}^{k+1} & \xrightarrow{\widehat{i}_k(u)} & \mathbb{F}^{k+1} \end{array}$$

**1.4.15 Proposición.** *la imagen de  $U_{\mathbb{F}}(k)$  bajo  $\widehat{i}_k$  es el subgrupo  $H$  de  $U_{\mathbb{F}}(k+1)$  que consta de todos los elementos  $u \in U_{\mathbb{F}}(k)$  tales que  $u(e_{k+1}) = e_{k+1}$*

*Demostración:* Claramente  $\text{im}(\widehat{i}_k) \subset H$ . Sea  $u \in H$ ; como por hipótesis  $u(e_{k+1}) = e_{k+1}$ ,  $u$  es de la forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kk} & 0 \\ u_{(k+1)1} & \dots & u_{(k+1)k} & 1 \end{bmatrix}$$

pero sabemos que si  $j < k+1$  entonces  $0 = (e_j|e_{k+1}) = (u(e_j)|u(e_{k+1})) = u_{(k+1)j}$ , por lo tanto  $u \in \text{im}(\widehat{i}_k)$  □

Con las inclusiones  $\mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}^2 \subset \dots \subset \mathbb{F}^k \subset \mathbb{F}^{k+1} \subset \dots$ , podemos darle a  $\mathbb{F}^\infty = \bigcup_{1 \leq k} \mathbb{F}^k$  la topología del colímite, es decir, la topología débil tal que  $A \subset \mathbb{F}^\infty$  es cerrado si y sólo si  $A \cap \mathbb{F}^i \subset \mathbb{F}^{n,i}$  es cerrado para toda  $i \in \mathbb{N}$ . El espacio vectorial  $\mathbb{F}^\infty$  tiene el producto escalar inducido por el producto escalar en cada  $\mathbb{F}^k$

1.4.16 DEFINICIÓN. El grupo unitario infinito es el espacio topológico  $\bigcup_{1 \leq k} U_{\mathbb{F}}(k)$ , denotado por  $U_{\mathbb{F}}$  o por  $U_{\mathbb{F}}(\infty)$  con la topología del colímite inducida por las inclusiones  $\widehat{i}_k$ .

Recordemos que  $V_j(\mathbb{F}^k)$  es el subespacio de  $\mathbb{F}^{jk}$  que consiste de los  $j$ -marcos  $(v_1, \dots, v_j)$ , donde  $\langle v_l, v_m \rangle = \delta_{l,m}$  para  $1 \leq l, m \leq j$ . En el caso en que  $k = \infty$  le daremos a  $V_j(\mathbb{F}^\infty)$  la topología del colímite inducida por las inclusiones  $\widehat{i}_k : V_j(\mathbb{F}^k) \rightarrow V_j(\mathbb{F}^{k+1})$  tales que:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \dots & u_{kj} \end{bmatrix} \xrightarrow{\widehat{i}_k} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1j} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ u_{k1} & \dots & u_{kj} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora mostraremos como la variedad de Stiefel de  $k$ -marcos en  $\mathbb{F}^n$  es el espacio de órbitas de cierta acción de  $U_{\mathbb{F}}(n-k)$  en  $U_{\mathbb{F}}(n)$

Definimos la aplicación  $\eta_k^n : U_{\mathbb{F}}(n) \rightarrow V_k(\mathbb{F}^n)$  tal que  $\eta_k^n(u) = (u(e_1), \dots, u(e_k))$ , es decir, dada una matriz  $u \in U_{\mathbb{F}}(n)$  le asociamos el  $k$ -marco determinado por sus primeras  $k$  columnas, esta aplicación está bien definida ya que

$(e_i|e_j) = (u(e_i)|u(e_j)) = \delta_{i,j}$ . La aplicación  $\eta_k^n$  es continua ya que coordinada a coordinada es continua y es suprayectiva ya que cualquier  $k$ -marco se puede extender a un  $n$ -marco. Además el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) & \xrightarrow{\eta_k^n} & \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1) & \xrightarrow{\eta_k^{n+1}} & \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{n+1}) \end{array}$$

Hay dos encajes naturales de  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)$  en  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)$  para  $m \leq n$ . El primero es haciendo actuar a  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)$  en  $e_1, \dots, e_m$ , lo cual nos da un encaje que denotamos por  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m) \subset \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)$ ; el segundo, es haciendo actuar a  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)$  en  $e_{n-m+1}, \dots, e_n$ , lo cual nos da un encaje que denotaremos por  $1_{n-m} \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m) \subset \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)$ . Nótese que el primer encaje es el que utilizamos en la definición (1.4.16).

**1.4.17 Proposición.** *Para  $u, v \in \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)$  tenemos que  $\eta_k^n(u) = \eta_k^n(v)$  si y sólo si  $u = vw$ , donde  $w \in 1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n-k)$ . Además,  $(\eta_k^n)^{-1}\eta_k^n(u)$  es la clase lateral  $u(1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n-k))$ .*

*Demostración:* Basta notar que  $\eta_k^n(u) = \eta_k^n(v)$  si y sólo si  $u(e_i) = v(e_i)$  para  $1 \leq i \leq k$ . Como  $\mathbf{U}(k)$  es un grupo, esto es equivalente a que  $v^{-1}u(e_i) = e_i$  para  $1 \leq i \leq k$ , es decir,  $v^{-1}u$  coincide con la identidad en las primeras  $k$  columnas y por lo tanto en los primeros  $k$  renglones, luego entonces,  $v^{-1}u \in 1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n-k)$ .

□



Si  $U_{\mathbb{F}}(m)/U_{\mathbb{F}}(n-k)$  denota al espacio homogéneo de clases derechas módulo  $1_k \times U_{\mathbb{F}}(n-k)$ , entonces por la propiedad universal del cociente  $\eta_k^n$  define una biyección continua

$$\theta_k^n : U_{\mathbb{F}}(n)/U_{\mathbb{F}}(n-k) \rightarrow V_k(\mathbb{F}^n)$$

Como  $U_{\mathbb{F}}(n)$  es compacto (y por lo tanto también  $U_{\mathbb{F}}(n) \text{ mod } U_{\mathbb{F}}(n-k)$ ) y  $V_k(\mathbb{F}^n)$  es de Hausdorff, obtenemos el siguiente teorema.

1.4.18 Teorema. La aplicación  $\theta_k^n$  dada por

$$\theta_k^n(u(1_k \times U_{\mathbb{F}}(n-k))) = (u(e_1), \dots, u(e_k))$$

es un homeomorfismo. Además el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathbb{F}}(n)/U_{\mathbb{F}}(n-k) & \xrightarrow{\theta_k^n} & V_k(\mathbb{F}^n) \\ \downarrow \hat{j}_n & & \downarrow \hat{i}_n \\ U_{\mathbb{F}}(n+1)/U_{\mathbb{F}}(n+1-k) & \xrightarrow{\theta_k^{n+1}} & V_k(\mathbb{F}^{n+1}) \end{array}$$

Donde  $\hat{i}_n$  es la aplicación antes definida y  $\hat{j}_n$  es la aplicación que factoriza a  $p_k \circ \hat{i}_n$ :

$$\begin{array}{ccccc} U_{\mathbb{F}}(n) & \xhookrightarrow{\hat{i}_n} & U_{\mathbb{F}}(n+1) & \xrightarrow{p_k^{n+1}} & U_{\mathbb{F}}(n+1)/U_{\mathbb{F}}(n+1-k) \\ \downarrow p_k^n & & \searrow \hat{j}_n & \dashrightarrow & \\ U_{\mathbb{F}}(n)/U_{\mathbb{F}}(n-k) & & & & \end{array}$$

Consideremos la siguiente retícula:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) & \xrightarrow{p_k^n} & \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)/\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n-k) & \xrightarrow{\theta_k^n} & \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \\
 \downarrow \hat{i}_n & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1) & \xrightarrow{p_k^{n+1}} & \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1)/\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1-k) & \xrightarrow{\theta_k^{n+1}} & \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{n+1}) \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{U}_{\mathbb{F}} & \xrightarrow{p_k} & \mathbf{U}_{\mathbb{F}}/(1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}}) & \xrightarrow{\theta_k} & \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{\infty})
 \end{array}$$

Por la propiedad universal del colímite obtenemos el homeomorfismo  $\theta_k$  entre  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}/(1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}})$  y  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{\infty})$ , además, como cada  $p_k^j$  es una identificación, la topología del colímite de  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}/(1_k \times \mathbf{U}_{\mathbb{F}})$  coincide con la topología del cociente inducida por  $p_k$ .

A partir de los resultados obtenidos daremos algunos ejemplos de variedades de Stiefel especiales

1.4.19 EJEMPLO. Si  $k = n$  obtenemos:

$$O(n) = \mathbf{V}_n(\mathbb{R}^n)$$

$$U(n) = \mathbf{V}_n(\mathbb{C}^n)$$

1.4.20 EJEMPLO. Si  $k < n$  obtenemos:

$$\mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n) = \frac{O(n)}{O(n-k)}$$

$$V_k(\mathbb{C}^n) = \frac{U(n)}{U(n-k)}$$

1.4.21 EJEMPLO. Si  $k = 1$  obtenemos:

$$V_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^{n-1} = \frac{O(n)}{O(n-1)}$$

$$V_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{S}^{2n-1} = \frac{U(n)}{U(n-1)}$$

De manera análoga procederemos a dar una descripción de las variedades de Grassmann como espacios homogéneos que se obtienen a partir de cocientes bajo la acción de un grupo.

Para  $(v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{F}^n)$ , denotaremos por  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  o por  $p(v_1, \dots, v_k)$  el espacio de dimensión  $k$  de  $\mathbb{F}^n$  generado por el  $k$ -marco  $v_1, \dots, v_k$ . Recordemos que la variedad de Grassmann  $G_k(\mathbb{F}^n)$  es el espacio cuyos puntos son los espacios lineales de dimensión  $k$  en  $\mathbb{F}^n$  con la topología de identificación inducida por la aplicación  $p: V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$ .

Consideremos la siguiente suprayección continua:

$$p\theta_k^n: \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k)} \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$$

1.4.22 **Proposición.** Para  $[u] \in U_{\mathbb{F}}(n)/U_{\mathbb{F}}(n-k)$  y  $[v] \in U_{\mathbb{F}}(n)/U_{\mathbb{F}}(n-k)$ , tenemos que  $p\theta_k^n([u]) = p\theta_k^n([v])$  si y sólo si  $v = us$ , donde  $s \in U_{\mathbb{F}}(k)$

*Demostración:* Sean  $\theta_k^n(u) = (u_1, \dots, u_k) \in V_k(\mathbb{F}^n)$  y  $\theta_k^n(v) = (v_1, \dots, v_k) \in V_k(\mathbb{F}^n)$ . Tenemos que  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  si y sólo si existe una matriz de cambio de base  $s \in U_{\mathbb{F}}(k)$  tal que  $u_i = s(v_i)$ .  $\square$

Por lo tanto,  $p\theta_k^n$  define una biyección continua  $\psi_k^n$  entre  $\frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k) \times U_{\mathbb{F}}(k)}$  y  $G_k(\mathbb{F}^n)$ . Como las variedades de Stiefel son compactas, el cociente resulta ser compacto, además como las variedades de Grassmann son de Hausdorff,  $\psi_k^n$  es un homeomorfismo. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

**1.4.23 Teorema.** *La aplicación  $\psi_k^n : \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k) \times U_{\mathbb{F}}(k)} \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$  definida por  $\psi_k^n([u]) = \langle u(e_1), \dots, u(e_k) \rangle$  es un homeomorfismo. Además se tienen los siguientes diagramas conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k)} & \xrightarrow{\theta_k^n} & V_k(\mathbb{F}^n) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k) \times U_{\mathbb{F}}(k)} & \xrightarrow{\psi_k^n} & G_k(\mathbb{F}^n) \end{array}$$

(Las aplicaciones verticales son identificaciones)

$$\begin{array}{ccc} \frac{U_{\mathbb{F}}(n)}{U_{\mathbb{F}}(n-k) \times U_{\mathbb{F}}(k)} & \xrightarrow{\psi_k^n} & G_k(\mathbb{F}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{U_{\mathbb{F}}(n+1)}{U_{\mathbb{F}}(n+1-k) \times U_{\mathbb{F}}(k)} & \xrightarrow{\psi_k^{n+1}} & G_k(\mathbb{F}^{n+1}) \end{array}$$

(Las aplicaciones verticales son inclusiones)

El siguiente teorema se sigue del hecho de que el espacio homogéneo que se obtiene al dividir bajo la acción de un grupo compacto define un haz principal.

1.4.24 Teorema. *El haz  $(V_k(\mathbb{F}^n), p, G_k(\mathbb{F}^n))$  es un  $U_F(k)$ -haz principal.*

Consideremos ahora la acción de  $U_F(k)$  en  $V_k(\mathbb{F}^n)$ , para  $a = [a_{i,j}] \in U_F(k)$  esta acción está dada por la relación  $(v_1, \dots, v_k)a = (v'_1, \dots, v'_k)$  donde  $v'_j = \sum_{1 \leq i \leq k} a_{i,j}v_i$ .

Mostraremos en la siguiente proposición que la proyección ortogonal está bien definida, es decir, que no depende del representante  $a \in V_k(\mathbb{F}^n)$  que tomemos, la proyección ortogonal es la misma para todo  $a' \in [a]$

1.4.25 Proposición. *Para cada  $x \in \mathbb{F}^n$  y  $(v_1, \dots, v_k)a = (v'_1, \dots, v'_k)$ , se cumple la relación  $\sum_{1 \leq i \leq k} (x|v_i)v_i = \sum_{1 \leq i \leq k} (x|v'_i)v'_i$ .*

*Demostración:* Calculando directamente obtenemos las igualdades  $\sum_j (x|v'_j)v'_j = \sum_{i,j,m} (x|a_{i,j}v_i)a_{m,j}v_m = \sum_{i,m} \left( \sum_j \bar{a}_{i,j}a_{m,j} \right) (x|v_i)v_m = \sum_{i,j} \delta_{i,m} (x|v_i)v_m = \sum_i (x|v_i)v_i$ . □

Sea  $\pi' : V_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  la proyección ortogonal del segundo factor sobre el primero, es decir,  $\pi'((v_1, \dots, v_k), x) = \sum_{1 \leq i \leq k} (x|v_i)v_i$ . por la proposición 1.4.25  $(v_i) \mapsto \pi'(v_i)(x)$  es constante en la fibra sobre un punto de  $G_k(\mathbb{F}^n)$  bajo la proyección  $p : V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$ . Luego como  $\mathbb{F}^n$  es un espacio localmente compacto y con esta hipótesis el producto de identificaciones es una identificación, obtenemos que  $\pi'$  nos induce una aplicación  $\pi : G_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n \rightarrow$

$\mathbb{F}^n$  que denotaremos por  $\pi_W(x)$  para  $W \in \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  y  $x \in \mathbb{F}^n$ . Denotaremos por  $\nu_W(x) = x - \pi_W(x)$  a la proyección sobre la componente normal de  $x$  sobre  $W$

Definimos una aplicación  $\sigma' : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la relación  $\sigma'((v_1, \dots, v_k), (v'_1, \dots, v'_k)) = |\det[(v_i|v'_j)]|$ , es decir, si tomamos dos elementos  $v, v' \in \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$ , representados como matrices de  $k \times n$ , entonces,  $\sigma'(v, v') = |\det(v'v^t)|$ , por lo tanto si tomamos dos elementos  $a, b \in \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(k)$ , como  $|\det(a)| = |\det(b)| = 1$  tenemos que  $\sigma'(v, v') = |\det(v'v^t)| = |\det(av'v^tb)| = \sigma'(av, bv')$ , por lo tanto  $\sigma'$  nos induce una aplicación  $\sigma : \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\sigma(W, W') \geq 0$ . En la siguiente proposición demostraremos que  $\sigma(W, W') > 0$  si y sólo si la proyección de  $W$  sobre  $W'$  es suprayectiva (o inyectiva, por ser  $\mathbb{F}^n$  de dimensión finita es el mismo caso)

**1.4.26 Proposición.** *Sean  $W$  y  $W' \in \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$ . Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

1.  $\sigma(W, W) > 0$
2.  $\pi_{W'}(W) = W'$
3.  $W \cap W'^{\perp} = 0$

*Diremos que dos elementos  $W$  y  $W'$  están relacionados si satisfacen las condiciones anteriores.*

*Demostración:* Por la definición de  $\sigma$ , si  $\sigma(W, W') > 0$  entonces  $\pi_W(v_1), \dots, \pi_W(v_k)$  es una base de  $W'$  donde  $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , es decir,  $\pi'_W(W) = W'$ . Supongamos ahora que  $\pi'_W(W) = W'$  entonces  $\nu_{W'}(x) \neq x$  para toda  $x \in W$  que no sea cero, por lo tanto  $W \cap W' = 0$   $\square$

**1.4.27 Corolario.** Sean  $W$  y  $W'$  dos elementos relacionados de  $G_k(\mathbb{F}^n)$ . Entonces existen vecindades  $N$  de  $W$  y  $N'$  de  $W'$  tales que  $V$  y  $V'$  están relacionados para cada pareja  $(V, V') \in N \times N'$

*Demostración:* Si  $W$  y  $W'$  están relacionados entonces  $\sigma(W, W') = \varepsilon > 0$ , por la continuidad de  $\sigma$  existe una vecindad  $V \subset (0, \infty)$  de  $\varepsilon$  tal que existen vecindades  $N$  y  $N'$  de  $W$  y  $W'$  respectivamente que cumplen con que  $\sigma(N, N') \subset V \subset (0, \infty)$  por lo tanto  $\sigma(N, N') > 0$   $\square$

**1.4.28 DEFINICIÓN.** Sea  $\tilde{V}_k(\mathbb{F}^n)$  el subespacio de  $(\mathbb{F}^n)^k$  que consiste de  $k$ -tuplas de vectores linealmente independientes en  $\mathbb{F}^n$ .

La aplicación de Gramm-Schmidt  $GS : \tilde{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{F}^n)$  está dada por  $GS(y_1, \dots, y_k) = (v_1, \dots, v_k)$ , donde  $v_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$  y

$$v_j = \frac{y_j - \sum_{i < j} (y_j | v_i) v_i}{\|y_j - \sum_{i < j} (y_j | v_i) v_i\|}$$

Para  $W \in G_k(\mathbb{F}^n)$ , sea  $Q(W)$  el conjunto abierto de todos los  $W'$  relacionados con  $W$ . Recordemos que  $\nu$  denota la dimensión de  $\mathbb{F}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio

vectorial.

1.4.29 Teorema. La proyección  $p : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  es localmente trivial y  $(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n), p, \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n))$  es un haz principal localmente trivial con fibra  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^k) = \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(k)$

*Demostración:* Para cada subconjunto de  $k$  elementos  $H \subset \{1, \dots, n\}$ , definimos  $Q_H$  como el conjunto abierto  $Q(\mathbb{F}^H)$ , donde  $\mathbb{F}^H = \bigoplus_{i \in H} \mathbb{F}e_i \subset \mathbb{F}^n$ . Los conjuntos  $Q_H$  cubren a  $\mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$ . Definimos  $\psi : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^H$  como el isomorfismo natural, donde  $\psi(e_i) = e_{\eta(i)}$  donde  $\eta(i)$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $H$  en el orden usual. Definimos  $f : Q(\mathbb{F}^H) \times \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^k) \rightarrow p^{-1}(Q_H)$  como  $f(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) = (\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$ , donde

$$(u_1, \dots, u_k) = GS(\pi_W(\psi(e_1)), \dots, \pi_W(\psi(e_k)))$$

Probaremos que para cada  $H$ ,  $f$  es un  $Q_H$ -morfismo, (es decir, una función que preserva fibras), de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Q_H \times \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^k) & \xrightarrow{f} & p^{-1}(Q_H) \subset \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow p \\ & & Q_H \subset \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n) \end{array}$$

1.4.30 Proposición.  $f$  es continua

*Demostración:* Utilizaremos el hecho de que  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)$  es un subespacio topológico de un espacio euclidiano, a saber,  $\mathbb{F}^{kn}$  y por lo tanto su topología está determinada por la métrica euclidiana. A lo largo de la demostración mediremos las



distancias con la norma del máximo, es decir, dado un punto  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ ,  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|x_i|\}$ , esta norma genera la misma topología que cualquier otra norma por tratarse de un espacio euclidiano de dimensión finita.

Sea  $(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) \in Q(\mathbb{F}^H) \times V_k(\mathbb{F}^k)$  y sea  $f(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) = (\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$  y sea  $\varepsilon > 0$ , demostraremos que existen vecindades  $V$  de  $W$  y  $U$  de  $(\sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i)$  tales que  $f(V, U) \subset B_\varepsilon(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i) \cap V_k(\mathbb{F}^n) \subset \mathbb{F}^{nk}$ , donde  $B_\rho(x)$  denota la bola abierta de radio  $\rho$  con centro en  $x$ .

$GS$  es una función continua, por lo tanto existe  $\delta > 0$  tal que si

$$d'((\pi_W(j(e_1)), \dots, \pi_W(j(e_k))), (b_1, \dots, b_k)) < \delta$$

entonces

$$(1.4.30) \quad d(GS((\pi_W(j(e_1)), \dots, \pi_W(j(e_k))), GS(b_1, \dots, b_k)) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Sea  $g' : (\mathbb{S}^{n-1})^k \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g'(\beta_1, \dots, \beta_k) = \max\{|\langle \psi(e_i), \beta_i \rangle|\}$ ; por ser  $g'$  continua y  $(\mathbb{S}^{n-1})^k$  compacto,  $g'$  alcanza un máximo  $M > 0$ .

Sea  $g : V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  la restricción de  $g'$ , es decir,  $g(\alpha) = g'(\alpha)$ . Por ser  $g$  continua, existe  $\rho > 0$  tal que si  $\beta \in B_\rho(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$ , entonces  $|g(\beta) - g(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)| < \frac{\delta}{2k}$ . Sea  $r = \min\{\rho, \frac{\delta}{2kM}\}$ ; como  $p : V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$  es abierta, entonces  $V = p(B_r(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i))$  es un abierto en  $G_k(\mathbb{F}^n)$  tal que  $W \in V$ .

Definimos  $\pi_{ij} : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^k) \rightarrow \mathbb{F}$  como  $\pi_{ij}(\sum c_i^1 e_i, \dots, \sum c_i^k e_i) = c_i^j$ ,  $\pi_{ij}$  es continua para toda  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , luego para  $\pi_{ij}$  alrededor de  $(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$  existe  $\delta_{ij} > 0$  tal que si  $(\sum c_i^1 e_i, \dots, \sum c_i^k e_i) \in B_{\delta_{ij}}(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$  entonces  $\pi_{ij}(\sum c_i^1 e_i, \dots, \sum c_i^k e_i) \in B_{\frac{\epsilon}{2k}}(\pi_{ij}(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i))$ .

Sea

$$\delta = \min_{i,j \in \{1, \dots, k\}} \{\delta_{ij}\}$$

y definamos

$$U = B_\delta \left( \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i \right) \subset \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^k).$$

Ahora sea  $(W', \sum b_i^1 e_i, \dots, \sum b_i^k e_i) \in V \times U$ , luego

$$d(f(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i), f(W', \sum b_i^1 e_i, \dots, \sum b_i^k e_i)) =$$

$$\max_j \left\{ \left\| \sum_{i=1}^k a_i^j u_i - \sum_{i=1}^k b_i^j v_i \right\| \right\}$$

donde

$$(v_1, \dots, v_k) = GS(\pi_{W'}(\psi(e_1)), \dots, \pi_{W'}(\psi(e_k)))$$

por lo tanto usando la desigualdad del triángulo obtenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i^j u_i - \sum_{i=1}^k b_i^j v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_i^j u_i - b_i^j v_i\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_i^j u_i - a_i^j v_i\| + \|a_i^j v_i - b_i^j v_i\| =$$

$$\sum_{i=1}^k |a_i^j| \cdot \|u_i - v_i\| + \|v_i\| \cdot |a_i^j - b_i^j|$$

observemos primero que  $(\sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) \in V_k(\mathbb{R}^k)$ , por lo tanto  $|a_i^j| \leq 1$ . Observemos también que  $(v_1, \dots, v_k)$  es un marco ortonormal, por lo tanto  $\|v_i\| = 1$ . Además,

$$\|u_i - v_i\| \leq d(GS(\pi_W(\psi(e_1)), \dots, \pi_W(\psi(e_k))), GS(\pi_{W'}(\psi(e_1)), \dots, \pi_{W'}(\psi(e_k))))$$

, ya que estamos midiendo las distancias con la norma del máximo, luego entonces, si hacemos suficientemente pequeña esta última distancia y hacemos suficientemente pequeña la diferencia  $|a_i^j - b_i^j|$ , habremos terminado.

Como  $W' \in V = p(B_r(\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i))$ ,  $W'$  tiene una base ortonormal  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$  tal que  $d((\beta_1, \dots, \beta_k), (\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)) < r$ , lo cual implica por la continuidad de  $g$ , que  $|g(\sum_{i=1}^k a_i^1 u_i, \dots, \sum_{i=1}^k a_i^k u_i) - g(\beta_1, \dots, \beta_k)| < \frac{\delta}{2k}$ .

En la proposición 1.4.25 ya demostramos que la proyección ortogonal sobre un espacio  $L$  no depende de la base de  $L$  que se ocupe para realizar dicha proyección, luego como  $W = \langle \sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i \rangle$  y  $W' = \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$ , con la definición que hemos dado de la proyección ortogonal, obtenemos que

$$\pi_W(\psi(e_i)) = \sum_{l=1}^k [(\psi(e_i) | \sum a_l^1 u_l) \sum a_l^1 u_l], \text{ por lo tanto:}$$

$$d((\pi_W(\psi(e_1)), \dots, \pi_W(\psi(e_k))), (\pi_{W'}(\psi(e_1)), \dots, \pi_{W'}(\psi(e_k)))) =$$

$$\max_{m \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \left| \sum_{l=1}^k \left[ (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \sum_{i=1}^k a_i^l u_i - (\psi(e_m) | \beta_l) \beta_l \right] \right| \right\}, \text{ pero por la desigualdad del triángulo}$$

$$\begin{aligned}
(1.4.30) \quad & \left| \sum_{l=1}^k \left[ (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \sum_{i=1}^k a_i^l u_i - (\psi(e_m) | \beta_l) \beta_l \right] \right| \leq \\
& \sum_{l=1}^k \left| (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \sum_{i=1}^k a_i^l u_i - (\psi(e_m) | \beta_l) \beta_l \right| \leq \\
& \sum_{l=1}^k \left| (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \sum_{i=1}^k a_i^l u_i - (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \beta_l \right| + \\
& \quad \left| (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \beta_l - (\psi(e_m) | \beta_l) \beta_l \right| = \\
& \sum_{l=1}^k \left[ \left| (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) \right| \cdot \left| \sum_{i=1}^k a_i^l u_i - \beta_l \right| + \right. \\
& \quad \left. |\beta_l| \cdot \left| (\psi(e_m) | \sum_{i=1}^k a_i^l u_i) - (\psi(e_m) | \beta_m) \right| \right] \leq \\
& \quad \sum_{l=1}^k \left[ |M| \cdot |r| + \right. \\
& \quad \left. |\beta_l| \cdot \left| g \left( \sum_{i=1}^k a_i^1 u_i, \dots, \sum_{i=1}^k a_i^k u_i \right) - g(\beta_1, \dots, \beta_k) \right| \right] \leq \\
& \quad \sum_{l=1}^k \left[ |M| \cdot |r| + \left| \frac{\delta}{2k} \right| \right] \leq \\
& \quad \sum_{l=1}^k \left[ |M| \cdot \left| \frac{\delta}{2kM} \right| + \left| \frac{\delta}{2k} \right| \right] < \delta
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$d((\pi_W(\psi(e_1)), \dots, \pi_W(\psi(e_k))), (\pi_{W'}(\psi(e_1)), \dots, \pi_{W'}(\psi(e_k)))) < \delta$$

luego

$$d(GS(\pi_W(\psi(e_1)), \dots, \pi_W(\psi(e_k))), GS(\pi_{W'}(\psi(e_1)), \dots, \pi_{W'}(\psi(e_k)))) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

por lo tanto  $|u_i - v_i| < \frac{\varepsilon}{2k}$ , por otra parte como  $(\sum b_i^1 e_i, \dots, \sum b_i^k e_i) \in U$  entonces  $|a_i^j - b_i^j| < \frac{\varepsilon}{2k}$ , luego  $\sum_{i=1}^k |a_i^j| \cdot |u_i - v_i| + |v_i| \cdot |a_i^j - b_i^j| < \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon$ , por lo tanto  $d(f(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i), f(W', \sum b_i^1 e_i, \dots, \sum b_i^k e_i)) < \varepsilon$

□

**1.4.31 Proposición.** *f es un  $Q(\mathbb{F}_H)$  morfismo*

*Demostración:* Una manera de probar que  $f$  preserva fibras es mostrando que  $f$  es equivariante. Sean  $B = [b_{ij}] \in U_{\mathbb{F}}(k)$  y  $(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) \in Q(\mathbb{F}_H) \times V_k(\mathbb{F}^k)$ , por la definición de  $f$ ,  $f(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i) = (\sum a_i^1 u_i, \dots, \sum a_i^k u_i)$ , y por como actúa  $U_{\mathbb{F}}(k)$  en  $O(\mathbb{F}^H) \times V_k(\mathbb{F}^k)$ ,

$$(W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i)B = (W, \sum_{i=1}^k b_{i1} \sum_{m=1}^k a_m^1 e_m, \dots, \sum_{i=1}^k b_{ik} \sum_{m=1}^k a_m^k e_m) =$$

$$(\sum_{m=1}^k a_m^1 (\sum_{i=1}^k b_{i1}) e_m, \dots, \sum_{m=1}^k a_m^k (\sum_{i=1}^k b_{ik}) e_m), \text{ por lo tanto}$$

$$f((W, \sum a_i^1 e_i, \dots, \sum a_i^k e_i)B) =$$

$$\left( \left( \sum_{i=1}^l a_i^1 \left( \sum_{m=1}^k b_{m1} \right) u_i, \dots, \sum_{i=1}^l a_i^k \left( \sum_{m=1}^k b_{mk} \right) u_i \right) = f(W, \sum_{i=1}^l a_i^1 e_i, \dots, \sum_{i=1}^l a_i^k e_i) B$$

Por las dos proposiciones anteriores y el Teorema 1.4.14, queda demostrado el teorema.  $\square$

Para realizar algunos cálculos homotópicos requerimos el siguiente teorema.

**1.4.32 Teorema.** *La aplicación  $q_k : V_{k+1}(\mathbb{F}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{F}^n)$  definida por*

$$q_k(v_1, \dots, v_{k+1}) = (v_1, \dots, v_k)$$

*es localmente trivial con fibra  $V_1(\mathbb{F}^{n-k}) = \mathbb{S}^{\nu(n-k)-1}$  donde  $\nu$  es la dimensión de  $\mathbb{F}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial*

*Demostración:* Sea  $H \subset \{1, \dots, n\}$  un subconjunto con  $k$  elementos, y sea  $H' = \{1, \dots, n\} \setminus H$ . Sea  $\mathbb{F}^{H'} = \bigoplus_{i \in H'} \mathbb{F}e_i$ . Denotemos por  $Q_H^*$  al conjunto abierto  $p^{-1}(Q_H)$  donde  $Q_H$  está definido como en el teorema anterior. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde  $g$  es un  $Q_H^*$  isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} Q_H^* \times V_1(\mathbb{F}^{H'}) & \xrightarrow{g} & q_k^{-1}(Q_H^*) \subset V_{k+1}(\mathbb{F}^n) \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow q \\ & & Q_H^* \subset V_k(\mathbb{F}^n) \end{array}$$

Donde  $g(v_1, \dots, v_k, x) = (v_1, \dots, v_k, \pi_{\mathbb{F}^{H'}}(x))$ , es decir, completamos el  $k$ -marco  $(v_1, \dots, v_k)$  de manera continua.

La continuidad de  $g$  se puede probar de la misma manera que se probó la continuidad de  $f$  en el teorema anterior. □

## 1.5 CÁLCULOS HOMOTÓPICOS

Recordaremos ahora algunas definiciones y resultados de la topología algebraica, para un tratamiento formal se puede consultar [AGP].

**1.5.1 DEFINICIÓN.** Sea  $p: E \rightarrow B$  continua y  $\mathcal{C}$  una clase de espacios topológicos. Decimos que  $p$  tiene la *propiedad de levantamiento de homotopías respecto a  $\mathcal{C}$* ,  $\mathcal{C}$ -PLH, si dada  $X \in \mathcal{C}$ , una aplicación  $f: X \rightarrow E$  y una homotopía  $H: X \times I \rightarrow B$  tal que empieza con  $p \circ f$ , entonces puede *levantarse*  $H$  a una homotopía  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$  que empieza con  $f$ , es decir, tal que  $p \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$ . Si  $p: E \rightarrow B$  tiene la  $\mathcal{C}$ -PLH diremos también que es una  *$\mathcal{C}$ -fibración*.

Puesto esto último en forma diagramática, tenemos que  $p$  tiene la  $\mathcal{C}$ -PLH si y sólo si, dado el diagrama conmutativo

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ j_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

con  $X \in \mathcal{C}$ , donde  $j_0: X \rightarrow X \times I$  es la inclusión  $j_0(x) = (x, 0)$ , existe la aplicación  $\tilde{H}$ , indicada por la flecha punteada, que hace conmutativos los triángulos que determina.

1.5.2 DEFINICIÓN. Sea  $p: E \rightarrow B$  una  $\mathcal{C}$ -fibración. Si  $\mathcal{C}$  es la clase de los cubos  $I^n$  (o, equivalentemente, como se puede probar, la de los complejos CW), entonces se dice que  $p: E \rightarrow B$  es una *fibración de Serre*. Y si  $\mathcal{C}$  es la clase de todos los espacios, entonces decimos que  $p$  es una *fibración de Hurewicz* o, simplemente, si no se presta a confusión, una *fibración*.

El siguiente teorema es la base de los cálculos que realizaremos en esta sección

1.5.3 Teorema. Sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y sean  $b \in B$ ,  $e \in p^{-1}(b) = F$ . Entonces se tiene una sucesión exacta larga

$$(1.5.3) \quad \cdots \rightarrow \pi_q(F) \xrightarrow{i_*} \pi_q(E) \xrightarrow{p_*} \pi_q(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{q-1}(F) \rightarrow \cdots. \quad \square$$

Ésta es la llamada *sucesión exacta de grupos de homotopía* de la fibración  $p: E \rightarrow B$ .

1.5.4 DEFINICIÓN. Una aplicación  $p: E \rightarrow B$  es una *fibración localmente trivial* con *fibra*  $F$  si cada punto  $b \in B$  tiene una vecindad  $U \subset B$  tal que existe un homeomorfismo  $\varphi_U: U \times F \rightarrow p^{-1}U$  que hace conmutativo el triángulo

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & p^{-1}U \\ & \searrow \pi & \swarrow p_U \\ & & U \end{array}$$



donde  $p_U = p|_{p^{-1}U}: p^{-1}U \rightarrow U$  y  $\pi$  es la proyección en  $U$ . De esta conmutatividad se obtiene que para cada  $b \in U$ ,  $\varphi_U$  se restringe a un homeomorfismo de  $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F \approx F$  en  $p^{-1}(b)$ . Por esto se dice que la fibra es  $F$

1.5.5 EJEMPLO. Si podemos tomar  $U = B$ , es decir, si  $E \approx B \times F$ , tenemos una *fibración trivial*. Si  $E = B \times F$  entonces  $p = \text{proy}_B$  es la *fibración producto*.

1.5.6 Lema. *La fibración trivial es una fibración de Hurewicz.*

1.5.7 Teorema. *Toda fibración localmente trivial es una fibración de Serre.*

1.5.8 Proposición. *Sea  $p: E \rightarrow B$  continua tal que existe una cubierta abierta  $\{U\}$  de  $B$  de modo que para cada abierto  $U$  de la cubierta,  $p_U$  es una fibración de Serre. Entonces  $p$  es una fibración de Serre.* □

Por el teorema 1.4.29 y la proposición 1.5.8 obtenemos el siguiente lema:

1.5.9 Lema. *La proyección  $p: V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$  es una fibración de Serre con fibra  $U_{\mathbb{F}}(k)$ .*

Análogamente por el teorema 1.4.32 y la proposición 1.5.8 obtenemos el siguiente lema:

1.5.10 Lema. *La proyección  $q_k: V_k(\mathbb{F}^{n+1}) \rightarrow V_k(\mathbb{F}^n)$  es una fibración de Serre con fibra  $V_1(\mathbb{F}^{n-k}) = \mathbb{S}^{\nu(n-k)-1}$ .*

Enunciaremos una proposición que nos será útil para probar propiedades de ciertas fibraciones al pasar al colímite.

**1.5.11 Proposición.** *Sea  $X$  la unión de subespacios  $X_q$  tales que  $X_q \subset X_{q+1}$ . Supondremos que todo compacto  $K$  de  $X$  está contenido en algún  $X_q$ . Si para cada  $n$  existe un entero  $q(n)$  tal que la inclusión  $X_q \rightarrow X_k$  induce isomorfismos  $\pi_n(X_q) \rightarrow \pi_n(X_k)$  para  $q(n) \leq q \leq k$ , entonces la inclusión  $X_q \rightarrow X$  induce un isomorfismo  $\pi_n(X_q) \rightarrow \pi_n(X)$  para  $q \geq q(n)$*

Sea  $q = q_1 \circ q_2 \dots \circ q_n : \mathbf{V}_{n+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \rightarrow \mathbf{V}_1(\mathbb{F}^{n+1}) = \mathbb{S}^{c(n+1)-1}$ , es decir,  $q(v_1, \dots, v_{n+1}) = v_1$ . Por el lema anterior,  $q$  es una composición de fibraciones, por lo tanto es una fibración, con fibra  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)$ .

$$(1.5.11) \quad \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) \longrightarrow \mathbf{V}_{n+1}(\mathbb{F}^{n+1}) = \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1) \xrightarrow{q} \mathbf{V}_1(\mathbb{F}^{n+1}) = \mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}$$

Usaremos esta fibración para probar el siguiente teorema.

**1.5.12 Teorema.** *Las inclusión natural  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) \rightarrow \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+q)$  induce un morfismo  $\pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)) \rightarrow \pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+q))$  que es un isomorfismo para  $i \leq \nu(n+1) - 3$  y es un epimorfismo para  $i \leq \nu(n+1) - 2$*

*Demostración:* Basta probar el caso en que  $q = 1$  ya que en el caso general podemos factorizar la inclusión natural de la siguiente forma  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) \rightarrow \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+q)$ . Para el caso  $q = \infty$ , basta notar que las inclusiones son cerradas y que  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(j)$  es compacto y aplicamos la proposición 1.5.11

Para el caso  $q = 1$  utilizamos la fibrici3n 1.5.11 y la sucesi3n exacta larga de grupos de homotopía asociada a una fibrici3n:

$$\pi_{i+1}(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}) \rightarrow \pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n)) \rightarrow \pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n+1)) \rightarrow \pi_i(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1})$$

El morfismo es un epimorfismo si  $\pi_i(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}) = 0$  lo cual es equivalente a que  $i < \nu(n+1) - 1$  y es un isomorfismo si adem1s  $\pi_{i+1}(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}) = 0$  o equivalentemente  $i + 1 < \nu(n+1) - 1$ .  $\square$

Notemos que para  $i$  fija la desigualdad  $i \leq \nu(n+1) - 1 - 3$  nos determina el rango de estabilidad de  $n$ , es decir, a partir de que  $n$  la inclusi3n  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(n) \rightarrow \mathbf{U}_{\mathbb{F}}$  nos induce isomorfismos en los  $\nu$ -ésimos grupos de homotopía.

Sea ahora  $q = q_k \circ q_{k+1} \dots \circ q_{k+m} : \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(k+m) = \mathbf{V}_{k+m}(\mathbb{F}^{k+m}) \rightarrow \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{k+m})$ , es decir,  $q(v_1, \dots, v_{k+m}) = (v_1, \dots, v_k)$ . Por el lema 1.4.32,  $q$  es una composici3n de fibriciones, por lo tanto es una fibrici3n con fibra  $\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)$ .

$$(1.5.12) \quad \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m) \longrightarrow \mathbf{U}_{\mathbb{F}}(k+m) \longrightarrow \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{k+m})$$

Usaremos esta fibrici3n para probar el siguiente teorema.

**1.5.13 Teorema.**  $\pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{k+m})) = 0$  para  $i \leq \nu(m+1) - 2$

*Demostraci3n:* Aplicando la sucesi3n exacta larga de grupos de homotopía a la fibrici3n 1.5.12 obtenemos:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)) \xrightarrow{\alpha} \pi_i(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m+k)) \longrightarrow \pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{k+m})) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{U}_{\mathbb{F}}(m)) \xrightarrow{\beta} \cdots$$

Por el teorema 1.5.12,  $\alpha$  es un epimorfismo y  $\beta$  es un isomorfismo si  $i \leq \nu(m+1) - 2$ , esto sucede si y sólo si  $\pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{k+m})) = 0$ .  $\square$

Notemos que por el teorema 1.5.11 obtenemos que  $\pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{\infty})) = 0$  para toda  $i$ .

Ahora estabilizaremos el resultado trivialidad que hemos obtenido en “otra dirección”.

Sea  $j : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})$  la aplicación tal que

$$j(v_1, \dots, v_k) = (e_{n+1}, v_1, \dots, v_k).$$

A  $j$  la podemos ver como la inclusión sobre la fibra de la aplicación  $p : \mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \rightarrow \mathbf{V}_1(\mathbb{F}^{n+1})$  tal que  $p(v_1, \dots, v_{k+1}) = v_1$ . Entonces obtenemos la fibración

$$\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \longrightarrow \mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \xrightarrow{p} \mathbf{V}_1(\mathbb{F}^n)$$

A partir de esta fibración obtenemos la siguiente sucesión de grupos de homotopía:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{i+1}(\mathbf{V}_1(\mathbb{F}^{n+1})) & \longrightarrow & \pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)) & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(\mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})) & \longrightarrow & \pi_i(\mathbf{V}_1(\mathbb{F}^{n+1})) \\ \cong \uparrow & & & & & & \cong \uparrow \\ \pi_{i+1}(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}) & & & & & & \pi_i(\mathbb{S}^{\nu(n+1)-1}) \end{array}$$

De manera análoga a las proposiciones anteriores obtenemos la siguiente proposición.

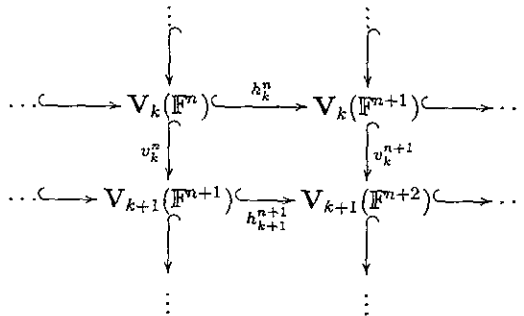
1.5.14 **Proposición.** *El homomorfismo*

$$j_* : \pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n)) \rightarrow \pi_i(\mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}))$$

es un isomorfismo para  $i \leq \nu(n+1) - 3$ . □

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

(1.5.2)



Las inclusiones (de hecho son encajes) verticales están dadas por

$$\mathbb{F}^n \supset (v_1, \dots, v_k) \mapsto (e^{n+1}, v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{F}^{n+1}$$

y las horizontales por

$$\mathbb{F}^n \supset \{v_1, \dots, v_k\} \mapsto (v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{F}^{n+1}.$$

Fijando el  $k$ -ésimo renglón del diagrama obtenemos por medio de las inclusiones horizontales un sistema dirigido cuyo límite directo lo denotaremos

como  $\mathbf{EU}_k \approx \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^\infty)$ , las inclusiones verticales nos determinan en el colímite un sistema dirigido

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \mathbf{EU}_k \\ \downarrow \\ \mathbf{EU}_{k+1} \\ \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

donde la inclusión de  $\mathbf{EU}_k$  en  $\mathbf{EU}_{k+1}$  es la inclusión inducida en el colímite por las inclusiones  $\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \hookrightarrow \mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})$  del diagrama (1.5.2). El límite directo de este sistema lo denotaremos por  $\mathbf{EU}$ .

Análogamente tenemos el diagrama correspondiente para las grassmannianas (3.2.2), de hecho, con las proyecciones  $p_k^n : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^n)$  tenemos un diagrama conmutativo de “tres pisos” donde el primer piso es el diagrama (1.5.2), el segundo piso es el diagrama (3.2.2) y el tercer piso es el diagrama correspondiente a la fibra  $\mathbf{U}$ ; las aplicaciones que bajan del segundo piso al primero son las  $p_k^n$  y del tercer piso al segundo bajan las inclusiones en la fibra.

Al aplicar el functor  $\pi_i$  al diagrama (1.5.2), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$(1.5.3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^m)) & \xrightarrow{(h_k^n)_*} & \pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^{m+1})) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (v_k^n)_* & & \downarrow (v_k^{n+1})_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_i(\mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{m+1})) & \xrightarrow{(h_{k+1}^{n+1})_*} & \pi_i(\mathbf{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{m+2})) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Por el teorema (1.5.13)  $\pi_i(\mathbf{V}_k(\mathbb{F}^m)) = 0$  para  $m \geq \frac{i+2-\nu}{\nu} + k$  y por la proposición 1.5.14 el homomorfismo vertical  $(v_k^n)_*$  es un isomorfismo para  $m \geq \frac{i-\nu+3}{\nu}$ , por lo tanto  $\pi_i(\mathbf{E}\mathbf{U}) = 0$ .

De esta forma tomando la aplicación inducida en el colímite por las fibriciones  $p_k^n$  obtenemos una aplicación  $p : \mathbf{E}\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{U}$ . Esta aplicación es una fibrición de Serre ya que la imagen de un cubo yace en algún  $\mathbf{G}_k(\mathbb{F}^m)$  por compacidad, por lo tanto, como  $p_k^n$  es una fibrición, la aplicación  $p$  es una fibrición. Además por las observaciones anteriores tenemos el siguiente resultado.

1.5.4 Teorema. *La aplicación  $p : \mathbf{E}\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{U}$  inducida en el colímite por las aplicaciones  $p_k^n : \mathbf{V}_k(\mathbb{F}^m) \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{F}^m)$ , es una fibrición de Serre con fibra  $\mathbf{U}$  y con espacio total  $\mathbf{E}\mathbf{U}$  contraíble.  $\square$*

Si consideramos la sucesión exacta larga de homotopía de la fibración  $p : \mathbf{E}U \rightarrow \mathbf{B}U$  obtenemos que  $\pi_i(\mathbf{B}U) \cong \pi_{i-1}(U)$ , como tanto  $U$  como  $\mathbf{B}U$  son complejos CW, podemos concluir que  $\Omega\mathbf{B}U \simeq U$ .

1.5.5 NOTA. En esta sección denotamos por  $\mathbf{E}U$  ( $\mathbf{B}U$  respectivamente), de forma indistinta a los colímites de las variedades  $V_k(\mathbb{F}^n)$  ( $G_k(\mathbb{F}^n)$  respectivamente). La notación común es usando  $\mathbf{E}O$  (respectivamente  $\mathbf{B}O$ ) en el caso en que  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .



## CAPÍTULO 2

### CASIFIBRACIONES

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, hicimos uso de la sucesión exacta larga asociada a una fibración de Serre para demostrar que  $\Omega BU \simeq U$ . Podríamos ahora plantearnos la pregunta: ¿Solamente cuando tengamos una fibración de Serre podremos obtener una sucesión exacta larga de grupos de homotopía? El teorema 1.5.3 nos garantiza que el hecho de ser fibración de Serre es condición suficiente, sin embargo, como veremos en este capítulo, existen aplicaciones que no tienen la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a la clase de los cubos  $I^n$  pero que, aun así se les puede asociar una sucesión exacta larga de grupos de homotopía de la forma fibra - espacio total - base. De esta manera, daremos una definición que engloba precisamente al conjunto de aplicaciones que nos permiten hacer cálculos homotópicos utilizando la sucesión larga de grupos de homotopía.

2.1.1 DEFINICIÓN. (Dold-Thom) Una aplicación  $p : E \rightarrow B$  se llama una *casifibración* si para todo punto  $b \in B$  y para toda  $e \in p^{-1}(b)$

$$p_* : \pi_q(E, p^{-1}(b)) \rightarrow \pi_q(B)$$

(los grupos basados en  $e$  y  $b$  respectivamente) es un isomorfismo para toda  $q \geq 0$

Recordemos que si se tiene una pareja de espacios  $(X, A)$  con  $A \subset X$ , entonces los homomorfismos asociados a las inclusiones y el homomorfismo de conexión nos inducen una sucesión exacta larga de la forma:

$$(2.1.1) \quad \dots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_1(X, A) \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$$

llamada la *sucesión de grupos de homotopía* de la pareja  $(X, A)$ , (los tres últimos son solamente conjuntos punteados (ver [AGP])).

Utilizando esta sucesión podemos probar la siguiente proposición.

2.1.2 Proposición. Sea  $p : E \rightarrow B$  una casifibración y sean  $b \in B$ ,  $e \in p^{-1}(b) = F$ . Entonces se tiene una sucesión exacta larga

$$(2.1.2) \quad \dots \rightarrow \pi_q(F) \xrightarrow{i_*} \pi_q(E) \xrightarrow{p_*} \pi_q(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{q-1}(F) \rightarrow \dots$$

Ésta es la llamada *sucesión exacta de grupos de homotopía* de la casifibración  $p: E \rightarrow B$ .

*Demostración:* Tomemos la sucesión de homotopía para la pareja  $(E, F)$ . Por la definición de casifibración, cada término  $\pi_q(E, F)$  de la sucesión puede sustituirse por  $\pi_q(B)$ . Componiendo este isomorfismo con el homomorfismo de conexión de la pareja  $(E, F)$  obtenemos la sucesión deseada.  $\square$

Ahora daremos un ejemplo que nos muestra una casifibración que no es fibración.

2.1.3 EJEMPLO. Sea  $E = \{(e^{2\pi it}, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid t \in (0, \frac{1}{2})\} \cup \{(1, s) \mid s \in [0, 1]\} \cup \{(e^{2\pi it}, 1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid t \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ , sea  $B = \mathbb{S}^1$  y sea  $p: E \rightarrow B$  tal que  $p(e^{2\pi it}, s) = e^{2\pi it}$  (ver figura 2.1), mostraremos que  $p$  no es una fibración y sin embargo es una casifibración. Sea  $X = E$  y  $f: X \rightarrow E$  la identidad, sea  $H: X \times I \rightarrow B$  tal que

$$H((e^{2\pi it}, s), u) = \begin{cases} e^{(2-u)\pi it} & \text{si } t \in (0, \frac{1}{2}) \\ e^{(1-\frac{1}{2}u(1-s))\pi i} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ e^{[2(1-u)(t-\frac{1}{2})+1]\pi i} & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1) \\ e^{(2-us)\pi i} & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

de esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

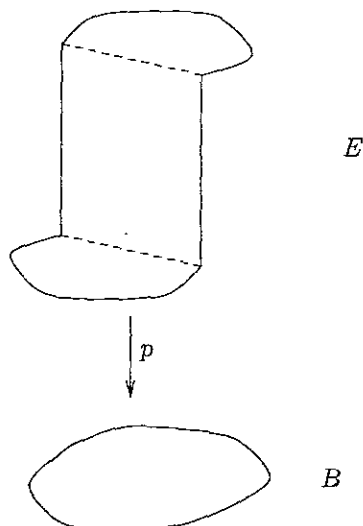


Figura 2.1: La proyección  $p$  es una casifibración que no es fibración

Para este diagrama no existe un levantamiento de la homotopía  $H$  ya que, cuando  $t = 1$ ,  $H(-, 1) : X \rightarrow B$  es un homeomorfismo, y  $p$  no puede factorizar a un homeomorfismo porque no es inyectiva.

## 2.2 CRITERIO DE DOLD PARA CASIFIBRACIONES

En esta sección enunciaremos un criterio que nos permitirá afirmar cuándo una aplicación entre dos espacios es una casifibración, este criterio tiene varias aplicaciones como por ejemplo definir los grupos de homología de un espacio  $X$

en términos de los grupos de homotopía de la potencia simétrica infinita de  $X$ , o más generalmente, nos permite construir un espacio de Eilenberg McLane de tipo  $(G, n)$  a partir de un espacio de Moore de tipo  $(G, n)$  (Ver [AGP] capítulos 5 y 6). Nosotros utilizaremos este criterio en la demostración del teorema de periodicidad de Bott.

**2.2.1 DEFINICIÓN.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua. Un subconjunto  $U \subset B$  se llama *distinguido* (respecto a  $p$ ), si  $U \subset p(E)$  y la restricción de  $p$ ,  $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$  es una casifibración.

Dada esta definición podemos enunciar el criterio de Dold para casifibraciones. La demostración se puede consultar en el primer apéndice de [AGP]

**2.2.2 Teorema.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua. Sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  una cubierta abierta de  $B$  tal que cada elemento  $U_i$  es distinguido respecto a  $p$ . Si para cada  $b \in U_i \cap U_j$  existe  $U_k \in \mathcal{U}$  tal que  $b \in U_k \subset U_i \cap U_j$ , entonces  $B$  es distinguido, es decir,  $p : E \rightarrow B$  es una casifibración.

El siguiente lema lo utilizaremos para probar una consecuencia del criterio de Dold que nos será de utilidad en la demostración del teorema de periodicidad de Bott.

**2.2.3 Lema.** Sea  $X = \cup X_n$ ,  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , un espacio de Hausdorff con la

topología de la unión. Entonces todo compacto  $K \subset X$  yace en  $X_n$  para alguna  $n$ .

*Demostración:* Supongamos que no existe  $n$  tal que  $K$  yace en  $X_n$ , entonces existirá una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \in K$ , y  $x_n \notin X_n$ . Tanto esta sucesión como cualquier subsucesión son subconjuntos cerrados de  $X$ , pues su intersección con cada  $X_n$  es finita, y por ser  $X$  de Hausdorff,  $X_n$  es de Hausdorff y un conjunto finito de puntos es cerrado en un espacio de Hausdorff. Las subsucesiones  $\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , constituyen un sistema anidado de subconjuntos cerrados de  $K$  cuya intersección es vacía, aunque la intersección de cada subsistema finito es no vacía, esto contradice la compacidad de  $K$ .

**2.2.4 Teorema.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  continua y supongamos que  $B = \bigcup B_i$ ,  $B_1 \subset B_2 \dots$  es de Hausdorff con la topología de la unión. Si cada  $B_i$  es distinguido respecto a  $p$ , entonces  $B$  mismo lo es, es decir,  $p$  es una casifibración.*

*Demostración:* Hay que demostrar que  $p_* : \pi_k(E, p^{-1}(b)) \rightarrow \pi_k(B, b)$  es un isomorfismo, para ver que es monomorfismo, supongamos que  $[p \circ f] = [p \circ g] \in \pi_k(B, b)$ , es decir existe  $H : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow B$  tal que  $H(x, 0) = p \circ f(x)$  y  $H(x, 1) = p \circ g(x)$  tal que si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$   $H(x, t) = b$ . por ser  $\mathbb{D}^n \times I$  compacto, y por el lema anterior, existe  $m$  tal que  $H(\mathbb{D}^n, I) \subset X_m$  por ser  $X_m$  distinguido  $p| : p^{-1}(X_m) \rightarrow B$  es una casifibración, luego existe  $H' : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow p^{-1}(X_m) \subset E$  tal que  $H'(x, 0) = f(x)$  y  $H'(x, 1) = g(x)$  tal que si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$   $H'(x, t) \in$

$p^{-1}(b), H'$ , luego mediante  $H'$  obtenemos que  $[f] = [g] \in \pi_k(E, p^{-1}(b))$ . Ahora sea  $[f] \in \pi_k(B, b)$ , como  $f(\mathbb{D}^n)$  es compacto, por el lema anterior  $f(\mathbb{D}^n) \subset X_m$  para alguna  $m$ , por ser  $X_m$  distinguido existe  $f' : \mathbb{D}^n \rightarrow p^{-1}(X_m) \subset E$  tal que  $p \circ f' \simeq f$ , por lo tanto  $p_*$  es suprayectiva.

Consideremos ahora una aplicación  $p : E \rightarrow B$ , con  $B$  de Hausdorff, y supongamos que  $B = \bigcup_{i \geq 0} B_i$ , donde  $B_i \subset B_{i+1}$ ,  $i \geq 0$ , y cada  $B_i$  es cerrada en  $B$ . Supongamos además que sobre cada diferencia  $B_{i+1} - B_i$ ,  $p$  es trivial, es decir, se tiene un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E_{i+1} - E_i & \xrightarrow{\approx} & (B_{i+1} - B_i) \times F \\ & \searrow p| & \swarrow \text{proy} \\ & & B_{i+1} - B_i \end{array}$$

donde  $E_i = p^{-1}(B_i)$ , y, en particular,  $p_0 = p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$  también es trivial. Así, para cualquier  $x \in B$ , la fibra  $p^{-1}(x) \approx F$ .

Supongamos que, además, para cada  $i$  existe una vecindad abierta  $U_i$  de  $B_i$  en  $B_{i+1}$  y una retracción por deformación (es decir, que es una equivalencia homotópica)  $r_i : U_i \rightarrow B_i$ , que se levanta a una retracción por deformación  $\tilde{r}_i : p^{-1}U_i \rightarrow E_i$ , es decir, de modo que conmuta el diagrama

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}U_i & \xrightarrow{\tilde{r}_i} & E_i \\ p| \downarrow & & \downarrow p_i \\ U_i & \xrightarrow{r_i} & B_i \end{array}$$

Así, restringiendo las aplicaciones  $\tilde{r}_i$  a cada fibra, obtenemos aplicaciones  $\tilde{r}_i^x : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(r_i(x))$ .

Con estas hipótesis obtenemos el siguiente resultado

**2.2.5 Teorema.** *Si  $\tilde{r}_i^x : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(r_i(x))$  es una equivalencia homotópica para cada  $i$  y cada  $x \in U_i$ , entonces  $p : E \rightarrow B$  es una casifibración.*

*Demostración:* Aplicaremos el teorema anterior, por lo que basta con verificar que cada espacio  $B_i$  es distinguido respecto a  $p$ . Haremos esa verificación por inducción sobre  $i$ . Ya que, por hipótesis,  $p_0$  es trivial, entonces  $B_0$  es distinguido respecto a  $p$ , pues por ser trivial es fibración de Serre, por lo tanto casifibración. Supongamos, pues, que  $B_i$  es distinguido respecto a  $p$ ,  $i \geq 0$  y probemos que  $B_{i+1}$  también lo es. Para esto último, aplicaremos el teorema de Dold a la cubierta de  $B_{i+1}$  formada por los abiertos  $U_i$ ,  $V_i = B_{i+1} - B_i$  y  $W_i = U_i - B_i$ , para la que es suficiente demostrar que cada abierto es distinguido ya que  $U_i \cap V_i = U_i$ ,  $U_i \cap W_i = W_i$ ,  $V_i \cap W_i = W_i$ .

Por ser  $p|(E_{i+1} - E_i)$  trivial,  $V_i$  es distinguido. Ya que  $W_i \subset V_i$ , entonces también  $p|p^{-1}(W_i)$  es trivial, por lo que  $W_i$  es distinguido.

Para demostrar que  $U_i$  es distinguido, basta observar que por la conmutatividad de 2.2.4 y la naturalidad de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía de una pareja, se tienen para cada  $x \in U_i$  y  $k > 0$ , cuadrados



conmutativos en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \pi_k(p^{-1}U_i) & \longrightarrow & \pi_k(p^{-1}U_i, p^{-1}(x)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(p^{-1}(x)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \tilde{r}_i \downarrow \cong & & \tilde{r}_i \downarrow & & \tilde{r}_i \downarrow \cong & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \pi_k(E_i) & \longrightarrow & \pi_k(E_i, p^{-1}(r_i(x))) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{k-1}(p^{-1}(r_i(x))) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

por lo que, por el Lema del Quinto, el homomorfismo vertical de enmedio es un isomorfismo.

Consideremos ahora el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_k(p^{-1}U_i, p^{-1}(x)) & \longrightarrow & \pi_k(U_i, x) \\
 \tilde{r}_i \downarrow \cong & & \cong \downarrow r_i \\
 \pi_k(E_i, p^{-1}(r_i(x))) & \xrightarrow{\cong} & \pi_k(B_i, r_i(x))
 \end{array}$$

La flecha vertical izquierda recién probamos que es un isomorfismo; la vertical derecha lo es por ser  $r_i$  una equivalencia homotópica; finalmente la horizontal inferior lo es por hipótesis de inducción. Por lo tanto, la horizontal superior es un isomorfismo, lo que demuestra que  $U_i$  es distinguido.  $\square$



## CAPÍTULO 3

# PERIODICIDAD DE BOTT

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección desarrollaremos la demostración del teorema de periodicidad de Bott (compleja) basándonos en los artículos [AP] y [Be]. Se puede decir que el teorema de periodicidad de Bott es uno de los resultados más importantes de la Teoría-K topológica. Este teorema nos permite hacer cálculos explícitos sobre la Teoría-K de algunos espacios, de hecho una versión del teorema se puede enunciar calculando la Teoría-K de las esferas. La versión que aquí probaremos es la siguiente.

**3.1.1 Teorema.** (Periodicidad de Bott compleja) *Para  $k \geq 2$  se tiene un isomorfismo*

$$\pi_k(\mathbf{U}) \cong \pi_{k-2}(\mathbf{U})$$

o, equivalentemente

$$\pi_{k+1}(\mathbf{BU}) \cong \pi_{k-1}(\mathbf{BU})$$

además  $\pi_0(\mathbf{U}) = 0$  y  $\pi_1(\mathbf{U}) = \mathbb{Z}$

La idea de la prueba, debida a D. McDuff [McDuff], puede resumirse de la siguiente manera.

En el capítulo 1 probamos que el colímite de las identificaciones que definen a las grassmannianas nos determina una fibración  $p : \mathbf{EU} \rightarrow \mathbf{BU}$  con fibra  $\mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{EU}$  es el colímite de las variedades de Stiefel, el cual probamos que es contraíble. Consideremos la sucesión exacta larga de grupos de homotopía de esta fibración.

(3.1.2)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(\mathbf{U}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_{k+1}(\mathbf{BU}) \longrightarrow \pi_k(\mathbf{U}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Por la exactitud de esta sucesión obtenemos que

$$(3.1.3) \quad \pi_{k+1}(\mathbf{BU}) \cong \pi_k(\mathbf{U})$$

En este capítulo construiremos una casifibración  $p : E \rightarrow \mathbf{U}$  tal que el espacio total  $E$  resulte contraíble y tenga como fibra a  $\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}$ . Así obtendremos una sucesión exacta larga

(3.1.4)

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_k(\mathbf{U}) \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Por la exactitud de esta sucesión obtendremos que para  $k > 1$

$$(3.1.5) \quad \pi_k(\mathbf{U}) \cong \pi_{k-1}(\mathbf{BU})$$

y para  $k = 1$

$$(3.1.6) \quad \pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, combinando (3.1.3) y (3.1.5) obtenemos el teorema de periodicidad de Bott.

## 3.2 CONSTRUCCIÓN DE LA CASIFIBRACIÓN

En esta sección construiremos una casifibración  $p : E \rightarrow U$  con fibra homeomorfa a  $\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}$  y con espacio total contraíble; la construcción de la casifibración se realizará por etapas; primero construiremos el "caso finito" de la casifibración, es decir, una aplicación  $p : E_n \rightarrow U_n$  donde  $E_n$  es contraíble y la fibra es homeomorfa a una unión ajena de grassmannianas, después, estabizaremos el resultado de manera que obtengamos una casifibración con fibra  $\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}$ , y por último, probaremos que la aplicación construida satisface las hipótesis del criterio de Dold para casifibraciones.

Antes de comenzar con la construcción del caso finito de la casifibración, recordaremos la definición de  $\mathbf{BU}$  y daremos construcciones equivalentes del espacio  $\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \hookrightarrow & G_k(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{h_k^n} & G_k(\mathbb{C}^{n+1}) & \hookrightarrow & \dots \\ & & \downarrow v_k^n & & \downarrow v_k^{n+1} & & \\ \dots & \hookrightarrow & G_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1}) & \xrightarrow{h_{k+1}^{n+1}} & G_{k+1}(\mathbb{C}^{n+2}) & \hookrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Las inclusiones (de hecho son encajes) verticales están dadas por

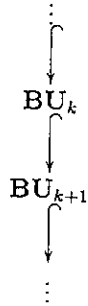
$$\mathbb{C}^n \supset V \mapsto \mathbb{C}e^{n+1} \oplus V \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

y las horizontales por

$$\mathbb{C}^n \supset V \mapsto V \oplus 0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

Fijando el  $k$ -ésimo renglón del diagrama obtenemos por medio de las inclusiones horizontales un sistema dirigido cuyo límite directo es (por definición)  $\text{BU}_k$ , las inclusiones verticales nos determinan en el colímite un sistema di-

rigido



donde la inclusión de  $\text{BU}_k$  en  $\text{BU}_{k+1}$  es la inclusión inducida en el colímite por las inclusiones  $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbf{G}_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1})$  del diagrama (3.2.2). El límite directo de este sistema es (por definición)  $\text{BU}$ .

3.2.3 DEFINICIÓN. Dada  $n \in \mathbb{N}$  definimos el *espacio de Grassmann*  $\mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$  como  $\mathcal{G}(\mathbb{C}^n) := \coprod_{k=0}^n \mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n)$  con la topología de la suma.

Veremos ahora distintas formas de definir una versión estable del espacio de Grassmann, estos colímites de espacios de Grassmann los utilizaremos en distintas partes de la construcción de la casifibración.

La primera forma en la que daremos un orden parcial a los espacios de Grassmann es mediante las siguientes inclusiones

$$i_n^{n+1} : \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{C}^{n+1})$$

definidas de manera que  $i_n^{n+1}|_{\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n)}$  coincide con la inclusión horizontal  $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$  del diagrama (3.2.2). Como el espacio de Grassmann tiene la topología

de la suma, estas aplicaciones están bien definidas y son inclusiones continuas. El siguiente diagrama nos muestra cómo está ordenado parcialmente este conjunto.

(3.2.3)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^0) = G_0(\mathbb{C}^0) & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^1) = G_0(\mathbb{C}^1) \sqcup G_1(\mathbb{C}^1) & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) = G_0(\mathbb{C}^n) \sqcup G_1(\mathbb{C}^n) \sqcup \cdots \sqcup G_{n-1}(\mathbb{C}^n) \sqcup G_n(\mathbb{C}^n) & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

A partir de este diagrama es claro que podemos definir

$$\lim_{\{\mathbb{C}^n, i_n^{n+1}\}} \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{BU}_k$$

Veamos ahora otra forma de ordenar parcialmente a los espacios de Grassmann. Definamos

$$j_n^{n+1} : \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{C}^{n+1})$$

de manera que  $i|_{\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)}$  coincida con la inclusión vertical  $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1})$  del diagrama (3.2.2). Como el espacio de Grassmann tiene la topología de la suma, estas aplicaciones están bien definidas y son inclusiones continuas. El siguiente diagrama nos muestra cómo está ordenado parcialmente este conjunto.

(3.2.4)



$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^0) = \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^0) & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & & & & & \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^1) = \mathbf{G}_1(\mathbb{C}^1) \sqcup \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^1) & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) = \mathbf{G}_n(\mathbb{C}^n) \sqcup \mathbf{G}_{n-1}(\mathbb{C}^n) \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{G}_1(\mathbb{C}^n) \sqcup \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^n) & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 
 \end{array}$$

A partir de este diagrama es claro que podemos definir

$$\lim_{\{\mathbb{C}^n, J_n^{n+1}\}} \mathcal{G}(\mathbb{C}^n) := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{BU}_k$$

por lo tanto al tomar el límite directo da lo mismo inducir el orden parcial mediante las inclusiones verticales o mediante las inclusiones horizontales. Notemos que además como  $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n) \approx \mathbf{G}_{n-k}(\mathbb{C}^n)$  los diagramas (3.2.3) y (3.2.4) son esencialmente el mismo.

Si quisiéramos obtener en el colímite un espacio homeomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbf{BU}$ , intuitivamente deberíamos garantizar que siguiendo una sucesión de inclusiones suceda lo siguiente:

1. Debemos pasar por espacios  $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n)$  para los que la diferencia  $n - k$  sea arbitrariamente grande, esto nos diría que en el diagrama (3.2.2) “nos estamos moviendo hacia la derecha”.
2. Debemos pasar por espacios  $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n)$  con  $k$  arbitrariamente grande, esto nos diría que en el diagrama (3.2.2) “nos estamos moviendo hacia abajo”.

3. Debemos tener una cantidad infinita numerable de sucesiones independientes de inclusiones, esto nos daría el parámetro  $\mathbb{Z}$

Propondremos ahora un sistema dirigido cuyo colímite cumple con estas condiciones. Sea  $\hat{j}_n^{n+1} : \mathcal{G}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1})$  tal que  $\hat{j}_n^{n+1}|_{\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)} = h_{k+1}^{2n+1} \circ v_k^{2n}$ , es decir,  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \supset V \mapsto V \oplus \mathbb{C}e^{n+1} \oplus 0 \subset \mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1}$ . Veamos el diagrama correspondiente a este orden.

(3.2.5)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0) = \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^0) & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1) = \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1) \sqcup \mathbf{G}_1(\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1) & \searrow & \sqcup \mathbf{G}_2(\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1) & & & & \\
 \downarrow & \searrow & \searrow & & & & \\
 \mathcal{G}(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) = \mathbf{G}_0(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) \sqcup \mathbf{G}_1(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) & \searrow & \sqcup \mathbf{G}_2(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) & \sqcup \mathbf{G}_3(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) & \sqcup \mathbf{G}_4(\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) & & \\
 \downarrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Notemos que se cumplen las primeras dos condiciones ya que las inclusiones están definidas en cada sumando como una inclusión vertical del diagrama (3.2.2) seguida de la correspondiente inclusión horizontal, es decir, cada sumando en el que comienza una cadena de inclusiones, nos determina una copia de BU. Le daremos ahora un índice a cada una de las copias de BU para obtener el homeomorfismo con  $\text{BU} \times \mathbb{Z}$ . Definimos  $\text{BU} \times \{0\}$  como el colímite de la única cadena de inclusiones que comienza en  $\mathcal{G}(\mathbb{C}^0 \times \mathbb{C}^0)$ . A excepción del primero, en cada renglón del diagrama (3.2.5) comienzan dos cadenas de inclusiones, a saber, la que comienza con  $\mathbf{G}_0(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$  y la que comienza con  $\mathbf{G}_{2n}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$ , identificamos al colímite de la primera con  $\text{BU} \times \{-n\}$  y al colímite de la segunda con  $\text{BU} \times \{n\}$ . Hemos demostrado así lo siguiente.

**3.2.6 Proposición.** Si  $\hat{j}_n^{n+1} : \mathcal{G}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1})$  es la aplicación

antes definida, podemos definir

$$\lim_{\{\mathbb{C}^n, \hat{J}_n^{n+1}\}} \mathcal{G}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) := \text{BU} \times \mathbb{Z}$$

### 3.2.1 Caso finito

Sea  $C$  una matriz compleja de  $n \times n$ , decimos que  $C$  es hermitiana si  $C = C^*$ , donde  $C^*$  denota la matriz compleja conjugada de  $C$ . Si  $\langle -, - \rangle$  denota el producto hermitiano canónico en  $\mathbb{C}^n$ , entonces para cualesquiera  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,  $C$  satisface la identidad  $\langle Cv, w \rangle = \langle v, Cw \rangle$ . Esto implica en particular que los valores propios de la matriz  $C$  son reales, ya que si  $\lambda$  es un valor propio de  $C$  y  $v$  es un vector propio asociado a  $\lambda$  ( $v \neq 0$ ),  $\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Cv, v \rangle = \langle v, Cv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$ .

El conjunto  $H_{2n}(\mathbb{C})$  de todas las matrices hermitianas de  $2n \times 2n$  tiene estructura de espacio vectorial real con la suma ordinaria de matrices y la multiplicación por escalares, realizándola en todos los elementos de la matriz. Sea  $E_{2n}$  el subespacio topológico de  $H_{2n}(\mathbb{C})$  que consiste de las matrices cuyos valores propios yacen en el intervalo  $I$ . El espacio  $E_{2n}$  es contraíble a través de la homotopía  $h : E_{2n} \times I \rightarrow E_{2n}$  tal que  $h(C, \tau) = (1 - \tau)C$ , que comienza con la identidad y termina con la aplicación constante con valor la matriz  $0$ .

Sea  $M_{2n \times 2n}(\mathbb{C})$  el espacio vectorial complejo de las matrices complejas de  $2n \times 2n$  y sea  $GL_{2n}(\mathbb{C})$  el subgrupo de las invertibles. Se tiene una aplicación

(diferenciable):

$$\exp : M_{2n \times 2n}(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{C})$$

dada por

$$\exp(B) := e^B := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} = I_n + B + \frac{B^2}{2!} + \dots,$$

que satisface las leyes exponenciales siempre que las matrices tomadas como exponentes conmuten.

Si  $T$  es una matriz invertible,

$$e^{TBT^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(TBT^{-1})^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} T \frac{B^i}{i!} T^{-1} = T e^{BT^{-1}}.$$

Si  $(\lambda_j)$  denota a la matriz elemental tal que  $\lambda_{ik} = 0$  si  $(i, k) \neq (j, j)$  y  $\lambda_{jj} = \lambda_j$  tenemos que  $(\lambda_i)(\lambda_j) = (\lambda_j)(\lambda_i) = 0$ , además,  $(\lambda_i)^n = (\lambda_i^n)$  de esta manera vemos que  $e^{(\lambda_i)+(\lambda_j)} = e^{(\lambda_i)}e^{(\lambda_j)} = (e^{\lambda_i})(e^{\lambda_j})$ . Así hemos probado que la aplicación exponencial satisface las siguientes propiedades:

**e1:** Para toda matriz invertible  $T$ ,  $e^{TBT^{-1}} = T e^{BT^{-1}}$

y

**e2:** Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  entonces  $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Sea  $M_{2n \times 2n}^a(\mathbb{C}) \subset M_{2n \times 2n}(\mathbb{C})$  el subespacio real de matrices anti-hermitianas, es decir, de matrices  $A$  tales que  $A^* = -A$ . Si  $A$  es anti-hermitiana, en particular, es una *matriz normal*, por lo tanto podemos encontrar una matriz unitaria  $T$  tal que  $A = TDT^{-1}$  donde  $D$  es una matriz diagonal. De esta

forma  $(e^A)^* = (e^{TDT^{-1}})^* = (Te^D T^{-1})^* = (Te^{D^*} T^{-1}) = (e^{(T^{-1}DT)^*}) = e^{A^*}$ . Por lo tanto  $(e^A)^* = e^{A^*} = e^{-A}$ , de manera que

$$(e^A)^* e^A = e^{-A} e^A = e^0 = I_n$$

Por lo tanto, la aplicación exponencial definida antes determina por restricción una aplicación

$$\exp : M_{2n \times 2n}^c(\mathbb{C}) \rightarrow U_{2n}$$

Se tiene un isomorfismo  $H_{2n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n \times 2n}^c(\mathbb{C})$ , dado por  $C \mapsto 2\pi i C$ . Definimos la aplicación  $p_{2n} : E_{2n} \rightarrow U_{2n}$ , por  $p_{2n}(C) = \exp(2\pi i C)$ , de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 M_{2n \times 2n}^c(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\exp} & U_{2n} \\
 \cong \uparrow & & \nearrow p_{2n} \\
 H_{2n} & & \\
 \uparrow & & \\
 E_{2n} & & 
 \end{array}$$

**3.2.7 Proposición.** *La aplicación  $p_{2n}$  es suprayectiva.*

*Demostración:* Sea  $U \in U_{2n}$ ; diagonalizamos esta matriz tomando otra matriz  $T \in U_{2n}$  y el producto  $T^{-1}UT$ . Ya que los valores propios de una matriz unitaria tienen norma 1, se tiene que

$$U = T \begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\pi i \lambda_{2n}} \end{pmatrix} T^{-1} \text{ donde } \lambda_i \in I, i = 1, 2, \dots, 2n \text{ Sea}$$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$  y consideremos la matriz  $TDT^{-1}$ . Como  $T \in \mathbf{U}_{2n}$ , entonces  $T^{-1} = T^*$  y por lo tanto,  $(TDT^{-1})^* = TDT^{-1}$ , es decir,  $TDT^{-1}$  es hermitiana; por lo tanto  $TDT^{-1} \in E_{2n}$ . Luego entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} p_{2n}(TDT^{-1}) &= e^{2\pi i(TDT^{-1})} = e^{T(2\pi iD)T^{-1}} = \\ &= Te^{2\pi iD}T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\pi i\lambda_{2n}} \end{pmatrix} T^{-1} = U \quad \square \end{aligned}$$

Analicemos ahora las fibras de  $p_{2n}$ . Para esto, dada una matriz  $C \in E_{2n}$ , consideremos los subespacios  $\ker(C - I)$  y  $\ker(p_{2n}(C) - I)$ .

Si  $v \in \ker(C - I)$ , entonces  $Cv = v$  y se tiene que

$$\begin{aligned} p_{2n}(C)v &= (e^{2\pi iC})v = \left( I + 2\pi iC + \frac{(2\pi i)^2}{2!}C^2 + \dots \right)v = \\ &= Iv + 2\pi iCv + \frac{(2\pi i)^2}{2!}C^2v + \dots = \\ &= v + 2\pi iv + \frac{(2\pi i)^2}{2!}v + \dots = \\ &= \left( 1 + 2\pi i + \frac{(2\pi i)^2}{2!} + \dots \right)v = e^{2\pi i}v = v \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\ker(C - I) \subset \ker(p_{2n}(C) - I)$ . Luego si  $U \in \mathbf{U}_{2n}$ , y  $\mathcal{G}(\ker(U - I))$  denota al *espacio de Grassmann* de todos los subespacios vectoriales de  $\ker(U - I)$  podemos definir una aplicación  $g : p_{2n}^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{G}(\ker(U - I))$ , que aplica a  $C \in p_{2n}^{-1}(U)$  en el subespacio  $\ker(C - I)$ .



$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & & \lambda_{r+s+1} & & & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \lambda_{2n} & & \end{pmatrix}$$

con  $r$  unos en la diagonal y ceros desde el lugar  $r + 1$  hasta el lugar  $r + s$ .

Veremos que  $C_V = TDT^{-1}$  es la matriz deseada. Por la propiedad e2,  $e^{2\pi i D} = \widehat{D}$  de manera que  $p_{2n}(C_V) = e^{2\pi i C_V} = e^{T(2\pi i D)T^{-1}}$ ; pero por la propiedad e1,  $e^{T(2\pi i D)T^{-1}} = T e^{2\pi i D} T^{-1} = T \widehat{D} T^{-1} = U$ .

Por otra parte, probaremos que  $\varepsilon_1(C_V) = T\varepsilon_1(D)$ .

Por un lado  $\varepsilon_1(C_V) = \ker(C_V - I) = \{w \in \mathbb{C}^{2n} \mid C_V w = w\} = \{w \in \mathbb{C}^{2n} \mid TDT^{-1}w = w\}$  y por otro lado,  $T\varepsilon_1(D) = T(\ker(D - I)) = \{Tv \in \mathbb{C}^{2n} \mid Dv = v\}$

Sea ahora  $w \in T\varepsilon_1(D)$ ; entonces existe  $v \in \mathbb{C}^{2n}$  tal que  $Dv = v$  y  $Tv = w$ , debemos mostrar que  $TDT^{-1}w = w$ , pero  $TDT^{-1}w = w \Leftrightarrow TDT^{-1}Tv = Tv \Leftrightarrow TDv = Tv \Leftrightarrow Tv = Tv$ , por lo tanto  $T\varepsilon_1(D) \subset \varepsilon_1(C_V)$ . Sea ahora  $w \in \varepsilon_1(C_V)$  debemos encontrar  $v \in \mathbb{C}^{2n}$  tal que  $Dv = v$  y  $Tv = w$ , propongamos  $v = T^{-1}w$ , entonces  $(T^{-1})TDv = v$  y  $TT^{-1}w = w$ , por lo tanto  $\varepsilon_1(C_V) \subset T\varepsilon_1(D)$ .



Pero por la forma de la matriz  $D$ ,  $\varepsilon_1(D) = \{z \in \mathbb{C}^{2n} \mid z_j = 0 \text{ para } r < j \leq 2n\}$ ; como  $Te_i = v_i$  para  $i = 1, \dots, 2n$  y  $V$  es el subespacio generado por  $v_1, \dots, v_r$ , entonces  $T(\varepsilon_1(C_V)) = V$ .

Aprovechando la notación que utilizamos en la prueba de la suprayectividad de  $g$ , probaremos que  $g^{-1}$  es continua. Como  $\mathcal{G}(\ker(U - I))$  tiene la topología de la suma basta probar que  $g^{-1} : \mathbf{G}_r(\ker(U - I)) \rightarrow p_n^{-1}(U)$  es continua para  $0 \leq r \leq 2n$ . Recordemos que en el capítulo I dimos una descripción de la variedad de Stiefel de  $r$ -marcos en  $\mathbb{C}^{r+s}$ ,  $V_r(\mathbb{C}^{r+s})$ , de manera que sus elementos resultan ser clases de equivalencia de matrices de dimensión  $(r + s) \times (r + s)$  y dos matrices están relacionadas si se obtiene una al multiplicar la otra por una matriz de la forma  $1_r \times U(s)$ . Si definimos  $f : V_r(\ker(U - I)) \rightarrow p^{-1}(U)$  de manera que  $f\left(\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_{r+s} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}\right) = TDT^{-1}$ , donde  $T$  y  $D$  son las matrices antes construídas, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} V_r(\ker(U - I)) & & \\ \downarrow q & \searrow f & \\ \mathbf{G}_r(\ker(U - I)) & \xrightarrow{g^{-1}} & p_n^{-1}(U), \end{array}$$

donde  $q$  es la identificación que define a la grassmanniana. Por la propiedad universal del cociente,  $g^{-1}$  resulta ser continua.

Para verificar que la aplicación  $C \mapsto \varepsilon_1(C)$  es biyectiva, sólo se necesita mostrar que  $C = C_{\varepsilon_1(C)}$ . Para esto, observemos que si  $C$  es hermitiana, entonces  $\lambda$  es un valor propio de  $C$  si y sólo si  $e^{2\pi i \lambda}$  es un valor propio de  $e^{2\pi i C}$ . Para ver esto, sea  $R \in \mathbf{U}_{2n}$  tal que  $D = R^{-1}CR$  sea una matriz

diagonal, entonces  $R^{-1}e^{2\pi i C}R = e^{R^{-1}2\pi i CR} = e^{2\pi i R^{-1}CR} = e^{2\pi i D}$ , que es una matriz diagonal con una entrada  $e^{2\pi i \lambda}$  por cada entrada  $\lambda$  de  $D$ . Sean ahora  $C_1, C_2 \in E_n$  tales que  $e^{2\pi i C_1} = e^{2\pi i C_2}$  y  $\varepsilon_1(C_1) = \varepsilon_1(C_2)$ , luego  $C_1 = C_2$ . Para ver esto, sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  los valores propios de  $C_1$  y  $\mu_1, \dots, \mu_{2n}$  los valores propios de  $C_2$ . Como  $\varepsilon_1(C_1) = \varepsilon_1(C_2)$ , podemos suponer que  $\lambda_k = \mu_k = 1$  para  $1 \leq k \leq r = \dim \varepsilon_1(C_1)$  y  $\lambda_k \neq 1 \neq \mu_k$  si  $r < k \leq 2n$ , esto implica que  $\lambda_k = \mu_k$  para toda  $k$ , por lo que  $C_1 = C_2$ . Si en particular, aplicamos lo hecho a  $C_1 = C$  y  $C_2 = C_{\varepsilon_1(C)}$ , tenemos que  $C = C_{\varepsilon_1(C)}$ .

Luego tenemos que  $g^{-1}$  es una biyección continua de un espacio compacto en uno de Hausdorff y por lo tanto es un homeomorfismo.  $\square$

Podemos resumir lo que hemos hecho hasta ahora en el siguiente teorema

**3.2.3 Teorema.** *Sea  $E_{2n}$  el espacio de matrices hermitianas de  $2n \times 2n$  cuyos valores propios yacen en el intervalo unitario  $I$  y sea  $p_{2n} : E_{2n} \rightarrow \mathbf{U}_{2n}$  tal que  $p_{2n}(C) = e^{2\pi i C}$ . Entonces  $E_n$  es contraíble,  $p_{2n}$  es suprayectiva y la fibra sobre cada matriz  $U \in \mathbf{U}_{2n}$  es homeomorfa al espacio de Grassmann  $\mathcal{G}(\varepsilon_1(U))$*

### 3.2.2 Estabilización del caso finito

Ahora construiremos una versión estable de la aplicación construida en la sección anterior.

Definamos los encajes  $\rho_{2(n+1)}^{2n} : E_{2n} \rightarrow E_{2(n+1)}$  y  $\tau_{2(n+1)}^{2n} : U_{2n} \rightarrow U_{2(n+1)}$  de la siguiente manera:

$$\rho_{2(n+1)}^{2n}(C) = \left( \begin{array}{c|cc} C & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y

$$\tau_{2(n+1)}^{2n}(U) = \left( \begin{array}{c|cc} U & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Por la propiedad e2 tenemos que

$$p_{2(n+1)}(\rho_{2(n+1)}^{2n}(C)) = \left( \begin{array}{c|cc} e^{2\pi i C} & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} E_{2n} & \xrightarrow{\rho_{2(n+1)}^{2n}} & E_{2(n+1)} \\ p_{2n} \downarrow & & \downarrow p_{2(n+1)} \\ U_{2n} & \xrightarrow{\tau_{2(n+1)}^{2n}} & U_{2(n+1)} \end{array}$$

De esta manera, obtenemos una aplicación  $p : \text{colim}_n E_{2n} \rightarrow \text{colim}_n U_{2n}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E_{2n} & \xrightarrow{\rho_{2n}} & E \\ p_{2n} \downarrow & & \downarrow p \\ U_{2n} & \xrightarrow{\tau_{2n}} & U \end{array}$$

donde  $\rho_{2n}$  y  $\tau_{2n}$  son las aplicaciones inducidas por la composición sucesiva de las aplicaciones  $\rho_{2(n+1)}^{2n}, \rho_{2(n+2)}^{2(n+1)}, \dots$  y  $\tau_{2(n+1)}^{2n}, \tau_{2(n+2)}^{2(n+1)}$ .

Analicemos ahora las fibras de  $p$ . Si tomamos  $U \in U_{2n}$  entonces  $\varepsilon_1(\tau_{2(n+1)}^{2n}(U)) = \varepsilon_1(U) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ , y si tomamos  $C \in p_{2n}^{-1}(U) \subset E_{2n}$  entonces  $\varepsilon_1(\rho_{2n}(C)) = \varepsilon_1(C) \oplus \mathbb{C} \oplus 0$ ; por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} p_{2n}^{-1}(U) & \xrightarrow{\rho_{2(n+1)}^{2n}} & p_{2(n+1)}^{-1}(\tau_{2(n+1)}^{2n}(U)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{G}(\varepsilon_1(U)) & \xrightarrow{\tilde{j}_n^{n+1}} & \mathcal{G}(\varepsilon_1(U) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \end{array}$$

donde  $\tilde{j}_n^{n+1}$  es la aplicación que definimos en la introducción de este capítulo, es decir,  $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \supset V \mapsto V \oplus \mathbb{C}e^{n+1} \oplus 0 \subset \mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1}$ , por lo tanto, de acuerdo con lo que probamos en la introducción de este capítulo obtenemos que las fibras de  $p$  son homeomorfas a  $\mathbb{Z} \times \text{BU}$ .

### 3.2.3 Criterio de Dold

En esta sección veremos cómo la aplicación  $p : E \rightarrow U$  que construimos en la sección anterior satisface las hipótesis del criterio de Dold y por lo tanto es una casifibración. La versión del criterio de Dold que utilizaremos es la que se enunció en la sección 2.2, por lo tanto debemos verificar que las siguientes condiciones se cumplen.

1. Existe una filtración creciente  $\{F_n U\}$  en  $U$ .
2.  $F_n U - F_{n-1} U$  es distinguido para cada  $n$ .
3. Para cada  $n$  existe una vecindad  $N$  de  $F_{n-1} U$  en  $F_n U$  y una deformación

$h : N \times I \rightarrow N$  tal que  $h_0 = \text{Id}_N$  y  $h_1(N) \subset F_{n-1}U$ .

4. Existe una deformación  $H : p^{-1}(N) \times I \rightarrow p^{-1}(N)$  que cubre a  $h$  de manera que  $H_0 = \text{Id}$ , y para cada  $U \in N$ , la aplicación inducida

$$H_1 : p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(H_1(U))$$

es una equivalencia homotópica.

Probaremos en orden que se cumplen estas condiciones.

Para la condición 1, la filtración  $\{F_n U\}$  será la siguiente:

$$F_n U = \{X \mid \dim(\varepsilon_1(X)^\perp) \leq n\} \subset U$$

Definamos  $B_n = F_n U - F_{n-1} U = \{X \mid \dim(\varepsilon_1(X)^\perp) = n\}$ .

El siguiente lema nos muestra que la condición 2 se satisface holgadamente.

**3.2.3 Lema.**  $p^{-1}(B_n) \rightarrow B_n$  es una fibración de Serre.

Antes de demostrar este lema enunciaremos el teorema de descomposición espectral (la demostración se puede consultar en [Hoff]) para introducir la notación que utilizaremos durante la prueba.

**3.2.4 Teorema.** (Descomposición espectral) Sea  $T$  un operador normal sobre un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  con un producto hermitiano. Sean

$\mu_1, \dots, \mu_k$  los distintos valores propios de  $T$ . Sea  $V_j$  el espacio propio asociado al valor propio  $\mu_j$ . Entonces  $V_i \perp V_j$  si  $i \neq j$ ,  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$  y

$$T = \mu_1 \pi_{V_1} + \dots + \mu_k \pi_{V_k}$$

donde  $\pi_W$  denota la proyección ortogonal sobre el subespacio  $W \subset V$

De hecho podemos realizar esta descomposición espectral de forma continua como muestra el siguiente teorema (su demostración se encuentra en [Bhatia] corolario VI.1.6)

**3.2.5 Teorema.** Sea  $A : I \rightarrow U_n$  una trayectoria en el espacio de matrices unitarias de rango  $n$ . Entonces existen  $n$  funciones continuas  $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  tales que para cada  $t \in I$ ,  $\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}$  son los valores propios de  $A(t)$

Con esta notación, en la construcción del caso finito de la casifibración, probamos que, si  $E$  es una matriz hermitiana con valores propios en el intervalo  $[0, 1]$  y la descomposición espectral del operador  $E : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  es

$$E = \pi_W + \sum_l \mu_l \pi_{W_l}$$

donde  $W$  es el espacio propio asociado al valor propio 1, y  $\mu_l \in (0, 1)$ , entonces la descomposición espectral de  $e^{2\pi i E}$  es

$$e^{2\pi i E} = \pi_V + \sum_l e^{2\pi i \mu_l} \pi_{W_l}$$

donde  $W \subset V$ . Con esta notación daremos ahora la prueba del lema 3.2.3

*Demostración:* Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo como el siguiente:

$$(3.2.5) \quad \begin{array}{ccc} \{0\} \times I^k & \xrightarrow{\alpha} & p^{-1}(B_n) \\ \downarrow & \nearrow \omega & \downarrow \\ I^{k+1} & \xrightarrow{\beta} & B_n \end{array}$$

Debemos mostrar entonces que existe un levantamiento de la homotopía  $\beta$ . Notemos que como el producto de intervalos es compacto, existe  $m \in \mathbb{N}$  de manera que el diagrama anterior se factoriza de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} \times I^k & \xrightarrow{\alpha'} & E_{2m} \cap p^{-1}(B_n) & \hookrightarrow & p^{-1}(B_n) \\ \downarrow & \nearrow \omega' & \downarrow & & \downarrow \\ I^{k+1} & \xrightarrow{\beta'} & U_{2m} \cap B_n & \hookrightarrow & B_n \end{array}$$

Por los teoremas (3.2.4) y (3.2.5), podemos encontrar una descomposición espectral para los operadores  $\alpha'(t)$ ,  $\beta'(s, t)$ ,  $t \in I^k$ ,  $s \in I$  como

$$\alpha'(t) = \pi_{W(t)} + \sum_i \mu_i(t) \pi_{W_i(t)}$$

$$\beta'(s, t) = \pi_{V(s,t)} + \sum_i \lambda_i(s, t) \pi_{V_i(s,t)}$$

donde  $e^{2\pi i \mu_i(t)} = \lambda_i(0, t)$ ,  $W(t) \subset V(0, t)$  y  $W_i(t) = V_i(0, t)$  para toda  $t \in I^k$  y  $\lambda_i$  y  $\mu_i$  son funciones continuas. Para encontrar el levantamiento deseado definiremos el siguiente espacio. Dado un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita con un producto hermitiano, definimos

$$\text{Perp}_{i,j}(V) := \{(V', V'') \mid V', V'' \subset V, V' \perp V'', \dim V' = i, \dim V'' = j\}$$

Notemos que si  $V = \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$ , este espacio es homeomorfo al espacio homogéneo

$$\mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_i \times \mathbf{U}_j \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)},$$

es decir,

$$(3.2.5) \quad \text{Perp}_{i,j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m) \approx \mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_i \times \mathbf{U}_j \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)}$$

interpretando al cociente  $\mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_i \times \mathbf{U}_j \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)}$  de manera que  $\mathbf{U}_i$  actúe de la forma  $\mathbf{U}_i \times I_{2m-i}$ ,  $\mathbf{U}_j$  de la forma  $I_i \times \mathbf{U}_j \times I_{2m-(i+j)}$  y  $\mathbf{U}_{2m-(i+j)}$  de la forma  $I_{(i+j)} \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)}$ . Así el homeomorfismo está dado mandando a la clase de una matriz  $A$  en el cociente a la pareja  $(V', V'')$ , donde  $V'$  es el subespacio vectorial generado por sus primeros  $i$  vectores columna y  $V''$  es el subespacio vectorial generado por los vectores columna  $i+1, \dots, i+j$ .

Consideremos la siguiente aplicación:

$$P : \text{Perp}_{i,j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m) \rightarrow \text{BU}_{i+j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m)$$

dada por  $P(V', V'') = V' \oplus V''$ . Bajo el homeomorfismo dado en el capítulo 1,  $\text{BU}_{i+j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m) \approx \mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_{i+j} \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)}$ , y haciendo uso de (3.2.5) la aplicación  $P$  corresponde con la proyección natural

$$\mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_i \times \mathbf{U}_j \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)} \twoheadrightarrow \mathbf{U}_{2m}/\mathbf{U}_{i+j} \times \mathbf{U}_{2m-(i+j)}$$

y por lo tanto es una fibración.

Sea ahora  $\alpha'' : I^k \rightarrow \text{Perp}_{i,j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m)$ , donde  $i = \dim W(0, \dots, 0)$  y  $j = \dim(V(0, \dots, 0) - W(0, \dots, 0)) = \dim V(0, \dots, 0) - i$ , definida como  $\alpha''(t) =$



$(W(t), V(0, t) - W(t))$ , y sea  $\beta'' : I^{k+1} \rightarrow \text{BU}_{i+j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n)$  definida como  $\beta''(s, t) = V(s, t)$ . Así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times I^k & \xrightarrow{\alpha''} & \text{Perp}_{i,j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n) \\ \downarrow & \nearrow \omega'' & \downarrow \\ I^k & \xrightarrow{\beta''} & \text{BU}_{i+j}(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n) \end{array}$$

y como  $P$  es una fibración, existe el levantamiento  $\omega''$ . Notemos que por la conmutatividad del diagrama podemos escribir a  $\omega''$  como

$$\omega''(s, t) = (W'(s, t), V(s, t) - W'(s, t)) \quad .$$

Luego si  $\mu(s, t) \in (0, 1)$  es la solución única de la ecuación  $e^{2\pi i \mu(s, t)} = \lambda(s, t)$  y definimos  $\omega' : I^{k+1} \rightarrow E_{2m} \cap p^{-1}(B_n)$  como

$$\omega'(s, t) = \pi_{W'_0(s, t)} + \sum_i \mu(s, t) \pi_{V_i(s, t)}$$

y componiendo con la inclusión  $E_{2m} \cap p^{-1}(B_n) \hookrightarrow p^{-1}(B_n)$ , obtenemos un levantamiento en el diagrama original. □

Ahora debemos mostrar que para cada  $n$  existe una vecindad  $N_n$  de  $F_{n-1}U$  en  $F_n U$  y una deformación  $h : N \times I \rightarrow N$  tal que  $h_0 = \text{Id}$  y  $h_1(N) \subset F_{n-1}U$  y la deformación  $h$  está cubierta por una deformación  $H : p^{-1}(N) \times I \rightarrow p^{-1}(N)$  tal que  $H_0 = \text{Id}$ , y para cada  $U \in N_n$ , la aplicación inducida

$$H_1 : p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(H_1(U))$$

es una equivalencia homotópica.

Definamos la vecindad  $N_n$  de  $F_{n-1}\mathbf{U}$  en  $F_n\mathbf{U}$  como

$$N_n = \left\{ X \in F_n\mathbf{U} \mid \dim \left( \bigoplus_l \varepsilon_{e^{2\pi i t_l}}(X) \right) < n, \text{ donde } e^{2\pi i t_l} \text{ es un} \right. \\ \left. \text{valor propio de } X \text{ y } t_l \in [1/3, 2/3] \right\} \subset F_n\mathbf{U}$$

donde  $\varepsilon_\lambda(X)$  es el espacio propio de  $X$  asociado al valor propio  $\lambda$ . Notemos que en efecto  $F_{n-1} \subset N_n$ ; para esto basta mostrar que  $\bigoplus_l \varepsilon_{e^{2\pi i t_l}}(X) \subset \ker(X - I)^\perp$ . Probaremos esto para los generadores canónicos de la suma directa. Sean  $v \in \varepsilon_{e^{2\pi i t_l}}(X)$  y  $w \in \ker(X - I)$  entonces como  $Xv = \lambda v$  para  $\lambda \in e^{2\pi i [1/3, 2/3]}$  y  $Xw = w$ , tenemos que  $\langle v, w \rangle = \langle Xv, Xw \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$  por lo tanto  $\langle v, w \rangle = 0$ .

En otras palabras, podemos decir que  $N_n$  es el espacio de matrices unitarias con valores propios adicionales en una vecindad del 1 en el círculo unitario. Ahora lo que haremos es deformar esta vecindad del 1 y "levantar" esta deformación a una deformación de  $N_n$  en  $F_{n-1}$ .

Sea  $f : I \rightarrow I$  definida como

$$f(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 1/3 \\ 3s - 1 & 1/3 \leq s \leq 2/3 \\ 1 & s \geq 2/3 \end{cases}$$

y sea  $\tilde{H} : I \times I \rightarrow I$  definida como  $\tilde{H}(s, t) = tf(s) + (1-t)s$ , entonces  $f \simeq \text{Id}$  y la frontera del intervalo permanece fija a lo largo de la homotopía  $\tilde{H}$ . Luego

podemos definir  $\tilde{h} : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  de manera que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\tilde{H}_t} & I \\
 e^{2\pi i(\cdot)} \downarrow & & \downarrow e^{2\pi i(\cdot)} \\
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{h_t} & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

Ahora definiremos homotopías  $H : p^{-1}(N_n) \times I \rightarrow p^{-1}(N_n)$  y  $h : N_n \times I \rightarrow N_n$ .

Si  $A \in p^{-1}(N_n)$  tiene una descomposición espectral de la forma  $A = \sum_i \mu_i \pi_{W_i}$ , definimos

$$H(t, A) = \sum_i \tilde{H}(t, \mu_i) \pi_{W_i}.$$

Análogamente si  $U \in N_n$  y  $U = \sum_i \lambda_i \pi_{W_i}$ , definimos

$$h(t, U) = \sum_i \tilde{h}(t, \lambda_i) \pi_{W_i}.$$

Notemos que  $h_t$  es tal que  $h_0 = \text{Id}$ . Además  $h_0(N_n) \subset F_{n-1}U$  y a lo largo de toda la homotopía  $h_t(F_{n-1}U) \subset F_{n-1}U$  ya que  $\tilde{h}_t(1) = 1$ .

En otras palabras, sea  $X \in N_n$  y supongamos que  $\dim \ker(X - I)^\perp = n$  (en otro caso  $\dim \ker(X - I)^\perp < n$  y como  $\tilde{h}_t(1) = 1$  para toda  $t$ ,  $\dim \ker(h_t(X) - I)^\perp < n$ ) entonces como  $\dim(\bigoplus_i \varepsilon_{e^{2\pi i t}}(X)) < n$ , existe  $\mu \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  tal que  $\lambda = e^{2\pi i \mu}$  es valor propio de  $X$ , pero  $\tilde{h}_0(\lambda) = 1$ , luego entonces  $\dim(\ker(h_1(X) - I)^\perp) \leq n - 1$ , es decir,  $h_1(N_n) \subset F_{n-1}U$ .

Notemos además que por su definición  $h_t$  está cubierta por  $H_t$ . Consideremos ahora la aplicación inducida en las fibras  $H_1 : p^{-1}(X) \rightarrow p^{-1}(h_0(X))$ .

Para que se cumplan todas las hipótesis del criterio de Dold, debemos probar que esta aplicación es una equivalencia homotópica débil. Recordemos que  $p^{-1}(X) \approx \mathbf{BU} \times \mathbb{Z}$  y este homeomorfismo estaba dado estabilizando los homeomorfismos  $p_{2n}^{-1}(X) \approx \mathbf{BU}(\ker(X - I))$ . Además acabamos de probar que  $\ker(X - I) \subset \ker(h_1(X - I))$ , es decir  $\ker(h_1(X - I)) = \ker(X - I) \oplus [\ker(h_1(X - I)) - \ker(X - I)]$ . Por lo tanto, al estabilizar los homeomorfismos, la aplicación inducida por  $H_1, H'_1 : \mathbf{BU} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{BU} \times \mathbb{Z}$  es tal que  $(V, i) \mapsto (V \oplus [\ker(h_1(X)) - \ker(X - I)], i)$  en la componente correspondiente a  $\ker(X - I)$  y la identidad en las demás componentes. La siguiente proposición nos muestra que ésta es una equivalencia homotópica débil.

**3.2.6 Proposición.** *Dado un espacio vectorial  $W \subset \mathbb{C}^k$ , la aplicación  $\Phi : \mathbf{BU} \rightarrow \mathbf{BU}$  dada por  $V \mapsto V \oplus W$  es una equivalencia homotópica débil.*

*Demostración:* Si  $C$  es un espacio punteado compacto, la aplicación inducida por  $\Phi$  en  $K$ -teoría reducida

$$\Phi_* : \tilde{K}(C) \cong [C, \mathbf{BU}] \rightarrow [C, \mathbf{BU}] \cong \tilde{K}(C)$$

es la suma de un haz trivial y por lo tanto es un isomorfismo. En particular, si tomamos a  $C$  como  $\mathbb{S}^i$ , obtenemos la equivalencia homotópica débil.

## CAPÍTULO 4

# HACES VECTORIALES SOBRE VARIEDADES ALGEBRAICAS REALES

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección daremos una aplicación del Teorema de Periodicidad de Bott para comparar los haces vectoriales algebraicos y los haces vectoriales “continuos” sobre una variedad algebraica real afín. La herramienta que utilizaremos para realizar esta comparación es la Teoría K. A continuación daremos algunas definiciones básicas y enunciaremos algunos resultados que se utilizarán en esta sección.

4.1.1 DEFINICIÓN. Una *variedad algebraica afín*  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  es el conjunto de ceros comunes de una familia de polinomios  $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , i.e.

$$V := \mathcal{Z}(\{F_i\}_{i \in I}) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid F_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall i \in I\}$$

Notemos que si  $J$  es el ideal generado por la familia  $\{F_i\}$ , entonces  $\mathcal{Z}(\{F_i\}_{i \in I}) = \mathcal{Z}(J)$ , además, por el teorema de la base de Hilbert, podemos suponer que existen un número finito de polinomios  $\{F_1, \dots, F_r\}$  que generan al ideal  $J$ , es decir,  $V = \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(\{F_1, \dots, F_r\})$ . Notemos además que si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{Z}(\{F_1, \dots, F_r\}) = \mathcal{Z}(\{F_1^2 + \dots + F_r^2\})$ , es decir, toda variedad algebraica afín real puede definirse como el conjunto de ceros de un solo polinomio.

La unión de un número finito de variedades algebraicas afines es una variedad algebraica afín y la intersección arbitraria de variedades algebraicas afines es una variedad algebraica afín, el conjunto vacío lo podemos ver como una variedad algebraica afín ya que  $\emptyset = \mathcal{Z}(\{1\})$  y  $\mathbb{K}^n$  es una variedad algebraica afín ya que  $\mathbb{K}^n = \mathcal{Z}(\{0\})$ . En otras palabras, los complementos de variedades algebraicas afines son los abiertos de una topología del conjunto  $\mathbb{K}^n$ , esta topología es la *topología de Zariski* y consideraremos a una variedad algebraica afín  $V$  provista de la topología de subespacio.

Notemos que también le podríamos dar a  $\mathbb{R}^n$  la topología euclidiana y de esta manera una variedad algebraica podría heredar la topología de subespacio euclidiano. A lo largo de esta sección consideraremos a las variedades algebraicas afines con las dos topologías. Para distinguir entre las dos topologías de  $\mathbb{R}^n$  utilizaremos la siguiente convención; cuando hagamos mención de conceptos topológicos refiriéndonos a la topología de Zariski usaremos el subíndice  $\mathcal{Z}$  y cuando hagamos mención de conceptos topológicos refiriéndonos a la topología euclidiana usaremos el subíndice  $\mathbb{E}$ . Así por ejemplo, como un polinomio es una

función continua $_{\mathbb{E}}$  (y de hecho también continua $_{\mathbb{Z}}$ ) tenemos que los cerrados $_{\mathbb{Z}}$  son cerrados $_{\mathbb{E}}$  y los abiertos $_{\mathbb{Z}}$  son abiertos $_{\mathbb{E}}$ , pero no inversamente, ya que por ejemplo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  es cerrado $_{\mathbb{E}}$  pero no es cerrado $_{\mathbb{Z}}$  ya que el único polinomio  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que se anula en un conjunto infinito de puntos es el polinomio 0.

Mencionaremos otras diferencias entre estas topologías.  $\mathbb{R}^n$  es un espacio compacto $_{\mathbb{Z}}$  y los abiertos $_{\mathbb{Z}}$  son densos. Además  $\mathbb{R}^n_{\mathbb{Z}}$  es un espacio t1 que no es de Hausdorff. Las variedades algebraicas afines reales provistas de la topología euclidiana, no son en general variedades en el sentido euclidiano, por ejemplo,  $\mathcal{Z}(\{xy\})$  es una variedad algebraica real afín que no es variedad en el sentido euclidiano. Enunciaremos un teorema que nos muestra cómo las variedades euclidianas compactas sí pueden ser representadas como variedades algebraicas afines reales (la demostración se puede consultar en [BCR]).

**4.1.2 Teorema.** (Tognoli) *Sea  $M \subset \mathbb{R}^p$  una subvariedad $_{\mathbb{E}}$  lisa compacta. Entonces  $M$  es difeomorfa a una variedad algebraica afín de  $\mathbb{R}^p$  para alguna  $p \geq m$*

Daremos ahora algunos ejemplos de variedades algebraicas afines reales.

**4.1.3 EJEMPLO.** La esfera de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{S}^n = \mathcal{Z}(\{x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

**4.1.4 EJEMPLO.** En la sección 1.3.1 probamos que las grassmannianas son conjuntos algebraicos definidos por polinomios de grado dos.

$$\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{Z}(\{A = A^2, A = A^t, \text{tr}A = k\}) \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^n) = \mathcal{Z}(\{A = A^2, A = A^*, \text{tr}A = k\}) \subset M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$$

Se puede probar que la grassmanniana compleja no es una variedad algebraica compleja afín ([Wells] Corolario 1.12), sin embargo, sí es una variedad algebraica real afín ya que la conjugación es una operación algebraica sobre los reales.

4.1.5 DEFINICIÓN. Dada una variedad algebraica afín  $V$ , el *ideal de  $V$* ,  $I(V)$  es el ideal de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  cuyos elementos son

$$\{F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid F(v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

4.1.6 DEFINICIÓN. El *anillo de polinomios* de una variedad  $V \in \mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{P}(V)$  es el anillo  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$

4.1.7 DEFINICIÓN. Una *función regular*  $F$  en una variedad algebraica real afín  $V$  es una función  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = g/h$  donde  $g, h \in \mathcal{P}(V)$  y  $h^{-1}(0) \cap V = \emptyset$ . El conjunto de funciones regulares en una variedad algebraica real afín  $V$  es un anillo que denotaremos por  $\mathcal{R}(V)$ . Una *aplicación regular* entre dos variedades algebraicas afines reales, es una función cuyas funciones coordenadas son funciones regulares.

4.1.8 NOTA. El anillo  $\mathcal{R}(V)$  lo podemos ver como la localización de  $\mathcal{P}(V)$  en el conjunto multiplicativo

$$\{h \in \mathcal{P}(V) \mid h^{-1}(0) \cap U = \emptyset\}.$$



4.1.9 DEFINICIÓN. Un haz vectorial real prealgebraico sobre una variedad algebraica real afín  $X$  es una terna  $\xi = (E, p, X)$ , donde

- i  $E$  es una variedad algebraica real y  $p : E \rightarrow X$  es una aplicación regular.
- ii Para cada  $x \in X$ , la fibra  $p^{-1}(x)$  es un espacio vectorial real de dimensión finita.
- iii Existe una cubierta finita  $\{U_i\}_{i=1}^m$  por abiertos  $\mathcal{Z}$  tal que para cada  $i$  existe una  $n_i \in \mathbb{N}$  y un isomorfismo birregular  $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow p^{-1}(U_i)$  tal que  $p \circ \varphi_i$  es la proyección canónica de  $U_i \times \mathbb{R}^{n_i}$  sobre  $U_i$ , y para cada  $x \in U_i$ , la restricción  $\{x\} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow p^{-1}(x)$  de  $\varphi_i$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Una sección algebraica de  $\xi$  es una aplicación regular  $s : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \text{Id}_X$

Dados dos haces vectoriales reales prealgebraicos  $\xi = (E, p, X)$  y  $\xi' = (E', p', X)$  sobre  $X$ , un morfismo algebraico de haces  $\tilde{\psi} : \xi \rightarrow \xi'$  es una aplicación  $\psi : E \rightarrow E'$  tal que  $p' \circ \psi = p$  y, para cada  $x \in X$ ,  $\psi_x : p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x)$  es un morfismo lineal. Dos haces vectoriales prealgebraicos son isomorfos si existen dos morfismos algebraicos de haces tal que su composiciones sean la identidad en los dominios correspondientes.

4.1.10 NOTA. Como una aplicación regular es continua $_{\mathbb{R}}$  podemos ver a un haz vectorial prealgebraico  $\xi = (E, p, X)$  como un haz vectorial  $\xi_{\mathbb{E}} = (E_{\mathbb{E}}, p_{\mathbb{E}}, X_{\mathbb{E}})$

sobre el espacio  $X_E$ , además por la condición iii el haz  $\xi_E$  resulta ser de tipo finito, es decir, es trivial sobre una cubierta finita de  $X_E$

Los haces vectoriales prealgebraicos no son en general de tipo algebraicamente finito, es decir, no necesariamente existe un número finito de secciones algebraicas globales que generen a cada fibra como espacio vectorial. Probaremos ahora una proposición que nos dará una caracterización de los haces vectoriales algebraicos.

**4.1.11 Proposición.** *Sea*

$$E_{n,k} = \{(A, v) \in \mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = v\}$$

sea  $p_{n,k}$  la proyección canónica de  $E_{n,k}$  sobre  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$ . Entonces

$$\gamma_{n,k} = (E_{n,k}, p_{n,k}, \mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n))$$

es un haz vectorial prealgebraico sobre  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$ . El haz  $\gamma_{n,k}$  es llamado el haz universal sobre  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$

*Demostración:* Por definición  $E_{n,k}$  es un variedad algebraica real afín. Daremos trivializaciones de  $\gamma_{n,k}$  sobre abiertos  $\mathcal{Z}$  de  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ , y sea  $V_\sigma$  el subespacio vectorial generado por  $e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_k}$ . donde  $(e_1, \dots, e_n)$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $U_\sigma$  el abierto  $\mathcal{Z}$  de  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$  que consiste de las matrices  $A$  tales que la aplicación  $\varphi_A : V_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi_A(v) = A \cdot v$  es inyectiva. Este es un abierto  $\mathcal{Z}$  ya que si definimos

$P : \mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $P(A) = \sum_j \det_j^2(A \cdot e_{\sigma_1}, \dots, A \cdot e_{\sigma_k})$ , donde la suma es sobre todos los determinantes de menores de  $k \times k$  de la matriz cuyas columnas son  $A \cdot e_{\sigma_1}, \dots, A \cdot e_{\sigma_k}$ , entonces  $P^{-1}(0) = U_\sigma$ . Sea  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow V_\sigma$  un isomorfismo lineal, entonces la aplicación

$$\psi_\sigma : U_\sigma \times \mathbb{R}^n \rightarrow p_{n,k}^{-1}(U_\sigma)$$

definida por  $\psi_\sigma(A, x) = (A, A \cdot i(x))$  es un isomorfismo birregular cuya función inversa esta dada por  $(A, v) \mapsto (A, i^{-1}(\varphi_A^{-1}(v)))$ , además  $\psi_\sigma$  es lineal en cada fibra. Como los abiertos  $U_\sigma$  cubren a  $\mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$ , obtenemos la proposición.  $\square$

4.1.12 DEFINICIÓN. Un haz vectorial prealgebraico  $\xi$  sobre una variedad algebraica afín real  $X$  es un *haz vectorial algebraico* si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes.

1. Existe una aplicación regular inyectiva de  $\xi$  en un haz vectorial prealgebraico trivial.
2. Para cada  $x \in X$  existen secciones algebraicas globales  $s_1, \dots, s_k$  de  $\xi$  tales que  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  generan a la fibra  $p^{-1}(x)$  como espacio vectorial real.
3. Existe una aplicación regular  $f : X \rightarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\xi$  es isomorfo algebraicamente a  $f^*(\gamma_{n,k})$

Probaremos ahora un resultado que nos permitirá mostrar una relación que existe entre los haces vectoriales algebraicos y los haces continuos. De aquí en

adelante consideraremos únicamente variedades algebraicas afines reales que sean compactas $_{\mathbb{E}}$  y conexas $_{\mathbb{E}}$

**4.1.13 Teorema.** *Sea  $\xi = (E, p, X)$  un haz vectorial algebraico real sobre una variedad algebraica afín real  $X$ . Sea  $\sigma : X \rightarrow E$  una sección continua $_{\mathbb{E}}$  de  $\xi$ . Entonces para cada vecindad abierta $_{\mathbb{E}}$   $U$  de  $\sigma(X)$  en  $E$  existe una sección algebraica  $s : X \rightarrow E$  de  $\xi$  tal que  $s(X) \subset U$ .*

*Demostración:* Por la definición de haz vectorial algebraico existe un número finito de secciones algebraicas globales de  $\xi$ ,  $s_1, \dots, s_k$  tales que para cada punto  $x \in X$ ,  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  generan a  $p^{-1}(x)$  como espacio vectorial real. Fijemos un punto  $x \in X$  y sea  $m$  el rango del haz  $\xi$  ( $X$  es conexas $_{\mathbb{E}}$ ), entonces existen  $m$  secciones algebraicas del conjunto  $\{s_1, \dots, s_k\}$  tales que (después de reenumerarlas)  $s_1(x), \dots, s_m(x)$  son una base de  $p^{-1}(x)$ . Luego  $s_1(y), \dots, s_m(y)$  forman una base de  $p^{-1}(y)$  en una vecindad  $V_x$  de  $x$ . Por lo tanto, podemos representar a la sección continua  $\sigma$  restringida a  $V_x$  como

$$\sigma|_{V_x} = \alpha_{1,x}s_1|_{V_x} + \dots + \alpha_{m,x}s_m|_{V_x},$$

donde cada  $\alpha_{i,x}$  es una función continua de  $V_x$  en  $\mathbb{R}$ . Como  $X$  es compacta $_{\mathbb{E}}$ , usando una partición de la unidad subordinada a una subcubierta finita de la cubierta  $(V_x)_{x \in X}$ , obtenemos que

$$\sigma = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  son funciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{R}$ . De nuevo utilizando la compacidad de  $X$ , por el teorema de Stone-Weierstrass, existen funciones regulares  $\beta_1, \dots, \beta_k$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  arbitrariamente cercanas a las  $\alpha_i$  de manera que la imagen de la sección algebraica  $s = \beta_1 s_1 + \dots + \beta_k s_k$  está contenida en  $U$  □

A partir de este resultado obtenemos el siguiente teorema

**4.1.14 Teorema.** *Sean  $\xi$  y  $\eta$  dos haces vectoriales algebraicos sobre una variedad algebraica afín real  $X$ . Si  $\xi$  y  $\eta$  son isomorfos como haces vectoriales topológicos, entonces  $\xi$  y  $\eta$  son isomorfos como haces vectoriales algebraicos, es decir,  $\xi \simeq_{\text{top}} \eta \Rightarrow \xi \simeq_{\text{alg}} \eta$*

*Demostración:* Sea  $\varphi : \xi \rightarrow \eta$  un isomorfismo topológico. Entonces  $\varphi$  determina una sección continua  $\sigma$  del haz  $\mathbf{Hom}(\xi, \eta)$ . La imagen de  $\xi$  está contenida en el abierto  $_{\mathbb{E}}\mathbf{Iso}(\xi, \eta)$  que consiste de todos los isomorfismos de  $\xi$  en  $\eta$ . Como  $\mathbf{Hom}(\xi, \eta)$  es un haz vectorial algebraico (ver [Shaf] Capítulo 6, sección 1), por el teorema anterior existe un sección algebraica de  $\mathbf{Hom}(\xi, \eta)$  contenida en  $_{\mathbb{E}}\mathbf{Iso}(\xi, \eta)$ , por lo tanto  $\xi \simeq_{\text{alg}} \eta$  □

Enunciaremos dos teoremas que nos permiten dar una interpretación de los resultados anteriores en Teoría K.

**4.1.15 Teorema.** (Swan-Serre) *Sea  $X$  un espacio topológico compacto, entonces la categoría de  $C^0(X)$ -módulos proyectivos finitamente generados y la categoría de haces vectoriales sobre  $X$  son equivalentes*

Análogamente para haces vectoriales algebraicos se tiene el siguiente resultado.

**4.1.16 Teorema.** *Sea  $X$  una variedad algebraica afín real, entonces la categoría de  $\mathcal{R}(X)$ -módulos proyectivos finitamente generados y la categoría de haces vectoriales algebraicos reales sobre  $X$  son equivalentes.*

A partir de estos dos resultados y el teorema 4.1.14 obtenemos el siguiente corolario.

**4.1.17 Corolario.** *La aplicación  $\text{Proj}(\mathcal{R}(X)) \rightarrow \text{Proj}(C^0(X))$  inducida por la inclusión  $\mathcal{R}(X) \hookrightarrow C^0(X)$ , es inyectiva.*

Interpretando este resultado en Teoría  $\mathbf{K}$  reducida obtenemos el siguiente teorema.

**4.1.18 Teorema.** *El homomorfismo  $\tilde{\mathbf{K}}_0(\mathcal{R}(X)) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}_0(C^0(X))$  inducido por la inclusión  $\mathcal{R}(X) \hookrightarrow C^0(X)$ , es inyectivo.*

En otras palabras podemos decir que el conjunto de clases de isomorfismo estable de haces vectoriales algebraicos reales sobre una variedad algebraica

afín real  $X$  se inyecta como subgrupo en el grupo de Grothendieck de clases de isomorfismo estable de haces vectoriales reales topológicos.

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿Cuándo este homomorfismo es suprayectivo?

En el artículo [Boch] se prueba que si consideramos a la variedad algebraica afín real  $X$  dada por  $X = V(\langle x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1 \rangle)$  entonces  $\widetilde{K}(\mathcal{R}(X)) \cong \widetilde{K}_0(\mathcal{C}^0(X))$ , notemos que por el Teorema de Periodicidad de Bott (Real) (ver [Huse] capítulo 11) y el teorema 4.1.18 los casos en que  $n \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{8}$  son triviales ya que en ese caso  $K(\mathcal{R}(X)) \cong KO(X) \cong 0$  y por lo tanto cualquier subgrupo también es el grupo 0. En la siguiente sección construiremos un ejemplo en el que esta inyección no es suprayectiva.

## 4.2 UN CÁLCULO EXPLÍCITO

En esta sección construiremos un ejemplo en el cual la inyección entre los grupos de Grothendieck  $K(\mathcal{R}(X))$  y  $K(\mathcal{C}^0(X))$  no es una suprayección. Para este fin consideraremos ahora haces vectoriales algebraicos complejos sobre una variedad algebraica real afín. La definición de un haz vectorial algebraico complejo es totalmente análoga a la definición 4.1.12 y los resultados de la sección anterior son ciertos en el caso de haces vectoriales complejos con las siguientes modificaciones.

4.2.1 **Teorema.** *Sea  $X$  una variedad algebraica afín real.*

1. *Los grupos  $K(X)$  y  $K_0(\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}))$  son isomorfos.*
2. *Los grupos  $K^{\text{alg}}(X)$  y  $K_0(\mathcal{R}(X, \mathbb{C}))$  (considerando a  $\mathbb{C}$  como variedad algebraica real) son isomorfos.*
3. *El homomorfismo  $K_0(\mathcal{R}(X, \mathbb{C})) \rightarrow K_0(\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}))$  inducido por la inclusión  $\mathcal{R}(X, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ , es una inyección.*

En [BCR] se prueba que el anillo  $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathbb{C})$  es un dominio de factorización única, lo cual implica que cualquier haz lineal algebraico complejo sobre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es trivial ([BCR] (Capítulo 12)), además como el toro es un complejo CW de dimensión 2, obtenemos el siguiente lema.

4.2.2 **Lema.** *Todo haz vectorial algebraico complejo sobre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es trivial.*

Ahora daremos el ejemplo con el cual concluye esta tesis.

4.2.3 **EJEMPLO.** Existe una variedad algebraica  $X \subset \mathbb{R}^5$  tal que  $X \approx_{\text{top}} \mathbb{S}^2$ , y todo haz vectorial algebraico complejo sobre  $X$  es trivial.

Esto implica en particular que la inyección definida en 4.1.18:

$$\tilde{K}_0(\mathcal{R}(X; \mathbb{C})) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathcal{C}^0(X; \mathbb{C}))$$



no es una suprayección, ya que por el teorema de periodicidad de Bott, sabemos que

$$\tilde{K}_0(\mathcal{C}^0(X; \mathbb{C})) \cong \tilde{K}(X) \cong \tilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

(El primer isomorfismo está dado por el teorema de Swan-Serre, el segundo porque  $\mathbf{K}$  es funtor y el tercero por la periodicidad de Bott) y el enunciado del ejemplo implica que

$$\tilde{K}_0(\mathcal{R}(X; \mathbb{C})) \cong 0$$

Sea  $a \in S^1$  y sea  $Y = (\{a\} \times S^1) \cup (S^1 \times \{a\}) \subset S^1 \times S^1$ . Sea  $X = S^1 \times S^1 / Y$  la variedad algebraica que se obtiene al contraer la subvariedad  $Y$  en un punto  $y$  (aquí estamos afirmando que existe un modelo como variedad algebraica del espacio cociente al identificar una subvariedad algebraica; esto está probado en [BCR], proposición 3.5.6, a este proceso se le llama implosión ó “blow down”). A partir del diagrama 4.1 es claro que  $X \approx_{\text{top}} S^2$ :

Notemos que la subvariedad  $Y$  la podemos ver como el 1-esqueleto de una descomposición celular del toro, de esta manera  $\phi^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S^1 \times S^1, \mathbb{Z})$  es un isomorfismo. Sea  $\tilde{\xi}$  un haz vectorial algebraico complejo sobre  $X$  y sea  $n$  su dimensión, en [Huse] teorema 9.1.2 se prueba que  $\tilde{\xi}$  es isomorfo a  $\xi \oplus \epsilon^{n-1}$  donde  $\xi$  es un haz lineal complejo y  $\epsilon^{n-1}$  es un haz trivial. Sea  $c_1(\xi) \in H^2(X, \mathbb{Z})$  la primera clase de Chern de  $\xi$  (ver [AGP] sección 10.5). Por el lema 4.2.2 sabemos que el haz  $\phi^*(\xi)$  es trivial, en particular  $c_1(\phi^*(\xi)) = 0$ ,

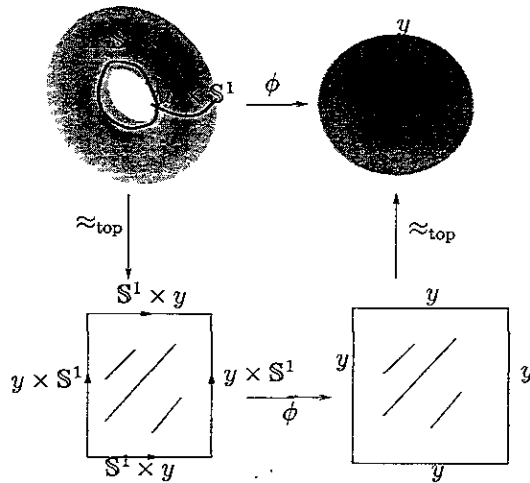


Figura 4.1: Al identificar el subespacio  $Y$  mediante la inmersión  $\phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  obtenemos un espacio homeomorfo a la esfera.

además por la naturalidad de las clases de Chern

$$\phi^*(c_1(\xi)) = c_1(\phi^*(\xi)) = 0.$$

Por lo tanto, como  $\phi^*$  es un isomorfismo, obtenemos que  $c_1(\xi) = 0$ , pero como  $\xi$  es un haz lineal esto implica que  $\xi$  es trivial, luego entonces  $\bar{\xi}$  es trivial.

## BIBLIOGRAFÍA

[AGP] M. AGUILAR, S. GITLER, C. PRIETO, Topología Algebraica. Un enfoque homotópico, McGraw-Hill Interamericana & UNAM, México, 1998

- [AP] M. AGUILAR, C. PRIETO. *Quasifibrations and Bott Periodicity*, Topology and its Applications 98 (1999)
- [BCR] J. BOCHNAK, M. COSTE, M-F. ROY. *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1998
- [Be] M. BEHRENS. *A new proof of Bott Periodicity*, Topology and its Applications, (por aparecer)
- [Bhatia] R. BHATIA. *Matrix Analysis*, Springer-Verlag 1997
- [Boch] J. BOCHNAK, M. BUCHNER, W. KUCHARZ. *Vector Bundles over real algebraic varieties*. K-Theory 3, 271-298 (1990), Erratum K-Theory 4, 103 (1990)
- [Bott] R. BOTT. *Stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math. 70 (1959) 313-337
- [Huse] D. HÜSEMOLLER. *Fibre Bundles*, Third Edition, Springer-Verlag 1994
- [Hoff] K. HOFFMAN, R. KUNZE. *Algebra Lineal*, Prentice Hall Hispanoamericana 1973
- [McDuff] D. MCDUFF. *Configuration spaces in K-Theory and Operator Algebras*, ed. by B.B. Morrel & I.M. Singer, Lect. Notes in Math. 575, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1997, 88-95
- [Shaf] I.R. SHAFAREVICH. *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1974.

[Wells] R. O. WELLS. Differential Analysis on Complex Manifolds, Springer-Verlag 1979

[Will] S WILLARD. General Topology, Addison-Wesley Publishing, 1970