24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis Teórico Práctico para la Valuación de Opciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

JOSÉ ANTONIO CLIMENT HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. LETICIA DANIEL ORANA

MÉXICO D.F. 2001

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Análisis Teórico Práctico para la Valuación de Opciones"

realizado por: Climent Hernández José Antonio

Con número de cuenta 8835710-8, pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	Act. Leticia Daniel Orana	Leticia Daniel O.
Propietario	Mat. Margarita Elvira Chávez Cano	
Propietario	Act. María Aurora Valdez Michell	
Suplente	Act. Laura Miriam Querol González	
Suplente	Act. Carlos Flavio Espinosa López	Carlos F. Espinosa L.

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. José Antonio Flores Díaz.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a: Act. Leticia Daniel Orana por su paciencia, confianza, apoyo, motivación y todos sus consejos para realizar y concluir este trabajo de la mejor manera.

Agradezco a mis padres: José Luis Climent Escápite y María Guadalupe Hernández Sánchez por brindarme la oportunidad tan maravillosa de compartir este tiempo y este espacio con todos ustedes, por su apoyo durante toda mi formación, por su compañía durante este trayecto de mi vida, por haber puesto en mí esta semilla del esfuerzo, la paciencia y el gozo, también por su grandioso esfuerzo para que pudiera darles un poco de la satisfacción que en estos instantes comparto con ellos y deseo compartir con ustedes.

A mi abuela Micaela Escápite Escápite, quien hasta estos días me sabe guiar por los caminos del conocimiento.

A Ramiro Hernández Ponce por su apoyo y motivación a que continuara mis estudios.

A mis hermanos, en quienes he visto y comprendido diferentes facetas de mí mismo.

A todos los profesores de esta Facultad quienes me dieron parte de su tiempo y de su formación para cultivar esta semilla del conocimiento.

A una hermosa persona y amiga: Mat. Margarita Elvira Chávez Cano, por su temperamento, confianza, apoyo y comprensión.

A mis asesores: Act. María Aurora Valdez Michell, Act. Laura Miriam Querol González y Act. Carlos Flavio Espinosa López por todas sus oportunas observaciones y capacidad para guiar el rumbo de este trabajo.

A una persona que le interesa la superación académica de todos los estudiantes de la Facultad de Ciencias: M. En C. Virginia Abrín Batule, por que me ha recordado que tengo que concluir este trabajo, ya que esto a su vez, me motiva a realizar otro.

A Karina Lugo Morales, por su amor y todos esos grandes y bellos instantes en los cuales me apoya y me da la fuerza necesaria para seguir adelante en mis estudios, en mi trabajo y mi en vida.

Quiero agradecer, a la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ciencias y a todas las personas que aquí desempeñan esta labor de cultivar el conocimiento, que es la herramienta más importante del hombre.

A la naturaleza, que me ha permitido conocerla un poco y me ha permitido estar en contacto con ella mediante todos mis sentidos, me ha enseñado lo valioso de todo lo que hay en ella y hasta ahora me ha permitido continuar en este vasto universo, en este tiempo y en este espacio con todos ustedes.

Espero que mis padres siempre puedan estar orgullosos de mis actos, que mis abuelos estén satisfechos con la enorme labor que realizaron mis padres al intentar educarme y que mis hijos jamás sean faltos de educación y sabiduría, para que el ciclo satisfaga y continúe con la evolución y conocimiento de la humanidad.

Por último doy las gracias a Dios por iluminar mi camino, llenar mi corazón con su amor y contar con su afable presencia en todo momento para que mi vida cumpla su propósito.

José Antonio Climent Hernández.

"... Cuando la sabiduría entre en tu corazón
y el conocimiento sea agradable a tu alma,
te aguardará la sana iniciativa,
y te preservará el entendimiento."
Proverbios 2,10-11

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La Actuaría en México nace y se mantiene como una profesión cuyas aportaciones se reflejan claramente en diferentes aspectos de la vida nacional. Nuestra profesión debe entenderse como la respuesta científica a la natural preocupación humana sobre su futuro.

Gracias a la formación que recibimos los estudiantes de Actuaría en la Facultad de Ciencias, adquiriendo conocimientos probabilísticos, matemáticos, estadísticos, financieros y sociales estamos en posibilidad de analizar la incidencia y características de diversos tipos de riesgos para prever y planear las estrategias necesarias para cubrir de la mejor forma cualquier contingencia derivada de cualquiera de estos riesgos.

En la actualidad el Actuario es capaz de incorporarse en áreas tan diversas como la investigación de operaciones, beneficios para empleados, demografía, finanzas, estadística, investigación de mercados, seguridad social, informática, administración de riesgo y planeación.

En este proyecto abordaré el tema de las de opciones financieras. La importancia del dominio de este campo del conocimiento por parte del actuario, así como mi interés por el tema son las razones fundamentales que me motivan para presentar este proyecto. Éste tiene como finalidad enunciar los antecedentes, definiciones, desarrollo y análisis teórico básico que le otorgue al estudiante (lector de esta investigación) los conocimientos necesarios para valuar un instrumento que permite asegurar el precio de un activo para una fecha específica o durante cierto periodo.

La hipótesis de este proyecto consiste en que dado un activo, éste tiene un precio en el mercado, el cual puede cambiar en cualquier momento afectando económicamente la postura del posible comprador o vendedor en un futuro próximo, si consideramos el precio al que el inversionista está en posibilidad de comprar o vender el activo (precio de ejercicio), la tasa de interés, la tasa de cambio del precio en el mercado con respecto al valor actual y el tiempo durante el cual tendrá vigencia el precio de ejercicio, entonces existe una prima equivalente a la cobertura ante el cambio desfavorable en el precio del activo.

La hipótesis propone que si un inversionista desea comprar o vender el activo en un futuro próximo y bajo esta suposición considera que puede invertir el valor actual del activo y obtener un rendimiento mínimo garantizado. Bajo esta consideración lo máximo que está dispuesto a pagar, en caso de comprar el activo, o lo mínimo que está dispuesto a recibir, en caso de vender el activo, es la suma del valor actual del activo más el rendimiento mínimo garantizado obtenido por la inversión.

De lo anterior sabe que el activo tiene un precio de mercado y dado que éste puede cambiar en cualquier momento, esto lleva a calcular la tasa de cambio con respecto al precio que posee en este momento. También conoce a que tipo de interés se tiene acceso por lo cual se puede estimar la tasa de interés mínima garantizada y en consecuencia se puede calcular el precio al que está en posibilidad de adquirir o dispuesto a vender el activo al finalizar el periodo de la inversión.

El proyecto pretende mostrar el desarrollo y análisis matemático mediante el cual se pueda conocer la prima por la cobertura ante el riesgo del cambio desfavorable que el precio del activo en el mercado puede presentar durante un periodo en el que al final de éste o durante éste, da al poseedor del contrato adquirido por el pago de la prima el derecho más no la obligación de comprar o vender el activo al precio establecido en el momento de fincar el contrato. Es decir, dependiendo del precio de mercado de un activo y un método para conocer la medida de cambio que el precio del activo tiene en el mercado, la tasa de interés libre de riesgo, el tiempo de vigencia de la cobertura y el precio que el inversionista está en posibilidad de adquirir o vender el activo, podemos analizar el desarrollo de un modelo matemático mediante el cual se puede calcular la prima equivalente al riesgo inherente en esta inversión.

Originalmente los actuarios efectuaban cálculos para compañías de seguros, determinando el valor de la cobertura por un riesgo inherente a las contingencias de la vida. La formación adquirida en la Facultad de Ciencias le da a los estudiantes de la licenciatura en Actuaría los conocimientos necesarios para desarrollar y emplear este tipo de modelos en el ámbito empresarial y académico de nuestro país.

El primer capítulo nos lleva desde los comienzos, los antecedentes históricos, poniéndonos en circunstancias reales donde el empleo de las matemáticas no era como ahora, no había computadoras, sin embargo ya se acostumbraba emitir opciones. Después, como en todos los pasajes de la historia de la humanidad, encontramos algún personaje importante, en este caso, con el riesgo, factor explícito en una inversión, numerando los tipos de riesgo y su definición. También se enuncian los tipos de mercado y los participantes del mercado, es decir, en este capítulo nos encontramos con la forma en la cual se desarrolla el mercado de opciones y los participantes que en él se desenvuelven.

El segundo capítulo nos adentra en la definición misma de una opción y cuáles son sus componentes. Nos da una descripción casi anatómica del contrato y sus características, que duración tiene, los nombres que toma de acuerdo a sus características, las posiciones que los inversionistas pueden tomar y el manejo que se le puede dar a la inversión para que todos y cada uno de los involucrados quede satisfecho con su inversión, de acuerdo al riesgo que ésta involucra. Es decir, aquí conoceremos en estructura a una opción, podremos decir si es de compra, si es de venta, que posiciones se pueden tomar, las garantías que se tienen, el riesgo que se adquiere, las posibles ganancias y pérdidas según el cambio del precio de un bien subyacente en el mercado.

Después llega el momento de conocer el comportamiento de una opción, es en este capítulo, el tercero, donde conoceremos el comportamiento de una opción. Aprenderemos de los factores que influyen en su comportamiento. Como veremos, aquí podremos conocer de su carácter, sus tendencias y preferencias. Podremos valuar una opción por medio de una ecuación, analizando los cambios que refleja el resultado si modificamos el medio en el cual se desenvuelve nuestro personaje. Una vez que sabemos del comportamiento de una opción definimos, matemáticamente, el valor que ésta toma a través del tiempo y los límites de su valor, es decir, conoceremos de sus aspiraciones, para después conocer la relación que existe entre las opciones de compra y venta y analizar el desarrollo del modelo binomial.

Como podemos ver, el contenido se hace cada vez interesante y no por esto podemos decir que más complejo. El desarrollo está basado en una función de probabilidad que nos permite saber el precio actual de acuerdo a las características del mercado y la opción misma. Aquí se dan las definiciones necesarias y el desarrollo matemático está basado en las posibles ocurrencias de cambio a la alza y baja del precio de un bien en el mercado, regresando estos cambios a través del tiempo.

Para concluir esta historia, en el último capítulo, se hace el análisis teórico de la ecuación que empleamos para conocer el carácter de nuestro personaje. Es aquí donde tal vez se necesita un poco de conocimientos de Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales y de Álgebra, sin embargo espero que las explicaciones seguidas en el presente trabajo sean lo más claras y explícitas, para que sea de su total comprensión.

No por que aquí se presente un análisis teórico, significa que la historia está completa y concluida, sino por el contrario, se pueden analizar más características de nuestro personaje principal e incluso crear otros personajes basados en el que aquí hemos de analizar. Además de que existen otros métodos para valuar opciones y otros productos derivados, los cuales proporcionan coberturas diferentes para las necesidades de los inversionistas.

Queda dada la intención explícita de que este proyecto abra las puertas del conocimiento de aquellos interesados en el mundo de la administración de riesgos y la actuaría con el objetivo de generar ideas y soluciones para respaldar las contingencias inherentes a la vida.

José Antonio Climent Hernández

"Por mi raza hablará el espíritu"
Ciudad Universitaria, México D.F., abril de 2001.

CAPÍTULO I

CAPÍTULO I

Para comenzar este primer capítulo conoceremos un poco acerca de las opciones.

I.I ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LAS OPCIONES

Las opciones como instrumentos financieros remontan a la época de los fenicios, los griegos y los romanos que ya practicaban negocios de contrato con cláusulas de opción, utilizando las mercancías que transportaban en sus vehículos terrestres y naves marítimas.

El primer mercado organizado de opciones aparece en Holanda. En este mercado, en el siglo XVII, se negociaban opciones de compra y/o venta de bulbos de tulipán, estableciendo el precio de compra o venta para una fecha futura determinada. De esta forma los comerciantes aseguraban obtener las mercancías necesarias a un precio que sabían que podían pagar para ofrecer a sus clientes precios accesibles y garantizar excelentes ventas en el futuro, es decir, aseguraban su competencia en el mercado. Por su parte los agricultores, en el caso de los tulipanes, adquirían el derecho de vender en fecha establecida su cosecha próxima a un precio mínimo que era determinado en el momento de efectuar el contrato de opción de venta. En este mismo siglo existieron fuertes variaciones en los precios lo que ocasionó el incumplimiento de contratos y obligaciones por parte de especuladores, los cuales vendieron opciones que no podían cubrir. Desgraciadamente para el mercado de opciones el incumplimiento por parte de los vendedores de opciones generó una idea que al propagarse por Europa difundió que estos mercados eran excesivamente especulativos y peligrosos debido a que no existía legislación que los rigiera, permitiendo proteger a los participantes involucrados.

Durante esta época hubo quien observando el comportamiento de las prácticas y costumbres de Bolsa de Amsterdam, publica el libro en el que presenta el primer testimonio escrito describiendo el uso de opciones sobre acciones e incluyendo el significado etimológico de la palabra **opción**.

José de la Vega[1] muestra en su obra el significado etimológico y un ejemplo del empleo de un contrato de opción.

Optio Optionis, del verbo latino, elección.

De aquí que los Flamencos lo llamaran *Opsie*, ya que queda a elección de aquel que da el premio, poder pedir o entregar la partida a aquel que lo recibe, pues desea aquel que desembolsa el premio elegir lo que más sea de su conveniencia y además dejar de elegir lo que realmente desea.

Presentan las acciones un precio de $ 580; parécenos que por el retorno que se espera de la India, aumento de la Compañía, de los géneros, de los dividendos y paz de la Europa, subirán a mucho mayor número del que logran. No me delibero, sin embargo, a comprar partidas efectivas, porque temo que si me faltaren estos designios podrá alcanzarme un despeño o sucederme un desaire.

Llégome a los que dicen que toman estas opciones, propóngoles cuanto quieren por quedarme obligados a entregar cada partida a $ 600; hasta tal plazo, ajusto el premio, escríbolo luego en el banco y sé que no puedo perder más de lo que desembolso, conque todo lo que suben de $ 600, gano, mientras que lo que bajen no me sirven de ansia para el juicio, ni de inquietud para la honra, ni de sobresalto para el sosiego; si llegando así pues a $ 600, poco más o menos, mudo de opinión y penetro que no se halla todo tan pomposo como se entendía, vendo las partidas sin peligro, porque todo lo que bajen es ganancia y como el que recibió el dinero está obligado a entregármelas al precio acordado, aunque suban de él, no puedo sentir otra pérdida que la de la opción, ni llorar otro castigo que el del premio.

En el siguiente siglo se inician negociaciones de opciones sobre las acciones de las más importantes compañías comerciales. Casualmente en 1720 el precio de las acciones de una importante compañía tiene una fuerte caída imputada a la supuesta especulación con opciones, ocasionando que el mercado de opciones quedara declarado ilegal hasta el inicio del siglo XX, sin embargo se continuó con la práctica de operaciones clandestinas sobre opciones.

---

[1] En su obra ***Confusión de Confusiones***, José de la Vega (judío español) que residía en Amsterdam, publica el primer tratado que analiza los contratos de opción. *Confusión de Confusiones* es editada en 1688, para posteriormente ser traducida a varios idiomas.

De igual forma en América, en los Estados Unidos en el año de 1936 las opciones sobre mercancías básicas conocidas como "*commodity options*", opciones sobre productos como algodón, arroz, avena, cebada, centeno, papas y trigo también quedaron prohibidas. Mientras esto ocurría en América, al otro lado del mundo, en Londres en el año de 1970 la difusión de las opciones incrementaba para incrementar el número de inversionistas.

En el año de 1968, bajo un estudio analítico en el se pretendía ofrecer contratos de futuros sobre acciones en donde el resultado no fue satisfactorio, en el **Chicago Board of Trade** se decide, de acuerdo al resultado del estudio, crear un mercado de opciones sobre acciones. De esta forma, en el año de 1972 se crea el **Chicago Board Options Exchange** el cual, en el siguiente año, comercializa opciones sobre acciones legalmente. Este mercado comenzó con 16 opciones de compra que aparecían en el índice del **New York Stock Exchange**, siendo hasta 1977 cuando se negocian las primeras opciones de venta.

Los contratos de opción comenzaron a tener un importante espacio en el volumen de operaciones de las principales bolsas de valores rápidamente, ampliando el mercado con opciones sobre contratos a futuro de T-Bonds[1], tiempo después, contratos de opciones sobre divisas y opciones sobre contratos a futuro en depósitos de eurodólares[2].

Actualmente los mercados de opciones son regulados por la **Securities Exchange Commission** y la **Commodity Futures Trading Commission**, de esta forma son protegidos los inversionistas y se estatuye el excelente manejo de los recursos financieros involucrados.

Las opciones son un instrumento financiero flexible y poderoso que permite administrar los patrones de riesgo de una manera más eficiente. En este proceso se pueden transferir los riesgos de corto a largo plazo, permitiendo que la exposición del riesgo disminuya.

---

[1] Instrumentos manejados en los Estados Unidos, los cuales reflejan las tasas de interés de largo plazo.

[2] Un eurodólar es un dólar depositado en un banco que se encuentra fuera de los Estados Unidos, aún cuando el banco sea estadounidesnse o extranjero, generando intereses. La tasa de interés del eurodólar o Eurodollar Interest Rate, llamada tasa LIBOR o London Interbank Offer Rate, es la tasa de interés generada cuando un banco deposita un eurodólar en cualquier otro banco.

En México el Mercado Mexicano de Derivados, **MexDer**, surge en 1997 ya que a finales de la década de los setenta se hace evidente la importancia de los productos financieros derivados con la negociación de instrumentos como los Petrobonos[1]. En la década de los ochenta se inició la negociación de coberturas cambiarias y a principios de la década de los noventa se inicio la operación de títulos opcionales, mejor conocidos como Warrants[2].

El éxito del mercado de Warrants, motivó al Consejo de Administración de la Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V. a dar autorización para el presupuesto de desarrollo del mercado de Futuros y Opciones. Desde 1994 se trabajó en el diseño de un mercado seguro, confiable y competitivo.

El diseño contempla la creación de una nueva Bolsa y de una Cámara de Compensación y Liquidación, **MexDer** y **Asigna**, así como sistemas que soporten la operación adecuadamente. También se adoptan los estándares internacionales para la emisión de normas.

En diciembre 31 de 1996, las autoridades del sector financiero publican de manera conjunta en el Diario Oficial las reglas a las que han de sujetarse las sociedades y fideicomisos que participen en la constitución y operación de un mercado de derivados.

Estas reglas permiten la constitución de MexDer y Asigna, además norman las actividades de los participantes del mercado.

Las reglas se complementan por un Marco de Regulación Prudencial que la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), emite en mayo 16 de 1997. Este Marco define los esquemas operativos de control de riesgos, supervisión y vigilancia que norman las actividades del nuevo mercado. La institución supervisora de las operaciones es la CNBV.

---

[1] Certificados de participación ordinarios y amortizables en un fideicomiso constituido por el Gobierno Federal, la Secretaría de Hacienda y Crédito Publico y emitidos en Nacional Financiera. El fideicomiso irrevocable cuyo patrimonio es el derecho sobre cierta cantidad de barriles de petróleo crudo, calidad Istmo, que el gobierno adquiere de Petróleos Mexicanos.

[2] Valor corporativo parecido a una opción de compra. Otorga al tenedor el derecho, mas no la obligación, de comprar directamente a la compañía emisora; acciones a un precio preestablecido, precio de ejercicio, durante un periodo determinado. Cada Warrant especifica el número de acciones que el tenedor tiene derecho a comprar, el precio de ejercicio y la fecha de expiración. También son llamados títulos opcionales.

Los principales contratos de opciones con los que MexDer inicia sus operaciones son:

a) Opciones sobre el IPC.
b) Primer paquete de opciones sobre acciones individuales.
c) Segundo paquete de opciones sobre acciones individuales.
d) Opciones sobre Dólar.
e) Opciones sobre Bonos.

OPCIÓN

Contrato mediante el cual se otorga el derecho pero no la obligación de comprar o vender determinado volumen de un activo a un precio establecido para un día estipulado o durante cierto periodo.

Además este contrato debe cumplir ciertas características que más adelante serán analizadas.

Así pues, de acuerdo a la definición anterior, una opción nos da la libertad de realizar una operación de acuerdo a nuestras necesidades en el mercado, pudiendo comprar o vender, parcial o totalmente, un bien subyacente a un precio que ya ha sido establecido para ejercerse o no en un día ya determinado o durante un periodo ya establecido.

I.II RIESGO

Exposición a determinada eventualidad económicamente desfavorable.

EVENTUAL

Sabemos que puede suceder, sin embargo no sabemos cuando.

CERTIDUMBRE

Es un estado de la naturaleza en el cual el valor que toman todas las variables es exactamente conocido.

INCERTIDUMBRE

Circunstancia en la que sólo conocemos aproximadamente el valor que tomará una variable, pero desconociendo el nivel de probabilidad.

Entonces de acuerdo a las definiciones anteriores el riesgo es un suceso en la que las variables no toman un único valor sino varios, pero la probabilidad de ocurrencia de esos valores es exactamente conocida, es decir, al suponer que precio de un bien será el mismo durante cierto periodo, estamos expuestos a una eventualidad que puede resultar económicamente desfavorable durante este periodo al cambiar el precio del bien.

Asumir un riesgo es tener la incertidumbre de que un evento o suceso pueda ocurrir, es decir, es la posibilidad de una desviación adversa del resultado que se espera. Como al asumir el riesgo de que el precio de un bien sea durante esta semana el mismo, un cambio en el precio durante este periodo me lleva a un resultado que puede ser desfavorable económicamente, ya que en caso de que el cambio incremente el precio del bien entonces no podré obtener la cantidad necesaria a menos que invierta mayor capital para adquirir el volumen necesario.

Así pues, un riesgo es el objeto de la cobertura, es el término jurídico que asume un evento aleatorio del cual puede originarse una pérdida económica. Se le da el significado de elemento de exposición.

En el caso de una inversión podemos asumirlo como la probabilidad de que el rendimiento esperado para cierta inversión no se capitalice en el tiempo estimado.

Matemáticamente se puede cuantificar como la desviación estándar que presenta la función de distribución del rendimiento esperado.

Ahora que identificamos el riesgo como un factor que existe en el medio financiero, no siendo la excepción el mercado de opciones, es necesario comentar que existen movimientos aleatorios, originados por diversas circunstancias, los cuales presentan propiedades estadísticas dando origen al riesgo de mercado.

RIESGO DE MERCADO

Incertidumbre en los resultados financieros debida a cambios en las condiciones de los mercados.

La definición anterior me indica que asumo pérdidas potenciales como consecuencia de movimientos aleatorios del mercado. La exposición a este riesgo surge de muy diversos factores que afectan los rendimientos y precios, a la correlación entre los mismos y a sus niveles de volatilidad.

Los sistemas de análisis, control y medición tienen en cuenta los movimientos predecibles de los mercados y también los inesperados en entornos de alta volatilidad e incertidumbre.

Los métodos empleados han evolucionado desde la gestión basada en los resultados por periodificación de rendimiento hacia la gestión de riesgos fundamentada en la valoración de todas las posiciones a precios de mercado. El tipo tradicional de análisis basado en la utilización del concepto de duración ha evolucionado hasta llegar a las actuales medidas de riesgo que cuantifican estadísticamente el cambio potencial del valor de mercado, fundamentándose en el análisis de volatilidades y correlaciones.

Las nuevas técnicas analizan el valor económico arriesgado como la consecuencia de los movimientos en los precios, calculando cuál sería el máximo cambio desfavorable en el valor de un activo que podría darse en determinado periodo y con un nivel de confianza adecuado. En la actualidad la volatilidad utilizada contempla los movimientos históricos de precios en cada mercado.

CLASIFICACIÓN DEL RIESGO

Es el resultado de un análisis profundo sobre los aspectos cuantitativos y cualitativos, es una herramienta que permite al inversionista determinar los riesgos asociados con las condiciones pactadas.

Esta clasificación se efectúa sobre la base de un análisis esencialmente con información que es proporcionada por los emisores de los valores clasificados (bienes subyacentes o activos). Está referida fundamentalmente con las condiciones en que fueron emitidos los valores clasificados, es una herramienta adicional para que como un participante del mercado de valores pueda tomar decisiones; tiene que ser una opinión independiente, es un juicio apreciativo que depende del conocimiento y experiencia de quien la realiza.

No puede ser entendida como una recomendación para comprar, vender o mantener algún valor, ya que no contempla la adecuación de sus características a los objetivos de inversión de un inversionista determinado, no constituye una garantía, representa una evaluación que debe ser utilizada como uno de los elementos en el proceso de toma de decisiones.

RIESGOS INTRÍNSECOS

Riesgos adyacentes a la actividad que realiza una empresa, los cuales no son susceptibles de cobertura.

a) RIESGO CREDITICIO

Surge de la posibilidad de experimentar pérdidas como consecuencia del incumplimiento de obligaciones por parte de la contrapartida.

Este tipo de riesgo se manifiesta en la concesión de créditos y préstamos, en las actividades de inversión, negociación y en la participación de transacciones de liquidación en pagos y valores, por cuenta propia y ajena.

b) RIESGO DE LIQUIDEZ

Es el riesgo derivado de la necesidad financiera, a precios razonables, las operaciones y compromisos adquiridos.

Es la incapacidad de una empresa de invertir bienes de su propiedad que no poseen liquidez.

RIESGOS EXTRÍNSECOS

Se atribuyen al comportamiento económico en general; es decir, son riesgos ajenos a una empresa la cual no tiene control sobre ellos.

a) RIESGO DE MERCADO

Es el riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de movimientos en los precios, el tipo de cambio y las tasas de interés[1].

---

[1] Tasa es la relación en que varía una magnitud económica con respecto a otra con que está relacionada. Interés es la remuneración por el uso de capital. Capital es el factor económico constituido por el dinero. Dinero es la mercancia que se puede intercambiar inmediatamente por cualquier otra, es decir, es una medida del valor de intercambio de todas las mercancias. De esta forma, si se conviene fijar el tiempo de uso de capital mediante cierto periodo, entonces definimos ***tasa de interés*** como: *Cantidad que debe retribuirse por el uso de una unidad de capital durante un intervalo de tiempo unitario.*

1º RIESGO DE PRECIOS

Es la incertidumbre en la variación del precio de materias primas, es el riesgo a cambios adversos sobre los precios de un bien subyacente.

2º RIESGO EN EL TIPO DE CAMBIO (Riesgo Cambiario)

Es el riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de movimientos en un tipo de cambio.

i) TIPO DE CAMBIO

Precio relativo que posee una moneda al ser expresado en términos unitarios de otra.

ii) TIPO DE CAMBIO CRUZADO

Tipo de cambio implícito al considerar las cotizaciones de dos tipos de cambio.

3º RIESGO EN TASAS DE INTERÉS

Es el riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de movimientos en las tasas de interés.

b) RIESGO DE PRODUCCIÓN

Es la incertidumbre sobre el volumen de compra ó venta de un bien subyacente en el futuro.

De esta forma se asienta que al constituir una empresa se tienen riesgos que forman parte de la actividad de la empresa, riesgos intrínsecos, los cuales será responsabilidad de la misma asumir con la finalidad de reducir, evitar y controlar para poder obtener un más alto rendimiento de la inversión. Análogamente se consideran los riesgos a que la empresa está expuesta por el comportamiento de factores económicos, riesgos extrínsecos, que no están sujetos a las finanzas de la empresa y por el contrario; un cambio de precios en materias, divisas ó en las tasas de interés afectan el rendimiento de la inversión y los estados financieros de la empresa.

La producción puede ser disminuida por causas ajenas a la empresa y no necesariamente por riesgos propios de la actividad empresarial. La inflación, una baja en la demanda por un producto que sustituye al de nuestra producción. Una guerra que suprime la compra, venta y producción de bienes que no son de primera necesidad, muestran otros riesgos a los que una empresa está expuesta.

VOLATILIDAD

La volatilidad de un bien subyacente es una medida de nuestra incertidumbre con respecto al rendimiento previsto para dicho activo.

Los valores típicos para la volatilidad de un activo están en el intervalo de $\sigma = 0.2$ a $\sigma = 0.4$ al año. Frecuentemente la volatilidad se expresa como un porcentaje, asumiendo que el tiempo está medido en años, esto quiere decir que el porcentaje es anual. La volatilidad del precio de un bien subyacente es la desviación estándar del rendimiento previsto para el activo en un plazo de un año cuando el rendimiento está expresado instantáneamente.

Como una aproximación, $\sigma\sqrt{t}$ es la desviación estándar del cambio proporcional del precio del activo durante el tiempo t, observando que nuestra incertidumbre acerca del precio futuro del activo, medida por la desviación estándar, incrementa con la raíz cuadrada del tiempo que esperamos transcurra, es decir, su incremento no es lineal.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La desviación estándar es la medida de la dispersión de los valores respecto a la media (valor promedio). Parte de la hipótesis de que los argumentos representan la muestra de una población.

La desviación estándar se calcula utilizando el método insesgado $n - 1$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2}{n(n-1)}}$$

Ecuación 1.1

Conociendo los valores de un bien durante cierto periodo podemos mediante esta ecuación calcular la volatilidad que el precio de este activo tiene por la periodicidad en la que los datos son considerados, es decir, si los precios de un activo son semanales como en el caso de los CETES, entonces la volatilidad será semanal.

I.IV CÁMARA DE COMPENSACIÓN

Es la entidad financiera que realiza centralizadamente la garantía del cumplimiento de los derechos para cada uno de los participantes, independientemente de la situación financiera de la contraparte, su tarea principal es llevar un registro de las operaciones efectuadas durante una jornada.

Al momento de pactar un contrato, los participantes realizan un depósito de garantía, llamado margen.

El margen tiene las siguientes finalidades:

- Sirve como garantía de cumplimiento del contrato por cada uno de los participantes. Concretamente, el margen cumple con la función de cubrir la pérdida potencial de cada uno de los participantes al vencer el contrato.
- Crear un fondo del que se nutre la Cámara de Compensación para atender las cancelaciones de contrato con ganancias.
- Permite calcular las ganancias asociadas a movimientos favorables en el precio o cubrir pérdidas cuando los movimientos en los precios son adversos a la posición que se tiene.

El margen inicial se cubre al momento en que se establece la posición. El valor neto de la posición de los compradores y vendedores es igual al importe del margen inicial depositado en la Cámara de Compensación al establecer el contrato más la suma de todas las ganancias diarias menos la suma de todas las pérdidas diarias.

Las cuentas ganadoras son acreditadas con el importe ganado y las perdedoras son cargadas con el importe perdido; la suma del total de pérdidas y del total de ganancias es cero.

Cualquier inversionista recibe un llamado cuando el valor neto depositado en la cuneta de margen cae por debajo de un nivel mínimo definido como un porcentaje del valor de la posición.

Para el caso contrario, si el mercado se mueve a favor de un inversionista y el valor neto de cuenta supera el requisito de aportación mínima, entonces el inversionista puede retirar efectivo y/o valores por un monto igual al excedente del valor neto sobre el margen inicial.

Si se presenta el caso en el cual el valor de mercado de los valores depositados en la cuenta de margen está por debajo de su margen de mantenimiento y no realiza la aportación necesaria, su contrato queda automáticamente cancelado, sin opción de recuperar las pérdidas acumuladas hasta ese momento.

Asigna, Compensación y Liquidación, provee la infraestructura y mecanismos necesarios para garantizar el registro, compensación y liquidación de las operaciones realizadas por miembros de MexDer.

Asigna se constituye como un fideicomiso de pago y como una de las instituciones de crédito fiduciario más sólidas de México. Contará con la más alta calidad crediticia del sector bursátil y financiero y tendrá facultades de autorregulación que le permitan actuar oportunamente ante eventos que pudieran alterar el mercado. Será la contraparte de todas las operaciones efectuadas en MexDer, así como la entidad que asume el riesgo crediticio de este mercado mexicano. Tendrá como contraparte a todos los participantes que asuman una posición.

I.V MERCADO

Un mercado es el lugar donde se oferta y demanda una cantidad de bienes y el precio que adquieren estos activos depende de la oferta y la demanda.

MERCADOS EXTRABURSÁTILES

Son mercados financieros en los cuales los contratos son negociados bilateralmente, ya que el riesgo de incumplimiento o riesgo crediticio es asumido por ambas partes.

Las opciones extrabursátiles son acordadas mediante un compromiso más que en el piso de remates de un mercado organizado. Una ventaja de las opciones acordadas en los mercados extrabursátiles, internacionalmente llamados Over the Counter Markets, es que pueden ser hechas a las necesidades del inversionista, es decir, no son contratos estandarizados y por tal proporcionan una cobertura más adecuada.

MERCADOS ORGANIZADOS

La principal diferencia entre los mercados organizados y los mercados extrabursátiles es que existe una institución que asume el riesgo entre las partes participantes dentro del contrato, asumiendo el riesgo crediticio del mercado de opciones.

Internacionalmente estos mercados son llamados Exchanges y existe una Cámara de Compensación, Asigna, en el mercado mexicano de opciones. Los contratos son negociados a través de Asigna y hechos de acuerdo a los lineamientos del mercado, es decir, estandarizados en términos de vencimiento, volumen, precio y tipo de contrato.

I.VI PARTICIPANTES DEL MERCADO

Los miembros, al participar en el mercado, se comprometen a establecer y cumplir los estándares, mecanismos y políticas que permitan un sano desarrollo de acuerdo a los lineamientos que dan seguridad y transparencia al mercado.

MIEMBRO

Accionista autorizado para celebrar Contratos de Opción, ya sea en carácter de Socio Liquidador o de Socio Operador.

SOCIO LIQUIDADOR

Fideicomiso y Miembro participante en el patrimonio de la Cámara de Compensación el cual tiene como finalidad celebrar y liquidar por cuenta de terceros los Contratos de Opción.

Tiene acceso al mercado organizado para la celebración de los Contratos.

SOCIO OPERADOR

Miembro cuya función sea actuar como comisionista de uno o más Socios Liquidadores, el cual tiene acceso al mercado organizado para la celebración de los Contratos.

Cuando los Socios Operadores celebran Contratos de Opción por cuenta propia, actúan como Clientes.

CLIENTE

Persona que celebra Contratos de Opción en el mercado organizado, a través de un Socio Liquidador o de un Socio Operador que actúe como comisionista de un Socio Liquidador, cuya contraparte sea la Cámara de Compensación.

FORMADOR DE MERCADO

Miembro autorizado por el mercado organizado para mantener en forma permanente y por cuenta propia Cotizaciones de compra y venta respecto del Contrato de Opción en el que se encuentre registrado.

COTIZACIÓN

Oferta formulada por un Formador de Mercado para comprar o vender una serie de Contratos de Opción, indicando exclusivamente el precio o la tasa de la oferta.

OPERACIONES POR CUENTA PROPIA

Operaciones que celebren y liquiden los Socios Liquidadores exclusivamente por cuenta de su institución de crédito, así como las que celebren los Socios Operadores como Clientes de un Socio Liquidador, incluyendo aquéllas celebradas con el carácter de Formador de Mercado.

OPERACIONES POR CUENTA DE TERCEROS

Operaciones que celebran y liquidan los Socios Liquidadores por cuenta de personas ajenas a la institución de crédito, así como las que celebran los Socios Operadores actuando como un Socio Liquidador.

OPERADOR DE PISO

Persona física contratada por un Socio Operador o por un Socio Liquidador, para ejecutar Ordenes para la celebración de Contratos de Opción por medio de las instalaciones del mercado organizado.

ORDEN

Instrucción de compra o de venta de una Clase determinada, girada por parte de un Cliente o del propio Miembro.

CLASE

Contrato de Opción que tiene como objeto o referencia un mismo Activo Subyacente.

Estos son los participantes de MexDer y algunos de los términos que determinan la función que cada uno desempeña dentro del mercado organizado. Además de los participantes podemos identificar, dentro del mercado, las posiciones que pueden tener los participantes del mercado.

ARBITRAJE

Es la compra y venta simultanea de un activo o bien subyacente para diferentes clientes, lo cual permite experimentar ganancias sin riesgos debido a la diferencia de precios.

ARBITRAJISTA

Persona o institución que efectúa operaciones de arbitraje.

COBERTURA

Protección contra cambios adversos en los precios, en las tasas ó el tipo de cambio, es decir, es la protección contra el riesgo de mercado.

PROTECTOR DE RIESGO

Institución que realiza operaciones de cobertura.

ESPECULACIÓN

Tomar ciertas posiciones con el propósito de obtener utilidades como resultado de movimientos del mercado.

ESPECULADOR

Institución que realiza operaciones de especulación.

INTERMEDIARIO

Es un corredor de Opciones comerciadas en un Mercado Organizado u Operador de Opciones del Mercado Extrabursátil.

Así pues, podemos hablar de los beneficios de las opciones negociadas en un mercado organizado, ya que presentan al Cliente, liquidez de mercado, riesgo limitado y sobre todo el cumplimiento garantizado del contrato.

A diferencia de otras inversiones donde el riesgo puede no tener límite, las opciones ofrecen un riesgo conocido para el comprador. Un comprador de opciones no tiene la posibilidad de perder más del precio de la opción. Al expirar el derecho de comprar o vender el bien subyacente a un precio establecido, la opción expirará si las condiciones para un ejercicio con ganancias o la venta del contrato no son rentables en la fecha de expiración.

De esta forma hemos conocido acerca de las opciones financieras a través de sus antecedentes históricos y las instituciones mexicanas que regulan y ponen a disposición de los interesados en esta cobertura como medio de inversión.

CAPÍTULO II

CAPÍTULO II

En este capítulo identificaremos las características involucradas para la valuación de Opciones. Las Opciones son un instrumento financiero y de igual forma que otros productos derivados nos proporcionan una herramienta en la administración de riesgos.

Una Opción es un producto derivado; por lo que su precio depende del precio de un bien subyacente, de lo anterior deducimos que su precio oscila dependiendo de la variación en el precio del activo o valor subyacente.

CARACTERÍSTICAS DE LAS OPCIONES

Recordando que una opción es un contrato mediante el cual se otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender determinado volumen de un activo a un precio establecido en o antes de un día estipulado y cumpliendo ciertas características que regirán durante la validez del contrato.

Además, este derecho es otorgado por el vendedor de la Opción.

Para adquirir este derecho, el poseedor o comprador de la Opción paga una Prima al emisor o vendedor de la Opción.

De acuerdo a lo anterior tenemos que el precio o prima de una opción depende del bien subyacente o activo, el precio de ejercicio o precio establecido y la fecha de expiración o día de vencimiento.

BIEN SUBYACENTE (Stock, Underlying Asset)

Activo sobre el cual está basado el contrato de Opción, es aquel bien o índice de referencia.

Las Opciones son instrumentos derivados porque su valor se deriva en parte del valor y características del bien subyacente. La unidad de negociación en la cual está basado un Contrato de Opción es el número de unidades del bien subyacente las cuales están representadas por la Opción.

PRECIO DE EJERCICIO (Strike Price)

Es el Precio de Liquidación al Vencimiento o precio de referencia por unidad de activo subyacente que da a conocer el mercado organizado y con base en el cual la Cámara de Compensación realiza la liquidación de los Contratos de Opción en la Fecha de Liquidación.

El Precio de Liquidación al Vencimiento se determina por unidad de activo subyacente.

Esto quiere decir que es el precio especificado al cual las unidades del bien subyacente pueden ser compradas o vendidas por el poseedor o comprador del Contrato de Opción, al ejercer su derecho con el emisor o vendedor. Es el precio, por unidad, de compra o venta del bien subyacente; garantizado al poseedor mediante el Contrato de Opción al momento de ejercer ante el emisor el derecho adquirido.

Ejercer una Opción es aplicar el derecho de comprar o vender las unidades del bien subyacente a un precio de ejercicio especificado.

PRIMA (Premium)

Es el precio por adquirir el derecho de comprar o vender el bien subyacente.

Este precio es denominado la prima de la Opción. La prima se paga al emisor o vendedor de la Opción. A cambio el emisor de la Opción se obliga a entregar o adquirir el activo al precio de ejercicio por unidad del subyacente al comprador o vendedor en caso de que éste decida ejercer el Contrato. Es el precio que tiene el Contrato de Opción.

El monto de la prima de una Opción se determina por las propiedades del bien subyacente, así como por las características de la Opción misma. Es decir, es el valor del riesgo y por tanto debe ser suficiente para compensar al emisor con relación a sus compromisos futuros.

FECHA DE EXPIRACIÓN (Expiration Date)

Fecha de vencimiento o fecha de cancelación referida exclusivamente al vencimiento del plazo del Contrato.

Es el último día en que una Opción existe. Es la última fecha en la cual puede ser ejercido el Contrato de Opción.

En consecuencia a las características de las opciones tenemos las contingencias de mayor influencia sobre el precio de una Opción son:

- Precio del Bien Subyacente.
- Precio de Ejercicio.
- Tiempo hasta la Fecha de Expiración.
- Volatilidad de Bien Subyacente.
- La Tasa de Interés Libre de Riesgo[1]
- La distribución estadística de los rendimientos.

De acuerdo a las posiciones que se puede tener como comprador de una Opción, tenemos dos posibilidades para el poseedor o comprador del Contrato de Opción y dos posibilidades para el emisor o vendedor del Contrato de Opción.

Dependiendo de la necesidad del comprador de la Opción, tenemos dos tipos de Contratos de Opción con sus respectivos derechos para el comprador y respectivas obligaciones para el emisor.

CONTRATO	POSEEDOR DE LA OPCIÓN	EMISOR DE LA OPCIÓN
Tipo Call	Derecho a comprar	Obligación de vender
Tipo Put	Derecho a vender	Obligación de comprar

II.I EL CONTRATO TIPO CALL

Otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de ejercer la Opción para comprar cierto volumen de un bien subyacente, por unidad, a un precio establecido o precio de ejercicio, para un día determinado o fecha de expiración.

[1] Es el rendimiento que proporciona una inversión ausente de riesgo, en México el poseedor de un Certificado de Tesorería (CETE) tiene una inversión libre de riesgo porque el Gobierno ampara y da garantía del título a su poseedor.

Este instrumento se puede utilizar para administrar riesgo o especular. Es útil para el poseedor o comprador de la Opción ya que se tiene garantizado el precio de liquidación al vencimiento en el caso en el cual el precio de mercado supere el precio de ejercicio. Este instrumento se utiliza cuando el precio del activo en el mercado tiene una tendencia a la alza y tenemos la necesidad de adquirir el bien subyacente.

Al comprar un Call, mientras el valor del bien subyacente sea menor al precio de ejercicio, la pérdida máxima está limitada al costo de la Opción o prima; mientras la ganancia puede ser ilimitada. Para obtener una ganancia neta el precio del activo debe superar el precio de ejercicio más el costo de la Opción.

Si el emisor vende un Call está obligado a vender al poseedor de éste, el bien subyacente al precio de liquidación al vencimiento. Considerando que el emisor de la Opción es dueño del activo, se dice que está cubierto. En la situación en la que el emisor de la Opción no está cubierto, la pérdida puede ser ilimitada; debido a que tendrá que adquirir el bien subyacente a precio de mercado y vender el activo al precio de ejercicio.

Al emitir un Call la ganancia máxima es la prima obtenida al fincar el Contrato. Así pues, el emisor solo experimenta ganancias cuando el precio del activo en el mercado está por debajo del precio de ejercicio.

Una Opción Call será ejercida siempre y cuando el precio del bien subyacente en el mercado, el día que se ejerce el Call, sea superior al precio de ejercicio. En la situación en que el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio no tiene motivo el ejercer la Opción.

II.II EL CONTRATO TIPO PUT

Otorga a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de ejercer la Opción para vender cierto volumen de un bien subyacente, por unidad, a un precio establecido o precio de ejercicio, para un día determinado o fecha de expiración.

Esta estrategia se emplea generalmente cuando el activo en el mercado posee una tendencia a la baja y poseemos el bien subyacente, por lo que deseamos venderlo. Es útil para poseedor o comprador de la Opción ya que se tiene garantizado el precio de liquidación al vencimiento en el caso en el que el precio de mercado se encuentre por debajo del precio de ejercicio.

Al comprar un Put, mientras el valor del bien subyacente en el mercado sea mayor al precio de ejercicio, la pérdida máxima está limitada al costo de la Opción o prima pagada; mientras la ganancia incrementa cuando el valor del bien subyacente en el mercado disminuye, al menos la prima pagada, por debajo del precio de liquidación al vencimiento.

Para obtener una ganancia neta el precio del activo debe estar por debajo del precio de ejercicio más el costo de la Opción.

Si el emisor vende un Put está obligado a comprar al poseedor de éste, el bien subyacente al precio de ejercicio. Considerando que el emisor de la Opción es dueño del activo, se dice que está cubierto. En la situación en la que el emisor de la Opción no está cubierto, la pérdida puede ser considerable; ya que tendrá que comprar el bien subyacente a precio de ejercicio, sin importar que tan por debajo se encuentre el precio del activo en el mercado.

Al emitir un Put la ganancia máxima es la prima obtenida al fincar el Contrato. Así pues, el emisor solo experimenta ganancias cuando el precio del activo en el mercado es superior al precio de ejercicio.

Una Opción Put será ejercida siempre y cuando el precio del bien subyacente en el mercado, el día que se ejerce el Put, sea inferior al precio de ejercicio. En la situación en que el precio de mercado es mayor que el precio de ejercicio no tiene motivo el ejercer la Opción.

Considerando la relación que existe entre el precio de liquidación al vencimiento y el precio de mercado al vencimiento de cierto bien, podemos clasificar a los contratos Call y Put de acuerdo a los estados de ejercer o de no ejercer.

AL PRECIO O EN DINERO (At the money)

En ambos contratos, cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio, Call y Put están at the money.

El contrato no se ejerce, mientras la ganancia o pérdida neta es la prima para el emisor o poseedor, respectivamente y para cada tipo de contrato.

DENTRO DE DINERO O DENTRO DE PRECIO (In the money)

a) *En el contrato Call, cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio, se puede ejercer la Opción.*

Para el poseedor la pérdida neta máxima se aproxima al precio del contrato Call, mientras la ganancia neta aumenta de acuerdo al incremento observado en el mercado, a la fecha de ejercicio, en el precio del bien subyacente.

Pérdida Neta máxima = Call – (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio)
Ganancia Neta máxima = (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio) – Call

Para el emisor la pérdida neta máxima aumenta de acuerdo al incremento observado en el mercado, a la fecha de ejercicio, en el precio del bien subyacente, mientras la ganancia neta máxima se aproxima al precio del contrato Call.

Pérdida Neta máxima = (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio) – Call
Ganancia Neta máxima = Call – (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio)

b) *En el contrato Put, cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio, se puede ejercer la Opción.*

Para el poseedor la pérdida neta máxima se aproxima al precio del contrato Put, mientras la ganancia neta aumenta de acuerdo al decremento observado en el mercado, a la fecha de ejercicio, en el precio del bien subyacente.

Pérdida Neta máxima = Put – (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio)
Ganancia Neta máxima = (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio) – Put

Para el emisor la pérdida neta máxima aumenta de acuerdo al decremento observado en el mercado, a la fecha de ejercicio, en el precio del bien subyacente, mientras la ganancia neta máxima se aproxima al precio del contrato Put.

Pérdida Neta máxima = (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio) – Put
Ganancia Neta máxima = Put – (Precio del activo en el mercado – Precio de ejercicio)

FUERA DE DINERO O FUERA DE PRECIO (Out of the money)

a) *En el contrato Call, cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio, no se puede ejercer la Opción.*

Para el poseedor la pérdida neta es el precio del contrato Call.

Para el emisor la ganancia neta es el precio del contrato Call.

b) *En el contrato Put, cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio, no se puede ejercer la Opción.*

Para el poseedor la pérdida neta es el precio del contrato Put.

Para el emisor la ganancia neta es el precio del contrato Put.

De lo anterior observamos dos posiciones para cada uno de los dos tipos de contrato.

a) Cuando el inversionista es el comprador o poseedor de la opción.
b) Cuando el inversionista es el vendedor o emisor de la opción.

II.III POSICIÓN LARGA (LONG POSITION)

El inversionista tiene el derecho de comprar un bien subyacente hasta una fecha especificada desde el momento del contrato o durante un periodo establecido si así lo desea.

Estos son los posibles pagos teniendo una posición larga según el tipo de contrato. Además de considerar bajo que circunstancias la opción puede o no ser ejercida por el poseedor.

$$\max \{ 0, \text{Precio de mercado} - \text{Precio de ejercicio} \} - \text{Call}$$

$$\max \{ 0, \text{Precio de ejercicio} - \text{Precio de mercado} \} - \text{Put}$$

Estos resultados provienen del valor de una opción al vencimiento.

$$\text{Call} = \max \{0, \text{Precio de mercado} - \text{Precio de ejercicio} \}$$

$$\text{Put} = \max \{0, \text{Precio de ejercicio} - \text{Precio de mercado} \}$$

II.IV POSICIÓN CORTA (SHORT POSITION)

El inversionista tiene la obligación de vender el bien subyacente en la fecha y precio de ejercicio si quién adquiere la posición corta pude ejercer su derecho.

Estos son los posibles pagos teniendo una posición corta según el tipo de contrato.

$$\text{Call} - \max \{0, \text{Precio de mercado} - \text{Precio de ejercicio} \}$$

$$\text{Call} + \min \{0, \text{Precio de ejercicio} - \text{Precio de mercado} \}$$

$$\text{Put} - \max \{0, \text{Precio de ejercicio} - \text{Precio de mercado} \}$$

$$\text{Put} + \min \{0, \text{Precio de mercado} - \text{Precio de ejercicio} \}$$

Aquí se observa el empleo de los mínimos, si se toma en consideración el inverso aditivo, el mínimo tomara este papel y no alterará el resultado del pago en cualquiera de los dos tipos de contrato o la posición que se tenga.

Si se hace un análisis en ambas posiciones, larga y corta, tienen el comportamiento de suma cero ya que lo que gana una posición, la otra lo pierde.

Las ganancias del inversionista que adquiere una posición larga son las pérdidas del inversionista que tiene una posición corta y las pérdidas del inversionista que adquiere una posición larga son las ganancias del inversionista que tiene una posición corta.

Ahora que hemos podido enunciar las propiedades, características, posiciones, los tipos de acuerdo a las necesidades, los derechos, las obligaciones y los estados de una opción; podemos analizar de acuerdo a estas circunstancias en que el inversionista se puede encontrar y anexando las variables necesarias para presentar una tabla en la que observamos todas las posibilidades que se pueden dar en cuestión a los contratos de opción.

A continuación se generalizan los casos en que se puede encontrar un inversionista, considerando las dos posiciones que puede tomar y los dos tipos de opción que puede elegir, además de que se presenta el estado de pérdidas y ganancias tomando en cuenta las siguientes variables.

S = **Precio de ejercicio**
M = **Precio del bien subyacente al vencimiento.**
C = **Precio de la opción o prima call**
P = **Precio de la opción o prima put**

CONTRATO TIPO CALL

POSICIÓN LARGA

Si	Derecho	Ganancias Totales	Pérdidas Totales	Ganancias Netas	Pérdidas Netas
$M<S$	No ejerce	0	C	0	C
$M=S$	No ejerce	0	C	0	C
$S<M<S+C$	Ejerce	$(M-S)$	C	0	$C-(M-S)$
$M=S+C$	Ejerce	$(M-S)$	C	0	0
$M>S+C$	Ejerce	$(M-S)$	C	$(M-S)-C$	0

POSICIÓN CORTA

Si	Derecho	Ganancias Totales	Pérdidas Totales	Ganancias Netas	Pérdidas Netas
$M<S$	No ejerce	C	0	C	0
$M=S$	No ejerce	C	0	C	0
$S<M<S+C$	Ejerce	C	$(M-S)$	$C-(M-S)$	0
$M=S+C$	Ejerce	C	$(M-S)$	0	0
$M>S+C$	Ejerce	C	$(M-S)$	0	$(M-S)-C$

CONTRATO TIPO PUT

POSICIÓN LARGA

Si	Derecho	Ganancias Totales	Pérdidas Totales	Ganancias Netas	Pérdidas Netas
$M<S$	No ejerce	0	P	0	P
$M=S$	No ejerce	0	P	0	P
$S<M<S+C$	Ejerce	$(S-M)$	P	0	$P-(S-M)$
$M=S+C$	Ejerce	$(S-M)$	P	0	0
$M>S+C$	Ejerce	$(S-M)$	P	$(S-M)-P$	0

POSICIÓN CORTA

Si	Derecho	Ganancias Totales	Pérdidas Totales	Ganancias Netas	Pérdidas Netas
$M<S$	No ejerce	P	0	P	0
$M=S$	No ejerce	P	0	P	0
$S<M<S+C$	Ejerce	P	$(S-M)$	$P-(S-M)$	0
$M=S+C$	Ejerce	P	$(S-M)$	0	0
$M>S+C$	Ejerce	P	$(S-M)$	0	$(S-M)-P$

Tabla 2.1

II.V OPCIÓN AMERICANA

El tenedor de la opción americana tiene el derecho de ejercer su opción antes o en la fecha de expiración. De otra manera, la opción expirará sin valor y deja de existir como un instrumento financiero.

Actualmente, todas las opciones que son negociadas en bolsas de derivados en Estados Unidos son estilo americano.

II.VI OPCIÓN EUROPEA

Es aquella que únicamente puede ser ejercida en su fecha de vencimiento.

Es por esta razón que las opciones americanas deben ser más apreciadas que las europeas. Suponiendo que ambas opciones, sobre el mismo bien subyacente, el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de expiración; la opción americana nos otorga el derecho de ejercer, ya sea nuestra compra o venta del bien subyacente, durante todos los días hasta antes de la fecha de expiración, lo cual puede ser una ventaja para el inversionista.

Así entonces, una opción estilo americana debe de tener un costo al menos igual al de una opción estilo europea análoga, ya que si es ejercida hasta la fecha de vencimiento, sin importar las variaciones en el mercado, se comporta idéntica. En caso de ser ejercida antes, esto ya es una ventaja sobre la opción europea.

II.VII OPCIÓN DE ENTREGA FÍSICA

El poseedor de la opción tipo call tiene el derecho a recibir físicamente el bien subyacente que àmpara el contrato, mientras que el poseedor de la opción tipo put tiene el derecho a entregar físicamente el bien subyacente contratado al ejercer la opción.

II.VIII OPCIÓN DE REEMBOLSO EFECTIVO

El poseedor tiene el derecho a recibir el pago en efectivo, resultado de la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del bien subyacente en el mercado al momento de ejercer la opción.

II.IX DEPÓSITO DE GARANTÍA (MARGEN)

Deposito realizado por cada participante a la cámara de compensación para garantizar el cumplimiento de los derechos de los participantes.

En el capítulo anterior hablamos de la cámara de compensación, entidad financiera que realiza centralizadamente la garantía del cumplimiento de los derechos para cada uno de los participantes. Para poder garantizar el cumplimiento de los derechos de cada participante, cada uno de ellos realiza un depósito de garantía, llamado margen, al cerrar un contrato de opción.

La mayoría de las bolsas de derivados utilizan un sistema de margen en el cual el único participante que está obligado a hacer el depósito de garantía es el emisor de la opción. Pero cabe señalar que existen otros sistemas de margen donde el emisor y el comprador están sujetos al depósito de garantía.

CUENTA DE MARGEN (Margin Acount)

Deposito en efectivo o de un bien subyacente equivalente al valor del total del bien subyacente amparado por el contrato.

Dentro de los mercados organizados se requiere que los emisores de opciones depositen cierta cantidad de dinero o de un bien subyacente, equivalente al valor del bien subyacente en el mercado, en una cuenta de margen.

Así los miembros, ya sean corredores de bolsa (brokers), socios liquidadores o socios operadores; participan en el patrimonio de la cámara de compensación, ya que los corredores y socios a su vez deben mantener una cuenta de margen con la cámara de compensación, protegiendo a los clientes que son los poseedores de las opciones.

MARGEN INICIAL (Initial Margin)

Cantidad de dinero o de un bien subyacente, equivalente al valor del bien subyacente en el mercado, que el emisor de una opción debe depositar en la cuenta de margen al momento de cerrar el contrato con el comprador.

MARGEN DE MANTENIMIENTO (Maintenance Margin)

Cantidad de dinero o de un bien subyacente, equivalente, mínima establecida para asegurar que el balance, en la cuenta de margen, no sea negativo.

MARGEN REQUERIDO (Margin Required)

Es el margen inicial con que se abren las operaciones en los días siguientes al cierre del contrato. Este margen depende del movimiento del precio en el mercado.

MARGEN DE VARIACIÓN (Variation Margin)

Es la cantidad extra de dinero o de un bien subyacente, equivalente, depositada por el inversionista para mantener la cuenta de margen.

Si el inversionista, por alguna razón, no actualiza la cuneta de margen, el corredor de bolsa o socio liquidador cierra la posición vendiendo el contrato.

LLAMADA A MARGEN (Margin Call)

En el momento en que la cuenta de margen de un inversionista está por debajo del margen de mantenimiento, éste recibe una llamada a margen siempre que sea necesario que actualice la cuenta de margen inicial para el día siguiente.

REVALORIZAR (Marking to Market)

Al finalizar un día de operaciones, la cuenta de margen refleja el estado de pérdidas y ganancias del emisor.

Este estado de pérdidas y ganancias depende directamente del precio del bien subyacente al cierre de la jornada, del precio de ejercicio establecido en el contrato y del volumen de contratos que el inversionista haya emitido.

De esta manera la cámara de compensación, se encarga día a día de proteger a los tenedores de los contratos de opción. Este sistema considera que al ser la pérdida máxima, para el poseedor de una opción, el pago del valor de la prima; solamente el emisor de la opción es quién debe hacer el depósito en garantía, ya que es el único que está expuesto a un mayor riesgo, es decir, debe mantener una inversión segura en la cuenta de margen manejada por el socio operador, socio liquidador o corredor de bolsa ya que así se garantiza que el emisor de la opción no cesará su pago en caso de que la opción sea ejercida.

Para calcular el monto del depósito de garantía que ha de hacer el emisor de un contrato de opción depende de dos circunstancias.

1) Emisión de opciones al descubierto (Naked Options)
2) Emisión de opciones cubiertas (Covered Options)

OPCIÓN AL DESCUBIERTO (Naked Options)

Si el emisor del contrato de opción no posee físicamente el bien subyacente se dice que la opción se encuentra al descubierto.

Así pues, no tiene una posición compensatoria[1] sobre el bien subyacente sobre el cual está emitiendo al contrato de opción.

Es decir, una opción emitida al descubierto, en caso de que el poseedor esté en su derecho de ejercer el contrato y así decida hacerlo, el emisor está en la situación de adquirir el bien subyacente en el mercado, ya que no lo posee físicamente, para entregarlo al poseedor de la opción.

Para encontrar el margen inicial, considerando que el inversionista emite opciones al descubierto, tenemos.

MI = Margen Inicial
m = Margen Mínimo
Mm = Margen de Mantenimiento
Mv_n = Margen de variación la cierre de la jornada n
T = Total de contratos multiplicados por el número de bienes que ampara un lote
S = Precio de ejercicio
M = Precio de Mercado

En el caso de la T, si un inversionista emite 10 contratos de algún índice y cada uno de estos contratos se negocia sobre lotes de un ciento de estos bienes, el resultado será un millar.

[1] El emisor debe compensar su posición corta al emitir la opción, adoptando una posición larga para el bien subyacente, en la situación en la que emite una opción tipo call. El emisor debe compensar su posición larga al emitir la opción, adoptando una posición corta para el bien subyacente, en la situación en la que emite una opción tipo put.

En el caso de una emisión tipo Call.

$$MI = max\ \{\ T(\ Call + 0.2\ M - max\ \{\ S - M\ , 0\ \}\ )\ , T(\ Call + 0.1\ M\ )\ \}$$

En el caso de una emisión tipo Put.

$$MI = max\ \{\ T(\ Put + 0.2\ M - max\ \{\ M - S\ , 0\ \}\ )\ , T(\ Put + 0.1\ M\ )\ \}$$

Del margen inicial se desprende el margen mínimo.

En el caso de una emisión tipo Call.

$$m = T(\ Call + 0.1\ M\ )$$

En el caso de una emisión tipo Put.

$$m = T(\ Put + 0.1\ M\ )$$

Para calcular el margen de mantenimiento.

En el caso de una emisión tipo Call.

$$Mm = T(\ 0.15\ M - max\ \{\ S - M\ , 0\ \}\ )$$

En el caso de una emisión tipo Put.

$$Mm = T(\ 0.15\ M - max\ \{\ M - S\ , 0\ \}\ )$$

Y este resultado sirve para asegurar que el balance de la cuenta de margen no sea negativo, protegiendo a los poseedores de los contratos de opción.

Para calcular el margen de variación consideramos que para el día de operaciones anterior, se calculó el margen inicial $\boldsymbol{MI_0}$, ahora, mediante las mismas operaciones calculamos el margen inicial para el día consecutivo, $\boldsymbol{MI_1}$, mediante el cálculo de la diferencia de $\boldsymbol{MI_1 - MI_0}$, obtenemos el margen de variación.

$$Mv_i = MI_i - MI_{i-1}$$

En caso de ser positivo, se hará la llamada a margen al emisor para que cubra mediante dinero o un bien subyacente, equivalente, la cantidad resultante. En el caso de ser negativa, se libera esta cantidad del depósito de margen inicial de la jornada anterior.

OPCIÓN CUBIERTA (Covered Options)

Si el emisor del contrato de opción posee físicamente el bien subyacente se dice que la opción se encuentra cubierta.

Así pues, tiene una posición compensatoria sobre el bien subyacente sobre el cual está emitiendo al contrato de opción.

Así que al emitir opciones cubiertas, el riesgo que se adquiere es menor, ya que la peor parte es vender parte del bien subyacente que ya se posee a un precio inferior del que hay en el mercado.

Es por esta razón que al emitir opciones cubiertas, en el caso en que todos los contratos emitidos estén cubiertos, no se requiere hacer el depósito de garantía.

En caso de que el emisor decida manejar una cuenta de margen, con el fin de mantener sus bienes, se considera el 50 % del valor del bien subyacente para el margen inicial y el 25 % del valor del bien para el margen de mantenimiento.

En el caso de la emisión de una opción tipo Call

$$MI = T(\,0.5\,M + max\ \{\,M - S\,,0\,\} - Call\,)$$

En el caso de la emisión de una opción tipo Put

$$MI = T(\,0.5\,M + max\ \{\,S - M\,,0\,\} - Put\,)$$

Para el cálculo del margen inicial, que se acaba de presentar, se considera que el emisor decide liquidar el bien mediante una cuenta de margen y utiliza las ganancias recibidas por la emisión de los contratos de opción.

Hasta este momento se han descrito las características que posee un contrato de opción. El bien subyacente, el precio de ejercicio, la fecha de expiración y la prima o precio del contrato son las características de una opción y con ellas iniciamos el camino hacia dos métodos de valuación según el tipo de opción, call en el caso de compra o put en el caso de venta y el estilo americano para una cobertura durante el periodo de vigencia del contrato o europeo solo para una cobertura en la fecha de vencimiento.

Sabemos que el bien subyacente tiene un precio en el mercado y que nuestra inversión a corto o mediano plazo nos permite acordar un precio al cual deseamos comprar o vender en el mercado dicho activo, este es el precio de ejercicio. También acordamos si la cobertura para el precio de ejercicio es durante todo el periodo o solo en la fecha de vencimiento. Pretendemos que nuestra inversión obtenga una tasa de interés mínima durante el periodo de vigencia del contrato. Ya que el precio del bien subyacente en el mercado cambia a través del tiempo, entonces tiene una volatilidad que es factible de calcular.

Entonces, dadas las características (*Bien subyacente, precio de ejercicio, fecha de expiración, prima*) y los factores (*Precio del bien subyacente en el mercado, precio de ejercicio, tiempo remanente, volatilidad del precio del bien subyacente, tasa de interés libre de riesgo*) analicemos el comportamiento de la prima considerando el movimiento de estos factores y suponiendo que el cálculo de la prima puede ser efectuado mediante alguna ecuación.

CAPÍTULO III

CAPÍTULO III

En el presente capítulo fincaremos las bases para presentar y analizar dos métodos mediante los cuales podemos obtener el valor teórico de un contrato de opción.

Este capítulo representa el análisis y enfoque matemático para posteriormente presentarnos la solución al problema planteado al comenzar este proyecto. Es el momento en el cual nos incorporamos al análisis de las hipótesis, ecuaciones, lemas y teoremas necesarios para poder conocer la prima para la cobertura del riesgo que tiene un inversionista que desea comprar o vender un bien a cierto precio durante cierto periodo o al final de éste.

Comenzaremos por el estudio de las propiedades que serán empleadas como base de las hipótesis necesarias para el análisis del modelo binomial y posteriormente abordaremos el modelo Black–Scholes.

Iniciemos el camino enumerando los factores que ejercen mayor influencia sobre el cálculo para determinar el monto de la prima.

III.I FACTORES DE INFLUENCIA SOBRE EL MONTO DE LA PRIMA

El propósito de este proyecto es establecer, de acuerdo a las características del contrato, un método que represente por medio de un modelo matemático, la forma de calcular el valor del contrato de opción y para esto hay que considerar los siguientes factores y analizar como influyen en el precio del contrato.

III.I.I FACTORES EXÓGENOS

Son aquellos determinados por los mercados ya que son ajenos a las características específicas del contrato.

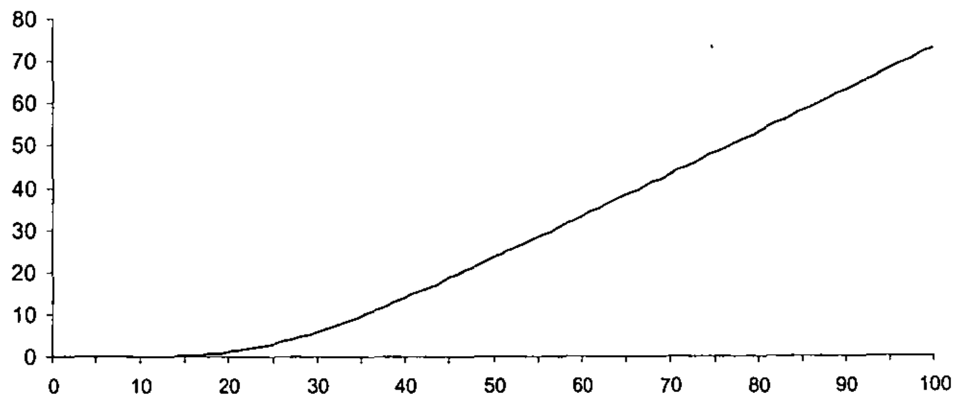
PRECIO SUBYACENTE

Es el precio actual del bien subyacente en el mercado.

El movimiento en el precio del bien subyacente presenta una influencia marcada en el valor de un contrato de opción. Un movimiento a la alza en el precio del activo provoca que el costo de una opción tipo call aumente, mientras el costo de una opción tipo put disminuya. Inversamente, un movimiento a la baja en el precio del activo genera que el costo de una opción tipo call disminuya, mientras el costo de una opción tipo put aumente.

Considerando la relación entre el precio del bien subyacente en el mercado y el precio de ejercicio, la utilidad obtenida depende directamente de la diferencia entre estos dos precios. Cabe recordar que un contrato de opción puede tener tres posturas para un inversionista y dependiendo de la situación, la utilidad neta puede ser positiva o negativa. Es de aquí donde el cambio en el precio del bien subyacente provoca un cambio en el monto de la prima (Considere el cambio como un movimiento positivo o negativo).

Precio del contrato tipo call

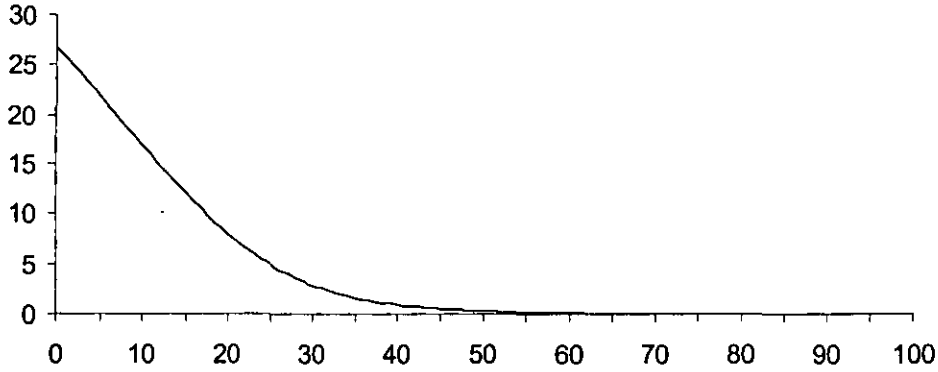


Gráfica 3.1

En la gráfica 3.1 se observa el comportamiento del precio de un contrato tipo call cuando el precio de mercado cambia y los otros factores permanecen constantes.

En la gráfica 3.2 se observa el comportamiento del precio de un contrato tipo put cuando el precio de mercado cambia y los otros factores permanecen constantes.

Precio del contrato tipo put



Gráfica 3.2

VOLATILIDAD DEL PRECIO DEL BIEN SUBYACENTE

La volatilidad[1] *del precio del bien subyacente representa el potencial que posee el mismo para experimentar cambios dentro de cierto periodo.*

También se puede explicar como la manifestación de la información en el mercado. Así pues, la volatilidad nos muestra el rango posible de movimientos en el precio del activo. Estadísticamente es la dispersión del movimiento en el precio del activo.

Mientras mayor sea la probabilidad de observar cambios en el precio de un activo, éste se dice más volátil.

De esta forma observamos que un aumento de volatilidad genera un aumento en las primas de ambos tipos de opción y esto se debe a que a mayor volatilidad, la probabilidad de cambio en los precios hasta la fecha de vencimiento es mayor, aumentado el riesgo de pérdidas para el emisor, mientras el comprador supone una probabilidad mayor de ejercer la opción y obtener un beneficio.

La volatilidad es una variable estocástica, por lo que no es posible predecir su comportamiento.

[1] La volatilidad de un bien subyacente es una medida de nuestra incertidumbre con respecto al rendimiento previsto para dicho activo.

En el mercado de opciones se emplea la desviación estándar de los movimientos en el precio del bien subyacente para medir la volatilidad, traduciendo los aumentos de ésta en el aumento del precio de la opción y la disminución en la volatilidad se traduce en la disminución del precio.

Un registro de los movimientos de precio de un bien subyacente puede ser empleado para calcular la volatilidad. El precio de un activo es usualmente observado en intervalos de tiempo iguales, es decir, diario, semanal, mensual.

Recordando el primer capítulo, $\sigma\sqrt{t}$ es la desviación estándar del cambio proporcional del precio del activo durante el tiempo t, incrementado con la raíz cuadrada del tiempo que esperamos transcurra.

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2}{n(n-1)}}$$

Ecuación 3.1

Seleccionando un valor adecuado para n el resultado es preciso. Cuantos más datos sean considerados, esto conducirá a una mayor precisión, sin embargo σ cambia con el tiempo y datos demasiado antiguos pueden ser relevantes para predecir el futuro.

Un contrato que parece funcionar razonablemente bien es al usar precios diarios al cierre de jornada con datos de los más recientes 90 hasta 180 días.

De acuerdo al tipo de cambio peso dólar del mes de marzo de 1997 se calculará la volatilidad para esta paridad.

Día	Paridad	Día	Paridad	Día	Paridad	Día	Paridad
1	$ 7.8358	9	$ 8.0092	17	$ 7.9789	25	$ 7.8958
2	$ 7.8358	10	$ 8.0152	18	$ 7.9920	26	$ 7.8905
3	$ 7.9740	11	$ 7.9590	19	$ 7.9492	27	$ 7.8905
4	$ 8.0117	12	$ 7.9780	20	$ 7.9223	28	$ 7.8905
5	$ 7.9737	13	$ 7.9611	21	$ 7.9223	29	$ 7.8905
6	$ 8.0438	14	$ 7.9987	22	$ 7.9223	30	$ 7.8905
7	$ 8.0092	15	$ 7.9987	23	$ 7.9223	31	$ 7.9126
8	$ 8.0092	16	$ 7.9987	24	$ 7.9407		

Tabla 3.1

En la tabla 3.2 se muestran los resultados de los cálculos necesarios para conocer la volatilidad del precio de un bien subyacente.

Día	Precio del Activo al Cierre	Precio Relativo	Interés Diario
1	$ 7.8358		
2	$ 7.8358	1.00000	0.00000
3	$ 7.9740	1.01764	0.01748
4	$ 8.0117	1.00473	0.00472
5	$ 7.9737	0.99526	-0.00475
6	$ 8.0438	1.00879	0.00875
7	$ 8.0092	0.99570	-0.00431
8	$ 8.0092	1.00000	0.00000
9	$ 8.0092	1.00000	0.00000
10	$ 8.0152	1.00075	0.00075
11	$ 7.9590	0.99299	-0.00704
12	$ 7.9780	1.00239	0.00238
13	$ 7.9611	0.99788	-0.00212
14	$ 7.9987	1.00472	0.00471
15	$ 7.9987	1.00000	0.00000
16	$ 7.9987	1.00000	0.00000
17	$ 7.9789	0.99752	-0.00248
18	$ 7.9920	1.00164	0.00164
19	$ 7.9492	0.99464	-0.00537
20	$ 7.9223	0.99662	-0.00339
21	$ 7.9223	1.00000	0.00000
22	$ 7.9223	1.00000	0.00000
23	$ 7.9223	1.00000	0.00000
24	$ 7.9407	1.00232	0.00232
25	$ 7.8958	0.99435	-0.00567
26	$ 7.8905	0.99933	-0.00067
27	$ 7.8905	1.00000	0.00000
28	$ 7.8905	1.00000	0.00000
29	$ 7.8905	1.00000	0.00000
30	$ 7.8905	1.00000	0.00000
31	$ 7.9126	1.00280	0.00280

Tabla 3.2

Para el cálculo del Precio Relativo

$$P_r = \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

Ecuación 3.2

Para el cálculo del Rendimiento Diario

$$r = Ln\left(\frac{M_i}{M_{i-1}}\right) = Ln(P_r)$$

Ecuación 3.3

donde

P_r = Precio relativo
M_i = Precio del bien subyacente al cierre del i-ésimo día
r = Rendimiento diario

Considerando que σ es la volatilidad, recordando la ecuación 3.1, en donde el rendimiento diario es la variable; tememos que

$$\sum_{i=1}^{30} x^2 = 0.00062 \quad \text{y} \quad \left(\sum_{i=1}^{30} x\right)^2 = 0.00908$$

Al substituir obtenemos

$$\sigma = \sqrt{\frac{30(0.00062) - 0.00908}{30(29)}} = 0.00462$$

Resultado que representa la volatilidad del mes de marzo de 1997 que es del **0.46 %** diaria.

Esto debido a que los datos con los que se obtiene esta variable aleatoria están considerados en días consecutivos, lo que nos lleva a que el estimador nos indique el rango en la misma unidad de tiempo.

Si suponemos que tenemos 252 días comerciales durante el año, aproximadamente, esto nos proporciona un estimado para la volatilidad anual, $\sigma\sqrt{t}$, que al substituir obtenemos un estimador de la volatilidad anual.

$$0.00462\sqrt{252} = 0.07340$$

En donde la volatilidad estimada es **7.34 %** anual.

El error estándar de este estimador puede calcularse mediante la siguiente ecuación.

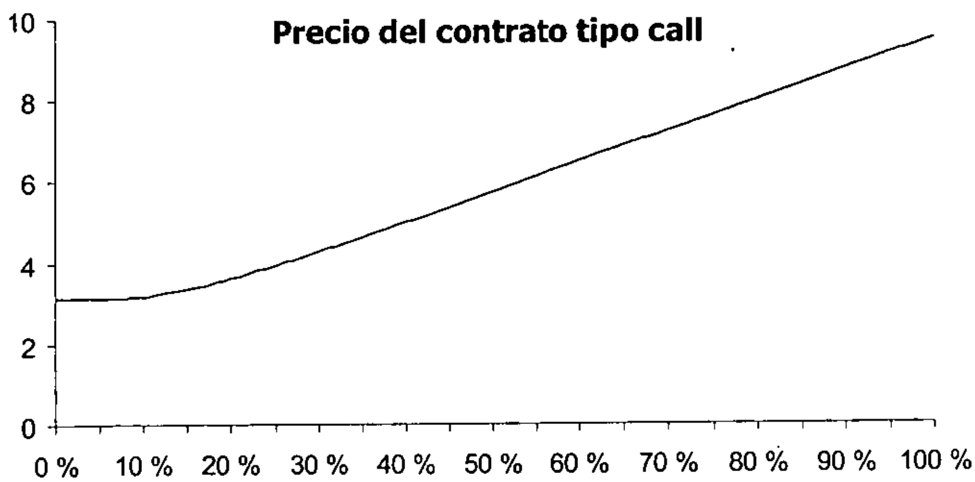
$$\varepsilon = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$$

Ecuación 3.4

Sustituyendo tenemos

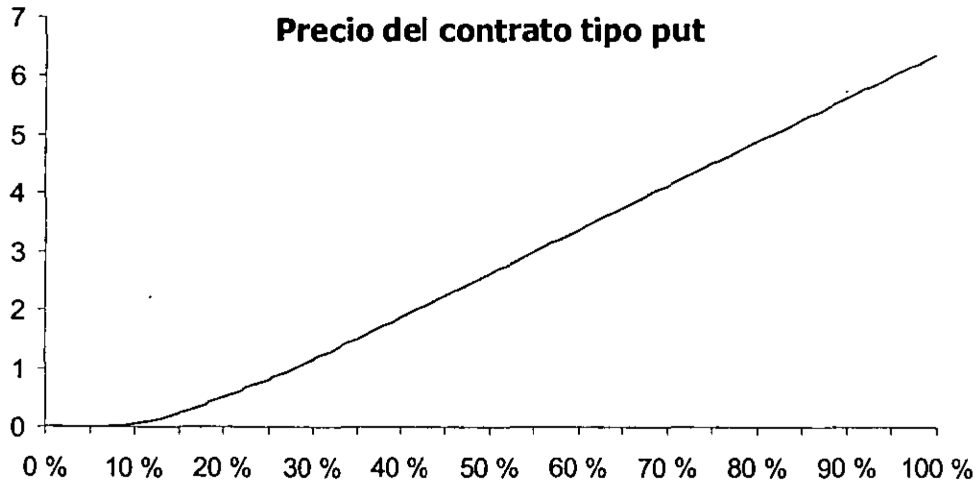
$$\varepsilon = \frac{0.07340}{\sqrt{2(30)}} = 0.00948$$

Un error estándar del **0.95 %** anual.



Gráfica 3.3

En la gráfica 3.3 se observa el comportamiento del precio de un contrato tipo call cuando la volatilidad cambia y los otros factores permanecen constantes.



Gráfica 3.4

En la gráfica 3.4 se observa el comportamiento del precio de un contrato tipo put cuando la volatilidad cambia y los otros factores permanecen constantes.

El precio de mercado \$ 30.00, M=30; el precio de ejercicio \$ 30.00, S=30; la tasa de interés libre de riesgo 22.053 % anual, i=0.22053 y el tiempo de vencimiento 6 meses; son los factores fijos considerados para el cálculo de los contratos, variando la volatilidad del precio del activo.

DIVIDENDOS (Sólo en contratos sobre acciones)

Utilidades que obtienen las empresas y que reparten entre sus accionistas.

Hasta ahora hemos supuesto que el bien subyacente sobre el cual se emite el contrato de opción no paga dividendos. En la práctica no es siempre el caso.

Aquí extenderemos nuestro análisis suponiendo que los dividendos pagados, al poseedor del activo, durante la vigencia del contrato pueden ser calculados con certeza. Ya que los contratos de opción, habitualmente, proporcionan una cobertura menor a los ocho meses, la suposición es razonable.

El día crítico para la valuación de una opción es el día en el cual fueron pagados los dividendos. En esta fecha el precio del bien subyacente disminuye por el monto neto del dividendo[1]. El efecto es la reducción en el precio del contrato tipo call y el incremento en el contrato tipo put.

Considerando los dividendos y el consecuente decremento en el precio del bien subyacente, los dividendos incrementan la prima del contrato tipo put, ya que el emisor considera que el precio del activo en el mercado bajará al ser pagados los dividendos. Los dividendos generan el decremento en la prima del contrato tipo call, ya que de antemano, el emisor sabe del decremento del precio del activo en el mercado al ser pagados los dividendos a los poseedores de las acciones correspondientes.

De aquí podemos interpretar el rendimiento que otorgan los dividendos en las acciones para otro tipo de activos que también otorgan, por así decirlo, dividendos.

Los contratos de opción sobre divisas, un incremento en el rendimiento de la divisa incrementa la prima de la opción tipo put y disminuye la prima de la opción tipo call ya que de igual forma el emisor considera el cambio que tendrá la divisa otorgando el equivalente al dividendo, reflejado en el tipo de cambio de la divisa.

DIVIDENDOS EN OPCIONES EUROPEAS

Las opciones europeas pueden ser analizadas suponiendo que el precio del bien subyacente es la suma de dos componentes. Un componente sin riesgo que será usado al pagar los dividendos conocidos durante la vigencia del contrato y un componente de riesgo. El componente sin riesgo en cualquier instante es el valor presente de todos los dividendos considerados durante la vigencia del contrato, descontados a partir de la fecha de pago de cada uno de los dividendos hasta el presente, día de emisión del contrato, a la tasa interés libre de riesgo.

En el momento que sea empleada la ecuación de Black & Scholes, el precio de mercado, M, en el día de la emisión del contrato es considerado igual que el componente de riesgo.

[1] Por razones de impuesto, el precio del bien subyacente puede bajar por algo menos que el monto neto del dividendo. Tomando en cuenta este fenómeno, debemos interpretar el mundo de los dividendos en el contexto del precio del contrato como la reducción en el precio del bien subyacente, causada por el dividendo, el día en el que se efectuó el pago del dividendo. Entonces, si un dividendo de $ 1.00 por acción es anticipado y el precio de la acción baja sólo el 80 % del dividendo, el dividendo debería suponerse de $ 0.80 para propósitos del análisis.

Operacionalmente esto significa que la ecuación podrá ser empleada al reducir el precio del bien subyacente por el valor presente de todos los dividendos conocidos durante la vigencia del contrato, haciendo el descuento desde el día del pago de cada uno de los dividendos a la tasa de interés libre de riesgo. Un dividendo es incluido en los cálculos, si solo si el día de pago de dividendos se encuentra dentro de la vigencia del contrato.

DIVIDENDOS EN OPCIONES AMERICANAS

Cuando un bien subyacente otorga dividendos, en algunas ocasiones, el contrato está dentro de dinero justo antes de que sean pagados.

La razón es fácil de comprender. El dividendo hará que el bien subyacente y el contrato tipo call sean menos valiosos. Si el dividendo es lo suficientemente grande y el contrato tipo call está lo suficientemente dentro de dinero, generando en ese instante excelentes beneficios al poseedor, esto puede ser suficiente para renunciar al tiempo restante de cobertura que el contrato otorga al tenedor, evitando, así, los efectos adversos del dividendo sobre el precio del bien subyacente.

En la práctica, las opciones tipo call son más comúnmente ejercidas instantes antes del cierre del día de pago de dividendos.

Aquí haremos un análisis indicando porque ocurre esto y derivaremos las condiciones bajo las cuales un pronto ejercicio puede ser obtener el mejor beneficio.

Aquí describiremos un procedimiento aproximado, sugerido para valuar contratos tipo call, estilo americano en bienes que pagan dividendos.

PROCEDIMIENTO APROXIMADO

El procedimiento envuelve calcular los precios de dos opciones estilo europeo.

1) Una opción europea que expira en la misma fecha que la opción estilo americana que deseamos valuar.

2) Una opción europea que expira justo antes del último pago de dividendos que ocurra durante la vigencia del contrato.

El precio de mercado, M; el precio de ejercicio, S; la tasa de interés libre de riesgo, i; y la volatilidad, σ, tienen los mismos valores que los utilizados en la opción que se desea valuar, es decir, son los mismos que posee el contrato americano que necesitamos valuar.

Para el segundo punto lo que cambiará es la fecha de vencimiento, en el caso en que el último día de pago de dividendos sea antes de la fecha de vencimiento original.

El precio de la opción estilo americano será igual al mayor de estos dos precios de contratos estilo europeo.

EL PRONTO EJERCICIO EN OPCIONES AMERICANAS SOBRE BIENES QUE PAGAN DIVIDENDOS

En este análisis veremos bajo que condiciones debe tener un pronto ejercicio un contrato sobre un bien que otorga dividendos.

Suponemos que existen n días de pago de dividendos durante la vigencia del contrato y los n pagos son anticipados, considerando que los n instantes inmediatos anteriores en que el bien subyacente pagará dividendos son $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Donde $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ y los dividendos pagados en estos tiempos serán denotados $D_1, D_2, \ldots, D_n$ respectivamente.

Empecemos por considerar la posibilidad de ejercer la opción justo antes del pago del último dividendo, es decir en el instante t_n. Si el contrato es ejercido, en caso de estar dentro de dinero, en este instante el inversionista recibe

$$M(t_n) - S$$

Esta es la diferencia entre el precio de mercado, $M(t_n)$ en el instante t_n, menos el precio de ejercicio, S. Recordando que a diferencia de la ganancia neta máxima no se ha restado el costo del contrato.

En caso de que el contrato no sea ejercido, el precio del bien deja

$$M(t_n) - D_n$$

Además, considerando que el contrato aún puede ser ejercido durante la diferencia de tiempo que existe entre la fecha de vencimiento, T, y el instante t_n. Un límite inferior para el precio del contrato tipo call, en el instante t_n es

$$M(t_n) - D_n - S e^{-i(T-t_n)}$$

Ya que se descuenta, con la tasa de interés libre de riesgo, el valor presente del precio de ejercicio que tendría al ejercerse en la fecha de vencimiento.

Si consideramos el caso en el que el límite inferior del valor del contrato tipo call, en el instante t_n, es mayor o igual que el valor que puede tener el contrato si se ejerciera en el instante t_n, tenemos que

$$M(t_n) - D_n - S e^{-i(T-t_n)} \geq M(t_n) - S$$

Al despejar

$$D_n \leq S\,(1 - e^{-i(T-t_n)})$$

Ecuación 3.5

Y al tomar en consideración que

$$\lim_{t_n \to T} \left(e^{-i(T-t_n)}\right) = 1$$

Así, cuando la fecha del último dividendo se encuentra próxima a la fecha de vencimiento, el dividendo estaría acotado superiormente por un número que se aproxima a cero, lo cual indica que no es el mejor beneficio ejercer el contrato en el instante t_n. Pero sí por el contrario

$$D_n > S\,(1 - e^{-i(T-t_n)})$$

Ecuación 3.6

Donde se puede mostrar que esto es siempre el mejor beneficio al ejercer en el instante t_n, con un precio de mercado, $M(t_n)$, lo suficientemente alto. Esto se debe a que el contrato se encuentra dentro de dinero y además, la diferencia entre el precio de ejercicio y su valor presente es menor que el dividendo. La desigualdad es más probable de ser satisfecha cuando el cierre del día de pago de dividendos esta lo suficientemente cerca de la fecha de expiración, es decir, cuando t_n se aproxima lo suficiente a T y el dividendo es grande.

Considerando el instante t_{n-1}, el penúltimo día de pago de dividendos durante la vigencia del contrato, si el contrato es ejercido en el instante t_{n-1}, el inversionista recibe

$$M(t_{n-1}) - S$$

Esta es la diferencia entre el precio de mercado en el instante t_{n-1}, $M(t_{n-1})$ menos el precio de ejercicio, S.

En caso de que el contrato no sea ejercido, el precio del bien deja

$$M(t_{n-1}) - D_{n-1}$$

Además, considerando que el contrato aún puede ser ejercido durante la diferencia de tiempo que existe entre la fecha del último pago de dividendos, t_n, y el instante t_{n-1}. Un límite inferior para el precio del contrato tipo call, en el instante t_{n-1} es

$$M(t_{n-1}) - D_{n-1} - Se^{-i(t_n - t_{n-1})}$$

Si consideramos el caso en el que el límite inferior del valor del contrato tipo call, en el instante t_{n-1}, es mayor o igual que el valor que puede tener el contrato si se ejerciera en el instante t_{n-1}, tenemos que

$$M(t_{n-1}) - D_{n-1} - Se^{-i(t_n - t_{n-1})} \geq M(t_{n-1}) - S$$

Al despejar tenemos

$$D_{n-1} \leq S\,(1 - e^{-i(t_n - t_{n-1})})$$

Lo cual indica que no es el mejor beneficio ejercer el contrato en el instante t_{n-1}. Pero en el caso contrario

$$D_{n-1} > S\,(1 - e^{-i(t_n - t_{n-1})})$$

Se puede mostrar que esto es siempre el mejor beneficio al ejercer en el instante t_{n-1}, con un precio de mercado, $M(t_{n-1})$, lo suficientemente alto.

Similarmente para toda $k < n$

$$D_k \leq S\,(1 - e^{-i(t_{k+1} - t_k)})$$

Ecuación 3.7

La desigualdad de la ecuación 3.7 es aproximadamente equivalente a

$$D_k \leq Si\,(t_{k+1} - t_k)$$

Lo cual indica que no es el mejor beneficio ejercer el contrato en el instante t_k. Pero en el caso contrario

$$D_k > S\,(1 - e^{-i(t_{k+1} - t_k)})$$

Ecuación 3.8

Se puede mostrar que esto es siempre el mejor beneficio al ejercer en el instante t_k, con un precio de mercado, $M(t_k)$, lo suficientemente alto.

Podemos concluir este análisis diciendo que en la mayoría de las circunstancias, el tiempo necesario para considerar el pronto ejercicio de un contrato americano tipo call, es hasta el último día de pago de dividendos. Además, si la desigualdad de la ecuación 3.7 se satisface para los valores $i=1,2,...,n-1$ y la desigualdad de la ecuación 3.5 también se satisface, entonces podemos estar seguros que el pronto ejercicio del contrato jamás será el mejor beneficio para el poseedor de la opción.

Para poder ejemplificar el cálculo de una opción sobre un bien que otorga dividendos a los poseedores, analizaremos el problema con los precios de acciones de la empresa Peñoles S.A. de C.V.; considerados hasta fecha reciente y suponiendo que el emisor no cuenta con datos históricos demasiado antiguos, pero sin embargo si conoce las fechas de pago de dividendos y el monto de estos. El ejemplo aquí expuesto y para su posible solución no se consideran aquellos gastos de comisión, impuesto y otros que en el manejo real deberían ser anexados. Además, se emplearan ecuaciones que no han sido analizadas, pero esto no significa que esto será omitido, por el contrario, es el tema que será tratado en este capítulo.

Ejemplo

Considera un contrato de opción estilo europeo y de tipo call, sobre acciones de Peñoles con pago de dividendos en dos meses, miércoles 28 de abril de 1999; en cinco meses, martes 27 de julio de 1999; en ocho meses, el martes 26 de octubre de 1999. El dividendo en cada fecha es de \$ 0.75 para el poseedor del bien. El precio de mercado \$ 30.00, $M=30$; el precio de ejercicio \$ 30.00, $S=30$; la volatilidad del bien subyacente 53.194 % anual, $\sigma=0.53194$; la tasa de interés libre de riesgo 22.053 % anual, $i=0.22053$ y el tiempo de vencimiento 8 meses.

Es decir, $T=\dfrac{8}{12}$

El valor presente de los dividendos es

$$D_1 e^{-it_1}+D_2 e^{-it_2}+D_3 e^{-it_3}$$

En donde $t_1 = \frac{2}{12}$ ya que el pago del primer dividendo será pagado en dos meses y la tasa de interés libre de riesgo es anual, $t_2 = \frac{5}{12}$ ya que el segundo dividendo será pagado en cinco meses y $t_3 = \frac{8}{12}$ ya que el tercer dividendo será pagado en ocho meses.

En caso de que el tiempo de expiración del contrato fuera de seis meses, el último dividendo no estaría contemplado para el cálculo.

Sustituyendo tenemos

$$0.75\,e^{-\frac{0.22053\ (2)}{12}} + 0.75\,e^{-\frac{0.22053\ (5)}{12}} + e^{-\frac{0.22053\ (8)}{12}} = 2.05455$$

Para poder valuar el contrato empleando la ecuación de Black & Scholes será necesario restar al precio de mercado, M, el valor presente de todos los dividendos. De esta forma, M=27.94545 es el precio de mercado que debe ser empleado en la ecuación.

En este momento aplicaremos la ecuación que analizaremos, más adelante, con el fin de explicar la solución teórica del problema, ya que no están consideradas comisiones, retención de impuestos y otros posibles gastos en que incurriría un inversionista.

Para el cálculo de un contrato tipo call

$$c = MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)$$

Para el cálculo de un contrato tipo put

$$p = Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)$$

Donde T es el tiempo de cobertura o tiempo de expiración del contrato, t es el tiempo transcurrido y $(T-t)$ es el tiempo remanente, es decir, el tiempo restante para la fecha de expiración.

Por definición t es menor o igual a T.

En donde

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{M}{S}\right) + (T-t)\left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{Ln\left(\frac{M}{S}\right) + (T-t)\left(i - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Al sustituir

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{27.94545}{30}\right) + \frac{8}{12}\left(0.22053 - \frac{0.53194^2}{2}\right)}{0.53194\sqrt{\frac{8}{12}}} = 0.39232$$

$$d_2 = 0.39232 - 0.53194\sqrt{\frac{8}{12}} = -0.04200$$

Hasta aquí tenemos a todas las variables necesarias para valuar el precio de una opción, sea tipo call o tipo put. Sin embargo, ahora es necesario un paréntesis para conocer acerca de una función que se encuentra inmersa en las ecuaciones, respectivas, para la valuación de contratos tipo call y put. Esta función involucra la probabilidad de ocurrencia de las variables d_1 y d_2, conocida como Función de Distribución Normal, $N(x)$.

La función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulativa para una variable aleatoria estandarizada normal.

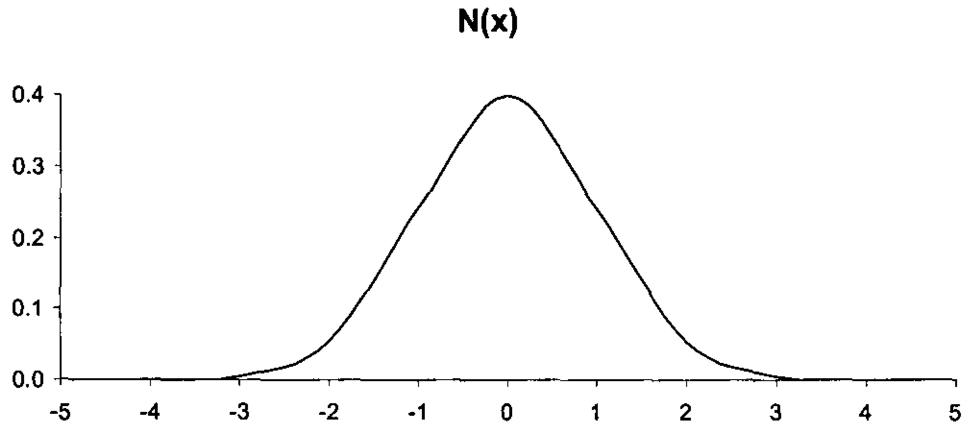
En otras palabras, es la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal, sea menor que x.

Es posible que una distribución normal proporcione de manera razonable una buena aproximación alrededor de la media de una variable aleatoria.

La función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Esta función puede ser evaluada en todos los valores reales, además, como se observa en la gráfica 3.5, es simétrica con respecto a la media, μ, que en este caso es cero.



Gráfica 3.5

Cuando la desviación estándar, σ, es uno, como en este caso, la función es mesocúrtica, es decir, es una normal estandarizada. Cuando $\sigma < 1$, entonces es leptocúrtica, es decir, la función tiene a la mayoría de los datos concentrados cerca de la media y es más picuda. Cuando $\sigma > 1$, entonces es platicúrtica, es decir, la función tiene una gran dispersión con respecto a la media y es más aplanada que la mesocúrtica.

La función de distribución $N(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

Esta función nos proporciona la probabilidad de que una variable aleatoria con media μ y desviación estándar σ ocurra cuando la variable aleatoria X es menor que x.

Consideramos a la variable normalizada

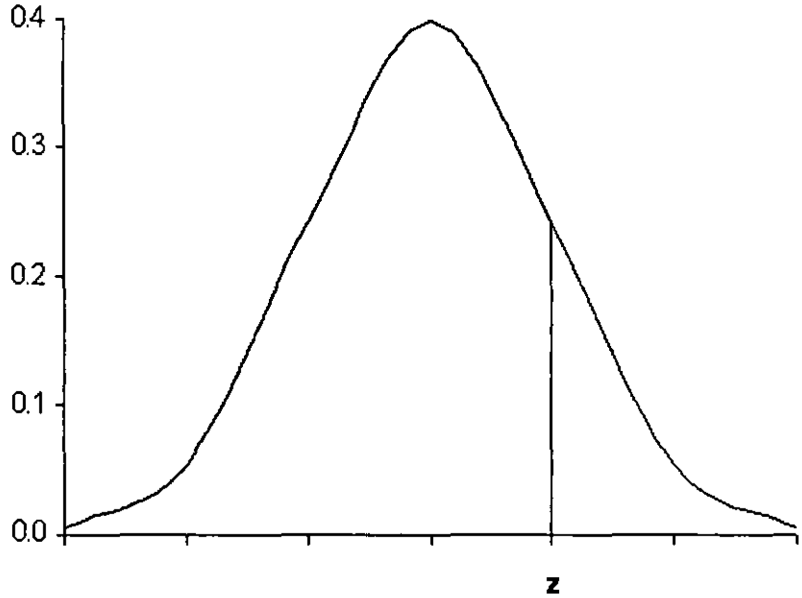
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Entonces la media μ de la variable aleatoria Z es cero y la desviación estándar σ es igual a la unidad, resultando la función de densidad para Z

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

La función de distribución correspondiente para Z

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$



Gráfica 3.6

Este resultado se conoce frecuentemente como la función o la distribución de densidad normal tipificada.

De esta forma

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0.39232} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.65259$$

$$N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0.04200} e^{\frac{u^2}{2}} du = 0.48325$$

$$N(-d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0.39232} e^{\frac{u^2}{2}} du = 0.34741$$

$$N(-d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0.04200} e^{\frac{u^2}{2}} du = 0.51675$$

Ahora contamos con los valores necesarios para calcular los precios de los contratos tipo call y tipo put, considerando que el bien subyacente pagará dividendos y compararlos con el cálculo, suponiendo que no pagarán dividendos.

Recordando

$$c = MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)$$

$$p = Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)$$

Sustituyendo

$$c = 27.94545(0.65259) - 30(0.48325)e^{-\frac{0.22053(8)}{12}} = 5.72164$$

$$p = 30(0.51675)e^{-\frac{0.22053(8)}{12}} - 27.94545(0.34741) = 3.67448$$

Aquí tenemos el precio de los contratos tipo call y tipo put, estilo europeo.

Comparando, bajo las mismas suposiciones que propone el ejemplo a excepción del pago de dividendos, este resultado deberá ser menor en el contrato tipo call y mayor en el contrato tipo put. Ya que efectivamente, la consecuencia del pago de dividendos es la disminución de la prima tipo call y el incremento en la prima tipo put.

Suponiendo que el bien subyacente no pagará dividendos durante la vigencia del contrato, el precio de mercado, M=30, permanece igual.

Empleando el mismo método para el cálculo de d_1 y d_2, obtenemos

$$c = 30(0.71078) - 30(0.54829)e^{-\frac{0.22053\ (8)}{12}} = 7.12367$$

$$p = 30(0.45171)e^{-\frac{0.22053(8)}{12}} - 30(0.28922) = 3.02197$$

Que serían las primas correspondientes, emitidas sobre un bien subyacente que no paga dividendos durante la vigencia del contrato.

Considerando el mismo ejemplo pero suponiendo que el contrato es estilo americano comenzamos por emplear el procedimiento aproximado, que utiliza el cálculo de dos contratos estilo europeo.

1) Una opción europea que expira en la misma fecha que la opción estilo americana que deseamos valuar.

2) Una opción europea que expira justo antes del último pago de dividendos que ocurra durante la vigencia del contrato.

El primer cálculo ya está realizado y para el segundo caso se consideran las mismas variables que en ejemplo anterior pero el valor presente de todos los dividendos, solo contempla a los dos primeros dividendos, ya que el cálculo es sobre una opción que expira justo antes del último pago de dividendos.

Por lo cual $T = \frac{8}{12}$ y el valor presente de los dos dividendos

$$0.75\left(e^{-\frac{0.22053\,(2)}{12}} + e^{-\frac{0.22053\,(5)}{12}}\right) = 1.40709$$

De aquí el precio de mercado

$$M = 30 - 1.40709 = 28.59291$$

Y los precios de los contratos

$$c = 28.59291(0.67186) - 30(0.50428)\,e^{-\frac{0.22053\,(8)}{12}} = 6.15041$$

$$p = 30(0.49572)\,e^{-\frac{0.22053(8)}{12}} - 28.59291(0.32814) = 3.45580$$

Ya que la aproximación sugiere tomar el mayor de los dos cálculos, los precios de un contrato estilo americano son:

$$C = 28.59291(0.67186) - 30(0.50428)\,e^{-\frac{0.22053\,(8)}{12}} = 6.15041$$

$$P = 30(0.51675)\,e^{-\frac{0.22053(8)}{12}} - 27.94545(0.34741) = 3.67448$$

Sobre el mismo ejemplo observaremos los beneficios bajo el pronto ejercicio de un contrato estilo americano.

$$S(1 - e^{-i(t_2-t_1)}) = 30(1 - e^{-\frac{0.22053\,(3)}{12}}) = 1.60921$$

Cumpliéndose la ecuación 3.5, por lo que no se debería ejercer el contrato en el primer pago de dividendos.

$$S(1 - e^{-i(t_3-t_2)}) = 30(1 - e^{-\frac{0.22053\,(3)}{12}}) = 1.60921$$

Cumpliéndose, de igual forma, la ecuación 3.5, por lo que no se debería ejercer el contrato en el segundo pago de dividendos.

$$S(1-e^{-i(T-t_3)})=30(1-e^{0.22053\,(0)})=0$$

Cumpliéndose la ecuación 3.8, así que si el contrato se encuentra lo suficientemente dentro de dinero debería ser ejercido justo antes del último pago de dividendos.

Como se pudo observar a través del ejemplo, la mejor fecha para ejercer es cuando nos encontramos cerca de la fecha en que expira el contrato, pero posiblemente, si el contrato se encuentra dentro de dinero en alguna de las fechas anteriores y el poseedor considera que es el mejor momento y sus ganancias podrían superar a las que podría obtener, si espera hasta la proximidad de la maduración del contrato, entonces ejercerá su derecho.

Se resolverá el mismo problema, considerando que el tiempo en que expira el contrato es de seis meses.

Considera un contrato de opción estilo europeo y de tipo call, sobre acciones de Peñoles con pago de dividendos en dos meses, en cinco meses y ocho meses. El dividendo en cada fecha es de \$ 0.75 para el poseedor del bien. El precio de mercado \$ 30.00, es decir, M=30; el precio de ejercicio \$ 30.00, S=30; la volatilidad del bien subyacente 53.194 % anual, σ = 0.53194; la tasa de interés libre de riesgo 22.053 % anual, i=0.22053 y el tiempo de vencimiento 6 meses.

Es decir, $T=\dfrac{6}{12}$

El valor presente de los dividendos es

$$0.75\left(e^{-\frac{0.22053\,(2)}{12}}+e^{-\frac{0.22053\,(5)}{12}}\right)=1.40709$$

Así, el precio de mercado

$$M=30-1.40709=28.59291$$

Y por lo tanto el precio del contrato con estilo europeo

$$c=28.59291(0.63814)-30(0.49097)\,e^{-\frac{0.22053(6)}{12}}=5.05502$$

$$p=30(0.50903)\,e^{-\frac{0.22053(6)}{12}}-28.59291(0.36186)=3.33002$$

Para encontrar el precio del contrato estilo americano, considerando los mismos datos, el primer cálculo del procedimiento aproximado ya se ha efectuado.

Para el segundo paso, ahora el cálculo se efectúa considerando que la opción expira justo antes del segundo pago de dividendos, que en este caso es el último pago de dividendos dentro de la vigencia del contrato.

Por lo cual $T = \frac{5}{12}$

El valor presente del primer dividendo es

$$0.75\, e^{-\frac{0.22053(2)}{12}} = 0.72293$$

El precio de mercado que será empleado para encontrar el precio del contrato que vence justo antes del pago del segundo dividendo

$$M = 30 - 0.72293 = 29.77707$$

Entonces

$$c = 29.27707(0.64366) - 30(0.50993)\, e^{-\frac{0.22053(5)}{12}} = 4.88958$$

$$p = 30(0.49007)\, e^{-\frac{0.22053(5)}{12}} - 29.27707(0.35634) = 2.97875$$

Ya que la aproximación sugiere tomar el mayor de los dos cálculos, los precios de un contrato estilo americano son:

$$C = 28.59291(0.63814) - 30(0.49097)\, e^{-\frac{0.22053(6)}{12}} = 5.05502$$

$$P = 30(0.50903)\, e^{-\frac{0.22053(6)}{12}} - 28.59291(0.36186) = 3.33002$$

Ahora analizaremos los beneficios posibles bajo el pronto ejercicio de un contrato estilo americano.

$$S(1 - e^{-i(t_2 - t_1)}) = 30(1 - e^{-\frac{0.22053(3)}{12}}) = 1.60921$$

Cumpliéndose la ecuación 3.5, por lo que no se debería ejercer el contrato en el primer pago de dividendos.

$$S(1 - e^{-i(T - t_2)}) = 30(1 - e^{-\frac{0.22053(1)}{12}}) = 0.54629$$

Cumpliéndose la ecuación 3.8, así que si el contrato se encuentra lo suficientemente dentro de dinero debería ser ejercido justo antes del último pago de dividendos.

TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO

Es el rendimiento que proporciona una inversión ausente de riesgo, en México el poseedor de un Certificado de Tesorería (CETE) tiene una inversión libre de riesgo porque el Gobierno ampara y da garantía del título a su poseedor.

Un movimiento en la tasa de interés libre de riesgo, afecta el precio de una opción de forma menos importante que los otros factores exógenos. Como las tasas de interés en la economía incrementan, la tasa de crecimiento del precio del activo esperada tiende a incrementar. Sin embargo, el valor presente de cualquier flujo futuro de efectivo recibido por el poseedor del contrato disminuye.

Ambos efectos tienden a disminuir el precio de un contrato tipo put. Por lo tanto, el precio de un contrato tipo put disminuye cuando la tasa de interés libre de riesgo aumenta. En el caso de los contratos tipo call, el primer efecto tiende a incrementar el precio de la opción cuando el segundo tiende a disminuirlo.

Veremos que el primer efecto domina al segundo, esto es, el precio de un contrato tipo call incrementa cuando la tasa de interés libre de riesgo aumenta.

Considere $0 < M$, $0 < S$, $0 < \sigma$ y $0 < T < \frac{2}{3}$.

Además, queremos demostrar que cuando i aumenta, el precio del contrato también aumenta.

Recordando que para el cálculo de un contrato tipo call

$$c = MN(d_1) - S\,e^{-i(T-t)}\,N(d_2)$$

Donde

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow d_2 < d_1$$

Recodando a la función estandarizada $N(x)$

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

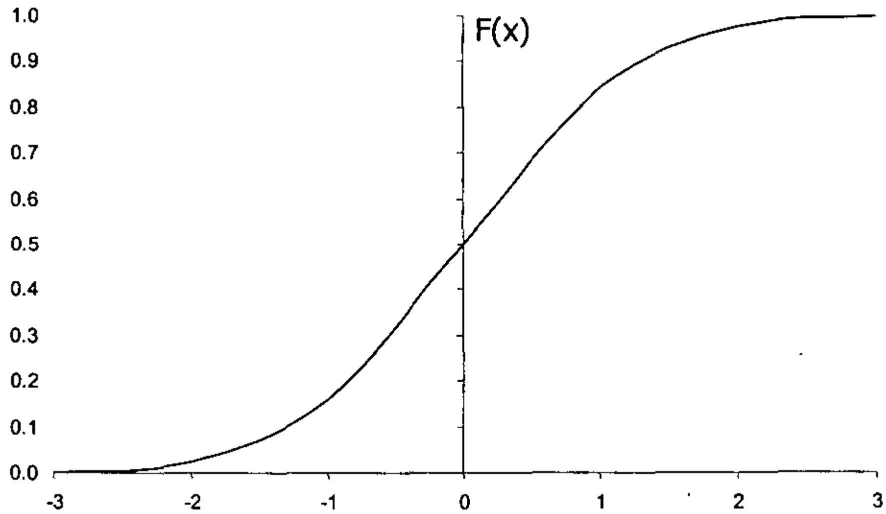
Donde

$$N'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \geq 0$$

Por lo que $N(x)$ es monótona creciente.

Esto ocurre ya que su derivada, en este caso, es mayor o igual a cero para todos los valores reales de la variable.

Esto lo podemos observar en la gráfica 3.7 que se muestra a continuación



Gráfica 3.7

Además de ser monótona creciente, $N(x)$ posee las siguientes propiedades

$$\lim_{x \to -\infty} N(x) = 0$$

Cuando $x < 0$, entonces, $0 < N(x) < \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} N(x) = \frac{1}{2}$$

Cuando $0 < x$, entonces, $\frac{1}{2} < N(x) < 1$

$$\lim_{x \to \infty} N(x) = 1$$

En donde

$$\frac{d}{di}\left(\frac{Ln\left(\frac{M}{S}\right)+(T-t)\left(i+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)=\frac{d}{di}\left(\frac{Ln\left(\frac{M}{S}\right)+(T-t)\left(i-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)=\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}$$

Es decir

$$\frac{d(d_1)}{di}=\frac{d(d_2)}{di}=\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}>0$$

Por lo que d_1 y d_2 son crecientes con respecto a la variable i.

Así pues

$$\lim_{i\to-\infty} d_1=\lim_{i\to-\infty} d_2=0 \Rightarrow N(d_1)=N(d_2)=N(d_1-\sigma\sqrt{T-t})=0$$

Si recordamos

$$\lim_{i\to-\infty} e^{-i(T-t)}=\infty$$

El precio del contrato tipo call

$$\lim_{i\to-\infty} c=M\lim_{i\to-\infty} N(d_1)-S\lim_{i\to-\infty} e^{-i(T-t)}\lim_{i\to-\infty} N(d_2)=0$$

Es aquí donde debemos analizar el comportamiento dominante del primer factor sobre el segundo.

En este caso el precio del contrato es cero, pero cabe considerar que un inversionista guardaría su dinero en el colchón antes que invertirlo en un instrumento que le ofrece una tasa de interés libre de riesgo negativa.

Considerando que la tasa de interés libre de riesgo también debe ser positiva, tomemos en cuenta el análisis de las posibilidades que existen cuando esta tasa es pequeña y se aproxima a cero.

Para esto observemos los siguientes resultados.

El caso donde la tasa de interés libre de riesgo es pequeña, tan pequeña que se aproxima a cero, analizaremos que ocurre con los límites y las probabilidades de ejercer el contrato. Además se analizarán tres posibles casos para d_1 y d_2, respectivamente, ya que así observaremos en que casos se tiene mayor posibilidad de ejercer la opción tipo call, además de observar la cota de precio que el contrato posee.

$$\lim_{i \to 0} d_1 = \frac{Ln \frac{M}{S} + \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\lim_{i \to 0} d_2 = \frac{Ln \frac{M}{S} - \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Ahora tomemos en cuenta los tres posibles casos para d_1.

Cuando $d_1 < 0$

$$\frac{Ln \frac{M}{S} + \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} < 0 \Rightarrow \frac{M}{S} < e^{-(T-t)\sigma^2} \Rightarrow M < S\, e^{-(T-t)\sigma^2} < S$$

Cuando $d_1 = 0$

$$\frac{Ln \frac{M}{S} + \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0 \Rightarrow \frac{M}{S} = e^{-(T-t)\sigma^2} \Rightarrow M = S\, e^{-(T-t)\sigma^2} < S$$

Cuando $0 < d_1$

$$0 < \frac{Ln \frac{M}{S} + \frac{(T-t)\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} \Rightarrow e^{-(T-t)\sigma^2} < \frac{M}{S} \Rightarrow S < M\, e^{(T-t)\sigma^2}$$

De los resultados anteriores podemos decir, generalizando el caso, que cuando d_1 es menor o igual que cero el contrato tipo call tiene pocas probabilidades de ser ejercido, por lo que su precio también es menor. Esto es debido a que $M < S$ en el momento de efectuar el contrato, por lo que dependerá directamente de la volatilidad que el bien subyacente presente hasta este momento, así como de los movimientos en los precios durante la vigencia del contrato.

Análogamente, observemos lo tres casos para d_2 y sus posibles consecuencias.

Cuando $d_2 < 0$

$$\frac{Ln\frac{M}{S} - \frac{(T-t)\,\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} < 0 \Rightarrow \frac{M}{S} < e^{(T-t)\sigma^2} \Rightarrow M < S\,e^{(T-t)\sigma^2}$$

Cuando $d_2 = 0$

$$\frac{Ln\frac{M}{S} - \frac{(T-t)\,\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0 \Rightarrow \frac{M}{S} = e^{(T-t)\sigma^2} \Rightarrow S = M\,e^{-(T-t)\sigma^2} < M$$

Cuando $0 < d_2$

$$0 < \frac{Ln\frac{M}{S} - \frac{(T-t)\,\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} \Rightarrow e^{(T-t)\sigma^2} < \frac{M}{S} \Rightarrow S < M\,e^{-(T-t)\sigma^2} < M$$

De los resultados anteriores salta a la vista que cuando d_2 es mayor o igual que cero el contrato tiene mayores probabilidades de ser ejercido, por lo que su precio también aumenta.

Esto es debido a que $S < M$ al momento de efectuar el contrato, por lo que dependerá directamente de la volatilidad que el bien subyacente presente hasta este momento, así como de los movimientos en los precios durante la vigencia del contrato.

Si recordamos

$$\lim_{i \to 0} e^{-i(T-t)} = 1$$

El precio del contrato tipo call

$$\lim_{i \to 0} c = M \lim_{i \to 0} N(d_1) - S \lim_{i \to 0} e^{-i(T-t)} \lim_{i \to 0} N(d_2)$$

De aquí

$$\lim_{i \to 0} c = M \lim_{i \to 0} N(d_1) - S \lim_{i \to 0} N(d_2)$$

Para mostrar que el precio del contrato está acotado de forma creciente, incluso cuando la tasa de interés libre de riesgo se aproxima a cero, analicemos los siguientes casos.

Cuando $d_2 < d_1 < 0$, entonces, $N(d_2) < N(d_1) < \frac{1}{2}$ y recordando cuando $d_1 < 0$ tenemos

$$M < S\,e^{-(T-t)\sigma^2} < S \Rightarrow M < S$$

Mientras que de d_2 no podemos determinar una relación de M con respecto a S.

$$0 < M\big(N(d_1) - N(d_2)\big) < MN(d_1) - SN(d_2) = c$$

Cuando $d_2 < d_1 = 0$, entonces, $N(d_2) < N(d_1) = \frac{1}{2}$ y recordando cuando $d_1 = 0$ tenemos

$$M = S\,e^{-(T-t)\sigma^2} < S \Rightarrow M < S$$

Mientras que de d_2, análogamente, no podemos determinar una relación de M con respecto a S.

$$0 < M\left(\frac{1}{2} - N(d_2)\right) < MN(d_1) - SN(d_2) = c$$

Sabemos que $N(x)$ es creciente, pero no crece linealmente, por lo que demostraremos la siguiente propiedad.

Sea $d_1' < d_1 \leq 0$ con $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ y $d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow N(d_1') - N(d_2') < \frac{1}{2} - N(d_2)$

Demostración.

Como $d_2' < d_2 \Rightarrow N(d_2') < N(d_2) \Rightarrow$ por hipótesis $N(d_1') < N(d_1) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$- \begin{array}{c} 0 < N(d_1) - N(d_1') \\ 0 < N(d_2) - N(d_2') \\ \hline 0 < N(d_1) - N(d_2) - N(d_1') + N(d_2') \end{array} \Rightarrow N(d_1') - N(d_2') < \frac{1}{2} - N(d_2)$$

Lo que esta propiedad nos muestra es que siempre que tomemos cualquier probabilidad, con los valores $d_{i+1} < d_i < d_0$ tal que $d_i = d_{i-1} - \sigma\sqrt{T-t}\ \ \forall i = 1,2,\ldots,n$, tomará el comportamiento siguiente debido a la forma de crecimiento de la función $N(x)$.

Observándose

$$N(d_{i+1}) - N(d_{i+2}) < N(d_i) + N(d_{i+1}) < \frac{1}{2} - N(d_1) \ \forall i = 1,2,\ldots,n$$

De acuerdo a la propiedad anterior

$$0 < M\left(N(d_1') - N(d_2')\right) < M\left(\frac{1}{2} - N(d_2)\right) < c$$

Ahora analicemos los casos en los que d_2 es mayor o igual que cero.

Cuando $0 = d_2 < d_1$, entonces, $\frac{1}{2} = N(d_2) < N(d_1)$ y recordando cuando $d_2 = 0$ tenemos

$$M = S\,e^{(T-t)\sigma^2} > S \Rightarrow M > S \Rightarrow c = MN(d_1) - SN(d_2) < M\left(N(d_1) - \frac{1}{2}\right)$$

Cuando $0 < d_2 < d_1$, entonces, $\frac{1}{2} < N(d_2) < N(d_1)$ y como $0 < d_2$, tenemos

$$M > S\,e^{(T-t)\sigma^2} > S \Rightarrow M > S \Rightarrow c = MN(d_1) - SN(d_2) < M\left(N(d_1) - N(d_2)\right)$$

Análogamente Sabemos que $N(x)$ es creciente, pero no crece linealmente, por lo que demostraremos la siguiente propiedad.

Sea $0 \le d_2' < d_2$ con $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ y $d_1' = d_2' + \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow N(d_1) - N(d_2) < N(d_1') - \frac{1}{2}$

Demostración.

Como $d_2' < d_2 \Rightarrow \frac{1}{2 \le} N(d_2') < N(d_2) \Rightarrow$ por hipótesis $N(d_1') < N(d_1) \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} - & N(d_2') - N(d_2) < 0 \\ & N(d_1') - N(d_1) < 0 \\ \hline & N(d_2') - N(d_1') - N(d_2) + N(d_1) < 0 \end{array} \Rightarrow N(d_1) - N(d_2) < N(d_1') - \frac{1}{2}$$

Lo que esta propiedad nos muestra es que siempre que tomemos cualquier probabilidad, con los valores $0 = d_0 < d_i < d_{i+1}$ tal que $d_i = d_{i-1} + \sigma\sqrt{T-t} \ \forall i = 1,2,\ldots,n$, tomará el comportamiento siguiente debido a la forma de crecimiento de la función $N(x)$.

Observándose

$$N(d_{i+2}) - N(d_{i+1}) < N(d_{i+1}) + N(d_i) < N(d_1) - \frac{1}{2} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

De acuerdo a la propiedad anterior

$$0 < c < M(N(d_1) - N(d_2)) < M\left(N(d_1') - \frac{1}{2}\right)$$

Esto se debe a que es menos probable que M sea mucho mayor que S, lo esperado es que sean muy similares o iguales, por lo que las diferencias son mayores cuando el precio de mercado y el precio de ejercicio se aproximan a la media esperada.

Generalizando tenemos

$d_{i+1}' < d_i' \leq 0 \leq d_i < d_{i+1}$ tal que $d_{i+1}' = d_i' - \sigma\sqrt{T-t}$ y $d_{i+1} = d_i + \sigma\sqrt{T-t}$
$\forall i = 0,1,\ldots,n$ tal que $M' < S < M \Rightarrow$

$$M'(N(d_{i+1}') - N(d_{i+2}')) < M'\left(\frac{1}{2} - N(d_{i+1}')\right) < c < M(N(d_{i+2}) - N(d_{i+1})) < M\left(N(d_{i+1}) - \frac{1}{2}\right)$$

Así pues, solo resta evaluar una tasa de interés libre de riesgo tan grande como sea posible.

$$\lim_{i\to\infty} d_1 = \lim_{i\to\infty} d_2 = \infty \Rightarrow N(d_1) = N(d_2) = \infty$$

Si recordamos

$$\lim_{i\to\infty} e^{-i(T-t)} = 0$$

El precio del contrato tipo call

$$\lim_{i\to\infty} c = M \lim_{i\to\infty} N(d_1) - S \lim_{i\to\infty} e^{-i(T-t)} \lim_{i\to\infty} N(d_2) = M$$

Por lo que

$$0 < c < M$$

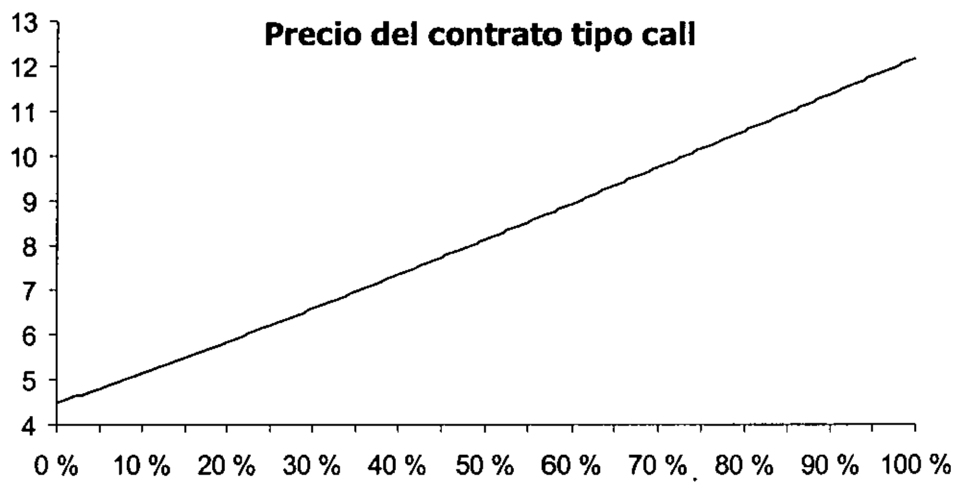
Como podemos observar, después del análisis anterior, mientras la tasa de interés libre de riesgo crece, el valor del contrato también crece.

Quizá este análisis debería ser omitido o presentado de una forma más elegante, pero por una parte se abordaron las propiedades de la función $N(x)$ y se muestra en que casos el contrato proporciona las mejores características para que el poseedor pueda ejercer su derecho.

Claro que esto depende de otros tantos factores, pero se observa la relación que existe entre las probabilidades, el precio de ejercicio y el precio de mercado, que a su vez se relacionan dependiendo de la volatilidad del precio del bien subyacente y de la duración del contrato, la cual puede ser acotada.

Observando la tendencia en la que la diferencia entre las probabilidades es mayor cuando tenemos la transición en la que el contrato pasa a estar dentro de dinero, es decir, desde que el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio pero muy próximo a él, siendo igual a él y hasta que es mayor; dejando ganancias al poseedor del contrato.

Ahora observaremos, en la gráfica 3.8, el comportamiento del precio de un contrato tipo call cuando la tasa de interés libre de riesgo crece partiendo de cero, mientras los otros datos permanecen constantes.

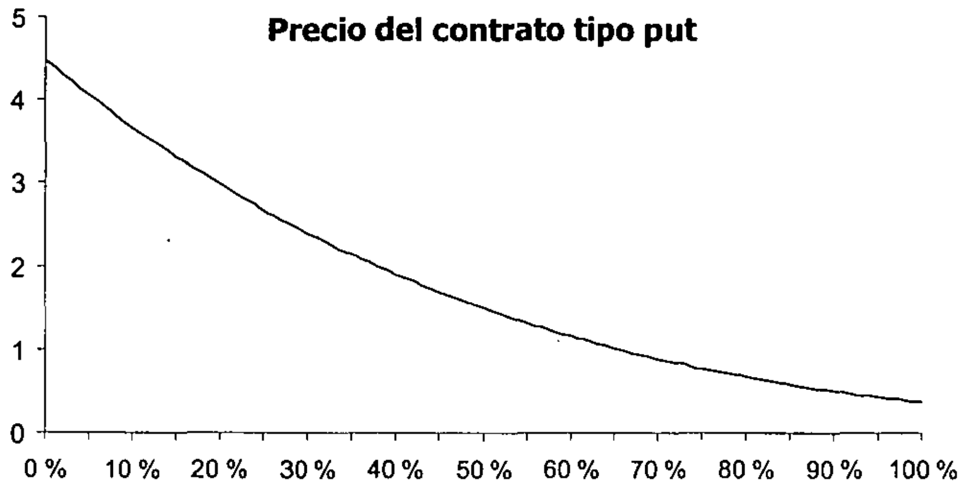


Gráfica 3.8

El precio del contrato crecerá asintóticamente hasta el precio de mercado conforme la tasa de interés libre de riesgo incremente y decrecerá asintóticamente hasta cero conforme la tasa de interés libre de riesgo disminuya.

Cabe resaltar que en el momento en que la tasa de interés libre de riesgo se aproxima a cero el precio del contrato tipo call y el precio del contrato tipo put se aproximan hasta ser iguales cuando ésta es cero.

El comportamiento del contrato tipo put es mostrado en la gráfica 3.9, la cual resalta la disminución asintótica en el precio del contrato hasta cero conforme la tasa de interés libre de riesgo aumenta.



Gráfica 3.9

III.I.II FACTORES ENDÓGENOS

Estos factores suponen las características específicas que cada contrato puede tener, es decir, cada contrato aporta estas características. Así pues, denominados factores endógenos.

FECHA DE EXPIRACIÓN

Fecha de vencimiento o fecha de cancelación referida exclusivamente al vencimiento del plazo del Contrato.

Debido a que las opciones son bienes que se deprecian con el tiempo, siendo la causa de esta característica que cuando más largo es el plazo al vencimiento mayores serán las oportunidades de que el contrato sea ejercido.

Ambos contratos, put y call estilo americano, se hacen más valiosos así como el plazo al vencimiento aumenta.

El poseedor de un contrato con mayor plazo al vencimiento tiene disponibles un número mayor de oportunidades para ejercer el contrato cuando haya cambios favorables del precio del bien subyacente en el mercado, que las que tiene el poseedor de un contrato con un menor plazo al vencimiento.

Por esta razón, un contrato con un mayor plazo al vencimiento debe, por lo tanto, ser siempre cuando menos tan valioso como un contrato de las mismas características con un menor plazo al vencimiento. Por el contrario, los contratos put y call estilo europeo no necesariamente se hacen más valiosos cuando el plazo al vencimiento aumenta ya que el poseedor de un contrato estilo europeo con mayor plazo al vencimiento no tiene disponibles todas las oportunidades de ejercer el contrato que las oportunidades disponibles que tiene un inversionista poseedor de un contrato estilo americano con un plazo menor al vencimiento. El poseedor del contrato con estilo europeo, aún cuando tiene un mayor plazo al vencimiento, solo puede ejercer su derecho al madurar la opción, es decir, solo posee el derecho de ejercer la opción durante el día de vencimiento señalado en el contrato.

A continuación se presenta el cálculo de dos contratos tipo call con estilo europeo que solo difieren en el plazo al vencimiento, mostrando que en el caso de un contrato estilo europeo un mayor plazo al vencimiento no necesariamente ocasiona un mayor costo del contrato.

Considera un contrato de opción estilo europeo y de tipo call, sobre acciones de Peñoles con pago de dividendos en dos meses, en cinco meses y ocho meses. El dividendo en cada fecha es de \$ 0.75 para el poseedor del bien. El precio de mercado \$ 30.00, es decir, M=30; el precio de ejercicio \$ 30.00, S=30; la volatilidad del bien subyacente 53.194 % anual, $\sigma = 0.53194$; la tasa de interés libre de riesgo 22.053 % anual, i=0.22053 y el tiempo de vencimiento 63 días.

Es decir, $T = \dfrac{63}{360}$

El valor presente de todos los dividendos es

$$0.75\left(e^{-\frac{0.22053(60)}{360}}\right) = 0.72293$$

Así pues, el precio de mercado

$$M = 30 - 0.72293 = 29.27707$$

Donde el precio del contrato tipo call con estilo europeo

$$c = 29.27707(0.56949) - 30(0.48108)e^{-\frac{0.22053(63)}{360}} = 2.78704$$

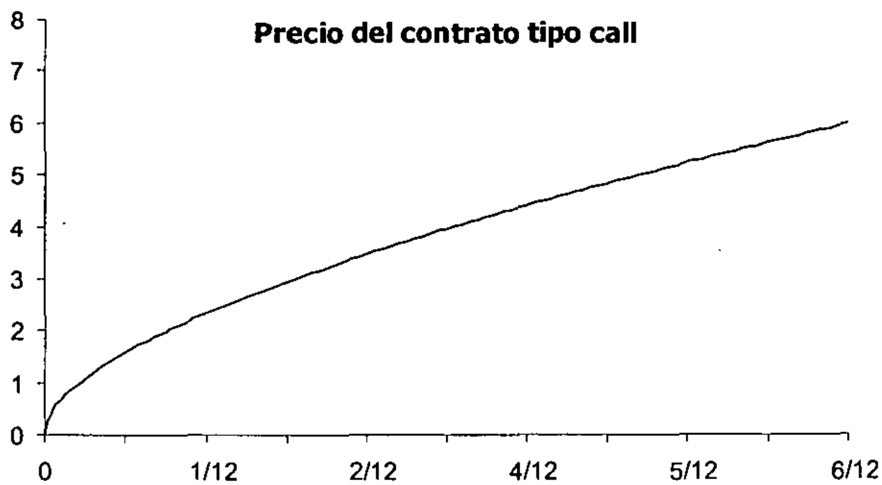
Considera un contrato de opción estilo europeo y de tipo call, sobre acciones de Peñoles con pago de dividendos en dos meses, en cinco meses y ocho meses. El dividendo en cada fecha es de \$ 0.75 para el poseedor del bien. El precio de mercado \$ 30.00, es decir, M=30; el precio de ejercicio \$ 30.00, S=30; la volatilidad del bien subyacente 53.194 % anual, σ = 0.53194; la tasa de interés libre de riesgo 22.053 % anual, i=0.22053 y el tiempo de vencimiento 56 días.

Es decir, $T = \dfrac{56}{360}$ y el precio del contrato con estilo europeo es:

$$c = 30(0.60581) - 30(0.52337)\,e^{-\frac{0.22053\,(56)}{360}} = 3.00265$$

Por lo tanto, esto muestra que no necesariamente un contrato es más valioso cuando el plazo al vencimiento es mayor. Lo cual es muy importante considerar en el caso de tener dos inversiones en las que hay que tener en cuenta el cambio de precio del bien subyacente, objeto de la cobertura, por el pago de dividendos que éste otorga dentro del periodo en el que el contrato está vigente.

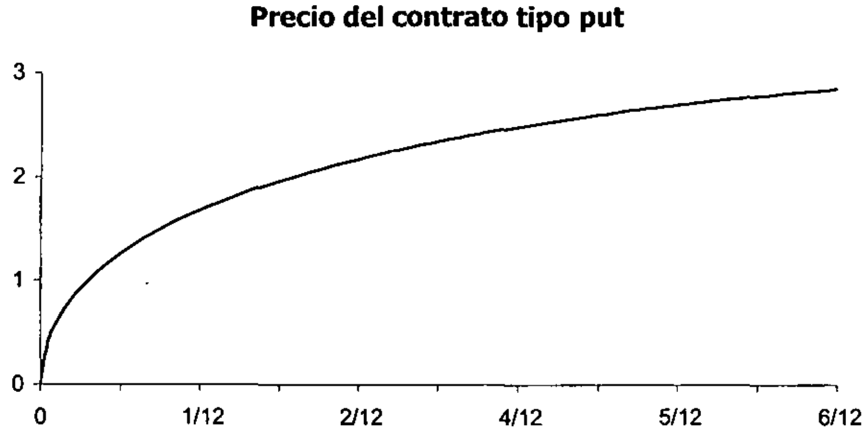
En la gráfica 3.10, observamos el comportamiento de un contrato tipo call con estilo americano en el que todas las variables, a excepción del tiempo, permanecen constantes.



Gráfica 3.10

Más adelante se presenta la razón por la cual lo más optimo para un inversionista que posee un contrato americano tipo call es ejercer lo más próximo a la fecha de vencimiento del contrato o a la última fecha en la que el bien subyacente objeto de la cobertura otorga el pago de dividendos dentro de la vigencia del contrato y el caso contrario en que un inversionista que posee un contrato americano tipo put obtiene un mejor beneficio cuando ejerce su derecho lo antes posible ya que las oportunidades del mercado así se lo permiten.

En la gráfica 3.11, observamos el comportamiento de un contrato tipo put con estilo americano en el que todas las variables, a excepción del tiempo, permanecen constantes.



Gráfica 3.11

En las gráficas 3.10 y 3.11 se muestra el comportamiento de los contratos tipo call y tipo put con estilo americano y para estos contratos no se considera el pago de dividendos, por lo que bajo esta situación el precio del contrato incrementa así como el plazo al vencimiento incrementa.

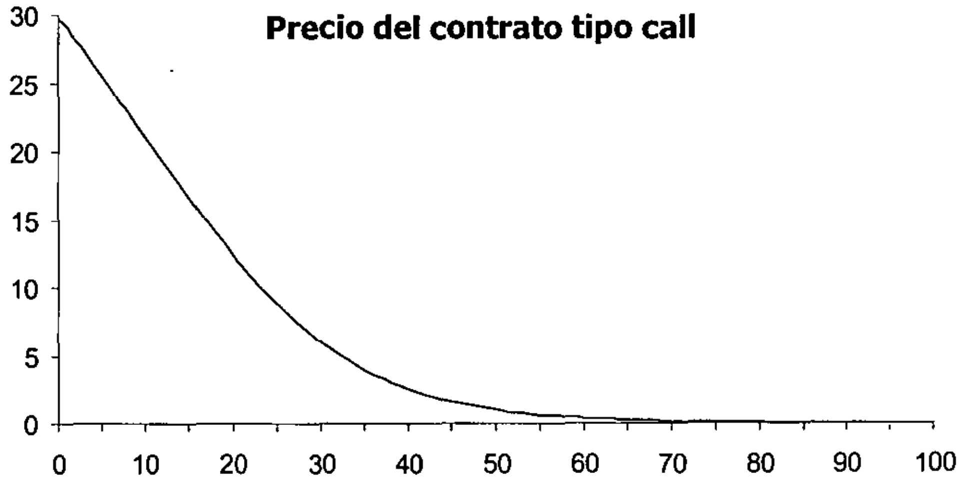
PRECIO DE EJERCICIO

Es el Precio de Liquidación al Vencimiento o precio de referencia por unidad de activo subyacente que da a conocer el mercado organizado y con base en el cual la Cámara de Compensación realiza la liquidación de los Contratos de Opción en la Fecha de Liquidación.

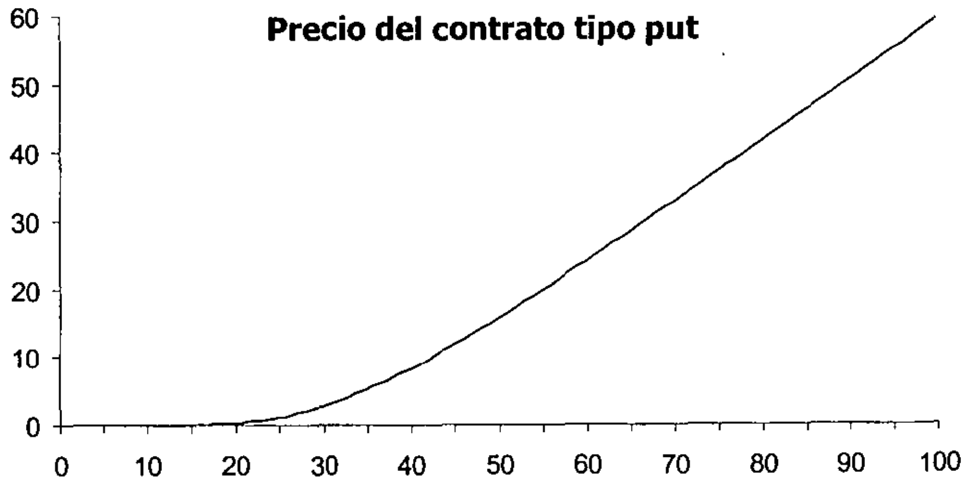
Los contratos tipo call, conforme el precio de ejercicio disminuye, son más valiosos y los contratos tipo put se comportan de forma opuesta a los contratos tipo call, conforme el precio de ejercicio aumenta éstos son más valiosos. Esto ocurre ya que entre mayor sea la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio mayor será la probabilidad $N(d)$. En el momento en que la probabilidad se aproxima a la unidad, el precio del contrato se aproxima al precio de mercado, es decir, cuando el precio de ejercicio se aproxima a cero, la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio hace que $N(d)$ se aproxime a la unidad, por lo que el precio del contrato, como ya se había mencionado, se aproxima al precio de mercado.

Cuando la probabilidad se aproxima a cero, ya que el precio de ejercicio es mayor que el precio de mercado, el precio del contrato también se aproxima a cero. Esto se debe a que para el cálculo del contrato tipo call, si la probabilidad $N(d)$ se aproxima a cero el precio del contrato se aproxima también a cero.

Este resultado se observa en la gráfica 3.12, donde todas las variables, a excepción del precio de ejercicio, permanecen constantes.



Gráfica 3.12



Gráfica 3.13

En el caso del contrato tipo put, de igual manera, cuando el precio de ejercicio se aproxima a cero $N(-d)$ se aproxima a cero, por lo que el precio de la opción también se aproxima a cero. Cuando el precio de ejercicio es mayor, la probabilidad complementaria $N(-d)$ se aproxima a la unidad por lo que el precio del contrato tipo put crece casi como cuan grande sea la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado.

Este resultado se observa en la gráfica 3.13, donde todas las variables, a excepción del precio de ejercicio, permanecen constantes.

III.II VALOR INTRÍNSECO

Es la relación que existe entre el precio del bien subyacente en el mercado y el precio de ejercicio.

Se puede definir como el precio de ejercicio que tendría un contrato de opción en un momento dado, es decir, es la cantidad mediante la cual el contrato se encuentra dentro de dinero en el instante en que el poseedor adquiere la opción.

El valor intrínseco para una opción tipo call.

$$I_c = max\{ M - S, 0 \}$$

El valor intrínseco para una opción tipo put.

$$I_p = \max\{ S - M, 0 \}$$

El valor intrínseco es una referencia de la prima en cada instante ya que el total de la prima debe tener una valor cuando menos de su valor intrínseco, ya que es el importe que el poseedor de la opción obtendría en caso de ejercer su derecho y considerando que venderá su contrato solo cuando obtenga por él al menos el mismo beneficio que obtendría si lo ejerce.

Así también, el comprador de una opción estará dispuesto a pagar un importe superior al valor intrínseco si espera que los precios en el mercado, hasta la fecha de vencimiento, puedan cambiar de tal suerte que pueda obtener un beneficio superior al del valor intrínseco, así pues, el emisor de una opción exigirá una prima superior al valor intrínseco para protegerse del cambio de precios que para él representan pérdidas potenciales.

De acuerdo a la definición del valor intrínseco podemos observar las siguientes propiedades.

1) Cuando el valor intrínseco es mayor que cero es debido a que el contrato produce un beneficio, es decir, el contrato se encuentra dentro de dinero.

   Cuando $I_c > 0 \Rightarrow S < M \Rightarrow$ el contrato está dentro de dinero.
   Cuando $I_p > 0 \Rightarrow M < S \Rightarrow$ el contrato esta dentro de dinero.

2) Cuando el valor intrínseco es igual a cero es debido a que el contrato no produce beneficio o produce pérdida, es decir, el contrato se encuentra en dinero o fuera de dinero.

En el caso del contrato tipo call

$$\text{Cuando } I_c = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} M = S \Rightarrow \text{el contrato está en dinero.} \\ M < S \Rightarrow \text{el contrato está fuera de dinero.} \end{array}$$

En el caso del contrato tipo put

$$\text{Cuando } I_p = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} S = M \Rightarrow \text{el contrato está en dinero.} \\ S < M \Rightarrow \text{el contrato está fuera de dinero.} \end{array}$$

III.III VALOR EXTRÍNSECO

Es la diferencia entre la prima, por la cobertura que otorga el contrato, y el valor intrínseco, también es conocido como el valor tiempo.

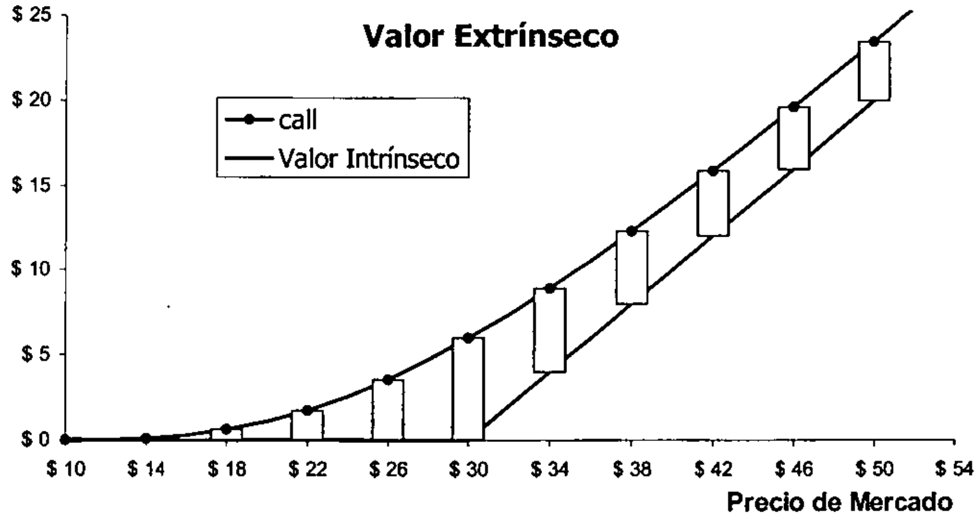
Analizado desde otro vértice, el valor extrínseco está determinado por la diferencia entre la curva del valor del contrato y la del valor intrínseco.

Además, ya que el valor intrínseco, siempre que el precio de mercado es menor o igual que el precio de ejercicio, es cero y cuando el precio de mercado es superior la función crece linealmente con pendiente uno y siempre es menor que el monto de la prima.

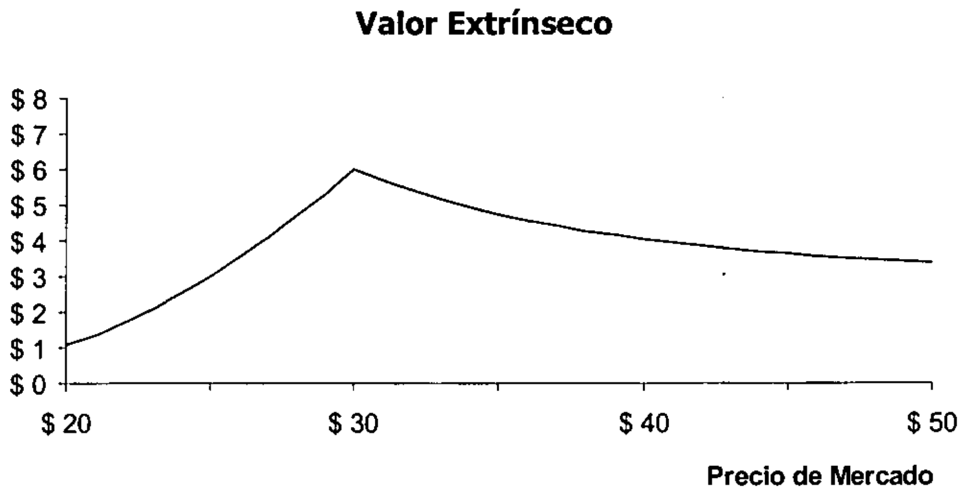
Así pues, gráficamente, el valor extrínseco es la diferencia entre estas dos funciones.

Valdría hacer un análisis del comportamiento de la función del valor extrínseco de un contrato tipo call, sin embargo la primer derivada con respecto al precio de ejercicio es $N(d_1)$, que es cero sólo cuando d_1 es muy pequeño y es igual a la unidad cuando es muy grande.

En la gráfica 3.14 podemos observar el comportamiento monótono creciente que presenta el precio del contrato tipo call en función del precio de mercado.



Gráfica 3.14



Gráfica 3.15

De acuerdo a la gráfica 3.15, el valor extrínseco de un contrato tipo call siempre es positivo. Además considerando que el monto de la prima del contrato es mayor que cero y el valor intrínseco es cero cuando el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio, esto ocurre cuando el contrato está fuera de dinero, siendo el valor extrínseco igual al monto de la prima por la cobertura que otorga el contrato, el cual es creciente hasta el momento en que el precio de mercado es igual al precio de ejercicio.

Es justo en este momento cuando el contrato está en dinero, además de ser el instante donde el valor extrínseco alcanza su máximo. De aquí en adelante decrece, es decir, disminuye desde el momento en que el precio de mercado es superior al precio de ejercicio, es decir, cuando el contrato está dentro dinero.

Un análisis empleando el concepto de derivada es muy útil en estos casos, sin embargo solo puede ayudarnos a explicar lo que ya observamos en la gráfica 3.15, ya que al emplear el concepto de la derivada, este concepto no presenta una solución al problema ya que no indica concretamente que el valor intrínseco tiene un valor máximo cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio.

El análisis indica que el valor extrínseco tiene dos mínimos, uno cuando el precio de mercado es muy pequeño y el otro cuando es muy grande y no muestra la existencia del valor máximo, ya que la función del valor intrínseco es discontinua cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio, que es cuando se encuentra el valor máximo del valor extrínseco. Entonces para este análisis emplearemos el valor intrínseco de un contrato tipo call y la derivada con respecto al precio de mercado de la expresión empleada para el cálculo de un contrato tipo call.

Así pues, empleando el concepto de derivada, para saber en donde se encuentra el valor máximo del valor extrínseco con respecto al precio de mercado.

$$\text{Sea } c = MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2) \quad \text{e} \quad I_c = max\{M - S, 0\} \Rightarrow$$

$$\frac{dc}{dM} = \frac{d}{dM} MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2) \Rightarrow$$

$$\frac{dc}{dM} = M\frac{dN(d_1)}{dM} + N(d_1)\frac{dM}{dM} - Se^{-i(T-t)}\frac{dN(d_2)}{dM} \Rightarrow$$

$$\frac{dc}{dM} = M\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{dd_1}{dM} + N(d_1) - Se^{-i(T-t)}\frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{dd_2}{dM} \Rightarrow$$

$$\frac{dc}{dM} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} + N(d_1) - \frac{Se^{-i(T-t)}e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{M\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} \Rightarrow$$

$$\frac{dc}{dM} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} + N(d_1) - \frac{Se^{-i(T-t)}e^{-i(T-t)-\frac{d_1^2}{2}+d_1\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}}{M\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} = N(d_1)$$

$$\text{Sea } M \le S \Rightarrow \text{ como } I_c = max\{M - S, 0\} \Rightarrow \frac{dI_c}{dM} = 0 \Rightarrow \frac{dE_c}{dM} = N(d_1)$$

$$\frac{dE_c}{dM} = 0 \Leftrightarrow N(d_1) = 0 \Leftrightarrow d_1 = -\infty$$

$$\text{Sea } S \le M \Rightarrow \text{como } I_c = max\{M - S, 0\} \Rightarrow \frac{dI_c}{dM} = 1 \Rightarrow \frac{dE_c}{dM} = N(d_1) - 1$$

$$\frac{dE_c}{dM} = 0 \Leftrightarrow 1 - N(d_1) = 0 \Leftrightarrow d_1 = \infty$$

$$\frac{dE_c}{d^2M} = \frac{d}{dM}N(d_1) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{M\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} > 0$$

Pero como se plantea en el análisis, la primer derivada crece siempre y cuando el precio de mercado sea menor al precio de ejercicio y decrece desde el instante en que el precio de mercado supera al precio de ejercicio.

De lo anterior podemos dar las siguientes conclusiones:

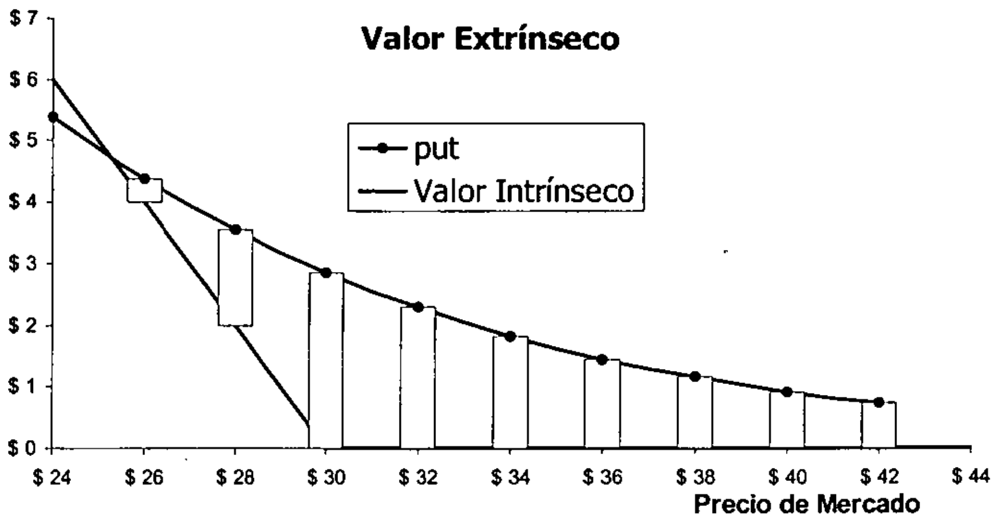
1) Los contratos tipo call que se encuentran fuera de dinero tienen un valor extrínseco creciente, es decir, solo son consideradas las posibilidades favorables en los precios del bien subyacente para los poseedores o desfavorables, en tal caso, para los emisores del contrato.

2) Los contratos tipo call que se encuentran en dinero tienen un valor extrínseco máximo.

3) Los contratos tipo call que se encuentran dentro de dinero tienen un valor extrínseco decreciente.

Análogamente, para los contratos tipo put el razonamiento es similar.

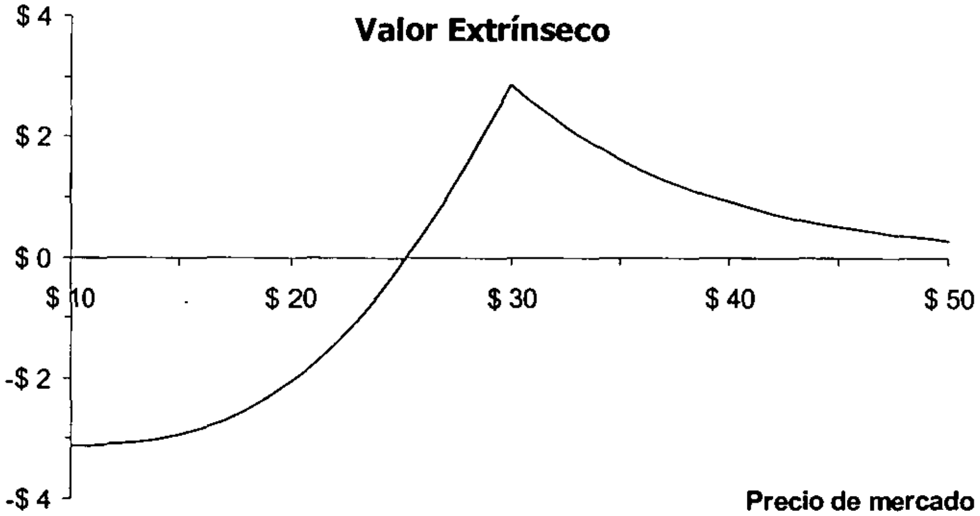
En la gráfica 3.16 se puede observar como el valor extrínseco puede llegar a ser negativo.



Gráfica 3.16

Se puede observar que esto ocurre cuando el precio de mercado disminuye aproximándose a cero el valor intrínseco se aproxima de igual manera al precio de ejercicio y aún cuando el precio del contrato incrementa, esta por debajo del valor intrínseco.

La gráfica 3.17 muestra independientemente al valor extrínseco de un contrato tipo put, mostrando un valor negativo conforme el precio de mercado se aproxima a cero.



Gráfica 3.17

Esto se debe a que en el instante en que el precio de mercado del bien subyacente se aproxima a cero, la prima por la cobertura que el contrato otorga es menor que el valor intrínseco que se aproxima al precio de ejercicio.

$$\lim_{M\to 0} E_p = \lim_{M\to 0} p - I_p = S e^{-i(T-t)} N(-d_2) - S < S e^{-i(T-t)} - S < 0$$

Considerando que el monto de la prima del contrato es mayor que cero, aún cuando el valor extrínseco sea menor que cero éste alcanza un valor mínimo cuando el precio de mercado se aproxima a cero, creciendo siempre que el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio, es decir, cuando el contrato se encuentra dentro de dinero. Así pues, crece hasta el momento en que el precio de mercado es igual al precio de ejercicio, o sea, cuando el contrato está en dinero, además es en este instante donde el valor extrínseco alcanza su valor máximo. De aquí en adelante decrece, es decir, disminuye desde el momento en que el precio de mercado es superior al precio de ejercicio, esto ocurre cuando el contrato está fuera de dinero.

Análogamente, un análisis da como resultado una primer derivada positiva cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio y negativa desde el instante en que el precio de mercado supera al precio de ejercicio.

De lo anterior podemos dar las siguientes conclusiones:

1) Los contratos tipo put que se encuentran fuera de dinero tienen un valor extrínseco decreciente, es decir, solo son consideradas las posibilidades favorables en los precios del bien subyacente para los emisores o desfavorables, en tal caso, para los poseedores del contrato.

2) Los contratos tipo put que se encuentran en dinero tienen un valor extrínseco máximo.

3) Los contratos tipo put que se encuentran dentro de dinero tienen un valor extrínseco creciente.

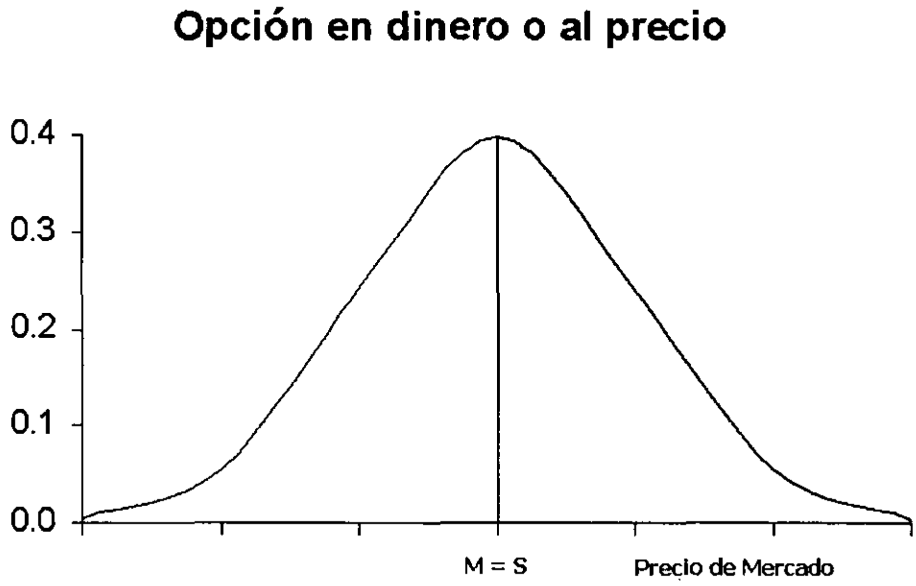
En ambos tipos de contrato, cuando el precio de mercado es igual al precio de ejercicio la derivada puede tomar un valor positivo o negativo, pero en ese preciso instante es cuando el valor extrínseco adquiere su máximo, que es igual al precio del tipo contrato considerado para nuestra cobertura.

A continuación, de acuerdo a las propiedades del valor extrínseco de los contratos tipo call y tipo put, describiré porque tiene este comportamiento el valor extrínseco.

Al valuar un contrato, ya sea como emisor o como poseedor, suponemos que en el mercado, los precios reflejan plenamente toda la información relevante del bien subyacente correspondiente, es decir, suponemos que el mercado es eficiente. Si esto es así, la mejor forma de estimar el precio futuro de un bien subyacente es el precio actual y los precios del bien subyacente tienen una distribución normal.

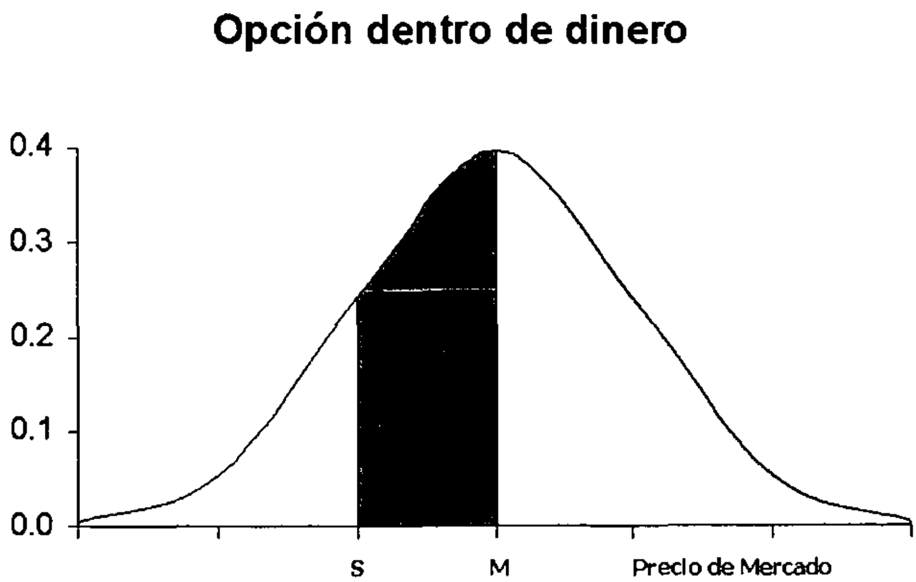
En la gráfica 3.18 el área sombreada representa la probabilidad de que el precio de ejercicio sea menor que el precio de mercado, es decir, en el caso de poseer un contrato tipo call tendría una ganancia.

Análogamente, el área blanca representa la probabilidad de que el precio de mercado sea menor que el precio de ejercicio, generando una ganancia al poseedor de un contrato tipo put. Esto es, cuando un contrato está en dinero o al precio, la probabilidad de obtener ganancias al ejercer el derecho que otorga el contrato es aproximadamente del 50 % y es en realidad superior al 50 %, ya que la hipótesis que es incluida en el modelo Black & Scholes para la valuación de un contrato de opción es una distribución lognormal de los cambios de los precios del bien subyacente.



Gráfica 3.18

En la gráfica 3.19 se observa el área sombreada de gris claro representa la probabilidad de que el valor intrínseco sea positivo, es decir, cuando el contrato se encuentra dentro de dinero y el área más obscura representa la probabilidad de perder parte del valor intrínseco positivo.



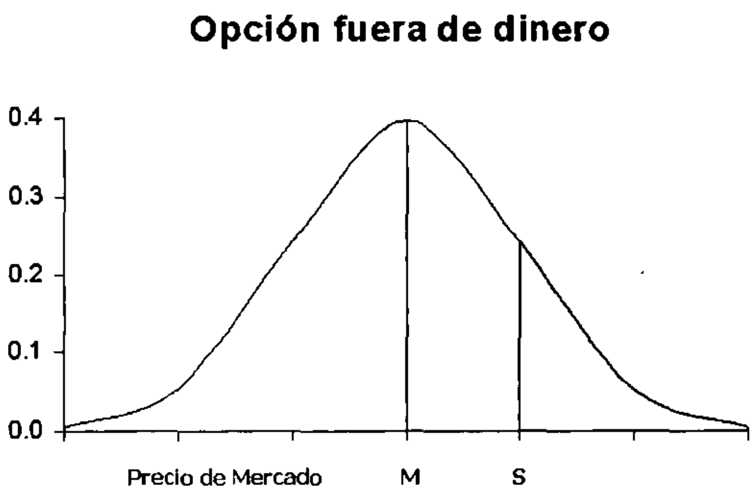
Gráfica 3.19

Para que el valor intrínseco sea positivo, como ya hemos analizado, existe un 50 %, aproximadamente, de probabilidades. Mientras que la probabilidad de que el valor intrínseco sea nulo también aumenta haciendo que el valor extrínseco de un contrato que se encuentra dentro de dinero disminuya, por lo cual, siempre el valor extrínseco de un contrato que se encuentra dentro de dinero será menor que el valor extrínseco de un contrato que está al precio o en dinero.

En el caso de un contrato tipo put, el área sombreada de gris claro estaría del lado izquierdo y ésta no sería del 50 % ya que el precio de mercado a lo más puede llegar a ser cero, mientras el área más obscura puede crecer hasta cubrir todo el lado derecho de la distribución normal, razón por la cual el valor extrínseco de un contrato tipo put puede ser negativo.

Así pues, en la gráfica 3.19 se observa el comportamiento de un contrato dentro de dinero para un contrato tipo call, en caso de un contrato tipo put basta con invertir los colores, haciendo notar que la probabilidad de que el precio de mercado sea menor que el precio de ejercicio no llegaría a ser del 50 % ya que el precio de mercado a lo más puede ser cero.

Cuando un contrato se encuentra fuera de dinero, en el caso de un contrato tipo call el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio y en el caso de un contrato tipo put el precio de ejercicio es menor al precio de mercado, siendo esta la razón por la cual el valor extrínseco de un contrato fuera de dinero es menor que el valor extrínseco de un contrato en dinero.



Gráfica 3.20

En la gráfica 3.20 se muestra el comportamiento del valor extrínseco de un contrato tipo call fuera de dinero, en donde el área bajo la curva es menor que cuando el contrato se encuentra en dinero, es decir, la probabilidad de que esto ocurra es menor.

Entonces, el valor extrínseco tiene un componente probabilístico, dependiendo de la distribución estadística supuesta para la determinación de las variaciones futuras del precio del activo.

En el caso de un contrato tipo put, es suficiente invertir el área sombreada al percentil izquierdo, donde el precio de ejercicio es menor al precio de mercado.

De esta manera es que el valor extrínseco de una opción es la valoración que hace el mercado de las probabilidades de mayores beneficios al ejercer el contrato, si el movimiento del precio del bien subyacente es favorable para el poseedor.

Antes de continuar es necesario un paréntesis más, enunciando el empleo de la tasa de interés instantánea o continuamente compuesta, utilizada en el proceso de desarrollo de este proyecto.

La tasa de interés continua no es utilizada en los mercados financieros, pero su manejo simplifica los modelos y la manipulación de operaciones para su análisis, siendo la causa por la que hago este breve enfoque para poder canalizar una tasa de interés simple o compuesto llevándola a ser una tasa instantánea equivalente y poder comprender y utilizar la formula Black & Sholes.

La tasa de interés libre de riesgo es el rendimiento que proporciona una inversión ausente de riesgo, así que en México el poseedor de un Certificado de Tesorería tiene una inversión libre de riesgo porque el Gobierno Federal es quién ampara y da garantía del título a su poseedor. Cuando se tiene un capital el cual no es necesario invertir en un bien por lo regular se invierte como un instrumento líquido, es decir, el cual invertimos pero al mismo tiempo disponemos de él para emplearlo en la adquisición de cualquier otro bien. Algunas instituciones financieras llaman inversionistas ofreciendo altos rendimientos por invertir su capital, regresando al inversionista su capital más algunos dividendos.

Cuando C_0 es conocido, tenemos la posibilidad de que el capital se incremente en forma aritmética.

Sea C_0 el capital de inversión en el instante $t_0, \Rightarrow \exists\, 0 < r = i\,C_0$ tal que

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + r = C_0(1+i) \\
C_2 &= C_1 + r = C_0 + 2r = C_0(1+2i) \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} + r = C_0 + nr = C_0(1+ni)
\end{aligned}
$$

El capital invertido en el instante t_0, incrementa de tal forma que C_n es el capital en el instante t_n, es decir, es el capital que recibe el inversionista al término de n periodos donde i es la tasa de interés por unidad de tiempo.

$$C_n = C_0(1+ni)$$

Cuando C_0 es conocido, tenemos también la posibilidad de que el capital se incremente en forma geométrica.

Sea C_0 el capital de inversión en el instante $t_0 \Rightarrow \exists\, 1 < r$ tal que
$$\begin{aligned} C_1 &= rC_0 \\ C_2 &= rC_1 = r^2C_0 \\ &\vdots \\ C_n &= rC_{n-1} = \cdots = r^nC_0 \end{aligned}$$

El capital invertido en el instante t_0, incrementa de tal forma que C_n es el capital en el instante t_n, es decir, es el capital que recibe el inversionista al término de n unidades de tiempo.

Considerando la diferencia $C_n - C_{n-1}$ como el incremento de capital por unidad de tiempo, entonces obtenemos la tasa de interés por periodo mediante el cociente.

$$\frac{\Delta C_n}{C_{n-1}} = \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{r^nC_0 - r^{n-1}C_0}{r^{n-1}C_0} = r - 1 = i$$

Por lo que el capital crece a una tasa de interés constante por periodo.

$$C_n = C_{n-1} + iC_{n-1} = C_{n-1}(1+i)$$

Si C_0 es conocido, entonces

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0(1+i) \\ C_2 &= C_1(1+i) = C_0(1+i)^2 \\ C_3 &= C_2(1+i) = C_0(1+i)^3 \\ &\vdots \\ C_n &= C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n \end{aligned}$$

Donde n mide el tiempo transcurrido o las unidades de tiempo en las que el capital está invertido con una tasa de interés efectiva por periodo. De esta forma, si C_0 es el capital invertido durante n periodos iguales a una tasa de interés constante por unidad de tiempo, es decir, la tasa es efectiva una vez por periodo, entonces el capital recibido al término de n unidades de tiempo es

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Así que cuando tengo una tasa de interés constante por unidad de tiempo, entonces aproximo dividiendo el periodo original en m partes iguales, si m es muy grande, entonces los *m-periodos* son pequeños, así pues, entre más periodos considere, más pequeña es la unidad de tiempo; llegando a ser instantánea cuando ya no pueda dividir la unidad de tiempo.

De esta manera definimos a i_m como una tasa de interés efectiva cada m-ésimo en el que fue dividida de la unidad de tiempo original.

$$C_t \cong C_{\frac{n}{m}} \Rightarrow \frac{C_{\frac{1}{m}} - C_0}{C_0} = \frac{C_{\frac{2}{m}} - C_{\frac{1}{m}}}{C_{\frac{1}{m}}} = \cdots = \frac{C_{\frac{n}{m}} - C_{\frac{n-1}{m}}}{C_{\frac{n-1}{m}}} = \cdots = \frac{C_{\frac{m}{m}} - C_{\frac{m-1}{m}}}{C_{\frac{m-1}{m}}} = i_m$$

Entonces

$$\begin{aligned}
c_{\frac{1}{m}} &= C_0 + i_m C_0 &&= C_0(1 + i_m) \\
C_{\frac{2}{m}} &= C_{\frac{1}{m}} + i_m C_{\frac{1}{m}} &&= C_{\frac{1}{m}}(1 + i_m) = C_0(1 + i_m)^2 \\
C_{\frac{3}{m}} &= C_{\frac{2}{m}} + i_m C_{\frac{2}{m}} &&= C_{\frac{2}{m}}(1 + i_m) = C_0(1 + i_m)^3 \\
&\vdots \\
C_{\frac{n}{m}} &= C_{\frac{n-1}{m}} + i_m C_{\frac{n-1}{m}} &&= C_{\frac{n-1}{m}}(1 + i_m) = C_0(1 + i_m)^n
\end{aligned}$$

Es así como podemos calcular el capital C_t que al final de una inversión, para cualquier instante t, recibiremos al invertir C_0 como capital inicial.

Para relacionar la tasa de interés efectiva de la unidad de tiempo original i, con la tasa de interés efectiva i_m, en el m-ésimo del periodo original.

$$C_{\frac{m}{m}} = C_0(1 + i_m)^m \quad \text{y} \quad C_1 = C_0(1 + i) \Rightarrow C_0(1 + i_m)^m = C_0(1 + i) \Rightarrow (1 + i_m)^m = (1 + i) \Rightarrow$$
$$i_m = (1 + i_m)^{\frac{1}{m}} - 1 \quad \text{e} \quad i = (1 + i_m)^m - 1$$

Es decir i_m es una tasa de interés efectiva en un m-ésimo del periodo original, además m indica en cuantas partes iguales se dividió la unidad de tiempo original.

En ocasiones conocemos la tasa de interés convertible (pagadera o compuesta) m veces por periodo, es decir es una tasa que no es efectiva en la unidad de tiempo original, sino que es efectiva para la unidad de tiempo en la que es convertible.

Para obtener una tasa de interés de una unidad de tiempo convertible m veces en el periodo original, $i^{(m)}$, podemos emplear las relaciones anteriores.

$$i^{(m)} = m\, i_m = m[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

Cabe destacar que $i^{(m)}$, es solo una forma de denotar el número de veces en que se divide la unidad de tiempo original para poder saber la unidad de tiempo en que es convertible la tasa de interés, es decir, no es una potencia o una notación exponencial y para diferenciar una notación exponencial, ésta está entre paréntesis.

Dadas las relaciones anteriores llegaremos a la tasa de interés instantánea y la relación de ésta con una tasa de interés convertible.

$$C_t \cong C_{\frac{n}{m}} = C_0(1+i_m)^n \text{ tal que } t \cong \frac{n}{m} \Rightarrow n = mt \Rightarrow C_t \cong C_{\frac{n}{m}} = C_0\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} \Rightarrow$$

$$\lim_{m\to\infty} C_t = C_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = C_0 e^{i^{(\infty)}t}$$

De esta forma sabemos cual es el capital que recibe un inversionista al final de un plazo t, con una tasa de interés efectiva instantánea, donde $i^{(m)}$ es una tasa de interés de una unidad de tiempo convertible a una tasa de interés efectiva por una unidad de tiempo que es parte de la unidad de tiempo original.

Y la relación que existe entre la tasa de interés instantánea (i_∞), con una tasa de interés por unidad de tiempo convertible a una tasa de interés efectiva para otra unidad de tiempo

$$e^{i_\infty} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} \Rightarrow i_\infty = mLn\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) = mLn(1+i_m) \Rightarrow$$

$$i^{(m)} = m(e^{\frac{i_\infty}{m}}-1) \Rightarrow i_m = e^{\frac{i_\infty}{m}}-1$$

Ahora para muestra consideremos que en la subasta del martes 30 de marzo de 1999 se otorgó un descuento del 17.8172255 % para los interesados en la adquisición de Certificados de la Tesorería, CETES, con plazo al vencimiento en 91 días. Además se quiere saber el costo de un contrato que otorgue al poseedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender un dólar al precio de $ 9.50, el contrato se quiere realizar el día jueves primero de abril y la fecha de vencimiento para ejercer el contrato es el día jueves primero de julio de 1999, es decir, 91 días. Para esto se considera que la volatilidad de la divisa es del 23.07 % anual y el precio de mercado del dólar el día primero de abril es de $ 9.65, esperando una tendencia sin cambios.

Para resolver este problema comenzaremos por saber cual es la tasa de interés que ofrecen los Certificados de la Tesorería. Ya que los CETES son instrumentos que otorgan un descuento al comprador con el fin de que al final del plazo convenido el poseedor del documento reciba el valor nominal.

La tasa de interés que se maneja, es una tasa de interés simple.

$$C = M(1-dt) \text{ y } C = M(1+it)^{-1} \Rightarrow (1-dt) = (1+it)^{-1} \Rightarrow (1-dt)(1+it) = 1$$

De lo anterior podemos conocer la tasa de interés equivalente, en términos de la tasa de descuento otorgada y también podemos conocer la tasa de descuento, en términos de la tasa de interés.

$$i = \frac{d}{1-dt} \text{ y } d = \frac{i}{1+it}$$

De esta forma, la tasa de interés que tiene la emisión correspondiente es calculada de acuerdo al descuento con el cual fueron emitidos.

$$i = \frac{d}{1-dt} = \frac{0.178172255}{1-0.178172255} = 0.2168$$

Así que la tasa de interés que otorga esta emisión de CETES es de 21.68 %, pero hay que observar que es una tasa de interés simple.

Causa por la cual es una tasa de interés equivalente al periodo que deseamos cuando al termino del periodo, tenemos el mismo rendimiento. El periodo es de 91 días de un total de 364, es decir, es una tasa trimestral.

Recordando

$$\frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{10-9.48587}{9.48587} = 0.0542$$

Así que la tasa de interés compuesta efectiva cada 91 días es de 5.42 %, ya que al término de este periodo obtenemos el mismo rendimiento, ya sea por invertir con la tasa de interés simple que por invertir con la tasa de interés compuesto.

Ahora, para obtener la tasa de interés libre de riesgo que se utilizará para continuar la solución del problema, sustituimos

$$i_\infty = mLn(1+i_m) = 4Ln(1+0.0542) = 0.21113$$

Es así como la tasa de interés libre de riesgo para el cálculo del precio de los contratos es 21.113 % anual, que es una tasa equivalente a la tasa de descuento a la cual fueron emitidos los CETES para el periodo por el cual deseamos la cobertura que otorgan los contratos. Y observamos que es equivalente ya que al invertir el valor de emisión del CETE, $ 9.48587, durante los 91 días, obtenemos el valor nominal, $ 10.00, empleando la tasa instantánea.

Observando el cálculo de la siguiente manera

$$9.48587e^{\frac{0.21113(91)}{360}}=10$$

Ahora ya conocemos la tasa de interés libre de riego necesaria para llevar a cabo el cálculo de los contratos.

$$c=9.65000(0.74250)-9.50000(0.70392)e^{-\frac{0.21113(91)}{364}}=0.82166$$

$$p=9.50000(0.29608)e^{-\frac{0.21113(91)}{364}}-9.65000(0.25750)=0.18323$$

Fecha	Paridad	Call	Margen Inicial o Margen Requerido	Margen de Mantenimiento	Margen de Variación	Pérdidas/ Ganancias	Día	Estado de Cuenta
01 Abr 99	$ 9.65	$ 0.82166	$ 2,076.66918	$ 1,206.25000			0	
02 Abr 99	$ 9.65	$ 0.81600	$ 2,079.49913	$ 1,206.25000	$ 2.82994	$ 2.82994	1	$ 2,073.83924
03 Abr 99	$ 9.65	$ 0.81033	$ 2,082.33569	$ 1,206.25000	$ 2.83656	$ 5.66651	2	$ 2,071.00268
04 Abr 99	$ 9.65	$ 0.80464	$ 2,085.17898	$ 1,206.25000	$ 2.84329	$ 8.50980	3	$ 2,068.15939
05 Abr 99	$ 9.60	$ 0.76233	$ 2,068.83536	$ 1,200.00000	-$ 16.34362	-$ 7.83382	4	$ 2,084.50301
06 Abr 99	$ 9.65	$ 0.79323	$ 2,090.88620	$ 1,206.25000	$ 22.05084	$ 14.21702	5	$ 2,062.45217
07 Abr 99	$ 9.65	$ 0.78750	$ 2,093.75035	$ 1,206.25000	$ 2.86415	$ 17.08117	6	$ 2,059.58802
08 Abr 99	$ 9.60	$ 0.74525	$ 2,077.37257	$ 1,200.00000	-$ 16.37778	$ 0.70339	7	$ 2,075.96580
09 Abr 99	$ 9.70	$ 0.81323	$ 2,118.38449	$ 1,212.50000	$ 41.01192	$ 41.71531	8	$ 2,034.95388
10 Abr 99	$ 9.70	$ 0.80743	$ 2,121.28639	$ 1,212.50000	$ 2.90190	$ 44.61720	9	$ 2,032.05198
11 Abr 99	$ 9.70	$ 0.80161	$ 2,124.19587	$ 1,212.50000	$ 2.90948	$ 47.52668	10	$ 2,029.14250
12 Abr 99	$ 9.70	$ 0.79577	$ 2,127.11307	$ 1,212.50000	$ 2.91720	$ 50.44389	11	$ 2,026.22530
13 Abr 99	$ 9.65	$ 0.75282	$ 2,111.09065	$ 1,206.25000	-$ 16.02242	$ 34.42146	12	$ 2,042.24772
14 Abr 99	$ 9.65	$ 0.74698	$ 2,114.00784	$ 1,206.25000	$ 2.91719	$ 37.33865	13	$ 2,039.33053
15 Abr 99	$ 9.65	$ 0.74113	$ 2,116.93316	$ 1,206.25000	$ 2.92532	$ 40.26398	14	$ 2,036.40521
16 Abr 99	$ 9.65	$ 0.73527	$ 2,119.86677	$ 1,206.25000	$ 2.93361	$ 43.19759	15	$ 2,033.47159
17 Abr 99	$ 9.65	$ 0.72938	$ 2,122.80884	$ 1,206.25000	$ 2.94206	$ 46.13965	16	$ 2,030.52953
18 Abr 99	$ 9.65	$ 0.72348	$ 2,125.75951	$ 1,206.25000	$ 2.95067	$ 49.09032	17	$ 2,027.57886
19 Abr 99	$ 9.55	$ 0.64625	$ 2,089.37557	$ 1,193.75000	-$ 36.38394	$ 12.70638	18	$ 2,063.96280
20 Abr 99	$ 9.55	$ 0.64040	$ 2,092.30184	$ 1,193.75000	$ 2.92627	$ 15.63266	19	$ 2,061.03653
21 Abr 99	$ 9.55	$ 0.63453	$ 2,095.23707	$ 1,193.75000	$ 2.93523	$ 18.56788	20	$ 2,058.10130
22 Abr 99	$ 9.50	$ 0.59446	$ 2,077.77175	$ 1,187.50000	-$ 17.46531	$ 1.10257	21	$ 2,075.56662
23 Abr 99	$ 9.45	$ 0.55542	$ 2,084.78898	$ 1,156.25000	$ 7.01722	$ 8.11979	22	$ 2,068.54939
24 Abr 99	$ 9.45	$ 0.54961	$ 2,087.69329	$ 1,156.25000	$ 2.90431	$ 11.02410	23	$ 2,065.64508
25 Abr 99	$ 9.45	$ 0.54379	$ 2,090.60682	$ 1,156.25000	$ 2.91354	$ 13.93764	24	$ 2,062.73154
26 Abr 99	$ 9.45	$ 0.53794	$ 2,093.52980	$ 1,156.25000	$ 2.92297	$ 16.86061	25	$ 2,059.80857
27 Abr 99	$ 9.50	$ 0.56500	$ 2,092.49976	$ 1,187.50000	-$ 1.03004	$ 15.83058	26	$ 2,060.83861
28 Abr 99	$ 9.50	$ 0.55905	$ 2,095.47507	$ 1,187.50000	$ 2.97531	$ 18.80589	27	$ 2,057.86330
29 Abr 99	$ 9.50	$ 0.55308	$ 2,098.46082	$ 1,187.50000	$ 2.98575	$ 21.79164	28	$ 2,054.87755
30 Abr 99	$ 9.50	$ 0.54709	$ 2,101.45727	$ 1,187.50000	$ 2.99645	$ 24.78809	29	$ 2,051.88110

Tabla 3.3

Ahora, si suponemos que cada contrato ampara un lote de cien dólares, considerando que el emisor posee los dólares necesarios para los contratos que ha emitido.

Y si el inversionista emite cinco contratos tipo call el día primero de abril de 1999 y desea conservar sus dólares por lo que se calcula la cuenta de margen que podemos observar en la tabla 3.3, la cual se basa en el precio de mercado del dólar.

En la tabla 3.3 también se observa la fecha, la paridad o precio de mercado, el precio del contrato en función del precio de mercado, el margen requerido en función de la paridad y el precio del contrato, el margen de mantenimiento, el margen de variación, el estado de pérdidas y ganancias, el número de días transcurridos y el estado de cuenta. Cuando el Estado de Cuenta es menor que el Margen de Mantenimiento se hace una llamada de margen al emisor para cubrir, ya sea mediante efectivo o el activo equivalente, la cantidad necesaria para igualar el Margen Inicial del día de inicio del contrato. En caso de ser negativo, es una ganancia para el emisor y puede retirarla o anexarla a la cuenta de margen. Es importante hacer notar que en el momento que baja el precio de la divisa en el mercado hay una ganancia para el emisor, la cual puede retirar, y siempre que el precio sube hay una pérdida y se le hace una llamada para que efectúe el depósito correspondiente.

Recordemos la forma en la cual son calculados los valores de la tabla anterior.

Margen Inicial O margen Requerido	***MI***
Margen de Mantenimiento	***Mm***
Margen de Variación al cierre de la jornada i	Mv_i
Estado de Pérdidas y ganancias al cierre de la jornada n	E_n

$$MI = T\left(\frac{M}{2} + max\{M - S,0\} - c\right)$$

$$Mm = T\left(\frac{M}{4} - max\{S - M,0\}\right)$$

$$Mv_i = MI_i - MI_{i-1}$$

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} Mv_i$$

Donde T, es el total de contratos multiplicados por el número de bienes que ampara un lote.

Ahora observemos el comportamiento del estado de pérdidas y ganancias en el caso de que sean emitidos contratos tipo put.

Si el inversionista emite cinco contratos tipo put el día primero de abril de 1999 y desea conservar sus dólares por lo que se calcula la cuenta de margen que podemos observar en la tabla 3.4, donde se considera la fecha, la paridad o el precio de mercado, el precio del contrato en función del precio de mercado, el margen requerido en función de la paridad y el precio del contrato, el margen de mantenimiento, el margen de variación, el estado de pérdidas y ganancias, el número de días transcurridos y el estado de cuenta.

Día	Paridad	Put	Margen Inicial o Margen Requerido	Margen de Mantenimiento	Margen de Variación	Pérdidas/ Ganancias	Día	Estado de Cuenta
01 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18323	$ 2,320.88281	$ 1,131.25000			0	$2,320.88281
02 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18280	$ 2,321.09853	$ 1,131.25000	$ 0.21572	$ 0.21572	1	$2,320.66709
03 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18236	$ 2,321.31935	$ 1,131.25000	$ 0.22083	$ 0.43654	2	$2,320.44626
04 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18191	$ 2,321.54539	$ 1,131.25000	$ 0.22604	$ 0.66258	3	$2,320.22023
05 Abr 99	$ 9.60	$ 0.19483	$ 2,302.58299	$ 1,150.00000	-$ 18.96240	-$ 18.29982	4	$2,339.18262
06 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18097	$ 2,322.01353	$ 1,131.43097	$ 19.43055	$ 1.13073	5	$2,319.75208
07 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18049	$ 2,322.25587	$ 1,131.43049	$ 0.24234	$ 1.37306	6	$2,319.50974
08 Abr 99	$ 9.60	$ 0.19349	$ 2,303.25475	$ 1,150.19349	-$ 19.00112	-$ 17.62805	7	$2,338.51086
09 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16672	$ 2,341.64181	$ 1,112.66672	$ 38.38706	$ 20.75901	8	$2,300.12380
10 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16617	$ 2,341.91733	$ 1,112.66617	$ 0.27552	$ 21.03452	9	$2,299.84828
11 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16560	$ 2,342.19891	$ 1,112.66560	$ 0.28158	$ 21.31610	10	$2,299.56670
12 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16503	$ 2,342.48668	$ 1,112.66503	$ 0.28777	$ 21.60387	11	$2,299.27893
13 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17733	$ 2,323.83330	$ 1,131.42733	-$ 18.65338	$ 2.95049	12	$2,317.93231
14 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17676	$ 2,324.11801	$ 1,131.42676	$ 0.28471	$ 3.23520	13	$2,317.64760
15 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17618	$ 2,324.40932	$ 1,131.42618	$ 0.29132	$ 3.52652	14	$2,317.35629
16 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17559	$ 2,324.70740	$ 1,131.42559	$ 0.29808	$ 3.82459	15	$2,317.05821
17 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17498	$ 2,325.01239	$ 1,131.42498	$ 0.30499	$ 4.12959	16	$2,316.75322
18 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17435	$ 2,325.32447	$ 1,131.42435	$ 0.31208	$ 4.44166	17	$2,316.44114
19 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20240	$ 2,286.30041	$ 1,168.95240	-$ 39.02406	-$ 34.58240	18	$2,355.46521
20 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20183	$ 2,286.58502	$ 1,168.95183	$ 0.28461	-$ 34.29779	19	$2,355.18059
21 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20125	$ 2,286.87705	$ 1,168.95125	$ 0.29203	-$ 34.00575	20	$2,354.88856
22 Abr 99	$ 9.50	$ 0.21647	$ 2,266.76701	$ 1,187.71647	-$ 20.11004	-$ 54.11579	21	$2,374.99860
23 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23272	$ 2,271.13798	$ 1,181.48272	$ 4.37096	-$ 49.74483	22	$2,370.62763
24 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23221	$ 2,271.39449	$ 1,181.48221	$ 0.25651	-$ 49.48831	23	$2,370.37112
25 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23168	$ 2,271.65870	$ 1,181.48168	$ 0.26421	-$ 49.22411	24	$2,370.10691
26 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23114	$ 2,271.93080	$ 1,181.48114	$ 0.27210	-$ 48.95200	25	$2,369.83481
27 Abr 99	$ 9.50	$ 0.21350	$ 2,268.24836	$ 1,187.71350	-$ 3.68244	-$ 52.63445	26	$2,373.51725

Tabla 3.4

Recordemos la forma en la cual son calculados los valores de la tabla.

$$MI = T\left(\frac{M}{2} + max\{S - M,0\} - p\right)$$

$$Mm = T\left(\frac{M}{4} - max\{M - S,0\}\right)$$

Ahora, con las mismas características para el cálculo de la prima por la cobertura que otorga el contrato, veremos el caso en que el inversionista no posee los dólares, es decir, la emisión está al descubierto y en la tabla 3.5 se muestra el comportamiento de la emisión de estos diez contratos tipo call.

Fecha	Paridad	Call	Margen Inicial o Margen Requerido	Margen de Mantenimiento	Margen de Variación	Pérdidas/ Ganancias	Día	Estado de Cuenta
01 Abr 99	$ 9.65	$0.82166	$ 2,751.66163	$ 723.75000			0	
02 Abr 99	$ 9.65	$0.81600	$ 2,746.00175	$ 723.75000	-$ 5.65988	-$ 5.65988	1	$ 2,757.32151
03 Abr 99	$ 9.65	$0.81033	$ 2,740.32862	$ 723.75000	-$ 5.67313	-$ 11.33301	2	$ 2,762.99464
04 Abr 99	$ 9.65	$0.80464	$ 2,734.64203	$ 723.75000	-$ 5.68659	-$ 17.01960	3	$ 2,768.68123
05 Abr 99	$ 9.60	$0.76233	$ 2,682.32928	$ 720.00000	-$ 52.31275	-$ 69.33235	4	$ 2,820.99398
06 Abr 99	$ 9.65	$0.79323	$ 2,723.22760	$ 723.75000	$ 40.89832	-$ 28.43403	5	$ 2,780.09566
07 Abr 99	$ 9.65	$0.78750	$ 2,717.49929	$ 723.75000	-$ 5.72830	-$ 34.16234	6	$ 2,785.82397
08 Abr 99	$ 9.60	$0.74525	$ 2,665.25486	$ 720.00000	-$ 52.24444	-$ 86.40677	7	$ 2,838.06840
09 Abr 99	$ 9.70	$0.81323	$ 2,753.23102	$ 727.50000	$ 87.97616	$ 1.56939	8	$ 2,750.09224
10 Abr 99	$ 9.70	$0.80743	$ 2,747.42723	$ 727.50000	-$ 5.80379	-$ 4.23440	9	$ 2,755.89603
11 Abr 99	$ 9.70	$0.80161	$ 2,741.60826	$ 727.50000	-$ 5.81897	-$ 10.05337	10	$ 2,761.71500
12 Abr 99	$ 9.70	$0.79577	$ 2,735.77386	$ 727.50000	-$ 5.83440	-$ 15.88777	11	$ 2,767.54940
13 Abr 99	$ 9.65	$0.75282	$ 2,682.81870	$ 723.75000	-$ 52.95515	-$ 68.84293	12	$ 2,820.50456
14 Abr 99	$ 9.65	$0.74698	$ 2,676.98433	$ 723.75000	-$ 5.83438	-$ 74.67730	13	$ 2,826.33893
15 Abr 99	$ 9.65	$0.74113	$ 2,671.13368	$ 723.75000	-$ 5.85065	-$ 80.52795	14	$ 2,832.18958
16 Abr 99	$ 9.65	$0.73527	$ 2,665.26645	$ 723.75000	-$ 5.86723	-$ 86.39518	15	$ 2,838.05681
17 Abr 99	$ 9.65	$0.72938	$ 2,659.38233	$ 723.75000	-$ 5.88412	-$ 92.27930	16	$ 2,843.94093
18 Abr 99	$ 9.65	$0.72348	$ 2,653.48099	$ 723.75000	-$ 5.90134	-$ 98.18064	17	$ 2,849.84227
19 Abr 99	$ 9.55	$0.64625	$ 2,556.24886	$ 716.25000	-$ 97.23213	-$195.41277	18	$ 2,947.07440
20 Abr 99	$ 9.55	$0.64040	$ 2,550.39631	$ 716.25000	-$ 5.85255	-$201.26532	19	$ 2,952.92695
21 Abr 99	$ 9.55	$0.63453	$ 2,544.52586	$ 716.25000	-$ 5.87045	-$207.13577	20	$ 2,958.79740
22 Abr 99	$ 9.50	$0.59446	$ 2,494.45649	$ 712.50000	-$ 50.06937	-$257.20514	21	$ 3,008.86677
23 Abr 99	$ 9.45	$0.55542	$ 2,395.42204	$ 683.75000	-$ 99.03445	-$356.23959	22	$ 3,107.90122
24 Abr 99	$ 9.45	$0.54961	$ 2,389.61343	$ 683.75000	-$ 5.80862	-$362.04821	23	$ 3,113.70984

Tabla 3.5

Recordemos la forma en la cual son calculados los valores de la tabla cuando el contrato tipo call se encuentra al descubierto.

$$MI = max\left\{T\left(c + \frac{2M}{10} - max\{S - M,0\}\right), T\left(c + \frac{M}{10}\right)\right\}$$

$$Mm = T\left(\frac{3M}{20} - max\{S - M,0\}\right)$$

De igual forma en la tabla 3.6, se observa el comportamiento de la emisión de diez contratos tipo put al descubierto.

Donde

$$MI = max\left\{T\left(p + \frac{2M}{10} - max\{M - S,0\}\right), T\left(p + \frac{M}{10}\right)\right\}$$

$$Mm = T\left(\frac{3M}{20} - max\{M - S,0\}\right)$$

Como se aprecia en los contratos al descubierto, está considerado el cien por cien de la ganancia por la emisión de todos los contratos más un porcentaje del precio que el bien subyacente tiene en el mercado. De esta forma el poseedor tiene la garantía de que el emisor, aún cuando nó tenga, físicamente, el activo posee el capital para hacer entrega del mismo o la diferencia por la cual el contrato garantiza el precio de ejercicio.

Fecha	Paridad	Put	Margen Inicial o Margen Requerido	Margen de Mantenimiento	Margen de Variación	Pérdidas/ Ganancias	Día	Estado de Cuenta
01 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18323	$ 1,963.23439	$ 1,297.50000			0	
02 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18280	$ 1,962.80295	$ 1,297.50000	-$ 0.43144	-$ 0.43144	1	$ 1,963.66582
03 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18236	$ 1,962.36130	$ 1,297.50000	-$ 0.44165	-$ 0.87309	2	$ 1,964.10748
04 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18191	$ 1,961.90922	$ 1,297.50000	-$ 0.45207	-$ 1.32516	3	$ 1,964.55955
05 Abr 99	$ 9.60	$ 0.19483	$ 2,014.83402	$ 1,340.00000	$ 52.92480	$ 51.59964	4	$ 1,911.63475
06 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18097	$ 1,960.97293	$ 1,297.50000	-$ 53.86109	-$ 2.26146	5	$ 1,965.49584
07 Abr 99	$ 9.65	$ 0.18049	$ 1,960.48826	$ 1,297.50000	-$ 0.48467	-$ 2.74613	6	$ 1,965.98052
08 Abr 99	$ 9.60	$ 0.19349	$ 2,013.49049	$ 1,340.00000	$ 53.00224	$ 50.25611	7	$ 1,912.97828
09 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16672	$ 1,906.71637	$ 1,255.00000	-$106.77412	-$ 56.51802	8	$ 2,019.75240
10 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16617	$ 1,906.16534	$ 1,255.00000	-$ 0.55103	-$ 57.06905	9	$ 2,020.30343
11 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16560	$ 1,905.60218	$ 1,255.00000	-$ 0.56316	-$ 57.63220	10	$ 2,020.86659
12 Abr 99	$ 9.70	$ 0.16503	$ 1,905.02664	$ 1,255.00000	-$ 0.57554	-$ 58.20775	11	$ 2,021.44213
13 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17733	$ 1,957.33340	$ 1,297.50000	$ 52.30676	-$ 5.90099	12	$ 1,969.13538
14 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17676	$ 1,956.76398	$ 1,297.50000	-$ 0.56942	-$ 6.47040	13	$ 1,969.70479
15 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17618	$ 1,956.18135	$ 1,297.50000	-$ 0.58263	-$ 7.05304	14	$ 1,970.28742
16 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17559	$ 1,955.58520	$ 1,297.50000	-$ 0.59615	-$ 7.64919	15	$ 1,970.88357
17 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17498	$ 1,954.97521	$ 1,297.50000	-$ 0.60999	-$ 8.25918	16	$ 1,971.49356
18 Abr 99	$ 9.65	$ 0.17435	$ 1,954.35106	$ 1,297.50000	-$ 0.62415	-$ 8.88333	17	$ 1,972.11771
19 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20240	$ 2,062.39919	$ 1,382.50000	$108.04813	$ 99.16480	18	$ 1,864.06958
20 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20183	$ 2,061.82996	$ 1,382.50000	-$ 0.56923	$ 98.59557	19	$ 1,864.63881
21 Abr 99	$ 9.55	$ 0.20125	$ 2,061.24589	$ 1,382.50000	-$ 0.58407	$ 98.01151	20	$ 1,865.22288
22 Abr 99	$ 9.50	$ 0.21647	$ 2,116.46597	$ 1,425.00000	$ 55.22008	$153.23159	21	$ 1,810.00280
23 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23272	$ 2,122.72404	$ 1,417.50000	$ 6.25807	$159.48966	22	$ 1,803.74473
24 Abr 99	$ 9.45	$ 0.23221	$ 2,122.21101	$ 1,417.50000	-$ 0.51303	$158.97663	23	$ 1,804.25776

Tabla 3.6

Así que en el estado de pérdidas y ganancias refleja la cantidad que tiene que anexar o puede retirar de su estado de cuenta. En el caso de la emisión de diez contratos tipo call al descubierto (Tabla 3.5), el inversionista presenta una ganancia en su estado de cuenta y recibió llamada a margen los días 9 y 10 de abril.

Pero en la realidad podría haber, en caso de ser un contrato americano, quién decidiera ejercer el día 9 de abril; presentando diferencias en el estado de cuenta, ya que tendría que comprar cada dólar que no posee a $9.70 y entregarlo al poseedor de la opción que ampara un precio de $ 9.50 por cada dólar que ampara el contrato.

Si fueran ejercidos dos contratos el día 9 de abril de 1999, el inversionista, emplearía aproximadamente $ 1940.00 en adquirir los doscientos dólares y recibiría $ 1900.00 por ellos. El inversionista pagaría una diferencia aproximada de $ 200.00 más comisiones e impuestos si los diez contratos fueran ejercidos el día 9 de abril de 1999, pero como se puede observar no posee los $ 9700.00 para adquirir los mil dólares necesarios para que el poseedor pueda comprarlos a un precio de ejercicio de $ 9.50 por cada dólar que ampara el contrato, sin embargo gracias a la cuenta de margen posee esta cantidad para cubrir la diferencia y poder adquirir el activo.

En cuanto a los contratos tipo put al descubierto, las ganancias para el emisor aumentan cuando el precio de la divisa en el mercado aumenta y las pérdidas se hacen mayores cuanto más baja el precio de la divisa en el mercado, tal y como se aprecia en la tabla 3.6 de la página anterior. Debido a que el margen requerido no cae por debajo del margen de mantenimiento, mientras no sean retirados los excesos de margen, el inversionista no recibe, hasta la fecha indicada, llamada de margen.

III.IV LÍMITES EN EL VALOR DE UNA OPCIÓN

Es importante saber porque la existencia de estos límites y la valoración mediante un enfoque en el que la obtención de beneficios con la compra y/o venta de activos sin asumir ningún riesgo debe ser considerada para evitar este desequilibrio del cual pueden tomar ventaja algunos participantes en el mercado.

Al saber que el arbitraje funciona y que todos los participantes del mercado están consientes y preparados para aprovechar la ventaja en las oportunidades de arbitraje, numeraré algunas hipótesis importantes para el desarrollo de estas cotas que indican cuando puede existir arbitraje.

1) No existen impuestos y costos de transacción.
2) Se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés libre de riesgo.
3) Todos los activos aquí considerados son completamente divisibles.
4) Se pueden emitir contratos al descubierto sin ningún límite.
5) Todas las transacciones se pueden realizar simultáneamente y éstas no afectan los precios del mercado.

Como debemos suponer, la tasa de interés libre de riesgo es siempre positiva y si el precio del contrato está por arriba del límite superior o por abajo del límite inferior, entonces, hay beneficio para quién pueda hacer uso de esta ventaja haciendo arbitraje.

Recordaré la notación que se ha empleado hasta el momento para una mejor comprensión del tema.

M	Precio actual del bien subyacente en el mercado.
S	Precio de ejercicio que otorga el contrato.
T	Tiempo de expiración que posee el contrato.
t	Tiempo transcurrido desde la fecha de emisión del contrato.
$T-t$	Tiempo remanente, tiempo que resta para la fecha de expiración del contrato.
M_t	Precio de vencimiento del bien subyacente en el mercado.
i	Tasa de interés libre de riego.
σ	Volatilidad del precio del bien subyacente.
c	Precio de un contrato tipo call con estilo europeo.
p	Precio de un contrato tipo put con estilo europeo.
C	Precio de un contrato tipo call con estilo americano.
P	Precio de un contrato tipo put con estilo americano

LÍMITES SUPERIORES

Un contrato americano o europeo tipo call otorga al poseedor el derecho de comprar el bien subyacente a un precio preestablecido. No importa que ocurra, como ya se sabe lo que ocurre bajo el comportamiento de la tasa de interés libre de riesgo, el contrato jamás puede tener un valor mayor al precio de mercado que tiene el bien subyacente en el momento de la emisión del contrato.

Por lo tanto, el precio del bien subyacente es una cota superior para un contrato tipo call.

$$c \leq M \text{ y } C \leq M$$

Si esta relación no fuera cierta, cualquier arbitrajista podría, fácilmente, hacer sin riesgo, aprovechando mediante la compra del activo y la venta del contrato, una ganancia equivalente a la diferencia entre el precio del contrato y el precio del bien subyacente en el mercado.

Un contrato americano o europeo tipo put otorga al poseedor el derecho de vender el bien subyacente al precio de ejercicio. No importa que tan bajo se encuentre el precio del activo en el mercado, el contrato jamás puede tener un precio mayor que el precio de ejercicio.

$$p \leq S \text{ y } P \leq S$$

Sabemos que en un contrato europeo tipo put, durante el tiempo de expiración que otorga el contrato, la opción tiene un valor menor que el precio de ejercicio. Así que de lo anterior, al inicio del contrato, éste tiene un valor menor que el valor presente del precio de ejercicio.

$$p \leq Se^{-iT}$$

Si esto no fuera cierto, cualquier arbitrajista podría, fácilmente, hacer sin riesgo, aprovechando al emitir contratos e invertir el capital total resultante de la venta del total de los contratos emitidos a la tasa de interés libre de riesgo, una ganancia equivalente a los intereses generados durante la vigencia del contrato.

En el caso del contrato americano no es posible aplicar el criterio anterior ya que existe la probabilidad de que el contrato sea ejercido antes de la fecha de vencimiento.

LÍMITES INFERIORES PARA LOS CONTRATOS SOBRE BIENES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS

Una cota inferior para el precio de un contrato europeo tipo call sobre un bien subyacente que no paga dividendos, es:

$$M - Se^{-i(T-t)}$$

Para demostrar que la expresión anterior es cota inferior, consideramos dos portafolios.

(a) Un contrato europeo tipo call más una cantidad $Se^{-i(T-t)}$ en efectivo.

(b) Un bien subyacente con precio de mercado M, en la fecha de emisión del contrato.

En este instante el portafolio (a) tiene un valor de $c + Se^{-i(T-t)}$.

Si el efectivo es invertido, durante la vigencia del contrato, a la tasa de interés libre de riesgo, entonces el efectivo incrementará hasta S.

Recordando, tenemos estas posibilidades

1) Si $M_t \leq S$ el contrato expira sin valor de ejercicio y el portafolio (a) en la fecha de vencimiento, tiene un valor S.

2) Si $S < M_t$ se ejerce el contrato con un valor de ejercicio $M_t - S$, por lo que el portafolio (a), en la fecha de vencimiento tiene un valor M_t.

Entonces el portafolio (a), en la fecha de vencimiento del contrato vale

$$max\{M_t, S\}$$

De la misma forma, el portafolio (b), en este instante tiene un valor M y en la fecha de vencimiento del contrato tiene un valor M_t. Así pues, el portafolio (a), siempre tiene un valor mayor o igual, en la fecha de vencimiento del contrato, que el portafolio (b).

En ausencia de oportunidades de arbitraje, esto se cumple en cualquier instante, por lo que el portafolio (a), siempre es mayor o igual que el portafolio (b).

Es decir

$$M \leq c + Se^{-i(T-t)} \Rightarrow M - Se^{-i(T-t)} \leq c$$

En el peor de los casos el contrato expira sin valor de ejercicio, por lo cual el precio del contrato es mayor o igual a cero.

Por lo tanto

$$max\{M - Se^{-i(T-t)}, 0\} \leq c$$

En el caso de un contrato europeo tipo put sobre un bien subyacente que no otorga dividendos la cota inferior es

$$Se^{-i(T-t)} - M$$

Para demostrar que la expresión anterior es cota inferior, consideramos dos portafolios.

(c) Un contrato europeo tipo put más un bien subyacente con precio de mercado M.

(d) Una cantidad $Se^{-i(T-t)}$ en efectivo.

En este instante el portafolio (c) tiene un valor $p + M$.

Recordando, tenemos estas posibilidades

1) Si $S \leq M_t$ el contrato expira sin valor de ejercicio y el portafolio (c), en la fecha de vencimiento, tiene un valor M_t.

2) Si $M_t < S$ se ejerce el contrato con un valor de ejercicio $S - M_t$, por lo que el portafolio (c), en la fecha de vencimiento tiene un valor S.

Entonces el portafolio (c), en la fecha de vencimiento del contrato, vale

$$max\{M_t, S\}$$

De la misma forma, suponiendo que el efectivo es invertido durante la vigencia del contrato a la tasa de interés libre de riesgo, entonces el portafolio (d), en la fecha de vencimiento del contrato tiene un valor S.

Así pues, el portafolio (c), siempre tiene un valor mayor o igual, en la fecha de vencimiento del contrato, que el portafolio (d). En ausencia de oportunidades de arbitraje, esto se cumple en cualquier instante, por lo que el portafolio (c), siempre es mayor o igual que el portafolio (d).

Es decir

$$Se^{-i(T-t)} \leq p + M \Rightarrow Se^{-i(T-t)} - M \leq p$$

En el peor de los casos el contrato expira sin valor de ejercicio, por lo cual el precio del contrato es mayor o igual a cero.

Por lo tanto

$$max\{Se^{-i(T-t)} - M, 0\} \leq p$$

En el caso de los contratos americanos, como ya se menciono, el derecho de ejercer el contrato antes de la fecha de vencimiento otorga al poseedor más oportunidades de ejercer su derecho y por esto la opción americana no puede ser menos valiosa que el contrato europeo.

Así, de esta manera, la cota inferior para un contrato americano con la misma fecha de vencimiento, precio de mercado, precio de ejercicio; es la cota inferior del correspondiente contrato europeo.

Considerando que el contrato americano puede ser ejercido en el instante de su emisión, recibiendo $M - S$ para el contrato tipo call y $S - M$ para el tipo put, agregamos esta consideración para que las cotas inferiores de un contrato americano sean, respectivamente

$$max\{M - Se^{-i(T-t)}, M - S, 0\} \leq C$$

$$max\{Se^{-i(T-t)} - M, S - M, 0\} \leq P$$

De las cotas inferiores de los contratos americanos, se puede ver que no es optimo ejercer un contrato americano tipo call antes de la fecha de vencimiento.

$$Se^{-i(T-t)} < S \Rightarrow M - S < M - S\,e^{-i(T-t)}$$

Lo cual indica que la ganancia, obtenida por el poseedor del contrato, al ejercer inmediatamente el contrato es menor que la ganancia por ejercer el contrato hasta la fecha de vencimiento.

Para esta demostración consideramos, también, dos portafolios.

(e) Un contrato americano tipo call más una cantidad $Se^{-i(T-t)}$ en efectivo.

(f) Un bien subyacente como el que ampara el contrato con precio de mercado M.

En cualquier instante, antes de la fecha de vencimiento del contrato, si el contrato es ejercido; entonces, el valor del primer portafolio es

$$M - S + Se^{-i(T-t)}$$

Es decir, el portafolio (e) tiene un valor de ejercicio menor que el valor de ejercicio del portafolio (f), siempre que el contrato sea ejercido antes de la fecha de vencimiento. Entonces el portafolio (e), siempre tiene un valor de ejercicio menor que el portafolio (f) cuando el contrato es ejercido antes de la fecha de vencimiento. Pero cuando el contrato es ejercido hasta la fecha de vencimiento, suponiendo que el efectivo es invertido, durante la vigencia del contrato a la tasa de interés libre de riesgo, el valor de ejercicio del portafolio (e) es:

$$max\{M_t, S\}$$

Mientras el valor de ejercicio del portafolio (f), en la fecha de vencimiento del contrato, es M_t y existe la probabilidad de que $M_t < S$, es decir, el portafolio (e) siempre tiene un valor de ejercicio mayor o igual que el portafolio (f), sólo cuando el contrato es ejercido en la fecha de vencimiento.

Por lo tanto, un contrato americano tipo call, emitido sobre un bien subyacente que no paga dividendos, jamás debe ser ejercido antes de la fecha de vencimiento, lo cual indica, también, que un contrato americano tipo call emitido sobre un bien subyacente que no otorga dividendos durante la vigencia del contrato tiene el mismo costo por la cobertura que otorga el correspondiente contrato europeo, es decir $c = C$.

En el caso de un contrato americano tipo put que no paga dividendos durante la vigencia del contrato, siempre será un mejor beneficio, para el poseedor del contrato, ejercer su derecho antes de la fecha de vencimiento.

$$Se^{-i(T-t)} < S \Rightarrow Se^{-i(T-t)} - M < S - M$$

Lo cual indica que ejercer inmediatamente el contrato genera un beneficio mayor, para el poseedor del contrato, que hacerlo hasta la fecha de vencimiento del contrato.

Para esta demostración consideramos dos portafolios

(g) Un contrato americano tipo put más un bien subyacente con precio M.

(h) Una cantidad $Se^{-i(T-t)}$ en efectivo.

En cualquier instante, antes de la fecha de vencimiento del contrato, si el contrato es ejercido, entonces, el valor de ejercicio del portafolio (g) en ese momento es S. Es decir, el portafolio (g) siempre tiene un valor de ejercicio mayor cuando el contrato es ejercido antes de la fecha de vencimiento. Pero si el contrato es ejercido hasta la fecha de vencimiento, el portafolio (g) tiene un valor de ejercicio

$$max\{M_t, S\}$$

Mientras el valor de ejercicio del portafolio (h) en la fecha de vencimiento, suponiendo que el efectivo fue invertido durante la vigencia del contrato a la tasa de interés libre de riesgo, es S. Es decir, el portafolio (g), en la fecha de vencimiento, puede tener un valor de ejercicio mayor o igual que el portafolio (h).

De aquí que un contrato americano tipo put emitido sobre un bien subyacente que no paga dividendos durante la vigencia del contrato, otorga un beneficio mayor al poseedor si es ejercido antes de la fecha de vencimiento, es decir, $S - M \leq P$ y de acuerdo a esto un contrato americano tipo put emitido sobre un bien subyacente que no otorga dividendos durante la vigencia del contrato tiene un costo mayor que la cobertura otorgada por el correspondiente contrato europeo, es decir, $p < P$.

De todo lo anterior tenemos

$$max\{M - Se^{-i(T-t)}, 0\} \leq c \leq M \qquad \textbf{Ecuación 3.9}$$

$$max\{Se^{-i(T-t)} - M, 0\} \leq p \leq Se^{-iT} \qquad \textbf{Ecuación 3.10}$$

$$max\{M - Se^{-i(T-t)}, M - S, 0\} \leq C \leq M \qquad \textbf{Ecuación 3.11}$$

$$max\{Se^{-i(T-t)} - M, S - M, 0\} \leq P \leq S \qquad \textbf{Ecuación 3.12}$$

Donde $c = C$ y $p < P$.

Cuando un bien subyacente otorga dividendos durante la vigencia del contrato, definimos a D como el valor presente de todos los dividendos pagados durante la vigencia del contrato y obtenemos las expresiones siguientes.

$$max\{M - D - Se^{-i(T-t)}, 0\} \le c \le M \qquad \textbf{Ecuación 3.13}$$

$$max\{Se^{-i(T-t)} + D - M, 0\} \le p \le Se^{-iT} \qquad \textbf{Ecuación 3.14}$$

$$max\{M - D - Se^{-i(T-t)}, M - S, 0\} \le C \le M \qquad \textbf{Ecuación 3.15}$$

$$max\{Se^{-i(T-t)} + D - M, S - M, 0\} \le P \le S \qquad \textbf{Ecuación 3.16}$$

PARIDAD PUT- CALL

Ya hemos deducido que en contratos emitidos sobre bienes que no pagan dividendos la relación entre un call americano y uno europeo es una igualdad, es decir, $c = C$ y en el caso de un put americano y uno europeo $p < P$.

Ahora derivaremos una importante relación entre p y c, para lo cual tomamos en consideración los dos siguientes portafolios.

(a) Un contrato europeo tipo call más una cantidad $Se^{-i(T-t)}$ en efectivo.

(c) Un contrato europeo tipo put más un bien subyacente con precio de mercado M.

Ambos portafolios tienen un valor de ejercicio, en la fecha de vencimiento, que ya conocemos.

$$max\{M_t, S\}$$

Esto se debe a que son contratos europeos y por lo tanto no pueden ser ejercidos antes de su fecha de vencimiento.

Ya que tienen el mismo valor de ejercicio al vencimiento, deben, por lo tanto, tener valores idénticos en este instante. En el momento de su emisión, el portafolio (a) tiene un valor $c + Se^{-i(T-t)}$ y el portafolio (c) tiene un valor $p + M$.

Por lo tanto

$$c + Se^{-i(T-t)} = p + M \qquad \textbf{Ecuación 3.17}$$

Esta relación es conocida como paridad put-call, la cual muestra que el valor de un contrato europeo tipo call con cierto precio de ejercicio y fecha de vencimiento puede ser deducido al valuar un contrato europeo tipo put con el mismo precio de ejercicio y con la misma fecha de vencimiento y viceversa.

Es importante saber que si no se cumple la paridad put-call, hay oportunidades de arbitraje.

De la paridad put-call obtenemos

$$c = p + M - Se^{-i(T-t)} \qquad \textbf{Ecuación 3.18}$$

$$p = c + Se^{-i(T-t)} - M \qquad \textbf{Ecuación 3.19}$$

$$C < P + M - Se^{-i(T-t)} \qquad \textbf{Ecuación 3.20}$$

$$C + Se^{-i(T-t)} - M < P \qquad \textbf{Ecuación 3.21}$$

En caso de que el bien subyacente pague dividendos durante la vigencia del contrato, la paridad put-call es

$$c - D + Se^{-i(T-t)} = p + M \qquad \textbf{Ecuación 3.22}$$

En donde D es el valor presente de todos los dividendos pagados durante la vigencia del contrato.

Por lo tanto

$$c = p + M - D - Se^{-i(T-t)} \qquad \textbf{Ecuación 3.23}$$

$$p = c + D + Se^{-i(T-t)} - M \qquad \textbf{Ecuación 3.24}$$

$$C < P + M - D - Se^{-i(T-t)} \qquad \textbf{Ecuación 3.25}$$

$$C + D + Se^{-i(T-t)} - M < P \qquad \textbf{Ecuación 3.26}$$

VARIABLE ALEATORIA

Cuando a cada punto en un espacio muestral le corresponde un resultado numérico, definimos a esta relación como una función en el espacio muestral. Esta función se llama variable aleatoria o variable estocástica.

Recordando la definición de cálculo. A la cantidad y se le llama función del número x, si a toda x le corresponde un valor y. El término de variable aleatoria es un poco confuso; función aleatoria es más apropiado ya que la variable independiente es un punto en un espacio muestral, es decir, constituye el resultado de un experimento.

Sea X una variable aleatoria y sean x_1, x_2, . . . , los valores que toma la variable estocástica. Las x_i son enteros en el caso de una variable aleatoria discreta y reales en el caso de una variable aleatoria continua.

El agregado de todos los puntos muestrales en los cuales X toma el valor fijo x_i, forma el evento en el que $X= x_i$ y su probabilidad se denota

$$P(X = x_i)$$

A la función $f_x\,(x_i) = P(X = x_i)$ se le llama distribución[1] de probabilidades de la variable aleatoria X, donde

1) $0 \le f(x_i) \le 1$

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

DISTRIBUCIÓN BERNOULLI

Los ensayos repetidos e independientes se llaman de Bernoulli cuando, en cada prueba o ensayo, sólo hay dos resultados posibles y sus probabilidades son las mismas en todas las pruebas.

Supongamos tener un experimento donde a cada evento asociado a éste se le denomina prueba. Con cada prueba existe una probabilidad asociada para el posible resultado.

[1] Este término debe distinguirse del término "función de distribución" que se aplica a funciones monótonas crecientes que tienden a cero cuando la variable independiente es infinitamente pequeña y tienden a uno cuando la variable independiente es infinitamente grande.

En ocasiones la probabilidad no cambia de un ensayo al siguiente. A estas pruebas se les llama independientes y se conocen como pruebas de Bernoulli quién las investigó a finales del siglo XVII.

Se denota a las dos probabilidades por p y q, donde p se refiere al resultado con probabilidad de éxito y q con probabilidad de fracaso. Es evidente que p y q son positivos y además $p + q = 1$.

Una variable aleatoria X se distribuye Bernoulli y se conoce como variable aleatoria Bernoulli, sí sólo sí, su función de densidad está dada por

$$f_x(x,p) = P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & \text{Para } x = 0,1 \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $0 \le p \le 1$

El espacio muestral de n ensayos de Bernoulli contiene 2^n puntos o sucesiones de n símbolos p y q, donde cada punto representa un resultado posible del experimento.

Como los ensayos son independientes, las probabilidades se multiplican, es decir, las probabilidades de obtener x éxitos de n ensayos de una sucesión es:

$$\underbrace{ppp\cdots p}_{x}\underbrace{qq\cdots q}_{n-x} = p^x q^{n-x}$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Cada éxito tiene una probabilidad p, una probabilidad $q = 1 - p$ para cada fracaso y a menudo solo nos interesa el número total de éxitos obtenidos de una sucesión de n ensayos de Bernoulli, al margen del orden en que se presenten.

El número de éxitos puede ser $0, 1, 2, \ldots, n$ y el primer problema es determinar las probabilidades correspondientes.

Ahora, de n ensayos resultan x éxitos y $n - x$ fracasos, así que esto puede ocurrir del mismo número de maneras que se distribuyen x veces p de n ensayos. Es decir, nuestro evento contiene a todas las combinaciones de n ensayos, donde x son éxitos y $n - x$ son fracasos.

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Y por definición, cada ensayo tiene la probabilidad $p^x q^{n-x}$, así que si $b(x,n,p)$ es la probabilidad de que al realizar n ensayos de Bernoulli, con probabilidad p de obtener éxito y $q = 1 - p$ de obtener fracaso, se logren x éxitos y $n - x$ fracasos.

Entonces, la variable aleatoria X tiene una distribución Binomial y se conoce como variable aleatoria binomial, si sólo si, su función de densidad está dada por

$$f_x(x,n,p) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{Para } x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

Recordando $(p+q)^n = 1^n = 1$

Desarrollando $(p+q)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + \binom{n}{n} p^n$

$$\sum_{x=0}^{n} f_x(x,n,p) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

Por lo que $f_x(x, n, p)$ es una función de densidad.

Por lo tanto $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x=0}^{n} f_x(x,n,p)$ es función de distribución.

EL PRECIO DEL BIEN SUBYACENTE COMO UN PROCESO ESTOCÁSTICO

En la práctica, la expresión proceso estocástico se usa generalmente cuando se ha introducido un parámetro del tiempo donde el desarrollo futuro depende solamente del estado actual y no del historial del proceso ni de la forma en la que se haya alcanzado el estado actual.

En estos procesos, sólo intervienen una cantidad numerable de estados y dependen de un parámetro discreto del tiempo, es decir, los cambios ocurren solamente en épocas[1] fijas $t = 0, 1, 2, \ldots$

De aquí que una variable cuyo valor evoluciona a través del tiempo en forma aleatoria siga un proceso estocástico.

---

[1] Al estudiar procesos estocásticos, en la teoría de probabilidades, se usa el término época para denotar puntos en el eje del tiempo. En las exposiciones formales el tiempo se refiere a duraciones.

Los procesos estocásticos pueden definirse de tiempo continuo o de tiempo discreto.

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{T_n \mid 0 \leq n\}$.

En este caso n es un punto en el espacio paramentral T, donde para cada $n \in \mathrm{N}$, T_n es un punto en el espacio de estados M. La familia $\{T_n \mid 0 \leq n\}$ describe una trayectoria aleatoria en el espacio M, siendo M_t su posición en el instante t.

El registro de estas trayectorias se conoce como realización del proceso.

Así pues, cualquier activo financiero sigue un proceso de variable discreta, es decir, su cambio a través de una jornada de operaciones es en pesos o en centavos, sin embargo son tratados como variable continua ya que su análisis bajo el cálculo diferencial e integral es más versátil que si fueran tratados como de variable discreta.

El parámetro del tiempo sigue un proceso de tiempo discreto ya que el cambio es de referencia diaria, es decir, cuando el mercado cierra, el activo tiene un precio al cierre. Más sin embargo, los precios continúan variando aún durante el cierre del mercado. Por lo que el proceso estocástico seguido por los activos financieros es un proceso de variable continua y tiempo continuo.

CAMINATA ALEATORIA SIMPLE

Considerando el proceso estocástico como la trayectoria del precio de un bien subyacente a través del tiempo.

En el tiempo donde $n = 0$, el precio del bien subyacente en el mercado es M, cuando el tiempo transcurre hasta $n = 1$, el precio del bien subyacente en el mercado puede aumentar o disminuir.

Sean $0 < d < 1 \leq a$, entonces cuando el precio del bien subyacente aumenta de M a Ma y disminuye de M a Md.

En caso de esperar un incremento en el precio del bien subyacente, existe la probabilidad de que el precio aumente y complementariamente de que no incremente, es decir, p y $q = 1 - p$ respectivamente.

Sean $a - 1$ y $1 - d$, el incremento proporcional y el decremento proporcional, respectivamente durante un periodo, donde $0 \leq x \leq n$ y x es el número de ocasiones que el precio del bien subyacente aumenta y $n - x$ el número de veces que le precio del bien subyacente disminuye.

Actualmente, en el tiempo $n - 1$, el precio del bien subyacente tiene dos posibles movimientos, uno a la alza y otro a la baja. En caso de que el precio aumente, se mueve de la posición actual T_{n-1} hacia la derecha, a la posición T_n, $Ma^x d^{n-1-x}(a - 1)$ unidades monetarias, mientras si el precio disminuye, se mueve de la posición actual T_{n-1} hacia la derecha, a la posición T_n, $Ma^x d^{n-1-x}(1 - d)$ unidades monetarias.

Este proceso estocástico $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tiene un espacio parametral de tiempo discreto donde para cada $n \in N$, T_n es un punto en el espacio de estados, al cierre de cada jornada, $M = \{Ma^x, Ma^{x-1}d, Ma^{x-2}d^2, \ldots, Mad^{x-1}, Md^x\}$ llamado espacio de estados discretos.

Así que cuando el precio del bien subyacente toma una trayectoria, en cada uno de los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como registro de n jornadas sucesivas. Las sumas parciales, en cada punto, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan las ganancias sucesivas acumuladas.

Sea x_n el estado de pérdidas y ganancias del precio de un bien subyacente en el mercado en el n-ésimo periodo, es decir, el movimiento del precio del bien subyacente de la posición T_{n-1} hasta la posición T_n en el tiempo n.

Como ya se observó, en cada periodo, el precio del bien subyacente tiene la probabilidad p de incrementar su precio y $q = 1 - p$ de no incrementar. Además, el precio del bien subyacente en el mercado, después del n-ésimo periodo es $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ donde las x_k son variables aleatorias mutuamente independientes, con la misma distribución.

De acuerdo a lo anterior, la evolución en el precio del bien subyacente o el estado de pérdidas y ganancias x_n asociado a T_n es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con

$$p = P(x_n = Ma^x d^{n-x}(a-1)) \text{ y } q = P(x_n = Ma^x d^{n-x}(1-d))$$

Donde

$$0 \leq x \leq n \text{ y } T_n = x_1 + x_2 + \cdot + x_n$$

Si el precio del bien subyacente comienza con un valor de mercado nulo, entonces $T_n = 0$.

Por lo tanto, el proceso estocástico $\{T_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es llamado una caminata aleatoria simple.

El proceso $T_n^m = T_n + m$ es una caminata aleatoria simple con precio de mercado inicial m. Es decir, cuando x_n es la trayectoria del bien subyacente en el n-ésimo periodo, entonces $T_0^m = m$ es el precio de mercado M y T_n^m es el precio del bien subyacente en el mercado durante el periodo n.

Ahora, para calcular la probabilidad de que $T_n^m = y$ hay que determinar la distribución de T_n^m y contar el número de incrementos durante la trayectoria desde m hasta y durante los n periodos.

Como el precio inicial del bien subyacente en el mercado es M y partiendo de T_0^m, el precio es multiplicado por cada ocasión que éste incrementa y también por cada ocasión que no hay cambio en el precio.

Al suponer que x es el número de ocasiones que el precio del bien subyacente incrementa durante los n periodos, entonces en el n-ésimo periodo $Ma^x d^{n-x}$ es el precio probable del bien subyacente en el mercado.

Considerando a p como la probabilidad de que el precio del bien subyacente en el mercado aumente y q como la probabilidad de que el precio del bien subyacente en el mercado no aumente, de tal forma que aumente su precio x veces de n posibles incrementos, entonces $p^x q^{n-x}$ es la probabilidad de que el precio de un bien subyacente presente x aumentos y $n-x$ descensos durante los n periodos considerados.

Recordando que el número de combinaciones con x incrementos de n posibilidades que puede tener un activo para alcanzar el precio y, tenemos

$$P(T_n^m = M_t) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{Para } x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}$$

De lo anterior, podemos deducir que el precio de un bien subyacente en el mercado puede aproximarse mediante un proceso binomial empleando periodos discretos.

A continuación se hará un análisis para el cálculo del precio de contratos a un periodo, dos periodos y generalizando el resultado a n periodos, empleando el modelo binomial.

III.V MODELO BINOMIAL

Para iniciar el análisis y comportamiento del modelo binomial hay que considerar que no existen oportunidades de arbitraje para ningún inversionista y plantear las siguientes hipótesis.

1) No existen corretajes, diferenciales entre los precios de compra y venta en el mercado, comisiones impuestos, es decir, no existen impuestos y costos de operación.
2) Cualquier bien subyacente es completamente divisible, es decir, se puede comprar o vender cualquier número real de todo bien subyacente considerado en el mercado.
3) Se puede comprar o vender cualquier bien subyacente al descubierto, es decir, se puede comprar o vender un bien subyacente sin poseerlo con el compromiso de entregarlo en una fecha preestablecida.
4) No se consideran depósitos de garantía en compra o venta de opciones al descubierto.
5) La tasa libre de riesgo se aplica de igual forma tanto al deudor como al acreedor.
6) Se pueden realizar todas las operaciones simultáneamente.
7) Las operaciones no afectan el comportamiento del mercado.
8) El precio del bien subyacente evoluciona como un proceso binomial multiplicativo.
9) El bien subyacente no otorga dividendos al poseedor.

El modelo binomial servirá de base para la valuación y cobertura de capital, índices, divisas, mercancías y tasas de interés. El modelo de valuación binomial provee un simple pero fuerte acercamiento para comprender la valuación y cobertura de los productos derivados.

MODELO BINOMIAL A UN PERIODO

El modelo supone que al final de cada periodo el precio del bien subyacente puede tener sólo dos posibles valores.

A esta suposición la llamamos supuesto binomial.

Consideremos un bien subyacente con un precio de mercado actual M y una opción tipo call estilo europeo con valor actual c y emitida sobre el bien subyacente.

El tiempo de expiración es T y durante este periodo, el precio del bien subyacente puede variar pero en la fecha de vencimiento puede aumentar de M a Ma con probabilidad p o disminuir de M a Md con probabilidad $1 - p = q$ donde $0 < d < 1 < a$.

Sea $M(T) = M_T$ el precio del bien subyacente al final del periodo, es decir, en el tiempo T.

$$a = \frac{M_T}{M} \quad \text{y} \quad d = \frac{M_T}{M}$$

1) Si el precio del bien subyacente aumenta de M a Ma, entonces el precio de la opción al final del periodo es $c_a = \max\{ Ma - S , 0 \}$.

2) Si el precio del bien subyacente disminuye de M a Md, entonces el precio de la opción al final del periodo es $c_d = \max\{ Md - S , 0 \}$.

$$\begin{tikzcd} & (Ma, c_a) \\ (M, c) \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & (Md, c_d) \end{tikzcd}$$

Este es un árbol binomial representando estado del precio del activo y el contrato al final del periodo.

Hasta aquí hemos determinado el valor de la opción en la fecha de vencimiento, pero aún no conocemos el valor presente.

Para determinar el valor presente emplearemos argumento de arbitraje.

Formamos un portafolio que sea equivalente a lo que pagará el contrato al final del periodo. El portafolio es llamado call sintético y consta de:

1) Una posición larga en Δ bienes subyacentes objeto de la cobertura.

2) Una posición corta en una opción idéntica al contrato que se desea valuar.

Para conocer el valor presente del contrato debemos conocer el valor de Δ que mantenga al portafolio libre de riesgo.

Un portafolio libre de riesgo, sin oportunidad de arbitraje, debe redituar la tasa de interés libre de riesgo.

Al madurar el contrato tenemos dos situaciones que dan dos posibles valores al portafolio.

1) Incremento en el precio del bien subyacente, por lo que al final del periodo el valor del portafolio es $Ma\Delta - C_a$.

2) Decremento en el precio del bien subyacente, por lo que al final del periodo el valor del portafolio es $Md\Delta - C_d$.

Queremos un portafolio equivalente a lo que pagará el contrato, por lo que al subir o bajar el precio del bien subyacente, en la fecha de vencimiento el valor del portafolio debe ser el mismo.

Entonces

$$Ma\Delta - c_a = Md\Delta - c_d \Rightarrow Ma\Delta - Md\Delta = c_a - c_d \Rightarrow \Delta\,(\,Ma - Md\,) = c_a - c_d$$

Por lo tanto

$$\Delta = \frac{c_a - c_d}{Ma - Md}$$

Es decir, Δ es el número de activos que debe poseer el portafolio.

Esto es, Δ es la razón de cambio en el precio del contrato con respecto al cambio en el precio del bien subyacente.

Ya que el portafolio es libre de riesgo debe redituar, al término del periodo, la tasa de interés libre de riesgo. Entonces, suponiendo que el precio del bien subyacente aumenta en la fecha de vencimiento, entonces el valor presente del portafolio es $(\,Ma\Delta - c_a\,)\,e^{-iT}$ y el valor del portafolio el día de la emisión del contrato es $M\Delta - c$.

De aquí

$$M\Delta - c = (\,Ma\Delta - c_a\,)\,e^{-iT}$$

Por lo tanto

$$c = M\Delta - (\,Ma\Delta - c_a\,)\,e^{-iT}$$

Sustituyendo Δ en la igualdad anterior

$$
\begin{aligned}
c &= M\left(\frac{c_a - c_d}{Ma - Md}\right) - \left[Ma\left(\frac{c_a - c_d}{Ma - Md}\right) - c_a\right]e^{-iT} \\
&= \frac{c_a - c_d}{a - d} - \left[Ma\left(\frac{c_a - c_d}{Ma - Md}\right) - c_a\right]e^{-iT} \\
&= \frac{c_a - c_d}{a - d} - \left[\frac{a(c_a - c_d)}{a - d} - c_a\right]e^{-iT} \\
&= \frac{c_a - c_d}{a - d} - \left[\frac{a\,c_a - a\,c_d - c_a(a - d)}{a - d}\right]e^{-iT} \\
&= \frac{c_a - c_d}{a - d} + \left[\frac{a\,c_d - d\,c_a}{a - d}\right]e^{-iT} \\
&= \left[\frac{c_a e^{iT} - c_d e^{iT}}{a - d} + \frac{a\,c_d - d\,c_a}{a - d}\right]e^{-iT} \\
&= \left[\frac{c_a(e^{iT} - d) + c_d(a - e^{iT})}{a - d}\right]e^{-iT}
\end{aligned}
$$

De esta forma conocemos ya el valor actual del contrato.

$$
c = \left[\frac{c_a(e^{iT} - d) + c_d(a - e^{iT})}{a - d}\right]e^{-iT}
$$

Este argumento es independiente de la probabilidad de ocurrencia en los movimientos a la alza o movimientos a la baja en el precio del bien subyacente.

Suponiendo que el precio del bien subyacente es M y el precio de ejercicio es S y solo tenemos dos posibles precios de mercado al finalizar el periodo de vigencia, Ma y Md, no importa que posición, optimista o pesimista, se considere. Ambas posturas están de acuerdo en el precio actual del contrato ya que de no estarlo existirían posibilidades de arbitraje.

Entonces el argumento es independiente al incremento o decremento en el precio del bien subyacente y obtuvimos el valor del contrato considerando los posibles valores que éste tendría en la fecha de vencimiento y luego los evaluamos a su valor presente a la tasa de interés libre de riesgo.

Cabe resaltar que los modelos para valuar opciones siguen este procedimiento llamado inducción hacia atrás, donde la única fecha en que sabemos el valor de una opción es en la fecha de su vencimiento y este valor en la fecha de expiración es el que determina el valor presente del contrato.

VALUACIÓN EN UN MUNDO NEUTRAL AL RIESGO

En el presente análisis sobre el modelo binomial a un periodo, construimos una opción sintética sin la existencia de arbitraje, haciendo que el valor de la opción sintética sea el valor de la opción. Este análisis nos proporciona una idea muy importante conocida como el principio de valuación neutral al riesgo.

Como ya se comentó, no es necesario conocer la probabilidad de aumento o disminución en el precio del bien subyacente, sin embargo estamos acostumbrados a considerar la variable p, como una probabilidad favorable ante el evento esperado y $1-p$ como la probabilidad desfavorable ante el mismo evento.

Ya que en este caso valuamos un contrato tipo call estilo europeo, esperamos que el precio del bien subyacente objeto de la cobertura incremente su valor en el mercado, por lo que p es la probabilidad de aumento y $1-p$ es la probabilidad de una disminución.

Sea

$$p = \frac{e^{iT} - d}{a - d} \Rightarrow 1 - p = 1 - \frac{e^{iT} - d}{a - d} = \frac{a - e^{iT}}{a - d}$$

Por lo tanto

$$c = [\, c_a p + c_d (1 - p)\,]\, e^{-iT} \qquad \textbf{Ecuación 3.27}$$

De la ecuación anterior podemos observar que el precio del contrato depende de la variable p, donde

$$p = \frac{e^{iT} - d}{a - d}$$

Analicemos, pues las características de esta variable.

Esta es una condición para que no exista arbitraje.

Como $0 \leq p \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{e^{iT} - d}{a - d} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{iT} - d \leq a - d \Rightarrow \boldsymbol{d \leq e^{iT} \leq a}$

Es decir

$$\boldsymbol{d \leq e^{iT} \leq a}$$

Ya que existen inversionistas optimistas y pesimistas, entre otros, con un vértice diferente en cuanto a la probabilidad de movimiento a la alza o a la baja en el precio actual del bien subyacente en el momento de valuar al contrato. Entre estos inversionistas no existe discrepancia en el valor de la variable p, ya que ésta depende directamente del incremento a cuando hay un movimiento ascendente y del decremento d cuando hay un movimiento descendente, del tiempo de vigencia y la tasa de interés libre de riesgo vigente durante el periodo.

Así pues utilizamos las probabilidades p y $1-p$, las cuales son probabilidades neutrales al riesgo o martingalas.

Recordando que en este análisis empleamos un contrato tipo call sin embargo se puede emplear, del mismo modo, un contrato tipo put.

Siendo este el caso, empleando un contrato tipo put, las martingalas p y $1-p$ no dependen del tipo de contrato que se está valuando.

Sea $M(T)$ el precio esperado del bien subyacente en el tiempo T. Suponiendo que p es la probabilidad de incremento en el precio del bien subyacente, calculemos el precio esperado del bien subyacente.

Sea $p = \dfrac{e^{iT}-d}{a-d}$ tal que $\boldsymbol{d \le e^{iT} \le a}$

$$M(T) = Map + Md(1-p) = Map + Mdp = Mp(a-d) + Md$$

Sustituyendo p tenemos

$$M(T) = \frac{M(e^{iT}-d)(a-d)}{a-d} + Md = M(e^{iT}-d) + Md = M\,e^{iT}$$

Esto indica que el precio del bien subyacente, considerando la probabilidad p, crece a la tasa de interés libre de riesgo.

Además suponer que p es la probabilidad de que el precio del bien subyacente en el mercado aumente es equivalente a considerar que el rendimiento por la inversión, del bien subyacente, es la tasa de interés libre de riesgo.

Esto pues, es un principio general en la valuación de opciones.

Ejemplo.

El precio del dólar los primeros días del mes de marzo de 1999 es de \$ 10.10, se sabe que al final del mes de mayo de 1999 el precio del dólar será \$ 10.70 con probabilidad p de ocurrencia o \$ 9.90 con probabilidad complementaria $1 - p$.

Bajo la suposición de que la divisa solo puede tomar cualquiera de estos dos valores al cabo de tres meses, se desea valuar una opción tipo call con estilo europeo con precio de ejercicio al vencimiento de \$ 10.20 por dólar. El promedio de la tasa de cetes a veintiocho días durante estos tres meses fue de 21.672 %, el inversionista asume que la tasa de interés libre de riesgo es de 21.416 %.

$$(M = 10.10, c) \begin{cases} \xrightarrow{\;p\;} (M_a = 10.70, c_a = 0.50) \\ \xrightarrow{\;1-p\;} (M_d = 9.90, c_d = 0.00) \end{cases}$$

Ya que se cumple la condición para que no exista arbitraje.

$$p = \frac{e^{iT} - d}{a - d} = \frac{e^{\frac{0.21416(3)}{12}} - 0.9802}{1.05941\text{-}0.9802} = 0.94437$$

$$c = \left[c_a\, p + c_d\,(1 - p)\right] e^{-iT} = 0.50\,(0.94437)\, e^{\frac{-0.21416}{4}} = 0.44757$$

El precio de la opción, en el momento de cerrar el contrato, es \$ 0.44757 y la probabilidad $p = 0.94437$ indica que el contrato tiene el 94.437 % de valer \$ 0.50 y un complemento del 5.563 % de valer \$ 0.00 en la fecha de vencimiento del contrato.

Recordando que $d \le e^{iT} \le a$ supongamos que el inversionista necesita adquirir dólares hasta dentro de tres meses y sabe que si invierte el capital necesario, actualmente para adquirir los dólares, al final del periodo éste será incrementado por la tasa de interés libre de riesgo.

En caso de que invirtiera su capital en adquirir, desde el día de la emisión del contrato, dólares espera obtener cuando menos el mismo rendimiento que obtendría al invertir el capital a la tasa de interés libre de riesgo, sin embargo cree que invertir el capital y proteger su postura de compra a \$ 10.20 invirtiendo \$ 0.44757 por cada dólar que desea comprar e invirtiendo \$ 9.65243 por cada dólar que pudo haber comprado, es más benéfico.

El 31 de mayo de mayo de 1999 el dólar se cotizó a $ 9.90 en el mercado, por lo que los contratos hubieran expirado sin valor alguno. Sin embargo él pudo adquirir cada dólar $ 0.30 por debajo del precio de ejercicio y además el capital invertido creció a $ 10.18331 por lo que la inversión que efectuó en obtener su cobertura, fue mejor de lo que esperaba, $ 0.28331 por cada dólar que deseaba adquirir.

En caso de haber adquirido los dólares, hubiera perdido en el tipo de cambio menos la tasa de interés libre de riesgo que le fuera otorgado por la inversión en esta divisa, no tendría el mismo rendimiento ya que su capital sería, al tipo de cambio del último día de mayo, $ 10.02453 aproximadamente.

En caso de que el precio de la divisa hubiera sido $ 10.70, el poseedor del contrato hubiera obtenido una ganancia de $ 0.50 ya sea en la adquisición o en el diferencial entre el precio de mercado y el precio de ejercicio y además su capital invertido $ 9.65243 es casi el precio de ejercicio, $ 10.18331. Obteniendo una ganancia, por la inversión de $ 0.44757, de $ 0.48331 en tres meses.

Por otra parte el emisor, en caso de que el dólar hubiera subido a $ 10.70, invirtiendo los $ 0.44757, a la tasa libre de riesgo, incrementa su inversión a $ 0.47219 obteniendo una pérdida de $ 0.2781 por cada dólar que el poseedor del contrato desea adquirir.

Si el contrato expira sin valor, al bajar la divisa, e invierte el total de la prima su ganancia asciende a $ 0.47219 por cada dólar que el inversionista deseaba adquirir.

Veamos el análisis paso a paso.

Formamos un portafolio tomando una posición larga en Δ dólares y una posición corta en una opción tipo call estilo europeo emitida sobre el mismo bien subyacente.

Entonces

$$\Delta = \frac{c_a - c_d}{Ma - Md} = \frac{0.50}{10.70 - 9.90} = 0.625$$

Siendo esta Δ la que hace a nuestro portafolio estar libre de riesgo.

Es decir, al adquirir una posición larga en 0.625 dólares por cada opción adquirida sobre cada dólar que se desea comprar.

Observemos que efectivamente, Δ hace estar libre de riesgo al portafolio.

1) Si el precio de la divisa aumenta su precio de mercado a \$ 10.70

$$Ma\,\Delta - c_a = 10.70\,(\,0.625\,) - 0.50 = 6.18750$$

2) Si el precio de la divisa disminuye su precio de mercado a \$ 9.90

$$Md\,\Delta - c_d = 9.90\,(\,0.625\,) - 0.00 = 6.18750$$

De esta forma no importa el comportamiento en el precio del bien subyacente en la fecha de vencimiento, el precio del portafolio es el mismo.

El valor presente del portafolio es

1) $(\,Ma\,\Delta - c_a\,)\,e^{-iT} = 6.18750\,e^{-\frac{0.21416}{4}} = 5.86493$

2) $(\,Md\,\Delta - c_d\,)\,e^{-iT} = 6.18750\,e^{-\frac{0.21416}{4}} = 5.86493$

Esto se debe a que un portafolio libre de riesgo debe, en ausencia de arbitraje, obtener la tasa de interés libre de riesgo.

Entonces, el precio actual del contrato

1) $c = M\,\Delta - (\,M\,a\,\Delta - c_a\,)\,e^{-iT} = 10.10\,(\,0.625\,) - 5.86493 = 0.44757$

2) $c = M\,\Delta - (\,Mda\,\Delta - c_d\,)\,e^{-iT} = 9.90\,(\,0.625\,) - 5.86493 = 0.44757$

Lo cual corresponde al resultado ya obtenido.

Si el costo del contrato fuera superior, el portafolio sería menos valioso y obtendríamos una tasa de interés libre de riesgo mayor que la esperada. Sí por el contrario, el costo del contrato fuera menor, el portafolio sería más valioso por lo que podríamos obtener capital por una menor tasa de interés libre de riesgo.

Ya que consideramos a p como una probabilidad de incremento en el precio de mercado de un bien subyacente en un mundo neutral al riesgo y de esta forma el rendimiento esperado sobre la inversión de un activo a la tasa de interés libre de riesgo nos muestra que

$$M\,e^{iT} = Ma\,p + Md\,(\,1 - p\,) = Ma\,p + Md - Md\,p = p\,(Ma - Md\,) + Md$$

Entonces

$$p = \frac{M\, e^{iT} - Md}{Ma - Md} = \frac{e^{iT} - d}{a - d}$$

Resultado que satisface, suponiendo que no existen oportunidades de arbitraje, el análisis del modelo binomial a un periodo.

Es decir, suponer que no existen oportunidades de arbitraje y suponer un mundo neutral al riesgo nos conduce al mismo resultado valuando un contrato de opción.

En todo lo anterior hubiéramos podido suponer que al final del periodo el precio del bien subyacente pudiera tomar uno de tres o más posibles valores. Sin embargo considerar el modelo binomial con dos posibles valores tiene dos principales razones.

1) Simplifica la situación.

2) Al incrementar el número de periodos los posibles valores no aumentan en forma indiscriminada, por el contrario, al considerar n periodos tenemos $n + 1$ valores posibles al finalizar el periodo n.

Es decir, podemos generalizar este modelo para un número arbitrario de periodos.

Al dividir un año en n periodos, entonces existen $n + 1$ posibles valores en el precio de mercado del bien subyacente en el mercado y $n + 1$ posibles precios de la opción al finalizar el año.

MODELO BINOMIAL CON n PERIODOS

El análisis anterior está considerado para un periodo, ahora haremos un análisis para un modelo multiperiodo, suponiendo que las tasas de interés son constantes.

En el presente análisis haremos uso, nuevamente, de una opción tipo call estilo europeo. Comencemos, pues, con dos periodos.

En el momento en que se emite el contrato el precio de mercado del bien subyacente es M, es decir, $T_0^m = M$ y el precio del contrato es $T_0^c = c$.

Al término del primer periodo el precio de mercado del bien subyacente en el mercado evoluciona siguiendo un proceso binomial. Así que al término del primer periodo el precio del bien subyacente en el mercado es Ma o Md.

Es decir

1) $T_1^m = T_1 + M = Ma$ Si el precio del activo aumenta.

2) $T_1^m = T_1 + M = Md$ Si el precio del activo disminuye.

El precio del contrato al final del primer periodo, de igual forma, evoluciona y toma cualquiera de dos posibles valores.

1) $T_1^c = T_1 + c = c_a$ Donde $c_a = max\{Ma - S, 0\}$

2) $T_1^c = T_1 + c = c_d$ Donde $c_d = max\{Md - S, 0\}$

Al finalizar el primer periodo tenemos dos posibles precios de mercado del activo. Considerando la situación donde el precio de mercado del bien subyacente aumenta, la evolución del precio de mercado del activo al término del segundo periodo puede, siguiendo un proceso binomial multiplicativo, darle dos posibles valores.

1) $T_2^m = T_2 + M = Maa$ Si el precio del activo aumenta.

2) $T_2^m = T_2 + M = Mad$ Si el precio del activo disminuye.

También el precio del contrato evoluciona y al término del segundo periodo toma dos posibles valores.

1) $T_2^c = T_2 + c = c_{aa}$ Donde $c_{aa} = max\{Maa - S, 0\}$

2) $T_2^c = T_2 + c = c_{ad}$ Donde $c_{ad} = max\{Mad - S, 0\}$

Al finalizar el primer periodo tenemos dos posibles precios de mercado del activo. Considerando la situación donde el precio de mercado del bien subyacente disminuye, la evolución del precio de mercado del activo toma dos posibles valores.

1) $T_2^m = T_2 + M = Mad$ Si el precio del activo aumenta.

2) $T_2^m = T_2 + M = Mdd$ Si el precio del activo disminuye.

Análogamente, el precio del contrato.

1) $T_2^c = T_2 + c = c_{ad}$ Donde $c_{ad} = max\{Mad - S, 0\}$

2) $T_2^c = T_2 + c = c_{dd}$ Donde $c_{dd} = max\{Mdd - S, 0\}$

De esta forma tenemos la rejilla que representa la evolución en el precio del bien subyacente en el mercado.

$$
T_0^m = M \quad
\begin{array}{l}
\nearrow \; T_1^m = T_1+M=Ma \quad \begin{array}{l} \nearrow \; T_2^m = T_2+M=Maa \qquad \textit{Con probabilidad } p^2 \\ \searrow \; T_2^m = T_2+M=Mad \qquad \textit{Con probabilidad } 2p\,(1-p) \end{array} \\
\searrow \; T_1^m = T_1+M=Md \quad \begin{array}{l} \nearrow \; T_2^m = T_2+M=Mad \\ \searrow \; T_2^m = T_2+M=Mad \qquad \textit{Con probabilidad } (1-p)^2 \end{array}
\end{array}
$$

Este diagrama de evolución en el precio de mercado del bien subyacente también es llamado árbol binomial.

Observando la evolución en el precio del contrato tenemos el siguiente árbol binomial o rejilla.

$$
T_0^c = c \quad
\begin{array}{l}
\nearrow \; T_1^c = T_1 + c = c_a \quad \begin{array}{l} \nearrow \; T_2^c = T_2 + c = c_{aa} = max\,\{\, Maa - S\,,\, 0 \,\} \\ \searrow \; T_2^c = T_2 + c = c_{ad} = max\,\{\, Mad - S\,,\, 0 \,\} \end{array} \\
\searrow \; T_1^c = T_1 + c = c_d \quad \begin{array}{l} \nearrow \; T_2^c = T_2 + c = c_{ad} \\ \searrow \; T_2^c = T_2 + c = c_{dd} = max\,\{\, Mdd - S\,,\, 0 \,\} \end{array}
\end{array}
$$

Así es que ahora tenemos que calcular c_a y c_d a partir de los valores intrínsecos conocidos al final del siguiente periodo, es decir, T_2^m.

$$
(\, T_0^m = M\,,\, T_0^c = c\,) \quad
\begin{array}{l}
\nearrow \; (T_1^m = Ma\,,\, T_1^c = c_a) \quad \begin{array}{l} \nearrow \; (T_2^m = Maa\,,\, T_2^c = c_{aa}) \\ \searrow \; (T_2^m = Mad\,,\, T_2^c = c_{ad}) \end{array} \\
\searrow \; (T_1^m = Md\,,\, T_1^c = c_d) \quad \begin{array}{l} \nearrow \; (T_2^m = Mad\,,\, T_2^c = c_{ad}) \\ \searrow \; (T_2^m = Mdd\,,\, T_2^c = c_{dd}) \end{array}
\end{array}
$$

Donde

$c_a = max\,\{\, Ma - S, 0 \,\}$, $c_d = max\,\{\, Md - S, 0 \,\}$,
$c_{aa} = max\,\{\, Maa - S, 0 \,\}$, $c_{ad} = max\,\{\, Mad - S, 0 \,\}$, $c_{dd} = max\,\{\, Mdd - S, 0 \,\}$.

Tomando en cuenta que $T_1^m = Ma$ y que el precio del bien subyacente en el mercado evoluciona de tal forma que al final del siguiente periodo T_2^m puede tomar los valores Maa o Mad y de igual forma en $T_1^c = c_a$ evoluciona hasta $T_2^c = c_{aa}$ o $T_2^c = c_{ad}$.

Bajo esta consideración construimos un portafolio sintético que consta de

1) Una posición larga en Δ activos.

2) La venta de la opción tipo call estilo europeo.

Así que el valor actual del portafolio es $\Delta Ma - c_a$ y el valor de éste al final del periodo sería $\Delta Maa - c_{aa}$ o $\Delta Mad - c_{ad}$.

Es decir

$$\Delta Maa - c_{aa} = \Delta Mad - c_{ad} \Rightarrow \Delta Maa - \Delta Mad = c_{aa} - c_{ad} \Rightarrow \Delta\,(\,Maa - Mad\,) = c_{aa} - c_{ad}$$

Por lo tanto

$$\Delta = \frac{c_{aa} - c_{ad}}{Ma(a-d)}$$

En este caso el tiempo de expiración que otorga el contrato está dividido en dos periodos, es decir, $n = 2$, con longitud h, donde $h = \dfrac{1}{n}$ y un portafolio libre de riesgo.

Ya que el portafolio es libre de riesgo debe redituar, al término del periodo, la tasa de interés libre de riesgo.

Suponiendo que el precio del bien subyacente aumenta en la fecha de vencimiento, el valor presente del portafolio es $(\,Maa\Delta - c_{aa}\,)\,e^{-ihT} = (\,Mad\Delta - c_{ad}\,)\,e^{-ihT}$ y el valor del portafolio el día de la emisión del contrato es $Ma\Delta - c_a$.

De aquí

$$Ma\Delta - c_a = (\,Maa\Delta - c_{aa}\,)\,e^{-ihT}$$

Por lo tanto

$$c_a = Ma\Delta - (\,Maa\Delta - c_{aa}\,)\,e^{-ihT}$$

Sustituyendo Δ en la igualdad anterior

$$c_a = Ma\left(\frac{c_{aa} - c_{ad}}{Ma(a-d)}\right) - \left[Maa\left(\frac{c_{aa} - c_{ad}}{Ma(a-d)}\right) - c_{aa}\right]e^{-ihT} = \frac{c_{aa} - c_{ad}}{a-d} - \left[\frac{d\,c_{ad} - a\,c_{ad}}{a-d}\right]e^{-ihT}$$

$$= \left[\frac{c_{aa}\,e^{ihT} - c_{dd}\,e^{ihT} + a\,c_{ad} - d\,c_{aa}}{a-d}\right]e^{-ihT} = \left[\frac{c_{aa}(e^{ihT} - d) + c_{ad}(a - e^{ihT})}{a-d}\right]e^{-ihT}$$

Sea

$$p = \frac{e^{ihT} - d}{a - d} \Rightarrow 1 - p = 1 - \frac{e^{ihT} - d}{a - d} = \frac{a - e^{ihT}}{a - d}$$

Por lo que

$$c_a = [\ c_{aa}p + c_{ad}(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}$$

En la situación en la que el precio del bien subyacente en el mercado durante T_1^m es Md y su evolución hasta T_2^m puede ser Mad o Mdd, tenemos que

$$Md\Delta - c_d = (\ Mad\Delta - c_{ad}\ )\ e^{-ihT} = \ (\ Mdd\Delta - c_{dd}\ )\ e^{-ihT}$$

Sustituyendo $\Delta = \dfrac{c_{ad} - c_{dd}}{Md(a-d)}$ en la igualdad anterior

$$c_d = Md\left(\frac{c_{ad} - c_{dd}}{Md(a-d)}\right) - \left[Mad\left(\frac{c_{ad} - c_{dd}}{Md(a-d)}\right) - c_{ad}\right]e^{-ihT} = \frac{c_{ad} - c_{dd}}{a-d} - \left[\frac{d\,c_{ad} - a\,c_{dd}}{a-d}\right]e^{-ihT}$$

$$= \left[\frac{c_{ad}\,e^{ihT} - c_{dd}\,e^{ihT} + a\,c_{dd} - d\,c_{aa}}{a-d}\right]e^{-ihT} = \left[\frac{c_{ad}(e^{ihT} - d) + c_{dd}(a - e^{ihT})}{a-d}\right]e^{-ihT}$$

Por lo que

$$c_d = [\ c_{ad}p + c_{dd}(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}$$

Sustituyendo c_a y c_d en la ecuación 3.27, donde $c = [\ c_a p + c_d(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}$

$$c \ = [[\ c_{aa}p + c_{ad}(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}p + [\ c_{ad}p + c_{dd}(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}(\ 1 - p\ )\ ]\ e^{-ihT}$$

$$= [\ c_{aa}p^2 + 2c_{ad}\,p\,(\ 1 - p\ ) + \ c_{dd}(\ 1 - p\ )^2\ \ ]\ e^{-2ihT}$$

Sustituyendo $c_{aa} = max\ \{\ Maa - S, 0\ \}$, $c_{ad} = max\ \{\ Mad - S, 0\ \}$, $c_{dd} = max\ \{\ Mdd - S, 0\ \}$.

Tenemos que

$$c = [max\{\ Maa - S, 0\ \}p^2 + 2\ max\{\ Mad - S, 0\ \}p\ (\ 1 - p\ ) + max\{\ Mdd - S, 0\ \}(\ 1 - p\ )^2\ ]\ e^{-2ihT}$$

Ecuación 3.28

De esta forma tenemos el valor de una opción tipo call estilo europeo valuada por el método binomial considerando dos periodos.

Ejemplo

El tipo de cambio en enero 31 de 1997 es de \$ 7.83 por dólar, al cabo de tres meses, el último día de abril, el tipo de cambio será de \$ 8.2998 con probabilidad p de ocurrencia o \$ 7.75 con probabilidad $1-p$.

Tres meses después, el último día de junio, considerando que el tipo de cambio, el último día de abril fue de \$ 8.2998 por dólar, la divisa tendrá un valor de \$ 8.79779 con probabilidad p de ocurrencia o tendrá un valor de \$ 8.215 con probabilidad $1-p$ de ocurrencia. Considerando la situación donde el tipo de cambio, el último día de abril fue de \$ 7.75, la divisa tendrá un valor, el último día de junio de \$ 8.215 con probabilidad p o un valor de \$ 7.67082 con probabilidad $1-p$.

Suponiendo que el bien subyacente puede tomar cualquiera de estos tres valores en el mercado al cabo de seis meses, se desea saber el valor de una opción tipo call estilo europeo con un precio de ejercicio al vencimiento de \$ 7.95 considerando una tasa de interés libre de riesgo del 20 %.

$$p = \frac{e^{ihT} - d}{a - d} = \frac{e^{\frac{0.2(6)}{2(12)}} - 0.98978}{1.06 - 0.98978} = 0.87569$$

$$c = [\, 0.84779\,(0.87569)^2 + 2(0.265)(\,0.87569)(\,0.12431)\,]\; e^{-\frac{0.2(6)}{2(12)}} = 0.64045$$

Después de haber realizado un análisis para el modelo binomial con dos periodos podemos generalizar este modelo para n periodos. Al dividir el periodo de validez del contrato en n intervalos de longitud h, entonces existen $n+1$ posibles valores de mercado en la fecha de expiración del contrato.

En este caso $h = \frac{1}{n}$.

Balanceando el portafolio en cada estado en el tiempo T_0^m, T_1^m, ... , T_n^m, podemos valuar la opción durante estos $n+1$ estados, es decir, completamos dinámicamente el mercado.

En el ejemplo anterior, el mercado está completado dinámicamente por el modelo binomial ya que al final de cada estado en el tiempo, tanto el precio del bien subyacente en el mercado como el valor de la opción solo pueden tomar uno de los dos posibles valores.

Hasta ahora conocemos el comportamiento del precio del bien subyacente en el mercado considerando dos periodos. A continuación analizaremos el comportamiento, siguiendo un proceso binomial multiplicativo en n periodos.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & & (Ma^n, c_{a_1 \cdots a_n}) \\
 & & & & \cdots \; < & (Ma^{n-1}d, c_{a_1 \cdots a_{n-1} d_1}) \\
 & & & (Ma^3, c_{a_1 a_2 a_3}) < & < & (Ma^{n-2}d^2, c_{a_1 \cdots a_{n-2} d_1 d_2}) \\
 & & (Ma^2, c_{a_1 a_2}) < & & & \\
 & (Ma, c_{a_1}) < & & (Ma^2 d, c_{a_1 a_2 d_3}) < & < & \\
(M,c) < & & (Mad, c_{a_1 d_2}) < & & & \\
 & (Md, c_{d_1}) < & & (Mad^2, c_{a_1 d_2 d_3}) < & < & \\
 & & (Md^2, c_{d_1 d_2}) < & & & (Ma^2 d^{n-2}, c_{a_1 a_2 d_1 \cdots d_{n-2}}) \\
 & & & (Md^3, c_{d_1 d_2 d_3}) < & < & (Mad^{n-1}, c_{a_1 d_1 \cdots d_{n-1}}) \\
 & & & & \cdots \; < & (Md^n, c_{d_1 \cdots d_n}) \\
 & & & & & \\
T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_n
\end{array}
$$

Donde $c_{a_1 \cdots a_k d_1 \cdots d_{n-k}} = max\ \{ Ma^k d^{n-k} - S , 0 \}$

Diagrama 3.1

El diagrama 3.1 muestra la evolución del precio del bien subyacente en el mercado y el valor de una opción tipo call estilo europeo siguiendo un proceso binomial multiplicativo en n periodos.

Recordando un proceso estocástico como la trayectoria que el precio del bien subyacente en el mercado describe a través del tiempo, donde $T_n^m = T_n + M_n$ es el desplazamiento del bien subyacente en el mercado durante el n-ésimo periodo y $T_0^m = M$ es el precio actual del bien subyacente en el mercado.

Ya que $Ma^k d^{n-k}$ son los posibles $n + 1$ valores que el bien subyacente puede tomar en el mercado en el periodo n, entonces

$$
P(T_n^m = M\ a^k\, d^{n-k}) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k} & \text{Para } k = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}
$$

Suponiendo nuevamente un mundo neutral al riesgo, entonces tenemos dos posibilidades para valuar una opción tipo call estilo europeo.

1) Calcular recursivamente el valor de la opción al final de cada uno de los n periodos, comenzando por el periodo $n - 1$, considerando los valores correspondientes calculados al final de cada uno de los nodos de cada periodo.

$$c_{n-1} = [c_{a_n} p + c_{d_n} (1 - p)] e^{-ihT} \qquad \textbf{Ecuación 3.29}$$

Donde

c_{n-1} Es el valor del contrato en el periodo $n - 1$.
c_{a_n} Es el valor del contrato cuando éste aumenta su valor del periodo $n - 1$ a n.
c_{d_n} Es el valor del contrato cuando éste disminuye su valor del periodo $n - 1$ a n.

Considerando que

$$P(T_n^m = M\, a^k\, d^{n-k}) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{Para } k = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Y considerando todos los casos y sus probabilidades que se observan en el árbol binomial o rejilla del diagrama 3.1, obtenemos una extensión de la ecuación 3.28 en la que se puede valuar una opción de compra estilo europeo a dos periodos.

2) Calcular el valor de la opción empleando la fórmula general.

$$c = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} max\{M\, a^k\, d^{n-k} - S, 0\} \right] e^{-iT} \qquad \textbf{Ecuación 3.30}$$

Consideremos el ejemplo anterior empleando, primero, la forma recursiva.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (T_2^m = 8.79779\ ,\ T_2^c = c_{aa}) \\ & & (T_1^m = 8.2998,\ T_1^c = c_u) & < & \\ (\ T_0^m = 7.83\ ,\ T_0^c = c\ ) & < & & & (T_2^m = 8.215\ ,\ T_2^c = c_{ad}) \\ & & (T_1^m = 7.75\ ,\ T_1^c = c_d) & < & \\ & & & & (T_2^m = 7.67082\ ,\ T_2^c = c_{dd}) \end{array}$$

En este caso $n = 2$ y observamos que la martingala satisface $0 \le p \le 1$.

Para emplear la forma recursiva y encontrar el valor del contrato en cada uno de los nodos T_i^c primero tenemos que encontrar el valor del contrato en el último periodo. En este caso, tres valores.

1) Cuando $T_2^m = 8.79779$, $T_2^c = c_{aa} = max\ \{ 8.79779 - 7.95 , 0 \} = 0.84779$

2) Cuando $T_2^m = 8.215$, $T_2^c = c_{ad} = max\ \{ 8.215 - 7.95 , 0 \} = 0.265$

3) Cuando $T_2^m = 7.67082$, $T_2^c = c_{dd} = max\ \{ 7.67082 - 7.95 , 0 \} = 0$

Como se puede apreciar, para el último periodo, el valor del contrato en cada nodo es el valor intrínseco correspondiente al precio del bien subyacente en el mercado. Ahora, para calcular el valor del contrato en el periodo anterior empleamos la forma recursiva, en este caso tenemos que hacer dos cálculos, para los dos nodos correspondientes.

1) Cuando $T_1^m = 8.2998$, $T_1^c = c_a = 0.73753$

2) Cuando $T_1^m = 7.75$, $T_1^c = c_d = 0.22074$

Es aquí, en este momento cuando empleamos la forma recursiva empleando los tres valores intrínsecos del último periodo, obteniendo los dos valores correspondientes al periodo.

$$c_a = c_{n-1} = [c_{a_n} p + c_{d_n}(1-p)]\, e^{-ihT} = [0.84779(0.87569) + 0.265(0.12431)]\, e^{-\frac{0.2(6)}{2(12)}} = 0.73753$$

$$c_d = c_{n-1} = [c_{a_n} p + c_{d_n}(1-p)]\, e^{-ihT} = [0.265(0.87569) + 0(0.12431)]\, e^{-\frac{0.2(6)}{2(12)}} = 0.22074$$

En este momento calcularemos el valor del contrato de compra estilo americano empleando los precios al final del primer periodo obtenidos en el paso anterior.

1) Cuando $T_0^m = 7.83$, $T_0^c = c = 0.64045$

$$c_{n-1} = [c_{a_n} p + c_{d_n}(1-p)]\, e^{-ihT} = [0.73753(0.87569) + 0.222074(0.12431)]\, e^{-\frac{0.2(6)}{2(12)}} = 0.64045$$

El cual corresponde al cálculo realizado con el método binomial con dos periodos.

Ahora empleamos la forma general para el mismo ejemplo y veamos el resultado.

$$
\begin{aligned}
c &= \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} max\{M\ a^k\ d^{n-k} - S,0\}\right] e^{-iT} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k} 0.87569^k\ 0.12431^{2-k} max\{M\ a^k\ d^{2-k} - S,0\}\right] e^{-\frac{0.20(6)}{2(12)}} \\
&= \left[\frac{2!(0.12431)^2(0)}{0!2!} + \frac{2!(0.87569)^1(0.12431)^1(0.265)}{1!1!} + \frac{2!(0.87569)^2(0.84779)}{2!0!}\right] e^{-\frac{0.20(6)}{2(12)}} \\
&= 0.64045
\end{aligned}
$$

Que de igual manera corresponde al resultado esperado.

Ahora analicemos el resultado considerando una opción tipo put estilo europeo.

De manera análoga, consideramos un bien subyacente con precio de mercado M y una opción tipo put estilo europeo con un valor actual p y emitida sobre el bien subyacente.

Formando un portafolio que sea equivalente a lo que pagará el contrato, tenemos un portafolio sintético construido de la siguiente manera.

1) Una posición corta en Δ activos.

2) Una posición larga de opción tipo put estilo europeo, emitida sobre el mismo bien subyacente.

Al madurar el contrato el portafolio puede alcanzar cualquiera de estos dos valores.

1) $p_a - Ma\Delta$

2) $p_d - Md\Delta$

Despejando tenemos que

$$\Delta = \frac{p_d - p_a}{M(a-d)}$$

Suponiendo que el precio del bien subyacente en el mercado disminuye en la fecha de vencimiento, el valor presente del portafolio es $(p_d - Md\Delta)e^{-iT}$, mientras el valor del portafolio es $p - M\Delta$. De esta forma tenemos que $p = (p_d - Md\Delta)e^{-iT} + M\Delta$. Al sustituir Δ tenemos que

$$p = [\, p_a p' + p_d (\, 1 - p' \,) \,]\, e^{-iT} \qquad \textbf{Ecuación 3.31}$$

Donde p' es la probabilidad para que no exista confusión con el valor del contrato de venta estilo europeo p.

Lo anterior considerando un periodo, al considerar dos periodos y considerando que $T_1^m = Md$ evoluciona de tal manera que al final del siguiente periodo el precio del bien subyacente en el mercado puede ser $T_2^m = Mad$ o $T_2^m = Mdd$ y de igual forma $T_1^p = p_d$ evoluciona hasta $T_2^p = p_{ad}$ o $T_2^p = p_{dd}$ respectivamente.

Construyendo un portafolio sintético que consta de

1) Una posición corta en Δ activos.

2) La compra de la opción tipo put estilo europeo.

El valor actual, en $T_1^p = p_d$, del portafolio es $p_d - Md\Delta$ y su valor al finalizar el periodo puede ser

1) $p_{ad} - Mad\Delta$

2) $p_{dd} - Mdd\Delta$

Despejando tenemos que

$$\Delta = \frac{p_{ad} - p_{dd}}{Md(a-d)}$$

Sustituyendo Δ en $p_d = (p_{dd} - Mdd\Delta)e^{-ihT} + Md\Delta$ tenemos

$$p_d = [p_{ad} p' + p_{dd} (\, 1 - p' \,)]\, e^{-ihT}$$

Donde p' es la probabilidad libre de riesgo o martingala.

Considerando que $T_1^p = p_a$ es el valor actual del portafolio y éste evoluciona hasta que $T_2^p = p_{aa}$ o $T_2^p = p_{ad}$ respectivamente, entonces el valor al finalizar el periodo puede ser

1) $p_{ad} - Mad\Delta$

2) $p_{aa} - Maa\Delta$

Despejando tenemos que

$$\Delta = \frac{p_{aa} - p_{ad}}{Ma(a-d)}$$

Sustituyendo Δ en $p_a = (p_{ad} - Mad\Delta)e^{-ihT} + Ma\Delta$ tenemos

$$p_a = [p_{aa}p' + p_{ad}(1-p')]\, e^{-ihT}$$

Sustituyendo p_a y p_d en la ecuación 3.31 donde, $p = [\, c_a p' + c_d(1-p')\,]\, e^{-iT}$, tenemos

$$p = [\, p_{aa}(p')^2 + 2p_{ad}\, p'(1-p') + p_{dd}(1-p')^2\,]\, e^{-2ihT}$$

Por lo tanto

$$p = [max\{S - Maa,0\}(p')^2 + 2\, max\{S - Mad,0\}p'(1-p') + max\{S - Mdd,0\}(1-p')^2\,]\, e^{-2ihT}$$

Ecuación 3.32

Hasta este momento hemos analizado la forma de valuar un contrato de compra estilo europeo con n periodos y hemos realizado un análisis parcial de un contrato de venta estilo europeo, hasta el momento, para dos periodos.

Ahora haremos un análisis, igual que para el contrato de compra estilo europeo, observando el diagrama 3.2 con el árbol binomial o rejilla que nos llevará a la forma general. La forma recursiva, como observamos, en ambos tipos de contrato se deriva al conocer el comportamiento del siguiente periodo, teniendo que calcular n nodos, conociendo $n + 1$ valores para el contrato en el periodo n.

También considero importante un breve análisis para el contrato estilo americano, ya que debemos considerar ciertas variantes para valuar el precio de ambos tipos de contato. Así pues, continuemos por este breve análisis del modelo binomial para la valuación de opciones financieras.

Ahora veremos el comportamiento de un proceso binomial multiplicativo con n periodos para una opción de venta estilo europeo.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & & (Ma^n, p_{a_1\cdots a_n}) \\
 & & & (Ma^3, p_{a_1a_2a_3}) < & \cdots < & (Ma^{n-1}d, p_{a_1\cdots a_{n-1}d_1}) \\
 & & (Ma^2, p_{a_1a_2}) < & & < & (Ma^{n-2}d^2, p_{a_1\cdots a_{n-2}d_1d_2}) \\
(M,p) < & \begin{array}{c}(Ma, p_{a_1}) < \\ (Md, p_{d_1}) <\end{array} & (Mad, p_{a_1d_2}) < & \begin{array}{c}(Ma^2d, p_{a_1a_2d_3}) < \\ (Mad^2, p_{a_1d_2d_3}) <\end{array} & \begin{array}{c}< \\ <\end{array} & \vdots \\
 & & (Md^2, p_{d_1d_2}) < & & < & (Ma^2d^{n-2}, p_{a_1a_2d_1\cdots d_{n-2}}) \\
 & & & (Md^3, p_{d_1d_2d_3}) < & \cdots < & (Mad^{n-1}, p_{a_1d_1\cdots d_{n-1}}) \\
 & & & & & (Md^n, p_{d_1\cdots d_n}) \\
T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_n
\end{array}
$$

Donde $p_{a_1\cdots a_k d_1\cdots d_{n-k}} = max \{ S - Ma^k d^{n-k}, 0 \}$

Diagrama 3.2

Considerando, de la misma manera que para el contrato de compra estilo europeo, en un mundo neutral al riesgo tenemos dos posibilidades para valuar una opción tipo put estilo europeo.

1) Calculando recursivamente el valor de la opción al final de cada uno de los n periodos, considerando los valores intrínsecos correspondientes para cada uno de los nodos en cada periodo.

$$p_{n-1} = [p_{a_n} p' + p_{d_n}(1 - p')]e^{-ihT} \qquad \textbf{Ecuación 3.33}$$

Donde

p_{n-1} Es el valor del contrato en el periodo $n-1$.
p_{a_n} Es el valor del contrato cuando éste aumenta su valor del periodo $n-1$ a n.
p_{d_n} Es el valor del contrato cuando éste disminuye su valor del periodo $n-1$ a n.

2) Calcular el valor de la opción empleando la forma general.

$$p = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p')^{k} (1-p')^{n-k} max\{S - M\ a^{k}\ d^{n-k}, 0\} \right] e^{-iT} \quad \textbf{Ecuación 3.34}$$

Los procedimientos analizados pueden ser empleados para calcular el precio de un contrato derivado de un bien subyacente cuyo precio en el mercado está cambiando como un proceso binomial multiplicativo.

Consideremos el ejemplo siguiente para la realización del cálculo del valor del contrato en cada estado en el tiempo.

Ejemplo

Considere un contrato tipo put estilo europeo con vencimiento a dos mese y en cada mes el precio de mercado del oro cambia de acuerdo a la siguiente rejilla. Considere un precio de ejercicio de \$ 3 600.00 y una tasa de interés libre de riesgo del 15 %.

De aquí obtenemos

$$p' = \frac{e^{ihT} - d}{a - d} = \frac{e^{\frac{0.15(2)}{2(12)}} - 0.98611}{1.01389 - 0.98611} = 0.95282$$

Y podemos observar el árbol binomial considerando los posibles cambios en los precios del bien subyacente en el mercado a través del tiempo.

Enero	Febrero	Marzo
		$(T_2^m = 3700.69444,\ T_2^p = p_{aa})$
	$(T_1^m = 3650,\ T_1^p = p_a)$	
$(T_0^m = 3600,\ T_0^p = p)$		$(T_2^m = 3599.30556,\ T_2^p = p_{ad})$
	$(T_1^m = 3550,\ T_1^p = p_d)$	
		$(T_2^m = 3500.69444,\ T_2^p = p_{dd})$

Al emplear el método recursivo, primero debemos encontrar los $n + 1$ posibles valores intrínsecos para la fecha de vencimiento del contrato, para después encontrar los valores de los n nodos en el periodo $n - 1$.

Es decir, en el mes de febrero debemos calcular dos valores para el contrato.

$$p_1 = [p_{a_2}p' + p_{d_2}(1-p')]e^{-ihT} = [0(0.95282) + (0.69444)(0.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 0.03235$$

$$p_1 = [p_{a_2}p' + p_{d_2}(1-p')]e^{-ihT} = [(0.69444)(0.95282) + (99.30556)(0.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 5.28008$$

Ahora, con estos dos valores obtenidos mediante la forma recursiva, calculamos el valor del contrato.

$$p_0 = [p_{a_1}p' + p_{d_1}(1-p')]e^{-ihT} = [(0.03235)(0.95282) + (5.28008)(0.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 0.27644$$

Al emplear la fórmula general obtenemos el mismo resultado.

$$p = \left[\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(p')^k(1-p')^{2-k}max\{S - M\,a^k d^{2-k}, 0\}\right]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 0.21555 + 0.06089 = 0.27644$$

OPCIONES ESTILO AMERICANO

El tenedor de la opción americana tiene el derecho de ejercer su opción antes o en la fecha de expiración. De otra manera, la opción expirará sin valor y deja de existir como un instrumento financiero.

Hasta ahora todas las opciones que hemos considerado han sido estilo europeo. Ahora analicemos como pueden ser valuadas las opciones estilo americano empleando un árbol binomial. El procedimiento es similar al emplear la forma recursiva para opciones estilo europeo, sin embargo hay que considerar el valor del contrato por el pronto ejercicio. Así que el valor de la opción al final de cada estado en el tiempo es el mayor de los siguientes valores.

1) El valor del contrato obtenido mediante la forma recursiva

   a) $c_{n-1} = [c_{a_n}p + c_{d_n}(1-p)]e^{-ihT}$ para el cálculo de una opción de compra.
   b) $p_{n-1} = [p_{a_n}p' + p_{d_n}(1-p')]e^{-ihT}$ para el cálculo de una opción de venta.

2) El pago por el pronto ejercicio del contrato.

   a) $c_{n-1} = max\ \{ Ma^k d^{n-k-1} - S, 0 \}$ cuando es un contrato de compra.
   b) $p_{n-1} = max\ \{ S - Ma^k d^{n-k-1}, 0 \}$ cuando es un contrato de venta.

Considerando el ejemplo anterior suponiendo que la opción tipo put es estilo americano. Para el mes de marzo, al igual que la opción de venta estilo europeo, calculamos el valor intrínseco del contrato.

$$p_{aa} = max\ \{\ S - Ma^2\ , 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3700.69444\ , 0\ \} = 0$$

$$p_{ad} = max\ \{\ S - Mad\ , 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3599.30556\ , 0\ \} = 0.69444$$

$$p_{dd} = max\ \{\ S - Md^2\ , 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3500.69444\ ; 0\ \} = 99.30556$$

Para el mes de febrero el valor del contrato será el mayor de los siguientes valores.

1) Empleando la forma recursiva $p_1 = [p_{a_2} p' + p_{d_2}(1 - p')]e^{-ihT}$

a) $p_{a_1} = [0(0.95282) + (0.69444)(0.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 0.03235$

b) $p_{d_1} = [(0.69444)(0.95282) + (99.30556)(0.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 5.28008$

2) Considerando el valor del contrato por el pronto ejercicio al final del primer periodo, es decir, en el mes de febrero.

a) $p_{a_1} = max\ \{\ S - Ma^1 d^{2-1-1}, 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3650, 0\ \} = 0$

b) $p_{d_1} = max\ \{\ S - Ma^0 d^{2-0-1}, 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3550, 0\ \} = 50$

En este mes, cuando el precio de mercado asciende de \$ 3 600 a \$ 3 650 empleando la forma recursiva nos da el valor de la opción \$ 0.03235 que es mayor que por el pronto ejercicio.

Cuando el precio de mercado desciende de \$ 3 600 a \$ 3 550, empleando la forma recursiva el valor del contrato es de \$ 5.28008 mientras que el pago por el pronto ejercicio es de \$ 50. En esta situación el pronto ejercicio es óptimo para el poseedor del contrato, por lo que el valor del contrato de venta estilo americano en este estado del tiempo es de \$ 50.

Para el mes de enero el valor del contrato será el mayor de los siguientes valores.

1) Empleando la forma recursiva $p_0 = [p_{a_1} p' + p_{d_1}(1 - p')]e^{-ihT}$

$$p_0 = [0.03235(0.95282) + 500.04718)]e^{-\frac{0.15(2)}{2(12)}} = 2.35993$$

2) Considerando el valor del contrato por el pronto ejercicio al cerrar el contrato, es decir, en el mes de enero.

$$p_0 = max\ \{\ S - Ma^0 d^{2\cdot 1\cdot 1},\ 0\ \} = max\ \{\ 3600 - 3600,\ 0\ \} = 0$$

Por lo que el valor de la opción put estilo americano es \$ 2.35993, mayor que el valor del contrato estilo europeo.

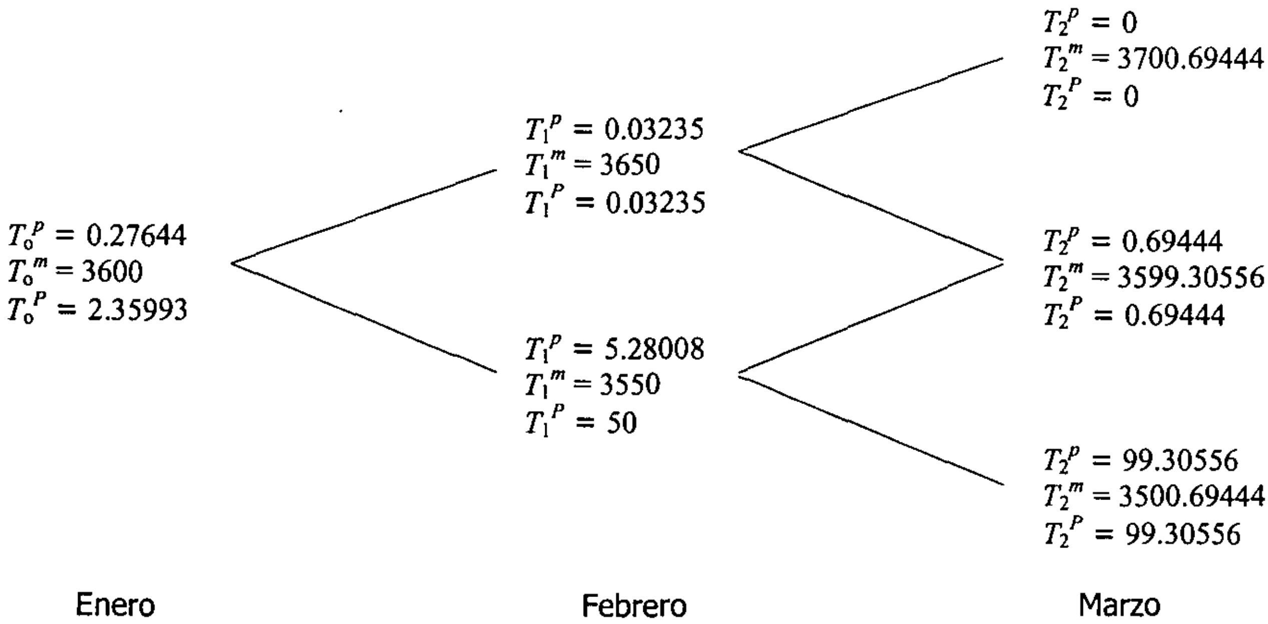


Diagrama 3.3

En el diagrama 3.3 podemos observar la diferencia en los valores que tiene el contrato en cada periodo y como se puede observar, el ajuste realizado en el mes de febrero para la opción de venta estilo americano hace la diferencia en el precio del contrato.

De esta forma damos por terminado este capítulo para dar inicio al análisis del método de valuación Black and Scholes del cual hemos hecho mención en la presente investigación.

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO IV

Aquí comenzamos el último capitulo de este trabajo. Es aquí en donde analizamos el modelo Black & Scholes y su desarrollo. Así pues, comenzaremos por los procesos de Markov.

IV .I PROCESOS DE MARKOV

En la teoría de las cadenas de Markov el resultado de cualquier ensayo depende del resultado del ensayo inmediato anterior y sólo de él.

La expresión de proceso de Markov se aplica a una clase muy importante de procesos estocásticos con parámetros de tiempos discretos y continuos.

En general es conveniente describir las cadenas de Markov en términos de variables aleatorias, es decir, $T_k = k$. Entonces el sistema del estado en el tiempo n es una variable aleatoria X_n que toma el valor de k con probabilidad p. De esta forma, una cadena de Markov se convierte en un proceso estocástico particular o en una sucesión de variables aleatorias dependientes (X_1, X_2, ...) donde el subíndice desempeña el papel del tiempo.

Desde el punto de vista conceptual, un proceso de Markov es la analogía probabilística donde el desarrollo futuro queda completamente determinado por el estado actual y es independiente de la forma en la cual dicho estado se ha desarrollado.

En los procesos estocásticos el futuro no está determinado de manera única, pero tenemos relaciones probabilísticas que nos permiten hacer predicciones. En las cadenas de Markov es claro que las relaciones de probabilidad relativas al futuro dependen del estado actual pero de ninguna manera de la forma en la que el estado ha llegado desde el pasado a su forma actual.

PROCESO DE MARKOV

Una sucesión de variables aleatorias con valores discretos será un proceso estocástico $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ *o un proceso de Markov si la distribución conjunta de* $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ *está definida de tal forma que la probabilidad condicional de la relación* $T_n^m = M_n$ *bajo la hipótesis de que* $T_0^m = M_0$, $T_1^m = M_1, \ldots, T_{n-1}^m = M_{n-1}$ *es idéntica a la hipótesis de probabilidad condicional de* $T_n^m = M_n$ *bajo la hipótesis única* $T_{n-1}^m = M_{n-1}$.

Si el espacio de estados del proceso es numerable, el proceso de Markov es llamado una cadena de Markov.

IV .II PROCESO DE WIENER

Una variable z sigue un proceso de Wiener cuando pequeñas variaciones, Δz, *en un periodo,* Δt, *satisface las dos propiedades siguientes.*

1) $\Delta z = N(0,1)\sqrt{\Delta t}$

2) Los valores Δz en dos periodos Δt son independientes.

Tomando el límite cuando Δt *se aproxima a cero, tenemos un proceso de Wiener.*

Es decir, es un proceso estocástico especial de tiempo continuo. El proceso de Wiener se centra en el cálculo de Itô, el cual es un caso especial del cálculo estocástico en tiempo continuo. Es una formalización del caso limitado de una caminata aleatoria simétrica sobre una línea. Comienza en el origen, tiene incrementos independientes y cada incremento $\Delta z = w_t - w_s$ se distribuye normal con media cero y varianza $\Delta t = t - s$. La gráfica del proceso de Wiener son pequeñas puntas de cambio.

Recordando la función de probabilidad acumulativa para una variable aleatoria normal, donde la función de distribución es

$$N(x) = F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

Es decir, la variable aleatoria se distribuye normal con media μ y varianza σ^2, denotamos que la variable aleatoria $\Delta z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

La función de densidad es

$$n(x) = f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{d}{dx}N(x) = N'(x)$$

Y decimos que la variable aleatoria tiene una función de densidad $n(\mu, \sigma^2)$.

De la primera propiedad, observamos que Δz tiene una distribución normal con media cero y varianza $\Delta t = (t - s)$, esto es, $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$.

La segunda propiedad nos indica que el proceso de Wiener es un proceso de Markov.

Si ahora consideramos un periodo T, donde $n = \frac{T}{\Delta t}$, entonces

$$z(t) - z(s) = \sum_{i=1}^{n} N_i(0,1)\sqrt{\Delta t}$$

Donde las N_i's$(0,1)$ son variables aleatorias con distribución normal de media cero y varianza la unidad. Entonces, ya que los valores Δz en periodos Δt son independientes, esto implica que las N_i's$(0,1)$ son mutuamente independientes.

Recordando que si $N_1(0,1)$ y $N_2(0,1)$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$E[(N_1(0,1) + N_2(0,1)] = E[(N_1(0,1)] + E[N_2(0,1)] = \mu_{N_1(0,1)+N_2(0,1)} = \mu_{N_1(0,1)} + \mu_{N_2(0,1)} = 0$$

$$Var[(N_1(0,1) + N_2(0,1)] = \mathrm{Var}[(N_1(0,1)] + \mathrm{Var}[N_2(0,1)] = \sigma^2_{N_1(0,1)+N_2(0,1)} = \sigma^2_{N_1(0,1)} + \sigma^2_{N_2(0,1)} = 2$$

Entonces $z(t) - z(s) \sim N(0, T)$, ya que $E\left[\sum_{i=0}^{n} N_i(0,1)\right] = 0$ y $\sigma^2_{\sum_{i=0}^{n} N_i(0,1)\sqrt{\Delta t}} = n\Delta t = T$.

Estos resultados están basados en las propiedades de la distribución normal. Si una variable aleatoria es la suma de n variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, entonces, esta variable aleatoria tiene una distribución normal con media igual a la suma de las n medias de las n variables aleatorias independientes normalmente distribuidas. La varianza de estas variable es igual a la suma de las n varianzas de las n variables aleatorias independientes normalmente distribuidas.

Tomando el límite cuando Δt se aproxima a cero, $\Delta z = N(0,1)\sqrt{\Delta t}$ es un proceso de Wiener denotado

$$dz = N(0,1)\sqrt{dt}\,.$$

De lo anterior, considerando cualquier periodo T, el cambio en el valor de una variable que sigue un proceso de Wiener se distribuye normal con media cero y varianza T. La media cero es la tasa de desplazamiento, lo cual indica que el valor esperado de z, en el futuro, es su valor actual. La desviación estándar, $\sqrt{T}$, es la tasa de variación esperada para el periodo, ésta mide la incertidumbre de z.

Podemos generalizar el proceso de Wiener incluyendo una función determinística del tiempo transcurrido y una varianza por unidad de tiempo. Anexamos la función determinística de la evolución de la variable x a través del tiempo, $dx = adt$, la cual representa la tendencia de la evolución de la variable. Esto es, la variable x posee una tasa esperada de desplazamiento a por unidad de tiempo.

Resolviendo la ecuación diferencial $y' - a = 0$

$$\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow dx = adt \Rightarrow \int dx = \int adt \Rightarrow x = at + x_0$$

Donde x_0 es el valor inicial de la variable.

Esta solución indica el crecimiento esperado de la variable x a través del tiempo.

Entonces el proceso de Wiener generalizado, definido en términos del proceso dz, donde $dz = N(0,1)\sqrt{dt}$, es

$$dx = adt + bdz.$$

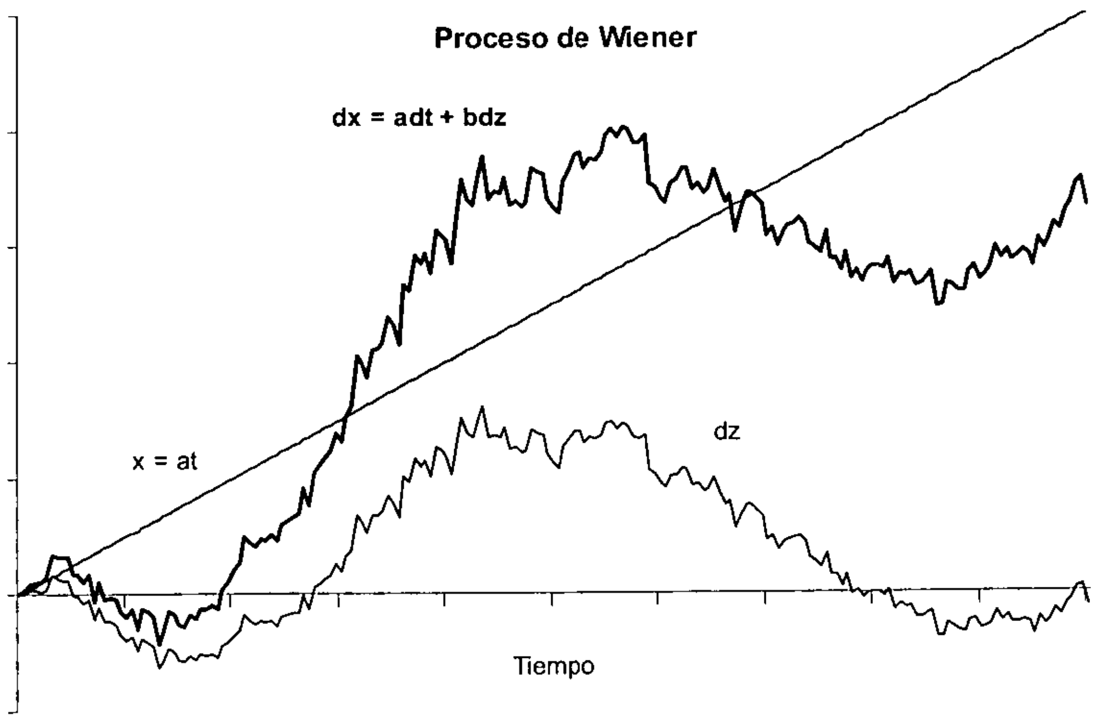
Tenemos ya un proceso de Wiener generalizado donde bdz es la parte aleatoria en la evolución de la variable x, b es la desviación estándar del término aleatorio. Si observamos un periodo relativamente corto, Δt, el cambio en el valor de la variable x queda definido como:

$$\Delta x = \mathrm{a}\Delta t + bN(0,1)\sqrt{\Delta t}$$

Entonces $\Delta x \sim N(\mathrm{a}\Delta t,\ b^2\Delta t)$ y considerando el cambio de la variable x para cualquier periodo T, entonces $\Delta x \sim N(\mathrm{a}T, b^2T)$.

El proceso dz indica que la variable, a través del tiempo, tiene cambios, sin embargo, el valor esperado al final del periodo es el valor inicial. Es decir, la media de la distribución de los cambios es cero. Mientras que el proceso dx indica que se pretende obtener un rendimiento a través del tiempo, es decir, tiene una tasa de desplazamiento a por unidad de tiempo y además posee una tasa de variación a través de él, es decir, una tasa de variación b por unidad de tiempo.

En la gráfica 4.1 observamos que en cada pequeño periodo existe un pequeño cambio, positivo o negativo, en la variable. Este cambio tiene una distribución normal con media cero y varianza la unidad. El generalizar el proceso de Wiener nos permite introducir variables que nos indican el comportamiento futuro de la variable, basándonos únicamente en su valor actual.



Gráfica 4.1

IV .III CÁLCULO DE ITÔ

Los procesos de Itô son una generalización del proceso de Wiener, donde al considerar procesos estocásticos mensurables x_t e y_t, una integral de Itô es una martingala.

FÓRMULA DE ITÔ PARA EL PROCESO DE WIENER

En este momento analizaremos el empleo de la fórmula de Itô para el cambio de variables en una integral de Itô.

Para una función dos veces continuamente diferenciable $f : \Re \to \Re$, la fórmula de Itô dice que para toda $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(M_t) &= f(M_0) + \int_0^t f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)ds \\ &= f(M_0) + \int_0^t \frac{d}{dM_s} f(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2}{(dM_s)^2} f(M_s)ds \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} df(M_t) &= f'(M_t)dM_t + \frac{f''(M_t)dt}{2} \\ &= \frac{d}{dM_t} f(M_t)dM_t + \frac{d^2}{2(dM_t)^2} f(M_t)dt \end{aligned}$$

Considerando la expresión anterior como una expansión en serie de Taylor

$$\begin{aligned} df(M_t) &= f'(M_t)dM_t + \frac{f''(M_t)(dM_t)^2}{2} \\ &= \frac{d}{dM_t} f(M_t)dM_t + \frac{d^2}{2dM_t^{\,2}} f(M_t)(dM_t)^2 \end{aligned}$$

Donde $(dM_t)^2 = dt$ y $(dM_t)^3 = 0$

Entonces

$$\begin{aligned} df(M_t) &= f'(M_t)dM_t + \frac{f''(M_t)dt}{2} \\ &= \frac{d}{dM_t} f(M_t)dM_t + \frac{d^2}{2dt} f(M_t)dt \end{aligned}$$

De aquí obtenemos una expresión más general.

Si $f:[0,T]X\Re\rightarrow\Re$ es continuamente diferenciable en el primer argumento y dos veces continuamente diferenciable en el segundo argumento, entonces para toda $0\leq t\leq T$.

$$f(t,M_t)=f(0,M_0)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial M_s}f(s,M_s)dM_s+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial s}f(s,M_s)+\frac{\partial^2}{2(\partial M_s)^2}f(s,M_s)\right]ds$$

Esto es

$$df(t,M_t)=\frac{\partial}{\partial M_t}f(t,M_t)dM_t+\left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,M_t)+\frac{\partial^2}{2(\partial M_t)^2}f(t,M_t)\right]dt$$

Y considerando la expansión en serie de Taylor

$$df(t,M_t)=\frac{\partial}{\partial M_t}f(t,M_t)dM_t+\frac{\partial}{\partial t}f(t,M_t)dt+\frac{\partial^2}{2(\partial M_t)^2}f(t,M_t)(dM_t)^2$$

Donde $(dM_t)^2 = dt$, $(dM_t)^3 = 0$, $(dt)^2 = 0$ y $dtdM_t = 0$.

Ahora, si suponemos que la variable x sigue un proceso general de Itô

$$dx = adt + bdz$$

Si x sigue un proceso general de Itô y $f:[0,T]X\Re\rightarrow\Re$ es continuamente diferenciable en el primer argumento y dos veces continuamente diferenciable en el segundo argumento, entonces para toda $0\leq t\leq T$.

$$f(x,t)=f(0,x_0)+\int_0^t\frac{b\partial}{\partial x}f(s,x)dz+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial s}f(s,x)+\frac{a\partial}{\partial x}f(s,x)+\frac{b^2\partial}{(\partial x)^2}f(s,x)\right]ds$$

Esto es

$$df(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)dz+\left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+\frac{a\partial}{\partial x}f(t,x)+\frac{b^2\partial^2}{(\partial x)^2}f(t,x)\right]dt$$

Y al considerar la expansión en serie de Taylor

$$df(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)dx+\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)dt+\frac{\partial^2}{2(\partial x)^2}f(t,x)(dx)^2$$

Donde $(dx)^2 = b^2dt$, $(dx)^3 = 0$, $(dt)^2 = 0$ y $dtdx_t = 0$.

Veamos porque $(dx)^2 = b^2 dt$

Realmente el lema de Itô proviene de hacer una expansión de primer grado en series de Taylor de la función $f(x,t)$.

Consideremos a $f:[0,T]X\Re \rightarrow \Re$ continuamente diferenciable en el primer argumento y dos veces continuamente diferenciable en el segundo argumento, entonces si Δx es un cambio en x y Δf es el cambio resultante en $f(x,t)$, es decir

$$\Delta f(x,t) \cong \frac{d}{dx} f(x,t)\Delta x$$

Entonces

$$\Delta f(x,t) \cong \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\Delta x + \frac{\partial}{\partial z} f(x,t)\Delta z$$

Al usar la expansión en serie de Taylor de $f(x,t)$, el error involucra términos de orden Δx^2

$$\Delta f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\Delta x + \frac{\partial}{\partial z} f(x,t)\Delta z + \frac{\partial^2}{2(\partial x)^2} f(x,t)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x,t)\Delta x \Delta z + \frac{\partial^2}{2(\partial z)^2} f(x,t)(\Delta z)^2 + \cdots$$

Tomando el límite cuando Δx y Δz tienden a cero, resulta

$$df(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dx + \frac{\partial}{\partial z} f(x,t)dz$$

Ya supusimos que la variable x sigue un proceso general de Itô, sumándole que una opción es una función que sigue un proceso estocástico, entonces

$$\Delta f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\Delta x + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\Delta t + \frac{\partial^2}{2(\partial x)^2} f(x,t)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x,t)\Delta x \Delta t + \frac{\partial^2}{2(\partial t)^2} f(x,t)(\Delta t)^2 + \cdots$$

Considerando la forma discreta del proceso de Wiener generalizado

$$\Delta x = a\Delta t + bN(0,1)\sqrt{\Delta t}$$

Considerando el término de segundo orden Δx^2

$$\Delta x^2 = \left(a\Delta t + bN(0,1)\sqrt{\Delta t}\right)^2 = a^2(\Delta t)^2 + 2a\Delta t bN(0,1)\sqrt{\Delta t} + b^2\left[N(0,1)\right]^2 \Delta t$$

Tomando solo el componente de orden Δt, entonces

$$\Delta x^2 \cong b^2 [N(0,1)]^2 \Delta t$$

Considerando la varianza de una distribución normal, tenemos que

$$E([N(0,1)]^2) - [E(N(0,1))]^2 = 1$$

Como $E(N(0,1)) = 0$, entonces $E([N(0,1)]^2) = 1$.

Por lo tanto, el valor esperado es $b^2\Delta t$. La varianza es de orden Δt^2, por lo cual $[N(0,1)]^2\Delta t$ resulta no estocástico.

Por lo cual la fórmula de Itô es

$$df(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dx + \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dt + \frac{b^2\partial^2}{2(\partial x)^2} f(t,x)dt$$

Entonces, ya que la variable x sigue un proceso general de Itô

$$dx = adt + bdz$$

Sustituimos dx en la fórmula de Itô

$$\begin{aligned} df(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\left[adt + bdz\right] + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dt + \frac{b^2\partial}{2(\partial x)^2} f(x,t)dt \\ &= \left[\frac{a\partial}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \frac{b^2\partial}{2(\partial x)^2} f(x,t)\right]dt + \frac{b\partial}{\partial x} f(x,t)dz \end{aligned}$$

Donde dz es un proceso de Wiener, por lo que $f(x,t)$ sigue un proceso de Itô con tasa de desplazamiento

$$\frac{a\partial}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \frac{b^2\partial^2}{2(\partial x)^2} f(x,t)$$

Y una tasa de variación

$$\frac{b^2\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

Si definimos $dx = \mu x dt + \sigma x dz$, donde μ y σ son números reales. Al aplicar la fórmula de Itô a la función $f(x) = Ln(x)$, entonces el proceso $Ln(x)$ tiene la siguiente representación

$$dLn(x) = \left[\frac{\mu x}{x} - \frac{\sigma^2 x^2}{2x^2}\right]dt + \frac{\sigma x}{x}dz = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Por lo tanto

$$Ln(x_t) - Ln(x_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z \Rightarrow x_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z}$$

Parece lógica la suposición de que el precio del bien subyacente sigue un proceso de Wiener, sin embargo, la suposición de que el precio del bien subyacente tiene una tasa esperada de desplazamiento constante es inapropiada. Así pues, emplearemos la suposición de que el desplazamiento esperado, expresado como parte proporcional del precio del bien subyacente, es constante. De esta forma, si M es el precio del bien subyacente en el mercado, la tasa esperada de desplazamiento de M es μM para algún parámetro constante μ. Es decir, en un periodo pequeño, Δt, el incremento esperado en M es $\mu M \Delta t$.

Considerando la tasa de variación nula en el precio del bien subyacente

$$dM = \mu M dt$$

Entonces

$$\frac{dM}{M} = \mu dt \Rightarrow \int \frac{dM}{M} = \int \mu dt \Rightarrow Ln(M) = M_0 \mu t \Rightarrow M = M_0 e^{\mu t}$$

Donde M_0 es el precio del bien subyacente al inicio del periodo. Esto indica que al tener una tasa de variación nula, el precio del bien subyacente aumenta con una tasa instantánea, μ, por unidad de tiempo.

Recordando que el precio del bien subyacente en el mercado se comporta como un proceso estocástico, es decir, tiene una varianza en el porcentaje del rendimiento esperado para un periodo Δt. Sea σ^2 la tasa de variación del cambio proporcional, μ, en el precio del bien subyacente, entonces $\sigma^2 \Delta t$ es la varianza del cambio proporcional en el precio del bien subyacente durante un periodo Δt y $\sigma^2 M^2 \Delta t$ es la varianza del cambio real en el precio del bien subyacente durante el periodo Δt. Por lo cual $\sigma^2 M^2$ es la tasa de variación instantánea.

Lo anterior sugiere que el precio del bien subyacente en el mercado puede representarse mediante un proceso de Itô con una tasa instantánea de desplazamiento μM y una tasa de variación instantánea $\sigma^2 M^2$, es decir, $dM = \mu M dt + \sigma M dz$. Siendo este el modelo más utilizado para representar el proceso del bien subyacente en el mercado, en el cual σ representa la volatilidad del precio del bien subyacente en el mercado y μ representa la tasa de interés libre de riesgo.

Este modelo que representa el proceso seguido por el precio del bien subyacente en el mercado es conocido como el movimiento Browniano geométrico, el cual pone de manifiesto las fluctuaciones estadísticas que ocurren en el sistema. Estas fluctuaciones explican las variaciones en el precio del bien subyacente imponiendo limitaciones a la exactitud de mediciones delicadas.

Considerando el modelo $dM = \mu M dt + \sigma M dz$, entonces el movimiento Browniano

$$\frac{dM}{M} = \mu dt + \sigma dz\,,$$

representa, mediante su forma discreta, el rendimiento proporcional generado por el bien subyacente durante el periodo Δt. El término $\mu\Delta t$ es el valor esperado para el rendimiento y la varianza del componente estocástico es $\sigma^2 \Delta t$.

$$\frac{\Delta M}{M} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

IV .IV PROPIEDAD LOGNORMAL DEL PRECIO DEL ACTIVO

Se dice que una variable aleatoria X no negativa tiene una distribución lognormal, si la variable aleatoria $Y = Ln(X)$ tiene una distribución normal.

DISTRUBUCIÓN LOGNORMAL

La función de densidad para una variable aleatoria que se distribuye lognormal cuando $Ln(X)$ está normalmente distribuida con parámetros μ y σ es:

$$f_x(x, \mu_y, \sigma_y^2) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(Ln(x)-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}}{x\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Considerando que una variable aleatoria $Y = Ln(X)$ tiene una distribución normal, la función de distribución acumulativa de X se puede expresar en términos de la función de distribución acumulativa $N(z)$ de una variable $z \sim N(0,1)$.

$$P(X \leq x) = P(Ln(X) \leq Ln(x)) = P\left(z \leq \frac{Ln(x)-\mu}{\sigma}\right) = N\left(\frac{Ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

Suponiendo que $dM = \mu M dt + \sigma M dz$ es el modelo apropiado para considerar los movimientos del precio del bien subyacente en el mercado y teniendo en cuenta el lema de Itô para una función $f(M,t)$.

$$\begin{aligned} df(M,t) &= \frac{\partial}{\partial M} f(M,t)[\mu M dt + \sigma M dz] + \frac{\partial}{\partial t} f(M,t)dt + \frac{\sigma^2 \partial}{2(\partial M)^2} f(M,t)dt \\ &= \left[\frac{\mu M \partial}{\partial M} f(M,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(M,t) + \frac{(\sigma M)^2 \partial}{2(\partial M)^2} f(M,t)\right]dt + \frac{\sigma M \partial}{\partial M} f(M,t)dz \\ &= \left[\frac{\mu M \partial}{\partial M} f(M,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(M,t) + \frac{\sigma^2 M^2 \partial}{2(\partial M)^2} f(M,t)\right]dt + \frac{\sigma M \partial}{\partial M} f(M,t)dz \end{aligned}$$

En el siguiente análisis, se considera el lema de Itô para obtener el proceso seguido por el logaritmo natural de los precios del bien subyacente en el mercado, esto es bastante sólido si consideramos que los precios del bien subyacente en el mercado son no negativos, es decir, siempre son positivos.

Este resultado lo obtuvimos ya, pero veamos las siguientes propiedades.

Sea $f(M,t) = Ln(M)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} f(M,t) &= \frac{\partial}{\partial M} Ln(M) = \frac{1}{M} \\ \frac{\partial^2}{\partial M^2} f(M,t) &= \frac{\partial^2}{\partial M^2} Ln(M) = -\frac{1}{M^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} f(M,t) &= \frac{\partial}{\partial t} Ln(M) = 0 \end{aligned}$$

Por lo cual

$$df(M,t)=\frac{\partial}{\partial M}f(M,t)[\mu Mdt+\sigma Mdz]+\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)dt+\frac{\sigma^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)dt$$
$$=\left[\frac{\mu M\partial}{\partial M}f(M,t)+\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)+\frac{(\sigma M)^2\partial}{2(\partial M)^2}f(x,t)\right]dt+\frac{\sigma M\partial}{\partial M}f(M,t)dz$$
$$=\left[\frac{\mu M}{M}-\frac{\sigma^2M^2}{2M^2}\right]dt+\frac{\sigma M}{M}dz$$
$$=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dz$$

Es decir $f\ (M,t)=\ Ln(M)$ sigue un proceso de Wiener generalizado ya que μ y σ son constantes.

Este proceso de Wiener generalizado tiene una tasa constante de desplazamiento

$$\mu-\frac{\sigma^2}{2}$$

Y una tasa constante de variación σ^2.

Si consideramos un periodo donde T es el tiempo próximo y t es el tiempo actual, entonces $\Delta t = T-t$. Siendo Δt de esta manera, entonces

$$f(M,t)\sim N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$$

Si ahora consideramos que el valor de $f\ (M,t)\ =\ Ln(M_t)$, es decir, la función del precio del bien subyacente en el mercado en el instante t y por otro lado el valor de la función en el instante T, donde $f\ (M,T)\ =\ Ln(M)$. De esta manera el cambio que experimenta la función durante el periodo, $T-t$, es $Ln(M)\ -Ln(M_t)$.

Entonces $f\ (M,T)\ -f\ (M,t) = Ln(M)\ - Ln(M_t)\ \sim\ N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$

Considerando las propiedades de la función de distribución normal

$$f\ (M,T)\ \sim\ N\left(\left(Ln(M_t)+\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$$

Para demostrar esta propiedad observamos que por hipótesis $dM = \mu M dt + \sigma M dz$, donde $f(M,T) = Ln(M)$ y $df(M,t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$. Considerando la forma discreta, tenemos que $\Delta f(M,t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta z$ y sabiendo que $\Delta t = T - t$. Entonces $\Delta f(M,t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma N(1,0)\sqrt{T-t}$, es decir, $\Delta f(M,t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$.

Y ya que podemos estandarizar una función

$$N(0,1) = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{Ln(M) - Ln(M_t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Entonces

$$Ln(M) = Ln(M_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma N(0,1)\sqrt{T-t}$$

Por lo tanto

$$Ln(M) \sim N\left(Ln(M_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

Entonces

$$Ln(M) = Ln(M_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma N(0,1)\sqrt{T-t}$$

Por lo que

$$M = M_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma N(0,1)\sqrt{T-t}} = M_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma dz}$$

Esto nos muestra que el precio del bien subyacente en el mercado durante el instante T, tiene una distribución lognormal.

El modelo de distribución lognormal sirve de base para el modelo Black & Scholes.

IV .V ECUACIÓN DIFERENCIAL BLACK SCHOLES

Considerando que el precio del bien subyacente en el mercado sigue un proceso de la forma $dM = \mu M dt + \sigma M dz$, anexamos las siguientes suposiciones para continuar nuestro análisis.

1) El precio del bien subyacente en el mercado sigue el proceso $dM = \mu M dt + \sigma M dz$, donde μ y σ son constantes.

2) No existen impuestos y costos de transacción.

3) Todos los bienes subyacentes son completamente divisibles.

4) No está considerado el pago de dividendos durante la vigencia del contrato.

5) La tasa de interés libre de riesgo es constante, durante la vigencia del contrato.

6) No existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo.

Sea $f(M,t)$ una función del precio del bien subyacente en el mercado, donde

$$df(M,t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Y su versión discreta está dada por

$$\Delta f(M,t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta z$$

Está función nos indica que cambios en $f(M,t)$, debido a cambios en M, durante un periodo Δt y mediante la construcción de un portafolio adecuado que elimine el riesgo de movimiento aleatorios en el precio del bien subyacente, nos permite obtener la ecuación Black & Scholes. El portafolio consta de una posición corta de un contrato de opción y una posición larga de la derivada parcial de $f(M,t)$ con respecto al precio del bien subyacente en el mercado en bienes subyacentes. Siendo así, el valor actual del portafolio es

$$\Psi = -f(M,t) + \frac{\partial}{\partial M} f(M,t) M$$

Y el cambio del valor del portafolio durante el periodo Δt.

$$\Delta\Psi=-\Delta f(M,t)+\frac{\partial}{\partial M}f(M,t)\Delta M$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones de los procesos de Itô ΔM y Δf, en la ecuación anterior, tenemos

$$\Delta f(M,t)=\left[\frac{\mu M\partial}{\partial M}f(M,t)+\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)+\frac{\sigma^2M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)\right]\Delta t+\frac{\sigma M\partial}{\partial M}\Delta z$$

Y así

$$\Delta M=\mu M\Delta t+\sigma M\Delta z$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta\Psi&=-\left[\left(\frac{\mu M\partial}{\partial M}f(M,t)+\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)+\frac{\sigma^2M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)\right)\Delta t+\frac{\sigma M\partial}{\partial M}\Delta z\right]+\frac{\partial}{\partial M}f(M,t)(\mu M\Delta t+\sigma M\Delta z)\\&=-\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)\Delta t-\frac{\sigma^2M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)\Delta t\\&=-\left(\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)+\frac{\sigma^2M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)\right)\Delta t\end{aligned}$$

Mediante la construcción de este portafolio se ha eliminado Δz, es decir, durante el periodo Δt el portafolio está libre de riesgo. De esta manera el rendimiento esperado, para el portafolio, es la tasa de interés libre de riesgo. Sin embargo, este portafolio no está libre de riesgo siempre. Este portafolio se encuentra libre de riesgo sólo durante un instante y para mantenerlo libre de riesgo es necesario cambiar continuamente las proporciones del contrato con respecto al bien subyacente.

Así pues, hemos obtenido un portafolio independiente de los movimientos aleatorios en el precio del bien subyacente en el mercado. Durante un instante el portafolio está libre de riesgo, por lo cual su rendimiento debe ser la tasa de interés libre de riesgo. Esto es

$$\Delta\Psi=i\Psi\Delta t$$

El cambio en el valor del portafolio es proporcional a la tasa de interés libre de riesgo durante el periodo Δt.

Cuando sustituimos los valores $\Delta\Psi$ y Ψ en $\Delta\Psi = i\Psi\Delta t$, tenemos

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)+\frac{\sigma^2 M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)\right)\Delta t = i\left(-f(M,t)+\frac{\partial}{\partial M}f(M,t)M\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow if(M,t)=\frac{iM\partial}{\partial M}f(M,t)+\frac{\partial}{\partial t}f(M,t)\frac{\sigma^2 M^2\partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)$$

Siendo está la ecuación Black & Scholes.

Es una ecuación diferencial que tiene varias soluciones. La solución que aquí analizaremos, en particular para los contratos de opción, depende de las condiciones de lois límites $c = max\ \{M - S,0\}$ y $p = max\ \{S - M,0\}$, para un contrato tipo call y put estilo europeo respectivamente.

FÓRMULA BLACK SCHOLES PARA VALUAR CONTRATOS ESTILO EUROPEO

Si Consideramos un contrato tipo call estilo europeo, sabemos que en la fecha de vencimiento el valor del contrato es considerado como el $max\ \{M - S,0\}$.

El valor actual del contrato, considerando el valor esperado $E(max\ \{M - S,0\})$, es

$$c = e^{-i(T-t)}E(max\{M - S\})$$

Donde

$$E(max\{M - S\}) = \int_{-\infty}^{\infty} max\{M - S\}f(M)dM$$

Sustituyendo la constante μ, en el modelo, por la tasa de interés libre de riesgo, entonces

$$Ln(M) \sim N\left(Ln(M_t)+\left(i-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

Es decir

$$M = M_t e^{\left(i-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma N(0,1)\sqrt{T-t}}$$

Sea $f(M)$ la función de densidad de probabilidad en un mundo neutral al riesgo, entonces

$$c = e^{-i(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{max\{M - S,0\}\, e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Considerando $Ln(S) - Ln(M)$, entonces

$$Ln(S) \sim N\left(Ln(M) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

Si $S \leq M \leq \infty \Rightarrow Ln(S) \leq Ln(M) \leq \infty$, entonces

$$c = e^{-i(T-t)} \int_{Ln(S)}^{\infty} \frac{(M - S) e^{-\frac{\left[u - \left(Ln(M) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) \right)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)}}}{\sigma \sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} du$$

Considerando la siguiente propiedad de la función de distribución normal

$$\int_{Ln(S)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[u-\mu]^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} du = \int_{\frac{Ln(S)-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Sea

$$\theta = \frac{Ln(S) - \mu}{\sigma} = \frac{Ln(S) - \left(Ln(M) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) \right)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -\frac{Ln(M) - Ln(S) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Sea $\kappa = 1 - \frac{\sigma^2}{2}$ y $T_r = T - t$, entonces

$$M = Me^{\kappa T_r + \sigma N(0,1)\sqrt{T_r}}$$

$$c = e^{-iT_r} \int_{\theta}^{\infty} \frac{(M - S)e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = e^{-iT_r} \int_{\theta}^{\infty} \frac{Me^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-iT_r} \int_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Sustituyendo $M = Me^{\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r}}$ en c

$$c = e^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{Me^{\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r}}e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$= M\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r}}e^{-iT_r}e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$= M\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r} - iT_r - \frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

Considerando el exponente $\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r} - iT_r - \dfrac{u^2}{2}$

$$\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r} - tT_r - \frac{u^2}{2} = -\frac{u^2 - 2\left[u\sigma\sqrt{T_r} - T_r(i-\kappa)\right]}{2}$$

Sustituyendo $\kappa = 1 - \dfrac{\sigma^2}{2}$, tenemos

$$-\frac{u^2 - 2\left[u\sigma\sqrt{T_r} - T_r(i-\kappa)\right]}{2} = -\frac{u^2 - 2u\sigma\sqrt{T_r} + \sigma^2 T_r}{2} = -\frac{\left(u - \sigma\sqrt{T_r}\right)^2}{2}$$

Entonces

$$c = M\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{\kappa T_r + u\sigma\sqrt{T_r} - iT_r - \frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$= M\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\left(u-\sigma\sqrt{T_r}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$= M\int_{\theta-\sigma\sqrt{T_r}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du - Se^{-iT_r}\int_{\theta}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

Considerando que

$$\theta - \sigma\sqrt{T_r} = -\frac{Ln(M) - Ln(S) + \kappa T_r}{\sigma\sqrt{T_r}} - \sigma\sqrt{T_r} = -\frac{Ln(M) - Ln(S) + (\kappa + \sigma^2)T_r}{\sigma\sqrt{T_r}}$$

Donde

$$\kappa + \sigma^2 = i + \frac{\sigma^2}{2}$$

Entonces, por la simetría de la función de densidad normal tenemos que

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = \int_{-\infty}^{-\theta} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

De esta forma

$$c = M \int_{\theta-\sigma\sqrt{T_r}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-iT_r} \int_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = M \int_{-\infty}^{-\theta+\sigma\sqrt{T_r}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-iT_r} \int_{-\infty}^{-\theta} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Sean $d_2 = -\theta = d_1 - \sigma\sqrt{T_r}$ y $d_1 = -\theta + \sigma\sqrt{T_r} = d_2 + \sigma\sqrt{T_r}$

Entonces

$$c = M \int_{-\infty}^{d_1} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-iT_r} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

De aquí tenemos que $c = MN(d_1) - Se^{-iT_r} N(d_2)$, donde $N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$.

Empleando la paridad put cal, sabemos que $p = c + Se^{-iT_r} - M$, entonces

$$p = MN(d_1) - Se^{-iT_r} N(d_2) + Se^{-iT_r} - M = M(N(d_1) - 1) - Se^{-iT_r}(N(d_2) - 1) = M(N(d_1) - 1),$$
$$= M(-N(-d_1)) - Se^{-iT_r}(-N(-d_2)) = Se^{-iT_r} N(-d_2) + MN(-d_1)$$

De aquí tenemos que $p = Se^{-iT_r} N(-d_2) + MN(-d_1)$

De esta forma hemos analizado el modelo Black & Scholes para valuar opciones europeas, ya que para valuar opciones americanas es necesario utilizar el modelo binomial.

Recordando que $T_r = T - t$

$$c = MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)$$
$$p = Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)$$

Donde

$$d_1 = \frac{Ln(M) - Ln(S) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d2 = \frac{Ln(M) - Ln(S) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Dadas estas ecuaciones podemos calcular el precio de un contrato tipo europeo de compra o venta.

IV .VI CONCEPTO DE GRIEGAS

Continuando con el análisis veremos la posibilidad de cuantificar la influencia de ciertos parámetros sobre el precio del contrato.

Recordando los factores que influyen sobre el precio del contrato, tenemos los factores exógenos: Precio del bien subyacente en el mercado, volatilidad, tasa de interés libre de riesgo; y los factores endógenos: Fecha de vencimiento y precio de ejercicio.

Como inversionista la cobertura ante cualquier fluctuación es esencial para prevenir un movimiento adverso, administrando el riesgo de pérdidas sobre la inversión. Es decir, intentar construir un portafolio seguro ante cualquier movimiento de estos parámetros: Precio del bien subyacente en el mercado, volatilidad, tiempo y la tasa de interés libre de riesgo; seguramente le otorga a cualquier inversionista la confianza de adquirir, en su inversión, un riesgo mínimo ante cualquier fluctuación.

COBERTURA DELTA

Al contar con una ecuación para conocer el precio de un contrato estilo europeo, definimos a delta como la derivada parcial del precio del contrato con respecto al precio del bien subyacente en el mercado.

En el caso de un contrato tipo call

$$\Delta_c = \frac{\partial}{\partial M} c = \frac{\partial}{\partial M} MN(d_1) - Se^{-i(T-t)} N(d_2) = N(d_1)$$

En el caso de un contrato tipo put

$$\Delta_p = \frac{\partial}{\partial M} p = \frac{\partial}{\partial M} Se^{-i(T-t)} N(-d_2) - MN(-d_1) = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

De aquí tenemos que $0 \leq \Delta_c \leq 1$ y $-1 \leq \Delta_p \leq 0$, es decir $0 \leq |\Delta| \leq 1$.

Considerando un contrato c, con una Δ, el precio del bien subyacente en el mercado M y un inversionista que emite n contratos, es decir, emite n contratos que amparan $100n$ activos a un precio de ejercicio S.

La posición del inversionista emisor puede ser cubierta adquiriendo $100n\Delta$ activos. De esta forma las ganancias o las pérdidas de la posición larga, sobre las opciones, están compensadas por las pérdidas o ganancias de la posición corta sobre el bien subyacente.

Este portafolio permanece cubierto solo durante un instante ya que Δ cambia constantemente, por lo que la cobertura tiene que ser ajustada de igual forma. A este proceso de ajuste se le conoce como rebalanceo. En el mercado, el precio del bien subyacente sufre cambios durante la jornada, sin embargo, considerando sólo los cambios diarios, el rebalanceo es diario y el cambio $r\Delta$ genera un cambio en $100nr$ activos.

Al tipo de esquemas de cobertura donde los ajustes son frecuentes se les denomina esquemas de cobertura dinámica.

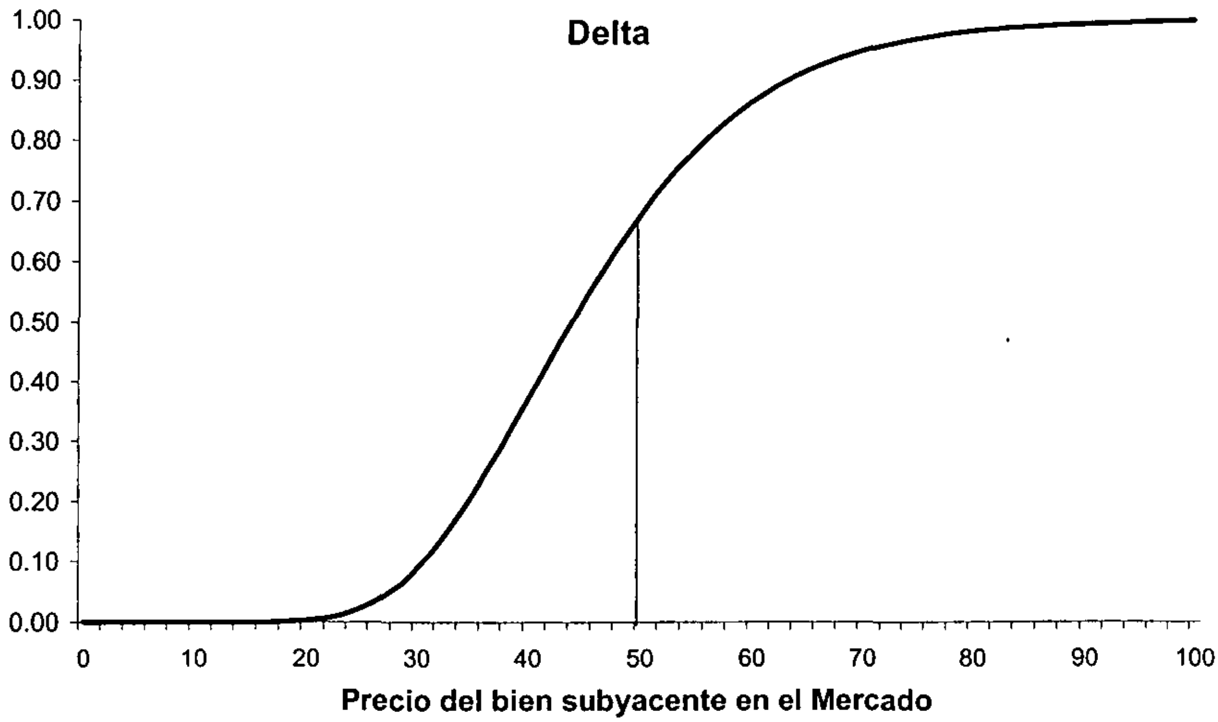
De lo anterior, para un inversionista que emplea una cobertura delta para una posición corta sobre un contrato tipo call estilo europeo debe mantener una posición larga sobre $N(d_1)$ activos. De igual manera, emplear una cobertura delta para una posición larga sobre un contrato tipo call estilo europeo debe mantener una posición corta sobre $N(d_1)$ activos.

Análogamente, para una posición larga sobre un contrato tipo put estilo europeo se debe mantener una posición larga sobre $N(d_1)$ activos y para una posición corta sobre un contrato tipo put estilo europeo se debe mantener una posición corta sobre $N(d_1)$ activos.

De acuerdo al presente análisis de la cobertura delta, podemos apreciarla como una medida de sensibilidad del contrato a cambios en el precio del bien subyacente en el mercado. Es un parámetro esencial para evaluar el riesgo y cubrir la posición generada por la emisión de un contrato, esto es, indica la probabilidad de que un contrato sea ejercido.

Considerando un contrato call, si éste se encuentra fuera de dinero, delta se aproxima a cero; si se encuentra en dinero delta se aproxima a un medio y cuando se encuentra en dentro de dinero, delta se aproxima a la unidad.

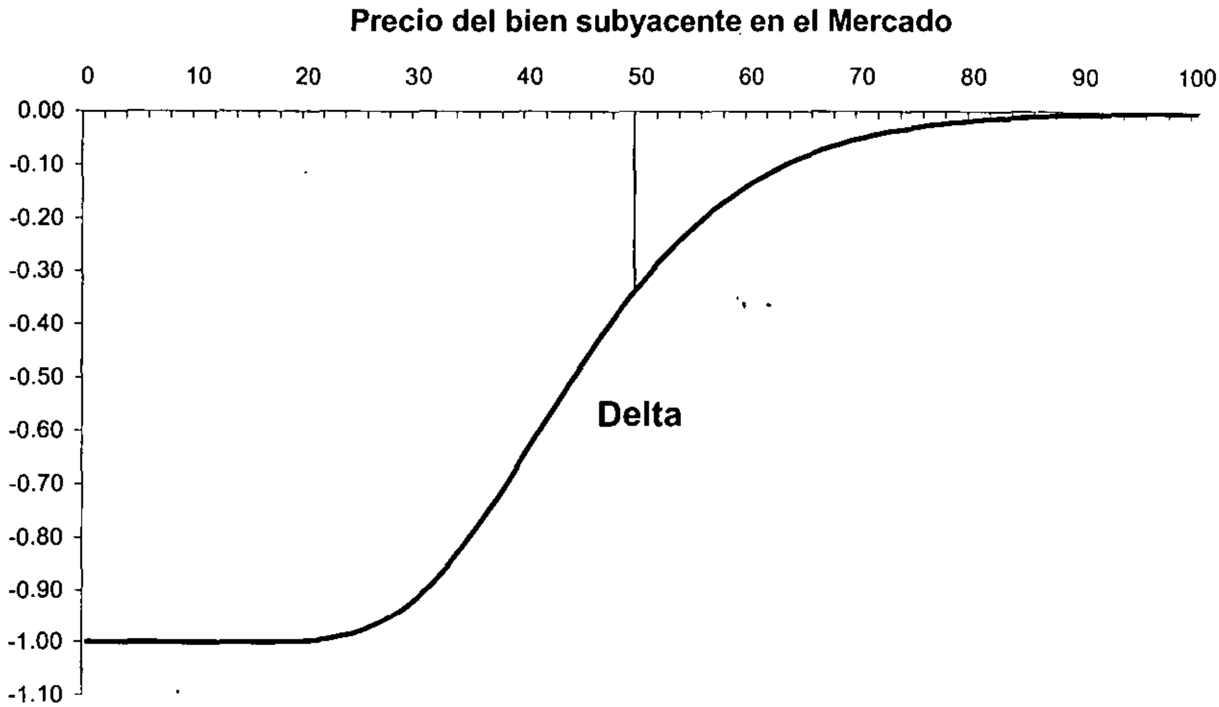
Análogamente, para un contrato put que se encuentra fuera de dinero, delta se aproxima a cero; si se encuentra en dinero, delta se aproxima a un medio y cuando se encuentra dentro de dinero, delta se aproxima a la unidad.



Gráfica 4.2

Considerando un contrato tipo call y put respectivamente, con un valor de ejercicio al vencimiento de S = 50, considerando una tasa de interés libre de riesgo i = 18 %, una volatilidad σ = 40 % y un tiempo de expiración de seis meses, podemos observar el comportamiento del parámetro delta conforme el precio del bien subyacente en el mercado cambia.

Como observamos en las gráficas 4.2 y 4.3 la delta en valor absoluto indica la probabilidad de que un contrato sea ejercido. La delta está fuertemente relacionada con el análisis Black & Scholes, ya que construimos un portafolio con una posición corta sobre un contrato y una posición larga sobre la derivada parcial de f con respecto al precio del bien subyacente en el mercado en activos, es decir, delta activos.



Gráfica 4.3

Así que podemos asegurar, mediante este análisis que el modelo black scholes para valuar el precio de un contrato de opción está basado en la construcción de un portafolio delta considerando que el rendimiento del portafolio es igual a la tasa de interés libre de riesgo. De aquí la posición de invertir en opciones cubiertas.

Es importante considerar que la volatilidad y el tiempo remanente también tienen influencia sobre la delta. Desde el momento en que se emite un contrato el tiempo remanente disminuye, depreciando el contrato.

Considerando el paso del tiempo, un contrato que se encuentra dentro de dinero tiene una delta que se aproxima a un medio en valor absoluto y en los últimos momentos antes de que el contrato expire el valor absoluto de la delta se aproxima a la unidad, lo cual indica que un contrato dentro dinero y próximo a la fecha de vencimiento tiene una elevada probabilidad de ser ejercido.

El paso del tiempo sobre un contrato en dinero tiene una delta con un valor absoluto que se aproxima a un medio, disminuyendo hasta cero mientras la fecha de vencimiento se aproxima, lo cual muestra que la probabilidad de ejercer un contrato en dinero disminuye con el paso del tiempo hasta ser igual a la de no ejercerlo. El paso del tiempo sobre un contrato fuera de dinero disminuye la delta hasta aproximarse a cero, lo cual muestra que un contrato fuera de dinero disminuye su probabilidad de ser ejercido mientras el tiempo transcurre.

Suponiendo que el paso del tiempo para cada contrato es un parámetro que no se puede detener, esto es, el paso del tiempo deprecia cualquier contrato; considerando además el cambio en la volatilidad, si la volatilidad aumenta cuando un contrato dentro de dinero es emitido la delta en valor absoluto disminuye a través del tiempo aproximándose a un medio y al acercarse la fecha de vencimiento, la delta en valor absoluto se aproxima a la unidad; lo cual indica que un contrato dentro de dinero aumenta su probabilidad de ser ejercido a través del tiempo y con un aumento en la volatilidad. Cuando aumenta la volatilidad considerando un contrato en dinero, la delta en valor absoluto disminuye aproximándose a un medio en la fecha de vencimiento, lo cual muestra que un contrato en dinero disminuye su probabilidad de ser ejercido a través del tiempo y aumentando la volatilidad. Por último, si un contrato fuera de dinero experimenta un incremento en la volatilidad su delta muestra una disminución, en valor absoluto, aproximándose a un medio y al estar próxima la fecha de vencimiento, se aproxima a cero; lo cual indica que un contrato fuera de dinero disminuye la probabilidad de ser ejercido a través del tiempo y con un aumento en la volatilidad.

COBERTURA GAMMA

Es la segunda derivada parcial del precio del contrato con respecto al precio del bien subyacente en el mercado, es decir, la derivada de la delta con respecto al precio del bien subyacente en el mercado.

Es un parámetro que se emplea para determinar la tasa a la que delta cambia cuando el precio del bien subyacente en el mercado cambia, esto es, mide la sensibilidad de la delta a cambios en el precio del bien subyacente en el mercado. En otras palabras es la delta de la delta. También se denomina a la gamma como la curvatura de una opción.

En el caso de un call

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2}{\partial M^2} c = \frac{d}{dM}\Delta_c = \frac{d}{dM}N(d_1) = \frac{d}{dM}\int_{-\infty}^{d_1}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dM}d_1 = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{M\sigma\sqrt{T-t}}$$

Es decir

$$\Gamma_c = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{M\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} = \frac{N'(d_1)}{M\sigma\sqrt{T-t}}$$

En el caso de un put

$$\Gamma_p = \frac{\partial^2}{\partial M^2}p = \frac{d}{dM}\Delta_p = \frac{d}{dM}N(d_1) - 1 = \frac{d}{dM}\int_{-\infty}^{d_1}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - 1 = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dM}d_1 = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{M\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}}$$

Es decir

$$\Gamma_p = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{M\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} = \frac{N'(d_1)}{M\sigma\sqrt{T-t}}$$

Por lo cual

$$\Gamma_c = \Gamma_p = \frac{N'(d_1)}{M\sigma\sqrt{T-t}}$$

Este parámetro es positivo, ya que la delta en ambos tipos de contrato aumenta en términos absolutos si el precio del bien subyacente en el mercado aumenta. Es decir, un aumento en el precio del bien subyacente en el mercado aumenta la delta call y disminuye la delta put. De esta forma un contrato call con una delta Δ_c y una gamma Γ, con un aumento de un punto de cotización en el precio del bien subyacente en el mercado, esto es, el precio de mercado del bien subyacente incrementa de M a $M + 1$, entonces la delta call incrementará de Δ_c a $\Delta_c + \Gamma$ y una disminución de un punto de cotización, $M - 1$, reducirá la delta de Δ_c a $\Delta_c - \Gamma$. En el caso de un contrato put con una delta Δ_p y una gamma, Γ, un aumento de un punto de cotización en el precio del bien subyacente en el mercado, la delta put disminuye de Δ_p a $\Delta_p + \Gamma$ y una disminución de un punto de cotización en el precio del bien subyacente, incrementa la delta put de Δ_p a $\Delta_p - \Gamma$.

Suponiendo un portafolio delta neutral tiene una gamma, Γ, y un contrato tipo call tiene una gamma, Γ_c, entonces, si el número de contratos añadidos al portafolio es n_c, la gamma del portafolio es $n_c\Gamma_c + \Gamma$.

Incluido el contrato es probable el cambio de la delta del portafolio, así la posición del bien subyacente, en tal caso, está modificada al mantener una delta neutral. Nótese que el portafolio es delta neutral sólo por un periodo corto ya que a través del tiempo pueden ocurrir cambios en el precio del bien subyacente. La gamma puede mantenerse neutral, si sólo si, la posición de un contrato es ajustada de tal forma que sea siempre igual a

$$n = -\frac{\Gamma}{\Gamma_c}$$

Ya que la posición en cualquier contrato es, necesariamente, hacer el portafolio gamma neutral.

Teniendo un portafolio delta neutral, se puede considerar gamma neutral como primera opción a corregir, asumiendo el hecho de que la posición sobre un bien subyacente no puede ser cambiada continuamente cuando el parámetro delta es empleado. La delta neutral provee protección contra movimientos, relativamente pequeños en el precio del bien subyacente entre cada rebalanceo. La gamma neutral provee, por el contrario, protección contra grandes movimientos en el precio del bien subyacente entre cada rebalanceo.

Considerando el portafolio delta neutral que tiene una gamma Γ. En particular el contrato tipo call tiene una delta Δ_c y una gamma Γ_c. El portafolio puede ser gamma neutral incluyendo una posición larga de n contratos tipo call en el portafolio. Sin embargo, debido a este cambio, la delta del portafolio cambia de $\Delta = 0$ a $\Delta = n\Delta_c$. Por lo que una cantidad Δ del bien subyacente deberá, por lo tanto, ser vendido para mantener el portafolio cubierto.

Por otra parte, de igual forma que en la cobertura delta, la volatilidad y el tiempo remanente influyen en la gamma de un contrato. Considerando sólo el paso del tiempo sobre cada contrato que se encuentra dentro de dinero, la gamma incrementa conforme el tiempo transcurre y en la fecha de vencimiento cae vertiginosamente hasta cero. El paso del tiempo sobre cada contrato que se encuentra en dinero incrementa desmesuradamente conforme el tiempo transcurre y en el caso de cada contrato fuera de dinero, la gamma incrementa conforme el tiempo transcurre y en la fecha de vencimiento cae vertiginosamente hasta cero. Para cada contrato en dinero la gamma crece continuamente conforme el tiempo remanente se aproxima a cero.

El incremento de la volatilidad mantiene de manera similar el comportamiento de la gamma, sin embargo ésta incrementa en menor magnitud, siendo menos brusco su descenso hasta cero en el caso de contratos dentro y fuera de dinero. Por otro lado, cuando la volatilidad desciende, el comportamiento de la gamma es el mismo, pero ésta tiene un incremento de mayor magnitud, haciendo más brusco el descenso al aproximarse la fecha de vencimiento de los contratos que se encuentran dentro y fuera de dinero.

THETA

Es la derivada parcial del precio del contrato con respecto al tiempo.

Mide la sensibilidad del costo del contrato con respecto al paso del tiempo.

En el caso de un contrato tipo call

$$\begin{aligned}
\Theta_c &= \frac{\partial}{\partial t} c = \frac{\partial}{\partial t}\left[MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[MN(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[M\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{T-t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - Se^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx\right] \\
&= -\frac{M\sigma e^{-\frac{(d_2+\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= -\frac{M\sigma e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = -\frac{M\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}$$

En el caso de un contrato tipo put

$$\begin{aligned}
\Theta_p &= \frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\partial}{\partial t}\left[Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_2 - \sigma\sqrt{T-t})\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[Se^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - M\int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx\right] \\
&= iSe^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - \frac{M\sigma e^{-\frac{(-d_2-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \\
&= iSe^{-i(T-t)}\int_{-\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - \frac{M\sigma e^{-\frac{(-d_1)^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \\
&= iSe^{-i(T-t)}N(-d_2) - \frac{M\sigma N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

De acuerdo a las propiedades de simetría de la función de densidad normal

$$\Theta_c = -\frac{Me^{-\frac{d_1^2}{2}}\sigma}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}N(d_2) = -\frac{MN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}N(d_2)$$

$$\Theta_p = -\frac{Me^{-\frac{d_1^2}{2}}\sigma}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} + iSe^{-i(T-t)}N(d_2) = -\frac{MN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + iSe^{-i(T-t)}N(d_2)$$

Este parámetro cuantifica la velocidad con la que el valor extrínseco decrece desde la emisión del contrato hasta la fecha del vencimiento. Este no es un parámetro de cobertura, ya que no tiene sentido cubrirse contra el inexorable paso del tiempo.

RELACIÓN ENTRE DELTA, GAMMA Y THETA

Recordando la ecuación Black & Scholes

$$if(M,t) = \frac{iM\partial}{\partial M}f(M,t) + \frac{\partial}{\partial t}f(M,t)\frac{\sigma^2 M^2 \partial}{2(\partial M)^2}f(M,t)$$

La cual satisface el precio de $f(M,t)$ para un contrato sobre un bien subyacente que no paga dividendos durante la vigencia del contrato.

Considerando que

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial M}f(M,t), \quad \Gamma = \frac{\partial^2}{\partial M^2}f(M,t) \quad y \quad \Theta = \frac{\partial}{\partial t}f(M,t)$$

Y el valor de un contrato tipo call estilo europeo es

$$c = MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)$$

Entonces

$$\Delta_c = N(d_1), \quad \Gamma_c = \frac{N'(d_1)}{M\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad \Theta_c = -\frac{M\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}N(d_2)$$

La ecuación Black & Scholes debe satisfacer el precio del contrato tipo call estilo europeo

$$
\begin{aligned}
ic &= \frac{iM\partial}{\partial M}c + \frac{\partial}{\partial t}c\frac{\sigma^2 M^2 \partial}{2(\partial M)^2}c = iM\Delta_c + \Theta_c + \frac{\sigma^2 M^2 \Gamma_c}{2} \\
&= iMN(d_1) - \frac{M\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - iSe^{-i(T-t)}N(d_2) + \frac{M^2\sigma^2 N'(d_1)}{2M\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= iMN(d_1) - iSe^{-i(T-t)}N(d_2) = i\left[MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right]
\end{aligned}
$$

Satisfaciendo la ecuación diferencial.

Considerando un portafolio cubierto, esto es, delta neutral

$$ic = \Theta_c + \frac{M^2\sigma^2\Gamma_c}{2}$$

La expresión anterior muestra que cuando el valor absoluto de theta es muy grande, entonces, gamma es muy grande. Así, cuando el valor en el tiempo se aproxima a cero la gamma se aproxima, de igual forma, a cero y cuando el valor absoluto de theta crece, entonces, gamma crece también. Es decir, el parámetro theta es análogo, por así decirlo, al parámetro gamma. El contrato se deprecia con el paso del tiempo, sin embargo el poseedor obtiene ganancias en el mercado cubriendo su posición gamma. Es decir, estos dos parámetros se anulan de acuerdo a la simetría de la ecuación y a la eficiencia de la volatilidad, la cual refleja de forma adecuada los probables cambios del precio del bien subyacente en el mercado.

Considerando el valor de un contrato tipo put estilo europeo

$$p = Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)$$

Donde

$$\Delta_p = N(d_1) - 1, \quad \Gamma_p = \frac{N'(d_1)}{M\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad \Theta_p = -\frac{M\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + iSe^{-i(T-t)}N(-d_2)$$

Entonces

$$ip = \frac{iM\partial}{\partial M}p + \frac{\partial}{\partial t}p + \frac{\sigma^2 M^2 \partial}{2(\partial M)^2}p = iM\Delta_p + \Theta_p + \frac{\sigma^2 M^2 \Gamma_p}{2}$$
$$= -iM[N(d_1) - 1] - \frac{M\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + iSe^{-i(T-t)}N(-d_2) + \frac{M^2\sigma^2 N'(d_1)}{2M\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$= -iMN(-d_1) + iSe^{-i(T-t)}N(-d_2) = i\left[Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)\right]$$

Y considerando en portafolio cubierto

$$ip = \Theta_p + \frac{M^2\sigma^2\Gamma_p}{2}$$

Se refleja, de igual forma que en el contrato tipo call, la simetría de la ecuación.

COBERTURA VEGA

Es la derivada parcial del precio del contrato con respecto a la volatilidad.

Se define como el cambio en el precio de un contrato dado un cambio en la volatilidad del precio del bien subyacente en el mercado, es decir, es la tasa de cambio del valor de la opción con respecto a la volatilidad del precio del activo en el mercado.

En el caso de un contrato tipo call

$$\Lambda_c = \frac{\partial}{\partial\sigma}c = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[MN(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right]$$
$$= M\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

En el caso de un contrato tipo put

$$\Lambda_p = \frac{\partial}{\partial\sigma}p = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[Se^{-i(T-t)}N(d_2) - MN(-d_2 - \sigma\sqrt{T-t})\right]$$
$$= M\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

Es decir

$$\Lambda = \Lambda_c = \Lambda_p = M\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

Este parámetro cuantifica el cambio en el precio del contrato cuando se dan cambios en la volatilidad del precio del bien subyacente en el mercado. Es un parámetro positivo y se expresa en términos monetarios. Los bienes subyacentes más volátiles tienen los contratos de mayor costo, por lo que al aumentar la volatilidad el costo del contrato aumenta y viceversa.

Si un contrato tiene una Vega, Λ, significa que un incremento de un punto porcentual en la volatilidad aumenta el costo del contrato en Λ puntos de cotización. Esto es, si el costo de la prima es f, con una volatilidad σ, un aumento de la volatilidad de σ a $\sigma + 0.01$, esto incrementa el costo de la prima de f a $f + \Lambda$. Análogamente, en caso de que la volatilidad tenga un descenso de σ a $\sigma - 0.01$, entonces el costo de la prima disminuye de f a $f - \Lambda$.

Haciendo la consideración de que en la práctica la volatilidad cambia a través del tiempo, el valor de la vega puede cambiar a causa de movimientos en la volatilidad, causados por los cambios en el precio del bien subyacente en el mercado.

La vega de un portafolio puede ser cambiada adquiriendo una posición de un contrato, Esto es, si Λ es la vega de un portafolio y Λ_f es la vega de un contrato, entonces, una posición de n contratos hace instantáneamente, el portafolio, vega neutral.

Donde

$$n = -\frac{\Lambda}{\Lambda_f}$$

Desafortunadamente un portafolio que es gamma neutral, en general no será vega neutral y viceversa. Si se requiere un portafolio que sea gamma y vega neutral, simultáneamente, al menos dos contratos dependientes al bien subyacente deben ser usualmente empleados.

COBERTURA RHO

Es la derivada parcial de la prima con respecto a la tasa de interés libre de riesgo.

Parámetro que mide el cambio del valor del contrato cuando cambia la tasa de interés libre de riesgo, esto es, es la tasa de cambio del valor del contrato con respecto a la tasa de interés.

En el caso de un contrato tipo call

$$\mathrm{P}_c = \frac{\partial}{\partial i}c = \frac{\partial}{\partial i}\left[MN(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)\right] = S(T-t)e^{-i(T-t)}N(d_2)$$

En el caso de un contrato tipo put

$$\mathrm{P}_p = \frac{\partial}{\partial i}p = \frac{\partial}{\partial i}\left[Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - MN(-d_1)\right] = -S(T-t)e^{-i(T-t)}N(-d_2)$$

Este parámetro, como se puede observar, es positivo en los contratos call y negativo en los contratos put.

Además indica que por cada unidad porcentual que cambie la tasa de interés libre de riesgo, esto es, un cambio de i a $i + 0.01$, entonces, el valor del contrato cambiará de f a $f + \mathrm{P}$.

Considerando un contrato put sobre un índice con una rho, P_p, un incremento en la tasa de interés libre de riesgo de i a $i + 0.01$, incrementará el valor del contrato de p a $p + \mathrm{P}_p$. Sin embargo ya que P_p es negativa el valor del contrato descenderá.

Así pues, con esto damos por concluido este análisis. Sin embargo hay más aún sobre este tema tan interesante. Se puede poner en practica construir portafolios empleando los parámetros de griegas con el fin de proteger a los inversionistas.

CONCLUSIONES

Dado el contenido y desarrollo del presente trabajo hay conceptos que necesitan cierto nivel de análisis. El tema de las opciones considerado en el temario de Finanzas II y debido a su importancia y alcance puede considerarse necesario su análisis en el que el estudiante de la licenciatura en actuaría pueda perfeccionar las técnicas para ofrecer a los inversionistas la destreza y experiencia necesarias en el manejo de este instrumento.

La licenciatura en actuaría aporta los conocimientos necesarios, a través de los cuatro primeros semestres, para que los actuarios puedan desarrollar y aplicar con eficiencia este tipo de modelos aplicados a la economía, las finanzas y los seguros.

A través de este trabajo se conocieron los antecedentes y el marco legal que en México se ha desarrollado para la apertura de un mercado de opciones. Posteriormente se conocieron los conceptos y definiciones necesarias para comprender que es una opción, empleando conceptos básicos en matemáticas. Conociendo ya los tipos, posiciones, estilos de opciones y los depósitos necesarios para garantizar el cumplimiento de los derechos de los participantes, así como los factores involucrados para conocer el precio de la cobertura se hace un análisis, suponiendo que efectivamente existe una solución matemática al problema y la manera en que cada uno de los factores afectan el monto de la prima. Este análisis permite conocer la anatomía misma de la cobertura y el alcance que esta puede llegar a tener de acuerdo a las fluctuaciones de estos factores el mercado. Es en este momento donde se analiza, por medio de ejemplos reales, el desarrollo práctico del tema de las opciones. Para esto, se abordaron temas involucrados con estadística y probabilidad, empleando y analizando conceptos que preparan el terreno para analizar el desarrollo del modelo binomial para valuar opciones con estilo americano, presentando ejemplos prácticos mediante el empleo cotizaciones que se aproximan a la realidad que el mercado mexicano tuvo durante este periodo.

Ya que se conoce el problema y se obtuvo una solución a éste, se tiene la tarea de analizar los conceptos y el desarrollo que llevan a una solución del problema de valuar opciones con estilo europeo, solución que ya ha sido analizada y puesto en práctica. Al analizar y poner en práctica este modelo se conocen otras propiedades importantes, que tal vez habrían pasado inadvertidas al analizar el desarrollo del modelo solo de manera teórica.

Este modelo permite valuar opciones con estilo europeo y fue desarrollada en la década de los setenta y en su análisis hay conceptos que requieren conocimientos avanzados, sin embargo, confiando en que este trabajo contiene el desarrollo y análisis prácticos para estimar la volatilidad del precio del bien subyacente en el mercado, la función de densidad normal y la probabilidad asociada, se considera que se hace un análisis práctico que beneficia y facilita su aplicación mediante conocimientos básicos y además se presenta un análisis teórico formal, que en la medida de lo posible dan al actuario los conceptos matemáticos mínimos para que su formación le permita no solo aplicar este modelo, sino más aún, para que pueda modificarlo y adecuarlo a las necesidades de los inversionistas y a los factores reales que la economía y las finanzas demandan.

Es importante hacer notar que el actuario es el profesionista indicado, por su formación académica, para desarrollar y aplicar modelos que permitan valuar opciones, así como desarrollar coberturas que se adapten a las necesidades y posibles riesgos de los empresarios mexicanos ya que aplicando y difundiendo estos conocimientos mediante la asesoría y consultoría, se pueden evitar cuantiosas pérdidas de empresarios mexicanos que al adquirir deudas en dólares, para mejorar su equipo de producción, triplicaron sus deudas durante el último semestre de 1993 y el primero de 1994 debido a la paridad del peso frente al dólar, lo cual se habría podido evitar mediante una opción de compra con un precio de ejercicio que garantizara la adquisición de la divisa para realizar el pago de la deuda a la paridad contemplada por sus estados financieros. De esta forma se habría administrado o transferido el riesgo cambiario pudiendo cumplir sus compromisos y aumentando el rendimiento esperado por la inversión.

Así pues la participación de los actuarios en la creación de nuevos instrumentos, como las opciones, da paso a una cultura sobre la cobertura factible de obtener, protegiendo a los inversionistas en contra de los cambios adversos que se pueden sufrir con respecto a una posición determinada dentro del mercado.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Jr.
Cálculo Diferencial e integral
McGraw Hill 1991.

Berges y Ontiveros
El Mercado de Futuros
Editorial Pirámide
Madrid, España 1984.

Canavos, Jorge C.
Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos
McGraw Hill 1988.

Devore, Jay L.
Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias
International Thomson Editores 1998.

Devore, Jay L.
Probability and Statics for Engineering and yhe Sciences
Brooks / Cole Publishing Company 1998.

Díaz Mata, Alfredo
Matemáticas Financieras
McGraw Hill 1991.

Díaz Tinoco, Jaime y Hernández Trillo, Fausto
Futuros y Opciones Financieras
Editorial Limusa
Bolsa Mexicana de Valores 1995.

Dothan, Michael U.
Prices in Financial Markets
Oxford University Press 1990.

Feller, William
Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones
Limusa 1983.

Hull, John C.
Futures and Options Markets
Prentince Hall 1998.

Kolb, Robert
Understanding Futures Markets
Tercera Edición.
Kolb Publishing Co 1998.

Marshall, John
Futures and Options Contrating: Theory and Practice
South Western Publishing Co.
Livermore, C.A 1989.

MexDer
Reglamento Interno
Acervo Documental del Centro de Información
Bolsa Mexicana de Valores 1999.

Moser, J.
Detemining margin on Futures Market
Economics Letters No. 76 Mayo 1992.

Parras Ulibarri y Asociados
Manual Fiscal y Contable de los Instrumentos bursátiles
Asociación Mexicana de Casas de Bolsa.

Shuss, Zeev
Theory and Aplications of Stochastic Differential Equations
Weley Series in Probability and Mathematical Statistics.

Zill, Dennis G.
Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones al modelado
International Thomson Editores 1997.

www.ualm.es/~freche/realciones/distribu/node11.html
http://plata.uda.cl/eliseo/sd/ARCHIVOS/BROWN.HTML