UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVERTIMENTOS MATEMATICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

SOFIA KAPLAN ZONECHAIN

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE

MEXICO, D. F. 2001

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

DIVERTIMENTOS MATEMATICOS

realizado por KAPLAN ZONECHAIN SOFIA

con número de cuenta 07557150-2 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE Virginia Abrín Batule

Propietario DR. ZEFERINO PARADA GARCIA Parada G.

Propietario MAT. ADRIAN GIRARD ISLAS Adrián Girard I.

Suplente M. EN C. JOSE GUERRERO GRAJEDA

Suplente MAT. BENITO MARTINEZ SALGADO

Héctor Méndez L.
Consejo Departamental de MATEMATICAS
DR. HECTOR MENDEZ LANGO

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A Virginia, porque me recordó que yo amaba las matemáticas y con infinita paciencia me llevó de la mano en este redescubrimiento.

A "Los Chacales", pues juntos jugamos apasionadamente a las matemáticas durante nuestras sesiones de discusión y estudio.

Pero sobre todo a Daniel, a Yael y a Jaime pues son los representantes fieles de que las matemáticas son un reto y un juego.

INTRODUCCIÓN

Es muy posible que las matemáticas hayan nacido de la necesidad del ser humano de encontrar patrones para explicar su entorno, darle orden y probablemente hasta tratar de prever el futuro de lo que le rodea. Las matemáticas, de manera tácita, forman parte de la cultura universal y pueden ser tanto un reto mental como un pasatiempo al representarse en juegos y rompecabezas.

Los niños tienen la capacidad innata de experimentar y aprender del mundo a través del juego. Los acertijos y rompecabezas son problemas que son resueltos por el único placer de encontrarles solución y ésta es la forma en que muchos matemáticos y científicos se enfrentan a sus investigaciones; es decir, su trabajo es lo que les permite estar resolviendo acertijos y rompecabezas. Esta sería la manera más natural y lógica para que los seres humanos lográramos entender el mundo que tenemos a nuestro alrededor.

Los sistemas de numeración surgieron de una necesidad del hombre por contar las cosas que conformaban su entorno cotidiano. De esta necesidad aparecieron marcas, contadores y fichas que llevaban una correspondencia directa con los bienes que representaban. La consecuencia directa fue el desarrollo de símbolos para representar los números y las cantidades y el planteamiento de diferentes métodos para organizar los caracteres numéricos que forman los números.
Al igual que los sistemas de numeración, la geometría nació con la necesidad del hombre de medir la tierra y así de entender lo que estaba a su alrededor. Al paso de los siglos la geometría evolucionó, originando varias ramas de estudio, entre las que se encuentra la topología, que incluye la teoría de nudos. El estudio matemático de los nudos, además de tener aplicaciones prácticas en áreas como el análisis de circuitos eléctricos y tener conexiones con el estudio de la física cuántica, es fuente de curiosidad acerca del comportamiento de los mismos. Al experimentar con rompecabezas las diferentes posibilidades matemáticas que ofrecen, el estudio de los nudos se hace mucho más fácil y divertido.

Al convertir el proceso de aprendizaje en una experiencia lúdica placentera, las matemáticas se tornan en acertijos y juegos que nos retan a encontrar una o más soluciones a los problemas que el mundo nos plantea.
He dividido este trabajo en cuatro grandes apartados: Sistemas de Numeración, en el que se tratan las notaciones aditiva, multiplicativa y posicional, asi como ejemplos de éstas; Expandiendo el Universo de los Números, donde se ven los diferentes sistemas numéricos: los Naturales, los Enteros, los Racionales, los Irracionales, los Reales, los Complejos y algunos temas relacionados con éstos; Las Geometrías y finalmente Asuntos Topológicos, en el que se habla de Nudos, Lazos y otros enredos matemáticos; en cada apartado las descripciones tratan de ser informales y se finaliza con una sección de acertijos o rompecabezas y sus respectivas respuestas.
Mi intención al realizar este compendio fue la de servir a todos aquellos individuos que tienen la curiosidad de aprender jugando y a quienes piensan que las matemáticas también pueden ser aprendidas fuera de un salón de clases.

Sistemas de Numeración

Para muchos de nosotros, el estudio de las matemáticas puede ser tan divertido y placentero como el estudio de la música, la poesía, la pintura o cualquiera otra de las Bellas Artes. A pesar de que la humanidad está convencida de que las matemáticas son útiles para la mayoría de las ciencias, no deberíamos utilizar este argumento como única justificación para estudiarlas. En este sentido, sería genial que tuviéramos una mentalidad parecida a la de los griegos, quienes consideraban que para que una persona fuera educada debía conocer las matemáticas y que las estudiáramos por el puro gusto de hacerlo.

El interés de los seres humanos por las matemáticas va mas atrás de los griegos. En excavaciones en el medio oriente que datan de cien siglos anteriores a éste, se han encontrado marcas, contadores y fichas que ya están en una correspondencia directa con los bienes a los que representan. A partir de estos sistemas fueron desarrollados símbolos de números y cantidades, con lo que nació el concepto matemático de cantidad pura. De las grandes civilizaciones de la antigüedad –Babilonia, Egipto, Grecia y Roma- el desarrollo más importante en las matemáticas corresponde a los Babilonios, donde métodos numéricos, algebraicos y geométricos han existido desde cerca del 1700 a.c.

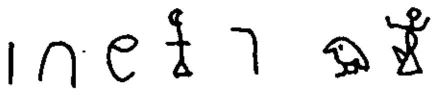
También había una asociación mística y mítica con los números, por ejemplo "13" como símbolo de suerte, "40" días tardó Moisés en recibir los "10" mandamientos. Sin embargo, una de las preocupaciones principales fue contar las cosas, entre éstas los días y los meses del año, y para hacerlo cada pueblo utilizó algún método de arreglar los caracteres numéricos para formar los números. Relativo a ésto se distinguen principalmente tres tipos de notación es decir, métodos de arreglo de caracteres numéricos para formar los números: aditivo, multiplicativo y posicional.

Notación Aditiva

Los números se forman alineando varios caracteres individuales de cada tipo generalmente en orden descendente, repitiendo cada caracter tantas veces como sea necesario hasta formar el número compuesto que se desea. Este tipo de notación presenta una variante, la notación sustractiva, en la que para evitar cadenas demasiado largas se coloca un caracter de menor valor precediendo a uno de mayor valor para indicar que el primero va a ser restado del segundo. Ejemplos de notación aditiva son los sistemas de numeración: Egipcio, Sumerio, Griego y Romano.

El sistema de numeración egipcio data de unos 5500 años.

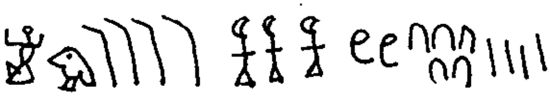
Sus principales símbolos son:



$1 \quad 10 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6$

donde cada símbolo se repite hasta 9 veces.

Así el número:

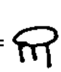
 =1143254

También utilizaron las fracciones unitarias.

El  , que representa una boca abierta, colocado encima del número indicaba una fracción así:

 $= \frac{1}{224}$

y tenían símbolos especiales para algunas fracciones:

$\frac{1}{4}=$  $\frac{1}{2}=$ $\frac{2}{3}=$  ó  $\frac{3}{4}=$ 

El sistema de numeración Romano es un ejemplo de numeración aditiva que se sigue utilizando actualmente con algunas variantes.

Sus símbolos básicos son las letras:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

M es variante actual de los símbolos:

(I) ó (I) y partiendo cualquiera de estos a la mitad (I) se obtenía el correspondiente al actual D.

Siguiendo esta notación se podían obtener:

(I)	((I))	(((I)))	((((I))))
1000	10000	100000	1000000

También se utilizaban los símbolos:

$\mid X \mid$	$\overline{X}$	$\mid\overline{X}\mid$
1000	10000	1000000

En el siglo XIII se introdujo el principio de sustracción para evitar demasiadas repeticiones de un mismo símbolo, por ejemplo:

IV	IX	XL	XC	CD	CM
4	9	40	90	400	900

En vez de:

IIII	VIIII	XXXX	LXXXX	CCCC	DCCCC
4	9	40	90	400	900

Sujeto a dos reglas:

- V, L y D no se usan para ser sustraidos.
- Sólo un símbolo I, X ó C puede ser sustraido.

A pesar de que éste es un sistema de numeración decimal, para las fracciones emplearon como base el número 12, se usaron grupos de puntos. En la época medieval se agregó la letra S (que significaba *semi*) para denotar la mitad.

•	••	•••	∷	⁙	S
$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

S•	S••	S•••	S∷	S⁙	I
$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$	$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}=1$

Notación Multiplicativa

Esta emplea dos tipos de símbolos, por medio de un proceso multiplicativo, los caracteres de uno de los tipos aumentan el valor de los del segundo tipo. Entonces, el número es expresado como la adición de los numerales previamente multiplicados.

Un ejemplo de este sistema es el Chino. Se distinguen en este sistema tres tipos de símbolos numéricos: *numerales tradicionales nacionales*, *numerales oficiales* y *numerales mercantiles.*

Los *numerales tradicionales nacionales* son trece caracteres usados en sistema decimal. Son los más utilizados en la actualidad y han mantenido la misma estructura desde hace unos 1700 años. Tradicionalmente eran escritos verticalmente pero en la actualidad se utilizan horizontalmente de izquierda a derecha.

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

十	百	千	萬 ó 万
10	100	1000	10000

八萬九千五百六十七

Así: $8 \times 10000 + 9 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 7 = 89567$

Los *numerales oficiales* son símbolos mucho más ornamentados, se utilizan para notas bancarias, bonos, deudas, contratos y otros documentos valiosos.

壹	貳	叁	肆	伍	陸	柒	捌	玖
1	2	3	4	5	6	7	8	9

拾	佰	仟	萬
10	100	1000	10000

Los *numerales mercantiles* eran utilizados principalmente por los tenderos aunque en la actualidad su uso está desapareciendo.

El cero de este sistema ha sido adoptado por el sistema tradicional nacional.

〇	〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

十	百 百	千	万
10	100	1000	10000

Notación Posicional

Es el método empleado por todos los sistemas de numeración modernos; es un refinamiento del sistema multiplicativo, en el que quedan abolidos los caracteres multiplicadores.

Un caracter en este sistema de numeración conserva su significado, pero su valor actual está determinado por la posición en que queda escrito dentro de la secuencia de caracteres que forman al número. Por ejemplo en la siguiente expresión el 3 denota diferente número según la posición en que se encuentra : 3432, pensando de izquierda a derecha, el primer 3 significa tres mil, mientras que el segundo 3 significa treinta.

Ejemplos de este sistema son: la numeración *Hindu-arábiga*, los sistemas *Maya* y *Babilonio* y el sistema *binario* utilizado para las computadoras y sus formas octal y hexadecimal.

Sistema de numeración *Decimal*, sistema de numeración *Hindu-arábico* : Es el sistema que usamos casi todo el tiempo. Sus símbolos son los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cada cadena numérica es una suma de potencias de 10 (la base del sistema es 10), el dígito que se encuentra más a la derecha simboliza la cantidad de unos ($1 = 10^0$), el siguiente dígito hacia la izquierda indica la cantidad de dieces, así un diez y cero unos se escribe: 10.

El sistema *Decimal* o cualquier otro sistema posicional se puede extender para representar fracciones. Por ejemplo:

$$310.103 = 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

Los ejemplos más antiguos de dígitos *Hindu-arábicos* se encontraron en una columna de piedra en la India que data del año 250 a.c. En este hallazgo no aparece el cero; no se tiene la certeza de en qué momento los dígitos, incluyendo al cero, se empezaron a usar dentro del sistema de numeración posicional y si este desarrollo ocurrió en la India o bajo las influencias Fenicia o Persa.

Basado en el modelo Hindú, los árabes desarrollaron dos versiones de los numerales: Orientales y Occidentales, el dominante fue el Oriental. Los símbolos siguientes representan los numerales de Arabia Orientales modernos:

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Los numerales arábicos se acomodan de izquierda a derecha:

50 65 1748 1996

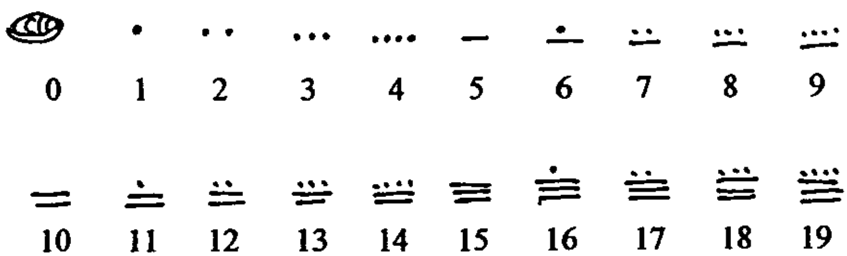
Los europeos modelaron sus numerales de los Arábicos Occidentales, la versión más antigua conocida es de un manuscrito español que data del 976:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sistema de numeración *Maya*: para propósitos científicos, los mayas tenían un sistema de numeración casi *vigesimal* que utilizaba el cero (cuya posición es central o final pero no inicial). El sistema tiene tres símbolos básicos:

- puntos con valor 1
- barras con valor 5
- un caracol estilizado, generalmente pintado de rojo, para el cero

Los números del 1 al 19 se obtienen combinando puntos y barras de la manera más práctica. Si las barras se colocaban verticalmente, los puntos se colocaban a la izquierda de ellas. Si se colocaban horizontalmente, los puntos se escribían sobre ellas.



El sistema es casi *vigesimal* pues la segunda posición es base 18 en vez de ser base 20. Un número maya se escribe en forma de columna y se lee de arriba hacia abajo:

$1 \times 20 \times 18 \times 20^2$	=	144000
$0 \times 20 \times 18 \times 20$	=	0
$13 \times 20 \times 18 \times 20^0$	=	4680
7×20	=	140
15×20^0	=	15
		148835

Sistema *binario*: Este sistema utiliza base 2, por lo que requiere sólo dos símbolos digamos 0 y 1, así 10 se escribe 1010 ya que

$1010 = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0$

2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0

donde $2^0 = 1$.

El uso del sistema *binario* no es práctico para los cálculos cotidianos pues los números están formados por cadenas muy largas, pero es el ideal para ser usado en las calculadoras electrónicas debido a que sus componentes eléctricos, como transistores, sólo responden a 2 estados de operación: 1 (que corresponde a encendido, circuito cerrado, verdadero) y 0 (que corresponde a apagado, circuito abierto, falso).

La adición y sustracción siguen las siguientes reglas:

$0 + 0 = 0 \times 2^0 = 0$

	2^0
	0
+	0
	0

$0 + 1 = 1 \times 2^0 = 1$

	2^0
	0
+	1
	1

$1+0=1\times 2^0=1$

	2^0
	1
+	0
	1

$1+1=1\times 2^1+0\times 2^0=10$

	2^1	2^0
		1
+		1
	1	0

$0-0=0\times 2^0=0$

	2^0
	0
-	0
	0

$1-0=1\times 2^0=1$

	2^0
	1
-	0
	1

$1-1=0\times 2^0=0$

	2^0
	1
-	1
	0

$10-1=1\times 2^1+0\times 2^0-1\times 2^0=1$

	2^1	2^0
	1	0
-		1
	0	1

La tabla de multiplicación *binaria*:

0 x 0 = 0 0 x 1 = 0 1 x 0 = 0 1 x 1 = 1

La tabla de la división *binaria*:

$0/1 = 0 \qquad 1/1 = 1; \quad 1/0$ y $0/0$ no están definidos.

En la práctica también son muy utilizados los sistemas *octal* (2^3) y *hexadecimal* (2^4). El sistema octal requiere 8 dígitos, que son los dígitos arábigos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. El sistema *hexadecimal* utiliza diez símbolos numéricos (del 0 al 9) y las letras A, B, C, D, E, F.

Como ejemplo del manejo de estas tres bases:

Convertir el número 10 111 110 a *octal, decimal* y *hexadecimal.*

El *binario*:	10	111	110	
	2	7	6	= 276*oct*
	$2 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 6 \times 8^0$			
	128 +	56 +	6	= 190*dec*
El *binario*:	1011	1110		
	B	E		= BE*hexad*

Acertijos cuya solución requiere de la aplicación de sistemas posicionales

Acertijo # 1

La numeración en Tumbuctú

Los indígenas de Tumbuctú le explicaban al explorador Francisco Gea su sistema de numeración:

Catufo: 18 es número primo (*) en nuestro sistema numérico así como también lo es 41.

Cataflax: Nosotros diríamos que 7 x 8 es 62.

Catamir: 35 es número primo en nuestro sistema numérico.

Catemer: 63 es divisible por 4 un número par de veces.

El explorador ya sabía que es tradición en la tribu que sólo la mitad de los entrevistados digan la verdad, por lo que pide ayuda para encontrar el sistema numérico de Tumbuctú.

(*) Para la definición de número primo ve a la página 30

Respuesta

Analicemos los datos proporcionados:

Dato#1: 18 y 41 son números primos (ver capítulo2), por lo que en sistema decimal también deben ser primos.

Dato #2: ellos dirían que 7 x 8 = 62. Si B es la base numérica de Tumbuctú,esto significa:

$$7 \times 8 = 56\text{dec} = 6B^1 + 2B^0$$

Esto es: $6B = 54\text{dec}$

Por lo que B = 9dec

Si la base B es 9 para el dato#1:

18 = 1 x B + 8 = 1 x 9 + 8 = 17 que si es primo y

41 = 4 x B + 1 = 4 x 9 + 1 = 37 que también es primo.

Revisando el dato #3:

35 = 3 x 9 + 5 = 32dec que no es cierto que sea número primo.

Y para el dato #4:

63 = 6 x 9 + 3 = 57dec, que es un número primo, por lo que también es número primo en base 9 y no es divisible entre 4.

El sistema numérico de Tumbuctú está en base 9, los dos sujetos que dicen la verdad son los dos primeros.

Acertijo # 2

Cuestión de fakrs

Peña preguntó: "¿por qué en Zilomir (cuya moneda es el fakr) la gente tiene tanto dinero?"

Alfaro contestó: "porque allí 26 conejos a 202 fakrs cada uno da 5555 fakrs."

¿Lo puedes explicar?

Respuesta

Si B es la base de Zilomir,

26 x 202 = 5555 significa:

$$(2B+6B^0)(2B^2+0B^1+2B^0)=4_{dec}B^3+0+4_{dec}B^1+12_{dec}B^2+0+12_{dec}B^0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$5555=5B^3+5B^2+5B^1+5B^0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

De (1) y (2) :

$$4_{dec}B^3+12_{dec}B^2+4_{dec}B^1+12_{dec}B^0=5B^3+5B^2+5B^1+5B^0$$
$$B^3-7B^2+B^1-7B^0=0$$
$$(B-7)(B^2+1)=0$$
$$B=7$$

7 es la base de Zilomir

Acertijo # 3

Un problema de nueces

En un sistema de numeración que tenga una base superior o igual a 5, el número que se escribe 40301 tiene un divisor que siempre se escribe de la misma manera. ¿Cuál es ese divisor?

Si se toma como base el número de nueces que tengo en el plato frente a mi, el cociente de 40301 por el divisor encontrado anteriormente es 181, ¿cuántas nueces son?

Respuesta

Si la base del sistema numérico es $B \geq 5$, 40301 se expresa de la siguiente manera:

$$40301 = 4B^4 + 0B^3 + 3B^2 + 0B^1 + 1B^0 \text{.............}(1)$$

Ahora bien, recordando que $B^0 = 1$,(1) se puede reescribir asi:

$$4B^4 + 3B^2 + 1 = \left(2B^2 + B + 1\right)\left(2B^2 - B + 1\right)$$

Para cualquier base $B \geq 5$, el factor

$$2B^2 + B + 1 \text{...........}(2)$$

no cambia, de aqui podemos concluir que es el divisor que se requiere.

40301 entre el divisor (2) nos da como cociente:

$$2B^2 - B + 1 = B^2 + B(B-1) + 1 = 1(B-1)1$$

Si tomamos como base el número de nueces que están en el plato frente a mi, tenemos que:

$$1(B-1)1 = 181$$

Por lo que $B - 1 = 8$ y esto implica $B = 9$.

El número de nueces en el plato frente a mi es 9.

Acertijo # 4

Encontrando la base de numeración en la región de Jakana

Josefa le dice a su marido: Yo que tengo 7 veces la edad de mi hermanito te regalo este boleto a Jakana. Aunque tienes 3 veces mi edad, no quiero que seas centenario para viajar hasta allá

El pregunta: ¿y, qué tiene de especial ese lugar?

Ella contesta : Su sistema de numeración hace que tu edad y mi edad se escriban con los mismos dígitos pero en orden inverso.

¿Qué edad tiene cada cónyuge?

Respuesta

La edad de Josefa (J) es un múltiplo de 7,

es decir J pertenece a la lista 7, 14, 21, 28, 35, 42...

Sabemos que su marido no es centenario por lo que su edad (llamémosla M)

$$M < 100$$

Además sabemos que : $3J = M < 100$

y que como Josefa está casada su edad es: $J > 14$

Por lo que $(J,M) \in \{(21,63),(28,84)\}$

Como la base de numeración de Jakana B hace que las respectivas edades se escriban con los mismos dígitos pero en orden inverso, tenemos:

Si $J = 28$ entonces:

$$\begin{aligned} 28 &= 8B + 2 \\ 26 &= 8B \\ B &= 3.4 \end{aligned}$$

solución que no es posible.

Si $J = 21$ entonces

$$\begin{aligned} 21 &= B + 2 \\ B &= 19 \end{aligned}$$

Comprobando: $63 = 3B + 6$

$= 3 \times 19 + 6$

Por lo que tenemos que la base de Jakana es $B = 19$.

Acertijo # 5

En la taquería

Seis amigos van a comer a una taquería, como ésta es todavía muy chica y no dispone de suficiente personal, cuentan con un menú de sólo dos posibilidades: taco o quesadilla. Todos comen algo cada minuto, pero sólo una de las dos cosas un taco o una quesadilla.

En cuanto se sientan (llamemos a este momento tiempo 0), la mesera les sirve a cada uno una quesadilla. Llamemos a estos amigos: A, B, C, D, E, F. Sabemos además que estos amigos tienen ciertas costumbres raras por lo que para comer gustan de seguir los siguientes ciclos:

El A come alternativamente: 1 quesadilla y 1 taco

El B come alternativamente: 2 quesadillas y 2 tacos

El C come alternativamente: 4 quesadillas y 4 tacos

El D come alternativamente: 8 quesadillas y 8 tacos

El E come alternativamente: 16 quesadillas y 16 tacos

El F come alternativamente: 32 quesadillas y 32 tacos

Para que no haya dudas:

En el minuto 1 comen respectivamente

A: taco

B: quesadilla

C: quesadilla

D: quesadilla

E: quesadilla

F: quesadilla

En el minuto 5 comen respectivamente

A: taco

B: quesadilla

C: taco

D: quesadilla

E: quesadilla

F: quesadilla

Preguntas tipo 1: ¿Cómo encuentras las respuestas para el tipo de preguntas siguiente:?

-¿en qué momento estarán comiendo:

A: quesadilla

B: taco

C: quesadilla

D: taco

E: quesadilla

F: quesadilla ?

- - ¿cuánto tiempo transcurre hasta que todos comen simultáneamente un taco?

-

- - ¿cuánto tiempo transcurre hasta que todos vuelven a comer simultáneamente una quesadilla?

Pregunta tipo 2: ¿qué estarán comiendo en el minuto 67?

Respuesta

Si ordenamos inversamente a los amigos (F, E, D, C, B, A) y para abreviar llamamos 0 al elemento quesadilla y 1 al elemento taco (con lo que tenemos el código binario natural)

Minuto (decimal)	F E D C B A	
0	0 0 0 0 0 0	
1	0 0 0 0 0 1	
2	0 0 0 0 1 0	
3	0 0 0 0 1 1	
4	0 0 0 1 0 0	....

Para responder a las preguntas del tipo 1:

-En qué momento están tomando:

A: quesadilla

B: taco

C: quesadilla

D: taco

E: quesadilla

F: quesadilla ?

basta con escribir los datos en binario y pasarlo a sistema decimal para obtener los minutos:

F E D C B A

0 0 1 0 1 0

Si pasamos este número a sistema decimal tenemos:

$$0B^5 + 0B^4 + 1B^3 + 0B^2 + 1B^1 + 0B^0 = 8 + 2 = 10\,\text{dec}$$

Esta orden se da en el minuto 10

-En qué momento piden todos los amigos taco?

Debemos pasar a sistema decimal el binario : 1 1 1 1 1 1

$$1B^5 + 1B^4 + 1B^3 + 1B^2 + 1B^1 + 1B^0 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 63$$

-En que momento vuelven a pedir todos una quesadilla ?

Puede pensarse que al terminar todos una ronda completa vamos a tener una casilla más (la de las rondas que llamaremos R) y la tabla quedaría así :

R F E D C B A

1 0 0 0 0 0 0

Por lo que esto sucederá en el minuto $1 \text{ x } B^6 = 1 \text{ x } 2^6 = 64$

Para las respuestas a las preguntas del tipo 2:

- Qué estarán pidiendo en el minuto 67?

A este tipo de preguntas la respuesta se da cambiando el número de minutos a sistema binario. Por ejemplo:

$$67 = 2^6 + 2^1 + 2^0$$
$$67 = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

Esto nos da una orden de la siguiente manera:

R F E D C B A

1 0 0 0 0 1 1

Esto es : Es la segunda ronda de pedidos; A y B están comiendo taco y los demás quesadillas

Acertijo # 6

Hablando de matemáticas

¿Podrías encontrar dos números *m* y *n* de tal manera que se cumplan los siguientes enunciados?

. Si escribimos $2m$ en base n obtenemos 37 base n

. Si escribimos m^2 en base n obtenemos 319 base n

. 242 base m + 745 base n = 80 base mn

Respuesta

Las bases son $m = 23$ y $n = 13$. Se llegó a esta conclusión por dos métodos.

Método 1:

Del primer dato sabemos que

$$2m = 3n + 7$$
$$m = \left(\frac{1}{2}\right)[3n + 7]$$

Del segundo dato sabemos que:

$$m^2 = 3n^2 + n + 9$$

Combinando las dos ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{4}\right)[3n + 7]^2 = 3n^2 + n + 9$$
$$[3n + 7]^2 = 12n^2 + 4n + 36$$
$$9n^2 + 42n + 49 = 12n^2 + 4n + 36$$
$$0 = 3n^2 - 38n - 13$$

Resolviendo para n,

$$n = \frac{\left[38 \pm \sqrt{38^2 + (4)}(3)(13)\right]}{6} = 13, o, -\frac{1}{3}$$

Una base -1/3 no tiene sentido por lo que la base $n = 13$.

Usando la primera ecuación

$$2m = 3n + 7 = 3(13) + 7$$

Por lo que $m = 23$

Método 2

La ecuación:

$$242_m + 745_n = 80_{mn}$$

puede volver a escribirse así:

$$\left[2m^2 + 4m + 2\right] + \left[7n^2 + 4n + 5\right] = 8mn \ldots\ldots.(1)$$

Como $2m$ se escribe como 37base n en base n,

$$2m = 3n + 7 \ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Además sabemos que m^2 se escribe 319base n en base n,

$$m^2 = 3n^2 + n + 9$$

En (1):

$$\left[2m^2 + 2(2m) + 2\right] + \left[7n^2 + 4n + 5\right] = 4n(2m)$$
$$2\left(3n^2 + n + 9\right) + 2(3n+7) + 2 + 7n^2 + 4n + 5 = 4n(3n+7)$$
$$6n^2 + 2n + 18 + 6n + 14 + 2 + 7n^2 + 4n + 5 - 12n^2 - 28n = 0$$
$$n^2 - 16n + 39 = 0$$
$$(n-3)(n-13) = 0$$

Lo que lleva a dos posibilidades: n es 3 ó 13. Pero si $n = 3$ los números 37_{base3} y 319_{base3} no tienen sentido.

Por otro lado si $n = 13$ entonces reemplazando en (2) obtenemos $m = 23$.

Expandiendo el universo de los números

Los seres humanos hemos construido los números para poder entender el universo.

Un sistema numérico en el que la adición, la multiplicación están siempre definidas, cada número tiene inverso aditivo y se cumplen las propiedades asociativa y distributiva se conoce como *Anillo*; si además cada número, excepto el 0, tiene inverso multiplicativo, entonces el sistema numérico es un *Campo*.

Los Números Naturales, N y el Cero

Llamamos números naturales a los números que utilizamos para contar,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$$

La suma y/o la multiplicación de dos naturales dan como resultado otro número natural. Cuando a esta lista agregamos el cero,

$$\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

podemos contestar preguntas como las siguientes cuya respuesta es un número natural:

-Tenía $45 y no gané nada, ¿cuánto dinero tengo?

Abreviadamente

$$45 + 0 = \_\_ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

-Tenía \$75 y después de ir al mercado tengo \$30, ¿cuánto gasté?

Abreviadamente

$$\_\_ + 30 = 75 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

A las expresiones del tipo (*) se les llama ecuaciones y al elemento que satisface dicha ecuación solución de la ecuación.

Es decir puedo encontrar solución a la siguiente ecuación:

$$\_\_ + a = b$$

donde a y b son números naturales mayores o iguales a cero y b es mayor o igual que a.

Los Números Enteros, Z

Por cada numero natural a, existe un número entero negativo llamado $(-a)$, que es solución a la ecuación:

$$\_\_ + a = 0$$

este entero es llamado *inverso aditivo*. Por ejemplo:

a) Al 1 le corresponde el entero negativo -1 ("menos uno")

b) Al 15 le corresponde -15 ("menos quince"), etc.

Los números enteros (denotados con **Z**) están formados por los números naturales, el cero y los enteros negativos:

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

Si una ecuación

$$a = bx$$

tiene solución dentro de los números naturales, se dice que a es *múltiplo* de b. También se expresa ésto como: b es *factor* de a, o bien que b es *divisor* de a.

Sin embargo este conjunto de números no basta para resolver otra gran variedad de problemas en los que se pueden presentar ecuaciones como las siguientes:

$$3x = 5 \qquad\qquad \frac{2}{3}x = 15$$

pues no hay un entero que multiplicado por 3 resulte 5, ni uno que multiplicado por $\frac{2}{3}$ sea igual a 15.

Por otro lado si queremos efectuar una medición y estamos utilizando una unidad, a veces se necesita utilizar partes de esa unidad para que la medición sea más exacta, cosa que no puede hacerse con los números enteros.

De lo anterior notamos la necesidad de un sistema de numeración más amplio que el constituido por **Z**.

Los Números Racionales, Q

El conjunto

$$\mathbf{Q} = \{ \frac{p}{q} \big/ p, q \in Z, q \neq 0 \}$$

Satisface en buena medida o mejor dicho provee de elementos necesarios que son la solución de las ecuaciones del tipo

$$ax = b, \text{ donde } a, b \in Z$$

Una fracción es una expresión del tipo

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{27}{29}, \frac{8}{1}, -\frac{5}{13}, \frac{-4}{5}, \ldots\ldots$$

Ahora lo que tenemos son enteros y cocientes de enteros, a estos se les conoce como números racionales.

Derivan su nombre del hecho que se pueden escribir como la razón o cociente de dos números enteros a/b ó $\frac{a}{b}$, donde el numerador a puede ser cualquier entero y el denominador b cualquier entero diferente de cero.

Si $b = 1$, el cociente a/b es un entero igual a a; con valores arbitrarios de b, obtenemos una fracción.

Si el valor absoluto (valor positivo) del numerador es menor que el valor del denominador, $|a| < b$, tenemos una fracción propia; en caso contrario tenemos una fracción impropia que se puede separar como un entero y una fracción propia:

$$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Entre dos números racionales p y q, existe siempre otro número racional:

$$\frac{1}{2}(p+q)\text{, que está en la mitad de } p \text{ y } q$$

Este proceso se puede repetir cualquier número de veces, por lo que el número de racionales es infinito.

Cada fracción puede expresarse como fracción decimal llevando a cabo la división. Así se distinguen dos casos:

- fracciones decimales finitas

$$2/5 = 0.4, \quad 7/8 = 0.875,$$

es decir, la secuencia de decimales tiene un punto terminal a partir del cual sólo siguen ceros.

- fracciones decimales periódicas infinitas

$$5/6 = 0.83333333\ldots$$

$$1/96 = 0.0104166\ldots.$$

es decir, los decimales se repiten periódicamente. Los periodos pueden ser mucho más largos cuando el denominador de la fracción es un número primo o un número muy grande.

Para cada número racional a diferente de 0, existe un número racional que satisface la ecuación:

$a + \_\_ = 0$, es decir tiene inverso aditivo

y existe un número racional que satisface la ecuación:

$a \text{ x } \_\_ = 1$, es decir tiene inverso multiplicativo.

Podemos también decir que la suma y el producto de dos números racionales es otro número racional o un entero.

Números primos

Factorizar un número entero significa expresarlo como productos de potencias de dos o más enteros, cada uno de ellos mayor a 1, por ejemplo:

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

$$16873 = 47 \times 359$$

Un entero que sea mayor que 1 y sólo tenga como factores al 1 y a él mismo es llamado *número primo* o simplemente *primo*. Un número mayor que uno, que no es un número primo se llama número *compuesto*.

La manera más simple de encontrar números primos se debe a Eratóstenes. En una secuencia de números naturales que empiece en 2 se tachan las casillas cada 2 sin tachar el 2, es decir, se eliminan los múltiplos de 2; luego empezando en el 3, se eliminan los múltiplos de 3 contando 3 a partir del 4; luego, empezando en la siguiente casilla sin tachar, contamos el número que contiene esa casilla a partir de la siguiente y tachamos, cada vez que elegimos un número estamos eliminando mediante el proceso anterior los múltiplos de este número que claramente no son primos.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que quedan sin tachar son los primos, los otros son compuestos.

La secuencia de números primos es:

2, 3, 5,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,........

y continúa al infinito ....1000000009649, 1000000009651......

El ser primo es una propiedad de los números enteros y no importa el tipo de notación que se use para representarlo este seguirá siendo número primo, por ejemplo cincuenta y nueve es número primo en sistema decimal: 59, binario: 111011, etc.

Un entero que es factor de dos o más números se llama *factor común* de ellos. Cuando el único factor común que tienen dos números es el 1, se dice que los números son *primos entre sí* o *primos relativos*.

Si un número primo divide a un producto de dos enteros, divide al menos a uno de los dos factores.

El teorema fundamental de la aritmética establece que:

Cualquier entero positivo mayor que 1 es un número primo o puede ser expresado como un producto único de primos y potencias de primos.

Por ejemplo:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Los matemáticos han estado muy intrigados por encontrar reglas acerca de los números primos o acerca de su comportamiento y de su frecuencia a lo largo de los enteros. Algunos de estos estudios llevaron a obtener teoremas (ideas que están demostradas matemáticamente) o conjeturas (ideas que parecen ser verdaderas - pues no se ha encontrado algún ejemplo de que no se cumplan- pero que no están demostradas)

Conjeturas de Goldbach

Los números primos tienen características muy especiales que no han sido explicadas:

Goldbach conjeturó (1742) que cada entero par mayor que 2 puede ser escrito como la suma de dos primos:

$4 = 2 + 2$	$8 = 5 + 3$	$12 = 7 + 5$	$16 = 11 + 5$
$6 = 3 + 3$	$10 = 7 + 3$	$14 = 11 + 3$	$18 = 11 + 7$ etc.

Hasta el momento, no se tiene un ejemplo en el que ésto no ocurra, es decir, no existe excepción a la conjetura, pero tampoco ha sido probada.

Otra conjetura de Goldbach mantiene que los enteros mayores o iguales a 6 pueden ser escritos como la suma de tres primos:

$6 = 2 + 2 + 2$	$8 = 2 + 3 + 3$	$10 = 2 + 3 + 5$
$7 = 2 + 2 + 3$	$9 = 3 + 3 + 3$	$11 = 3 + 3 + 5$ etc.

También para esta conjetura ocurre que no existen ni excepción ni prueba.

Números de Fermat

Los números de Fermat deben su nombre al abogado francés Pierre Fermat quien creyó falsamente haber descubierto una fórmula que siempre entregaba números primos.

La fórmula es la siguiente:

$$F_p = 2^{2^p} + 1$$

Esta fórmula entrega números primos para valores de p entre 0 y 4 inclusive:

$$F0 = 3$$

$$F1 = 5$$

$$F2 = 17$$

$$F3 = 257$$

$$F4 = 65537.$$

En 1732, Leonhard Euler demostró que el quinto número de Fermat, $F5$, puede ser factorizado:

$$F5 = 4294967297 = 641 \text{ x } 6700417,$$

por lo que es un número compuesto y se cree que todos los números de Fermat mayores a $F4$ son compuestos.

Se sabe que todos los números de la forma

$$F\text{m} = 2^{m} + 1$$

donde m no es potencia de 2, son números compuestos.

Números de Mersenne y números primos de Mersenne

Marin Mersenne estudió en 1644 números de la forma

$$M_p = 2^p - 1,$$

donde p es un número primo. Creía que éstos serían primos para los siguientes valores de p:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 \text{ y } 257;$$

y compuestos para otros valores de p menores que 257 que no fueran éstos.

Con el uso de computadoras (1947), se ha demostrados que $M67$ y $M257$ son números compuestos y que dentro de los números de Mersenne también caen: $M61, M89$ y $M107$.

Si p no es un número primo, los números de Mersenne son siempre compuestos.

Método de Fermat para probar números primos

Si p es un número primo y a es cualquier número menor que p entonces

$$a^{p-1} - 1$$

es divisible por p.

Por lo que si no es divisible por p entonces p no es primo.

Si $2^{p-1} - 1$ es divisible por p, eso no significa que p deba ser primo. Existen varios números compuestos que tienen esa propiedad, por ejemplo: 341 = 11 x 31 y $2^{340} - 1$ es divisible por 341.

Este tipo de números son llamados pseudo-primos.

Así si $2^{p-1} - 1$ es divisible por p, lo que se puede afirmar es que p es o un número primo o un pseudo-primo.

Teorema de los números primos

Desde la época de Euclides, los matemáticos han querido formular una ley, el teorema de los números primos, que relaciona el número $\pi(n)$ de primos menores o iguales a un entero dado n con n.

En 1896 Jacques Hadamard y Jea de la Vallée-Poussin demostraron independientemente que la fórmula de Legendre (1778) es mejor aproximación para valores de n hasta un millón:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1.08366},$$

donde ln n es el logaritmo natural de n y 1.08366 es un factor de corrección empírico y que la fórmula de Gauss (publicada en 1863, ocho años después de su muerte) funciona para valores muy grandes de n:

$$\pi(n) \approx Li(n) = \int_2^n \frac{dx}{\ln n}.$$

Aplicaciones

Los números primos y los métodos de factorización de números compuestos muy grandes juegan un papel muy importante en los métodos actuales de protección de datos contra accesos ilegítimos.

En los engranajes de reducción de velocidad, es ventajoso usar ruedas de engranes cuyo número de dientes sea primo (o números que tengan como único factor común el 1), así se evita el desgaste de los engranes por imperfecciones y reduce el ruido.

Los Números Irracionales, I

No existe número racional que sea solución a la ecuación $x^2 - 2 = 0$, cuyas soluciones son $x = \pm\sqrt{2}$. Tampoco existen números racionales que representen a los números π y e. Estos números (no representables por cociente de enteros) se conocen como números irracionales.

Si escribimos un irracional en forma decimal, tenemos una secuencia infinita, no periódica de dígitos decimales.

Números Algebráicos y Números Trascendentales

Los números algebráicos son aquellos que son raíces de ecuaciones algebráicas con coeficientes enteros, éstas raíces pueden ser racionales como la de:

$$4a^2 - 9 = 0$$
$$a = \pm 3/2$$

pueden ser irracionales como la de:

$$a^2 - 2 = 0$$
$$a = \pm\sqrt{2}$$

Los números trascendentales son aquellos que no son raiz de una ecuación algebráica. De especial interés son:

e, la base de los logaritmos naturales y

π, la razón de la circunferencia del círculo entre su diámetro.

Además son trascendentales: $2^{\sqrt{2}}$ y e^{π}.

Los Números Reales, R

Los números racionales y los irracionales tomados como un solo conjunto conforman los números reales.

El problema que se presenta con los números reales es el de darnos soluciones para las ecuaciones del tipo $x^2+1=0$, esto es : $x=\pm\sqrt{-1}$, ya que el producto de cuales quiera dos números reales que tengan el mismo signo es siempre positivo o cero.

Los Números Complejos, C

Como los números reales no pueden cumplir con la tarea de resolver las ecuaciones del tipo

$$x^2+a=0 \quad \text{donde } a>0,$$

recurrimos a los números complejos:

$$a+b\mathrm{i} \quad ,$$

donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria definida como:

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

Si $a = 0$ obtenemos los *números imaginarios* puros como: $\sqrt{-1} = i$, y si b=0, obtenemos los *números reales*.

En la búsqueda de π

Para las personas de cualquier medio, siempre hubo una fascinación por el círculo, un deseo de encontrar la cuadratura al círculo, esto es construir un cuadrado que tuviera la misma área de un círculo dado. Para lograr hacer esto es necesario saber la razón de la circunferencia a su diámetro. Desde la época de Leonhard Euler, denotamos esta razón por la letra griega π.

Antiguamente los babilonios usaron el valor $\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125$.

En el papiro Rhind del Egipto antiguo, se encontró un problema resuelto que establece que el área de un círculo cuyo diámetro mide nueve longitudes de unidad es igual al área de un cuadrado cuyo lado es ocho longitudes de unidad,

$$\frac{\pi \cdot 9^2}{4} = 8^2; \quad \pi = \frac{256}{81} = 3.16049\ldots$$

Los antiguos griegos usaban para el común un valor $\pi = 3$; para asuntos más serios usaban el valor :

$$\pi = \sqrt{10} = 3.1622\ldots$$

Estos valores de π eran empíricos en el sentido de que se basaban sólo en la experiencia y no en consideraciones teóricas.

Los griegos nos heredaron un valor de π encontrado por el método de exhaustividad, atribuido a Antiphon, Euclides y Eudoxus.

El perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo es menor que la circunferencia del círculo; el perímetro de un polígono regular de n lados circunscrito es mayor.

Si n es suficientemente grande, el perímetro de los dos polígonos se acercará a la periferia del círculo, se hacen cada vez más cercanos los límites hasta que el área que está entre los polígonos y la periferia del círculo se va "agotando", tiende a cero.

En el siglo II A.C. Hipparchus propuso el valor

$$\pi = \frac{377}{120} = 3.14166,$$

que es correcto hasta cuatro decimales.

Arquimides calculó los límites aproximados para π en notación decimal:

$$3.1408..... < \pi < 3.1428.....$$

Después de Arquimides, no hubo nuevas ideas de importancia para el cálculo de π hasta el desarrollo del cálculo hacia fines del Siglo XVII.

El matemático francés Francois Viéte expresó π como un producto infinito con la fórmula obtenida de una serie de polígonos Arquimedeanos, empezando por un cuadrado

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots\cdots\cdots}$$

El cálculo es más fácil con la versión trigonométrica de Leonhard Euler:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{sen\left(\pi/2\right)}{\cos\left(\pi/4\right)\cdot\cos\left(\pi/8\right)\cdot\cos\left(\pi/16\right)\ldots\ldots}.$$

El desarrollo del cálculo diferencial e integral en la segunda mitad del Siglo XVII reemplazó los métodos geométricos por métodos analíticos usando productos infinitos, fracciones continuas y series de expansión infinita para funciones trigonométricas inversas, permitiendo el cálculo de π con un alto grado de exactitud. La fórmula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot\ldots\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot\ldots\ldots},$$

Construida con la integración de funciones trigonométricas, fué presentada por el matemático inglés John Wallis en 1655. En ésta por vez primera, tenemos una expresión para π como un producto de números racionales.

<u>Computadoritis:</u> Con la aparición de la computadora electrónica, que posee una capacidad de memoria y velocidad inigualables, la caza de dígitos para el número π dejó de ser un asunto humano.

El primer cálculo de π por computadora (realizado en 1947) produjo 2037 decimales en 70 horas de tiempo de máquina; en 1955 el resultado mejoró hasta 10000 decimales en 100 minutos.

Más acertijos

Acertijo # 7

Un número es múltiplo de 9 si y sólo si la suma de los dígitos que conforman al número es múltiplo de 9. Por ejemplo, el número:

$$2\,489\,220\,423$$

es un múltiplo de nueve (2 489 220 423 = 9 x 276 580 047). Si sumamos los dígitos

$$2 + 4 + 8 + 9 + 2 + 2 + 0 + 4 + 2 + 3 = 36$$

que es múltiplo de 9.

Investigar cúal es el número más grande de ocho dígitos que sea múltiplo de 9 y de tal manera que todos sus dígitos sean distintos.

Respuesta

La respuesta es 98 763 210. La justificación es la siguiente:

Necesitamos un número de ocho dígitos en el que no haya dos iguales. Eso significa que de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 debemos descartar dos. Además observamos que

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

que es múltiplo de 9. Para que los ocho dígitos sigan siendo múltiplo de 9,la suma de los dos números descartados también debe ser múltiplo de 9. Lo ideal es que la suma de estos dos dígitos sea igual a 9. Así, podemos escoger entre los siguientes pares 0 y 9, 1 y 8, 2 y 7, 3 y 6 o 4 y 5.

Si descartaramos 9 y 0 eso nos quitaría la posibilidad de tener un número con dígito inicial 9, por lo que no es una buena elección. Si razonas un momento verás que la mejor posibilidad es descartar la pareja 4 y 5 (buscamos el mayor número de ocho dígitos). El número más grande se obtiene colocando en orden decreciente los dígitos:

98 763 210

Acertijo #8

Una compañía maneja dos fábricas de automóviles en el mismo pueblo. Entre las dos fábricas la compañía tiene 225 autos.

. Una semana, 1/5 de los automóviles de una de las fábricas fue transferido para la otra fábrica.

. La siguiente semana, 1/4 de los actuales autos de una de las fábricas fue transferido a la otra.

. Finalmente, la siguiente semana, 1/3 de los automóviles de la fábrica occidental fue transferidos a la fábrica oriental.

. Después de este último traslado, la diferencia de automóviles entre las dos fábricas era de 21 autos.

¿Cuántos automóviles había originalmente en la parte occidental?

Respuesta

La fábrica occidental tenía originalmente 105 automóviles.

Usaremos algunos conceptos algebraicos y otros relativos a la división. Llamemos a las dos fábricas A y B y supongamos que A fue la primera en hacer un traslado. A tenía $5x$ automóviles y B $225 - 5x$ automóviles. El primer traslado es de x automóviles de A para B (recuerda que fué transferido 1/5 de los autos), por lo que el efecto es el siguiente:

Inicialmente:

A tiene $5x$, B tiene $225 - 5x$, después del primer traslado se tiene que:

A tiene $4x$, B tiene $225 - 4x$

El segundo traslado corresponde a 1/4 del total actual de autos de una de las fábricas. Como 225 no es divisible por 4, $225 - 4x$ tampoco lo es, por lo que la fábrica B no pudo hacer el traslado (ya que el traslado es de autos completos). Así que el segundo traslado es de A para B y corresponde otra vez a x autos y la situación después del segundo traslado queda como sigue:

A con $3x$ autos y B con $225 - 3x = 3(75 - x)$ autos.

El tercer traslado corresponde a mover 1/3 de los autos. Observemos que en A como en B el número de autos es divisible por 3, de aquí que debamos considerar dos casos:

Caso #1:

La tercera transferencia se realiza otra vez de A para B, con lo que se estarían moviendo otra vez x autos (1/3 de los autos de A) y tendríamos que:

A tiene $2x$, B tiene $225 - 2x$ autos

Así, si la diferencia entre las dos fábricas es de 21 autos:

$$2x - (225 - 2x) = 21 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

o

$$2x - (225 - 2x) = -21 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

De (1) tenemos que $4x = 246$, pero como 246 no es múltiplo de 4 no es la respuesta posible.

De (2) tenemos que $4x = 204$, lo que nos daría como resultado $x = 51$. El único problema es que la fábrica A inició con $5x$ automóviles y $5 \times 51 = 255$ que es mayor que 225 (éste es el número total de autos que había) Así que ésta no es una solución posible.

Analizando la otra posibilidad:

Caso #2:

La última transferencia debió ser realizada de B para A (Esto también significaría que B es la fábrica occidental) Se transfirieron 1/3 de los autos de B, que corresponde a $75 - x$:

Si originalmente A tiene $3x$, B tiene $3(75 - x)$ autos, después de la transferencia:

A tendrá $3x + (75 - x) = 75 + 2x$, B tendrá $2(75 - x) = 150 - 2x$ autos.

La diferencia de autos de las dos fábricas es 21:

$(75 + 2x) - (150 - 2x) = 21$ ....(1)

o

$(75 + 2x) - (150 - 2x) = -21$ ....(2)

De (1) tenemos que: $4x = 96$.

De (2) tenemos que: $4x = 54$, pero 54 no es múltiplo de 4 por lo que la respuesta debe ser $4x = 96$ lo que significa que $x = 24$.

La fábrica occidental, que ya vimos que es la fábrica B inició con:

$$225 - 5x = 225 - 5(24) = 105$$

automóviles y la fábrica A con 120.

Acertijo #9

Interceptamos una comunicación del Dr. Clive Dibbs quien escribe en código. Sabemos el método que sigue: empieza con dos enteros m y n entre 1 y 25. Después, representa las letras del alfabeto con los números entre 0 y 25. A = 0, B = 1 etc. hasta llegar a la Z que es 25. Como es extranjero, no cuenta las letras dobles ni la Ñ. Para codificar sus mensajes procede así: si el número x representa a una letra, él la reemplaza por la letra que corresponde al residuo de la división de $mx + n$ entre 26. ¿Podríamos romper su código si conociéramos los enteros m y n que utilizó?

Realmente es un texto a vistas gracioso, mira la primera oración:

OMNE EC TWJERCWKZ

La última, que seguramente corresponde a la firma es I. T. Si éstas son sus iniciales, es posible que sea la pista que necesitamos.

Hagamos el siguiente análisis:

Sabemos que la letra C, representada por el número 2, fué codificada como I, que es representada por el 8. Esto significa que hay un residuo 8 cuando se divide $2m + n$ entre 26. Por lo que tenemos que:

$$2m + n = 26j + 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

para alguna j en los enteros.

También sabemos que la D, representada por el número 3, está codificada como T, representada por el 19. Esto significa que hay un residuo 19 al dividir $3m + n$ entre 19

Así:

$$3m + n = 26k + 19 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

para algún entero k.

Si sustraemos (1) de (2), tenemos:

$$(3m + n) - (2m + n) = (26k + 19) - (26j + 8)$$

de donde

$$m = 26(k - j) + 11.$$

Como m debe estar entre 0 y 25, ésto significa que $\underline{m = 11}$.

Reemplazando el valor de m en (1):

$$(2m + n) = 22 + n = 26j + 8$$

$$n = 26j - 14.$$

Como n debe estar entre 0 y 25, tenemos que $\underline{n = 12}$.

Haciendo el cálculo para cada letra tenemos:

Por ejemplo, para A cuyo valor es 0,

$$0m + n = 0 \times 11 + 12 = 12$$

y

$$12 = 26 \times 0 + 12$$

12 es el valor numérico de la M, por lo que reemplazamos la A por la M.

Para F, cuyo valor numérico es 5,

$$5m + n = 5 \times 11 + 12 = 67$$

y

$$67 = 26 \times 2 + 15$$

15 es el valor numérico para la P, por lo que reemplazamos la F por la P.

Continuando así para cada letra el código queda:

Las Geometrías

El significado de Geometría es: medición de la Tierra. Los primeros indicios de un sistema ordenado para medir se remontan a los antiguos babilonios. El que los astrónomos babilonios asumieran que el año tiene 360 días es muy posible que haya sido el origen de nuestro sistema de medición de los ángulos en grados, como vemos, los estudiosos siempre quisieron conocer y entender lo que está a su alrededor.

Para los egipcios, la necesidad de medición de la tierra fue su interés principal en la geometría; contrariamente, los griegos se dedicaron al estudio sistemático de las figuras geométricas y sus propiedades. Los primeros fundamentos para la ciencia de la geometría fueron los estudios de las propiedades del círculo.

Se dice que en la entrada de la Academia que dirigía Platon había un aviso de "no entrada" para aquellos que no supieran geometría. De sus alumnos, Eudoxus, es recordado por su teoría de las proporciones- descrita en los Elementos de Euclides - además de que se le atribuye la invención del método de Exhaustamiento para encontrar aproximaciones del área y volumen de formas curvilíneas, un antecesor del cálculo integral.

Eudoxus, Euclides y Arquímedes fueron los grandes matemáticos de la antigüedad.

Euclides es conocido por su tratado "Elementos" que es una colección del conocimiento de geometría de la época. La resolución de problemas se basa en las definiciones y axiomas descritos en los Elementos de Euclides. Esta geometría es llamada **Geometría Elemental**. Euclides se concentró en resolver problemas de la geometría plana, es decir, figuras geométricas construidas en una superficie plana y con poliedros, esto es, sólidos acotados por regiones poligonales planas.

Uno de los postulados que caracteriza a la geometría Euclideana es el de paralelismo, que es el famoso quinto postulado:

Si una recta que cae sobre dos rectas forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos (un ángulo recto es aquel que mide 90°), *las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos.*

Euclides definió las paralelas como rectas coplanares (que están en un mismo plano) que no se cortan por más que se prolonguen en uno u otro sentido.

A Hipparchus de Nicea y Rodas se le da el crédito de la invención de la **Trigonometría**, ya que utilizó métodos trigonométricos en sus cálculos de las distancias de objetos astronómicos. Originalmente, se tabularon funciones de los triángulos isósceles para la trigonometría esférica pues era necesario para la información más exacta en astronomía. Actualmente, las funciones trigonométricas se generalizan a cualquier triángulo y se utilizan en otras áreas de las matemáticas.

Otro acercamiento al estudio de la geometría lo dio Descartes, quien publicó en 1637 la géométrie, mostrando que las figuras geométricas pueden ser analizadas algebraicamente. La **Geometría Analítica**, que investiga los problemas geométricos por medio de sistemas de coordenadas, transformándolos así en problemas de álgebra, evolucionó bajo la influencia del trabajo de Descartes quien argumentaba que cada paso algebraico en un argumento tiene que corresponder a una construcción geométrica.

El descubrimiento de que los problemas geométricos podían ser transformados en problemas algebraicos, motivó a los matemáticos del Siglo XVIII a aplicar el cálculo al estudio de las curvas y superficies geométricas, lo que los llevó a una nueva rama de la geometría conocida como **Geometría Diferencial**. Un aspecto más avanzado de la geometría diferencial, mencionado por primera vez por Gauss y Riemann, es la posibilidad de construir sistemas geométricos determinados únicamente por conceptos y postulados que sólo influyen en la inmediata vecindad de cada punto del sistema. Este enfoque ha dado lugar a la aparición de un gran número de geometrías generales, aún no agotadas, que han desempeñado un papel relevante en la teoría de la relatividad y en otras ramas de la física moderna.

A principios del Siglo XIX la geometría se liberó de su molde tradicional, y los postulados de la geometría se convirtieron, para el matemático, en hipótesis, de cuya verdad o falsedad físicas no era necesario preocuparse. Lo verdaderamente importante es que fueran compatibles unos con otros. Las matemáticas emergieron como una creación de la mente humana y no como algo impuesto por el mundo en que vivimos.

Una geometría que no se fundamente en los axiomas de Euclides es una geometría no-Euclidiana; en particular, podemos decir que ésta no depende del postulado Euclidiano de paralelismo, como es el caso de la **Geometría Proyectiva.** Pensemos por un momento en el problema con el que se enfrenta un artista cuando quiere pintar un cuadro de algún objeto. Los pintores del Renacimiento partieron de la no-profundidad de campo visual y crearon una *Geometría Visual* en lugar de la *Geometría Táctil*.En una perspectiva enfocada, los objetos son descritos tal como aparecen al ojo – los objetos se encojen con la distancia y las líneas paralelas parecen converger en puntos a la distancia.

La teoría de la perspectiva se extendió en el Siglo XVII pero Desargues quien fue su gran animador murió sin que se reconociera su trabajo. La reintroducción de las consideraciones proyectivas a la geometría ocurrió a fines del Siglo XVIII cuando el geómetra Monge creó su **Geometría Descriptiva**. Esta ciencia tiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos.

Los especialistas en geometría clasifican las propiedades geométricas en dos categorías: *las propiedades métricas*, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y *las propiedades descriptivas*, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí.

El estudio de las propiedades de las figuras planas que no cambian (propiedades descriptivas) cuando un conjunto dado de puntos es proyectado sobre un segundo plano, se conoce como *geometría proyectiva.*

Desde el punto de vista griego de la axiomática, era natural preguntarse si el famoso quinto postulado de paralelismo se necesitaba realmente o podía ser deducido como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados o si podría sustituirse por un equivalente más aceptable. La más popular sustitución la realizó el escocés John Playfair:

Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse otra paralela a ella.

Varios matemáticos persistieron en el desarrollo de geometrías no-Euclidianas. Lobachevski y Bólyai en 1832 trabajaron independientemente en esto. La geometría Lobachevsquiana se basa en los mismos postulados euclidianos, excepto que el de las paralelas es negado y sustituido por:

Por un punto dado no situado sobre una recta pueden trazarse más de una paralela a ella.

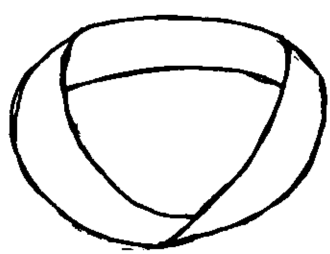
Este postulado es compatible con los demás de Euclides.

En 1854 Riemann presentó la **Geometría Elíptica** (llamada así por Felix Klein) que reniega del postulado de paralelismo asumiendo que *no hay líneas paralelas*, que llevado a un extremo implica que cualesquiera dos líneas rectas en un plano se cortarán. Esta sustitución del quinto postulado no es compatible con los demás postulados de Euclides. Para obtener una geometría compatible, es necesario modificar algunos de los postulados de Euclides, haciendo esto, los geómetras desarrollaron una segunda geometría no-euclideana. La **Geometría Riemanniana** establece que el no ser acotadas no necesariamente implica líneas infinitamente largas: si seguimos la trayectoria de una línea recta no necesariamente llegamos al final de ésta.

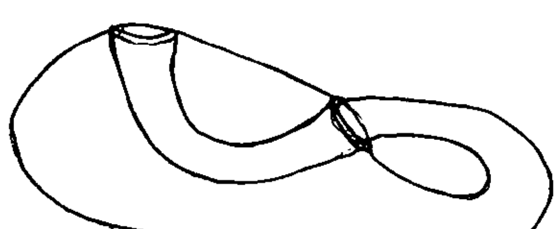
Puede ser imposible determinar con experimentos físicos si nuestro espacio es o no euclideano. Como todas las mediciones tienen suposiciones tanto físicas como geométricas, un resultado observado puede explicarse de muchas maneras compensando las cualidades supuestas en el espacio y materia. Por ejemplo, una discrepancia observada en la suma de los ángulos de un triángulo puede explicarse conservando las suposiciones de la geometría euclideana, y modificando al mismo tiempo alguna ley de la física, tal como alguna ley óptica. Esto nos hace ver que no existe "la" geometría verdadera. Sin embargo, podemos preguntarnos cuál es la geometría más conveniente dependiendo de la aplicación que vayamos a darle. Por ejemplo, para dibujar, para la topografía terrestre y para la construcción de edificios y puentes, la geometría euclideana es la más conveniente, pues es la más sencilla con la que se puede trabajar. Para ciertos estudios físicos, las otras geometrías pueden ser más convenientes. Por ejemplo, Albert Einstein para su Teoría General de la Relatividad encontró que ninguna de las tres geometrías mencionadas anteriormente era adecuada y optó por otra geometría descrita anteriormente por Riemann en 1854 (una geometría no euclideana cuyas discrepancias de la euclideana no son uniformes, pues varía de un lugar a otro en el espacio, según la concentración de materia presente en el espacio en ese sitio).

Así también, se ha utilizado la geometría no euclideana lobachevsquiana en estudios del espacio visual.

Las geometrías de las que hablamos anteriormente dependen de las medidas de longitud y ángulo por lo que son llamadas geometrías métricas, la **Topología** es una geometría no-métrica, desarrollada a fines del Siglo XIX y es descubierta con los resultados aislados de los astrónomos Listing y Möebius. Este último demostró que es posible que una cinta tenga sólo una superficie utilizando la cinta de Möebius: cortando una tira rectangular de papel, damos al papel un medio giro y unimos los extremos, la cinta de Möebius tiene solamente una superficie y un borde.



Otro ejemplo de superficie de un solo lado y un solo borde es la botella de Klein; ésta no tiene ni interior ni exterior.



Otros pioneros de la topología fueron: Riemann, Betti, Jordan, Poincaré y dentro de la geometría moderna: Hilbert.

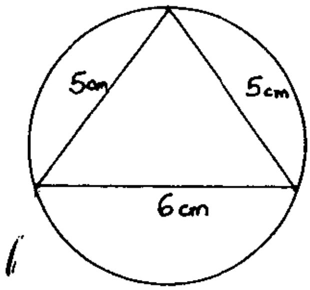
El Siglo XX ha visto un aumento del papel de la geometría dentro de la ciencia, desde la teoría de la relatividad y la geometría diferencial de las partículas y campos fundamentales hasta la teoría de la catástrofe en biología y fisiología y la geometría de los sistemas dinámicos complejos, caos y fractales.

Trataremos más asuntos topológicos después de los acertijos que se presentan en las siguientes páginas

Acertijos y Geometria

Acertijo #10

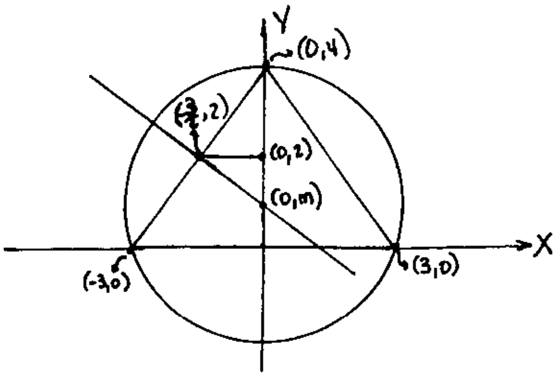
Suponga que podemos dibujar un triángulo isósceles con dos lados que miden 5cm. Y el tercer lado que mida 6 cm. Y de tal manera que quede inscrito en un círculo. ¿Cuál es el diámetro del círculo?



Respuesta

El diámetro del círculo es 6.25 cm. Aquí está una manera de resolverlo.

Alinee el triángulo con el eje y de tal manera que el origen (0,0) quede en el centro de la base del triángulo (observe el diagrama más adelante) Como la base del triángulo mide 6 cm, sus vértices quedan localizados en (-3,0) y (3,0) Así el eje y ha dividido al triángulo original en dos triángulos rectángulos de base 3 cm e hipotenusa 5 cm. Del teorema de Pitágoras sabemos que el otro lado mide 4 cm por lo que el vértice superior está localizado en (0,4)



Si trazamos cualquier perpendicular L en el punto medio de cualquiera de los lados del triángulo, ésta pasará por el centro del círculo. El punto (0,m) donde corta al eje Y es el centro del círculo ya que el eje Y es la perpendicular que biseca la base del triángulo.

La pendiente de la recta que forma el lado izquierdo del triángulo es 4/3 por lo que la perpendicular tiene una pendiente –3/4. El punto medio de este lado es (-3/2,2)

La ecuación de la recta que pasa por los puntos {(0,m), (-3/2,2)} y cuya pendiente es –3/4, es:

$$2 - m = -3/4(-3/2 - 0)$$

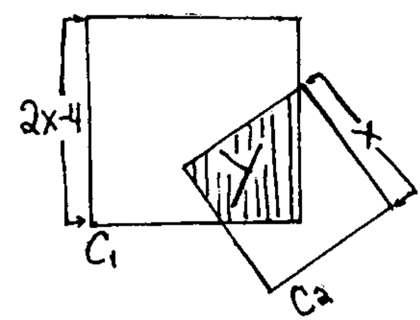
$$m = 2 - 9/8$$

$$m = 7/8$$

Así que el radio del círculo es la distancia entre (0,7/8) y el vértice superior del triángulo (0,4) que es 3.125 cm. Doblando esta distancia tenemos que el diámetro es 6.25 cm.

Acertijo #11

Tenemos dos cuadrados C_1 y C_2 parcialmente superpuestos. El cuadrado más grande llamado C_1 tiene de lado 4 *cm* menos que el doble del lado del otro cuadrado C_2. El área de C_1 que no comparte con C_2 es de 35 cm^2 más que el área de C_2. Encuentra el área de C_1.



Respuesta

Aunque parece un problema de geometría puede ser resuelto utilizando un poco de álgebra:

Supongamos que cada lado de C_2 es x.

Sabemos que cada lado de C_1 mide 4 cm. menos que el doble de x, de aquí que $2x - 4$ cm. es la medida de cada lado de C_1. Llamemos Y al área en que están superpuestos los dos cuadrados, entonces el área libre de C_1 está dada por:

$$(2x-4)^2 \text{ - Y } cm^2$$

Y el área libre de C_2 es:

$$x^2 \text{ - Y } cm^2$$

Además, como el área libre de C_1 es 35 cm^2 más grande que el área libre de C_2, tenemos:

$$(2x-4)^2 - Y = x^2 - Y + 35$$

$$4x^2 - 16x + 16 = x^2 + 35$$

$$3x^2 - 16x - 19 = 0$$

Las soluciones para esta ecuación son:

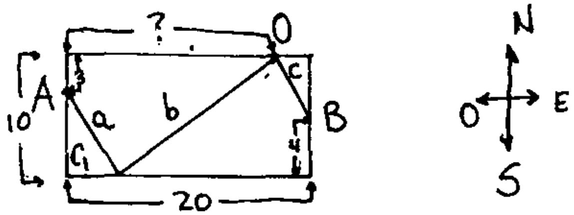
$$x = {(16+22)}/{6} \quad \text{y} \quad x = {(16-22)}/{6}$$

Como la segunda respuesta es negativa, tenemos que $x = {(16+22)}/{6}$, es decir $x = {19}/{3}$

El área de C_1 es $(2x-4)^2$ con lo que obtenemos que el área es 676/9.

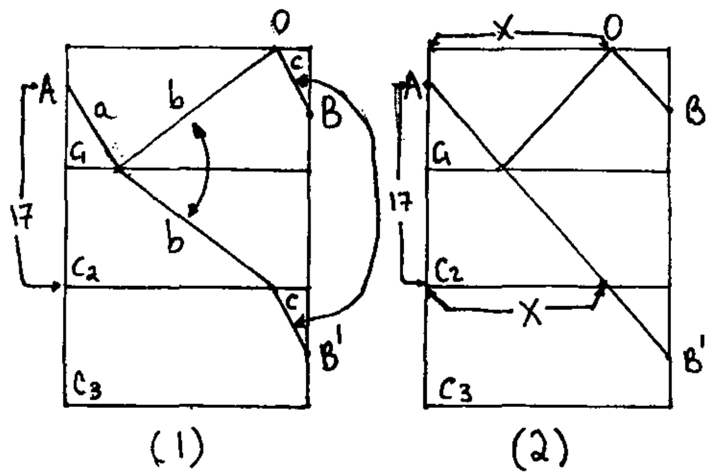
Acertijo #12

Tenemos un cuarto rectangular que mide 20 mt. De este a oeste y 10 mt. De norte a sur. Debemos instalar un alambrado en forma de zig-zag lo más corto posible de manera que tenga las siguientes características: Desde un punto A localizado 3 mt. al sur de la esquina noroeste hasta un punto en la pared al sur, después a algún punto en la pared del norte y finalmente hasta un punto B localizado 4 mt. al norte de la esquina sureste, (vea el dibujo siguiente) ¿qué tan lejos de la esquina noroeste debemos localizar el punto O en que el alambre toca la pared norte?



Respuesta

Pensemos en tres cuartos C_1, C_2 y C_3 de tal manera que C_2 tiene la trayectoria b y C_3 tiene la trayectoria c, dispuestos como se ve en la figura (1):



Puedes ver que cualquier trayectoria en forma de zig-zag del punto A al punto B que mida: a + b + c, se puede desplegar como una trayectoria de esa misma distancia desde el punto A en el cuarto C_1 a un punto B' en el cuarto C_3.

Queremos que esa trayectoria sea mínima, por lo que necesitamos que el zig-zag del cuarto C_1 corresponda a una línea recta de A a B' como se ve en la figura anterior (2)

El cambio este-oeste desde A a B' es 20 mt. mientras que el cambio norte-sur de A a B' es: 7 + 10 + 6 = 23 mt. Así que la pendiente de la línea que pasa por estos dos puntos es –23/20. De la figura anterior (2) también vemos que la pendiente debe ser –17/x, así:

$$17/x = 23/20$$

$$23x = 340$$

$$x = 340/23$$

es la respuesta correcta.

Acertijo #13

Tenemos a dos arañas A_1 y A_2 caminando sobre el plano XY. Las coordenadas (x,y) de A_1 en t segundos son:

$$x = 10 + t \quad , \quad y = t^2 - 4t + 17$$

mientras que las respectivas coordenadas de A_2 son:

$$x = 2t \quad , \quad y = 4t - 12$$

Encuentre el punto donde las trayectorias descritas por A_1 y A_2 se tocan.

Respuesta #1

Supongamos que la primera araña llega al punto en un tiempo t y la segunda en un tiempo s. Entonces para la primera araña tenemos

$$x = 10 + t \quad y = t^2 - 4t + 17$$

Para la segunda araña tenemos

$$x = 2s \qquad y = 4s - 12$$

Podemos igualar las ecuaciones y obtenemos

$$t^2 - 4t + 17 = 4s - 12 \quad \text{y} \quad 10 + t = 2s$$

de la Segunda ecuación tenemos que $s = 5 + t/2$ y sustituyendo este valor en la primera ecuación

$$t^2 - 4t + 17 = 4(5 + t/2) - 12$$

$$20 + 2t - 12 = t^2 - 4t + 17$$

$$0 = t^2 - 6t + 9$$

$$0 = (t - 3)^2$$

De aquí que $t = 3$ y $s = 5 + 3/2 = 13/2$

Las dos arañas se encuentran en el punto (13,14)

Respuesta #2

Como la descripción de la trayectoria seguida por A_1 es

$$x = 10 + t \quad , \; y = t^2 - 4t + 17 \quad \text{tenemos:}$$

$$t = x - 10$$

sustituyendo en $y = t^2 - 4t + 17$ queda

$$y = (x-10)^2 - 4(x-10) + 17$$

o

$$y = x^2 - 24x + 157$$

ecuación que corresponde a una parábola.

Hacemos lo mismo para las coordenadas de A_2 y se tiene:

$$t = x/2$$

sustituyendo en $y = 4t - 12$

$$y = 4(x/2) - 12$$

o

$$y = 2x - 12$$

corresponde a la ecuación de una recta

El problema se reduce a encontrar la intersección entre la parábola y la recta con lo que

$$x = 13$$

y nuevamente obtenemos el punto (13,14) como el de la intersección de las trayectorias descritas por A_1 y A_2.

Asuntos Topológicos

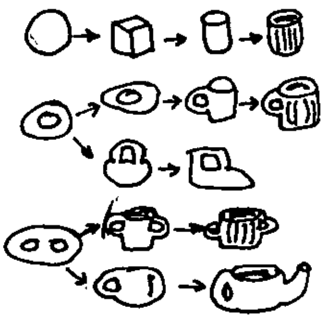
Una superficie es una extensión de puntos en que se consideran sólo dos dimensiones; un nudo se puede considerar como una curva cerrada sencilla, hecha de goma y que se puede retorcer, alargar o deformar de cualquier forma en un espacio tridimensional, aunque no se puede romper.

Las superficies son objetos bidimensionales viviendo en un espacio tridimensional y los nudos objetos unidimensionales.

La topologia es una rama de las matemáticas que estudia ciertas propiedades de las figuras geométricas. Se la llama a menudo geometría de la cinta elástica, de la lámina elástica o del espacio elástico, pues se preocupa de aquellas propiedades de las figuras geométricas del espacio que no varían cuando el espacio se dobla, da la vuelta, estira o deforma de alguna manera. De aquí que las restricciones son: el espacio no se puede romper y dos puntos distintos no se pueden hacer coincidir. La geometría se ocupa de propiedades como la posición o distancia absoluta y de las rectas paralelas, mientras que la topología sólo se ocupa de propiedades como la posición relativa y la forma general. Por ejemplo, una circunferencia divide a un plano que la contiene en dos regiones, una interior y otra exterior a la circunferencia. Un punto exterior no se puede conectar a uno interior con una trayectoria continua en el plano sin cortar a la circunferencia. Si se deforma el plano, éste deja de ser una superficie plana o lisa y la circunferencia se convierte en una curva arrugada; sin embargo, mantiene la propiedad de dividir a la superficie en una región interior y otra exterior. Los topólogos están interesados en una variedad de superficies. Tratan de entender que distingue a una superficie de otra, y entender la relación que tiene una superficie con el espacio que ella ocupa.

Piensa en superficies que puedan doblarse muy fácilmente y sean infinitamente delgadas. En 3 dimensiones los topólogos estudian sólidos (i.e., cubos, pirámides, esferas, etc.) de una manera diferente a la que los geómetras lo hacen. Están interesados en las superficies de éstos y muchos otros objetos. La superficie de un cubo, una esfera y una pirámide son topológicamente equivalentes. Una "piel" flexible que cubra a cualquiera de ellos puede ser reformada para cubrir a cualquiera de los otros. Las superficies de una dona y de una taza de café son topológicamente equivalentes, cada una es un objeto tridimensional que contiene un agujero. Sin embargo las superficies de una dona y una esfera no son topológicamente equivalentes. Esta es una manera poco usual (pero válida) de pensar acerca del mundo. Los topólogos no se limitan al mundo tridimensional que nos es familiar. Muchos de los conceptos y teoremas en topología son sobre superficies n-dimensionales, imposibles de imaginar.

Una esfera es topológicamente equivalente a un cubo o a un vaso pero no a un aro, mientras que un aro es topológicamente equivalente a una taza o a una plancha, pero no es equivalente a una azucarera; un objeto con dos hoyos es equivalente a una tetera destapada y a una azucarera destapada, pero no a una esfera o a un aro.



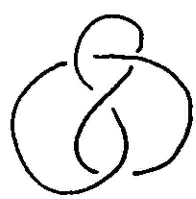
La teoría de nudos es una rama de la topología que tiene todavía muchos problemas por resolver. Se dice que dos nudos son *equivalentes* si se puede deformar uno de ellos para dar el otro; si esto no es posible, los nudos son distintos. Hoy en día no se ha podido establecer un conjunto completo de características suficientes para distinguir los distintos tipos de nudos.

Nudos, Lazos y otros enredos matemáticos

Los nudos han propiciado el interés de muchos desde antes del Siglo XIX, pero no es sino hasta este siglo que se establece una formalización de cuestiones teóricas sobre ellos. Aparecen en manuscritos ilustrados, esculturas y pinturas en todo el mundo. Tan pronto como el ser humano tuvo en sus manos un trozo de cuerda, es probable que haya inventado los nudos y su uso y variedad es clarísimo para los marineros y para los scouts. El estudio matemático de los nudos es un área de investigación activa. Tiene aplicaciones prácticas en el análisis de circuitos eléctricos, análisis de estructura molecular y en la planeación de redes de calles y avenidas. En la última década, uno de los avances más importantes de la teoría de nudos ha sido el descubrimiento de sus conexiones con la rama de la física que estudia las partículas elementales y las fuerzas que son los bloques de construcción del universo. También se ha encontrado que el DNA está a veces anudado y que los nudos pueden jugar un papel en la biología molecular.

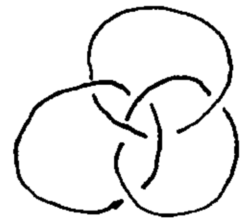
Matemáticamente, los *Nudos* son curvas formadas en el espacio entrelazando primero un trozo de cuerda y después uniendo los extremos. Si sólo tenemos una cuerda hablamos de nudo pero si tenemos más de una cuerda, tenemos un lazo. Algunos ejemplos y nombres de nudos y lazos se dan a continuación:

Trébol



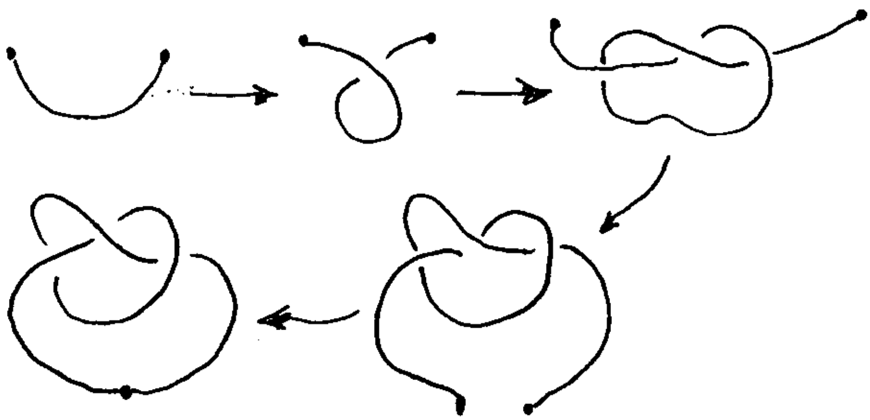
Ocho

Lazo Hopf



Anillos Borromeanos

Cuando realizamos un nudo con un trozo de cuerda nos quedan los dos extremos sueltos, en los diagramas de nudos representamos estos extremos unidos (en la realidad esto evitaría que se desate el nudo) así:

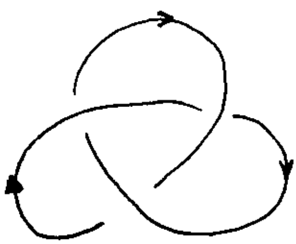


Resumiendo, un diagrama de lazo es una manera de atar uno o más círculos en tres dimensiones.

Un dibujo del nudo es llamado una *proyección* o un *diagrama* del nudo, pero la información más importante que nos da este diagrama es el patrón de enlace del nudo: un corte en el dibujo nos indica que la línea cortada pasa debajo de la línea continua.

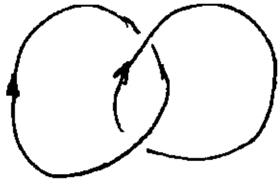
Los nudos pueden ser clasificados de acuerdo al número de entrecruces que tengan. El mínimo número de entrecruzamientos es 3. Sólo hay un tipo de nudos que tienen 3 y 4 entrecruzamientos, hay dos tipos de nudos que tienen 5 entrecruzamientos y tres tipos de nudos con 6 cruces.

Un segmento continuo en el diagrama es llamado *arco*, y los arcos se unen en los *cruzamientos*. Todos los diagramas de nudos y lazos tienen un número finito de cruzamientos y los arcos sólo se unen en los cruzamientos. Los arcos de un diagrama se dividen en clases diferentes llamadas *componentes*, éstas corresponden intuitivamente a los diferentes trozos de cuerda que son utilizados al realizar el nudo o el lazo. Por definición el diagrama de nudo tiene una componente y el de lazo tiene un número finito de componentes. La orientación en un diagrama de lazo es la elección de una dirección para cada componente, y ésta es indicada en el diagrama por flechas, así:

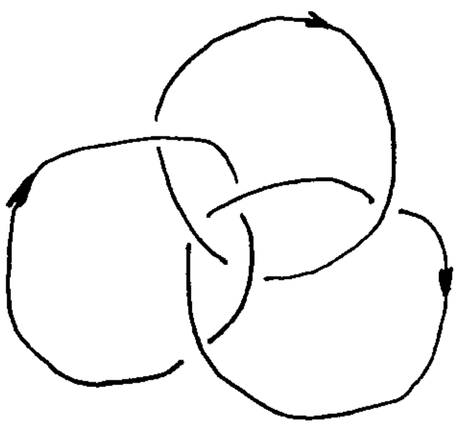


TREBOL

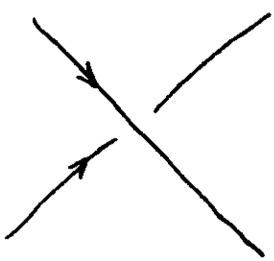
OCHO



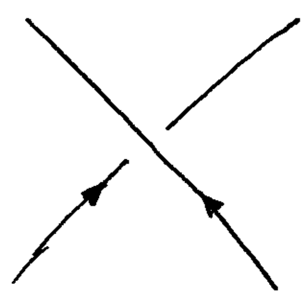
LAZO HOPF



ANILLOS
BORROMEANOS.



CRUZAMIENTO
POSITIVO

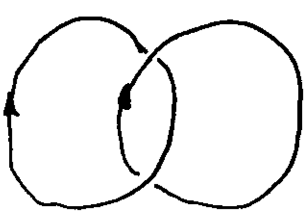


CRUZAMIENTO
NEGATIVO

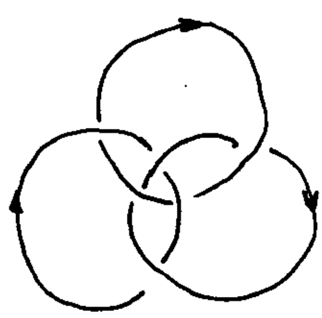
En un diagrama orientado hay sólo dos tipos de cruzamientos a los que se asigna un signo. Un método para saber el signo es imaginar que nos acercamos al cruzamiento por el arco que pasa debajo pero siguiendo la orientación del diagrama, si la orientación del arco que pasa encima va de izquierda a derecha, el signo del cruzamiento es positivo, y si va de derecha a izquierda, el signo del cruzamiento es negativo. La suma de los signos de todos los cruzamientos de un diagrama orientado se llama writhe (enroscamiento) y se denota por w(D)

$w(D)=+3$

$w(D)=0$



$w(D)=-2$

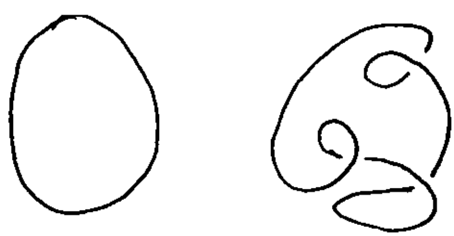


$w(D)=0$

Los matemáticos vemos los nudos como aros o trayectorias cerradas por lo que podemos recorrerlos con un dedo de manera continua. Un nudo es un objeto matemático, similar en cierto sentido a los números.

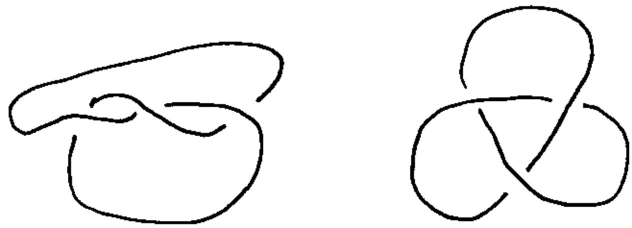
Los no matemáticos y los que algo sabemos de matemáticas nos hacemos preguntas acerca del comportamiento de los números y de los nudos, por ejemplo: ¿cuándo dos nudos son iguales?. Trabajemos con los nudos siguientes:

El nudo cero por ejemplo es un aro cerrado. Puede ser enredado tanto como se quiera, pero mientras el nudo no sea cortado y reanudado, sigue siendo el nudo cero

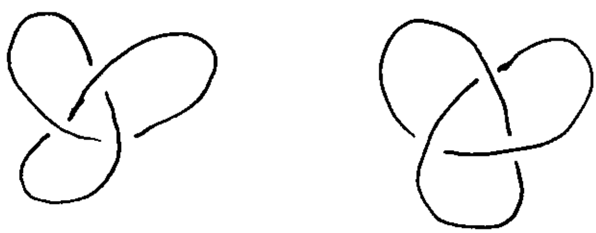


El nudo de la derecha puede ser desatado, sin ser cortado, para que se vea como el de la izquierda. Este es el concepto de *equivalencia* de nudos. Dos proyecciones son *equivalentes* si son proyecciones del mismo nudo. Cuando dos nudos se ven muy diferentes, bien podría ser que uno sea una versión extra enredada del otro, y que uno pueda ser transformado en el otro por medio de giros y desenredos, pero sin que tenga que ser cortado para poder desenredarlo.

Dos nudos son topológicamente equivalentes si, por medio de un movimiento continuo (deformación) y sin romper la cuerda, un nudo puede ser deformado en el otro. Aunado a ésto, un nudo y su imagen reflejo son considerados equivalentes topológicamente, a pesar de que no haya un movimiento continuo (deformación) que cambie uno de los nudos en el otro.



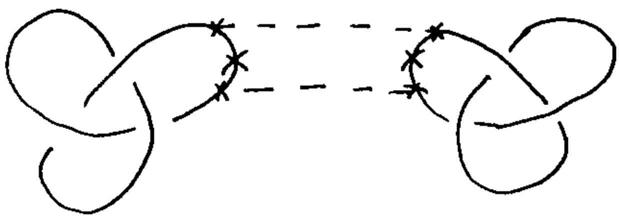
Ahora observemos que los siguientes dibujos trébol son similares en cierto sentido, mas sin embargo



no importa cómo se gire o deforme uno de estos nudos, no podrá verse como el otro a menos que se corte y reate la cuerda.

Los especialistas en la teoría de nudos siguen investigando un método general para determinar cuándo dos nudos son equivalentes. El concepto de *equivalencia topológica* está estrechamente relacionado con la idea de igualdad entre entes topológicos, es decir, superficies, nudos, etc. De antemano se parte con la visión geométrica de los dibujos.

Adición de nudos



Con un poco de cirugía, dos nudos pueden ser sumados, es decir si se hace un corte a cada uno, y, sin desenredar, se unen los extremos de tal manera que

cada punta se une a una punta del otro nudo. Un ejemplo se ve en el dibujo anterior. El *nudo cero* no sólo se llama así porque se parece a un cero, sino porque se comporta de manera similar al cero de los números reales o al vector cero en alguna dimensión, etc. Cuando se suma el nudo cero a cualquier otro nudo, hay un nudo más grande, pero su forma permanece inalterada.

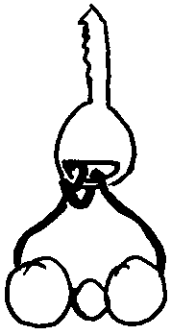
La adición de nudos nos muestra cómo éstos se pueden sumar de tal manera que se obtenga un nudo de forma más compleja. ¿Es posible romper un nudo complejo en dos nudos más simples de manera que éstos al ser sumados nos den el original? Tendríamos también que saber qué significa complejidad o simplicidad en los nudos. Analizando esta pregunta y recordando nuestros conocimientos de Teoría de los Números podríamos pensar en la análoga: a la de tratar de encontrar dos números naturales que multiplicados nos den un número primo. Con excepción del 1, sabemos que no es posible encontrar tal descomposición para los números primos, pero si lo es para los enteros que no son primos. ¿Ocurre lo mismo con los nudos? De hecho existen *nudos primos* que juegan un papel similar a los números primos. Determinar cuándo un nudo está formado por bloques más pequeños no es siempre fácil, pero es un reto interesante.

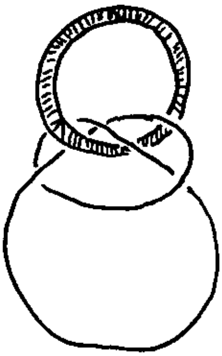
¿Existen nudos *negativos*? , ¿Existen pares de nudos que si son sumados se obtenga el nudo cero?.

Algunos Rompecabezas

Rompecabezas de Equivalencia de Nudos

Dos proyecciones de nudos son *equivalentes* si son proyecciones del mismo nudo. Un rompecabezas basado en equivalencia de nudos puede ser resuelto transformando la proyección inicial del nudo en una proyección equivalente. Un rompecabezas de equivalencia de nudos debe tener dos componentes principales: una cuerda (o cualquier cosa que funcione como cuerda) y un objeto rígido con un agujero, por ejemplo un anillo. La cuerda debe estar atada al orificio y sus puntas atadas entre sí o a otras componentes del rompecabezas para formar un lazo cerrado. La cuerda debe estar atada de tal manera que las posiciones de sus cruzamientos con relación al objeto al que está atada son pares "sobre-sobre" y "debajo-debajo".

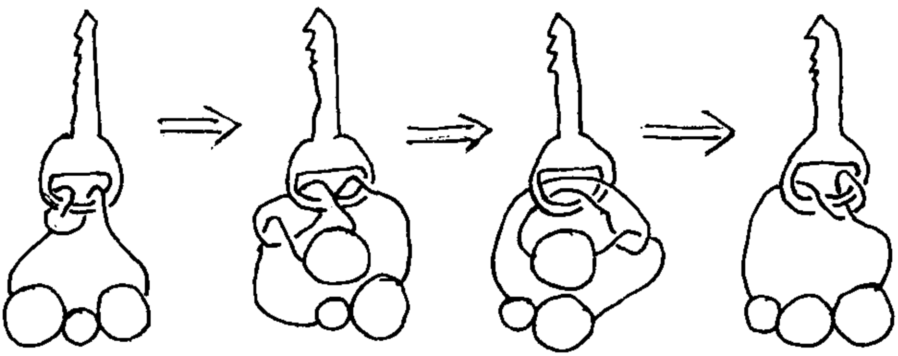




Por ejemplo en el rompecabezas de la Llave Etiquetada de la izquierda, si seguimos la cuerda, desde el lado derecho hacia la llave, los cruzamientos son "sobre-debajo-debajo-sobre". Ya que la cuerda está atada en un lazo, los dos "sobre" pueden ser considerados como adyacentes. En el nudo de la derecha no se satisface la condición anterior pues los cruzamientos son "sobre-debajo-sobre-debajo".

Frecuentemente, en un rompecabezas de equivalencia de nudos, uno o más objetos ensartados en la cuerda son demasiado grandes para pasar a través del orificio del objeto al que están atados. En el Llave Etiquetada, una canica pequeña y dos grandes están ensartadas en la cuerda que está atada a la llave. En el estado inicial del rompecabezas, las dos canicas grandes están separadas por la canica pequeña y por la llave. El objetivo es que las dos canicas grandes queden juntas.

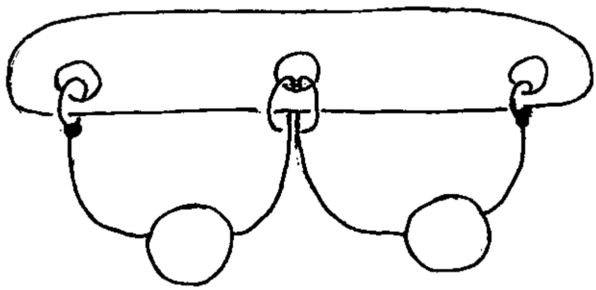
Pareciera que la única manera de resolver el rompecabezas sería hacer pasar una de las canicas grandes a través del orificio de la llave, pero esto es imposible debido a que la canica es demasiado grande, veamos si existe otra manera de resolverlo:



Tratemos de mover la canica grande de la izquierda hacia el otro lado siguiendo el camino de la cuerda. Esta tiene un punto de cruzamiento por el que debe pasar la canica dos veces para llegar al otro lado. Primero llevamos la canica hacia la llave y debajo del punto de cruzamiento, logramos esto tirando de la cuerda para que el lazo sea lo suficientemente grande para que pase la canica. Pareciera que enseguida la canica tendría que pasar por el orificio de la llave, pero ya que esto es imposible, pasaremos todo el cruzamiento a través del orificio hacia el frente de la llave, de esta forma, la canica podrá pasar por segunda vez el cruzamiento. Después de esto tenemos las dos canicas grandes juntas.

En este sencillo rompecabezas, los nudos inicial y final se ven diferentes, sin embargo son el mismo nudo (simplemente son dos proyecciones diferentes). Para resolver rompecabezas de equivalencia de nudos, recuerda seguir el camino de la cuerda y en caso de ser necesario, transformar la proyección inicial del nudo.

El rompecabezas de las Canicas Africanas es otro de equivalencia de nudos. Tiene un nudo cuadrado atado al orificio central del tablero. Cada terminal de la cuerda tiene ensartada una canica y está atado a un orificio final.

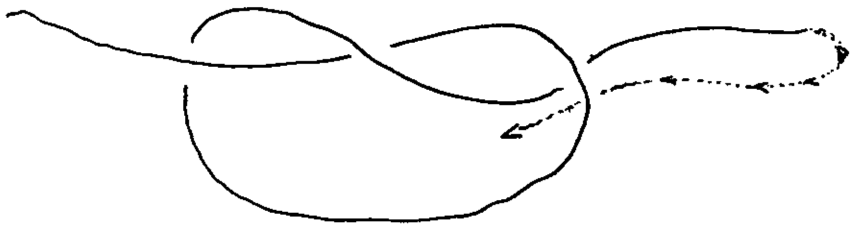


El objetivo es juntar las canicas.

Rompecabezas para Desenredar

En la teoría matemática de nudos, un nudo es un lazo cerrado con algunos cruzamientos, y no existe manera de desatarlo a menos que se corte la cuerda. La clase de nudos que utilizamos en la vida diaria son no-matemáticos, pues son simplemente una cuerda atada cuyos extremos están libres. Los rompecabezas en los que queremos desatar un nudo no-matemático son llamados rompecabezas para *desenredar.*

Este tipo de rompecabezas consta de una cuerda atada al orificio de un objeto rígido de tal manera que la cuerda hace cruzamiento sobre sí misma. Así como en los rompecabezas de equivalencia de nudos, las posiciones de los cruzamientos con relación al objeto son pares "sobre-sobre" y "debajo-debajo". Frecuentemente, lo que haremos para resolverlos, será desatar los nudos en ellos.



Se forma un nudo en una cuerda cuando realizamos cruzamientos de la cuerda, así que para desatarlo tenemos solamente que deshacer el cruzamiento. Esto puede realizarse si llevamos el final de la cuerda de regreso por el lazo formado en el cruzamiento más próximo, como se ve en el dibujo anterior. Para desatar un nudo, llevamos uno de los extremos libres de la cuerda siguiendo la trayectoria de regreso hasta deshacer todos los cruzamientos.

En el siguiente rompecabezas Llave Suelta, la cuerda está atada al orificio de una llave y los dos extremos de la cuerda están ensartados a una canica grande que se desliza libre entre el nudo y los extremos de la cuerda. Para evitar que se deslice fuera de las terminales, cada uno de sus extremos tiene ensartada una canica pequeña.

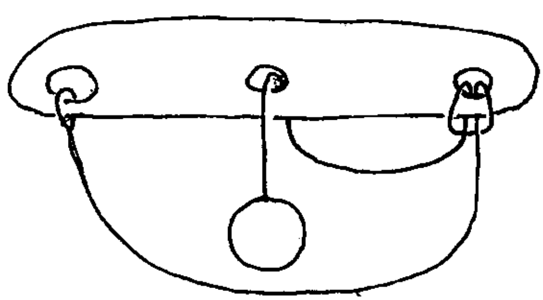
El objetivo es separar la llave de la cuerda y para lograr esto, debemos desenredar el nudo, es decir, deshacer el único cruzamiento que tiene.

Una forma de hacerlo es tomando el final de la cuerda de la izquierda y regresarlo a través del lazo en el cruzamiento, pero para hacer esto nos estorba la canica grande y debido a que la terminal tiene ensartada una canica, no puede pasar a través de aquella.

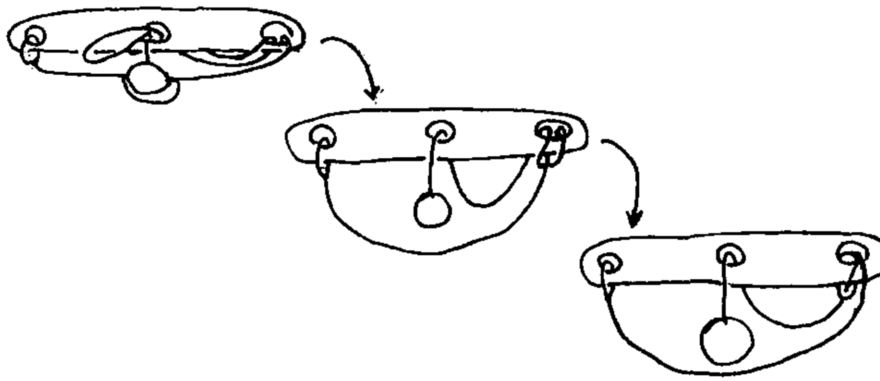
Ya que no podemos llevar la terminal a través de la canica grande, deberemos mover el cruzamiento al otro lado de la canica grande. Jalamos el lazo de la cuerda lo más lejos posible y atravesamos la canica grande, y haciendo esto podemos pasar la canica chica a través del lazo, deshaciendo el cruzamiento y así quedan separadas la llave, la canica grande y la cuerda.

El siguiente rompecabezas, Nudo Enlazado es un poco más difícil, pero el principio para resolverlo es el mismo.

Un extremo de la cuerda está atado a uno de los orificios finales del tablero y el otro extremo de la cuerda está ensartado al orificio central del tablero y luego a una canica demasiado grande como para pasar a través de los orificios del tablero. La parte central de la cuerda está enlazada al otro orificio final del tablero. El objetivo es desenlazar ese nudo.

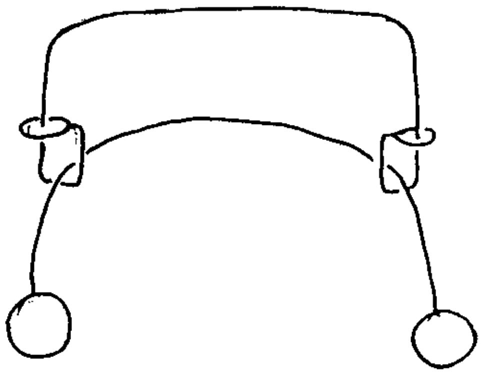


La cuerda tiene dos cruzamientos que debemos deshacer para poder soltar el nudo. Ya que la canica no puede pasar por los orificios del tablero, debemos jalar el lazo de la cuerda y ensartarlo desde la parte de atrás del orificio central del tablero. Empujando la canica a través del lazo habremos deshecho el primer cruzamiento, como se muestra a continuación



Nos queda un cruzamiento, pero éste está alrededor del final de la cuerda que está atada al tablero (observa la figura central), por lo que no podemos trabajarlo desde ese extremo, debemos llevar el cruzamiento de manera tal que quede del otro lado del orificio y así el lazo estará alrededor del extremo suelto de la cuerda. Podemos transformar la proyección que está en la figura central a una equivalente en el lado derecho. Ya que está del otro lado la solución es fácil.

Algunos rompecabezas requieren de una combinación de varios principios en su solución (por ejemplo, lazo abierto, equivalencia de nudos y desenredar nudos), este es el caso del Arco. Inicialmente este rompecabezas no tiene nudos, pero para resolverlo deberemos hacerle un nudo, después transformar el nudo a otra proyección y finalmente desatar el nudo.

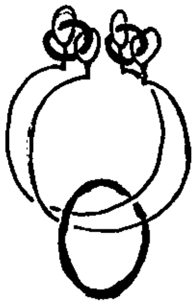


Rompecabezas de Doblar y Torcer

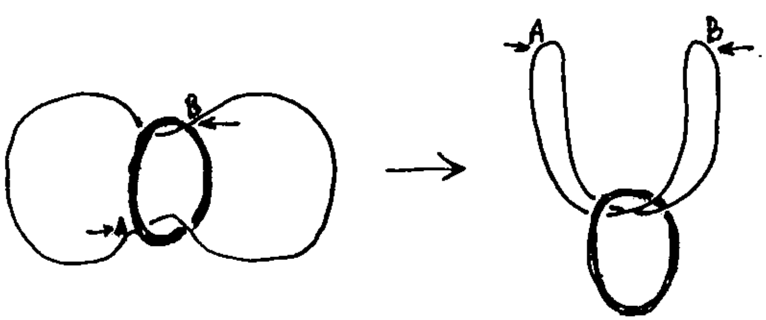
Este rompecabezas tiene un gran anillo a su alrededor que parece atrapado allí ya que la estructura de cada lado del anillo es demasiado grande como para pasar a través de él. Un ejemplo de estos es el Anillo Esposado.

Un anillo grande está atorado en el centro del rompecabezas donde dos eslabones están unidos, ya que ambos son muy grandes es imposible que el anillo central pase sobre ellos. Imaginemos que podemos doblar la estructura de tal manera que los eslabones queden juntos y enlazados en los extremos formando un arco del que cuelga el anillo (como se muestra a continuación).

El anillo se separa de los eslabones por cualquiera de los extremos de los arcos.

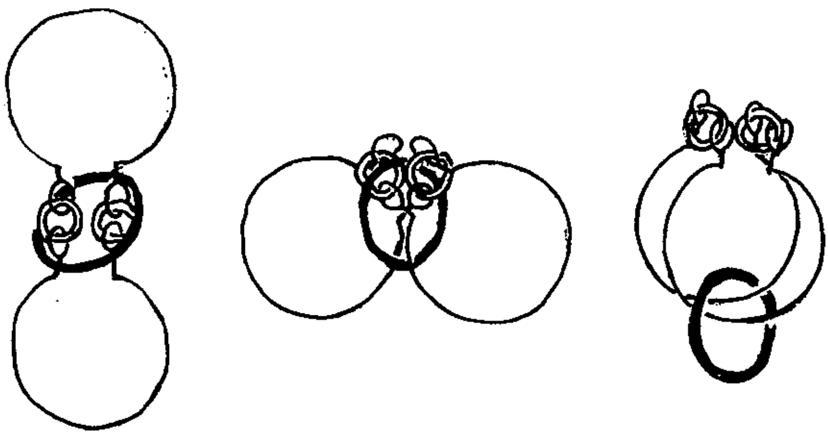


Para llegar del estado inicial al estado final analicemos la siguiente estructura: ya que los eslabones forman una estructura de lazo, podemos utilizar un lazo de cuerda en lugar de los eslabones para investigar cómo podremos manejar la estructura.



La estructura que nos queda inicialmente es la que se encuentra del lado izquierdo. Tomemos la cuerda por los puntos A y B que están más cercanos pero en lados opuestos del anillo. Al levantar el lazo por estos puntos podemos ver que el anillo cae al centro de la cuerda. El anillo ha hecho un giro de 90 grados para llegar a esta posición final. Realmente la cuerda se dobló en dos medios lazos como los eslabones del rompecabezas.

Apliquemos el análisis anterior al rompecabezas original:

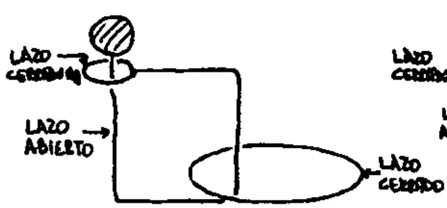


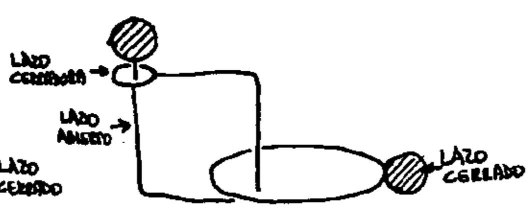
Posicionemos el anillo de tal forma que quede diagonalmente atravesando la parte central de los eslabones (en el dibujo de la izquierda vemos que el anillo va de la izquierda baja a la derecha alta) A continuación, "doblamos" los eslabones hasta unirlos, permitiendo que el anillo se deslice al centro de los arcos, como se ve en la figura central y en la figura de la derecha. En este momento podemos separar el anillo de la estructura. Si queremos volverlos a unir, simplemente seguimos los pasos a la inversa.

Los primeros rompecabezas que veremos se basan en el principio de lazo abierto. Para recordarlo: un lazo abierto es una estructura de lazo que tiene una o más aberturas. Un rompecabezas de este tipo consiste de por lo menos dos partes, incluye un lazo abierto y otro lazo (que puede ser abierto o cerrado) estructurado de tal forma que pasa a través de la apertura del lazo abierto. Inicialmente las dos partes están entrelazadas, y el objetivo del rompecabezas es separarlas.

En los siguientes rompecabezas utilizamos un trozo de alambre y una canica para formar el lazo abierto. Un extremo del alambre está atado a la canica, el otro se dobla en un pequeño círculo llamado lazo final. El lazo final encierra al alambre por lo que también se le llama lazo de cerradura. Debido a que la canica es demasiado grande para pasar a través de la cerradura, se ha formado un lazo abierto en el alambre.

Entrelazado con el lazo abierto tenemos un lazo cerrado hecho de cuerda. Topológicamente, un lazo abierto no se considera como lazo, pues si imaginamos que "deformamos" la canica del extremo hasta que sea lo suficientemente delgada podrá pasar a través del lazo de cerradura y así el lazo que estaba entrelazado a la cuerda ya no existiría.

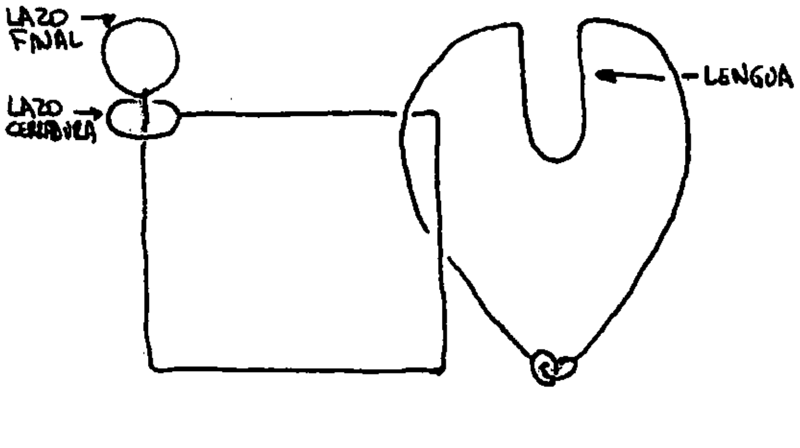




Si reconocemos una estructura de lazo abierto en un rompecabezas, podemos encontrar la manera de que el objeto entrelazado pase a través de la apertura del lazo abierto. En el primer rompecabezas, podemos pasar la cuerda a través del lazo de cerradura y de esa manera queda resuelto. Pero en el segundo rompecabezas la cosa se complica pues la cuerda tiene atada una canica demasiado grande para pasar a través del lazo de cerradura. Lo que debemos hacer es tirar de la cuerda a través del lazo cerradura lo suficiente como para que pase sobre la canica y volver a jalar la cuerda desde el interior del lazo cerradura, así liberamos el lazo cerrado.

En los dos casos hemos tratado con rompecabezas en los que los objetos entrelazados son hechos de cuerdas y como éstas son flexibles y pueden ser dobladas o giradas al gusto, una vez que localizamos la estructura de lazo abierta, podemos resolver el rompecabezas. ¿Qué sucede en el caso en que el objeto enlazado es de alambre? En los rompecabezas hechos de alambre todas las partes tienen una forma fija.

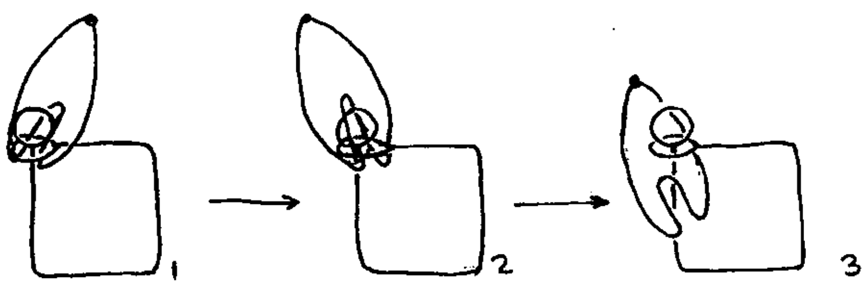
Un ejemplo de este tipo de rompecabezas es el de "corazón", que es un rompecabezas de lazo abierto ya que hay una zona abierta al final del alambre cuadrado. Entrelazado a éste hay un corazón, que es un lazo cerrado pues los extremos del alambre están enlazados sin apertura alguna. El problema es ¿cómo separar el corazón y el cuadrado



Es imposible que el corazón pase a través del lazo de cerradura, al contrario de lo que podía suceder con el ejemplo del lazo hecho de cuerda, pues el corazón es demasiado grande, pero podemos tratar de pasar a través de la cerradura alguna parte del corazón, como hicimos en el segundo ejemplo anterior. Primero, encontrar qué parte del corazón es suficientemente delgada para deslizarse a través de la cerradura del cuadrado. Segundo, que esa parte sea bastante larga como para pasar sobre el lazo final del cuadrado. La parte del corazón que es delgada y larga y que nos permitirá separarlo del cuadrado se llama **lengua**.

Resolvemos el rompecabezas de "corazón" en tres etapas:

1. Coloque el corazón de cabeza y pase la lengua de éste dentro del lazo cerradura desde adentro del cuadrado;
2. Pase el extremo de la lengua sobre el lazo final del cuadrado;
3. Empuje la lengua de regreso fuera del lazo cerradura lo que liberará el corazón.

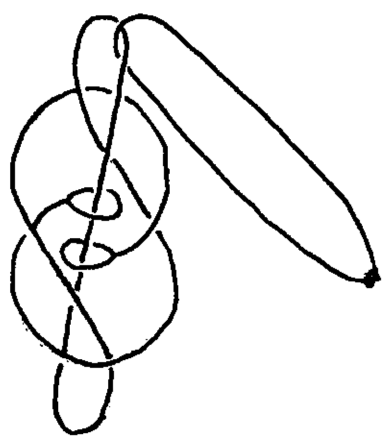


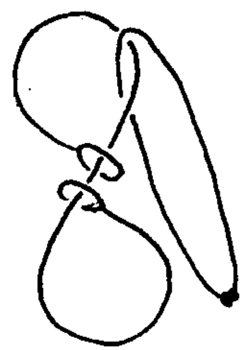
Para volver a entrelazarlos, seguimos los pasos en reversa.

Transformando rompecabezas de lazo abierto

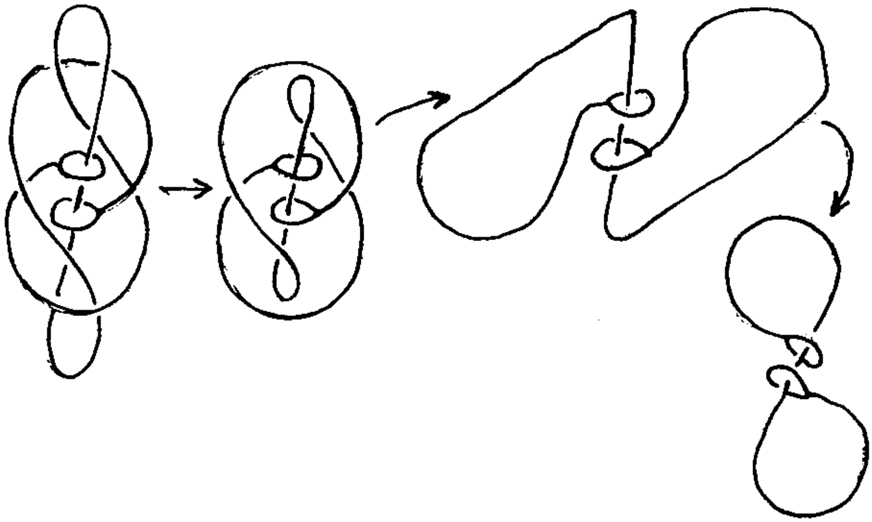
Algunos rompecabezas, como el Llave Doble Triple y otros rompecabezas llave, tienen diseños complicados. Lo primero que queremos hacer para resolver este tipo de rompecabezas es simplificar su estructura. Una manera de realizar esto es reduciendo el número de cruzamientos. Un cruzamiento es un término usado en teoría de nudos (una rama de la topología) para referirse al punto en el que dos segmentos de un nudo se encuentran y un segmento pasa sobre el otro.

Usemos como ejemplo los rompecabezas: Llave Doble Triple y Figura 8





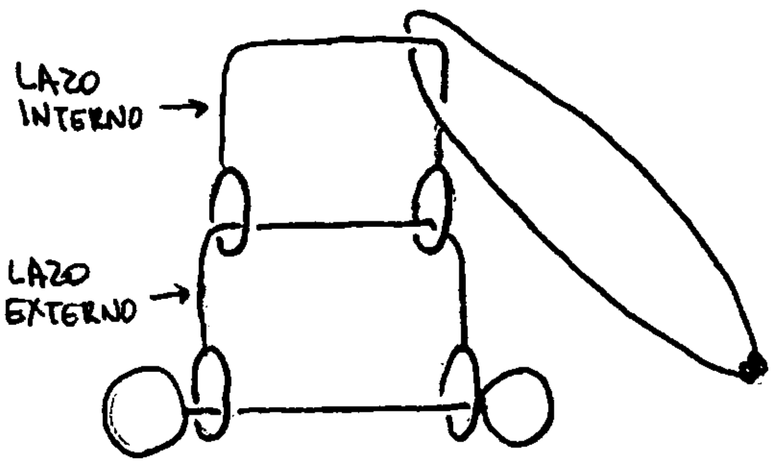
La Figura 8 en la derecha tiene dos lazos abiertos que comparten un pedazo de alambre. Cada lazo abierto funciona también como el lazo final para el otro lazo abierto. El rompecabezas no tiene cruzamientos, y la entrada para cada lazo abierto está en el centro del alambre entre los dos lazos cerradura. Este es un rompecabezas bastante fácil de resolver. El rompecabezas Llave Doble Triple, con sus ocho cruzamientos, parece un rompecabezas bastante difícil. Sin embargo analizando su estructura con detenimiento podemos ver que no es muy diferente del Figura 8.



Las figuras anteriores nos muestran una serie de transformaciones tipo "alambre elástico" que cambian la Llave Doble Triple en el Figura 8. Podemos notar que los ocho cruzamientos desaparecen al desenredar la llave. ¿Lo podremos resolver?

Lazos abiertos anidados

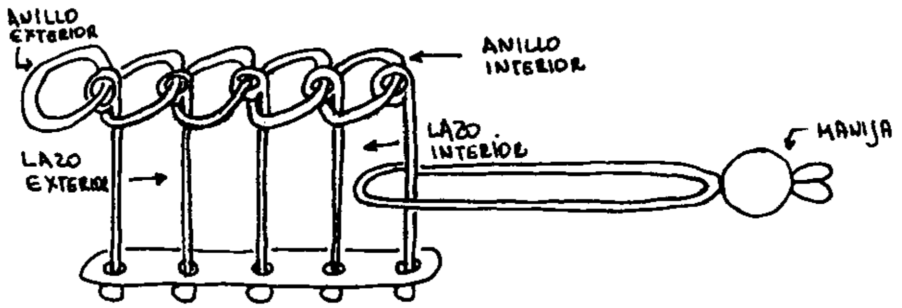
Las estructuras de lazo abierto pueden ser anidadas para formar rompecabezas más complicados. Ejemplos de este tipo de estructuras son el Doble Trapecio y los Anillos Chinos. Cuando tenemos estructuras de lazo abierto anidadas, es importante ver la estructura de cada lazo abierto independientemente, dónde están sus aperturas y de qué manera los lazos están anidados.



El Doble Trapecio tiene dos lazos abiertos anidados juntos. Las aperturas de los dos lazos abiertos son los lazos finales en su estructura en forma de U. Las aperturas del lazo interno nos llevan al lazo externo, y las aperturas del lazo externo llevan hacia afuera del rompecabezas. Para liberar el lazo de cuerda del rompecabezas, lo llevamos primero del lazo interno al lazo externo y después del lazo externo hacia fuera del rompecabezas. Siguiendo los pasos:

1. Empujamos parte del lazo de cuerda a través del lazo cerradura desde el interior del lazo interno.
2. Enlazamos con el lazo externo la parte del lazo de cuerda que empujamos a través del lazo cerradura. Esto es como entrelazar un lazo de cuerda con una estructura simple de lazo abierto. Debemos tener cuidado de no hacer cruzamientos en el lazo de cuerda.
3. Tiramos la cuerda de regreso del lazo cerradura. En este momento el lazo cerradura debe estar enlazado solamente al lazo externo.
4. Liberamos el lazo de cuerda del lazo externo de la misma forma en que lo hacemos para resolver un rompecabezas de lazo abierto simple.

Podemos tener anidados tantos lazos abiertos como queramos. Sin embargo para poder resolver el rompecabezas debemos limitarlos a un número finito. A continuación observemos el rompecabezas de los anillos Chinos:



En el ejemplo anterior tenemos cinco anillos con los cuales obtenemos cuatro lazos abiertos anidados. La manija de la derecha es un lazo cerrado y enlazado al lazo anidado más interno. El objetivo del rompecabezas es liberar la manija.

En este rompecabezas, la manija tiene un canal lo suficientemente largo como para que los anillos puedan moverse adentro y afuera de él, al mismo tiempo, el final de la manija es tan delgado como para deslizarse adentro y afuera de los anillos.

Bibliografía

Jan Gullberg
Mathematics:
From the Birth of Numbers
W.W.Norton & Company
1997

Howard Eves
Estudio de las Geometrías
Edit. UTEHA
1969

N.D. Gilbert y T. Porter
Knots and Surfaces
Oxford Science Publications
1997

Wei Zhang
Exploring Math Through Puzzles
Blackline Masters for making over 50 Puzzles
Key Curruculum Press
1996

Acertijo #1 tomado de:
http//www.ciudadfutura.com/juegosmensa/e066070.html

Acertijos #2, #3 y #4 tomados de:
Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático
Jean-Pierre Alem
Editorial Gedisa
1997

Acertijo #5 tomado de:
http//www.teleline.es/personal/diez10/acersolu.htm

Acertijo #6 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/s97-22.html

Acertijo #7 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/p97-25.html.

Acertijo #8 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/p98-04.html.

Acertijo #9 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/p98-05.html.

Acertijo #10 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/p97-09.html

Acertijo #11 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/s97-27.html

Acertijo #12 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/s97-16.html

Acertijo #13 tomado de:
http//www.uidaho.edu/LS/Math/imc/1997/s97-01.html

Rompecabezas tomados de:
Wei Zhang
Exploring Math Through Puzzles
Blackline Masters for making over 50 Puzzles
Key Curruculum Press
1996

Indice