01170
13

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

RELACIONES ENTRE LOS OBSERVADORES CON ENTRADAS DESCONOCIDAS Y LA PASIVIZACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES

PRESENTADA POR:

EDMUNDO GABRIEL ROCHA CÓZATL

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA (ELÉCTRICA)

DIRIGIDA POR:

DR.- ING. JAIME A. MORENO PÉREZ

Ciudad Universitaria, Mayo de 2001

Dedicatoria

Con mucho cariño para mis padres, Edmundo y María de Lourdes, mi hermana Paula y mis amigos.

Agradecimientos

A Dios que me ha permitido cumplir con otra meta más en mi vida.

A mi familia por su amor, respaldo y apoyo incondicionales.

A la UNAM por permitir formarme académicamente y en otros muchos aspectos.

Al CONACYT y a la DGEP por la beca que me otorgó cada una de estas instituciones para la obtención del grado de Maestría.

Al Dr. Jaime Moreno por sus enseñanzas, consejos y por su disposición permanente de ayuda.

A la Dra. Cristina Verde por su continuo e invaluable apoyo a mi desarrollo académico durante mi estancia en el Instituto de Ingeniería.

A todos los compañeros de la Coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería y del grupo de Control de la DEPFI por su amistad, ayuda y enseñanzas. A todos ellos: Alejandro, Bernardo, Daniel, Fernando, Nancy, Oscar, Paul, Rolando, Sandra, Sebastián, con quienes ha sido un placer trabajar y compartir esta etapa.

Índice

1 Introducción **3**

2 Antecedentes **9**

2.1 Observadores 13

2.1.1 Observadores convencionales 13

2.1.2 Observadores con Entradas Desconocidas 17

2.2 Pasividad y pasivización 22

2.3 Fase mínima 26

3 Relaciones entre la existencia de OED y la pasividad **31**

3.1 Sistemas Lineales 31

3.1.1 Pasivización por retroalimentación de estados y existencia de observadores con entradas desconocidas 32

3.1.2 Pasivización por retroalimentación de estados y pasivización por inyección de la salida 34

3.1.3 Pasivización por inyección de la salida y existencia de observadores con entradas desconocidas 37

3.2 Sistemas No Lineales 39

3.2.1 Pasivización por retroalimentación de estados y existencia de observadores con entradas desconocidas 40

3.2.2 Pasivización por retroalimentación de estados y pasivización por inyección de la salida 43

3.2.3 Pasivización por inyección de la salida y existencia de observadores con entradas desconocidas 48

4 Motor de inducción no saturado **51**

4.1 Existencia de un observador con entradas desconocidas 55

4.2 Pasivización por retroalimentación de estados 56

4.3 Pasivización por inyección de la salida 57

4.4 Simulación del observador con entradas desconocidas 63

5 Conclusiones **71**

Capítulo 1

Introducción

El concepto de pasividad ha adquirido una gran relevancia en la teoría de control, pues representa una herramienta muy útil en áreas como el análisis de estabilidad de sistemas y el diseño de controladores y observadores. La pasividad comenzó como un concepto energético orientado a interconexiones de sistemas con funciones de transferencia racionales que se podían realizar con elementos pasivos tales como resistencias, inductancias y capacitancias. Estas funciones de transferencia tienen la característica de tener un *grado relativo* (exceso de número de polos sobre el número de ceros) no mayor a uno y ser *positivas reales*, es decir, sus partes reales son positivas para toda frecuencia, con lo que su ángulo de fase es siempre menor a 90°. En los años 60's el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) relacionó este concepto de pasividad con el análisis de estabilidad de Lyapunov. Este resultado marcó el ingreso del concepto de pasividad como herramienta para la estabilización de sistemas lineales. Posteriormente, la relación se generalizó al caso no lineal introduciendo el concepto de una función de almacenamiento que sería utilizada como función de Lyapunov. En resumen, la pasividad es un concepto que auxilia en la determinación de la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema con entrada cero: si el sistema es pasivo entonces es también estable.

Por las características tan especiales y útiles de los sistemas pasivos, en el área del control automático existe una corriente dedicada a buscar que, si un sistema no es originalmente pasivo, pueda ser entonces pasivizado, es decir, pueda ser convertido en pasivo y por tanto en estable. Existen diversos medios por los cuales se pueden pasivizar los sistemas como pueden ser la retroalimentación de estados, la retroalimentación de la salida o la inyección de la salida.

El estudio de las condiciones bajo las cuales un sistema puede ser pasivizado, ya sea por retroalimentación de estados o de la salida, se presenta en [Byrnes et al., 1991] para el caso continuo y [Byrnes & Lin, 1993] en el caso discreto. Por otro lado, parte de este trabajo de tesis ha sido utilizado para formalizar en [Rocha-Cózatl & Moreno, 2001] condiciones suficientes para pasivizar un sistema por medio de una inyección de la salida. Existen trabajos que son fundamentales en la teoría de pasividad, como por ejemplo [Byrnes et al., 1991] y [Ortega et al., 1997] donde se resume la aplicación de la pasividad en el control de sistemas no lineales. También existe una vasta literatura con respecto a las aplicaciones de esta herramienta en el diseño de controles o estimadores. Cabe mencionar que estas aplicaciones son principalmente orientadas hacia sistemas electromecánicos, como puede ejemplificarse en trabajos como [Ortega et al., 1996] y [Ortega & Espinosa, 1991] donde se presentan resultados para el motor de inducción, [Nicklasson et al., 1997] y [Nicklasson et al., 1994] que trabajan con máquinas eléctricas en general, [Berghuis & Nijmeijer, 1993] donde se aplica la pasividad en sistemas manipuladores y [Ortega et al., 1994] donde se plantea la estabilización global de una clase general de sistemas mediante este concepto.

Por otro lado, en los sistemas de control frecuentemente se requiere el conocimiento de las variables de estado con el fin de cumplir los objetivos usuales de este tipo de sistemas: estabilización, regulación, seguimiento, entre otros. Cuando estas variables no pueden ser medidas directamente, por ser éstas inaccesibles o no tener el instrumento apropiado, se recurre al concepto de observador o estimador de estados. Los observadores son algoritmos matemáticos que, con base en la información de la entrada y la salida del sistema, generan un estimado que debe converger asintóticamente al valor real de la variable de estado en cuestión. De esta manera se puede suplir con un estimado la información directa del sistema. Para asegurar la existencia de un observador y así tener la posibilidad de diseñarlo e implantarlo, es necesario (y suficiente en el caso lineal) que el sistema tenga la propiedad de detectabilidad. Esta propiedad está plenamente caracterizada y su definición es única para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LIT), sin embargo, en el caso no lineal existen distintas definiciones de la misma y su estudio es un tema de investigación actual. De esta manera, existen diversos trabajos en donde se proponen esquemas para este tipo de observadores convencionales, por ejemplo [Arcak & Kokotovic, 1999], [Dalla Mora et al., 2000] y [Gauthier et al., 1991].

Un problema adicional se presenta cuando una parte o la información completa de la entrada no está disponible, por ejemplo cuando al sistema ingresa una señal de ruido. En estos casos la falta de información de las entradas no permite la construcción de un observador convencional como el que se mencionó antes, sino que es necesario utilizar el concepto de observadores con entradas desconocidas (OED). Este tipo especial de observadores tiene también como objetivo generar un estimado del estado que converja al valor real del mismo, pero en ausencia parcial o total de la información de la entrada. Por esta característica en especial, los OED resultan instrumentos de mucha utilidad en áreas como la detección automática de fallas, aplicación que va más allá de los objetivos originales de los observadores convencionales. Para sistemas LIT existen diversas propuestas de diseño de este tipo de observadores, algunas de ellas son, por ejemplo, [Chu, 2000], [Hou & Müller, 1992] y [Hou & Müller, 1994].

Cabe señalar que la parte desconocida de la entrada no sólo puede ser ruido o una señal inaccesible, sino que, por ejemplo, las incertidumbres en los parámetros o en el modelo del sistema también se pueden considerar como entradas desconocidas, convirtiendo así al OED en un observador robusto, es decir un observador que proporciona un estimado apropiado del estado aún cuando exista incertidumbre en el sistema. Como es claro, por la variedad de aplicaciones potenciales de los observadores con esa característica, existe un gran interés en ellos y, por tanto, su estudio se ha incrementado recientemente, muestra de esto son los trabajos [Busawon et al., 1999], [Ding et al., 1990], [Maquin et al., 1994] y [Xiong & Saif, 1999].

Las condiciones que aseguran la existencia de los OED ya se han establecido tanto para el caso lineal [Hautus, 1983], como para el no lineal [Moreno(1), 2000], [Moreno(2), 2000]; sin embargo, el estudio en general de los OED para sistemas no lineales no está muy desarrollado en comparación, por ejemplo, con el correspondiente a la pasividad y la pasivización. El presente trabajo intenta establecer relaciones útiles que permitan el avance tanto en el campo del análisis como en el diseño de estos observadores.

Anteriormente se mencionó que el lema KYP vinculó dos conceptos inicialmente trabajados por separado, el concepto de pasividad y el análsis de estabilidad de Lyapunov. Así como en este ejemplo, a lo largo de la historia de la teoría de control se ha podido constatar el gran beneficio que se obtiene al relacionar dos conceptos que inicialmente parecen no tener nada en común. Las nuevas relaciones proporcionan vías y puntos de vista diferentes que permiten reformular y atacar los problemas desde una perspectiva distinta y, en algunos casos, más eficiente

De esta manera, el objetivo de este trabajo es interrelacionar una tercia de conceptos: la pasivización por retroalimentación de estados (PRE), la pasivización por inyección de la salida (PIS) y los observadores con entradas desconocidas (OED). Este último es el concepto de mayor interés, pues la interrelación buscada tiene como fin acrecentar y motivar su estudio. Así, por un lado se tiene un concepto fundamental como es la pasividad, separado en dos facetas referentes a la pasivización de sistemas; y por el otro, se maneja un concepto que, aunque todavía está en desarrollo, resulta muy atractivo en el área del Control Automático, los OED.

El primer trabajo al respecto es [Moreno, 2001], en donde se considera el caso lineal estableciendo principalmente una relación de equivalencia entre las condiciones para asegurar la existencia de un OED y las condiciones para la pasivización por retroalimentación de estados; finalmente, al trabajar con sistemas lineales, en este trabajo se logra demostrar la equivalencia entre estos dos conceptos y la pasivización por inyección de la salida. Esta triple relación de equivalencia puede ser representada, como en la figura 1.1, por medio de un triángulo en donde en los vértices se pueden colocar los tres conceptos considerados y las líneas que los unen indican equivalencia entre ellos.

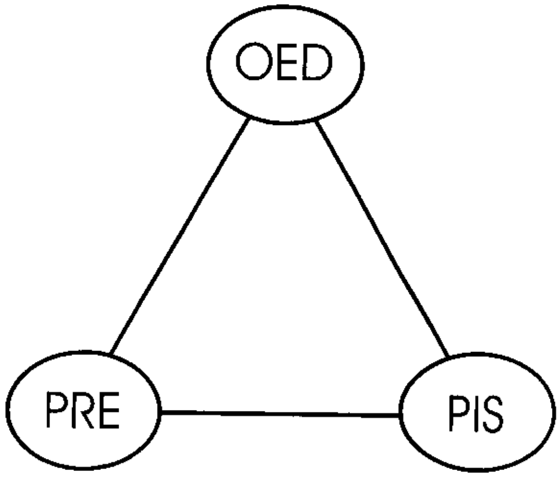

Figura 1.1: Esquema triangular entre los conceptos.

El objetivo del presente trabajo es tratar de establecer una relación similar en el caso no lineal. Sin embargo, debido a las dificultades propias del análisis de sistemas no lineales en donde esta interrelación no puede realizarse de manera directa, se procederá a hacerlo en dos partes. Así, aprovechando el principal resultado del caso lineal, primero se establece la relación entre la existencia de un OED y la pasivización por retroalimentación de estados, para después relacionar los dos tipos de pasivización considerados: por retroalimentación de estados y por inyección de la salida. Cabe hacer notar que en el caso lineal, al ser ambas relaciones de equivalencia, los tres conceptos se interrelacionan de igual manera. Es de esperarse que en el análisis no lineal, estas relaciones de equivalencia no se mantengan. Sin embargo se tiene la idea de que para la mayoría de los sistemas físicos, bajo ciertas restricciones, dicha equivalencia si existe, con lo cual se obtendría un sinfín de aplicaciones prácticas.

Para determinar la relación entre la existencia de un OED y la pasivización por retroalimentación de estados, se tomará como base el resultado de [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000], donde se consideran sistemas SISO y convergencias exponenciales. La relación establecida en [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000] es generalizada en dos aspectos. Por un lado, el resultado se extiende al caso multivariable y, por el otro, se consideran convergencias asintóticas que, evidentemente, son menos restrictivas que las exponenciales.

Como se ha mencionado, el interés de relacionar los tres conceptos es que cada uno de ellos saque provecho de las ventajas de los otros dos. Probablemente, debido a la situación actual, los OED sean los que obtengan un mayor beneficio de un análisis de ese tipo, pues, como se mencionó, su estudio todavía no se compara con el correspondiente a la pasividad en general, pero en especial se piensa que una relación entre estos tres conceptos ayudaría a establecer una metodología, hasta ahora inexistente, de diseño para este tipo de observadores.

En el caso lineal, por ejemplo, esta metodología es casi directa tomando en cuenta lo siguiente. Por un lado, como el objetivo es reproducir el estado del sistema, un observador, de Luenberger por ejemplo, es una copia del sistema original, más un término dependiente de la salida real del sistema, es decir, se tiene presente una inyección de la salida en su estructura. Por tanto, una posible estabilización o pasivización por inyección de la salida del sistema original resultaría provechosa con el fin de diseñar el observador. Por la falta de información de la entrada, un OED no puede tener una estructura tipo Luenberger, sin embargo, se puede llegar a una conclusión similar. De esta manera, la equivalencia existente entre los OED y la pasivización por inyección de la salida para los sistemas LIT permite proponer una metodología para la construcción y diseño de este tipo de observadores en ese caso en particular.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo dos se presentan los preliminares o antecedentes utilizados a lo largo del trabajo, en especial, las definiciones referentes a la pasividad y a los observadores. En el capítulo tres se presenta, en primer lugar, el resultado obtenido para el caso lineal y, posteriormente, los resultados para el caso no lineal. El capítulo cuatro presenta como ejemplo el motor de inducción no saturado; este ejemplo motiva algunas de nuestras suposiciones y se realizan simulaciones numéricas con base en él. Finalmente se formulan algunas conclusiones.

Capítulo 2

Antecedentes

El objetivo de este capítulo es establecer las definiciones y herramientas básicas que respaldan el resultado de este trabajo, principalmente se hace referencia a los conceptos de interés: la pasividad y los observadores. Al principio se realizan algunas definiciones básicas.

Sea un sistema no lineal afín en el control, MIMO, cuadrado, representado en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u, \quad x(0) = x_0, \\ y &= H(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas desconocidas, $y \in \mathbb{R}^m$ el vector de salidas y

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{bmatrix} g_1(x) & \dots & g_m(x) \end{bmatrix} \\ H(x) &= col\begin{pmatrix} h_1(x) & \dots & h_m(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Asúmase que $f(x)$ y las m columnas de $G(x)$ son campos vectoriales suaves y las componentes de $H(x)$ son funciones suaves y que (2.1) tiene un punto de equilibrio en el origen, es decir, $f(0) = 0$, y que $H(0) = 0$. El conjunto de entradas admisibles es el de funciones de cuadrado integrable localmente L_{2e} [1]. Se asume que las salidas están también en L_{2e}.

[1] [Khalil, 1996] El espacio lineal normado de funciones $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ de cuadrado integrable, L_2,

Denótese como $x(t, x_0, u(t))$ la solución de (2.1) que pasa por x_0 en $t = 0$ y correspondiente a la entrada $u(t)$, y como $y(t, x_0, u(t)) = H(x(t, x_0, u(t)))$ su salida correspondiente. Si no existe peligro de confusión, estas funciones se denotarán simplemente por $x(t)$ y $y(t)$.

Antes de proseguir con los demás antecedentes, y con el fin de que la notación resulte lo más sencilla posible, es útil realizar las siguientes definiciones

Definición 1 *Sean $h : D \to \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$. La derivada de Lie de h con respecto a f (o a lo largo de f), escrita como $L_f h$ está definida como*

$$L_f h = \nabla^T h \cdot f$$

Esta es la noción usual de la derivada de h a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$. Esta notación se vuelve más útil cuando se repite el cálculo de la derivada con respecto al mismo campo vectorial o uno nuevo. La notación que se utiliza es

$$\begin{aligned}
L_g L_f h &= \nabla^T (L_f h) \cdot g \\
L_f^2 h &= L_f L_f h \\
L_f^k h &= L_f L_f^{k-1} h \\
L_f^0 h &= h
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tienen las siguientes definiciones de las funciones de clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$

Definición 2 *Se dice que una función continua $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{K}$ si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase de funciones $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ y si $\alpha(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$.*

Definición 3 *Se dice que una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{KL}$ si, para cada s fija, el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase $\mathcal{K}$ con respecto*

---

es aquél para el cual $\|u\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty u^T(t)\, u(t)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. El espacio extendido L_{2e} está definido como $L_{2e} = \{u \mid u_\tau \in L_2, \forall \tau \geq 0\}$, donde $u_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$.

a r y, si para cada r fija, el mapeo $\beta(r,s)$ *es decreciente con respecto a s y* $\beta(r,s) \to 0$ *cuando* $s \to \infty$.

Habiendo definido la derivada de Lie, se pueden hacer ahora las definiciones de los siguientes conceptos conocidos [Isidori, 1995, Marino & Tomei, 1995] :

Definición 4 *(Grado relativo) El sistema (2.1) tiene un vector de grados relativos* $\rho = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ *en el punto* x_0 *si*

(i) $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $\forall\ 0 \leq k < r_i - 1$, *y para todo* $x \in U_0$, *donde* U_0 *es una vecindad de* x_0*;*

(ii) La matriz de desacoplamiento (de dimensión $m \times m$*)*

$$D(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \ldots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \ldots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \ldots & & \ldots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \ldots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

es no singular $\forall x \in U_0$. *Si* $U_0 = \mathbb{R}^n$, *entonces* ρ *es el grado relativo global.*

Nótese que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \leq n$.

Definición 5 *[Isidori, 1995] Se dice que un campo vectorial* $f(x)$ *es* **completo** *si las soluciones de la ecuación diferencial* $\dot{x} = f(x)$ *pueden ser definidas para todo* $t \in \mathbb{R}$.

A continuación se presentan las suposiciones que se realizan acerca del sistema (2.1):

Hipótesis 1 *El sistema (2.1) tiene grado relativo global* $\rho = \{1, 1, \ldots, 1\}$, *es decir, la matriz*

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1(x) & \ldots & L_{g_m} h_1(x) \\ L_{g_1} h_2(x) & \ldots & L_{g_m} h_2(x) \\ \ldots & & \ldots \\ L_{g_1} h_m(x) & \ldots & L_{g_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

es invertible $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Hipótesis 2 *Los campos vectoriales*

$$\tilde{f} = f - D^{-1}\begin{bmatrix} L_f h_1 \\ \dots \\ L_f h_m \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{g}_i = D^{-1} g_i, \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.2}$$

son completos.

De [Marino & Tomei, 1995] se tiene lo siguiente

Lema 1 *Asúmase que para el sistema (2.1) se satisfacen las hipótesis 1 y 2. Entonces existe un difeomorfismo global* $(y, z) = \Phi(x)$ *que transforma al sistema (2.1) a la forma normal:*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(z, y) \\ \dot{y} &= a(z, y) + b(z, y)\, u \end{aligned} \tag{2.3}$$

en donde $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ *y* $b(z, y)$ *es invertible para todo* $y \in \mathbb{R}^m$ *y todo* $z \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Si el sistema (2.1) se puede llevar a la forma normal (2.3) entonces el sistema

$$\dot{z} = q(z, 0), \quad z(0) = z_0, \tag{2.4}$$

corresponde a la dinámica cero del sistema (2.1).

Finalmente se presenta el teorema converso de Lyapunov para puntos de equilibrio asintóticamente estables, el cual, es utilizado posteriormente para algunas demostraciones.

Teorema 1 *[Khalil, 1996] Sea* $x = 0$ *un punto de equilibrio del sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde $f : [0, \infty) \times D^* \to \mathbb{R}^n$ *es continuamente diferenciable,* $D^* = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| < r\}$, *y la matriz Jacobiana* $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ *es acotada sobre* D^*, *uniformemente en* t. *Sean* $\beta(\cdot, \cdot)$ *una función de* *clase $\mathcal{KL}$ y r_0 una constante positiva tal que $\beta(r_0, 0) < r$. Sea también $D_0^* = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < r_0\}$. Suponga que las trayectorias del sistema satisfacen*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \ \forall x(t_0) \in D_0^*, \ \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Entonces existe una función $V : [0, \infty) \times D_0^* \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable que satisface las desigualdades

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \leq \alpha_4(\|x\|)$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, $\alpha_3(\cdot)$ y $\alpha_4(\cdot)$ son funciones de clase $\mathcal{K}$ definidas sobre $[0, r_0]$. Si el sistema es autónomo, V puede ser elegida independiente de t.

2.1 Observadores

En esta sección se trata uno de los conceptos de interés a considerar en el presente trabajo, los observadores de estados. En primer lugar, se introducen las nociones de observadores convencionales mediante las diferentes definiciones de observabilidad, tanto para el caso de sistemas no lineales como para los lineales. Posteriormente se introduce el concepto de observadores con entradas desconocidas (OED).

2.1.1 Observadores convencionales

En diversas ocasiones, para poder implantar los esquemas de control convencionales, se busca suplir apropiadamente las variables de estado que no pueden ser medidas directamente, considerando que la entrada y la salida del sistema son señales a las que sí se tiene acceso directo. El instrumento que proporciona una aproximación del vector de estado, con base en la información de la entrada y de la salida, es llamado *observador o estimador de estados*.

Los observadores pueden ser clasificados de acuerdo a la dimensión del vector de estados estimado: de orden completo si el estimado es de la misma dimensión que el vector de estado del sistema, es decir que este último es desconocido o requerido en su totalidad; y de orden reducido si la dimensión del estimado es menor, es decir, la información de algunos de los estados sí está disponible.

Antes de proponer un diseño para un observador de estados, ya sea para sistemas lineales o no lineales, es necesario verificar si el sistema de interés es observable. La propiedad de observabilidad para sistemas lineales está bien definida y es única. Sin embargo, en los sistemas no lineales existen diversas definiciones de esta propiedad. Cabe mencionar, además, que en sistemas no lineales, a diferencia de los LIT, la observabilidad no siempre implica que pueda construirse un observador para el sistema de interés.

A continuación se presentan algunas definiciones de la observabilidad para el caso no lineal y, finalmente, para los sistemas LIT.

Considérese el sistema (2.1) reescrito de la siguiente manera

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)\, u_j, \qquad j = 1, 2, ..., m \tag{2.5}$$

con una única salida $y \in \mathbb{R}$

$$y = h(x) \tag{2.6}$$

donde $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, $g_j : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ y $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$. $x(t, u, x_0)$ denota el estado para todo $t \geq 0$, correspondiente a la entrada u y con condición inicial $x(0) = x_0$ y la salida es $y(t, u, x_0) = h(x(t, u, x_0))$.

La noción de observabilidad parte de la definición de indistinguibilidad para dos estados.

Definición 6 *[Nijmeijer & van der Schaft, 1990] Dos estados $x_1, x_2 \in \bar{D}$ se dicen indistinguibles para el sistema (2.5-2.6) si para toda función de entrada admisible u, las funciones de salida $y(t, u, x_1)$ e $y(t, u, x_2)$ son idénticas para todo $t \geq 0$ en su dominio de definición.*

Definición 7 *El sistema se dice observable si la indistinguibilidad de cualquier pareja x_1, $x_2 \in \bar{D}$ implica $x_1 = x_2$.*

La definición anterior implica que un sistema es observable si existe al menos una función de entrada u para cada pareja de estados iniciales en el dominio D que permita distinguirlos mediante la observación de la salida correspondiente. La propiedad de observabilidad es genérica en el sentido de que casi todo sistema dinámico es observable [Aeyels, 1981].

Definición 8 *[Gauthier & Bornard, 1981] A las funciones de entrada $u \in C^\infty$ que cumplen con que*

$$\exists t \geq 0 \quad tal\ que \quad y(t, u, x_1) \neq y(t, u, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{D}, \quad siendo \quad x_1 \neq x_2$$

se les llama entradas universales.

Al tener definido ya el concepto de entrada universal, se puede realizar la siguiente definición.

Definición 9 *[Gauthier & Bornard, 1981] El sistema (2.5-2.6) se dice completamente observable si cualquier función de entrada $u \in C^\infty$ admisible es una entrada universal.*

Las entradas universales permiten distinguir cualquier pareja de condiciones iniciales del estado mediante las salidas correspondientes. Cuando existe alguna función u que no permita distinguir dos estados iniciales diferentes a través de la salida, el sistema no es completamente observable. A este tipo de entradas se les conoce como *entradas malas*.

De esta manera se han presentado dos de las definiciones de observabilidad para los sistemas no lineales. Existen algunas otras definiciones, pero para el presente trabajo no es necesario revisarlas. Ahora se presentará en el siguiente teorema las diferentes formas equivalentes de evaluar si un sistema LIT es observable o no.

Teorema 2 *[Chen, 1984] El sistema lineal invariante en el tiempo*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$, es observable si y solo si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se satisface

1. *Todas las columnas de Ce^{At} son linealmente independientes en $[0, \infty)$ sobre $\mathbb{C}$, el campo de los números complejos.*

1'. *Todas las columnas de $C(sI - A)^{-1}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.*

2. *El* gramiano de observabilidad

$$W_{ot} \triangleq \int_0^t e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau$$

es no singular para cualquier $t > 0$. Donde A^* denota la matriz transpuesta conjugada de la matriz A.

3. *La matriz de observabilidad (de dimensión $np \times n$)*

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

tiene rango n.

4. *Para cada valor propio λ de A (y consecuentemente para cada λ en $\mathbb{C}$), la matriz compleja (de dimensión $(n-q) \times n$*

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

tiene rango n.

2.1.2 Observadores con Entradas Desconocidas

Se ha mencionado que la teoría usual de observadores trata el problema de diseñar un estimador del estado del sistema (2.1) utilizando la información de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ del sistema. Cuando no es posible conocer en línea la señal de entrada $u(t)$, ya sea porque no es medible o está contaminada con ruido o porque se trata de perturbaciones inaccesibles del sistema, el concepto adecuado es el de un observador con entradas desconocidas (OED).

En la actualidad existen varios estudios de este tipo de observadores, pero casi todos orientados al caso lineal, para el que, incluso, existen algunas metodologías de diseño propuestas en [Chu, 2000], [Hou & Müller, 1992] y [Hou & Müller, 1994], por ejemplo.

En el presente trabajo se utiliza el concepto de OED para sistemas no lineales, el cual se define a continuación.

Definición 10 *[Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000] Sea un sistema dinámico de dimensión finita con la variable y como entrada y con salida $\hat{x}$*

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \varphi(\omega, y) \ , \quad \omega(0) = \omega_0 \\ \hat{x} &= \chi(\omega, y) \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\omega \in D_\omega \subset \mathbb{R}^m$ es el vector de estados, φ y χ son funciones suficientemente suaves definidas en $(\omega, y) \in D_\omega \times \Xi$ donde D_ω es un dominio de $\mathbb{R}^m$. Denótese por $\omega(t, \omega_0, y)$ la solución de (2.7) correspondiente a la función y que pasa por ω_0 en $t = 0$. El sistema (2.7) se denomina un observador con entradas desconocidas (OED) del sistema (2.1) en un subconjunto $W \subset D_x \subset \mathbb{R}^n$ si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones:

O1 Los sistemas (2.1) y (2.7) tienen soluciones únicas y definidas para todo tiempo positivo, para cada condición inicial $x(0) = x_0 \in D_x$, $\omega(0) = \omega_0 \in D_\omega$, y para cada $u(\cdot)$ del conjunto L_{2e}, tales que las trayectorias permanezcan en las regiones de definición:

O2 *Existe un* ω_0, *tal que si* $x_0 = \hat{x}_0 \triangleq \chi(\omega_0, H(x_0))$ *entonces*

$$x(t, x_0, u) = \hat{x}(t, \omega_0, y) \triangleq \chi\left(\omega(t, \omega_0, y), y\right)$$

para todo $t \geq 0$, *y entrada* u, *donde* $y \triangleq H\left(x(t, x_0, u)\right)$;

O3 *Existe un subconjunto* $V \subset D_\omega$ *tal que* $x_0 \in W$ *y* $\omega_0 \in V$ *implica que* $x(t, x_0, u) \in W$ *y* $\hat{x}(t, \omega_0, y) \in V$ *para todo* $t \geq 0$, $u \in L_{2e}$, *y*

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \hat{x}(t, \omega_0, y) - x(t, x_0, u) \right\| = 0 \ . \tag{2.8}$$

Se hace notar que esta convergencia puede escribirse también de la siguiente manera

$$\left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\| \leq \sigma\left(\left\| x(0) - \hat{x}(0) \right\|, t\right) \tag{2.9}$$

donde $\sigma(\cdot)$ *es una función de clase* $\mathcal{KL}$.

O4 *No se permite información de las derivadas de* $y(t)$, *ni información acerca de* $u(t)$ *en el OED.*

Se dice que el sistema (2.1) posee un observador global si existe un observador para $D_x = \mathbb{R}^n$, *un observador semiglobal si existe un observador para cada subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$, *y un observador local en* x^0 *si existe un observador en una vecindad de* x^0. *Adicionalmente se pueden distinguir tres clases de observadores, de acuerdo a la dimensión del estado del observador* ω: *de orden reducido y de orden completo.*

En la definición anterior se asume que todos los elementos del vector de entradas son desconocidos, sin embargo existe la posibilidad de extender la definición para el caso en que una parte de las entradas sea conocida [Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000].

Las condiciones formales bajo las cuales se puede asegurar la existencia de tales observadores son de especial interés. En [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000] y [Moreno(2), 2000] se establecen estas condiciones para el caso SISO y en [Moreno(1), 2000] el caso de sistemas MIMO no cuadrados. En el siguiente lema se establecen estas condiciones

Lema 2 *Supóngase que el sistema (2.1) satisface las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos). Supóngase, además, que las trayectorias del sistema (2.1) permanecen en un conjunto compacto. Entonces existe (al menos) un observador con entradas desconocidas (OED) para (2.1) si y sólo si la variedad invariante $\varepsilon = 0$ del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(z, y), \qquad z(0) = z_0 \qquad z \in \mathbb{R}^{n-m} \\ \dot{\varepsilon} &= q(\varepsilon + z(t), y(t)) - q(z(t), y(t)), \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}^{n-m}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $q(z, y)$ está definido en la forma normal (2.3), es asintóticamente estable para todo $y(t)$, todo ε_0 y todo z_0, uniformemente en $y(t)$, ε_0 y z_0.

Prueba. Suficiencia. Ya que las hipótesis 1 y 2 se satisfacen, la forma normal (2.3) está globalmente definida, con un difeomorfismo $(y, z) = \Phi(x)$ por el lema 1. Considere el sistema dinámico siguiente como candidato a observador

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= q(\xi, y), \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{x} &= \Phi^{-1}(y, \xi) \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $\xi \in R^{n-m}$. Se va a demostrar que si se satisface la condición (2.10) el sistema (2.11) constituye realmente un OED para el sistema (2.1). Defínase al error de estimación entre la forma normal del sistema (2.3) y el OED (2.11) $\varepsilon \triangleq \xi - z$. La dinámica de este error está dada entonces por el sistema (2.10). De las hipótesis acerca de este sistema se concluye que $\forall t \geq 0$

$$\|\xi(t) - z(t)\| \leq \sigma(\|\xi_0 - z_0\|, t) \tag{2.12}$$

donde $\sigma(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{KL}$, para toda $y(t)$ y para toda solución $z(t)$ correspondiente a la forma normal del sistema. El error de estimación del estado es entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| &= \|\Phi^{-1}(y, \xi) - \Phi^{-1}(y, z)\| \\ &\leq \bar{\sigma}(\|\xi_0 - z_0\|, t) \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$, donde $\bar{\sigma}(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{KL}$, que demuestra lo que se quería.

Necesidad. Supóngase ahora que las condiciones sobre el sistema (2.10) no se satisfacen. Es decir, que existen una función $y(t)$, y dos condiciones iniciales $z_0^1 \neq z_0^2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ tales que para las soluciones correspondientes $z_1(t) = z(t, z_0^1, y(t))$ y $z_2(t) = z(t, z_0^2, y(t))$ de la primera ecuación de (2.10) la diferencia $\varepsilon \triangleq z_1 - z_2$, cuya dinámica está dada por la segunda ecuación de (2.10), es tal que no existe ninguna función de clase $\mathcal{KL}$ $\sigma(\cdot)$ para la cúal se satisfaga la desigualdad siguiente, es decir,

$$no\exists\sigma(\cdot) \in \mathcal{KL}\ talque \qquad \|\varepsilon(t)\| = \|z_1(t) - z_2(t)\| \leq \sigma\left(\|z_0^1 - z_0^2\|, t\right). \tag{2.13}$$

Nótese que dadas $y(t)$, z_0^1, z_0^2 las funciones de entrada

$$u_i(t) = b^{-1}(z_i(t), y(t))\left[\dot{y}(t) - a(z_i(t), y(t))\right], \quad i = 1, 2$$

generan tales trayectorias en la forma normal del sistema, que corresponden a dos trayectorias del sistema original, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \Phi^{-1}(y(t), z_i(t)) \\ &= x\left(t, \Phi^{-1}\left(y(0), z_0^i\right), u_i(t)\right) \\ i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Supóngase ahora que existe un OED (2.7) para el sistema. Aplíquese al sistema la entrada $u_i(t)$ e iníciese el sistema en la condición inicial $x_0^i = \Phi^{-1}(y(0), z_0^i)$. El sistema producirá entonces como salida a $y(t)$, independientemente del valor de $i = 1, 2$. Aplíquese esta señal $y(t)$ al OED e iníciese en alguna condición inicial ω_0 (igual para $i = 1$ e $i = 2$) correspondiente a $\hat{x}_0 = \chi(\omega_0, y(0))$. El OED producirá como salida la misma señal $\hat{x}(t)$, con $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$, para ambos valores de i. Supóngase que se elige ω_0 tal que se satisface la condición O2 de la definición 10 para x_0^1. Se concluye entonces que $\hat{x}(t) = x_1(t)$ para todo $t \geq 0$. Ahora asúmase que la planta se inició en la otra condición inicial x_0^2. Si el OED satisface la convergencia (2.9) esto implica que

$$\|z_2(t) - z_1(t)\| \leq \tilde{\sigma}\left(\|x^2(0) - \hat{x}(0)\|, t\right),$$

$\forall t \geq 0$ y donde $\tilde{\sigma}(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{KL}$, es decir, convergen uniforme y asintóticamente, lo que contradice a (2.13) y por lo tanto a la suposición de que (2.10) no se satisface. ■

El resultado importante que proporciona este lema es entonces la condición (2.10) que asegura la existencia de un OED para el sistema no lineal (2.1).

Después de presentar las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de un OED, se puede establecer una forma alterna y más simple de ver este tipo de observadores. Supóngase que se quiere construir un OED a partir de un observador convencional y que todas las entradas son desconocidas. Al no considerar la información de las entradas, surge la necesidad entonces de suplir esa ausencia. Una forma de hacerlo puede ser por medio de las salidas, es decir, si el sistema es tal que es posible "reconstruir" la información de cada una de las entradas a partir de las salidas, entonces sí puede construirse un observador así.

Así, se vislumbran intuitivamente dos de las características necesarias que debe poseer un sistema para asegurar la existencia de un OED para él:

1. La reconstrucción de la información de las entradas con base en las salidas introduce intuitivamente el término de inversa, por tanto, ésta debe ser estable para que el observador lo sea también. Como se definirá más tarde, el sistema entonces debe ser de fase mínima.

2. Como el objetivo es reconstruir de alguna manera la información de las entradas con las salidas es evidente que entre mayor sea la cantidad de salidas disponibles con respecto a las entradas, esa reconstrucción podrá realizarse de mejor manera. El sistema entonces deberá tener un número mayor o igual de salidas que de entradas desconocidas.

Aunque como se ve, para construir un OED es conveniente contar con un número de salidas igual o mayor que el de las entradas desconocidas, en este trabajo se tomará el caso límite, dado que, para relacionar este concepto con el de pasividad, es preferible trabajar con sistemas cuadrados, es decir, con igual número de entradas que de salidas.

Por ejemplo, si al igual que en el teorema anterior, se considera que el sistema tiene grado relativo igual a uno, en el caso particular de los sistemas lineales, se sabe que

$$q(z, y) = Qz + Ry$$

es decir, la dinámica cero es también de estructura lineal

$$\dot{z} = q(z, 0) = Qz$$

Evaluando la condición (2.10), en este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= q\left(\varepsilon + z\left(t\right), y\left(t\right)\right) - q\left(z\left(t\right), y\left(t\right)\right) \\ &= \left[Q\left(\varepsilon + z\right) + Ry\right] - \left[Qz + Ry\right] \\ &= Q\varepsilon\end{aligned}$$

Como resulta claro, esta condición se satisface para toda y si y sólo si la matriz Q es Hurwitz. En este trabajo se considera que, para sistemas lineales el sistema es de fase mínima si la dinámica cero es estable, es decir si la matriz Q es Hurwitz. Esta consideración se formula para el caso más general en el capítulo siguiente.

Con base en el desarrollo anterior se concluye que, así como se presenta en [Moreno, 2001], existe un OED para un sistema LIT si y sólo si éste tiene grado relativo igual a uno y es de fase mínima.

2.2 Pasividad y pasivización

En esta sección se establecen los conceptos de pasividad y, principalmente, de pasivización. En particular, se considerará la pasivización realizada por dos diferentes vías: por retroalimentación de estados y por inyección de salida. Estas definiciones, junto con las que se realizaron en la sección anterior referentes a los OED, proporcionan las bases del resultado principal del trabajo, el cual se presenta en el capítulo siguiente.

La pasividad es un concepto entrada-salida que comenzó como un concepto energético orientado a interconexiones de sistemas con funciones de transferencia racionales, que se podían realizar con resistencias, inductancias y capacitancias pasivas. Estas funciones de transferencia tienen la característica de tener un *grado relativo* (exceso de número de polos sobre el número de ceros) no mayor a uno y ser *positivas reales*, es decir, las partes reales de las funciones de transferencia son positivas para toda frecuencia, con lo que su ángulo de fase es siempre menor a 90°. En los años 60's el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) relacionó este concepto de pasividad con el análisis de estabilidad de Lyapunov. Este resultado marcó el ingreso de la pasividad como herramienta de estabilización de sistemas lineales.

El concepto de pasividad pudo ser extendido al caso no lineal mediante la definición de una función de almacenamiento de energía. Es decir, este concepto introdujo un punto de vista energético al análisis de sistemas por medio de un balance de energía. La energía suministrada al sistema puede calcularse mediante el producto interior entre los vectores de entrada y salida, $u^T y$; si esta energía suministrada es mayor o igual que la velocidad de almacenamiento de energía en el mismo sistema, entonces el sistema se dice *disipativo*; si se añaden ciertas condiciones a la función que determina el almacenamiento de energía el sistema es llamado entonces *pasivo*. Dado que la aplicación más utilizada de la pasividad sigue siendo en el análisis de interconexiones entre sistemas, se considera que la aportación más importante de este concepto, y asimismo una de las leyes fundamentales de la retroalimentación, es la siguiente: un lazo de retroalimentación negativa que consta de dos sistemas pasivos es pasivo. Bajo una condición adicional (de detectabilidad) el lazo de retroalimentación es también estable en el sentido de Lyapunov. En el área del control automático es evidente el interés y la búsqueda de sistemas estables. Por tanto, la consecuencia de este resultado principal es un vasto conjunto de aplicaciones, como por ejemplo en el diseño de controladores y estimadores de estados.

Si bien las aplicaciones mencionadas generan un gran interés en los sistemas que son pasivos de origen, existe también gran atención hacia un conjunto más grande de sistemas, los cuales, sin ser pasivos de origen, pueden convertirse en pasivos por diversos medios, como pueden ser una retroalimentación de estados o de salidas o una inyección de las salidas. Con esto se obtiene el concepto de pasivización: si un sistema no pasivo se convierte en uno pasivo por alguno de los medios antes mencionados, se dice que el sistema ha sido sujeto de una pasivización.

Todos estos conceptos que se han mencionado ahora se expresarán formalmente. Para comenzar, la pasividad tiene la siguiente definición en general.

Definición 11 *[Byrnes et al., 1991] Se dice que el sistema (2.1) es* C^r-pasivo *(respectiva-*

mente C^r- estrictamente pasivo, $r \geq 0$, *si existe una función C^r no negativa $V(x)$, con $V(0) = 0$, una función semipositiva definida (respectivamente positiva definida) $S^*(x)$ tal que para toda $u \in \mathcal{L}_{2e}$, todo $t \geq 0$ y toda solución de (2.1) se satisface que*

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t y^T(\tau)\, u(\tau)\, d\tau - \int_0^t S^*(x(\tau))\, d\tau \ . \tag{2.14}$$

De aquí se puede concluir que, si además $V(x)$ es propia, $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) \to \infty$, un sistema (estrictamente) pasivo, para una entrada $u(t) \equiv 0$, tiene a $x = 0$ como punto de equilibrio globalmente estable (respectivamente global y asintóticamente estable).

Con ayuda el lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) se puede concluir si un sistema lineal es o no (estrictamente) pasivo.

Lema 3 *[Chen, 1984] Sea el sistema lineal invariante en el tiempo*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^m$; y sea su matriz de transferencia $Z(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ de dimensión $m \times m$. Asuma que A es Hurwitz, (A, B) es controlable y (A, C) es observable. Entonces $Z(s)$ es estrictamente positiva real (el sistema (2.15) es estrictamente pasivo) si y sólo si existe una matriz simétrica y positiva definida P, matrices W y L, y una constante positiva ϵ, tales que

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= C^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned} \tag{2.16}$$

Cabe mencionar que si $D = 0$ y si se define a

$$V_{LIT}(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

entonces, con ayuda de la primera ecuación de (2.16), se puede llegar a la siguiente expresión

$$\dot{V}_{LIT}(x) = x^T \left(PA + A^T P\right) x \leq -\epsilon x^T P x \leq -c_1 \|x\|^2$$

es decir,

$$\dot{V}_{LIT}(x) \leq -c_1 \|x\|^2 \tag{2.17}$$

donde c_1 es una constante positiva. Auxiliándonos de la segunda, se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial V_{LIT}(x)}{\partial x} B = x^T P B = (Cx)^T = y^T$$

o sea,

$$\frac{\partial V_{LIT}(x)}{\partial x} B = y^T \tag{2.18}$$

Utilizando estas dos formas alternas de escribir el Lema KYP para sistemas lineales, (2.17) y (2.18), es posible obtener una generalización del mismo. Así, en forma similar, se tiene la siguiente versión no lineal del Lema KYP.

Lema 4 *[Byrnes et al., 1991] El sistema (2.1) es* C^r-(estrictamente) pasivo, $r \geq 1$, *si y sólo si existe una función* C^r *no negativa* $V(x)$, *con* $V(0) = 0$, *y una función semipositiva definida (respectivamente, una función de clase* $\mathcal{K}$*)* $\alpha_1(\cdot)$, *tal que para toda* $u \in \mathcal{L}_{2e}$, *todo* $t \geq 0$ *y toda solución de (2.1) se satisfagan las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} L_f V(x) &\leq -\alpha_1(\|x\|) & (2.19) \\ L_g V(x) &= H^T(x) & (2.20) \end{aligned}$$

Como se mencionó antes, una clase más amplia de sistemas es aquella para la cual un sistema de la clase que no sea pasivo pueda hacerse pasivo por algún medio, es decir, que sean pasivizables. En este trabajo son de particular interés los sistemas pasivizables por dos diferentes vías: por medio de una retroalimentación de estados y por medio de una inyección de salidas. A continuación se realizan las definiciones formales de cada una de estas clases de sistemas.

Definición 12 *[Byrnes et al., 1991] Se dice que el sistema (2.1) es* C^r-pasivizable (estrictamente) por retroalimentación de estados *(*C^r-PRE*) si existe una ley de control por retroalimentación de estados* C^r *suave*

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v \tag{2.21}$$

donde $\beta(x)$ es invertible, tal que el sistema en lazo cerrado (2.1),(2.21) sea C^r-(estrictamente) pasivo; tomando y como la salida y v como la entrada.

La otra clase de sistemas a tratar es la de los sistemas pasivizables por medio de una inyección de la salida. En este caso, en la definición se permite un cambio de salidas similar al cambio de entradas realizado en la definición anterior. Además, se considerará una versión global.

Definición 13 *Se dice que el sistema (2.1) es* C^r-globalmente pasivizable (estrictamente) por inyección de la salida *si existe una función suave $S(\cdot)$, para la cual $S(0) = 0$, y una $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave y regular $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tal que el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + S(y) \ , \\ y &= H(x) \\ \tilde{y} &= T(x)\, y \end{aligned} \tag{2.22}$$

sea C^r-(estrictamente) pasivo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$; tomando u como la entrada y $\tilde{y}$ como la salida.

2.3 Fase mínima

El concepto de fase mínima se definió inicialmente para los sistemas lineales utilizando un análisis en frecuencia. Aunque tal análisis no es posible para el caso no lineal, la definición de fase mínima fue extendida [Byrnes et al., 1991]: un sistema no lineal es de fase mínima cuando la dinámica cero del mismo tiene un punto de equilibrio estable. Bajo esta definición, se puede considerar en particular el caso de los sistemas lineales. Como en estos sistemas la dinámica cero evoluciona de acuerdo a la ubicación de los ceros del sistema, se dice que si todos los ceros del sistema están localizados en el semiplano complejo izquierdo, entonces la dinámica cero es estable y por tanto se considera que el sistema es de fase mínima. Estrictamente hablando, la definición anterior de un sistema lineal de fase mínima difiere de la que se utiliza usualmente dentro de la teoría clásica de control, pues esa definición clásica requiere también la estabilidad del sistema; sin embargo, la definición basada únicamente en la ubicación de los ceros del sistema, por provenir de una definición estándar más general, es la que se utiliza en este trabajo.

Como en el caso no lineal no es posible determinar ceros del sistema de la misma manera, para definir las propiedades de la dinámica cero del sistema (2.1) se considerará que puede ser transformado globalmente a la forma normal (2.3). Con base en esta forma se define entonces un sistema de fase mínima.

Definición 14 *[Byrnes et al., 1991] El sistema (2.3) es de* fase mínima global *si $z = 0$ es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable de la dinámica cero. Es de* fase mínima global débilmente *si existe una función C^2-suave $V_0(z)$, definida para todo z con $V_0(0) = 0$, positiva definida y propia, tal que*

$$\frac{\partial V_o(z)}{\partial z} q(z, 0) \leq 0 \tag{2.23}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, es decir, $z = 0$ es un punto de equilibrio globalmente estable de la dinámica cero.

Los sistemas pasivos tienen, por definición, dinámica cero estable y, como ésta es invariante ante la retroalimentación de los estados y ante la inyección de la salida, un requisito para los sistemas pasivizables es que tengan también dinámica cero estable. Resumiendo, para los sistemas pasivos o pasivizables la dinámica cero no puede ser inestable, es decir, el sistema tiene que ser de fase mínima de acuerdo a la definición 14. En particular, para el caso de los sistemas pasivizables estrictamente por retroalimentación de estados (PRE) se tiene el siguiente resultado.

Lema 5 *[Byrnes et al., 1991] Supóngase que el sistema (2.1) satisface las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos). Entonces el sistema es C^r-PRE estrictamente, $r \geq 1$, si y sólo si es de fase mínima.*

Prueba. La demostración seguirá en parte a la demostración del Teorema 4.7 de [Byrnes et al., 1991]. Si al sistema (2.3) se le implanta la ley de control

$$u = b^{-1}(z,y)\left[-a(z,y) + v\right]$$

se tiene que

$$\dot{z} = q(z,y)$$
$$\dot{y} = v$$

La dinámica cero de este sistema está caracterizada por la ecuación

$$\dot{z} = q(z,0)$$

Denótese como $f^*(z)$ a $q(z,0)$ y exprésese a $q(z,y)$ de la siguiente forma

$$q(z,y) = f^*(z) + p(z,y)\,y$$

donde $p(z,y)$ es una función suave. Así entonces el sistema puede ser expresado como

$$\dot{z} = f^*(z) + p(z,y)\,y$$
$$\dot{y} = v$$

Por otro lado, si (2.3) es de fase mínima global, existe una función $V_0(z)$ y una función clase $\mathcal{K}$ $\alpha_1(\cdot)$ de tal manera que, para todo $z \in \mathbb{R}^{n-m}$,

$$L_{f^*}V_o(z) \leq -\alpha_1(\|z\|) \ .$$

Utilizando ahora la ley de control

$$v = -\left[L_{p(z,y)}V_o(z)\right]^T - y + w$$

y si se define $\zeta = [z, y]^T$, el sistema queda de la siguiente forma

$$\dot{\zeta} = \bar{f}(z,y) + \bar{g}(z,y)\,w$$

donde

$$\bar{f}(z,y) = \begin{bmatrix} f^*(z) + p(z,y)\,y \\ -\left[L_{p(z,y)}V_o(z)\right]^T - y \end{bmatrix}, \ \bar{g}(z,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérese la función candidata a función de Almacenamiento

$$V(z,y) = V_o(z) + \frac{1}{2}y^T y$$

Con esto se tiene que

$$L_{\bar{f}}V(z,y) + L_{\bar{g}}V(z,y)\,w = \dot{V} = \frac{\partial V(z,y)}{\partial \zeta}\dot{\zeta} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_0(z)}{\partial z} & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^*(z) + p(z,y)\,y \\ -\left[L_{p(z,y)}V_o(z)\right]^T - y - w \end{bmatrix}$$

$$= L_{f^*}V_o(z) - y^T y + y^T w$$

Por lo tanto

$$L_{\bar{f}}V(z,y) = L_{f^*}V_o(z) - \|y\|^2 \le -\alpha_1(\|z\| - \ldots$$
$$L_{\bar{g}}V(z,y) - y^T$$

La prueba se completa inmediatamente del lema 4. ∎

Comentario 1 *Por el lema 17 de la sección 2.5 de [Vidyasagar, 1993], se considera que si $q(z,y)$ es suave, lo cual se cumple bajo las suposiciones de este trabajo, entonces se puede expresar de la forma $q(z,y) = f^*(z) + p(z,y)\,y$, donde $p(z,y)$ es suave también.*

El lema 5 proporciona entonces una relación que será de utilidad en el capítulo siguiente, pues, bajo las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos), existe una equivalencia entre los conceptos PRE y fase mínima.

Por otro lado, también hay que hacer notar que la dinámica cero es invariante ante la inyección de salida, es decir, los sistemas (2.3) y (2.22) tienen la misma dinámica cero. Si el sistema (2.22) es (estrictamente) pasivo con una función de almacenamiento positiva definida entonces su dinámica cero es de fase mínima débil (respectivamente, de fase mínima).

Capítulo 3

Relaciones entre la existencia de OED y la pasividad

En este capítulo se utilizan los elementos definidos y caracterizados anteriormente con el fin de encontrar las relaciones que existen entre los tres conceptos: existencia de observadores con entradas desconocidas (OED), Pasivización por Retroalimentación de Estados (PRE) y Pasivización por Inyección de la Salida (PIS). En la primera parte se consideran los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT). Para este caso, como se obtuvo por primera vez en [Moreno, 2001], los tres conceptos son equivalentes. Este es un resultado interesante y sorprendente, que relaciona conceptos inicialmente desconectados. Esto motiva el análisis de las relaciones entre estos conceptos en el contexto más general de los sistemas no lineales, el cual se realiza en la segunda parte.

3.1 Sistemas Lineales

En muchas ocasiones los conceptos válidos para sistemas lineales pueden ser extendidos, bajo ciertas restricciones, al caso no lineal, como por ejemplo el grado relativo, la dinámica cero, etc. Al tener siempre como referencia el caso lineal, los conceptos pueden ser entonces comprendidos de mejor manera. Por esta razón, además de que siempre es mejor tomar un caso simple antes de abordar un caso más general, en esta sección se presenta la relación entre la pasivización por retroalimentación de estados, la pasivización por inyección de la salida y la existencia de OED para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Considerando en el sistema general (2.1) $f(x) = Ax$, $G(x) = B$ y $H(x) = Cx$, donde A, B y C son matrices de dimensiones apropiadas y de elementos constantes, se tiene un sistema LIT multivariable "cuadrado"

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1.1 Pasivización por retroalimentación de estados y existencia de observadores con entradas desconocidas

Para comenzar, se mostrará la relación entre las condiciones que aseguran la existencia de un OED y aquellas que aseguran la posibilidad de pasivizar un sistema por retroalimentación de estados. Se ha elegido ésta como primera relación a determinar dentro del trabajo debido a que existen algunos antecedentes que se pueden utilizar como apoyo, por ejemplo [Hautus, 1983, Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000, Moreno & Rocha-Cózatl, 2000].

Se sabe que para un sistema lineal del tipo (3.1) existe una gran cantidad de resultados con respecto a su análisis desde el punto de vista de pasividad. En especial, es bien conocido el siguiente resultado

Lema 6 *[Byrnes et al., 1991, Sepulchre et al., 1997] El sistema lineal (3.1) es C^r-PRE estrictamente, $r \geq 0$, si y sólo si*

(i) el sistema tiene grado relativo $\rho = \{1, 1, ..., 1\}$ y

(ii) el sistema es de fase mínima.

Estas condiciones son dos de las propiedades principales que poseen los sistemas pasivos y, dado que son invariantes con respecto a la retroalimentación de estados y a la inyección de la salida, son condiciones necesarias para la pasivización.

Por el otro lado, el estudio de los OED para sistemas lineales ha sido cada vez de mayor interés y en la actualidad se dispone de condiciones de existencia [Hautus, 1983, Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000], así como también algunas metodologías de diseño, por ejemplo, [Chu, 2000], [Hou & Müller, 1992], [Hou & Müller, 1994] y [Moreno(1), 2000].

De esta manera, en el siguiente lema se presentan las condiciones que aseguran la existencia de un observador con entradas desconocidas.

Lema 7 *[Hautus, 1983, Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000] El sistema (3.1) tiene (al menos) un observador con entradas desconocidas (OED) si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen*

$$\det(CB) \neq 0 \tag{3.2}$$

es decir que CB es invertible, y

$$rango \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+ . \tag{3.3}$$

donde $\mathbb{C}_0^+$ es el semiplano derecho cerrado del plano complejo.

Analizando una a una las condiciones de los dos lemas anteriores, se puede observar, en primer lugar, que la condición (3.2) es equivalente a decir que el sistema tiene grado relativo igual a $\rho = \{1, 1, ..., 1\}$; lo mismo que establece la primera condición del lema 6. Por otro lado, en la condición (3.3) se presenta una forma de definir los ceros del sistema: aquél valor de s para el cual se pierda el rango de la matriz indicada se denomina un cero de transmisión del sistema; como en esta condición se indica que el rango es invariante para toda s en el semiplano derecho cerrado del plano complejo, entonces (3.3) establece que el sistema es de fase mínima, es decir, existe una equivalencia entre esta condición y la segunda del lema 6. Por tanto, se puede observar que existe equivalencia completa entre las condiciones establecidas en los lemas 6 y

7. Esta observación se hizo ya en [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000] para sistemas SISO y en este trabajo se logra generalizar la relación a los sistemas multivariables.

Es así como se llega al resultado principal de esta sección.

Teorema 3 *[Moreno, 2001] El sistema lineal (3.1) tiene un observador con entradas desconocidas (OED) si y solo si es C^r-PRE estrictamente, $r \geq 0$.*

En este teorema se establece la equivalencia de los conceptos de pasivización estricta por retroalimentación de estados (PRE) y la existencia de un observador con entradas desconocidas (OED) para sistemas LIT multivariables cuadrados.

En la sección 2.1.2 se presentó el lema 2 que establece las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de un OED. Después de la prueba de este lema se tomó a los sistemas LIT como caso particular para determinar las condiciones correspondientes. Se obtuvo que: "existe un OED para un sistema LIT si y sólo si el sistema es de fase mínima". Este resultado junto con el lema 5, permiten llegar, por una vía alterna, a la misma conclusión que en el teorema 3.

3.1.2 Pasivización por retroalimentación de estados y pasivización por inyección de la salida

A continuación se establecerá la otra relación que se utilizará en esta sección: la equivalencia, para sistemas lineales, entre los sistemas que son pasivizables por retroalimentación de estados y los sistemas pasivizables por inyección de la salida. Un antecedente de la determinación de tal relación se tiene en [Moreno, 2001].

Teorema 4 *Sea un sistema lineal e invariante con el tiempo del tipo (3.1 (3.1) es C^r-pasivizable por inyección de la salida (C^r-PIS) si y sólo si es C^r-pasivizable por retroalimentación de estados (C^r-PRE).*

Prueba. Sea un sistema lineal del tipo (3.1).

Por un lado, si se aplica la definición 12, se tiene que (3.1) es pasivizable por retroalimentación de estados (PRE) estrictamente, con una ley de control $u = Kx + Fv$, donde $\det(F) \neq 0$, si el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)\,x + BFv \\ y &= Cx \end{aligned}$$

satisface el lema 3, es decir, si existe una matriz simétrica y positiva definida P_I, una matriz L_I y una constante positiva ϵ_I, tales que

$$\begin{aligned} P_I\,(A + BK) + (A + BK)^T\,P_I &= -L_I^T L_I - \epsilon_I P_I \\ P_I BF &= C^T \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por el otro lado, si se aplica ahora la definición 13, el sistema lineal (3.1) es pasivizable por inyección de salida (PIS) estrictamente si el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Sy = (A + SC)\,x + Bu \\ \tilde{y} &= Ty = TCx \end{aligned}$$

donde T es una matriz de $m \times m$ y $\det(T) \neq 0$, satisface el lema 3, es decir, existe una matriz simétrica y positiva definida P_{II}, una matriz L_{II} y una constante positiva ϵ_{II}, tales que

$$\begin{aligned} P_{II}\,(A + SC) + (A + SC)^T\,P_{II} &= -L_{II}^T L_{II} - \epsilon_{II} P_{II} \\ P_{II} B &= (TC)^T \end{aligned} \tag{3.5}$$

El objetivo es entonces mostrar que (3.4) y (3.5) son equivalentes, es decir, que la existencia de P_I, K, F, L_I y ϵ_I que satisfacen (3.4) es equivalente a la existencia de P_{II}, S, T, L_{II} y ϵ_{II} que satisfacen (3.5).

Suficiencia. Asuma primero que (3.4) se satisface, es decir, que el sistema es PRE. El sistema con la inyección de la salida será pasivo si (3.5) se satisface. Como las matrices P_I, K, F, L_I y el número ϵ_I existen por suposición, se puede elegir $\mathbb{P}_{II} = \mathbb{P}_I$, $\epsilon_{II} = \epsilon_I$, $L_{II} = L_I$;

además se fija $T = (F^{-1})^T$ y $S = P_I^{-1}K^T(F^{-1})^T$. Al sustituir esto en (3.5) se tiene que

$$
\begin{aligned}
P_I\left(A + P_I^{-1}K^T(F^{-1})^T C\right) + \left(A + P_I^{-1}K^T(F^{-1})^T C\right)^T P_I &= -L_I^T L_I - \epsilon_I P_I \\
P_I B &= C^T F^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Al desarrollar la primera ecuación de (3.6) se llega a que

$$
P_I A + K^T(F^{-1})^T C + A^T P_I + C^T F^{-1} K = -L_I^T L_I - \epsilon_I P_I
$$

La segunda ecuación de (3.6) resulta idéntica a la segunda de (3.4), por tanto se satisface por suposición. Sustituyendo entonces la segunda ecuación de (3.6) en la anterior se obtiene

$$
P_I(A - BK) + (A + BK)^T P_I = -L_I^T L_I - \epsilon_I P_I
$$

la cual también se satisface por suposición.

Necesidad. Para determinar esta relación conversa se realiza un procedimiento similar. Primero suponga que el sistema es PIS, es decir que (3.5) se satisface. El sistema con la retroalimentación de estados será pasivo si (3.4) se cumple. Dado que existen los términos correspondientes, se elige $\mathbb{P}_I = \mathbb{P}_{II}$, $\epsilon_I = \epsilon_{II}$, $L_I = L_{II}$; también se establece que $K = (T^T)^{-1} S^T P_{II}$ y $F = (T^T)^{-1}$. Realizando las sustituciones apropiadas en (3.4), se obtiene

$$
\begin{aligned}
P_{II}\left(A + B(T^T)^{-1}S^T P_{II}\right) + \left(A + B(T^T)^{-1}S^T P_{II}\right)^T P_{II} &= -L_{II}^T L_{II} - \epsilon_{II} P_{II} \\
P_{II} B &= C^T T^T
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Si se desarrolla la primera ecuación se tiene que

$$
P_{II}A + P_{II}B(T^T)^{-1}S^T P_{II} + A^T P_{II} + P_{II}ST^{-1}B^T P_{II} = -L_{II}^T L_{II} - \epsilon_{II} P_{II} \tag{3.8}
$$

Por suposición se satisface la segunda ecuación de (3.7), pues resulta idéntica a la segunda de (3.5). Por tanto puede ser sustituída en (3.8), obteniéndose así

$$
P_{II}A + (TC)^T(T^T)^{-1}S^T P_{II} + A^T P_{II} + P_{II}ST^{-1}TC = -L_{II}^T L_{II} - \epsilon_{II} P_{II}
$$

-Simplificando términos y reacomodándolos se llega a

$$P_{II}(A - SC) + (A - SC)^T P_{II} = -L_{II}^T L_{II} - \epsilon_{II} P_{II}$$

que se satisface por suposición. ■

Se ha establecido, por tanto, que existe equivalencia entre las dos formas de pasivización en el caso LIT multivariable.

3.1.3 Pasivización por inyección de la salida y existencia de observadores con entradas desconocidas

Los resultados de las dos secciones anteriores pueden ser utilizados para establecer una nueva relación potencialmente útil entre la pasivización por inyección de salida (PIS) y los observadores con entradas desconocidas (OED) en el caso lineal.

Por un lado, el resultado de la sección 3.1.1 indica que la existencia de un OED es equivalente al hecho de que ese mismo sistema sea pasivizable por retroalimentación de estados (PRE). Asimismo, como se muestra en la sección 3.1.2, las condiciones para realizar una pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y una por inyección de la salida (PIS) son equivalentes. La determinación de relaciones bidireccionales en ambos casos nos conduce, por tanto, a que para sistemas LIT existe una equivalencia entre la existencia de un OED y la pasivización por inyección de salida (PIS). Es decir, en este caso se logra cerrar el esquema triangular, inicialmente propuesto, formado por estos tres conceptos.

Al completarse dicho esquema con la relación PIS-OED encontrada, se cumple con el objetivo de relacionar estrechamente los conceptos involucrados. Es decir, las aplicaciones tentativas de esta relación cercana, comentadas al principio del trabajo, son realizables para el caso lineal. La más importante de estas aplicaciones, quizá, es el aprovechamiento de la relación PIS-OED con fines de diseño del observador, pues la estructura propia de una estabilización o, como en este caso, una pasivización por inyección de salida, resulta adecuada para el diseño de observadores en general. Por ejemplo, a continuación se da un breve ejemplo de esta aplicación al proponer un OED de orden reducido para un sistema lineal.

Sea el sistema LIT (3.1), expresado en su forma normal

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Q_{11}y + Q_{12}z + P_1 u \\ \dot{z} &= Q_{21}y - Q_{22}z \end{aligned},$$

un sistema pasivizable por inyección de la salida. Entonces, se tiene que: (a) el sistema es de grado relativo $\rho = \{1, 1, .., 1\}$, es decir $P_1 = CB$, donde CB es invertible; y de fase mínima, es decir, Q_{22} es Hurwitz; (b) existen S_1, S_2 y T tal que el siguiente sistema es estrictamente pasivo

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Q_{11}y + Q_{12}z - P_1 u + S_1 y \\ \dot{z} &= Q_{21}y + Q_{22}z + S_2 y \\ \tilde{y} &= Ty \end{aligned} \tag{3.9}$$

Una posible elección de la inyección de la salida es $S_2 = -Q_{21}$. En este caso, la segunda ecuación de (3.9) se puede expresar como

$$\dot{z} = Q_{22}z$$

Como y es la parte del estado que puede medirse (salidas del sistema), se puede tomar el subsistema anterior para proponer un observador con entradas desconocidas de orden reducido

$$\dot{\hat{z}} = Q_{22}\hat{z} \tag{3.10}$$

Definiendo el error de observación $e_z = z - \hat{z}$, se obtiene la ecuación

$$\dot{e}_z = Q_{22}e_z$$

que es estable dado que el sistema es de fase mínima.

Por tanto, (3.10) es un OED de orden reducido para (3.1). Cabe hacer notar que este observador es una copia de la dinámica cero del sistema.

Como puede verse, si uno analiza la pasivizabilidad por inyección de la salida del sistema original (3.1), entonces se estará también analizando la posibilidad de diseñar un observador.

En este caso lineal ya existe una gran variedad de metodologías de diseño para los OED, sin embargo como esta u otras metodologías que se pueden proponer con estas relaciones se fundamentarían en el concepto de pasividad, se tiene la posibilidad de extenderlas al caso no lineal. Para tal fin, esta misma relación "triangulada" es buscada también para los sistemas no lineales. La siguiente sección presenta el trabajo realizado al respecto.

3.2 Sistemas No Lineales

En las secciones anteriores se estudiaron las relaciones entre conceptos para el caso lineal. Sin embargo, el interés real es realizar un análisis más general, es decir, para sistemas no lineales. Una limitante es que la uniformidad, la globalidad y demás propiedades que existen en los conceptos utilizados en la teoría lineal no se mantienen en el caso no lineal. Por tanto las relaciones buscadas entre los tres conceptos de interés tendrán ciertas restricciones o tendrán que suponerse algunas cosas desde un principio. Por ejemplo, una suposición esencial en esta sección es que el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)\,u, \\ y &= H(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

tiene una forma normal globalmente definida

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(z, y) \\ \dot{y} &= a(z, y) + b(z, y)\,u \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.1 Pasivización por retroalimentación de estados y existencia de observadores con entradas desconocidas

La relación entre los conceptos PRE y existencia de OED tiene un antecedente importante en [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000], donde se presenta una relación entre estos mismos conceptos pero para el caso no lineal SISO. Este resultado, junto con la relación de equivalencia encontrada en la sección 3.1.1 para sistemas LIT multivariables, se tomarán como referencia para el estudio de este caso más general: los sistemas no lineales MIMO.

Para esto se deben tener presentes dos resultados anteriores. El primero es el lema 2 que proporciona la condición necesaria y suficiente (2.10) para asegurar la existencia de un OED para un sistema no lineal: que la variedad invariante $\varepsilon = 0$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(z, y), \qquad z(0) = z_0 \\ \dot{\varepsilon} &= q(\varepsilon + z(t), y(t)) - q(z(t), y(t)), \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

sea asintóticamente estable para todo $y(t)$, donde $q(z, y)$ está definido en la forma normal (3.12).

Por otro lado, el lema 5 es necesario, pues establece que, bajo ciertas suposiciones, un sistema es pasivizable por retroalimentación de estados (C^r-PRE) si y sólo si es de fase mínima. Con esta equivalencia de conceptos y teniendo en cuenta que las dos hipótesis realizadas en el lema 5 todavía se consideran, el análisis puede enfocarse ahora a relacionar la condición (3.13) con el hecho de que el sistema sea de fase mínima.

El resultado principal de esta parte del trabajo se formula en el siguiente teorema.

Teorema 5 *Supóngase que el sistema (3.11) satisface las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos). Si existe un OED entonces el sistema es C^r-PRE estrictamente, $r \geq 1$.*

Prueba. Sin pérdida de generalidad, ya que el sistema (3.11) tiene un punto de equilibrio en $x = 0$ y $H(0) = 0$, se puede asumir que el sistema en forma normal (3.12) tiene un punto de equilibrio en $(y, z) = 0$, es decir, que $q(0, 0) = 0$. Por el lema 2 debe satisfacerse la condición de estabilidad para el sistema (3.13). En el caso particular de que $y(t) = 0$ y que $z_0 = 0$ esta condición implica que el punto de equilibrio $\varepsilon = 0$ del sistema

$$\dot{\varepsilon} = q(\varepsilon, 0), \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0$$

es asintóticamente estable para todo $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Ya que este sistema es precisamente la dinámica cero del sistema y gracias al teorema 1 (teorema converso de Lyapunov para puntos de equilibrio global y asintóticamente estables) se puede asegurar la existencia de una función de Lyapunov $V_0(z)$ que satisface estrictamente la condición

$$\frac{\partial V_o(z)}{\partial z} q(z, 0) < 0$$

Por lo tanto el sistema es de fase mínima y, como consecuencia del lema 5 el sistema es C^r-PRE estrictamente, $r \geq 1$. ■

Este teorema asegura que, bajo las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos), *todo sistema para el cual exista un OED es pasivizable por retroalimentación de estados (PRE)*. Es decir, que la clase de sistemas no lineales que poseen un OED es una subclase de aquellos que son pasivizables estrictamente por retroalimentación de estados (PRE estrictamente). Como puede verse de la condición (3.13), el subsistema ε no sólo es estable para $y = 0$ (que implica que el sistema sea de fase mínima) sino también para toda y. Esto hace intuir que la clase de sistemas para los cuales existe un OED posee propiedades más "uniformes" de pasividad, lo que genera que sean un subconjunto propio de aquellos. En el caso lineal se tienen directamente estas propiedades, y de esta manera la equivalencia sí se presenta.

Aunque en el caso lineal la implicación contraria es también válida, en general esto no se satisface, tal como muestra el siguiente contraejemplo, en el cual se presenta un sistema que es PRE pero no posee un OED.

Ejemplo 1 *Considérese el sistema en la forma normal (3.12)*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + yNz \\ \dot{y} &= -ay + bu \end{aligned},$$

en donde $z \in \mathbb{R}^2$ y $b \neq 0$, $a > 0$ y $A = Diag\{-1, -2\}$, $N = -A$. El sistema es de fase mínima global ya que el subsistema $\dot{z} = Az$ es exponencialmente estable. De acuerdo al lema 5 el sistema es entonces PRE. Sin embargo la variedad invariante $\varepsilon = 0$ del sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + yNz, \qquad z(0) = z_0 \\
\dot{\varepsilon} &= (A + yN)\,\varepsilon, \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

no es asintóticamente estable para todo $y(t)$ (tómese por ejemplo y constante, con $y \geq 1$), y entonces, de acuerdo al lema 2, el sistema no posee un OED.

La hipótesis 1 (grado relativo) es casi necesaria tanto para la pasivización como para la existencia de observadores con entradas desconocidas, como se ha discutido en [Byrnes et al., 1991] y en [Moreno(1), 2000, Moreno(2), 2000], respectivamente. La discusión que se presenta en la literatura acerca de la necesidad de la hipótesis 1 se puede resumir de la siguiente manera. Aunque esta hipótesis puede relajarse para sistemas con grado relativo no bien definido, no se permiten grados relativos mayores a uno. De esta manera, aunque la hipótesis puede relajarse un poco, el análisis se hace más complejo.

Cabe realizar el siguiente comentario. En este apartado, como a lo largo del presente trabajo, se han considerado sistemas con un número igual, m, de entradas y salidas (sistemas cuadrados). Sin embargo los resultados obtenidos para la relación OED-PRE pueden extenderse para el caso en que se tenga un número de salidas (p) mayor que el número de entradas (m). Esto puede hacerse ya sea seleccionando un número m del total de salidas existentes o encontrando una transformación suave $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tal que el nuevo vector de salidas esté definido como $\bar{y} = T(y)$. Si al realizar este cambio de salidas se satisfacen las condiciones establecidas anteriormente, entonces el análisis presentado será también válido para sistemas no cuadrados.

Aunque se ha presentado la parte formal de esta relación OED-PRE, la cual no resulta de equivalencia en general, se piensa que una gran parte de los sistemas físicos poseen esas características adicionales que permitirían establecer para ellos una relación en este caso sí de equivalencia. Esto se ilustrará en el ejemplo del capítulo siguiente. La caracterización formal de las propiedades adicionales de pasividad mencionadas es un tema de investigación actual.

Para finalizar con esta sección, cabe señalarse que la generalización a los sistemas multivariables de la relación encontrada en [Moreno & Rocha-Cózatl, 2000] representa otro resultado más del presente trabajo.

3.2.2 Pasivización por retroalimentación de estados y pasivización por inyección de la salida

Al igual que en el caso lineal, la relación a buscar es entre los dos tipos de pasivización considerados en el presente trabajo: por retroalimentación de estados y por inyección de la salida.

Se comenzará proporcionando las condiciones para pasivizar al sistema (3.12) por medio de una inyección de salida y, después, se realizará una comparación con aquellas condiciones propias de la pasivización por retroalimentación de estados. A partir de esta comparación se establecerá la relación que guardan ambos tipos de pasivización.

Antes de continuar, se deben tener presentes dos puntos. Primero, del comentario 1 se sabe que en este caso la función $q(z,y)$ se puede expresar como $q(z,y) = f^*(z) - p(z,y)\, y$. Por otro lado, V_0 es la función de Lyapunov que asegura que el sistema (3.12) es de fase mínima global, de acuerdo a la definición 14.

Para seguir el análisis del caso no lineal y con el fin de relacionar dos o más conceptos se tienen que realizar algunas suposiciones. En este caso, definiendo

$$\gamma(z,y) \triangleq \frac{\partial V_0}{\partial z} p(z,y)\, y + y^T a(z,y) \quad . \tag{3.15}$$

la siguiente condición será requerida

Suposición 1 *Existen dos funciones no negativas ψ_1 y ψ_2 tal que para todo (z,y) de (3.12)*

$$\|\gamma(z,y)\| \leq \psi_1(y)\cdot\|y\|^2 + \psi_2(y)\left|\frac{\partial V_0(z)}{\partial z}f^*(z)\right|^{1/2}\|y\| . \tag{3.16}$$

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para pasivizar globalmente (estrictamente) al sistema (3.12) por medio de una inyección de salida. Se aplica al sistema (3.11) si éste tiene una forma normal globalmente definida.

Teorema 6 *Suponga que la suposición 1 se satisface para el sistema (3.12). Si el sistema (3.12) es de fase mínima débil y globalmente entonces es C^2-globalmente pasivizable por inyección de salida. Además, si el sistema (3.12) es de fase mínima globalmente entonces es C^2-globalmente pasivizable estrictamente por inyección de salida.*

Prueba. Para el sistema (3.12) denote $q(z,0)$ como $f^*(z)$ y exprese $q(z,y)$ como se muestra a continuación

$$q(z,y) = f^*(z) + p(z,y)\,y\ ,$$

donde $p(z,y)$ es una función suave. Si el sistema es de fase mínima globalmente (débilmente) existe entonces una función de Lyapunov propia y positiva definida $V_0(z)$ para el punto $z=0$, es decir, se satisface que

$$L_{f^*}V_0(z) \leq -\beta(\|z\|) \tag{3.17}$$

para alguna función clase $\mathcal{K}$ (nula) $\beta(\cdot)$. Es necesario encontrar funciones $S_1(y)$, $S_2(y)$, y $T(y)$, como en la definición 13, de tal manera que el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= f^*(z) + p(z,y)\,y + S_1(y)\ ,\\
\dot{y} &= a(z,y) + b(z,y)\,u + S_2(y)\ ,\\
\tilde{y} &= T(z,y)\,y
\end{aligned}$$

sea estrictamente pasivo (pasivo) para la entrada u y la salida $\tilde{y}$. Definiendo $\varsigma = [z,y]^T$ este sistema puede ser expresado en una forma más compacta como la siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{\varsigma} &= \bar{f}(\varsigma) + \bar{g}(\varsigma)\,u\\
\tilde{y} &= \bar{h}(\varsigma)
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{f}(\varsigma) = \begin{bmatrix} f^{*}(z) - p(z,y)\,y + S_1(y) \\ a(z,y) + S_2(y) \end{bmatrix}, \ \bar{g}(\varsigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(z,y) \end{bmatrix}, \ y$$

$$\bar{h}(\varsigma) = \begin{bmatrix} T(z,y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} .$$

De acuerdo con el lema 4 (lema KYP) éste será el caso si las condiciones

$$L_f V(x) \leq -\alpha_1(\|x\|) \tag{3.18}$$

$$L_g V(x) = H^T(x) \tag{3.19}$$

son satisfechas para alguna función C^r no negativa $V(\varsigma)$, con $V(0) = 0$.

Considere la siguiente candidata a función de almacenamiento

$$V(\varsigma) = V_0(z) + \frac{1}{2} y^T y \ .$$

Evaluando la condición (3.19) se obtiene que

$$L_{\bar{g}} V(\varsigma) = \bar{h}^T(\varsigma) \Longrightarrow \frac{\partial V(\varsigma)}{\partial y} b(z,y) = (T(z,y)\,y)^T$$

Con la definición de $V(\varsigma)$, esta condición se cumple si

$$y^T b(z,y) = (T(z,y)\,y)^T = y^T T^T(z,y)$$

es decir

$$T(z,y) = b^T(z,y) \ .$$

Por la definición de $b(z,y)$ en la forma normal (3.12) se tiene que es regular para todo $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ y para todo $y \in \mathbb{R}^m$, por lo que se satisface la condición sobre $T(\cdot)$ en la definición 13.

De la condición (3.18) se obtiene

$$L_{\bar{f}} V(\varsigma) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{*}(z) + p(z,y)\,y + S_1(y) \\ a(z,y) + S_2(y) \end{bmatrix} \leq -\alpha_1(\|\varsigma\|)$$

Mediante la manipulación de la parte izquierda de la desigualdad, se tiene que

$$\begin{aligned} L_f V(\varsigma) &= \frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) + \frac{\partial V_0}{\partial z}\left(p(z,y)\,y - S_1(y)\right) - \\ &\quad + y^T\left(a(z,y) + S_2(y)\right) , \end{aligned}$$

Eligiendo

$$S_1(y) = 0 ,$$

y utilizando (3.15) se obtiene

$$L_f V(\varsigma) = \frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) + \gamma(z,y) + y^T S_2(y) .$$

Estableciendo ahora

$$S_2(y) = -\left[\epsilon + \psi_1(y) + \psi_2^2(y)\right] y ,$$

donde $\epsilon > 0$ y ψ_1, ψ_2 son como en la suposición 1. Mediante el uso de la desigualdad (3.16) se llega a

$$\begin{aligned} L_f V(\varsigma) &\le \frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) + \psi_1(y)\|y\|^2 + \psi_2(y)\left|\frac{\partial V_0(z)}{\partial z} f^*(z)\right|^{1/2}\|y\| - \\ &\quad - y^T\left[\epsilon + \psi_1(y) + \psi_2^2(y)\right] y . \end{aligned}$$

Simplificando algunos términos se sigue que

$$L_f V(\varsigma) \le \frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) + \psi_2(y)\left|\frac{\partial V_0(z)}{\partial z} f^*(z)\right|^{1/2}\|y\| - \psi_2^2(y)\|y\|^2 - \epsilon\|y\|^2 .$$

Se puede mostrar fácilmente que

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) + \psi_2(y)\left|\frac{\partial V_0(z)}{\partial z} f^*(z)\right|^{1/2}\|y\| - \psi_2^2(y)\|y\|^2 \le \frac{3}{4}\frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) ,$$

y por tanto

$$L_f V(\varsigma) \le \frac{3}{4}\frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z) - \epsilon\|y\|^2 \le -\frac{3}{4}\beta(|z|) - \epsilon\|y\|^2 .$$

Si el sistema es de fase mínima globalmente entonces el sistema es C^2-globalmente pasivizable estrictamente por inyección de la salida. Si el sistema es de fase mínima débil y globalmente entonces el sistema es C^2-globalmente pasivizable por inyección de la salida. ■

Cabe mencionar que se pueden obtener resultados similares para pasivización local o semiglobal. Como se mencionó antes, la dinámica cero es invariante ante la inyección de salida y si un sistema es (estrictamente) pasivo con una función de almacenamiento positiva definida entonces su dinámica cero es de fase mínima débil (respectivamente, de fase mínima). Esto muestra que la condición de fase mínima en el teorema 6 no sólo es suficiente sino también necesaria bajo una condición adicional no muy restrictiva (condición (3.16)).

Se puede añadir también que, aunque en el diseño de la inyección de la salida se eligió $S_1(y) = 0$, eventualmente existen mejores ponderaciones enfocadas a evitar grandes valores de $S_2(y)$.

En el caso lineal e invariante en el tiempo la suposición 1 se satisface y las condiciones del teorema son necesarias y suficientes.

Análisis Comparativo. Se han considerado dos vías diferentes para convertir en (estrictamente) pasivo un sistema en forma normal: por medio de una retroalimentación de estados y por medio de una inyección de la salida. En el caso lineal e invariante en el tiempo las condiciones son equivalentes y son necesarias y suficientes [Fradkov & Hill, 1998], [Jiang & Hill, 1998]. En el caso no lineal la situación es diferente. Comparando directamente las condiciones suficientes conocidas para convertir en (estrictamente) pasivo el sistema en forma normal (3.12), la situación está de la siguiente manera:

1. En el caso de la retroalimentación de estados, que el sistema (3.12) sea de fase mínima (débilmente) global es condición suficiente para convertirlo en un sistema global y estrictamente pasivo (respectivamente, globalmente pasivo) [Byrnes et al., 1991], [Fradkov & Hill, 1998], [Sepulchre et al., 1997], [van der Schaft, 2000].

2. En el caso de la inyección de la salida, a la condición de que el sistema sea de fase mínima (débilmente) global debe agregarse una condición de crecimiento sobre las no linealidades del sistema (suposición 1). Como resultado se tiene que las condiciones para la pasivización por inyección de la salida son más restrictivas que aquellas para la pasivización por retroalimentación de estados.

Sin embargo, si se impone la suposición 1 como una condición requerida por el sistema desde un principio, se puede entonces concluir que bajo esa condición ambos conceptos son equivalentes.

Teorema 7 *Sea el sistema no lineal (3.11). Suponga que se satisfacen las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos) y la suposición 1 (ecuación (3.16)). Entonces (3.11) es pasivizable por inyección de la salida si y sólo si es pasivizable por retroalimentación de estados.*

Prueba. En el teorema 6 se estableció que, bajo las hipótesis 1 (grado relativo) y 2 (campos vectoriales completos) y la suposición 1, es suficiente que un sistema sea de fase mínima para que sea pasivizable por inyección de la salida. Por otro lado, se sabe que la dinámica cero de un sistema es invariante ante una inyección de la salida o una retroalimentación de los estados, es decir, no se altera el hecho de que el sistema en cuestión sea o no de fase mínima. Por tanto, un sistema es pasivizable por inyección de la salida sólo si es de fase mínima. En resumen, bajo las dos hipótesis y la suposición antes mencionadas, un sistema es pasivizable por inyección de la salida si y sólo si es de fase mínima. Con ayuda del lema 5 se completa la demostración. ■

Es conveniente señalar que la condición (3.16) es solo suficiente y eventualmente puede ser relajada. Para el caso lineal esta condición si se satisface, por lo que ambos conceptos resultan equivalentes.

3.2.3 Pasivización por inyección de la salida y existencia de observadores con entradas desconocidas

En el caso lineal se buscaron primero las relaciones entre los OED y la pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y, por separado, entre este mismo concepto y la pasivización por inyección de salida (PIS). Ambas resultaron de equivalencia, lo que permitió establecer finalmente una relación PIS-OED, también de equivalencia.

En el análisis de sistemas no lineales se obtuvo una relación unidireccional entre los conceptos pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y existencia de OED, por lo que no es posible establecer de nuevo una relación de equivalencia entre los tres conceptos tratados en el presente trabajo. Sin embargo, se encontró que, bajo ciertas restricciones, existe una relación de equivalencia entre dos de ellos, la pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y la pasivización por inyección de la salida (PIS). Esta equivalencia permitirá establecer una relación entre la pasivización por inyección de la salida (PIS) y la existencia de OED.

Para todo el desarrollo presentado en el presente trabajo se han hecho dos consideraciones básicas: el hecho de que el sistema sea de grado relativo igual a uno con respecto a todas las entradas, hipótesis 1, y una condición sobre los campos vectoriales del sistema, hipótesis 2. Si a estas dos restricciones iniciales se agrega la condición sobre las no linealidades del sistema, condición (3.16), el resultado de la sección anterior indica que existe una equivalencia entre los dos tipos de pasivización tratados.

Con el fin de aprovechar esta relación de equivalencia, se considerarán entonces las tres condiciones antes mencionadas como marco del enlace entre los tres conceptos de interés.

Por tanto, ya se ha dicho que bajo esas tres condiciones existe una equivalencia entre la pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y la pasivización por inyección de la salida (PIS). Por el otro lado, al ser sólo suficiente la tercera restricción, la relación entre la pasivización por retroalimentación de estados (PRE) y la existencia de OED no se ve afectada, es decir, si un sistema posee un OED entonces es pasivizable por retroalimentación de estados. Por lo tanto, puede concluirse que la relación entre la pasivización por inyección de la salida (PIS) y la existencia de OED es en la misma dirección que la relación PRE-OED, es decir, si un sistema posee un OED entonces es pasivizable por inyección de la salida.

Para ilustrar este resultado se representan las interrelaciones en la forma triangular antes utilizada. Cabe enfatizar que este esquema es válido siempre y cuando las tres condiciones (H1-hipótesis 1, H2-hipótesis 2 y C1-condición (3.16)) impuestas sobre el sistema sean satisfechas. Así, se obtiene el diagrama de la figura 3.1.

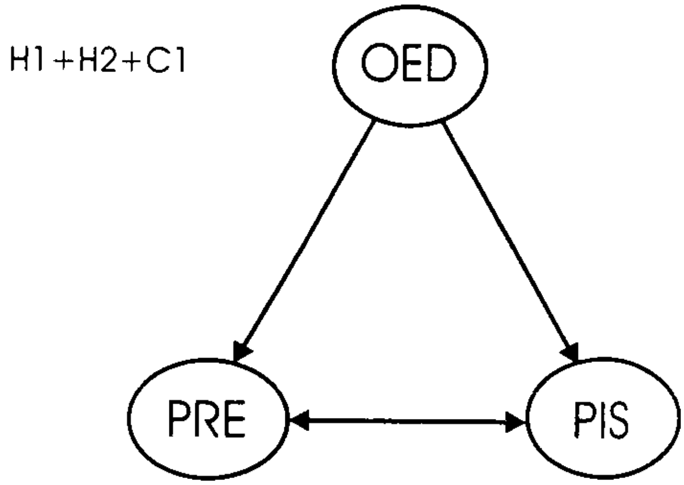

Figura 3.1: Esquema triangular entre los conceptos en el caso no lineal.

Como se puede observar, en este caso no es posible enlazar en ambas direcciones todos los conceptos en el diagrama. Sin embargo, se han logrado establecer tanto las interrelaciones entre cada uno de ellos como las condiciones que las restringen, lo que representa un buen adelanto en la caracterización completa de este esquema triconceptual.

Como era de esperarse, para los sistemas no lineales no se mantienen las relaciones de equivalencia obtenidas para el caso lineal, sin embargo se cree que para muchos de los sistemas físicos estas relaciones pueden resultar prácticamente equivalentes, lo que permitiría establecer para ellos una metodología particular de diseño para los OED.

Capítulo 4

Motor de inducción no saturado

Los conceptos y relaciones tratados en este trabajo resultan en ocasiones demasiado abstractos, por tanto, con el fin de mostrarlos como herramientas útiles para ser aplicados en sistemas físicos, se ha desarrollado el siguiente ejemplo.

El sistema a considerar es el motor de inducción no saturado. Con él se pretende ejemplificar la manera de evaluar las condiciones necesarias y suficientes para cada uno de los conceptos de manera que se muestre que para este sistema físico, los tres conceptos son ciertos; es decir, este sistema es pasivizable por retroalimentación de estados, es pasivizable por inyección de la salida y existe un OED para él. Además, se propone un OED para el sistema, y su desempeño será evaluado por medio de simulaciones numéricas.

El motor de inducción es un sistema de gran interés e importancia con numerosas aplicaciones tanto industriales como académicas, por lo que a su alrededor existe un vasto estudio con el fin de encontrar estrategias de control cada vez más eficientes. Por ejemplo [Ortega et al., 1996] y [Nicklasson et al., 1997] proporcionan controladores basados en pasividad, siendo el primero de ellos una solución más general; por otro lado [Marino et al., 1993] proporciona un punto de vista adaptable. Asimismo existen otros estudios en donde se proponen diseños de observadores cada vez más robustos con el fin de mejorar el desempeño de las mencionadas estrategias de control. Un observador convencional está dado en [Busawon et. al., 1999]; en [Ortega & Espinosa, 1991] se presenta el diseño de un observador de flujos basado en pasividad y en [Yuhong & Loparo, 1998] se presenta una alternativa adaptable. Finalmente en [Manes et al., 1994] se presenta una comparación entre dos tipos de observador de flujos.

En este trabajo se ha visto que, bajo dos suposiciones generales, si un sistema no lineal MIMO posee un OED entonces será pasivizable por retroalimentación de estados (PRE). Sin embargo, la implicación contraria no es necesariamente cierta. Por otro lado, se encontró que, bajo una consideración adicional, resultan equivalentes los dos tipos de pasivización, por inyección de la salida (PIS) y por retroalimentación de estados (PRE). Finalmente se obtuvo una relación OED-PIS que, debido a la relación de equivalencia mencionada, es similar a la obtenida entre OED-PRE pero requiere de una condición adicional de crecimiento sobre las no linealidades del sistema. A pesar de que este resultado no muestra la equivalencia entre los tres conceptos obtenida anteriormente para el caso lineal, se tiene la idea que la mayoría de los sistemas físicos satisfacen las tres condiciones mencionadas más aquellas requeridas para que dicha equivalencia exista, es decir, que existe una clase de sistemas que posee las propiedades necesarias y suficientes que hacen que los conceptos mencionados sean equivalentes.

En este ejemplo, por tanto, se pretende indagar si este sistema en particular pertenece a esa clase de sistemas, es decir, para los cuales existe un OED, son pasivizables por retroalimentación de estados, y, además, son pasivizables por inyección de la salida. Con el fin de complementar lo referente al observador, se propondrá un observador de flujos para el motor y se verificará su funcionamiento. A diferencia de los muchos observadores de flujo propuestos en la literatura, el que se desarrollará en esta sección es robusto tanto a variaciones arbitrarias en algunas señales de entrada del sistema (entradas desconocidas) como a variaciones arbitrarias (y físicamente razonables) de algunos parámetros del sistema. Esto ilustra la posibilidad de aplicar la teoría de los observadores con entradas desconocidas al diseño de observadores robustos ante diversos tipos de incertidumbres.

El modelo matemático del motor de inducción no saturado a considerar es el siguiente

[Marino & Tomei, 1995]:

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega} &= x^T \bar{S} x - \frac{1}{J}\tau_L \\
\dot{x} &= Ax + \omega N x + Bv
\end{aligned}
$$

donde

$$
x = \begin{bmatrix} i_a & i_b & \psi_a & \psi_b \end{bmatrix}^T, \quad v = \begin{bmatrix} v_a & v_b \end{bmatrix}^T.
$$

$$
\begin{aligned}
i &: \text{corrientes de armadura,} \\
\psi &: \text{flujos del rotor,} \\
\omega &: \text{velocidad del rotor,} \\
v &: \text{voltajes de armadura,} \\
\tau_L &: \text{par de carga.}
\end{aligned}
$$

Los parámetros están dados por:

$$
A = \begin{bmatrix} -a_{11}\mathbb{I}_2 & a_{12}\mathbb{I}_2 \\ a_{21}\mathbb{I}_2 & -a_{22}\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b\mathbb{I}_2 \\ 0_2 \end{bmatrix},
$$

$$
N = \begin{bmatrix} 0_2 & n_1\mathbb{J}_2 \\ 0_2 & -n_p\mathbb{J}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \sigma \begin{bmatrix} 0_2 & \mathbb{J}_2^T \\ \mathbb{J}_2 & 0_2 \end{bmatrix},
$$

$$
a_{11} = \tfrac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{(L_r L_s - M^2) L_r}, \quad a_{12} = \tfrac{M R_r}{(L_r L_s - M^2) L_r},
$$

$$
a_{21} = \tfrac{M R_r}{L_r}, \quad a_{22} = \tfrac{R_r}{L_r},
$$

$$
b = \tfrac{L_r}{L_r L_s - M^2}, \quad n_1 = \tfrac{n_p M}{L_r L_s - M^2}, \quad \sigma = \tfrac{n_p M}{2 J L_r}, \ y
$$

$$
\mathbb{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

J	:	inercia del motor,
L_s, L_r	:	inductancias de los devanados de armadura y del rotor.
M	:	inductancia mutua,
R_s, R_r	:	resistencias de los devanados de armadura y del rotor.
n_p	:	número de pares de polos.

Para aplicar los resultados anteriormente expuestos se considerará el motor como un sistema MIMO cuadrado. Para esto se requiere de un cambio de notación. El vector de estados se puede dividir en

$$x = \begin{bmatrix} x_I \\ x_{II} \end{bmatrix},$$

donde

$$x_I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_{II} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Las entradas desconocidas se definen como

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{J}\tau_L \\ v \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

donde v es un vector de 2×1: las salidas, en este caso, son: la velocidad angular y los dos estados, x_1 y x_2

$$y = \begin{bmatrix} \omega \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Definiendo $z \triangleq x_{II}$, la forma normal (2.3) del sistema es

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} x^T \bar{S} x \\ -a_{11} x_I + a_{12} z + \omega n_p \mathbb{J}_2 z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0_{2,1} & b\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J}\tau_L \\ v \end{bmatrix} = a(z,y) + b(z,y)\,u \tag{4.3}$$

$$\dot{z} = a_{21} x_I - a_{22} z - \omega n_p \mathbb{J}_2 z = q(z,y)$$

4.1 Existencia de un observador con entradas desconocidas

Del lema 2 se sabe que, para que exista un OED para (4.3) es necesario que para cada $y(t)$, z_0 y ε_0 la variedad de equilibrio $\varepsilon = 0$ de

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(z,y) \\ \dot{\varepsilon} &= q(\varepsilon + z(t), y(t)) - q(z(t), y(t)), \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

sea asintóticamente estable.

En el caso particular del motor tenemos que

$$\dot{z} = a_{21} x_I - a_{22} z - \omega n_p \mathbb{J}_2 z \tag{4.4}$$

$$\dot{\varepsilon} = -\left(a_{22}\mathbb{I}_2 + \omega n_p \mathbb{J}_2\right)\varepsilon \tag{4.5}$$

Ya que los subsistemas están desacoplados esta condición se satisface si y sólo si el subsistema (4.5) tiene a $\varepsilon = 0$ como punto de equilibrio global y asintóticamente estable para toda señal $y(t)$.

Para demostrar que esta afirmación es cierta se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T\varepsilon$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (4.5) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^T\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^T\dot{\varepsilon} = \varepsilon^T\dot{\varepsilon} = -\varepsilon^T\left(a_{22}\mathbb{I}_2 + \omega n_p \mathbb{J}_2\right)\varepsilon \\ &= -a_{22}\varepsilon^T\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

dado que $a_{22} > 0$.

Ya que $\dot{V}$ es negativa definida para cualquier $y(t)$, se concluye del teorema de Lyapunov que la condición del lema 2 se satisface y que existe un OED para (4.3).

En este caso en particular se puede proporcionar un OED de orden reducido para el sistema, donde se estiman los flujos ψ_a y ψ_b, y es el siguiente

$$\dot{\hat{x}}_{II} = a_{21}x_I - (a_{22} + \omega n_p \mathbb{J}_2)\hat{x}_{II} \tag{4.6}$$

donde las entradas a este Observador son x_I y ω, y su salida, el vector $\hat{x}_{II} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_a & \hat{\psi}_b \end{bmatrix}^T$.

Como puede verse no es necesario conocer los parámetros J, L_s y R_s ni las variables de entrada τ_L y v, de tal forma que este observador de flujos es robusto ante el desconocimiento TOTAL de tales parámetros y señales.

4.2 Pasivización por retroalimentación de estados

Para determinar si el sistema es pasivizable, de acuerdo al lema 5, es necesario que el punto de equilibrio $\varepsilon = 0$ del susbsistema (4.5), cuando $y = 0$, es decir

$$\dot{\varepsilon} = -a_{22}\varepsilon$$

sea asintóticamente estable. Por tanto, lo que se requiere es que el escalar a_{22} sea mayor que cero, lo cual se cumple. De esta manera, el sistema es pasivizable por retroalimentación de estados.

Como se ve, la condición para la existencia de un OED requiere que el punto de equilibrio $\varepsilon = 0$ del subsistema $\dot{\varepsilon} = -\left(a_{22}\mathbb{I}_2 + \omega n_p \mathbb{J}_2\right)\varepsilon$ sea global, uniforme y asintóticamente estable para toda señal $\omega(t)$. Para la PRE esto debe sólo satisfacerse para $\omega = 0$, lo cual se verifica si la condición anterior es satisfecha, pero no viceversa. Por tanto, en este ejemplo se muestra claramente que la condición que asegura la existencia de un OED es mucho más exigente que la necesaria para la pasivización por retroalimentación de estados (PRE). Sin embargo, se comprueba que para este sistema se satisfacen ambas condiciones.

4.3 Pasivización por inyección de la salida

Antes de comenzar el análisis para determinar si el motor de inducción es pasivizable por inyección de la salida (PIS) es necesario desarrollar algunos puntos que ayudarán a dicho análisis.

Con el fin de tener las ecuaciones en términos de las variables x_I, ω y z, se desarrolla el siguiente término

$$\begin{aligned} x^T \bar{S} x &= \begin{bmatrix} x_I^T & x_{II}^T \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} 0_2 & \mathbb{J}_2^T \\ \mathbb{J}_2 & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x_{II} \end{bmatrix} \\ &= \sigma\left(x_I^T \mathbb{J}_2^T x_{II} + x_{II}^T \mathbb{J}_2 x_I\right) \\ &= 2\sigma x_{II}^T \mathbb{J}_2 x_I \end{aligned}$$

que por la definición de z queda

$$x^T \bar{S} x = 2\sigma z^T \mathbb{J}_2 x_I \tag{4.7}$$

Por otro lado, al ser $b(z, y)$ igual a una matriz de elementos constantes diferentes de cero,

$$b(z, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

se verifica que es invertible para todo $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ y todo $y \in \mathbb{R}^{m}$

Para finalizar, el subsistema $\dot{z} = q(z, y)$ debe ponerse en la forma

$$\dot{z} = q(z, y) = f^{*}(z) + p(z, y)\, y$$

Es decir, si el subsistema es

$$\dot{z} = a_{21}x_I - a_{22}z - \omega_r n_p \mathbb{J}_2 z$$

entonces

$$f^{*}(z) = -a_{22}z$$

$$p(z, y) = \begin{bmatrix} -n_p \mathbb{J}_2 z & a_{21}\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

Con el fin de utilizar las herramientas presentadas en el capítulo anterior, se utilizará el teorema 6 para evaluar si el motor de inducción es pasivizable por inyección de la salida. Por tanto deben evaluarse las siguientes condiciones

- El sistema debe ser de fase mínima. El motor de inducción es un sistema de fase mínima pues el subsistema

  $$\dot{z} = -a_{22}z$$

  es exponencialmente estable, dado que $a_{22} > 0$. La función de Lyapunov para este subsistema es entonces

  $$V_0(z) = \frac{1}{2}z^T z$$

- Dado

  $$\gamma(z, y) = \frac{\partial V_0}{\partial z}p(z, y)\, y - y^T a(z, y)$$

se debe satisfacer que

$$|\gamma(z,y)| \leq c_1(y)\,|y|^2 + c_2(y)\left|\frac{\partial V_0}{\partial z} f^*(z)\right|^2 |y|^2 \qquad (4.8)$$

En este caso se evaluará en dos partes. En primer lugar se tiene entonces que

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} p(z,y)\, y = z^T \left(a_{21}x_I - \omega n_p \mathbb{J}_2 z\right) = a_{21} z^T x_I$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} y^T a(z,y) &= \begin{bmatrix} \omega & x_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sigma z^T \mathbb{J}_2 x_I \\ -a_{11}x_I + a_{12}z - \omega n_1 \mathbb{J}_2 z \end{bmatrix} \\ &= 2\sigma\omega z^T \mathbb{J}_2 x_I - a_{11}x_I^T x_I + a_{12}x_I^T z - \omega n_1 x_I^T \mathbb{J}_2 z \\ &= -a_{11}x_I^T x_I + a_{12}x_I^T z + (n_1 - 2\sigma)\,\omega x_I^T \mathbb{J}_2 z \end{aligned}$$

Por lo tanto, la $\gamma(z,y)$ es

$$\gamma(z,y) = -a_{11}x_I^T x_I + (a_{21} + a_{12})\, x_I^T z + (n_1 - 2\sigma)\,\omega x_I^T \mathbb{J}_2 z$$

La desigualdad (4.8) no se cumple debido a que el último término es cuadrático en y y está multiplicado por z, lo cual no se tiene contemplado.

Apegándose al teorema 6, este resultado indicaría que el motor no es pasivizable por inyección de la salida, sin embargo como se mostrará a continuación este sistema si puede ser pasivizado por esta vía. Con esto se puede verificar que la condición sobre $\gamma(z,y)$, que representa las no linealidades del sistema, es sólo suficiente y que puede llegar a ser relajada.

Se reiniciará entonces aplicando directamente una inyección de la salida a (4.3). Dadas las definiciones del vector de entradas u y del vector de salidas y, ecuaciones (4.1) y (4.2) respectivamente, además de la transformación $z = x_{II}$, se tiene

$$\dot{z} = a_{21}x_I - a_{22}z - \omega n_p \mathbb{J}_2 z + S_1(y)$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} x^T \bar{S} x \\ -a_{11}x_I + a_{12}z + \omega n_1 \mathbb{J}_2 z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0_{2,1} & b\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} S_2(y) \\ S_3(y) \end{bmatrix}$$

Cambiando de coordenadas a $\xi = [z, y]^T$, tomando en cuenta (4.7) y reordenando términos, se obtiene

$$
\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -a_{22}z + a_{21}x_I - \omega n_p \mathbb{J}_2 z + S_1(y) \\ 2\sigma z^T \mathbb{J}_2 x_I + S_2(y) \\ -a_{11}x_I + a_{12}z + \omega n_1 \mathbb{J}_2 z + S_3(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0_{2,1} & b\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} u = \tilde{f}(z, y) + \tilde{g}(z, y)\, u \tag{4.9}
$$

$$
\tilde{y} = \begin{bmatrix} T(z, y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \tilde{h}(\xi)
$$

Considerando la función de almacenamiento candidata

$$
V(z, y) = V_0(z) + W(y)
$$

donde $W(y) = \frac{1}{2}y^T y$, se aplica el lema de KYP no lineal (4) a (4.9), es decir,

$$
\begin{aligned} L_{\tilde{f}}V &\leq -\alpha(\|\xi\|) \\ L_{\tilde{g}}V &= \tilde{h}^T(\xi) \end{aligned} \tag{4.10}
$$

Utilizando la segunda ecuación de (4.10) se tiene

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{g}}V &= \frac{\partial V}{\partial \xi}\tilde{g} = \begin{bmatrix} z^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & b\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b(z, y) \end{bmatrix} \\
&= y^T b(z, y) = y^T T^T(z, y)
\end{aligned}
$$

$$
T(z, y) = b^T(z, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}
$$

la cual cumple con lo dispuesto en la definición 13.

Con la primera ecuación de (4.10) se obtiene

$$L_{\bar{f}}V = \frac{\partial V}{\partial \xi}\bar{f} = \begin{bmatrix} z^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{22}z - a_{21}x_I - \omega n_p \mathbb{J}_2 z + S_1(y) \\ 2\sigma z^T \mathbb{J}_2 x_I + S_2(y) \\ -a_{11}x_I + a_{12}z + \omega n_1 \mathbb{J}_2 z + S_3(y) \end{bmatrix} \leq -\alpha(\|\xi\|)$$

que, por la definición de y, se puede escribir como sigue

$$L_{\bar{f}}V = \begin{bmatrix} z^T & \omega & x_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_{22}z + a_{21}x_I - \omega n_p \mathbb{J}_2 z + S_1(y) \\ 2\sigma z^T \mathbb{J}_2 x_I + S_2(y) \\ -a_{11}x_I + a_{12}z - \omega n_1 \mathbb{J}_2 z + S_3(y) \end{bmatrix} \leq -\alpha(\|z\|, \|\omega\|, \|x_I\|)$$

Desarrollando la parte izquierda de la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} L_{\bar{f}}V &= -a_{22}z^T z + a_{21}z^T x_I - \omega n_p z^T \mathbb{J}_2 z + z^T S_1(y) - 2\sigma\omega z^T \mathbb{J}_2 x_I + \omega S_2(y) - \\ &\quad - a_{11}x_I^T x_I - a_{12}x_I^T z + \omega n_1 x_I^T \mathbb{J}_2 z + x_I^T S_3(y) \end{aligned}$$

Reacomodando términos, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} L_{\bar{f}}V &= -a_{22}z^T z + z^T \left[a_{21}x_I + 2\sigma\omega \mathbb{J}_2 x_I + a_{12}x_I - \omega n_1 \mathbb{J}_2 x_I + S_1(y)\right] \\ &\quad - a_{11}x_I^T x_I + x_I^T S_3(y) + \omega\left[S_2(y) - n_p z^T \mathbb{J}_2 z\right] \end{aligned}$$

pero, dado que $\mathbb{J}_2$ es antisimétrica, $z^T \mathbb{J}_2 z = 0$. Con esto llega a

$$\begin{aligned} L_{\bar{f}}V &= -a_{22}z^T z + z^T \left[a_{21}x_I + (2\sigma - n_1)\,\omega \mathbb{J}_2 x_I + a_{12}x_I + S_1(y)\right] \\ &\quad - a_{11}x_I^T x_I + x_I^T S_3(y) + \omega S_2(y) \end{aligned}$$

Reacomodando de nuevo los términos se obtiene

$$\begin{aligned} L_{\bar{f}}V &= -a_{22}z^T z - a_{11}x_I^T x_I + x_I^T S_3(y) + \omega S_2(y) + \\ &\quad + z^T \left[a_{21}x_I + (2\sigma - n_1)\,\omega \mathbb{J}_2 x_I + a_{12}x_I + S_1(y)\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con esto se puede proponer

$$
\begin{aligned}
S_1(y) &= -\left[a_{21}x_I + (2\sigma - n_1)\,\omega\mathbb{J}_2 x_I + a_{12}x_I\right] \\
S_2(y) &= -\rho\omega, \qquad \rho > 0 \\
S_3(y) &= -\lambda x_I, \qquad \lambda \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

De esta manera, sustituyendo $S_1(y)$, $S_2(y)$ y $S_3(y)$ de (4.12) en (4.11) se tiene que

$$
\begin{aligned}
L_{\tilde{f}}V &= -a_{22}z^T z - (a_{11} + \lambda)\,x_I^T x_I - \rho\omega^2 \\
&= -a_{22}\|z\|^2 - (a_{11} + \lambda)\,\|x_I\|^2 - \rho\,|\omega|^2 \\
&= -\left(a_{22}\|z\|^2 + (a_{11} + \lambda)\,\|x_I\|^2 - \rho\,|\omega|^2\right) \\
&= -\alpha\left(\|z\|, |\omega|, \|x_I\|\right)
\end{aligned}
$$

Como se cumplen las condiciones establecidas en la definición 13. se puede concluir entonces que el motor de inducción sí es pasivizable por inyección de la salida (PIS).

Cabe mencionar que en este desarrollo el elemento $S_1(y)$ de la inyección de la salida es el que participa con mayor peso en la pasivización, mientras que en la prueba del teorema 6 fue considerada igual a cero. De esta manera, el ejemplo también muestra entonces que la elección de la inyección de la salida puede ser realizada de mejor manera.

Como conclusión, se observa que para este ejemplo en particular se logra cerrar el lazo entre los tres conceptos de interés, es decir, el motor de inducción es pasivizable tanto por retroalimentación de estados como por inyección de la salida y además existe un OED para él. Este resultado motiva la idea de que para muchos sistemas físicos se presenta tal situación, aunque matemáticamente los conceptos no sean equivalentes.

4.4 Simulación del observador con entradas desconocidas

Con el fin de verificar y evaluar el desempeño del OED de orden reducido propuesto, ecuación (4.6), se realizó un simulador numérico. Los valores nominales de los parámetros a considerar son los siguientes: $J = 0.029\,(kg \cdot m^2)$, $L_s = 0.142\,(H)$, $L_r = 0.076\,(H)$, $M = 0.099\,(H)$, $R_s = 1.633\,(\Omega)$, $R_r = 0.93\,(\Omega)$, $n_p = 2$.

El OED de orden reducido a implantar es entonces

$$\dot{\hat{x}}_{II} = a_{21}x_I - (a_{22} + \omega n_p \mathbb{J}_2)\,\hat{x}_{II}$$

el cual es una copia de la dinámica de seguimiento del sistema.

El esquema siguiente es el que se considera. Las salidas de la Planta $y = [\omega, x_I]$ entran al OED y generan un estimado de x_{II} (parte del estado que representa a los flujos ψ_a y ψ_b) sin que las entradas de la Planta $u = [\tau_L, v]$ intervengan. El error de observación $e_o(t)$ debe tender a cero.

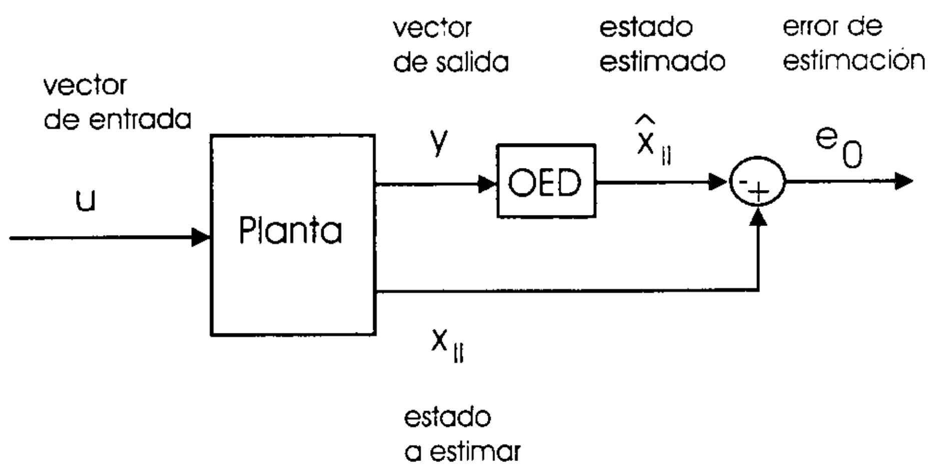

Figura 4.1: Diagrama de bloques de la planta y el OED

Las entradas a la planta, par de carga τ_L y voltajes v, que se suministran al sistema son de tipo senoidal. Estas entradas, que se consideran desconocidas para el Observador son entonces del tipo que se muestra en seguida

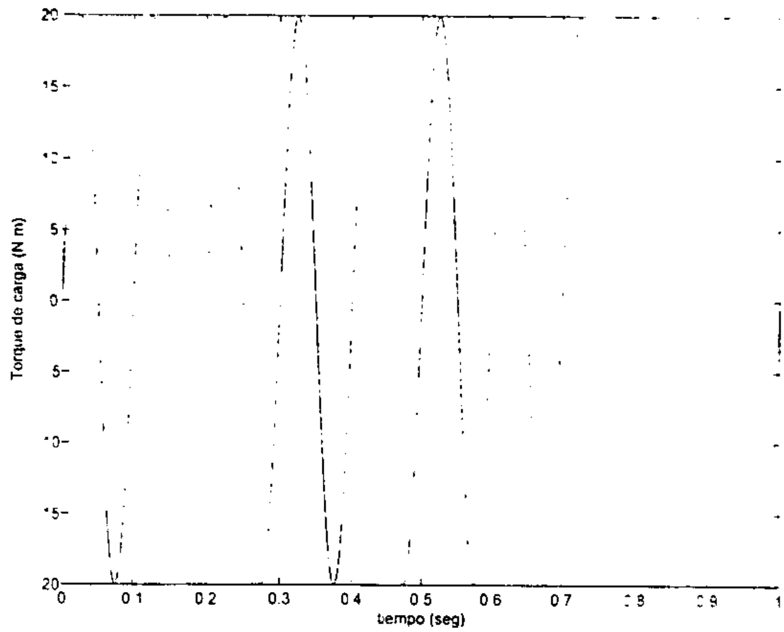

Figura 4.2: Torque de carga considerado para la simulación

A continuación se presentan los resultados de tres diferentes simulaciones realizadas. La primera simulación consistió en implantar el OED propuesto considerando que tanto en la planta como en el observador están presentes los valores nominales de los parámetros antes mencionados. La segunda corresponde a la simulación realizada considerando una incertidumbre en los parámetros que no intervienen en la estructura del OED: J, L_s y R_s. En la tercera y última se considera una incertidumbre igual en todos los parámetros. Un error porcentual entre el estado real y el estimado servirá para evaluar el desempeño del OED. Este error porcentual se define como

$$ep = \frac{x - \hat{x}}{x} \times 100$$

Simulación con valores nominales. Los valores nominales antes mencionados son definidos tanto en la planta como en el OED. De esta manera, los resultados son: la velocidad angular obtenida, figura 4.4 y el error porcentual de estimación de cada uno de los flujos, figuras 4.5 y 4.6.

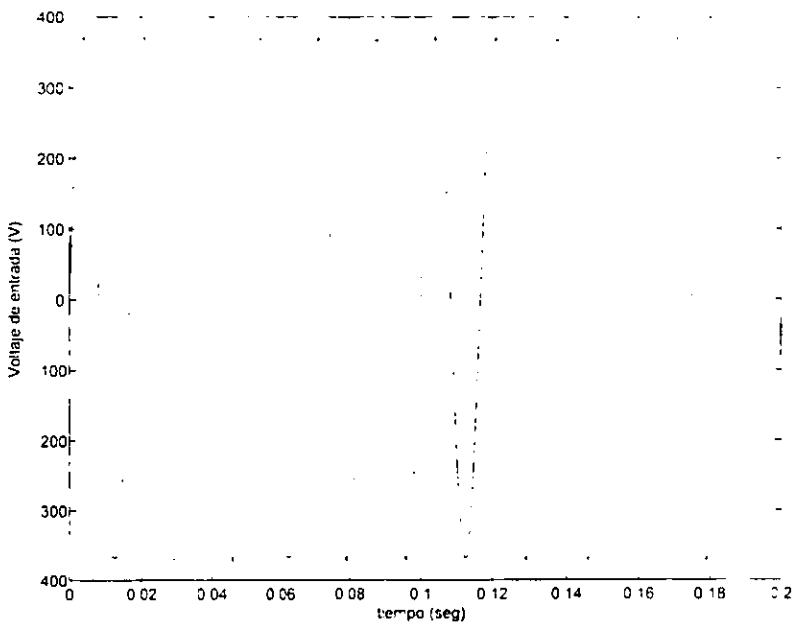

Figura 4.3: Voltaje de entrada considerado para la simulación

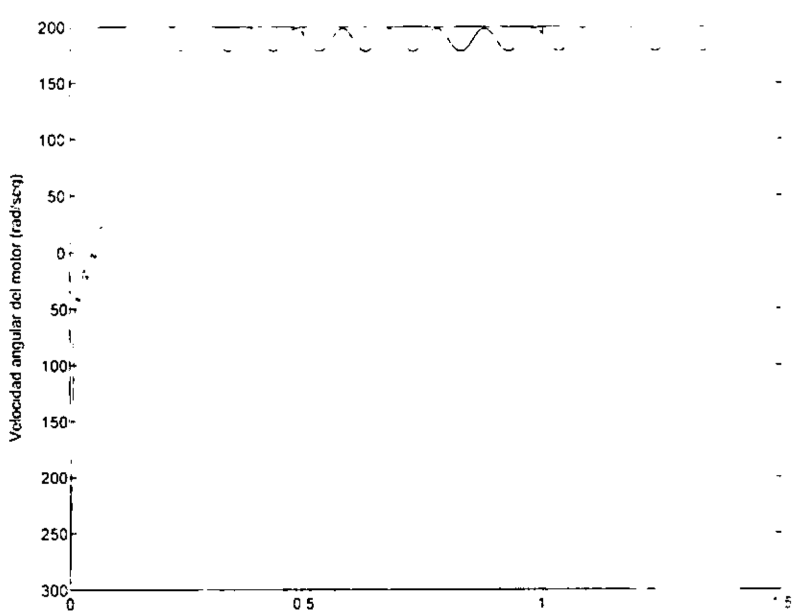

Figura 4.4: Velocidad angular. Simulación con valores nominales.

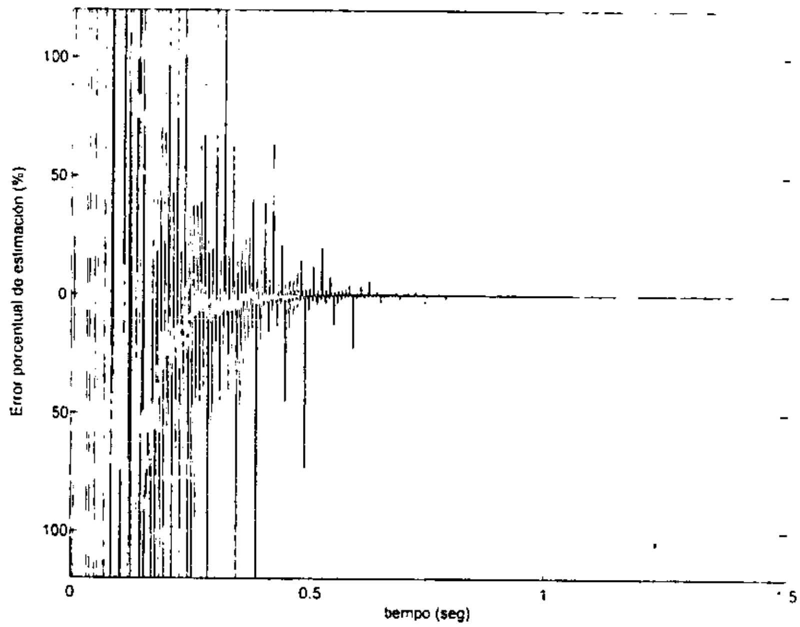

Figura 4.5: Error porcentual de observación del flujo ψ_a. Simulación con valores nominales

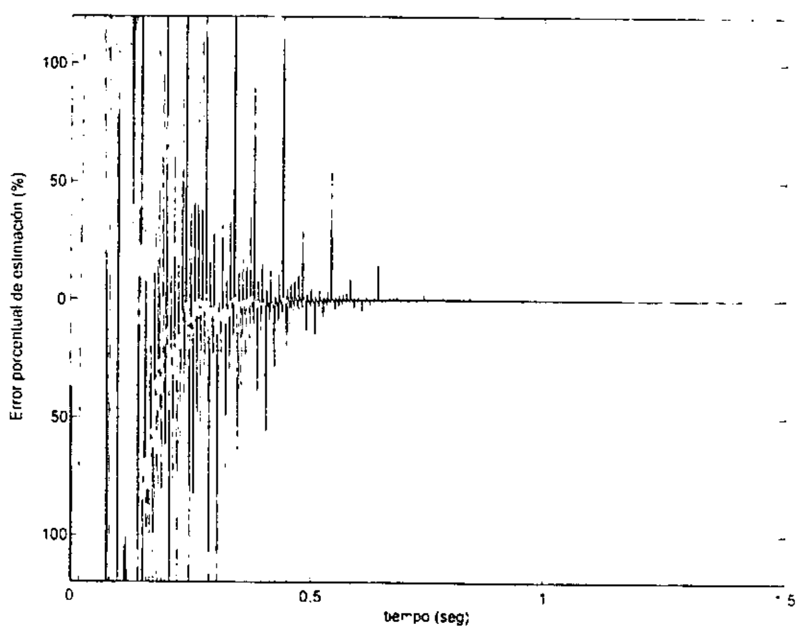

Figura 4.6: Error porcentual de observación del flujo ψ_b. Simulación con valores nominales

Simulación con incertidumbre en J, L_s y R_s. En este caso se considera en la planta una variación del 20% en los valores nominales de los parámetros J, L_s y R_s, los cuales no intervienen en el OED. Los resultados se muestran en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9.

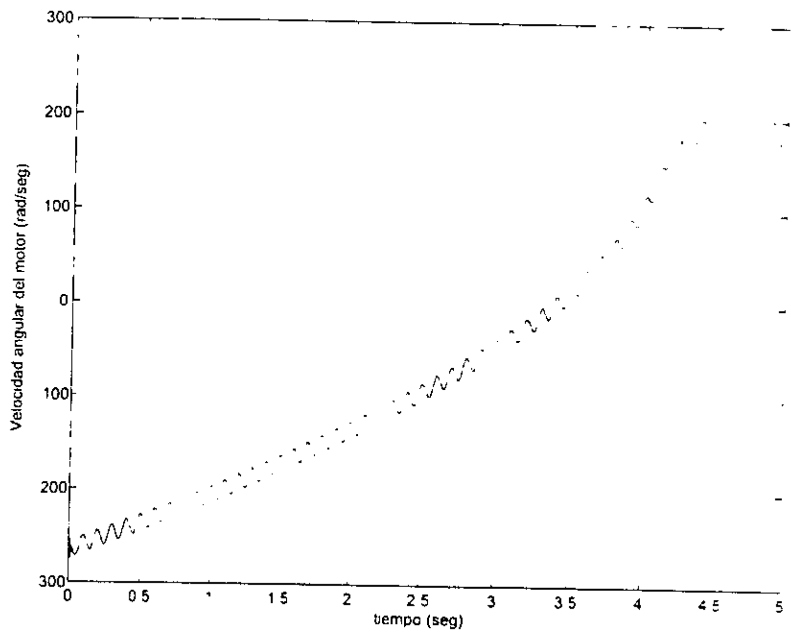

Figura 4.7: Velocidad angular con incertidumbre en J, L_s y R_s.

En la primera gráfica se puede observar que la incertidumbre considerada afecta obviamente a la evolución de la velocidad, pues los valores verdaderos de la planta han cambiado. Por otra parte, los errores de observación también se ven afectados, aunque en menor grado. Al final se observa que, a pesar de la incertidumbre, el error de observación tiende a cero. Esto muestra que el observador es robusto ante los valores del torque de carga, voltajes de entrada y los parámetros J, L_s y R_s.

Simulación con incertidumbre en todos los parámetros. Finalmente se realizó un variación del 10% en todos los parámetros nominales, es decir los parámetros del OED presentan una diferencia con respecto a los presentes verdaderamente en la planta. Las gráficas obtenidas de esta simulación se muestran en las figuras 4.10, 4.11 y 4.12.

La incertidumbre en todos los parámetros considerada en este caso sí proporciona un cambio significativo en la evolución del error de observación, pues se obtiene un error de observación

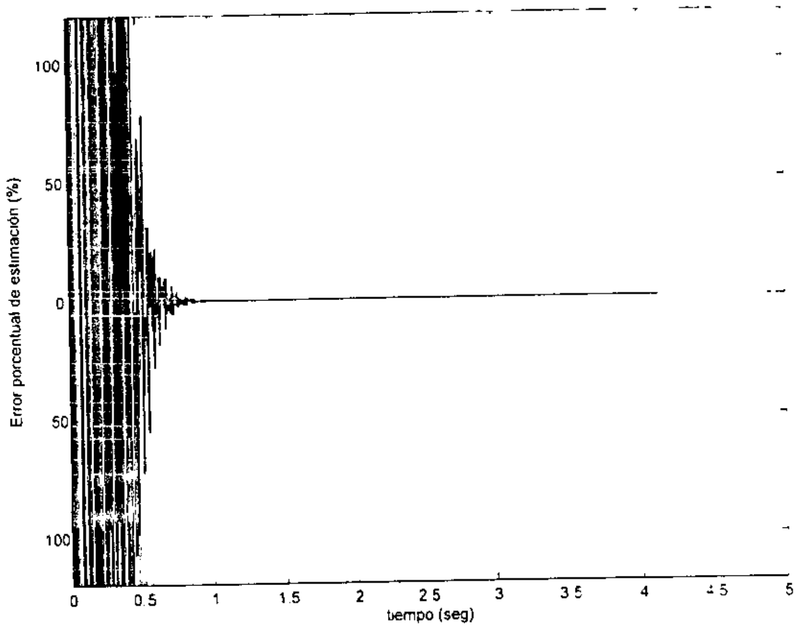

Figura 4.8: Error porcentual de observación del flujo ψ_a con incertidumbre en J, L_s y R_s.

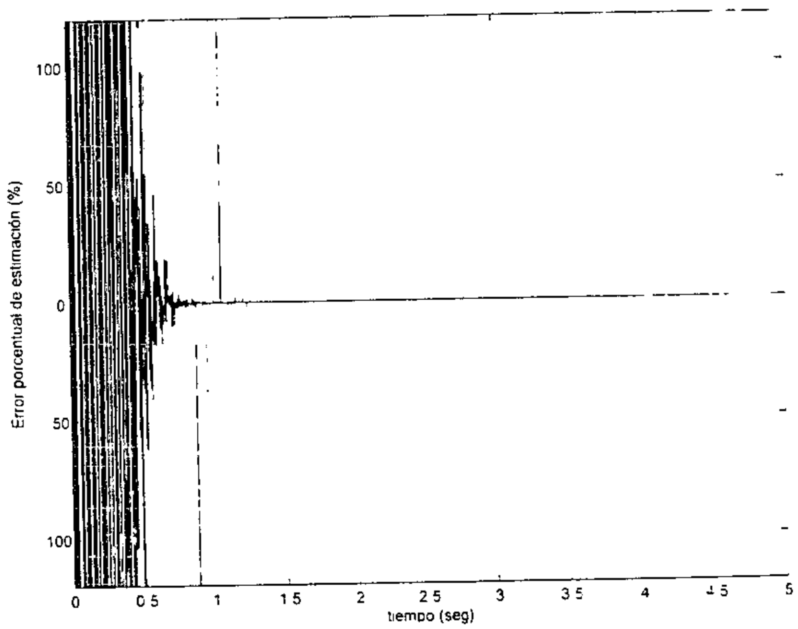

Figura 4.9: Error porcentual de observación del flujo ψ_b con incertidumbre en J, L_s y R_s.

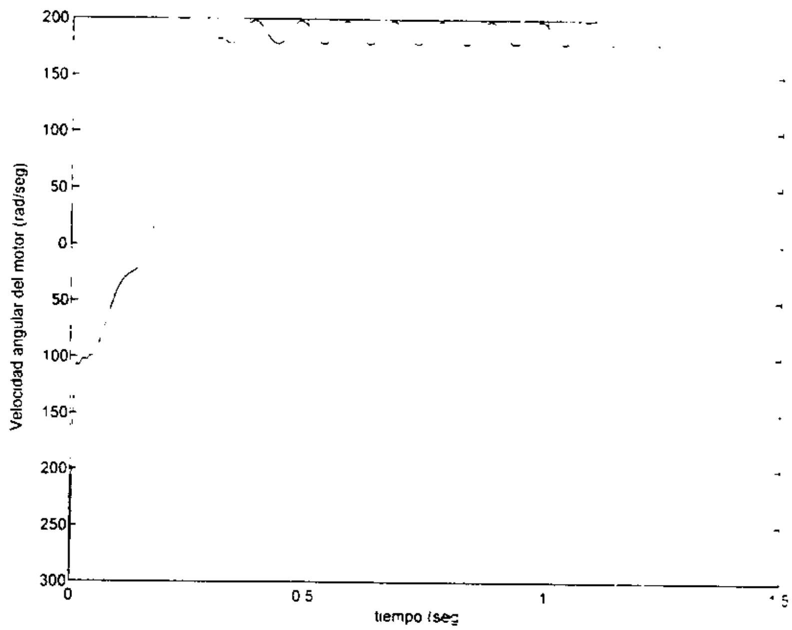

Figura 4.10: Velocidad angular con incertidumbre en todos los parámetros.

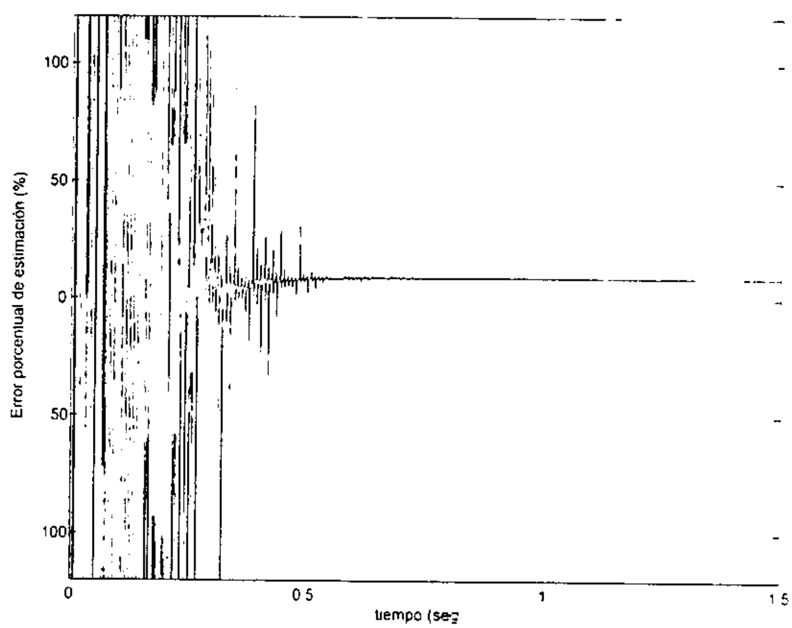

Figura 4.11: Error porcentual de observación de v_a con incertidumbre en todos los parámetros.

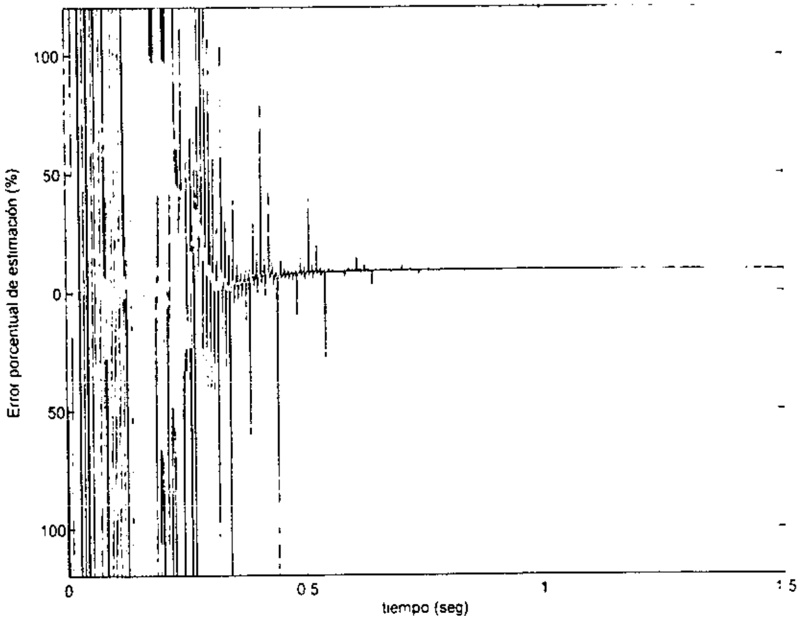

Figura 4.12: Error porcentual de observación de ψ_b con incertidumbre en todos los parámetros.

constante en estado permanente. Este error obtenido es de aproximadamente 9%.

De estas simulaciones, así como de la estructura del OED, se verifica que, para que el observador cumpla con su objetivo, sólo es necesario preocuparse por conocer de manera precisa los parámetros M, L_r y R_r, es decir el OED propuesto es robusto frente a incertidumbres en los parámetros restantes J, L_s y R_s. Esto representa una ventaja frente a otros observadores que sí requieren del conocimiento de todos los parámetros del sistema, pues, como es claro, disminuye la cantidad de información que hay que determinar de manera precisa a partir del sistema físico.

Capítulo 5

Conclusiones

El interés de este trabajo fue el de interrelacionar tres conceptos importantes dentro de la teoría de control: dos relacionados con la pasividad, las pasivizaciones por retroalimentación de estados y por inyección de la salida, y los observadores con entradas desconocidas. Esta tercia de conceptos puede ser representada en un diagrama de forma triangular del tipo

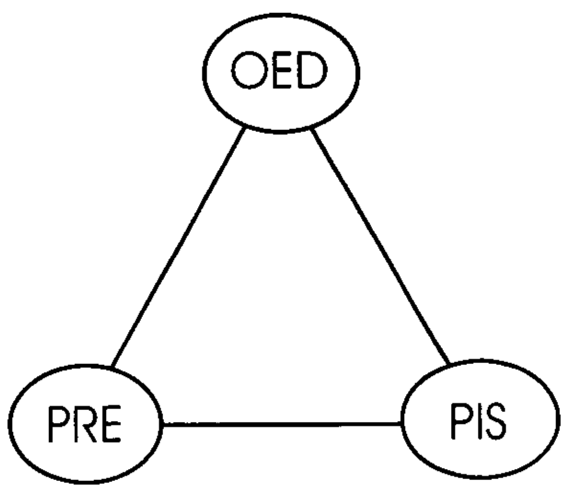

Figura 5.1: Esquema triangular encontrado para el caso lineal.

El primer resultado importante de este trabajo es la demostración de la equivalencia completa entre los tres conceptos para sistemas multivariables LIT. De esta manera, el diagrama triangular se encuentra completo y cada uno de sus lados representa la equivalencia correspondiente. Estas interrelaciones, desconocidas hasta ahora, asocian estrechamente tres conceptos que inicialmente parecen independientes y, además, resultan herramientas potenciales que servirían para extender el estudio de los OED.

La equivalencia resultante entre la pasivización por inyección de salida y los OED resulta especialmente atractiva, pues abre la posibilidad de proponer metodologías para construir un OED para el sistema, dado que su estructura es adecuada para tales fines. Aunque ya existen algunas metodologías de diseño de OED para sistemas lineales, esta metodología tendría la particularidad de que, al estar cimentada en el concepto de pasividad, podría ser sujeta a una generalización, con ciertas restricciones, al caso no lineal.

Con este fin, la relación triangulada de estos conceptos se extendió, de cierta manera, a los sistemas no lineales. En este caso, como se esperaba, no se mantuvieron aquellas relaciones de equivalencia presentes en los sistemas lineales, sin embargo, también se obtuvieron resultados alentadores. Bajo una condición adicional a las dos consideraciones iniciales, se estableció una equivalencia entre los dos tipos de pasivización y con ella dos relaciones unidireccionales entre la existencia de OED y ambos tipos de pasivización: si un sistema no lineal MIMO posee un OED entonces será pasivizable tanto por retroalimentación de estados como por inyección de la salida. Este resultado representa un avance importante en la búsqueda de condiciones y restricciones que conformen una relación más cercana entre los tres conceptos de interés con el fin de proponer una metodología de diseño para los OED.

En la relación OED-PRE, un contraejemplo sencillo (sistema SISO) mostró que la implicación contraria a la encontrada no es cierta en general. La causa de que ambos conceptos sean equivalentes en el caso lineal pero no para sistemas no lineales es, a nuestro juicio, la falta de uniformidad, con respecto a las trayectorias del sistema, del concepto de pasividad (y por ende de pasivización). Esta uniformidad es una consecuencia de la linealidad, donde ambos conceptos coinciden. Esto implica que los sistemas que poseen OED poseen propiedades de pasividad más uniformes y que constituyen una clase importante de los sistemas pasivizables por retroalimentación de estados. La búsqueda de las propiedades en términos de pasividad que poseen los OED es un tema de investigación a futuro por sí solo.

Para la relación PRE-PIS se lograron proponer condiciones suficientes, bajo la cuales existe equivalencia entre ambos conceptos. Estas condiciones son: que el sistema sea de fase mínima (débilmente) global, y una condición sobre las no linealidades del sistema. En el caso particular del motor no se siguió esa línea de condiciones suficientes encontradas porque se mostró que la correspondiente a las no linealidades no se satisface. En consecuencia, se aplicó directamente la inyección de salida al sistema en cuestión. El resultado obtenido presenta algunas diferencias al presentado en el caso general con respecto a la elección de la inyección de la salida, sin embargo también se logra mostrar que el sistema es pasivizable por este medio. Esto nos hace pensar que la condición que no se cumple puede ser entonces relajada y, de esta manera, se obtendría una mejor caracterización de esta relación PRE-PIS.

Cabe señalar que esta parte del trabajo de tesis ha sido utilizada para formalizar en [Rocha-Cózatl & Moreno, 2001] esas condiciones suficientes con el fin de pasivizar un sistema por medio de una inyección de la salida. Al igual que en el presente trabajo, en [Rocha-Cózatl & Moreno, 2001] se realiza un análisis comparativo entre las condiciones suficientes para la pasivización por inyección de la salida y las condiciones necesarias y suficientes para realizar una pasivización por retroalimentación de estados.

El ejemplo del motor de inducción también resultó muy útil para mostrar diversos puntos.

- se ilustró, de manera clara, que la condición de existencia del OED es más fuerte que la condición para pasivizar el sistema por una retroalimentación de estados.
- se apoya la idea de que es posible que muchos de los sistemas físicos posean ciertas propiedades adicionales que permitan asegurar que son pasivizables por retroalimentación de estados y por inyección de salida, y que, además, exista un OED para ellos.
- se logró proponer un OED de orden reducido en donde se realizó la estimación de los flujos.
- de las simulaciones realizadas para este Observador se pudo verificar, además de su

funcionamiento, la robustez del mismo ante algunos de los parámetros del motor y las entradas desconocidas.

Bibliografía

[Aeyels, 1981] D. Aeyels. "Generic observability of differentiable systems". *SIAM J. Control and Optimization*. 19:595-603. 1981.

[Arcak & Kokotovic, 1999] M. Arcak & P. Kokotovic. "Nonlinear observers: a circle criterion design". *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999. Vol. 5. 4872-4876.

[Berghuis & Nijmeijer, 1993] H. Berghuis & H. Nijmeijer. "A passivity approach to controller-observer design for robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1993. 740-754.

[Busawon et al., 1999] K. Busawon, J. de Leon-Morales, J.P. Barbot & M. de los Angeles. "Robust flux observer design for induction motors". *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. 1999. Vol. 1, 88-89.

[Byrnes et al., 1991] C.I. Byrnes, A. Isidori & J.C. Willems. "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36 (1991). 1228-1240.

[Byrnes & Lin, 1993] C.I. Byrnes & Wei Lin. "Discrete-time lossless systems, feedback equivalence and passivity". *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. 1993, Vol. 2 1775-1781.

[Chen, 1984] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, New York, N.Y. 1984.

[Chu, 2000] D. Chu. "Disturbace decoupled observer design for linear time-invariant systems: a matrix pencil approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. Vol. 45, 1569-1575.

[Dalla Mora et al., 2000] M. Dalla Mora, A. Germani & C. Manes. "Design of state observers from a drift-observability property". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. 1536-1540.

[Ding et al., 1990] X. Ding, P.M. Frank & L. Guo. "Robust observer design via factorization approach". *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*. 1990. Vol. 6, 3623-3628.

[Fradkov & Hill. 1998] A.L. Fradkov & D.J. Hill. "Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems". *Automatica*. 34 (1998): 697-703.

[Gauthier & Bornard, 1981] J.P. Gauthier & G. Bornard. "Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(4): 922-926. 1981.

[Gauthier et al., 1991] J.P. Gauthier, H. Hammouri & I. Kupka. "Observers for nonlinear systems". *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. 1991. Vol. 2. 1483-1489.

[Gauthier et al., 1992] J.P. Gauthier, H. Hammouri & S. Othman. "A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 37 6): 875-880. 1992.

[Hautus, 1983] M. L. J. Hautus. "Strong detectability and observers". *Linear Algebra and its Applications*. 50 (1983). 353-368.

[Herman & Krener, 1997] R. Herman & A. J. Krener. "Nonlinear controllability and observability". *IEEE Trans. Automat. Control*. AC-22(5): 728-740. 1997.

[Hou & Müller, 1992] M. Hou & P.C. Müller. "Design of Observers for linear systems with unknown inputs". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992. Vol. 37, 871-875.

[Hou & Müller, 1994] M. Hou & P.C. Müller. "Disturbace decoupled observer design: a unified viewpoint". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1994. Vol. 39, 1338-1341.

[Isidori, 1995] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3th ed. Berlin, Springer Verlag, 1995.

[Jiang & Hill, 1998] Z.-P. Jiang & D.J. Hill. "Passivity and Disturbance Attenuation via Output Feedback for Uncertain Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*. 43 (1998): 992-997.

[Khalil, 1996] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 2nd. ed. Upper Saddle River, N.J., Prentice Hall, 1996.

[Manes et al., 1994] C. Manes. F. Parasiliti & M. Tursini. "A comparative study of rotor flux estimation in induction motors with a nonlinear observer and the extended Kalman filter". *20th International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1994. IECON'94*. Vol. 3. 2149-2154

[Maquin et al., 1994] D. Maquin. M. Darouach & J. Ragot. "Robust observer for continuous uncertain systems". *IEEE International Con-*

ference on Systems. Man and Cybernetics. 1994. Humans. Information and Technology. Vol. 3. 2039-2041.

[Marino et al., 1993] R. Marino. S. Peresada & P. Valigi. "Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors". *IEEE Transactions on Automatic Control* 1993. Vol. 38, 208-221.

[Marino & Tomei, 1995] R. Marino & Tomei, P. *Nonlinear Control Design: Geometric. Adaptive & Robust.* London. Prentice Hall. 1995.

[Moreno, 2001] J. Moreno. "Existence of Unknown Input Observers and Feedback Passivity for linear systems". *Submitted to the 40th IEEE Conference on Decision & Control.* Orlando. Fl.,USA. 2001.

[Moreno(1), 2000] J. Moreno. "Observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales". *Memorias del Primer Taller Nacional de Observación y Estimación de Sistemas No Lineales y sus Aplicaciones.* México, D.F.. México. Marzo 27-28. 2000. pp. 117-135.

[Moreno(2), 2000] J. Moreno. "Unknown input observers for SISO nonlinear systems". *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision & Control.* Sydney. Australia. Dec. 2000.

[Moreno & Rocha-Cózatl, 2000] J. Moreno & E. Rocha-Cózatl. "Pasivización y existencia de observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales SISO". *Sexta conferencia de Ingeniería Eléctrica.* CINVESTAV-IPN. México. D. F. México. Septiembre de 2000.

[Nicklasson et al., 1997] P.J. Nicklasson. R. Ortega & G. Espinosa-Perez. "Passivity-based control of a class of Blondel-Park transformable electric machines". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 629-647.

[Nicklasson et al., 1994] P.J. Nicklasson, R. Ortega & G. Espinosa-Perez. "Passivity-based control of the general rotating electrical machine". *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. 1994. Vol 4, 4018-4023.

[Nijmeijer & van der Schaft. 1990] H. Nijmeijer & A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. New York. 1990.

[Ortega, 1990] R. Ortega. "On global stabilization of cascaded nonlinear systems". *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, 1990. Vol. 6. 3388-3389.

[Ortega & Espinosa. 1991] R. Ortega & G. Espinosa. "Passivity properties of induction motors: application to flux observer design". *Conference Record of the 1991 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*. Vol. 1, 65, 71.

[Ortega et al., 1997] R. Ortega, Z.P. Jiang & D.J. Hill. "Passivity-based control of nonlinear systems: a tutorial". *Proceedings of the American Control Conference. 1997*. 2633-2637.

[Ortega et al., 1994] R. Ortega, A. Loria, R. Kelly & L. Praly. "On passivity-based output feedback global stabilization of Euler-Lagrange systems". *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. 1994. Vol. 1. 381-386.

[Ortega et al., 1996] R. Ortega, P.J. Nicklasson & G. Espinosa-Perez. "On speed control of induction motors". *Automatica*. Vol. 32, No. 3, pp. 455-460. 1996.

[Rocha-Cózatl & Moreno. 2001] E. Rocha-Cózatl & J. Moreno. "Passification by output injection of nonlinear systems". *Submitted to the 2001 IEEE*

Conference on Control Applications. Mexico City, Mexico. Sept. 2001.

[Sepulchre et. al., 1997] R. Sepulchre, M. Jankovic & P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control.* London. Springer-Verlag. 1997.

[van der Schaft, 2000] A. van der Schaft. *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control.* 2nd. ed. London. Springer-Verlag. 2000.

[Vidyasagar, 1993] M Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. 2nd. ed.. USA. Prentice-Hall. 1993.

[Xiong & Saif, 1999] Yi Xiong & M. Saif. "Robust fault isolation observer design". *Proceedings of the American Control Conference. 1999.* Vol. 3, 2077-2081.

[Yuhong & Loparo, 1998] Z. Yuhong & K.A. Loparo. "Adaptive flux observer for induction motors". *Proceedings of the 1998 American Control Conference.* Vol. 4, 2329-2333.