D0365

6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DINAMICA DE HOMEOMORFISMOS Y ESPECTRA DE AUTOMORFISMOS

292207

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A :

SERGIO PLATA ITURRALDE

DIRECTOR DE TESIS: DR. RICARDO BERLANGA ZUBIAGA

MEXICO, D. F. 2001

Dinámica de Homeomorfismos y Espectra de Automorfismos

Indice

Introducción

El trabajo que se presenta tiene como objetivo principal analizar los espectros de transformaciones ergódicas en grupos compactos abelianos. En especial, se estudia al grupo del círculo S^1 y sus rotaciones.

Se analiza un parámetro muy importante de las rotaciones en S^1 que es el número de rotación. Este número indica la velocidad con que avanza una rotación en el círculo, si este número es racional entonces la rotación tiene puntos periódicos.

Se verá en especial en la sección 2) que existen rotaciones que no son periódicas y cuyas órbitas forman conjuntos densos en S^1. Estas rotaciones son ergódicas y su número de rotación es irracional.

El trabajo se realizó tratando de encontrar un tema que tuviera que exigir un conocimiento general de varias áreas de las matemáticas avanzadas que se estudian a nivel maestría.

Hacer este trabajo requirió del entendimiento en diversas áreas de las matemáticas y más que especializarse en una sola es una conjunción de ellas. La teoría ergódica, que en especial estudia las propiedades estadísticas de las funciones invariantes en espacios medibles, requiere no solamente de las bases de la teoría de la medida, sino también de ramas de las matemáticas que se estudian independientemente como la topología, la teoría de grupos, y la teoría espectral.

El trabajo está esencialmente autocontenido, sin embargo, el lector deberá tener conocimientos generales de cálculo avanzado, y de álgebra lineal, (ver Loomis, 1990).

Este trabajo se divide en cuatro partes que son definiciones y generalidades, que incluyen los subtemas de dinámica, grupos y topología. La primer sección trata los preliminares, sin embargo, cuentan con ejemplos significativos que se retoman en las secciones más importantes del trabajo dándoles cada vez mayor estructura y robustez mientras más se avanza en la lectura.

La segunda sección donde se enuncia el teorema del número de rotación. La tercera parte, donde se analizan los temas de recurrencia y ergodicidad y por último la sección de teoría espectral.

La primera parte forma una base de conceptos preliminares para desarrollar la teoría y demostrar los teoremas de las siguientes partes, donde se explican los temas centrales del trabajo.

La teoría ergódica es el estudio matemático del comportamiento promedio en el largo plazo de los sistemas. Como se verá en el trabajo, el conjunto de todos los estados del sistema forman al espacio X y la evolución del sistema se representa por una transformación T de X en sí mismo. En general a esta T se le ve como una acción de grupo de $\mathbb{Z}$ en X, y el trabajo se concentra en la acción de las iteradas de una transformación.

Historicamente, la idea de ergodicidad, surge de la hipótesis ergódica de Boltzmann. La palabra ergódico proviene del griego "camino de energía". Era deseable que la media de tiempo de una variable física coincidiera con su media espacial, esto es, que en el promedio de tiempo en el largo plazo siguiendo una historia (u órbita) debería ser igual al promedio de todas las posibles condiciones iniciales, o lo que es equivalente, al promedio en cualquier momento de todas las posibles órbitas.

En especial, si X es un espacio medible, y T una transformación que preserva medida nos encontramos en el campo de la teoría ergódica. En este caso, la órbitas bajo T nos dicen la historia del sistema desde el pasado infinito hasta el futuro infinito. La sigma álgebra de X se puede pensar como el conjunto de los eventos observables bajo la transformación T y la medida μ la probabilidad de que ocurran esos eventos.

En mecánica estadística, en teoría de la información y otras áreas de las matemáticas aplicadas, es relevante y hasta necesario conocer qué sucede después de muchos y sucesivos cambios en el sistema. Estos cambios están regidos por una ley de trasnformación denotada por T [Petersen, 1983].

Conocer el comportamiento del promedio temporal cuando el número de iteraciones es muy grande, es importante, y unos de los teoremas más significativos de esta teoría nos dice que este promedio es igual al promedio espacial (si esto sucede para alguna T, se dice que es ergódica) [Cornfels, 1982].

El análisis de las condiciones bajo las cuales esta igualdad de medias espaciales y temporales se dan es un estudio esencial de la teoría ergódica. Este estudio se relaciona directamente con la investigación de las propiedades de recurrencia en el comportamiento de las órbitas, que fue un punto central de este trabajo (ver sección 3, pag. 39).

Además, en este trabajo se describirán herramientas matemáticas para identificar las condiciones para las cuales esta igualdad de espacio y tiempo se dan, unidas con la teoría espectral (sección 4).

Por último, la aportación personal en este trabajo se concentra en dos partes: a) La estructura misma del trabajo que comienza en conceptos simples pero que a través del trabajo se involucran en temas complicados de las matemáticas avanzadas como son la teoría ergódica y la teoría espectral. Además, se abordan varios conceptos de ramas distintas de las matemáticas conectándolos de una manera concisa alrededor del estudio de las rotaciones en el círculo; Esta ruta es única tomando en cuenta lo conciso del trabajo y b) La demostración e interprtación geométrica del teorema del número de rotación.

1 Definiciones y Generalidades

Por un lado, se puede decir que la teoría ergódica estudia la categoría de los espacios de medida en el que los morfismos son las transformaciones que la preservan, aunque para otros como Ya Sinai, el principal problema de la teoría ergódica consiste en el estudio de las propiedades estadísticas de los grupos de movimientos de objetos no aleatorios.

Dar un ejemplo de algún sistema ergódico resultaría complicado, simplemente con estudiar un sistema tan simple como $z \mapsto e^{i\sqrt{2}\theta}$, para toda $z \in \mathbb{C}$ con $\| z \| = 1$ requeriría de un estudio minucioso de una serie de estructuras en el círculo unitario que no son obvias en las matemáticas elementales.

Por otro lado, la teoría espectral ataca el problema de estudiar la geometría de las transformaciones lineales $T : V \to V$. En particular, en dimensión finita, es central el problema de encontrar, si es posible, una base $\gamma = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ de V y constantes $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, tales que

$$T\bar{v}_j = \lambda v_j$$

A los valores λ se les llama eigenvalores. En este caso, decimos que T es diagonalizable y la componente actúa homoteticamente a lo largo de las direcciones básicas y en el resto se interpola linealmente. Esto no es siempre posible como en el caso de la aplicación lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando los eigenvalores para la aplicación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema se resuelve con el determinante de la matriz:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 = 0$$

A la expresión anterior se le llama el polinomio característico, por lo que

$$\lambda = 1$$

Por lo tanto si se cumple que $T\bar{x} = \bar{x}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y lo anterior sucede si y solo si $x = 0$. Por lo tanto, el espacio de eigenvectores consiste de

$$\{\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} | y \in \mathbb{C}\} = E_1$$

el cual tiene dimensión 1 ($dimE_1 = 1$).

Una abstracción que se debe estudiar en su propio derecho es cuando $dimV = \infty$.

A lo largo de este trabajo se estudiaran tanto los sistemas ergódicos como sus valores y vectores característicos, para ello se combinarán conceptos de varias áreas de las matemáticas como teoría de grupos, topología, topología algebráica, teoría de la medida y álgebra lineal.

Dinámica

Los homeomorfismos y flujos en los toros son de particular importancia desde varios puntos de vista. Estas son clases muy especiales de sistemas dinámicos, como se verá más adelante.

Definición. Sea X un conjunto, $\phi : \mathbb{Z} \times X \to X$, si $T : X \to X$ una función arbitraria, y $\phi(n, x) = T^n(x)$, entonces T es un sistema dinámico discreto.

Para poner un ejemplo de sistema dinámico, tómese un número real, y calcule el coseno de ese valor, al resultado, vuélvale a calcular el coseno, y al resultado lo mismo, así, se tendrá lo siguiente:

$$\underbrace{cos(cos(cos(cos(cos(...(cos(x)))))))}_{n \ \ veces}$$

En este sistema dinámico se puede pronosticar que el primer valor se encontrará en el intervalo $[-1, 1]$, y el segundo también, pero una información que nos interesa en el estudio de los sistemas dinámicos es si se itera la función n veces a donde manda el proceso los valores de la función.

Una parte importante que se debe estudiar de los sistemas dinámicos son las órbitas, que son precisamente los valores donde la función cae cada vez que se itera. La definición de órbita se da a continuación y se divide en órbitas hacia adelante y hacia atrás.

Definición. La órbita hacia adelante de x es el conjunto de puntos $x, T(x), T^2(x), ...$ y se denota por $O^+(x)$. Es decir, $T^n(x) = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T(x)}_{n \ \ veces}$. Para el caso de biyecciones, la órbita completa es el conjunto de puntos de la forma $T^n(x)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Es decir, se puede definir la órbita hacia atrás $O^-(x) = x, T^{-1}(x), T^{-2}(x), ...$.

Las órbitas más simples surgen de las siguientes tres definiciones:

Definición. El punto x es un punto fijo de T, si $T(x) = x$.

Por ejemplo, bajo la función idéntica $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ todos los puntos son fijos, ya que para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $T(x) = x$.

Definición. El punto x es un punto periódico de T si $T^n(x) = x$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$.

Es decir, si x es periódico, entonces existe un entero positivo n tal que $T^n(x) = x$ y el más pequeño entero positivo para el cual sucede se le llama el período de la órbita. Si n es el período de la órbita de T, entonces, $x, T(x), T^2(x), ..., T^{n-1}(x)$ son puntos distintos.

Definición. Un punto x es finalmente periódico de período n si x no es periódico, pero existe una $m > 0$ tal que $T^{n+i}(x) = T^i(x)$ para toda $i \geq m$. Esto es, que $T^i(x)$ es periódico para $i \geq m$.

Un objetivo del estudio de los sistemas dinámicos es entender la naturaleza de las órbitas, encontrar si éstas son fijas, periódicas, finalmente periódicas, etc. Hacer esto es difícil, y depende de la naturaleza del sistema, por ejemplo, si se quiere encontrar los puntos periódicos de período n en un sistema dinámico cuya función es una función cuadrática, se tendría que resolver la ecuación $T^n(x) = x$ que es una ecuación polinomial de grado 2^n.

En ocasiones (cuando la función se puede graficar) encontrar puntos fijos o periódicos en un sistema dinámico se logra mediante un análisis gráfico, que se describe a continuación. Esta técnica, si bien no nos arroja resultados numéricos de los puntos que son o no periódicos o fijos, nos ayuda a entender cualitativamente la naturaleza del sistema dado.

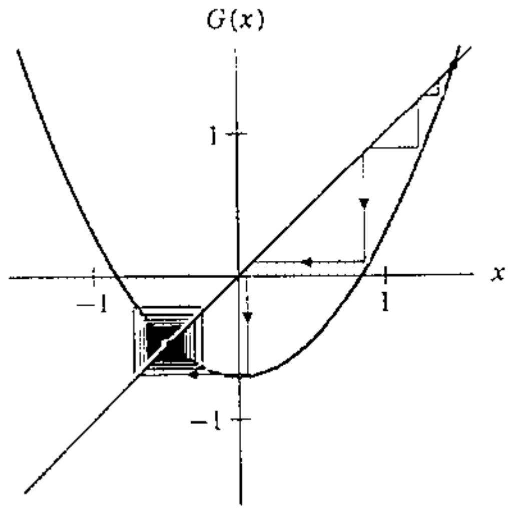
En el ejemplo del sistema dinámico donde $T(x) = cos(x)$ si se grafica la función $cos(x)$ ésta puede dar muy buena información acerca de la primera iteración, pero de las siguientes no.

No es muy obvio como encontar en que punto cae la función después de n veces que ésta se iteró, cuales son sus puntos fijos o periódicos, es decir cuando se da que $T^n(x) = x$.

Para identificar estos puntos, grafíquese la función del sistema dinámico, en el ejemplo anterior fue $cos(x)$, y después trácese la línea diagonal $\mathcal{D} = \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$.

Supongamos que se comienza en algún punto p del dominio de la función. La intersección con la función se encuentra siguiendo una línea vertical hasta encontrar la grafica de la función en el punto $(p, T(p))$. Del punto $(p, T(p))$ se traza una línea horizontal hasta $\mathcal{D}$, y entonces se estará parado sobre el punto $(T(p), T(p))$, después se sigue por una línea vertical hasta intersectar nuevamente la función, entonces se estará en el punto $(T(p), T(T(p)))$ (encontrando así los puntos de la segunda iteración), si se sigue el proceso trazando una línea horizontal hasta encontrar nuevamente a $\mathcal{D}$ nos escontraremos en el punto $(T(T(p)), (T(T(p)))$ y así sucesivamente se puede encontrar el punto donde la n-ésima iterada de la función intersecta a la idéntica, y si el sistema diverge o converge hacia algún punto, etc..

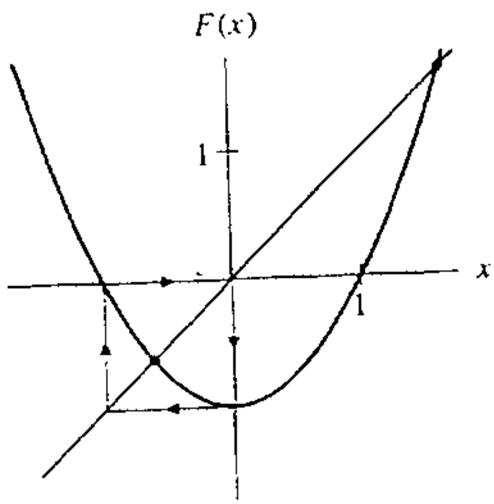
Por ejemplo, supongamos que el sistema que se quiere analizar es $T(x) = x^2 - 0.7$ y se comienza en el punto $x_0 = 1.4$ entonces siguiendo el proceso descrito en el párrafo anterior, el sistema se acercará a un valor entre menos uno y cero mientras más se itere la función T. Esto se ilustra en la siguiente figura, donde se observa el análisis gráfico del sistema dinámico T.



Gráfica tomada de [Blanchard, 1998,p. 613]

Sin embargo, si el punto inicial es $x_0 = 2$, entonces el proceso diverge a $+\infty$.

Para ilustrar un sistema con una órbita periódica de período dos se tiene el sistema dinámico $T(x) = x^2 - 1$, nótese que $F(0) = -1$ y $F(-1) = 0$.



Gráfica tomada de [Blanchard, 1998, p.614]

Grupos

El círculo no sólo es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que cumplen con $x^2 + y^2 = 1$, también el círculo tiene más estructura algebráica como se verá más adelante. Para ello se necesitan las siguientes definiciones:

Definición. Por grupo se entenderá un conjunto G sujeto a:

i) Una operación binaria asociativa $*$ con:

ii) Un elemento identidad, i.e. un $e \in G$ tal que $g * e = e * g = g$, para toda $g \in G$, y donde

iii) Todo elemento sea invertible, i.e. para toda $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. En general se omite el símbolo $*$ y sólo se denota gh en vez de $g * h$.

iv) Se dice que un grupo G es conmutativo o abeliano si $*$ es conmutativa para todo $g, h \in G$ $(gh = hg)$.

En este trabajo, sólo se utilizarán grupos abelianos, que son los grupos conmutativos.

Como ejemplo de grupo, tenemos al círculo S^1 con respecto a la multiplicación en $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{R}mod2\pi$ es el conjunto de las clases de equivalencia $[\theta]$ en donde $\theta_1 \sim \theta_2 mod 2\pi$ si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} \arrow[d, "\theta\mapsto{[\theta]}"] \arrow[dr, "\theta\mapsto e^{i\theta}"] & \\
{[0,2\pi)} \arrow[ur, "inclusion"] \arrow[r, "\theta\mapsto{[\theta]}"'] & \mathbb{R}mod2\pi \arrow[r, "{[\theta]}\mapsto e^{i\theta}"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

Y dado que el producto cartesiano de grupos es grupo, entonces el toro $S^1 \times S^1$ es un grupo con la siguiente operación

$$(z_1, w_1) * (z_2, w_2) = (z_1 z_2, w_1 w_2)$$

para toda $z_1, z_2, w_1, w_2 \in S^1$

Definición. Si $\emptyset \neq H \subset G$ y H es cerrado bajo $*$ y la inversión de elementos, entonces se dice que H es un subgrupo de G.

Definición. Sea X un conjunto. El conjunto de biyecciones de X en X, es un grupo, teniendo a la composición de funciones como operación. A este grupo se le llama grupo de permutaciones de X y se denota por $S(X)$.

Definición. Sean G y S grupos. A una función $\varphi : G \to S$, se le llama homomorfismo si $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, para toda $g, h \in G$.

Definición. Si $S = S(X)$ y $\varphi : G \to S$ es un homomorfismo, entonces se dice que G actua sobre X a través de φ y φ es una acción de G en X.

Es usual denotar la acción por $\hat{\varphi} : G \times X \to X$ tal que $\hat{\varphi}(g, x) = \varphi(g)(x)$ o $(g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$.

Definición. Sea H un subgrupo de G. La clase lateral derecha de $g \in G$ bajo H es el conjunto:

$$gH = \{gh | h \in H\}$$

Todas estas clases laterales forman una partición de G que denotaremos por G/H.

Definición. El núcleo o Kernel de φ denotado por $Ker(\varphi)$ es el subgrupo:

$$Ker(\varphi) = \{g \subset G | \varphi(g) = e\}$$

Donde e es el idéntico de S.

Otros ejemplos de grupo son los llamados grupos de matrices. Si $M(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, entonces los siguientes son grupos bajo la multiplicación de matrices:

$$GI(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | detA \neq 0\}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GI(n, \mathbb{R}) | AA^t = Id\}$$

$$SI(n, \mathbb{R}) = \{A \in GI(n, \mathbb{R}) | detA = 1\}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SI(n, \mathbb{R})$$

Obsérvese que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ del ejemplo de la página 1 está en $Sl(2, \mathbb{R})$.

La correspondencia

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Define un isomorfismo de grupos entre S^1 y $SO(2, \mathbb{R})$

Para completar es fácil ver que $Gl(n, \mathbb{R})$ o cualquiera de sus subgrupos actúa en $\mathbb{R}^n$ con la regla $(A, \bar{x}) \mapsto A\bar{x}$

Topología

El área de las matemáticas a la que se ocupa este trabajo está ligada a muchas disciplinas dentro de las mismas matemáticas, a diferencia de otras muy especializadas que profundizan en un sólo tema o área. Es por eso que se requiere el conocimiento diversificado de disciplinas independientes que en su propio derecho merecen ser estudiadas como la teoría de grupos, los sistemas dinámicos, la teoría de la medida, la topología, etc. por lo tanto en estas secciones preliminares se abarcarán distintos temas, con conceptos que después se utilizarán en la teoría ergodica y espectral.

Definición. Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X, llamados abiertos, que cumplen con las siguientes propiedades:

a) Si A es cualquier conjunto, y $U_\alpha \in \tau$ para toda $\alpha \in A$, entonces $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$

b) Si $U_\alpha \in \tau$ para cada α en algún conjunto finito F, entonces $\cap_{\alpha \in F} U_\alpha \in \tau$; y

c)$X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$

Definición. Un espacio topológico es una pareja (X, τ) donde τ es una topología en X.

Definición. Sea $f : X \to Y$, se dice que f es continua si para toda $V \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Definición. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto F de X se dice que es cerrado si su complemento F^c es abierto.

Definición. Si E es un subconjunto de un espacio topológico X, la cerradura de E es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a E. Se denota a la cerradura de E por $\bar{E}$.

Definición. Sea X un espacio topológico, y sea $D \in X$. Se dice que D es denso en X si $\bar{D} = X$. Más generalmente se dice que D es denso en E para algún $E \subset X$ si $E \subset \bar{D}$.

Definición. Un espacio topológico en el que existe un conjunto denso numerable, se llama separable.

Definición. Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$. Se dice que f es un homeomorfismo de X en Y si f es biyectiva y f y f^{-1} son continuas.

Definición. Sea X un espacio topológico, $E \subset X$. Una cubierta abierta arbitraria de E es una colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $E \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Si $B \subset A$, la colección $\mathcal{V} = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ se llama una subcubierta de $\mathcal{U}$ si es una cubierta en sí misma.

Definición. Sea X un espacio topológico. Se dice que un subconjunto K de X es compacto si cada cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.

El teorema clásico de Heine-Borel, dice que los compactos en $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados. [Royden, p. 42]

Un espacio vectorial sobre los reales es un grupo abeliano con una multiplicación por escalares $\mathbb{R} \times V \to V$ con las propiedades de espacio vectorial ya conocidas.

Si $Hom(V)$ es el grupo de homomorfismos del grupo aditivo V y $\mathbb{R}^*$ es el grupo multiplicativo de los reales distintos de cero, entonces la multiplicación por escalares define una acción de $\mathbb{R}^*$ en $Hom(V)$, tal que

$$(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$$

Lo anterior es la distributividad en términos de la estructura aditiva en $\mathbb{R}$.

Definición. Sean V y W espacios vectoriales. Entonces un mapeo o transformación $T : V \to W$ es lineal si $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$ y $T(x\alpha) = xT(\alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in V, x \in \mathbb{R}$

Definición. Sea $T : V \to W$ una trasformación lineal. Si T es biyectiva, entonces se dice que T es un isomorfismo.

Definición. Dos espacios vectoriales V, W son isomorfos, si existe algún isomorfismo entre ellos.

Es sabido que si $V = W = \mathbb{R}^n$ entonces las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo se identifican con $M(n, \mathbb{R})$ y los isomorfismos con $Gl(n, \mathbb{R})$.

Aunque ya se mencionó en secciones anteriores no está de más recalcar que cuando T va de V en sí mismo, pueden suceder cosas especiales, una posibilidad es que $T(\alpha) = x\alpha$ para alguna $x \in \mathbb{R}$. En este caso a α se le llama el eigenvector y a x el eigenvalor.

Definición. Sea $\oplus : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to [0, 2\pi)$, tal que $(\theta_1, \theta_2) \to \theta_1 - \theta_2 (mod 2\pi)$ vía $\oplus$, o bien, $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \theta_2 (mod 2\pi)$ hace de $[0, 2\pi)$ un grupo aditivo isomorfo vía la φ a S^1. (ver diagrama de la página 6).

Si $\varphi[0, 2\pi) \to S^1$ es la biyección y definimos una nueva topología τ en $[0, 2\pi)$ que no corresponda a la que este intervalo hereda como subconjunto de $\mathbb{R}$ definida por:

$$\tau = \{\varphi^{-1}(U) | U \in S^1\}$$

U abierto.

Entonces φ se vuelve no sólo isomorfismo sino homeomorfismo también.

Un levantamiento $f(x)$ de una transformación $T : S^1 \to S^1$ es una función que cumple con:

$$e^{2\pi i f(x)} = T(e^{2\pi i x})$$

El levantamineto es útil porque guarda memoria de la periodicidad del círculo, es decir con el levantamiento se pueden identificar el número de vueltas que T haya dado sobre el círculo. De hecho el teorema del número de rotación que se analizará más adelante calcula el límite sobre f y no sobre T.

La definición formal y general de levantamiento es: Sea X un espacio topológico, sea $\pi : E \to Y$ continua, E, Y espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ continua. Se dice que $f : X \to E$ es un levantamiento de $g = T \circ \varphi$ si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, "\varphi=\pi"] \\
X \arrow[rru, "\hat{g}=f"] \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \arrow[r, "T"] & Y
\end{tikzcd}$$

En Topología la noción de levantamiento es muy general, y en el contexto amplio, f no levanta T sino a la composición $T \circ \varphi$. Pero para efectos de este trabajo, no se necesitará generalizar de ningún modo, por lo tanto, en particular, f siempre existe y f levanta a T.

Para demostrar que el levantamiento siempre existe vease [Greenberg, 1981]

Cabe hacer énfasis en que si T es continua, entonces f es continua, y que dado T existen tantos levantamientos como números en $\mathbb{Z}$. Es decir, si f es un levantamiento, entonces cualquiera otro es de la forma $g = f + 2\pi n$.

2 Teorema del Número de Rotación

Uno de los más importantes parámetros asociados a las transformaciones del círculo, es el número de rotación, que indica la velocidad a la que una rotación se mueve sobre S^1 . Como más adelante se verá, si este número es irracional, entonces la rotación no tiene puntos periódicos y es únicamente ergódica. En realidad este número se calcula con levantamientos asociados a las dichas tranformaciones, pero se dice que el número de rotación es el de la transformación.

Antes de definir el número de rotación, se definirán algunos conceptos, y se precisarán algunos detalles sobre S^1:

Observación: Para un intervalo de longitud menor a 2π, φ es inyectiva y φ preserva orientación. Esto es, si (a, b) es un pequeño intervalo y $b - a < 2\pi$ es naturalmente dirigido de a a b, entonces el arco $e^{ia} \frown e^{ib}$ está dirigido en contra de las manecillas del reloj.

Observación: El intervalo $[0, 2\pi)$ se puede sustituir por cualquier intervalo de longitud 2π. Otra opción clásica es $[-\pi, \pi)$

Conviene observar que si f_1 y f_2 son levantamientos de T, entonces el numero de rotación de f_1 es igual al número de rotación de $f_2 + m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$, debido a la misma definición de levantamiento porque para un entero m, $e^{2\pi i m}$ recurre al mismo punto en el circulo, esto es la recurencia de S^1. Esto garantiza que el número de rotación no depende de sus levantamientos.

En el siguiente teorema se utiliza un tipo especial de levantamiento, que es el que cumple con que $f(x - 1) = f(x)$.

Teorema. Para un homeomorfismo $T : S^1 \to S^1$ que preserva orientación y un levantamiento f que representa a T, el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \alpha$$

existe y no depende de $x \in \mathbb{R}$. El número α es racional si y sólo si el homemorfismo T tiene un punto fijo para alguna iteración diferente de cero.

Demostración.

La demostración se divide en tres partes:

1. Se demuestra que si el límite existe para algún punto específico x_0, entonces

existe para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

2. Se demuestra que el límite existe para un punto x_0 cuando T^k tiene puntos fijos.

3. Se demuestra que el límite existe para T sin puntos fijos en el punto $x_0 = 0$ y por el resultado del punto 1 de la demostración el límite existe para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Se sabe que un homeomorfismo T que preserva orientación en S^1 se da en la forma $T(x) = f(x)(mod 1), 0 \leq x \leq 1$, donde $f(x)$ es una función continua monótona creciente, definida en $\mathbb{R}$ y que satisface la condición que:

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

Primero supóngase que el $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x_0)}{n} = \alpha$ existe para algún x_0 y tómese cualquier punto arbitrario $x \in \mathbb{R}$ y un $m \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x_0 + m \leq x < x_0 + m + 1$$

y dado que f^n es monótona se tiene que para cualquier n:

$$f^n(x_0 + m) \leq f^n(x) < f^n(x_0 + m + 1)$$

Y

$$f^n(x_0) + m \leq f^n(x) < f^n(x_0) + m + 1$$

entonces tenemos que

$$m \leq f^n(x) - f^n(x_0) < m + 1$$

Y dividiendo por n se obtiene que:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{f^n(x)}{n} - \frac{f^n(x_0)}{n} < \frac{m+1}{n}$$

En la expresión anterior se tiene que una diferencia de sucesiones está acotada por la izquierda y por la derecha. Si se conoce el límite de las cotas y además se conoce el límite de una de las sucesiones, entonces se puede decir lo siguiente, tomando el límite cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x_0)}{n} < \lim_{n\to\infty} \frac{m+1}{n}$$

Entonces,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} - \alpha < 0$$

Y

$$\alpha \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} < \alpha$$

Y por lo tanto no depende de la condición inicial gracias a la monotonía del levantamiento. Y dado que si $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \alpha$ existe para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y es el mismo, i.e. no depende del punto x que se tome.

Lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{n} = 0$$

Esto significa que si $\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x_0)}{n} = \alpha$ existe para algún x_0 entonces existe para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y no depende de x_0.

Con esto se termina el primer resultado de la prueba. Es importante hacer énfasis aquí, debido a que será un argumento importante en adelante, como se dijo al principio de la demostración.

Para la segunda parte de la demostración se tiene por objetivo demostrar que el límite existe para algún x_0, siendo uno de los dos casos que T^k tenga puntos fijos:

Supongamos que $T^k(x_0) = x_0$, esto quiere decir que la k-ésima iteración de T vuelve a caer en x_0 por lo que si T^k tiene un punto fijo, entonces T tiene un punto periódico y viceversa, si T tiene un punto periódico, entonces T^k tiene un punto fijo.

Un levantamiento de T^k que conviene para la demostración es $f^k(x_0) = x_0 + r, r \in \mathbb{Z}$. A r se le llama el número de arrollamiento y es precisamente la constante que mide la recurrencia de T sobre el círculo, es decir, va contando el número de vueltas que T^k da sobre S^1, este levantamiento se escogió de tal forma que r midiera las vueltas que T^k da sobre el círculo porque se puede escoger un levantamiento que no lo mida (por ejemplo si un levantamiento es $f(x) = x + r$, entonces otro levantamiento podría ser $g(x) = f(x) + 800$, este último no mide el número de vueltas que T^k da sobre S^1.

Entonces el levantamiento de T^k es $f^k(x_0) = x_0 + r, r \in \mathbb{Z}$, y para cualquier $l \in \mathbb{Z}$ se tiene que cualquier múltiplo de k, (lk), los múltiplos de la k-ésima iteración se ven como sigue:

Para $l = 0$

$$f^{0k}(x_0) = f^0(x_0) = x_0$$

Para $l = 1$

$$f^{1k}(x_0) = f^k(x_0) = x_0 + r$$

Para $l = 2$

$$f^{2k}(x_0) - f^{k+k}(x_0) = f^k(f^k(x_0)) = f^k(x_0 + r) = x_0 + r + r = x_0 + 2r$$

Para $l = 3$

$$f^{3k}(x_0) = f^{k+k+k}(x_0) = f^k(f^k(f^k(x_0))) = f^k(f^k(x_0+r) = f^k(x_0+2r) = x_0+2r+r = x_0+3r$$

Y en general,

$$f^{lk}(x_0) = x_0 + lr$$

Demostración: (Por inducción sobre l)

i)Vale para $l = 1$

Para $l = 1$

$$f^{1k}(x_0) = f^k(x_0) = x_0 + r$$

ii) Suponemos valido para n , i.e. $f^{nk}(x_0) = x_0 + nr$, y

iii)Por demostrar que: $f^{(n+1)k}(x_0) = x_0 + (n+1)r$

Si $f^{nk}(x_0) = x_0+nr$, entonces $f^k(f^{nk}(x_0) = f^k(x_0+nr) = x_0+nr+r = x_0+(n+1)r$

Luego, si la expresión: $f^{lk}(x_0) = x_0 + lr$ se divide por lk se obtiene:

$$\frac{f^{lk}(x_0)}{lk} = \frac{x_0 + rl}{lk} = \frac{x_0}{lk} + \frac{lr}{lk}$$

Y cuando se toma el límite cuando $l \to \infty$, entonces,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{f^{lk}(x_0)}{lk} = \lim_{l\to\infty} \frac{x_0}{lk} + \lim_{l\to\infty} \frac{lr}{lk} = \frac{r}{k}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{f^{lk}(x_0)}{lk} = \frac{r}{k}$$

Hasta aquí un resultado importante es que para T^k con algún punto fijo en alguna iteración $k \neq 0$ y para sus múltiplos, el límite existe y es racional. La interpretación de este resultado puede darse de la siguente forma:

Si $f^k(x_0) = x_0 + r$, entonces $f^k(x_0) - x_0 = r$, es decir, que la distancia entre la k-ésima iteración de f en x_0 y x_0, entonces $\frac{r}{k}$ se puede decir que es la tasa a la cual avanza cada iteración de f, es decir, si la función cubrió una distancia r en k iteraciones entonces $\frac{r}{k}$ es la distancia promedio que recorrió f por cada iteración, hasta que T vuelve a "pasar" por el mismo punto. (k es el orden del período).

Para concluir, $\frac{r}{k}$ es la velocidad a la cual T da una vuelta y regresa al punto periódico, y aunque T no "guarda memoria" de las vuelats, f sí lo hace. Hay que notar que $\frac{r}{k}$ es la razón entra la iterada k y el punto x_0, no al origen.

Ya se analizó el caso de los múltiplos de k, lo que sigue es el caso de cualquier entero n, por el algoritmo de la división, cualquier entero se puede escribir de la forma $n = lk + s$, $0 \leq s < k$, esto es, como un múltilpo de k más un número entre cero y k para evitar caer en el siguente múltiplo, entonces:

$$f^n(x_0) = f^{lk+s}(x_0) = f^s(f^{lk}(x_0)) = f^s(x_0 + lr) = f^s(x_0) + lr$$

Utilizando las igualdades anteriores, si

$$f^n(x_0) = f^s(f^{lk}(x_0)) = f^s(x_0) + lr$$

entonces,

$$f^s(f^{lk}(x_0)) - f^s(x_0) = lr$$

y

$$f^{lk}(f^s(x_0)) - f^s(x_0) = lr$$

Esta última expresión reduce el caso de cualquier entero al caso de los múltiplos de k, y establece, reafirmando el resultado de la primera parte de la prueba, que no importa el punto donde se evalue, el límite existe y no depende de éste.

Lo que se puede observar de este último resultado, es que la distancia entre la k-ésima iteración y sus múltiplos es la misma, lr.

Así, si $f^s(x_0) = y$, $y \in \mathbb{R}$, entonces la expresión $f^{lk}(f^s(x_0)) - f^s(x_0) = lr$ queda como:

$$f^{lk}(y) - y = lr$$

Cabe aclarar que la y depende de la s y que no es otro punto x_0.

luego, dividiendo por lk

$$\frac{f^{lk}(y)}{lk} - \frac{y}{lk} = \frac{lr}{lk}$$

y tomando el límite cuando $l \to \infty$,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{f^{lk}(y)}{lk} - \lim_{l\to\infty} \frac{y}{lk} = \lim_{l\to\infty} \frac{lr}{lk} = \frac{r}{k}$$

Por otro lado, si $l \to \infty$, entonces $n \to \infty$ también. Si el resultado anterior lo dividimos por n, entonces, la expresión queda como:

$$\frac{f^{lk}(y)}{n} - \frac{y}{n} = \frac{lr}{n}$$

Y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{lk}(y)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{y}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{lr}{n}$$

Pero como $n = lk + s$ y cuando $n \to \infty$ entonces $l = \frac{n-s}{k} \to \infty$, también, s, k fijos entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{lk}(y)}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{y}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{lr}{n}$$

se puede expresar como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{lk}(y)}{n} - 0 = \lim_{l\to\infty} \frac{lr}{lk+s}$$

y fijo, entonces,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{lr}{lk+s} = \lim_{l\to\infty} \frac{r}{k+\frac{s}{l}}$$

$$= \frac{r}{k}$$

Nota: Dado que s permanece constante entonces el límite tiende a cero mientras que l tiende a infinito.

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x_0)}{n} = \frac{r}{k}$$

Resumiendo el argumento queda que,

$$\frac{f^n(x_0)}{n} = \frac{f^s(x_0)}{n} + \frac{lr}{lk+s} \to \frac{r}{k}$$

cuando $n \to \infty$.

Para concluir esta segunda parte de la prueba, se debe recalcar que el límite es el mismo que en el caso de los múltiplos de k, es decir, que no depende de la multiplicidad de k y tampoco depende del punto $x \in \mathbb{R}$ que se tome (confirmando nuevamente el resultado de la primera parte de la prueba).

Ya se han interpretado los resultados en términos de la distancia que recorre f a partir de un punto inicial. la siguiente pregunta es qué pasa con las distancias entre f^{2k} y f^k y con la distancia entre f^{3k} y f^{2k}, etc.

Se sabe que:

$$f^k(x_0) - x_0 = r$$

Entonces,

$$f^{2k}(x_0) - f^k(x_0) = x_0 + 2r - x_0 - r = r$$

$$f^{3k}(x_0) - f^{2k}(x_0) = x_0 + 3r - x_0 - 2r = r$$

Y en general

$$f^{lk}(x_0) - f^{(l-1)k}(x_0) = x_0 + lr - x_0 - (l-1)r = r$$

Así, r también es la distancia que existe entre cada múltiplo de las iteraciones de f, por lo tanto, la interprtación del límite $\frac{r}{k}$ es la razón a la que avanza f por cada k iteraciones, no importando en que punto comience.

Con esto termina la segunda parte de la prueba, ahora la última parte de la prueba es el caso cuando T no tiene puntos fijos.

Para la tercera parte de la prueba, se demostrará que el límite existe para T sin puntos periódicos. Para ello, supóngase que T no tiene puntos fijos en ninguna de sus iteraciones, entonces, $f^k(x) - x$ no pertenece a los enteros, (recuerdese que en el caso anterior $f^k(x) - x = r$, y r pertenecía a los enteros), y por lo tanto para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$x + r < f^k(x) < x + r + 1, r \in \mathbb{Z}$$

Es decir, que si bien, la distancia entre $f^k(x)$ y x no es un entero (como en el caso anterior), $f^k(x) - x$ está entre r y $r+1$, con r en los enteros. Esto quiere decir que la distancia entre $f^k(x)$ y x está acotada, así, $r < f^k(x) - x < r - 1$.

Se escoge un número natural k y se aplica la desigualdad $x + r < f^k(x) < x + r + 1$ para los puntos $x = 0, f^k(0), f^{2k}(0), f^{3k}(0), ..., f^{(n-1)k}(0)$, pero si se tiene que

$$x + r < f^k(x) < x - r + 1$$

entonces:

$$r < f^k(x) - x < r + 1$$

y en específico para $x_0 = 0$, se tiene que:

$$r < f^k(0) - 0 < r + 1$$

lo que implica que

$$r < f^k(0) < r + 1$$

Es decir, que la distancia entre $f^k(0)$ y el origen está entre r y $r+1$, luego, la siguente pregunta es qué pasa con la distancia entre $f^{2k}(0)$ y $f^k(0)$. $(f^{2k}(0) - f^k(0))$.

Como
$$f^{2k}(0) = f^k(f^k(0))$$

entonces

$$f^{2k}(0) - f^k(0) = f^k(f^k(0)) - f^k(0)$$

Sea $y_1 = f^k(0)$, entonces

$$f^{2k}(0) - f^k(0) = f^k(y_1) - y_1$$

que cumple con que

$$r < f^k(y_1) - y_1 < r + 1$$

para toda $y_1 \in \mathbb{R}$

Por lo tanto,

$$r < f^{2k}(0) - f^k(0) < r + 1$$

Para el caso $f^{3k}(0)$ y $f^{2k}(0)$, $(f^{3k}(0) - f^{2k}(0))$, se aplica el resultado y el mismo argumento que en el caso anterior, y se tiene que:

$$f^{3k}(0) - f^{2k}(0) = f^k(f^{2k}(0)) - f^{2k}(0)$$

Sea $y_2 = f^{2k}(0)$, entonces

$$f^{3k}(0) - f^{2k}(0) = f^k(y_2) - y_2$$

Y

$$r < f^{3k}(0) - f^{2k}(0) < r + 1$$

Y en general,

$$r < f^{nk}(0) - f^{(n-1)k}(0) < r + 1$$

o

$$f^{(l)k}(0) + r < f^{(l+1)k}(0) < f^{(l)k}(0) + r + 1, l = 0, 1, ..., n - 1$$

Esto significa que la distancia entre cualesquiera dos múltiplos concecutivos de las iteraciones de f siempre esta entre r y $r + 1$, entonces la suma de todas las desigualdaes: (n desigualdades)

$$\begin{gathered} r < f^{k}(0) < r + 1 \\ r < f^{2k}(0) - f^{k}(0) < r + 1 \\ r < f^{3k}(0) - f^{2k}(0) < r + 1 \\ \vdots \\ r < f^{nk}(0) - f^{(n-1)k}(0) < r + 1 \end{gathered}$$

es:

$$nr < f^{nk}(0) < n(r + 1)$$

Y dividimos por nk este último resultado,

$$\frac{nr}{nk} < \frac{f^{nk}(0)}{nk} < \frac{n(r + 1)}{nk}$$

Que es igual a

$$\frac{r}{k} < \frac{f^{nk}(0)}{nk} < \frac{r + 1}{k}$$

Y repitiendo el argumento para la primera desigualdad:

$$\frac{r}{k} < \frac{f^{k}(0)}{k} < \frac{r + 1}{k}$$

Es decir,

$$\frac{r}{k} < \frac{f^{nk}(0)}{nk} < \frac{r}{k} + \frac{1}{k}$$

Y

$$\frac{r}{k} < \frac{f^k(0)}{k} < \frac{r}{k} + \frac{1}{k}$$

Si se multiplica esta última expresión por -1,

$$-\frac{r}{k} - \frac{1}{k} < -\frac{f^k(0)}{k} < -\frac{r}{k}$$

Y se suma a la anterior se obtiene que:

$$-\frac{1}{k} < \frac{f^{nk}(0)}{nk} - \frac{f^k(0)}{k} < \frac{1}{k}$$

Por lo tanto

$$\mid \frac{f^{nk}(0)}{nk} - \frac{f^k(0)}{k} \mid < \frac{2}{k}$$

Por otro lado, si se analiza geometricamente las desigualdades, se tiene que si la iteración número nk de cero se encuentra entre $\frac{r}{k}$ y $\frac{r}{k} + \frac{1}{k}$, al igual que la k-ésima iteración de f en cero, por lo tanto, la distancia entre una y otra es menor a $\frac{1}{k}$

$$\mid \frac{f^{nk}(0)}{nk} - \frac{f^k(0)}{k} \mid < \frac{1}{k}$$

Que es una restricción más fuerte que manejándo la desigualdad analíticamente, aunque para el argumento de la demostración sea suficiente que el valor absoluto $\mid \frac{f^{nk}(0)}{nk} - \frac{f^k(0)}{k} \mid$ sea menor a $\frac{2}{k}$.

Luego, dado que n y k son arbitrarios, se pueden intercambiar y sumar las dos desigualdades, es decir, se puede repetir el argumento para k, en vez de n, obteniendo que:

$$\mid \frac{f^{nk}(0)}{nk} - \frac{f^n(0)}{n} \mid < \frac{1}{n}$$

Y si la distancia entre $\frac{f^{nk}(0)}{nk}$ y $\frac{f^n(0)}{n}$ es menor a $\frac{1}{n}$ y de igual forma la distancia entre $\frac{f^{nk}(0)}{nk}$ y $\frac{f^k(0)}{k}$ es menor $\frac{1}{k}$ entonces a lo más

$$\mid \frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^k(0)}{k} \mid < \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$$

Lo que queremos ver es que el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}=\alpha$ existe, y en este caso, si

$$\lim_{n,k\to\infty} \mid \frac{f^n(0)}{n}-\frac{f^k(0)}{k} \mid < \frac{1}{n}+\frac{1}{k}=0$$

Pero en efecto si se ve a $\frac{f^n}{n}$ como una sucesión, sólo se necesitaría probar que es de Cauchy para ver que la serie converge y entonces el límite existe, es decir, se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si para toda $\epsilon>0$ existe $N\in N$ tal que para toda n,k, $n>N$ y $k>N$, entonces la distancia $\rho(x_n,x_k)<\epsilon$, esto es, que $\mid x_n-x_k \mid<\epsilon$ o que $\lim_{n,k\to\infty}\mid x_n-x_k\mid=0$. Y si la sucesión es de Cauchy entonces converge. Pero en este caso si se toma el límite es claro que se cumple la condición:

$$\lim_{n,k\to\infty} \mid \frac{f^n(0)}{n}-\frac{f^k(0)}{k} < \lim_{n,k\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n,k\to\infty}\frac{1}{k}=0$$

Y debido al primer resultado de la demostración del teorema, si existe para el cero, entonces existe apra cualquier $x\in\mathbb{R}$.

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}=\alpha$$

Existe.

Sólo falta demostrar que si α es racional, entonces alguna iteración de T diferente de cero tiene un punto fijo.

Primero supóngase que $\alpha=0$. Entonces queda por demostrar que T tiene un punto fijo. Supóngase que tal punto no existe. Entonces $f(x)-x\neq 0$ para alguna x y por lo tanto se puede suponer que $f(x)>x$ para alguna $x\in\mathbb{R}$. En particular $f(0)>0$ y por lo tanto $f^n(0)>f^{(n-1)}(0)>\cdots>0$ dado que f es monótona.

Entonces $\{f^n(0)\}$ es una sucesión monótonamente creciente; más aún $f^n(0)<1\forall n$. En efecto, si para alguna n_0 se tuviera que $f^{n_0}(0)\geq 1$ entonces $f^{(2n_0)}(0)\geq f^{n_0}(1)=f^{n_0}(0)+1\geq 2$ y en general $f^{kn_0}(0)\geq k$ entonces $f^{kn_0}(0)/kn_0\geq 1/n_0$ lo cual contradice el supuesto de que $\alpha=0$

Entonces la sucesión $\{f^n(0)\}$ es monótona y acotada. Supóngase que $x_0=\lim_{n\to\infty}f^n(0)$, entonces

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(f^n(0))=\lim_{n\to\infty}f^{n+1}(0)=x_0$$

Esto es, que x_0 define un punto sobre el círculo el cual está fijo con respecto a T.

Ahora supóngase que $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = r/k$, entonces la función $g(x) = f^k(x) - r$ es un levantamiento de T^k, más aún:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^n(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{kn}(x)}{n} - r = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f^{kn}(x)}{kn} - r = 0$$

Por lo tanto como se mostró arriba, existe un punto fijo con respecto a T^k.

■

Como observaciones a la demostración del teroema se tiene que:

Si T no tiene puntos periódicos, entonces,

$$\left| \frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^k(0)}{k} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$$

La distancia entre una iteración y otra nunca es la misma, más aún, cada iteración se acreca más una a la otra y el límite

$$\lim_{n,k\to\infty} \left| \frac{f^n(0)}{n} - \frac{f^k(0)}{k} \right| < \lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Esto significa que para cualquier punto P_0 de la órbita de T existe otro punto P_1 de la órbita de T arbitrariamente cerca de P_0. Por lo tanto la órbita de T es densa en S^1.

Si el límite es un número irracional, entonces la rotación T tiene una órbita densa.

Definición. Si $T : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo que preserva orientación, y f una función que la representa. Se dice que el número:

$$\alpha = \alpha(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} (mod 1), x \in \mathbb{R}$$

es el número de rotación de T.

Para el caso de dimensiones superiores, comenzando para el caso $\mathbb{R}^2$, se tiene el toro de dimensión 2 (Tor^2), que se define como $S^1 \times S^1$, respetando las propiedades de cada círculo, así cada coordenada del toro se representa por puntos de la forma $(\theta_1 + 2\pi r, \theta_2 + 2\pi s)$, con $r, s \in \mathbb{Z}$. Y los levantamientos en este caso se ven en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f=(f_1,f_2)"] \arrow[d, "(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})"] \\ Tor^2 \arrow[r, "T"] & Tor^2 \end{tikzcd}$$

El toro bidimensional resulta especial, porque se puede ver. Y además se le puede tomar como el conjunto de todas las clases de equivalencia de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$, para esto, se tiene que analizar al toro desde el plano de la siguiente manera:

Se reticula el plano en cuadrados unitarios, comenzando por el cuadrado $C_1 = [0,1) \times [0,1)$, es decir, el cuadrado de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ que cumplan con que $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$

Y así, para cualquier punto $(x,y) \in C_1$, se considera igual a otro punto $(x^{'}, y^{'}) \notin C_1$ si:

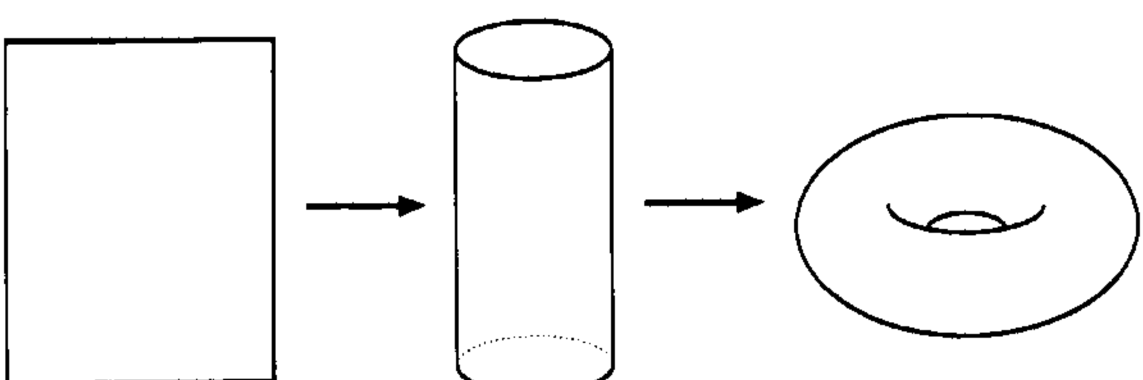
$$x = x^{'} + R$$

$$y = y^{'} + S$$

con $R, S \in \mathbb{Z}$. Si R, S fueran menores a 1, entonces el punto $(x^{'}, y^{'})$ se encontraría en C_1, i.e. $(x^{'}, y^{'}) \in C_1$.

En este caso, la línea $y = 1$ se asocia con la línea $y = 0$ y se considera la misma, es por eso que al definir los cuadrados unitarios, se toma la igualdad estricta en 0. Así, análogamente, los puntos de la frontera del cuadrado que se toman en cuenta para el caso de x son $x = 1$ y no $x = 0$.

Entonces, se "dobla" ese cuadrado y se convierte en un cilindro, y después se unen las puntas para convertirlo en un toro.



Este toro nos puede dar mucha información acerca de la dinámica de los sistemas en el plano sin tener que analizarlos en el plano mismo, cosa que sería un poco más complicada.

Al igual que en el caso anterior del círculo S^1, los cálculos sobre alguna T en el toro se harán mod 1.

Por ejemplo, tómese la transformación $T : S^1 \to S^1$ tal que uno de sus levantamientos f sea $f(\bar{x}) = f(x, y) = (2x+y, x+y)$, que matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que aplicada a un vector $\bar{x}$ se ve como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \quad y \\ x \quad y \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que se toma el punto $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ como punto inicial, entonces $f(x_0) = f((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$f^2(x_0) = f((\frac{1}{2}, 0))$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$f^3(x_0) = f((0, \frac{1}{2}))$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$f^4(x_0) = f((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, este punto tiene periodo 3 bajo T. Y sólo hay que notar que $T^4 = T$.

En el caso particular de que cada una de las transformaciones actúa independientemente sobre S^1, se toma que las trasformaciones del toro son un sistema de la forma $T_1 \times T_2$.

Por ejemplo, analogamente a lo señalado en esta sección referente al círculo S^1, $f(\bar{x}) = f(x) = (x + 1r, y + 1s)$ que es la identidad en el toro. Si T tiene algún punto periódico $\bar{x_0} = (x_0, y_0)$, entonces se cumple que $T^k(\bar{x_0}) = T^k(x_0, y_0) = (x_0, y_0) + (r, s)$.

Entonces cada componente de la transformación $T : T_1 \times T_2$ tiene su número de rotación, $\alpha(T_1)$ y $\alpha(T_2)$, entonces la razón de los números de rotación $\frac{\alpha(T_1)}{\alpha(T_2)}$ es el número de rotación del Tor^2. Si la razón es racional, las líneas de la trasformación son recurrentes en sí mismas sobre el toro.

3 Recurrencia y Ergodicidad

Espacios Medibles.

La teoría ergódica estudia la dinámica en los espacios de medida, y las funciones y los conjuntos que interesan a ésta son justamente los medibles. Para ello se requiere de un marco general acerca de la teoría de la medida.

Definición. Sea X un conjunto, se dice que una $\sigma - algebra$ de subconjuntos de X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $X \in \mathcal{B}$

ii) Si $B \in \mathcal{B}$ entonces $B^c \in \mathcal{B}$

iii) Si $B_n \in \mathcal{B}$ para $n \geq 1$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Definición. A la pareja, $(X, \mathcal{B})$ se le llama espacio medible. Y a los miembros de $\mathcal{B}$ se les llama conjuntos medibles en X.

Definición. Si X es un espacio medible, Y es un espacio topológico y $f : X \to Y$, entonces se dice que f es medible si $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para todo conjunto abierto $V \in Y$.

Definición. Una medida finita en $(X, \mathcal{B})$ es una función $m : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$, que satisface:

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$, siempre que B_n sea una sucesión de miembros de $\mathcal{B}$ disjuntos dos a dos.

Definición. Para cada conjunto E de números reales considérese la colección de intervalos abiertos $\{I_n\}$que cubren a E, esto es, la colección para la cual $E \subset \cup I_n$ y para cada coleccón considérese la suma de las longitudes de sus intervalos. Las longitudes son números positivos. Entonces se define la medida exterior $\mu^*(E)$ de E como el ínfimo de tales sumas. De una manera abreviada:

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset \cup I_n} \sum l(I_n)$$

Se sigue inmediatamente de la definición de μ^* que $\mu^*(\emptyset) = 0$ y que si $E \subset F$ entonces $\mu^*(E) < \mu^*(F)$. También cualquier conjunto que consista de un sólo punto tiene medida exterior cero.

Una proposición importante acerca de la medida exterior es la siguiente:

Proposición. [Royden, 1968, p. 54] La medida exterior de un intervalo es su longitud.

Definición. Si E es un conjunto medible, entonces se define la medida de Lebesgue $\mu(E)$ como la medida exterior de E.

Definición. Sea X un espacio topológico. La σ-álgebra generada por los subconjuntos cerrados de X se llama σ-álgebra de Borel o la clase de conjuntos de Borel de X. Otra manera de ponerlo es: dado X entonces existe la mínima σ-álgebra $\mathcal{B}$ en X tal que cada conjunto abierto X pertenece a $\mathcal{B}$. Los miembros de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos de Borel en X.

A continuación se enunciará un teorema que afirma la existencia de una medida que será útil para este trabajo porque es invariante bajo rotaciones en el círculo, si bien no es la versión más completa es suficiente para los propósitos de este trabajo, debido a que lo que se utilizará son los resultados de los teoremas y no el método utilizado en las demostraciones, es por eso que sin restarles importancia a los argumentos de éstas, es mucho más relevante para el discurso y la continuidad del trabajo el cabal entendimiento de los conceptos expresados en los enunciados de los teoremas más que la secuencia lógica de las demostraciones.

Teorema. [Walters, 1982]. Sea G un grupo topológico compacto. Entonces existe una única medida μ definida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de subconjuntos de G tal que $\mu(xE) = \mu(E)$, para toda $x \in G$ y para todo $E \in \mathcal{B}$ y $\mu(G) = 1$.

A esta única medida μ se le llama la medida de Haar. La medida de Haar también satisface que $\mu(Ex) = \mu(E), \forall x \in G, \forall E \in \mathcal{B}$, porque para cada punto fijo $x \in G$ la medida $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ es invariante bajo rotaciones y por lo tanto igual a μ.

Si U es un subconjunto abierto no vacío de G, entonces tiene medida de Haar diferente de cero, porque $G = \bigcup_{g\in G} gU = g_1U \cup g_2U \cup ... \cup g_kU$ por compacidad. Por lo tanto, si $\mu(U) = 0$, entonces:

$$\mu(G) \leq \sum_i \mu(g_iU) = \sum \mu(U) = 0 \neq 1$$

Lo cual es una contradicción

También es fácil ver que si G es infinito, entonces la medida de todo punto es cero. Es decir, la medida de Haar no tiene átomos.

Para el grupo del círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid = 1\}$ la medida de Haar es la medida de Lebesgue circular normalizada. Y para el toro Tor^n, la medida de Haar es el producto directo de la medida de Haar en S^1.

Definición. En general, si $T : (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, se dice que T preserva medida si se cumple que:

1. T es medible, i.e. que $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$, para todo $A \in \mathcal{B}_2$ o $T^{-1}(\mathcal{B}_2) \in \mathcal{B}_1$

2. $\mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_2(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}_2$

La invariancia de la medida con respecto a la acción del grupo G significa que para cualquier conjunto $A \in X$ y para cualquier elemento $g \in G$, se tiene que:

$$\mu(A) = \mu(T_g^{-1}(A))$$

A continuación se darán unas definiciones y teoremas ligados a las funciones integrables y sus espacios, que serán necesarios para las demostraciones de teoremas fundamentales como el Teorema ergódico de Birkhoff.

Definición. Se dice que una función $f : X \to C$ es integrable si

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Definición. Se denota por $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ al espacio de las funciones integrables $f : X \to C$.

El espacio $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ o simplemente $L^1(\mu)$ se dice que es un espacio de Banach con norma $\| f \|_1 = \int \mid f \mid d\mu$. Asimismo, el espacio $L^p(X, \mathcal{B}, \mu), p \geq 0$ denota al espacio de las funciones $f : X \to C$ tal que $\mid f \mid^p$ es integrable, y la fórmula $\| f \|_p = (\int \mid f \mid^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ define una norma en $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Observación. El espacio $L^2(\mu)$ es de Hilbert.

Definición. Un espacio de Hilbert es separable si tiene un conjunto denso numerable.

Definición. El espacio $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ es separable si y sólo si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ tiene una base numerable en el sentido que existe una sucesión de elementos $\{E_n\}_1^n$ de $\mathcal{B}$ tal que para toda $\epsilon > 0$ y para todo $B \in \mathcal{B}$ con $\mu(B) < \infty$ existe alguna n con $\mu(B \triangle E_n) < \epsilon$, donde $B \triangle E$ es la diferencia simétrica de B y E.

Teorema. [Rudin, 1967] Si X es un espacio métrico, $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel y μ cualquier medida de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$, entonces $(X, \mathcal{B}, \mu)$ tiene una base numerable.

Uno de los conceptos en que se centra este trabajo es el de automorfismo. Este se encuentra relacionado muy cercanamente al tema de los sistemas dinámicos, sólo que este concepto requiere de más estructura, ya que se define sobre un espacio medible y exige que la función sea medible, y no sólo eso sino que preserve la medida.

Definición. Un automorfismo en un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un mapeo inyectivo T del espacio X en sí mismo, tal que para toda $A \in \mathcal{B}$ se tiene que $T(A), T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ y

$$\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A)$$

En este caso se dice que T preserva medida.

Definición. Sean $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathcal{B}$ ajenos 2 a 2, y sean $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$, entonces se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es simple, si se puede escribir de la forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_A$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, y χ_A es la función característica de A, es decir,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A, \\ 1, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Una relación importante de funciones características y transformaciones del espacio base en sí mismo es la siguiente:

Teorema. Sea A un subconjunto arbitrario de X, y sea $T : X \to X$, una función cualquiera. Entonces,

$$\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$$

Demostración:

Dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo contradominio y evaluadas en todo punto del dominio coinciden.

1.$Dom(\chi_A \circ T) = Dom(T) = X$

$Dom(\chi_{T^{-1}(A)}) = X$, pues $T^{-1} \subset X$

2.$Contr(\chi_A \circ T) = \{0, 1\}$

$Dom(\chi_{T^{-1}(A)}) = \{0, 1\}$

3. Sea $x \in X$, entonces se tiene que demostrar que: $\chi_{T^{-1}(A)}(x) = \chi_A(T(x))$, para ello la prueba se dividirá en dos casos:

Caso 1. $x \in T^{-1}(A)$

Caso 2. $x \notin T^{-1}(A)$

Ahora, $x \in T^{-1}(A)$, si y sólo si $T(x) \in A$, porque $T^{-1}(A) = \{x \in X \mid T(x) \in A\}$, y si $x \notin T^{-1}(A)$, si y sólo si $T(x) \notin A$, por lo tanto

Para el caso 1. Supóngase que $T(x) \in A$, es decir, $x \in T^{-1}(A)$

a)$\chi_A(T(x)) = 1$, porque $x \in A$

b)$\chi_{T^{-1}(A)}(x) = 1$, porque $x \in T^{-1}(A)$

Para el caso 2. Supóngase que $T(x) \notin A$, es decir, $x \notin T^{-1}(A)$

a)$\chi_A(T(x)) = 0$, porque $x \notin T^{-1}(A)$

b)$\chi_{T^{-1}(A)}(x) = 0$, porque $x \notin T^{-1}(A)$

■

Teorema. [Rudin, p.16] Sea $f : X \to [0, \infty)$ una función medible, entonces existe una familia de funciones s_n simples en X, para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$

ii) $s_n^+ \to f(x)$ si $n \to \infty$ para toda $x \in X$

Teorema (convergencia monótona de Lebesgue). [Rudin, p.22] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X, y supóngase que,

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty$, para toda $x \in X$

b) $f_n(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$, para toda $x \in X$

Entonces, f es medible, y:

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$$

si $n \to \infty$

Lema (de Fatou). [Rudin,24] Si $f_n : X \to [0,\infty]$ es medible para cada entero positivo n, entonces:

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_X f_n d\mu$$

Teorema Si $T : X \to X$, y preserva medida, entonces, T define una transformación lineal T^* de L^p dada por $T^*(f) = f \circ T$ en sí mismo, tal que, $|T^*(f)|_p = |f|_p$. Es decir, T^* preserva la métrica, i.e., (T es isométrica).

Demostración:

Lo que se tiene que demostrar es que dado $\int_X \mid f \mid^p d\mu < \infty$ entonces $\int_X \mid f \circ T \mid^p d\mu < \infty$. Primero se demostrará para funciones simples y después se generalizará para cualquier $f \in L^p$. Sea f simple, entonces

$$\int_X \mid f \mid^p d\mu = \int_X \mid \sum_i a_i \chi_{A_i} \mid^p d\mu = \int_X \sum_i \mid a_i \mid^p \chi_{A_i} d\mu$$

$$= \sum_i \mid a_i \mid^p \int_X \chi_{A_i} d\mu = \sum_i \mid a_i \mid^p \mu(A_i)$$

Y por otro lado,

$$\sum_i a_i \chi_{A_i} \circ T = \sum_i a_i (\chi_{A_i} \circ T) = \sum_i a_i \chi_{T^{-1}(A_i)}$$

Por lo tanto

$$\int_X \mid (\sum_i a_i \chi_{A_i}) \circ T \mid^p d\mu = \int_X \mid \sum_i a_i (\chi_{T^{-1} A_i} \mid^p d\mu$$

$$= \int_X \sum_i | a_i |^p (\chi_{T^{-1}A_i}) d\mu = \sum_i | a_i |^p \mu(T^{-1}(A_i)) = \sum_i | a_i |^p \mu(A_i)$$

$$= \int_X | \sum_i a_i \chi_{A_i} |^p \, d\mu$$

Por lo tanto, si f es simple, entonces

$$\int_X | f |^p \, d\mu = \int_X | f \circ T |^p \, d\mu$$

Una aplicación del teorema de convergencia monótona de Lebesgue completa la prueba para toda $f \in L^p$

■

Caracteres.

Otra herramienta importante para el desarrollo del trabajo es el concepto de caracteres, este concepto será útil en el análisis de las transformaciones ergódicas en el círculo, dado que un punto que nos interesa especialmente son los homomorfismos continuos en el grupo del círculo S^1.

Definición. Sea G un grupo abeliano compacto. Se denota por $\widehat{G}$ la colección de todos los homomorfismos continuos de G en el círculo unitario S^1. Se dice que los miembros de $\widehat{G}$ son los caracteres de G.

Bajo la multiplicación de funciones, $\widehat{G}$ es un grupo abeliano. Con la topología compacta abierta, $\widehat{G}$ se convierte en un grupo conmutativo localmente compacto.

Si $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, entonces cada elemento de $\widehat{S}^1$ es de la forma $z \mapsto z^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, el grupo de caracteres del toro de dimensión n (Tor^n), es isomórfico a $(\mathbb{Z}^n, +)$ y cada $\gamma \in \widehat{Tor^n}$ es de la forma:

$$\gamma(z_1, ..., z_n) = z_1^{p_1}, ..., z_n^{p_n}$$

Para alguna $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{Z}^n$

Dado lo anterior, se tienen los siguientes resultados:

$\widehat{G}$ tiene una base topológica numerable, si y sólo si, G tiene una base topológica numerable.

$\widehat{G}$ es compacto si y sólo si G es discreto.

Combinando los dos resultados anteriores, G es compacto metrizable si y sólo si $\widehat{G}$ es un grupo discreto numerable. Esto permite transformar algunos problemas de grupos compactos metrizables abelianos a problemas de grupos discretos numerables abelianos.

Teorema de dualidad. [Petersen, 1983] $\widehat{\widehat{G}}$ es naturalmente isomórfo (como grupo topológico) a G, el isomorfismo está dado por el mapeo $\alpha \mapsto a$ donde $\alpha(\gamma) = \gamma(a)$ para toda γ en $\widehat{G}$.

Si G_1, G_2 son grupos abelianos localmente compactos, entonces $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$. Todos los caracteres de $G_1 \times G_2$ son de la forma $(x, y) \rightarrow \gamma(x)\delta(y)$, donde $\gamma \in G_1$ y $\delta \in G_2$.

Sea G compacto. Los miembros de $\widehat{G}$ son miembros mutuamente ortogonales de $L^2(\mu)$, donde μ es la medida de Haar.

Finalmente, si G es un grupo compacto, G es metrizable si y sólo si G tiene una base topológica numerable [Walters,13].

Endomorfismos del toro.

Como ya se mencionó, al toro se le puede ver de manera multiplicativa como Tor^n o aditiva como $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ es el grupo aditivo del espacio euclidiano n-dimensional y $\mathbb{Z}^n$ es el subgrupo de $\mathbb{R}^n$ que consiste de todos los puntos de coordenadas enteras.

Un isomorfismo de grupos topológicos de Tor^n a $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ esta dado por:

$$(e^{2\pi i x_1}, ..., e^{2\pi i x_n}) \mapsto (x_1, ..., x_n)$$

Teorema.

i) Cada subgrupo cerrado de S^1 es o S^1 mismo, o un grupo cíclico finito que consiste en todas las p raíces de la unidad para algún entero $p > 0$.

ii) Los únicos automorfismos de S^1 son la identidad y el mapeo $z \mapsto z^{-1}$.

iii) Los únicos homomorfismos de S^1 son los mapeos $\varphi_n(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea d la métrica euclidiana usual en S^1, que es una métrica de rotación invariante sobre S^1.

i) Sea H un subgrupo cerrado de S^1. Si H es infinito entonces tiene un punto límite, así, $\forall \epsilon > 0, \exists a, b, \in H$ con $d(a,b) < \epsilon$ y $a \neq b$. Entonces $d(b^{-1}a, 1) < \epsilon$ y por lo tanto las potencias de $b^{-1}a$ son ϵ-densas en S^1. Por lo tanto H es ϵ-densa en S^1 y $H = S^1$.

Si H es finito, y tiene p elementos, entonces $a^p = 1 \forall a \in H$. Así, cada elemento de H es una p-ésima raíz de la unidad y dado que hay p elementos en H, H debe consistir de todas las p-ésimas raíces de la unidad.

ii) Sea $\theta : S^1 \to S^1$ un automorfismo. Se tiene que $\theta(1) = 1$. Dado -1 es el único elemento de S^1 de orden 2 se tiene que $\theta(-1) = -1$. Dado que i y $-i$ son los únicos elementos de orden 4 entonces o $\theta(i) = i$, y $\theta(-i) = -i$ o $\theta(i) = -i$ y $\theta(-i) = i$.

Considérese el primer caso. Dado que θ mapea intervalos a intervalos, el intervalo $[\overrightarrow{1, i}]$ de 1 a i es o mapeado en sí mismo, o en $[\overrightarrow{i, 1}]$ (todos los intervalos se consideran en contra de las manecillas del reloj). Pero dado que $[\overrightarrow{1, i}]$ no contiene a -1 no puede ser mapeado a $[\overrightarrow{i, 1}]$, así, $\theta[\overrightarrow{1, i}] = [\overrightarrow{1, i}]$.

El único elemento de orden 8 en $[\overrightarrow{1, i}]$ es $e^{\pi i/4}$ y así, éste debe ser fijado por θ. Por lo tanto $\theta[\overrightarrow{1, e^{\pi i/4}}] = [\overrightarrow{1, e^{\pi i/4}}]$. Por inducción se prueba que $\theta(e^{2\pi i/2^k}) = e^{2\pi i/2^k}$ para cada

$k > 0$. Se sigue que θ fija todas las 2^k-ésimas raíces de la unidad $\forall k > 0$ y entonces es la identidad. En el segundo caso se muestra que $\theta(e^{2\pi i/2^k}) = e^{2\pi i/2^k}, \forall k > 0$ y entonces $\theta(z) = z^{-1}, z \in S^1$

iii) Sea $\theta : S^1 \to S^1$ un endomorfismo. Si θ es no trivial, su imagen $\theta(S^1)$ es un subgrupo conexo cerrado de S^1 y así, $\theta(S^1) = S^1$ por el inciso i). El kernel $Ker(\theta)$ es un subgrupo cerrado de S^1, entonces o $Ker(\theta) = S^1$ o $Ker(\theta) = H_p$, que es el grupo de todas las raíces de la unidad, para alguna p.

El primer caso corresponde a θ trivial. Si $Ker(\theta) = H_p$, sea $\alpha_p : S^1/H_p \to S^1$ el isomorfismo dado por $\alpha_p(zH_p) = z^p$, y sea $\theta_1 : S^1/H_p \to S^1$ el isomorfismo inducido por θ, $(\theta_1(zH_p) = \theta(z))$.

Entonces $\theta_1\alpha_p^{-1}$ es un automorfismo de S^1 y por el inciso ii) o $\theta_1\alpha_p^{-1}(z) = z, \forall z \in S^1$ o $\theta_1\alpha_p^{-1}(z) = z^{-1}, \forall z \in S^1$. Entonces o $\theta(z) = \theta_1(zH_p) = \theta_1\alpha_p^{-1}(z^p) = z^p, \forall z \in S^1$ o $\theta(z) = z^{-p}, \forall z \in S^1$.

■

Teorema. Cada endomorfismo $A : Tor^n \to Tor^n$ es de la forma:

$$A(z_1, z_2, ..., z_n) = (z_1^{a_{11}} \cdot z_2^{a_{12}} \cdot ... \cdot z_n^{a_{1n}}, z_1^{a_{21}} \cdot z_2^{a_{22}} \cdot ... \cdot z_n^{a_{2n}}, ... \cdot z_n^{a_{n1}} \cdot z_n^{a_{n2}} \cdot ... \cdot z_n^{a_{nn}})$$

Donde $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Y en notación aditiva:

$$A\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathbb{Z}^n\right] = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathbb{Z}^n$$

Donde $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ es la matriz de $n \times n$ con a_{ij} en la $(i, j) - esima$ entrada.

Demostración. Sea $\pi_i : Tor^n \to Tor$ la proyección de la n-ésima coordenada. Entonces $\pi_i \circ A : Tor^n \to Tor$ es un homomorfismo, y por el hecho de que los únicos homomorfismos de Tor^n a S^1 son los mapeos de la forma:

$$(z_1, z_2, ..., z_n) \to z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot ... \cdot z_n^{m_n}$$

entonces,

$$\pi_i \circ A(z_1, ..., z_n) = z_1^{a_{i1}} \cdot z_2^{a_{i2}} \cdot z_3^{a_{i3}} \cdots z_n^{a_{in}}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

■

A mapea Tor^n sobre sí mismo si y sólo si $det \left[\ a_{ij} \ \right] \neq 0$.

A es un automorfismo de Tor^n si y sólo si $det \left[\ a_{ij} \ \right] = \pm 1$.

Por lo tanto, los endomorfismos suprayectivos del Tor^n están en correspondencia uno a uno con las matrices de entradas enteras cuyo determinante es diferente de cero.

Sea $A : Tor^n \to Tor^n$ un endomorfismo. Consideramos ahora cómo el mapeo $\widehat{A} : \widehat{Tor^n} \to \widehat{Tor^n}$ actúa como una función de $\mathbb{Z}^n$ cuando $\widehat{Tor^n}$ se identifica con $\mathbb{Z}^n$ mediante el isomorfismo:

$$\gamma \mapsto \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

Cuando $\gamma(z_1, z_2, ..., z_n) = z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot ... \cdot z_n^{m_n}$

Teorema. Sea G un grupo topológico compacto abeliano. Sea $A : G \to G$ un endomorfismo suprayectivo, entonces A preserva la medida de Haar.

Demostración. Sea $A : G \to G$ un endomorfismo continuo y sea μ la medida de Haar en G. Se define una medida normalizada sobre los subconjuntos borelianos de G como: $\mu(E) = m(A^{-1}(E))$.

$\mu(Ax \cdot E) = m(A^{-1}(Ax \cdot E)) = m(x \cdot A^{-1}E) = \mu(E)$, dado que A mapea a G en sí mismo, se tiene que μ es una rotación invariante y por lo tanto $\mu = m$ por la propiedad de unicidad de la medida de Haar. Por lo tanto A preserva medida de Haar.

■

Ergodicidad.

En los sistemas dinámicos es importante conocer entre otras cosas el comportamiento asintótico de las órbitas, en especial, si en algún momento la función vuelve a pasar por el mismo punto por la mism a vecindad de un punto, es decir que para toda $K \in \mathbb{N}$ existe alguna $k > K$, tal que $T^k(p) \in E$, para $E \subset X$ y si pasa, cuantas veces lo hace. (En este caso, p es punto de recurrencia de E, para alguna $T : X \to X$).

Que siempre exista una k implica que regresa un número infinito de veces al conjunto E, excluyendo el caso de la recurrencia finita.

En muchas ocasiones, se pretende predecir el comportamiento de algunos sistemas, como por ejemplo el de la temperatura o clima en una determinada región del planeta. La idea es que si llueve algún día con cierta intensidad, nos interesaría saber si podrá llover otra vez en el futuro mas o menos con la misma intensidad con la que llovió anteriormente.

La idea de pensar en que lo que alguna vez pasó pueda pasar otra vez en el futuro, está fuertemente relacionado con el siguiente:

Teorema de Recurrencia de Poincaré. Para cualquier automorfismo que preserva medida $T : X \to X$, X compacto y cualquiera $E \in \mathcal{B}$ un boreliano, se tiene que casi todos los puntos $x \in E$ son puntos de recurrencia de E.

Demostración. Sea N el subconjunto de E que consiste en todos los puntos $x \in E$ que no regresan a E. $N \in \mathcal{B}$, dado que

$$N = E \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \backslash E))$$

Si $x \in N$, entonces todos los puntos de la forma $T^n(x), n = 1, 2, 3, ...$ no pertenecen a E, y entonces, $T^n(x) \notin N$, i.e., $x \notin T^{-n}(N)$. Por lo tanto $N \cap T^{-n}(N) = \emptyset, n = 1, 2, ...$. Esto implica que los conjuntos $N, T^{-1}(N), T^{-2}(N), ...$ son disjuntos. De hecho, para $0 \leq n_1 < n_2$ se tiene que:

$$T^{-n_1}(N) \cap T^{-n_2}(N) = T^{-n_1}(N \cap T^{(-n_1-n_2)}(N)) = \emptyset$$

Por lo tanto,

$$1 \geq \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N)$$

La última igualdad sólo se da si $\mu(N) = 0$.

∎

Otra forma de enunciar el teorema de recurrencia es: Dada $T : X \to X$, una transformación que preserva medida, en un espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $E \in \mathcal{B}$, de medida positiva, entonces casi todos los puntos de E regresan un número infinito de veces a E bajo iteraciones positivas de T.

Definición. Si existe el siguiente límite:

$$\dot{f} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$$

para una función $f \in L^1$,$x \in X, n \in \mathbb{N}$

entonces a $\dot{f}$ se le llama la media de tiempo o media temporal en un sistema dinámico dado por T.

También se dice que esa media es la media a través de la trayectoria. (La trayectoria de un punto x es el conjunto de puntos de la forma $T^k(x)$.

Por ejemplo, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(T^k(x))$, donde χ_E es la función característica de E, es el numero promedio de veces que la trayectoria del punto x pasa por el conjunto E desde el tiempo cero hasta el tiempo $n-1$.

Definición. Si existe el siguiente límite:

$$\bar{f} = \int_X f(x) d\mu$$

para una función $f \in L^1$, $\mu(X) = 1$

entonces a $\bar{f}$ se le llama la media del espacio o media espacial en un sistema dinámico dado por T

En un sistema dinámico lo que nos interesa es hacer predicciones estadísticas acerca de las órbitas de T. Una buena manera de llevar a cabo esto, es contar si las órbitas o alguna órbita del sistema pasa por alguna parte del espacio, y si lo hace, verificar con que frecuencia.

En el caso de las rotaciones del círculo se puede medir qué tantas veces pasa una función T por algún intervalo dado. Es decir, nos gustaría calcular cuantas veces T^i pasa por un conjunto E después de n iteraciones y obtener un parámetro estadístico como el promedio:

$$\frac{\sharp(i, talqueT^i(x) \in E)}{n}, i = 1, ...n$$

Esta expresión de arriba representa la frecuencia relativa de las veces que una transformación $T^i(x)$ pasa por el conjunto E.

Además otra pregunta relevante es qué pasa cuando el número de iteraciones es muy grande, es decir, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sharp(i, talqueT^i(x) \in E)}{n}$$

En el ejemplo de las rotaciones del círculo, supóngase que la rotación T es de $\frac{\pi}{2}$, entonces, la pregunta estadística es cuántas veces $T^i(x)$ pasa por el intervalo $(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, después de algún número de iteraciones y con qué frecuencia relativa lo hace.

Supongamos que se quiere saber cuantas veces después de cuatro iteraciones pasó T por ese intervalo, comenzando en el punto $\theta = 0$ (para $e^{2\pi i\theta}$), intuitivamente podemos inferir que cada 4 veces T vuelve a caer en el intervalo mencionado. Entonces la frecuencia relativa es 1 de 4, es decir:

$$\frac{\sharp(i, talqueT^i(x) \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))}{n} = \frac{1}{4}$$

Y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sharp(i, talqueT^i(x) \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})))}{n} = \frac{\sharp((\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})) \cap O(x)\}}{n}$$

Donde $O(x)$ es la órbita de x bajo T.

Ahora, si la rotación no tiene puntos periódicos, (caso que es más importante para el análisis ergódico), entonces se antoja pensar que las veces que pasa T^i por el intervalo mencionado es precisamente lo que mide el intervalo (como se vió en la sección del teorema del número de rotación), puesto que a cada vuelta que T da sobre el S^1, no toca el punto que toco en la vuelta anterior, es decir, que no se cumple que $T^n(x) = x$, entonces la rotación va tocando puntos diferentes del intervalo mientras más vueltas le da, llenando el intervalo cuando $n \to \infty$.

Y precisamente el teorema ergódico de Birkhoff nos dice que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sharp(i, talqueT^i(x) \in E)}{n} = \mu(E)$$

Teorema ergódico de Birkoff-Khinchin.

Sea T una transformación que preserva medida en un espacio de medida X, y sea $f \in L^1(\mu)$. Entonces el promedio ergódico $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$ converge para casi toda x a una función límite $f^*(x)$ que está también en $L^1(\mu)$. La función f^* es constante en las órbitas i.e., $f^*(T^*(x)) = f^*(x)$ casi para toda x. En el caso de $\mu(X) < \infty$ también se tiene que $\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu$.

Para demostrar este teorema se necesita el siguiente lema que se conoce como el teorema ergódico maximal. Supóngase que

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$$

donde $T^0(x) = 0$, para toda x.

El teorema ergódico de Birkhoff es equivalente a probar que $\frac{1}{n}T^n(x)$ converge casi en todo lugar a una función límite $f^*(x)$.

Lema. Sea $A = \{x | sup_{n\geq 0} s_n(x) > 0\}$, entonces $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

Demostración. Se tiene que,

$$max_{0\leq k\leq n} s_k(T(x)) = max\{0, f(T(x)), ..., f(T(x)) + \cdots + f(T^n(x))\}$$

$$= max\{f(x), f(x) + f(T(x)), ..., f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^n(x))\} - f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x) = max_{1\leq k\leq n+1} s_k(x) - max_{0\leq k\leq n} s_k(T(x)) = \varphi^*_{n+1}(x) - \varphi_n(T(x))$$

donde

$$\varphi^*_n(x) = max\{s_1(x), ..., s_n(x)\}, \varphi_n(x) = max\{0, s_1(x), ..., s_n(x)\}$$

Supóngase ahora que $A_n = \{x \in X | \varphi_n(x) > 0\}$. Entonces, dado que $\varphi^*_{n+1}(x) \geq \varphi^*_n(x)$, se tiene que

$$\int_{A_n} f(x)d\mu \geq \int_{A_n} \varphi_n^*(x)d\mu - \int_{A_n} \varphi_n(T(x))d\mu$$

Ahora para $x \in A_n$, $\varphi_n^*(x) = \varphi_n(x)$ y para $x \notin A_n$, $\varphi_n(x) = 0$, luego,

$$\int_{A_n} \varphi_n^*(x)d\mu = \int_{A_n} \varphi_n(x)d\mu = \int_X \varphi_n(x)d\mu = \int_X \varphi_n(T(x))d\mu$$

Y dada la propiedad de preservación de medida de T, se tiene que:

$$\int_{A_n} f(x)d\mu \geq \int_X \varphi_n(T(x))d\mu - \int_{A_n} \varphi_n(T(x)d\mu$$

$$= \int_{X-A_n} \varphi_n(T(x))d\mu$$

$$\geq 0$$

Dado que $\varphi_n \geq 0$. Ahora, $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Luego,

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu \geq 0$$

■

Demostración del teorema ergódico de Birkhoff.

Para cualesquiera dos números racionales a, b, $a < b$, se tiene que:

$$E_{a,b} = \{x \in X | \lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} s_n(x) < a < b < \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n} s_n(x)\}$$

$E_{a,b} \in \mathcal{B}$ y es T-invariante. Para probar la existencia del $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} s_n(x)$ casi en todo lugar, es suficiente con demostrar que $\mu(E_{a,b}) = 0$, para toda a, b. Pónganse fijas a a, b y pongase $E = E_{a,b}$. Considerese la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - b, & \text{para } x \in E, \\ 0, & \text{para } x \notin E. \end{cases}$$

Aplicando el teorema ergódico maximal a esta función, se obtiene:

$$\int_{A_{(g)}} g(x) d\mu \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Donde

$$A(g) = \{x \in X | sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} s_n(x, g) > 0\}$$

$$\{x \in X \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} s_n(x, f) > b\}$$

$E \subseteq A(g)$. Dado que E es invariante y g desaparece fuera de E, se tiene que $s_n(x, g) = 0$, para $x \in X$, i.e., $A(g) \subseteq E$. Por lo tanto $A(g) = E$, y entonces (I) se puede escibir de la forma

$$\int_E f(x) d\mu \geq b\mu(E) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

De manera análoga, considérese la función

$$g'(x) = \begin{cases} a - f(x), & \text{para } x \in E, \\ 0, & \text{para } x \notin E. \end{cases}$$

Entonces

$$A(g') = \{x \in X | sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} s_n(x, g') > 0\}$$

$$= \{x \in X | inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} s_n(x, f) < a\}$$

Nuevamente se tiene que $A(g') = E$ por razones análogas a las de arriba y

$$\int_E f(x)d\mu \leq a\mu(E)..............(III)$$

De (II) y (III) tenemos que $\mu(E) = 0$ dado que $a < b$. Entonces el promedio ergódico converge casi en todo lugar a una función límite denotada por f^*. Ahora,

$$\int_X |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))|d\mu \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_X |f(T^k(x))|d\mu = \int_X |f(x)|d\mu$$

Y por el lema de Fatou se tiene que:

$$\int_X |f^*|d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_X |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))|d\mu \leq \int_X |f(x)|d\mu$$

Así que, f^* está en $L^1(\mu)$.

Ahora supóngase que $\mu(X) < \infty$. Si f es una función acotada entonces las funciones $\frac{1}{n}s_n(x, f)$ están también acotadas por la misma constante que acota a f. Por el teorema de convergencia se tiene que:

$$\int_X f^* d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}s_n(x, f)d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))d\mu$$

$$= \int_X f d\mu$$

Si f no está acotada, pero si está en $L^1(\mu)$, entonces se puede encontrar un a sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ de funciones acotadas que convergen a f en la norma L^1. Ahora,

$$\|f^* - \frac{1}{n}s_n(x, f)\|_1 \leq \|f^* - f_k^*\|_1 f_k^* - \frac{1}{n}s_n(x, f_k)\|_1 + \|\frac{1}{n}s_n(x, f_k) - \frac{1}{n}s_n(x, f)\|_1$$

$$\leq \|(f-f_k)^*\|_1 + \|f_k^* - \frac{1}{n}s_n(x,f_k)\|_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f_k - f\|_1$$

Se sigue de lo anterior que $\frac{1}{n}s_n(x,f) \to f^* \in$ norma L^1, así que:

$$\int_x \frac{1}{n}s_n(x,f)d\mu \to \int_X f^* d\mu$$

Pero $\int_X \frac{1}{n}s_n(x,f)d\mu = \int_X f d\mu$ y por lo tanto

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

■

Definición. Un sistema dinámico es ergódico si se cumple que la media de tiempo es igual a la media del espacio.

Un ejemplo de esto es si las rotaciones T del círculo en sí mismo, no tinen puntos periódicos, (una rotación irracional), entonces existe una medida invariante (que es la de Lebesgue) para los intervalos por los que T pasa.

Del mismo modo, si la rotación es racional, entonces la medida ergódica es una medida invariante como la de frecuencia relativa en probabilidad, siendo la medida total del círculo igual a 1: $\mu(S^1) = 1$.

Más adelante se podrá analizar qué pasa con los eigenvalores de las trasnformaciones T lineales y sus operadores inducidos que se encuentran en el círculo, y si sus medidas son ergódicas o las funciones mismas son ergódicas. Los eigenvalores son una herramienta para clasificar y analizar dichas funciones.

Definición. Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva medida. Si X es la unión de dos conjuntos disjuntos E y F de medida positiva, y E y F invariantes bajo T, entonces el estudio de cualquier propiedad de T en X se reduce al estudio de las propiedades correspondientes de T en E y de T en F. Si este es el caso, se dice que T es descomponible.

Las funciones más significativas para este estudio son las indescomponible. A transformaciones como estas se les llama ergódicas.

La ergodicidad es uno de los requisitos naturales para que una transformación "revuelva bien" los puntos del espacio en el que actúa.

Para dar ejemplos de transformaciones ergódicas se debe reformular el concepto de ergodicidad de una manera más precisa.

Definición. Se dice que T es ergódica si y sólo si únicamente tiene conjuntos triviales invariantes, esto es, si y sólo si $\mu(E) = 0$ o $\mu(X - E) = 0$, siempre y cuando E sea un conjunto medible invariante bajo T.

Es decir, que si T tiene la propiedad de que $T(E) = E$, esto implica que $\mu(E) = 0$ o $\mu(X - E) = 0$.

Otra forma de expresar el concepto de una transformación ergódica se da en la siguiente

Definición. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad, es decir, un espacio de medida normalizado, i.e. $\mu(X) = 1$. Una transformación T que preserva medida en $(X, \mathcal{B}, \mu)$, se dice que es ergódica si los únicos miembros de $E \in \mathcal{B}$ con $T(E) = E$ satisfacen que $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$.

Definición. Una función $g : X \to \mathbb{C}$ se dice que es invariante con respecto a un automorfismo T, si:

$$g(T^{-1}(x)) = g(T(x)) = g(x)$$

Esto quiere decir que si a cualquier punto de la órbita se le aplica la función g, entonces levanta a una altura constante en toda la trayectoria.

Lema. Si el espacio de medida X es un espacio topológico con una base numerable, tal que cada conjunto no vacío tenga medida positiva, y si T es una transformación ergódica que preserva medida en X, entonces para casi toda $x \in X$ la órbita de x es densa en todo lugar.

Demostración. La órbita de x no es densa si y sólo si existe un conjunto abierto no vacío G tal que x pertenece a la intersección de todo $X - T^n(G)$. Dado que esta intersección es un conjunto invariante disjunto de G y dado que $\mu(G) > 0$, entonces tiene medida cero. Si x no pertenece a ninguna clase numerable de conjuntos de medida cero, entonces x tiene una órbita densa.

$\blacksquare$

Supóngase que T es una rotación, es decir, $T(x) = cx$ en un grupo abeliano compacto X con una base numerable. Si T es ergódica entonces por el lema anterior, existe al menos un punto, digamos x_0 cuya órbita es densa. Dada que la transformación que manda a x en xx_0^{-1} es un homeomorfismo, manda la órbita de x_0 ($\{c^n x_0\}$) en una sucesión densa. Sin embargo, la imagen de la órbita consiste exactamente en las potencias de c.

Si F es función arbitraria de X, otra función g de X se define por $g(x) = f(T(x))$. Si escribimos $g = Uf$ entonces U es un mapeo que opera sobre funciones. Este mapeo U tiene propiedades importantes: U es lineal y si T preserva medida, entonces U manda a L^1 en si mismo, de hecho es una isometría de L^1.

Supóngase por el contrario que $\{c^n\}$ es densa. Si f es el caracter de X (un homomorfismo continuo en el grupo del círculo), entonces $f(cx) = f(c)f(x)$, así que f es un vector propio del operador unitario inducido por T.

Dado que los caracteres constituyen un conjunto ortonormal completo en L^2, cada función invariante en L^2 se puede expander en términos de ellos.

Dado que para operadores unitarios, vectores propios con distintos valores propios son ortogonales, cada función invariante en L^2 (cada vector propio con valor propio 1) es una combinación lineal de caracteres con valor propio 1.

De hecho, si f es un caracter y $f(cx) = f(x)$ casi en todo lugar, entonces, por continuidad, $f(cx) = f(x)$ en todo lugar y por lo tanto $f(c^n x) = f(x)$ en todo lugar. El resultado se sigue si se hace x igual a 1.

Una rotación en el toro $T((x, y)) = ((bx, cy))$ es ergódica si y sólo si las coordenadas del multiplicador (los números b y c) son integralmente independientes, esto es, $b^n c^m = 1$ para enteros m y n implica que $n = m = 0$.

Teorema de equivalencia. [Walters, 1982,28] Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, y $T : X \to X$ preserva medida, entonces los siguientes puntos son equivalentes:

i) T es ergódica.

ii) Siempre que T sea medible y $(f \circ T)(x) = f(x), \forall x \in X$, entonces f es constante casi en todo lugar.

iii) Siempre que T sea medible y $(f \circ T)(x) = f(x)$ casi en todo lugar, entonces f es constante casi en todo lugar.

iv) Siempre que $f \in L^2(\mu)$ y $(f \circ T)(x) = f(x), \forall x \in X$ entonces f es constante casi en todo lugar.

v) Siempre que $f \in L^2(\mu)$ y $(f \circ T)(x) = f(x)$ casi en todo lugar, entonces f es constante en casi todo lugar.

Teorema. La rotación $T(z) = az$ en el círculo unitario S^1 es ergódica (respecto a la medida de Haar) si y sólo si a no es una raíz de la unidad.

Demostración. Supóngase que a es una raíz de la unidad, entonces $a^p = 1$ para alguna $p \neq 0$. Sea $f(z) = z^p$. Entonces $f \circ T = f$ y f no es constante casi en todo lugar. luego, T no es ergódica por el punto ii) del teorema anterior.

Por el contrario, supóngase que a no es una raíz de la unidad y que $f \circ T = f, f \in L^2(\mu)$. Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathbb{Z}^n$ su serie de Furier. Entonces $f(az) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n a^n \mathbb{Z}^n$ y entonces $b_n(a^n - 1) = 0$ para cada n. Si $n \neq 0$ entonces $b_n = 0$. Y por lo tanto f es constante casi en todo lugar. Y por el punto v) del teroema anterior, T es ergódica.

■

Teorema. Si G es un grupo compacto abeliano (con medida de Haar), y $A : G \to G$ es un endomorfismo continuo suprayectivo de G, entonces A es ergódica si y sólo si el caracter trivial $\gamma = 1$ es el único $\gamma \in \widehat{G}$ que satisface que $\gamma \circ A^n = \gamma$ para alguna $n > 0$.

Demostración. Supóngase que siempre y cuando $\gamma A^n = \gamma$ para alguna $n \geq 1$ tenemos que $\gamma \equiv 1$. Sea $f \circ A = f$ con $f \in L^2(\mu)$, supongamos que $f(x)$ tiene la serie de Fourier $\sum a_n \gamma_n$ donde $\gamma_n \in \widehat{G}$ y $\sum |a_n|^2 < \infty$. Entonces $\sum a_n \gamma_n(Ax) = \sum a_n \gamma_n(x)$, así que si $\gamma_n, \gamma_n \circ A, \gamma_n \circ A^2, ...,$ son todos distintos, sus coeficientes son iguales y por lo tanto cero.

Así, si $a_n \neq 0, \gamma_n a^p) = \gamma_n$ para alguna $p \neq 0$. Entonces $\gamma_n = 1$ por suposición y entonces f es constante casi en todo lugar. Por lo tanto A es ergódica por el punto v) del teorema de equivalencia.

Por el contrario, sea A ergódica y $\gamma A^n = \gamma, n > 0$. Si n es el menor entero, $f = \gamma + \gamma A + ... + \gamma A^{n-1}$ es invariante bajo A y no constante en casi todo lugar (siendo la suma de funciones ortogonales), contradiciendo el punto v) del teorema.

■

Estamos especialmente interesados en el caso del toro de dimensión n Tor^n. Como se vio anteriormente, en la sección de endomorfismos del toro, recuérdese que un endomorfismo suprayectivo $A : Tor^n \to Tor^n$ está dado por una matriz [A] de $n \times n$ de entradas enteras y que $\widehat{Tor^n}$ se puede identificar con $\mathbb{Z}^n$ y la acción onducida $\widehat{A} : Tor^n \to Tor^n$ corresponde a la acción de la matriz transpuesta $[A]_t$ en $\mathbb{Z}^n$.

Corolario. Sea $A : Tor^n \to Tor^n$ un endomorfismo continuo suprayectivo del n-toro. Entonces A es ergódica si y sólo si la matriz $[A]_t$ no tiene raíces de la unidad como eigenvalores.

Demostración. Si A no es ergódica, el teorema anterior da la existencia de $q \in \mathbb{Z}^n$, $q \neq 0$ y $k > 0$ con $[A]_t^k q = q$. Entonces $[A]_t^k$ tiene eigenvalor 1, así que $[A]_t$ y por lo tanto [A], tiene a la k-ésima raíz de la unidad como eigenvalor.

Por el contrario, si $[A]_t$ tiene una k-ésima raíz de la unidad como un eigenvalor, entonces $[A]_t^k$ tiene a 1 como eigenvalor. Por lo tanto $([A]_t^k - I)(y) = 0, \in \mathbb{R}^n$ para alguna $y \in \mathbb{R}^n$, y dado que la matriz $[A]_t$ tiene entradas enteras podemos encontrar tal $y \in \mathbb{Z}^n$. Por lo tanto, $[A]_t^k y = y$ y A no es ergódica por el resultado del teorema 1.10.

■

Teorema.[Walters, 1982, 31] Si $T(x) = a \cdot A(x)$ es una transformación afín del grupo compacto metrico, conexo abeliano G entonces los siguientes son equivalentes:

i) T es ergódica (con respecto a la medida de Haar).

ii) a) Siempre que $\gamma \circ A^k = \gamma$ para $k > 0$ entonces $\gamma \circ A = \gamma$ y

ii) b) El subgrupo cerrado más pequeño que contiene a a y a BG, (donde $Bx = x^{-1} \cdot A(x)$) es G, i.e., $[a, BG] = G$.

iii) Existe $x_0 \in G$ con $\{T^n(x_0) : n \geq 0\}$ denso en G.

iv) $\mu(\{x : \{T^n(x) : n \geq 0$ es densa$\}\} = 1$.

4 Teoría Espectral

La teoría espectral ataca el problema de estudiar la geometría de algunas transformaciones que sean lineales, $T : V \to V$. Para ello, se vale del estudio de los eigenvalores, que son los valores λ para los cuales se cumple que:

$$Tx = \lambda x$$

Es decir, que la aplicación lineal aplicada a un vector X sea igual al multiplo escalar de ese vector. Y a ese vector se le llama el eigenvector.

En esta sección nos ocuparemos de analizar el espectro, que es el conjunto de los eigenvalores de los operadores unitarios de los sistemas dinámicos T^n, que son los operadores inducidos por los automorfismos T que preservan medida. Para ello, se establecerán las siguientes definiciones:

Definición. Se dice que T^* es un operador adjunto de T si:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

para toda $x, y \in X$, siendo $\langle , \rangle$ el producto interior ususal en $\mathbb{R}^n$.

Definición. Un operador T se dice que es:

i)Autoadjunto, si $T = T^*$

ii)Normal, si $TT^* = T^*T$

iii) Unitario, si $TT^* = T^*T = I$

Si T es autoadjunto, entonces: $\langle x, \bar{T}(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle$

Dos resultados importantes de la teoría espectral son:

Si U es unitario, y $\lambda \in \sigma(U)$, entonces, $|\lambda| = 1$

Y si U es autoadjunto y $\lambda \in \sigma(U)$, entonces, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donde $\sigma(U)$ es el conjunto de eigenvalores de U.

Como ejemplo, se calculará ahora los eigenvalores de la trasnformación T del ejemplo del toro:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ x & y \end{bmatrix}$$

Uno de los objetivos principales del trabajo se centra en los sistemas ergódicos. El siguiente teorema liga la teoría espectral con los sistemas ergódicos que se vieron en la sección anterior y en especial con las rotaciones en el grupo del círculo.

Teorema del valor propio. Una transformación T que preserva medida y que es invertible en un espacio de medida finita es ergódica si y sólo si el número 1 es un valor propio simple del operador unitario inducido U.

Si T es ergódica entonces el valor absoluto de cada función propia de U es constante, cada valor propio es simple y el conjunto de valores propios de U es un subgrupo del grupo del círculo.

Demostración. Dado que el espacio tiene medida finita, cada función constante f está en L^2; dado que $Uf = f$, el número 1 es siempre valor propio de U. Dado que el conjunto de todas las funciones constantes es un subespacio unidimensional de L^2 y dado que T es ergódica si y sólo si las únicas funciones invariante sde L^2 son constantes, la primer afirmación del teorema está demostrada. Recuérdese que una función en L^2 es invariante si y sólo si es la función propia de U que corresponde al valor propio 1.

Dado que U es unitario, cada valor propio de U tiene valor absoluto 1. Se sigue que si f es una función propia con valor propio c, i.e., $f(T(x)) = cf(x)$ casi en todo lugar, entonces $|f|$ es invariante: la ergodicidad de T implica entonces que $|f|$ es constante. Si f y g son funciones propias con valor propio c, entonces f/g es una función invariante, así que g es múltiplo constante de f. Nótese que dado que $|g|$ es una constante diferente de cero f/g tiene sentido. Esto prueba la simplicidad de cada valor propio. Si, finalmente b y c son valores propios de U con correspondientes funciones propias f y g, entonces f/g es una función propia de U con valor propio b/c; esto prueba que los valores propios de U forman un grupo.

■

La teoría ergódica se puede estudiar desde tres diferentes niveles; que son adecuadamente descritos con las palabras algebráico, geométrico, y analítico. El nivel geométrico se refiere a las transformaciones en un espacio de medida. El analítico, es el estudio de los operadores lienales inducidos por una transformación en varios espacios L^2. El algebráico, estudia los grupos de automorfismos de ciertas algebras Booleanas.

Muchas de las dificultades de la teoría de la medida radica en los conjuntos de medida cero. El tratamiento algebráico de esta dificultad se hace considerando conjuntos modulo conjuntos de medida cero. Supóngase que X es un espacio de medida con medida normalizada μ y sea B el conjunto de clases de equivalencia de conjuntos medibles, donde dos conjuntos medibles, E, F son equivalentes si y sólo si su diferencia simétrica $E \triangle F$ es cero.

El conjunto B es un álgebra Booleana bajo las operaciones naturales Booleanas. En efecto, (E_1, E_2) y (F_1, F_2) son pares de conjuntos equivalentes, entonces $E_1 \cup F_1$ es equivalente a $E_2 \cup F_2$; se sigue que la unión de dos clases de equivalencia pueden ser únicamente difinida seleccionando representantes de cada clase y formando la clse de equivalencia de su unión. Lo mismo se da para el caso de intersecciones y complementos. Y ya que la medida es numeralmente aditiva, es también verdad para uniones e intersecciones numerables. El elemento cero del álgebra Boolenan B es la clase de todos los conjuntos de medida cero.

Dado que $\mu(E \triangle F) = 0$ entonces $\mu(E) = \mu(F)$, la función f puede considerarse definida en B. El único elemnto de medida cero en B es el elemento cero; análogamente el único elemento que tiene medida uno es el elemento unitario.

Una estructura (B, μ), es decir una sigma-álgebra Booleana con medida positiva normalizada se llama algebra de medida.

El concepto de álgebra de medida es el sustituto algebráico del concepto geométrico de espacio de medida.

Una transformación T que preserva medida en X induce de manera natural un mapeo de B en sí mismo. La imagen de una clase de equivalencia bajo el mapeo se define seleccionando un representante E y formando la clase de equivalencia $T^{-1}(E)$; el caracter de T que preserva medida implica que la clase de la imagen está únicamente determinada por el proceso y que la medida de la clase de la imagen es la misma que la medida de la original.

El mapeo que preserva medida de B en sí mismo se denota por T^{-1}. Dicho mapeo preserva todas las operaciones Booleanas. Es un isomorfismo de B en sí mismo. Y una condición necesaria y suficiente para que T^{-1} sea un automorfismo de B es que la transformación T sea invertible.

Una pregunta relevante para efectos de este estudio es cuándo dos transformaciones S, T invertibles que preservan medida son esencialmente la misma?, Existen tres posibles respuestas: Si S y T se toman como transformaciones en un espacio de medida X, entonces la respuesta adecuada es que existe una transformación Q en X invertible que preserva medida tal que $S = Q^{-1}TQ$, en esté caso S y T se dice que son (geométricamente) similares.

Una manera formal de expresar lo anterior es: Sean $T : X \to X$ y $S : Y \to Y$, dos sistemas dinámicos arbitrarios, se dice que T es similar a S si existe una biyección $Q : X \cong Y$ tal que el siguente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & X \arrow[d, "Q"] \\ Y \arrow[r, "S"] & Y \end{tikzcd}$$

La similitud en algebra lineal i.e., A es similar a D si y sólo si existe α con $D = \alpha A \alpha^{-1}$, es la similitud en dinámica. Intuitivamente, si S y T son similares entonces representan la misma dinámica.

Si S y T se toman como automorfismos de una álgebra de medida B, entonces la respuesta adecuada es que existe un automorfismo Q en la álgebra, tal que $S = Q^{-1}TQ$, en este caso se dice que S y T son (algebráicamente) conjugados.

Otra forma de ponerlo se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{\mathcal{X}} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{Z}_{\mathcal{X}} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{Y}} \arrow[r, "S"] & \mathcal{Z}_{\mathcal{Y}} \end{tikzcd}$$

Donde $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}$ y $\mathcal{Z}_{\mathcal{Y}}$ son álgebras de medida.

Finalmente, si S y T son operadores unitarios en un espacio de Hilbert H entonces la respuesta adecuada es que existe un operador unitario Q en H tal que $S = Q^{-1}TQ$, en este caso S y T se dice que son espectralmente equivalentes.

Nuevamente si $T : X \to X$, $S : Y \to Y$, y si existe $Q : L^2(X) \cong L^2(Y)$ entonces si el siguente diagrama conmmuta se dice que S y T son espectralmente equivalentes.

$$\begin{tikzcd} L^2(X) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & L^2(X) \arrow[d, "Q"] \\ L^2(Y) \arrow[r, "S"] & L^2(Y) \end{tikzcd}$$

Definición. Una transformación T se dice que tiene espectro discreto o espectro puntual puro, si existe una base $\{f_j\}$ de L^2 i.e., un conjunto ortonormal completo donde cada elemento sea un vector propio del operador unitario U inducido.

Teorema de espectro discreto. Dos transformaciones ergódicas con espectro discreto son conjugadas si y sólo si sus operadores unitarios inducidos son equivalentes.

Demostración. Es suficiente probar que equivalencia implica conjugación. Sean las transformaciones dadas S y T, y sean los operadores inducidos U y V. Sea C el conjunto de los valores propios de U; dado que U yV son equivalentes entonces C es también el conjunto de valores propios de V.

A cada c en C le corresponde un vector propio f_c de U. El teorema del valor propio (mencionado en esta sección), implica que $|f_c|$ es una constante, y sin pérdida de generalidad asumimos que $|f_c| = 1$.

El teorema del valor propio también implica (dado que S es ergódica) que f_c está ahora únicamente determinada dentro de un factor constante de valor absoluto 1. El hecho de que U sea espectro discreto implica que la familia $\{f_c\}$ es una base para L^2.

■

Teorema de representación. Una transformación ergódica que preserva medida con espectro discreto, es conjugada a una rotación en un grupo compacto abeliano.

Demostración. Sea C el espectro de la transformación dada; sea X grupo de caracteres de C. Si $z(c) = 0$ para toda c en C, entonces z es un elemento de X. La rotación T en X definida por $T(z) = zx$ es una transformación que preserva medida con espectro discreto, y más aún, su espectro es exactamente C. La discreción del espectro se sigue de las propiedades de los caracteres de X. Ellos forman un conjunto ortonormal completo en el espacio L^2 en X y si f_0 es uno de ellos, entonces $f_0(zx) = f_0(z)f_0(x)$, así que f_0 es una función propia con valor propio $f_0(z)$.

Este argumento también demuestra que el espectro de T es el conjunto de todas las $f_0(z)$ cada una con multiplicidad igual al número de caracteres f de X para cada $f(z) = f_0(z)$. Si para cada c en C hacemos corresponder la función f de X definida por $f_c(x) = x(c)$, entonces esta correspondencia es un isomorfismo de C en el grupo caracter de X.

Dado que $f_c(z) = c$ para cada c, se sigue que el espectro de T es C. Dado que la misma relación muestra que cada elemento de C tiene multiplicidad uno en el espectro de T, la rotación T es ergódica.

■

Corolario. Todo subgrupo del círculo es el espectro de una transformación ergódica que preserva medida con espectro discreto.

5 Conclusiones

El presente trabajo propone una ruta desde los temas más sencillos de dinámica de homeomorfismos hasta la teoría espectral. Para ello, pasa por conceptos de álgebra, topología y teoría de la medida. A lo largo del trabajo se mezclaron estas diferentes ramas de las matemáticas dando una fuerte estructura al círculo S^1, no solamente como un conjunto de puntos en el plano sino como grupo abeliano y sus rotaciones.

Se estudiaron las rotaciones en el círculo, identificando las ergódicas, para ello se necesitó de herramientas como los caracteres que son homomorfismos continuos en el círculo dado que si $f \in \widehat{G}$, entonces f es un vector propio del operador unitario inducido por T. Los caracteres tienen especial importancia debido a que los caracteres forman un conjunto ortonormal completo en L^2, y toda función invariante $f \in L^2$ se puede expander en términos de ellos.

Dado que para operadores unitarios, los vectores propios con distintos valores propios son ortogonales, entonces cada función invariante $f \in L^2$ (es decir, cada vector propio con valor propio 1) es una combinación lineal de caracteres con valor propio 1.

Y además, si $f \in \widehat{G}$ y $f(cx) = f(x)$ casi en todo lugar, entonces por continuidad, $f(cx) = f(x)$ en todo lugar y por lo tanto $f(c^n x) = df(x)$ en todo lugar. El resultado se sigue haciendo $x = 1$.

Los resultados más importantes presentados en el trabajo se siguen de los teoremas ergódicos y espectrales, por ejemplo, si X es un espacio topológico y T es ergódica, entonces para casi toda $x \in X$ la orbita de x es densa en todo lugar.

La rotación $T(z) = az \in S^1$ es ergódica si y sólo si a no es una raíz de la unidad.

Los resultados anteriores se unen por el teorema de equivalencia que dice que T es ergódica si y sólo si T es medible y $(f \circ T)(x) = f(x)$ entonces se puede afirmar que A es ergódica si y sólo si el caracter trivial $\gamma = 1$ es el único $\gamma \in \widehat{G}$ que satisface que $\gamma \circ A^n = \gamma$ para alguna $n > 0$.

Y más aún, si $A : Tor^n \to Tor^n$ es un endomorfismo continuo suprayectivo, entonces A es ergódica si y sólo si la matriz $[A]$ no tiene raices de la unidad como eigenvalores.

Esto se refleja en la teoría espectral en los teoremas del valor propio, de espectro discreto y de representación (para ello se tuvieron que exponer conceptos de similitud, conjugación y equivalencia):

Cuando se trata de decir si dos transformaciones S y T que preservan medida son esencialmente la misma, la respuesta se puede dar en tres direcciones, si S y T son transformaciones en un espacio medible X entonces la respuesta adecuada es que existe una transformación invertible que preserva medida Q tal que $S = Q^{-1}TQ$, en este caso S y T son similares. Si S y T se encuentran en una álgebra medible, entonces existe un automorfismo Q tal que $S = Q^{-1}TQ$, en este caso se dice que S y T son conjugadas, y finalmente si S y T son operadores unitarios en un espacio Hilbert H, existe entonces un operador unitario Q en H tal que $S = Q^{-1}TQ$, en este caso S y T son llamadas (espectralmente) equivalentes.

Después de ver estos conceptos se pudieron enunciar los siguientes resultados, T es ergódica si y sólo si 1 es un valor propio simple del operador unitario inducido U.

Dos transformaciones con espectro discreto son conjugadas si y sólo si sus operadores unitarios inducidos son equivalentes.

Una transformación ergódica que preserva medida con espectro discreto, es conjugada a una rotación en un grupo compacto abeliano, que es el caso del círculo S^1.

Finalmente se concluye que todo subgrupo del círculo es el espectro de una transformación T ergódica que preserva medida con espectro discreto.

6 Bibliografía

1. Cornfeld I. P., Ergodic Theory, Moscow, Springer-Verlag, 1982.

2. Sinai Ya. G., Topics in Ergodic Theory, USA, Princeton University Press, 1994.

3. Percival Ian, Introduction to Dynamics, Great Britain, Cambridge University Press, 1985.

4. Loomis L., Advanced Calculus, Boston, Jones and Barlett Publishers Inc., 1990.

5. Arnold V.I., Ergodic Problems of Classical Mechanics, New York, W.A. Benjamin Inc., 1968.

6. Helmberg G., Introduction to spectral Theory in Hilbert Spaces, Holland, North-Holland Publishing Co., 1969.

7. Friedrichs K.O., Spectral Theory of operators in Hilbert Spaces, USA, Springer-Verlag, 1980.

8. Walters P., An Introduction to Ergodic Theory, USA, Springer-Verlag, 1982.

9. Venkov A.B., Spectral Theory of automorphic functions and its applications, Netherlands, Kluwer Academis Publishers, 1990.

10. Radjavi H., Spectral Theory, USA, Springer-Verlag, 1970.

11. Berlanga R., Simetrías y Coloraciones, Miscelánea Matemática 22 1995 3-21.

12. Berlanga R., A mapping theorem for topological sigma-compact manifolds, Compositio Mathematica 63, 1987, 209-216.

13. Berlanga R., measures on sigma-compact manifolds and their equivalence under homeomorphisms, J. London Math. Soc 27 1983 63-74.

14. Rudin W., Functional Analysis, USA, McGraw-Hill, 1991.

15. Branner B., Real and Complex Dynamical Systems, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1993.

16. Rudin w., Real and Complex Analysis, USA, McGraw-Hill Inc., 1974

17. Blanchard P, Differential Equations, USA, Brooks/Cole Publishing Co., 1998.

18. Halmos P, Lectures on Ergodic Theory, Chelsea Publishing Company, USA, 1956.

19. Greenberg M. J., Algebraic Topology a first course, Benjamin/Cummings Publishing Co., USA, 1981.

20. Nachbin L, THe Haar Integral, D. Van Nostrand Co., USA, 1965.

21. Nadkarni M.G., Basic Ergodic Theory, Birklmser Verlag, USA, 1995.

22. Royden H.L., Real Analysis, The Macmillan Company, USA, 1968.