UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESQUEMA DEDUCTIVO Y SU APLICACIÓN A LA EQUIVALENCIA $(X A_i)^B \sim X A_i^B$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

MARTHA PATRICIA RODRIGUEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GONZALO ZUBIETA RUSSI

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

EL ESQUEMA DEDUCTIVO Y SU APLICACION A LA EQUIVALENCIA $(\times A_i)^B \sim \times A_i^B$

realizado por RODRIGUEZ ROSAS MARTHA PATRICIA

con número de cuenta 8752801-1 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. GONZALO ZUBIETA RUSSI
Propietario	DR. RAFAEL ROJAS BARBACHANO
Propietario	M. en C. ROCIO VITE GONZALEZ
Suplente	M. en I. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ
Suplente	MAT MARICELA SOLORZANO AUDIFFRED Maricela Solorzano A.

Consejo Departamental de MATEMATICAS

Héctor Méndez L

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

EL ESQUEMA DEDUCTIVO Y SU APLICACIÓN A LA EQUIVALENCIA

$$(\mathsf{X}\, A_i)^B \sim \mathsf{X} A_i{}^B$$

DEDICATORIA

Con todo el amor y cariño a mi Madre, Martha Rosas Castillo la mujer más importante en mi vida.

Porque tus consejos siempre estuvieron llenos de amor y sabiduría. Porque en los momentos difíciles tu ejemplo me enseño a tener carácter y valor para dar ese segundo esfuerzo, que nos permite realizar nuestros sueños.

Por su amor incondicional a mi Padre Estanislao Rodríguez Gobea. A mis hermanas: Yola, Lidia, Tere, Ara y Sonia. A mis sobrinos: Iván, Diana y Fátima. A todos mis amigos.

A Dios.

Gracias.

AGRADECIMIENTOS.

Agradezco enormemente el Maestro Gonzalo Zubieta Russi, por su enseñanza y sabiduría, por ser un excelente tutor, por su infinita paciencia y por ser la persona que es.

Agradezco la revisión de esta tesis a los profesores: Dr. Rafael Rojas Barbachano, a la M. en C. Rocio Vite Gonzalez, a la M. en I. Norma Elvira Peralta Marquez, y a la Mat. Maricela Solórzano Audifred.

ÍNDICE

PRÓLOGO..4

I PREFACIO 5

II CONDICIONALES 6

III ESQUEMA DEDUCTIVO 8

IV APLICACIÓN A VERACES Y MITÓMANOS..................................11

V APLICACIÓN A LOS SILOGISMOS 14

VI REPERTORIO DE SILOGISMOS 17

VII NUEVO REPERTORIO SOBRE VERACES Y MITÓMANOS 19

VIII DUALIDAD..26

IX APLICACIÓN DEL ESQUEMA A LOS NUEVOS EJEMPLOS......29

X APLICACIÓN DEL ESQUEMA EN EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS 31

XI DEMOSTRACIÓN FORMAL DE $(X\,A_i)^B \sim XA_i^B$...............................39

PRÓLOGO

El presente documento tiene como finalidad dar a conocer un nuevo repertorio sobre veraces y mitómanos, así como la aplicación del esquema deductivo a estos y a una equivalencia matemática.

Exploraremos, para ello los acertijos Parvipontanos sobre veraces y mitómanos, que fueron iniciados en el siglo XII por los escolásticos del Petit Pont de París.

También se ilustrará el empleo de los modos descendentes del esquema a los silogismos aristotélicos.

Tanto el contexto de los silogismos como el de los parvipontanos son muy importantes, pues bien, aunque no son puramente matemáticos tienen la gracia de seguir el esquema deductivo para sus demostraciones.

A medida que se avance, el lector se irá familiarizando con el uso sistemático del esquema deductivo que se empleará en todo momento en las demostraciones de este documento.

Todo se hará dentro del esquema de una manera deliberada y consciente, y así, al final se logrará ver la belleza de éste en una demostración clara de un ejemplo netamente matemático como lo es: $(\underset{i\in I}{X} A_i)^B \sim \underset{i\in I}{X} A_i^B$.

PREFACIO

A fin de facilitar el manejo de los ejemplos, aclararemos algunos conceptos.

Parvipontano es el sobrenombre que se le daba a Adam Balsham, escolástico del siglo XII que enseñaba en el Petit Pont de París.

Fue el primero en ocuparse de acertijos como los que vamos a presentar, pero a él sólo le interesaban los insolubles como:

A dice que B miente
B dice que A no miente

O como:

A dice que B miente,
B dice que C miente,
C dice que A miente.

Para el arte de demostrar, sin embargo, son más importantes los acertijos sobre veraces y mitómanos, como:

A dice que B es mitómano
B dice que A no es mitómano.

En el artículo sobre análisis lógico publicado en Mathesis por el maestro Gonzalo Zubieta Russi, presenta un repertorio exhaustivo de estos acertijos, en dos y tres variables, los cuales son valiosos para practicar las demostraciones por casos, por contradicción, y por exclusión.

II CONDICIONALES

***Ejemplo de condicionales*:**

Si x es socio de y entonces x cumple
Si x no cumple entonces x no es socio de y

Para negar una condicional se afirma la hipótesis y se niega la tesis. En el caso de las dos anteriores, sus negaciones son respectivamente:

x es socio de y y x no cumple
x no cumple y x es socio de y

Dos condicionales se llaman giros, la una de la otra, si, y sólo si, tiene la misma negación.

Así las condicionales anteriores son giros, la una de la otra, porque tiene, salvo el orden, la misma negación.

Por definición el que es veraz siempre dice la verdad, el que es mitómano siempre miente y el que no es veraz ni mitómano es normal.

Luego el que dice alguna mentira no es veraz, y el que dice alguna verdad no es mitómano. Toda persona es veraz o normal o mitómanos, pero sólo una de estas tres cosas.

Axiomas:

I Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa,
entonces sucede tal cosa.

II Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa,
entonces no sucede tal cosa

III Si x es veraz entonces x no es mitómano
Si x es mitómano entonces x no es normal
Si x es normal entonces x no es veraz

IV x es veraz ó x es mitómano ó x es normal.

Estos axiomas constituyen una definición implícita de los términos **veraz**, **mitómano y normal**.

Otros axiomas:

1) Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa,
entonces x miente.

2) Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa,
entonces x no miente.

Estos axiomas constituyen una definición implícita de los términos mentir y no mentir.

En general los axiomas son válidos por definición y son las únicas verdades que no necesitan ser demostradas.

III ESQUEMA DEDUCTIVO

El esquema deductivo universal consta de tres modos hipotéticos para inferir y de cinco modos descendentes.

Los **modos hipotéticos** son:

Si P o Q,
y si no P,
entonces Q. *Reducción por exclusión*

Si P entonces Q,
y si P entonces no Q,
entonces no P. *Reducción por contradicción*.

Si P o Q,
y si P entonces R,
y si Q entonces R,
entonces R. *Reducción por casos*

Los **modos descendentes** son del tenor siguiente:

De lo idéntico:

Si x es socio de y entonces x es socio de y

De la conjunción a la parte:

Si x es socio de y y y fuma entonces y fuma

De la parte a la disyunción:

Si y fuma entonces x es socio de y o y fuma

De lo general a lo particular:

Si, para todo x, x depende de y,
entonces y depende de y.

En este ejemplo, lo que la hipótesis afirma de todo x la tesis lo afirma de y. Nótese la colocación de la tesis.

De lo específico a lo inespecífico:

Si x es socio de y y x fuma
entonces existe z tal que
z es socio de y y z fuma.

Aquí lo que la hipótesis afirma de x, la tesis lo afirma de algún z, sin especificar. Obsérvese la colocación de la tesis.

Aparte de los ocho modos anteriores, se puede inferir también por traducción, por giro, por definición, o por algo demostrado antes.

Deducción de P es una cadena P_1, P_2,...,P_n de afirmaciones, llamadas pasos, tales que P_n es P, y cada paso es un axioma o algo demostrado antes, o se infiere de pasos anteriores mediante un axioma o algo demostrado antes.

Cuando una demostración sea demasiado larga podremos echar mano de una técnica opcional que es el procedimiento por etapas. En la primera etapa se demuestran sobre la marcha algunos pasos, y se dejan pendientes otros. En la segunda etapa se dan por demostrados los pasos que ya lo fueron en la primera etapa, y se demuestran sobre la marcha algunos pasos pendientes. En la tercera etapa se dan por demostrados los pasos que ya lo fueron en la primera y en la segunda y se demuestran sobre la marcha algunos pasos pendientes... Se prosigue así sucesivamente, hasta que no queden pasos pendientes.

Este esquema deductivo está presente en el quehacer de todo matemático. Su exhibición, en la forma depurada que ostenta aquí, se debe al maestro Gonzalo Zubieta Russi a quien también, se debe el modo de utilizarlo para demostrar los silogismos y las afirmaciones sobre veraces y mitómanos, que sirven de modelo para demostrar en matemáticas.

IV APLICACIÓN DEL ESQUEMA A VERACES Y MITÓMANOS.

A dice que B es veraz
B dice que A no es veraz Datos.

En las siguientes demostraciones se exhibe el uso de los tres modos hipotéticos.

A <u>no es veraz</u>:

1) A dice que B es veraz Dato
2) B es veraz o B no es veraz Axioma lógico

3) Si B es veraz entonces A no es veraz:

   a) B es veraz Hpt
   b) B dice que A no es veraz Dato
   c) A no es veraz (a)(b).Def de veraz.

4) Si B no es veraz entonces A no es veraz:

   a) B no es veraz Hpt
   b) A dice que B es veraz Dato
   c) A no es veraz (b)(a).Def de veraz.

5) A no es veraz (2)(3)(4).*Por casos.*

En esta demostración, los pasos (3) y (4) se demuestran sobre la marcha.

Los datos valen por definición. Luego son axiomas.

B <u>no es mitómano</u>:

1) Si B es mitómano entonces A es veraz:

   a) B es mitómano Hpt
   b) B dice que A no es veraz Dato
   c) A es veraz (a)(b). Def de mitómano.

2) Si B es mitómano entonces A no es veraz:

   a) B es mitómano Hpt
   b) A dice que B es veraz Dato
   c) B no es veraz (a).Def común
   d) A no es veraz (b)(c) Def de veraz.

3) B no es mitómano (1)(2). *Por contradicción.*

<u>Si</u> A <u>es</u> <u>mitómano</u> <u>entonces</u> B <u>es</u> <u>normal</u>:

1) A es mitómano Hpt
2) A dice que B es veraz Dato
3) B no es veraz (1)(2)Def de mitómano
4) B es mitómano ó B es normal (3)Def común.
5) B no es mitómano:

   a) B dice que A no es veraz Dato
   b) A no es veraz (1)Def común.
   c) B no es mitómano (a)(b)Def de mitómano.

6) B es normal (4)(5) *Por exclusión*.

V APLICACIÓN DEL ESQUEMA A LOS SILOGISMOS

<u>Si algún poeta es músico</u>
<u>y todo músico es actor</u>
<u>entonces algún actor es poeta</u>: Dimatis

1) Algún poeta es músico Hpt

2) Existe x tal que x es poeta y x es músico (1)Trad.

3) y es poeta y y es músico Def de y

4) Todo músico es actor Hpt

5) Para todo x, si x es músico ent x es actor (4)Trad

6) Si y es músico ent y es actor (5)De lo gral.

7) y es músico (3)De la conj.

8) y es actor (7)Por (6)

9) y es poeta (3)De la conj.

10) y es actor y y es poeta (8)(9) De lo ident.

11) Existe x tal que x es actor y x es poeta (10)De lo esp.

12) Algún actor es poeta (11)Trad.

En el paso (3) se define y, sobre la marcha, lo cual equivale a ponerle nombre al sujeto referido en (2).

<u>Si todo beato es mártir,</u>
<u>y ningún mártir es apóstol</u>
<u>entonces ningún apóstol es beato</u>: Camenes

1) Todo beato es mártir Hpt

2) Para todo x, si x es beato entonces x es mártir (1)Trad

3) Ningún mártir es apóstol Hpt

4) Para todo x, si x es mártir ent x no es apóstol (3)Trad.

5) Para todo y, si y es apóstol ent y no es beato:

   a) y es apóstol Hpt

   b) Si y es mártir ent y no es apóstol (4)De lo gral.

   c) Si y es apóstol ent y no es mártir (b)Giro

   d) y no es mártir (a)Por (c)

   e) Si y es beato ent y es mártir (2)De lo gral.

   f) Si y no es mártir ent y no es beato (e)Giro

   g) y no es beato (d)Por (e)

6) Ningún apóstol es beato (5)Trad.

En esta demostración el paso (5) se demuestra sobre la marcha.

<u>Si todo buzo es marino</u>
<u>y todo marino es aviador</u>
<u>entonces algún aviador es buzo:</u> Bamalip.

1) Todo buzo es marino Hpt

2) Para todo x, si x es buzo en x es marino (1)Trad.

3) Todo marino es aviador Hpt

4) Para todo x, si x es marino ent x es aviador (3) Trad.

5) Existe x tal que x es buzo Hpt adicional

6) y es buzo Def de y

7) Si y es buzo ent x es marino (2)De lo gral.

8) y es marino (6)Por (7)

9) Si y es marino ent y es aviador (4)De lo gral.

10) y es aviador (8)Por (9)

11) y es aviador y y es buzo (10)(6)De lo ident.

12) Existe x tal que x es aviador y x es buzo (11)De lo esp.

13) Algún aviador es buzo (12)Trad.

Aquí se introduce una hipótesis adicional, sin la cual no se puede demostrar el silogismo. Esto ocurre con los que llevan la letra p en el nombre.

VI REPERTORIO DE SILOGISMOS

A continuación se exhiben los silogismos categóricos, en el orden acostumbrado en la literatura del tema.

Si todo M es B
y todo A es M
ent todo A es B Barbara

Si ningún M es B
y todo A es M
ent ningún A es B Celarent

Sí todo M es B
y algún A es M
ent algún A es B Darii

Si ningún M es B
y algún A es M
ent algún A no es B Ferio

Si ningún B es M
y todo A es M
ent ningún A es B Cesare

Si todo B es M
y ningún A es M
ent ningún A es B Camestres

Si ningún B es M
y algún A es M
ent algún A no es B Festino

Si todo B es M
y algún A no es M
ent algún A no es B Baroco

Si todo M es B
y todo M es A
ent algún A es B Darapti

Si ningún M es B
y todo M es A
ent algún A no es B Felapton

Si algún M es B
y todo M es A
ent algún A es B Disamis

Si todo M es B
y algún M es A
ent algún A es B Datisi

Si algún M no es B
y todo M es A
ent algún A no es B Bocardo

Si ningún M es B
y algún M es A
ent algún A no es B Ferison

Si todo B es M
y todo M es A

Si todo B es M
y ningún M es A

ent algún A es B Bamalip

Si algún B es M
y todo M es A
ent algún A es B Dimatis

Si ningún B es M
y algún M es A
ent algún A no es B Fresiso

ent ningún A es B Camenes

Si ningún B es M
y todo M es A
ent algún A no es B Fesapo

VII NUEVO REPERTORIO SOBRE VERACES Y MITÓMANOS

A dice que B es veraz
B dice que C es veraz
C dice que A miente

A no es veraz. B no es veraz. C no es mitómano. Si B es mitómano ent C es normal. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es veraz
B dice que C no es mitómano
C dice que A miente

B no es mitómano. C no es mitómano. Si A es mitómano ent B es normal. Si A es veraz en C es normal. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es veraz
B dice que C es normal
C dice que A miente

C no es mitómano. Si B es mitómano ent C es veraz.

A dice que B es veraz
B dice que C no es normal
C dice que A miente

Si A es veraz ent C es mitómano. Si B es veraz ent C es mitómano. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es veraz
B dice que C no es veraz
C dice que A no miente

B <u>no es mitómano</u>. C <u>no es veraz</u>. <u>Si</u> A <u>es veraz ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> A <u>es mitómano ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> B <u>es veraz ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> C <u>es mitómano</u> <u>ent</u> B <u>es normal</u>.

A dice que B es veraz
B dice que C es mitómano
C dice que A no miente

A <u>no es veraz.</u> B <u>no es veraz.</u> C <u>no es veraz.</u> <u>Si</u> B <u>es mitómano ent</u> C <u>es normal.</u> <u>Si</u> C <u>es mitómano ent</u> B <u>es normal.</u>

A dice que B es veraz
B dice que C es normal
C dice que A no miente

C <u>no es veraz.</u> <u>Si</u> B <u>es mitómano ent</u> C <u>es mitómano.</u>

A dice que B es veraz
B dice que C no es normal
C dice que A no miente.

<u>Si</u> A <u>es veraz ent</u> C <u>es veraz.</u> <u>Si</u> B <u>es veraz ent</u> C <u>es veraz.</u> <u>Si</u> C <u>es mitómano ent</u>
B <u>es normal.</u>

A dice que B es mitómano
B dice que C no es veraz
C dice que A miente.

A no es veraz. B no es mitómano. C no es mitómano. Si B es veraz ent C es normal. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es mitómano
B dice que C es mitómano
C dice que A miente.

B no es veraz. C no es mitómano. Si A es veraz ent C es normal. Si B es mitómano ent C es normal. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es mitómano
B dice que C es normal
C dice que A miente

Si A es veraz ent C es mitómano. Si B es mitómano ent C es mitómano. Si C es veraz ent B es normal.

A dice que B es mitómano
B dice que c no es normal
C dice que A miente.

C no es mitómano. Si B es veraz ent C es veraz.

A dice que B es mitómano
B dice que C es veraz
C dice que A no miente

B <u>no es veraz</u>. C <u>no es veraz</u>. <u>Si</u> A <u>es veraz ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> A <u>es mitómano ent</u> B <u>es normal</u>. <u>Si</u> B <u>es mitómano ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> C <u>es mitómano ent</u> B <u>es normal</u>.

A dice que B es mitómano
B dice que C no es mitómano
C dice que A no miente

A <u>no es veraz</u>. B <u>no es mitómano</u>. C <u>no es veraz</u>. <u>Si</u> B <u>es veraz ent</u> C <u>es normal</u>. <u>Si</u> C <u>es mitómano ent</u> B <u>es normal.</u>

A dice que B es mitómano
B dice que C es normal
C dice que A no miente.

<u>Si</u> A <u>es veraz ent</u> C <u>es veraz</u>. <u>Si</u> B <u>es mitómano ent</u> C <u>es veraz</u>. <u>Si</u> C <u>es mitómano ent</u> B <u>es normal.</u>

A dice que B es mitómano
B dice que C no es normal
C dice que A no miente

C <u>no es veraz</u>. <u>Si</u> B <u>es veraz ent</u> C <u>es mitómano</u>.

A dice que B es normal
B dice que C es veraz
C dice que A miente.

Si B es mitómano ent C es normal. Si C es veraz ent B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C no es veraz
C dice que A miente.

Si B es veraz ent C es normal. Si C es veraz ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C es mitómano
C dice que A miente.

B no es veraz. Si A es mitómano ent B es mitómano. Si C es veraz ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C no es mitómano
C dice que A miente.

B no es mitómano. Si A es mitómano ent B es veraz. Si C es veraz ent B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C es normal
C dice que A miente.

Si B es mitómano ent C es veraz. Si C es veraz ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C no es normal
C dice que A miente.

Si B es veraz ent C es veraz. Si C es veraz ent B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C es veraz
C dice que A no miente

B no es veraz. Si A es mitómano ent B es mitómano. Si C es mitómano ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C no es veraz
C dice que A no miente.

B no es mitómano. Si A es mitómano ent B es veraz. Si C es mitómano ent B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C es mitómano
C dice que A no miente.

Si B es mitómano ent C es normal. Si C es mitómano ent B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C no es mitómano
C dice que A no miente.

Si B es veraz ent C es normal. Si C es mitómano ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C es normal
C dice que A no miente.

Si B es mitómano ent C es mitómano. Si C es mitómano ent B es mitómano.

A dice que B es normal
B dice que C no es normal
C dice que A no miente.

Si B es veraz ent C es mitómano. Si C es mitómano ent B es veraz.

Este repertorio fue realizado por Osvaldo de la Peña R., Maricela Solórzano A. y Martha Patricia Rodríguez R., bajo la dirección del maestro Gonzalo Zubieta Russi.

VIII DUALIDAD

A cada ejemplo de éste repertorio le corresponde su dual, que no figura ahí. Así el repertorio del capítulo anterior se duplica al pasar en cada caso de los datos originales a los datos conjugados y de las afirmaciones a las afirmaciones duales.

El ***dual*** de veraz es mitómano, el ***dual*** de mitómano es veraz, y el ***dual*** de normal es normal.

El ***conjugado*** de un término es la negación de su dual. Así, el conjugado de veraz es no mitómano, el conjugado de mitómano es no veraz y el conjugado de normal es no normal.

Principio de dualidad:

Si a partir de ciertos datos se demuestra cierta afirmación, entonces a partir de los datos conjugados se demuestra la afirmación dual.

Ejemplo

A dice que B es veraz
B dice que C no es normal
C dice que A no miente

Afirmación

Si C es mitómano ent B es normal:

1) C es mitómano Hp

2) C dice que A no miente Dato
3) A miente (1)(2)Def de mit.
4) A dice que B es veraz Dato
5) B no es veraz (3)(4)Def de mentir
6) B es mitómano Ó B es normal (5)Def común
7) B no es mitómano:

a) B dice que C no es normal Dato
b) C no es normal (1) Def común
c) B no es mitómano (a)(b)Def de mit.

8) B es normal (6)(7)Exclusión.

Datos Conjugados

A dice que B no es mitómano
B dice que C es normal
C dice que A no miente

Afirmación Dual

Si C es veraz ent B es normal:

1) C es veraz hpt
2) C dice que A no miente Dato
3) A no miente (1)(2)Def de veraz
4) A dice que B no es mitómano Dato
5) B no es mitómano (3)(4) Def de no mentir
6) B es veraz ó B es normal (5)Def común

7) B no es veraz:

a) B dice que C es normal   Dato
b) C no es normal   (1)Def común.
c) B no es veraz   (a)(b)Def de veraz, gir.

8) B es normal.

IX APLICACIÓN DEL ESQUEMA A LOS NUEVOS EJEMPLOS.

A dice que B es veraz
B dice que C es veraz
C dice que A miente. Datos

A <u>no es veraz</u>: Afirmación a demostrar

1) A dice que B es veraz Dato
2) B es veraz ó B no es veraz Axioma lógico

3) Si B es veraz ent A no es veraz:

   a) B es veraz Hpt
   b) B dice que C es veraz Dato
   c) C es veraz (a)(b)Def de veraz
   d) C dice que A miente Dato
   e) A miente (c)(d)Def de veraz
   f) A no es veraz (e)Def de veraz

4) Si B no es veraz ent A no es veraz:

   a) B no es veraz Hpt
   b) A dice que B es veraz Dato
   c) A no es veraz (b)(a)Def de veraz

5) A no es veraz (2)(3)(4)Por casos.

C no es mitómano: Afirmación a demostrar

1) Si C es mitómano ent B es veraz:

   a) C es mitómano Hpt
   b) C dice que A miente Dato
   c) A no miente (a)(b) Def de mit.
   d) A dice que B es veraz Dato
   e) B es veraz (c)(d) Def de no mentir.

2) Si C es mitómano ent B no es veraz:

   a) C es mitómano Hpt
   b) B dice que C es veraz Dato
   c) C no es veraz (a)Def de mit
   d) B no es veraz (b)(c)Def de veraz, girada

3) C no es mitómano (1)(2)Por contradicción.

Si B es mitómano ent C es normal:

1) B es mitómano Hpt
2) B dice que C es veraz dato
3) C no es veraz (1)(2)Def de mit.
4) C es mitómano ó C es normal (3)Def común
5) C no es mitómano:

   a) C dice que A miente Dato
   b) A dice que B es veraz Dato
   c) B no es veraz (1)Def común
   d) A miente (b)(c)Def de mentir
   e) C no es mitómano (a)(d)Def de mit. girada

6) C es normal (4)(5)Por exclusión.

X APLICACIÓN DEL ESQUEMA AL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El álgebra de conjuntos versa sobre las operaciones de *unión, intersección, resta y producto cartesiano.*

Se hablará de conjuntos A,B,C,... y de sus elementos x,y,z,...

Se escribe $x \in A$ para denotar las frases siguientes:

x está en A,
x pertenece a A,
x es elemento de A.

Se dice que A está contenido en B, o que A es subconjunto de B, en símbolos $A \subseteq B$ si y sólo si, todo elemento de A es elemento de B.

Propiedades:

$A \subseteq A$. Reflexiva

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$. Transitiva

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A=B$. Antisimétrica.

Se define el vacío, $\varnothing$, mediante el siguiente axioma:

No existe x tal que $x \in \varnothing$.

A continuación daremos algunas definiciones, axiomas y propiedades que nos serán de utilidad posteriormente.

Correspondencia es cualquier conjunto f de pares ordenados (x,y).

Se define el ***dominio*** de f mediante la condición:

$x \in$ Dom f, ssi $\exists$ y tlq$(x,y) \in f$ Def de Dom.

Función es una correspondencia f tlq, si (x,y_1), $(x,y_2) \in f$ ent $y_1 = y_2$.

En este caso se escribe $f(x)=y$ para indicar que $(x,y) \in f$.

Axioma de extensionalidad:

Si Dom f = D,
Dom g = D,
y si, para todo $x \in D$, $f(x) = g(x)$,
entonces $f = g$.

Se dice que f va de A a B, en símbolos $f: A \rightarrow B$, si, y sólo si, f es función, Dom f =A y, para todo $x \in A$, $f(x) \in B$.

Def de ***Incidencia***

Se dice que $f: A \rightarrow B$, es ***inyectiva*** si, y sólo si, f va de A a B y, para todos $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se dice que $f: A \rightarrow B$, es ***suprayectiva*** si, y sólo si f va de A a B y, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x)=y$.

Se dice que f: A→ B, es ***biyectiva*** si, y sólo si, f: A→ B es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Se dice que A es ***equivalente*** a B, en símbolos A~B si, sólo si, existe f tal que f: A→ B, es biyectiva.

Familia de Conjuntos

Una ***familia de conjuntos*** $(A)_{i\in I}$ es una correspondencia A que a cada elemento $i\in I$ le asocia un conjunto único A_i.

Se define la ***unión*** y la ***intersección*** de una familia tal:

$x\in\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ si, y sólo si, existe i tal que $i\in I$ y $x \in A_i$

$x\in\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ si, y sólo si, para todo i, si $i\in I$ entonces $x \in A_i$

En lugar de $\bigcup\limits_{i\in I}$ escribiremos simplemente $\bigcup\limits_{i}$, o bien $\bigcup$,cuando se

sabe de que i se trata.

A partir de aquí, a menos que se especifique alguna otra cosa, $i\in I$.

El ***producto cartesiano***

$$\underset{i \in I}{\mathsf{X}} A_i,$$

de una familia de conjuntos, es un conjunto tal que

$f \in \underset{i \in I}{\mathsf{X}} A_i$ ssi f es una función,

Dom f= I

y $\forall\, i \in I, f_i \in A_i$.

Como caso particular de producto cartesiano, cuando todos los factores son iguales a A, se define la ***potencia*** A^I, como sigue:

$f \in A^I$ ssi f es una función,
Dom f= I
y $\forall\, i \in I, f_i \in A$.

Definición de existencia de un único.

Se dice que existe un único $x \in A$ tal que x satisface ϕ si, y sólo si, existe $x \in A$ tal que x satisface ϕ y, dados x_1 y $x_2 \in A$, si x_1 y x_2 satisfacen ϕ entonces $x_1 = x_2$.

Se denotará por $\exists!\, x \in A$ tal que x satisface ϕ.

Correspondencia Biunívoca

Si $x \in A$ y $y \in B$ se dice que la condición:

$$P(x,y),$$

define una correspondencia biunívoca entre A y B si, y sólo si, para toda $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$, y, para todo $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$.

Lema

Si $P(x,y)$ define una correspondencia biunívoca entre A y B ent $A \sim B$:

1) $P(x,y)$ define una correspondencia biunívoca entre A y B   Hpt
2) $\forall x \in A, \exists! y \in B$ tal que vale $P(x,y)$
3) $\forall y \in B, \exists! x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (1)Def de corresp biuniv.

4) $\exists$ f tal que $f: A \to B$ es biyectiva:

a) $(x,y) \in f$ ssi $x \in A$, $y \in B$ y vale $P(x,y)$ Def de f

b) f es función:

b1) Si (x,y_1), $(x,y_2) \in f$ ent $y_1 = y_2$:   Pend

c) Dom f =A:

c_1) $\forall x$, si $x \in$ Dom f ent $x \in A$: Pend
c_2) $\forall x$, si $x \in A$ ent $x \in$ Dom f: Pend.

d) $\forall x \in A$, $f(x) \in B$: Pend

e) f va de A a B (b)(c)(d)Def de inc.

f) $\forall\ x_1,x_2 \in A$ si $f(x_1)=f(x_2)$ ent $x_1=x_2$: pend

g) $\forall\ y \in B$, $\exists\ x \in A$ tal que $f(x)=y$: Pend

h) $f: A \to B$ es biyectiva (e)(f)(g)Def de biy

i) $\exists$ f tal que $f: A \to B$ es biyectiva (h)Desc.

5)$A \sim B$ (i)Def de $\sim$

Pasos Pendientes

b1) Si (x,y_1), $(x,y_2) \in f$ ent $y_1=y_2$:

α) $(x,y_1) \in f$ Hpt
β) $x \in A$
γ) $y_1 \in B$
δ) vale $P(x,y_1)$ (α) Def de f
ε) $(x,y_2) \in f$
ζ) $x \in A$
η) $y_2 \in B$
θ) vale $P(x,y_2)$ (ε) Def de f
ι) $\exists!\ y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (β) Por (2)
κ) $\forall\ y_1,y_2 \in B$ si valen $P(x,y_1)$, $P(x,y_2)$ ent $y_1=y_2$ (ι) Def de $\exists!$
λ) Si valen $P(x,y_1)$, $P(x,y_2)$ ent $y_1=y_2$ (γ)(η)Por(κ)
μ) $y_1=y_2$ (δ)(θ) Por (λ)

c_1) $\forall\ x$, si $x \in$ Dom f ent $x \in A$:

α) $x \in$ Dom f Hpt
β) $\exists$ y tal que $(x,y) \in f$ (α) Def de dom

γ) $(x,y_0) \in f$ Def de y_0
δ) $x \in A$, y_0 y vale $P(x,y_0)$ (γ)Def de f
ε) $x \in A$ (δ)Desc.

c_2) $\forall$ x, si $x \in A$ ent $x \in$ Dom f:

α) $x \in A$ Hpt
β) $\exists!$ $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (α) Por (2)
γ) $\exists$ $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (β) Def de $\exists!$
δ) $y_0 \in B$
ε) vale $P(x,y_0)$ Def de y_0
ζ) $x \in A$, $y_0 \in B$ y vale $P(x,y_0)$ (α)(δ)(ε)Desc.
η) $(x,y_0) \in f$ (ζ) Def de f
θ) $\exists$ y tal que $(x,y) \in f$ (η) Desc
ι) $x \in$ Dom f (θ) Def de Dom.

d) $\forall$ $x \in A$, $f(x) \in B$:

d_1) $x \in A$ Hpt
d_2) $\exists!$ $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (d_1) Por (2)
d_3) $y_0 \in B$
d_4) vale $P(x,y_0)$ Def de y_0
d_5)$(x,y_0) \in f$ (d_1)(d_3)(d_4)Def de f
d_6)$f(x)=y_0$ (d_5)Porque f es función
d_7) $f(x) \in B$ (d_3)Por (d_6)

f) $\forall$ $x_1,x_2 \in A$, si $f(x_1)=f(x_2)$ ent $x_1=x_2$:

f_1) $x_1 \in A$
f_2) $x_2 \in A$
f_3) Si $f(x_1)=f(x_2)$ ent $x_1 =x_2$:

α) $f(x_1)=f(x_2)$ Hpt

β) $(x_1,f(x_1)) \in f$

γ) $(x_2,f(x_2)) \in f$ Porque f es función

δ) $f(x_1)=y$ Def de y

ε) $f(x_2)=y$ (δ)Por(α)

ζ) $(x_1,y) \in f$ (β)(δ) Def de =

η) $(x_2,y) \in f$ (γ)(ε) Def de =

θ) $x_1=x_2$ (ζ)(η) Análoga a (b_1)

g) $\forall\ y \in B,\ \exists\ x \in A$ tlq $f(x)=y$:

g_1) $y \in B$ Hpt

g_2) $\exists!\ x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (g_1)Por (3)

g_3) $\exists\ x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (g_2)Def de $\exists!$

g_4) $x_0 \in A$

g_5) vale $P(x_0,y)$ Def de x_0

g_6) $x_0 \in A$, $y \in B$ y vale $P(x_0,y)$ (g_4)(g_1)(g_5)Desc.

g_7) $(x_0,y) \in f$ (g_6)Def de f

g_8) $f(x_0)=y$ (g_7)Porque f es función

g_9) $x_0 \in A$ y $f(x_0)=y$ (g_4)(g_8)Desc.

g_{10}) $\exists\ x \in A$ tlq $f(x)=y$ (g_9)Desc.

XI DEMOSTRACIÓN FORMAL DE

$(\mathsf{X}\, A_i)^B \sim \mathsf{X} A_i^B$

Teorema: $\mathsf{X}\, (A_i)^B \sim \mathsf{X}\, A_i^B$

Si $f \in \mathsf{X}\, (A_i)^B$, $g \in \mathsf{X}\, A_i^B$, la condición:

$$\forall i \in I, \forall\, y \in B, f(y)(i)=g(i)(y),$$

determina $\forall\, f \in (\mathsf{X}\ A_i)^B$ un solo $g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ y, para todo $g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ un solo $f \in (\mathsf{X}\, A_i)^B$. Luego existe una correspondencia 1-1 entre $(\mathsf{X}\, A_i)^B$ y $\mathsf{X}\, A_i^B$:

I) $\forall\, f \in (\mathsf{X}\ A_i)^B$, $\exists!\, g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ tlq,
$\forall i \in I, \forall y \in B, f(y)(i)=g(i)(y)$:

1) $f \in (\mathsf{X}\, A_i)^B$ Hpt

2) f es función

3) Dom f=B

4) $\forall y \in B, f(y) \in \mathsf{X}\, A_i$ (1)Def de pot.

5) $\forall y \in B$, f(y) es función
Dom f(y)=I
$\forall i \in I$, $f(y)(i) \in A_i$ (4)Def de X

6) $\exists\ g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ tlq, $\forall i \in I$, $\forall\ y \in B$, $f(y)(i)=g(i)(y)$:

a) g es función
b) Dom g=I
c) $\forall i \in I$, $(y,z) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z=f(y)(i)$ Def de g

d) $\forall\ i \in I$, $g(i) \in A_i^B$:

d_1) $i \in I$ Hpt
d_2) g(i) es función: *Pend*
d_3) Dom g(i) = B: *Pend*
d_4) $\forall y \in B$, $g(i)(y) \in A_i$: *Pend*
d_5) $g(i) \in A_i^B$ (d_2)(d_3)(d_4)Def de pot.

e) $g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ (a)(b)(d)Def de X

f) $\forall\ i \in I$, $\forall\ y \in B$, $f(y)(i)=g(i)(y)$:

f_1) $i \in I$
f_2) $y \in B$ Hpt
f_3) $(y,z) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z=f(y)(i)$ (f_1) Por (c)
f_4) $(y, f(y)(i)) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $f(y)(i) = f(y)(i)$ (f_3)Desc
f_5) $(y, f(y)(i)) \in g(i)$ (f_3)Por (f_4)
f_6) $g(i)(y) = f(y)(i)$ (f_5)Def de g(i)(y)
f_7) $f(y)(i) = g(i)(y)$ (f_6)Def de =

g) $\exists!$ g tlq $g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ y, $\forall i \in I$, $\forall\ y \in B$, $f_y(i)=g_i(y)$ (e)(f)Desc

7) $\forall\ g', g'' \in \mathsf{X}\, A_i^B$,
si, $\forall i \in I$, $\forall\ y \in B$, $f(y)(i)=g'(i)(y)$,
y, $\forall i \in I$, $\forall\ y \in B$, $f(y)(i)=g''(i)(y)$,
ent $g'=g''$: *Pend*

8) $\exists!\ g \in \mathsf{X}\, A_i^B$ tlq, $\forall i \in I$, $\forall y \in B$, $f(y)(i)=g(i)(y)$ (7)(8)Def

II) $\forall\, g \in \mathsf{X}\, A_i^B$, $\exists!\, f \in (\mathsf{X}\, A_i)^B$ tlq,
$\forall i \in I$, $\forall y \in B$, $f(y)(i)=g(i)(y)$: Dem análoga a (I)

Pasos Pendientes:

d_2) g_i es función:
Si (y,z_1), $(y,z_2) \in g(i)$ ent $z_1=z_2$:

α) $(y,z_1) \in g(i)$
β) $(y,z_2) \in g(i)$ Hpt
γ) $(y,z_1) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z_1=f(y)(i)$
δ) $(y,z_2) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z_2=f(y)(i)$ (d1)Por(c)
ε) $y \in B$ y $z_1=f(y)(i)$ (α)Por (γ)
ζ) $y \in B$ y $z_2=f(y)(i)$ (β) Por (δ)
γ) $z_1=f(y)(i)$ (ε)
η) $z_2=f(y)(i)$ (ζ)Desc
ι) $z_1= z_2$ (γ)(η)Def de =

d3) Dom $g(i)$ =B:

α) $\forall y$, si $y \in$ Dom $g(i)$ ent $y \in B$:

α_1) $y \in$ Dom $g(i)$ Hpt
α_2) $\exists$ z tlq $(y,z) \in g(i)$ (α_1)def
α_3) $(y,z) \in g(i)$ Def de z
α_4) $(y,z) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z=f(y)(i)$ (d_1)Por (c)
α_5) $y \in B$ y $z=f(y)(i)$ (α_3)Por (α_4)
α_6) $y \in B$ (α_5)Desc.

β) $\forall y$, si $y \in B$ ent $y \in$ Dom $g(i)$:

β_1) $y \in B$
β_2) $y \in$ Dom $g(i)$ ssi $\exists$ z tlq $(y,z) \in g(i)$ Def de Dom
β_3) $(y,z) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z=f(y)(i)$ (d_1)Por (c)
β_4) $y \in$ Dom $g(i)$ ssi $y \in B$ y $z= f(y)(i)$ (β_2)Por (β_3)
β_5) $f(y)(i) =f(y)(i)$ Def de =
β_6) $y \in B$ y $f(y)(i) =f(y)(i)$ (β_1)(β_5)Desc
β_7) $\exists$ z tlq $y \in B$ y $z =f(y)(i)$ (β_6)Desc
β_8) $y \in$ Dom $g(i)$ (β_7)Por (β_4)

d_4) $\forall y \in B$, $g(i)(y) \in A_i$:

δ_1) $y \in B$ Hpt
δ_2) $i \in I$ (α)Desc
δ_3) $f(y)(i) \in A_i$ (δ_1)(δ_2)Por (5)
δ_4) $\forall z$, $(y,z) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $z= f(y)(i)$ (δ_2)Por(c)
δ_5) $(y, f(y)(i)) \in g(i)$ ssi $y \in B$ y $f(y)(i)=f(y)(i)$ (δ_4)Desc
δ_6) $f(y)(i)=f(y)(i)$ Def de =
δ_7) $y \in B$ y $f(y)(i)=f(y)(i)$ (δ_1)(δ_6)Desc
δ_8) $(y, f(y)(i)) \in g(i)$ (δ_7)Por (δ_5)
δ_9) $g(i)(y)=f(y)(i)$ (δ_8)Def de $g(i)(y)$
δ_{10}) $g(i)(y) \in A_i$ (δ_3)(δ_9)Def de =

7) $\forall g', g'' \in \bigtimes (A_i^B)$,
si, $\forall i \in I$, $\forall y \in B$, $f(y)(i)=g'(i)(y)$,
y, $\forall i \in I$, $\forall y \in B$, $f(y)(i)= g''(i)(y)$,
ent $g'=g''$:

a) $g' \in \bigtimes (A_i^B)$,

b) $g'' \in \mathsf{X}(A_i^B)$,
c) $\forall\, i \in I, \forall\, y \in B$, $f(y)(i) = g'(i)(y)$
d) $\forall i \in I, \forall\, y \in B$, $f(y)(i) = g''(i)(y)$ Hpt
e) $Dom\ g' = I$ (a)
f) $Dom\ g'' = I$ (b)Def de prod.
g) $\forall i \in I$, $g'(i) = g''(i)$:

α) $i \in I$ Hpt
β) $g'(i) \in A_i^B$ (α)Por (a)
γ) $g''(i) \in A_i^B$ (α)Por(b)
δ) $Dom\ g'(i) = B$ (β)
ε) $Dom\ g''(i) = B$ (γ)Def de pot.

ζ) $\forall\, y \in B$, $g'(i)(y) = g''(i)(y)$:

ζ_1) $y \in B$ Hpt
ζ_2) $i \in I$ (α)
ζ_3) $f(y)(i) = g'(i)(y)$ (ζ_2)(ζ_1)Por (c)
ζ_4) $f(y)(i) = g''(i)(y)$ (ζ_2)(ζ_1)Por (d)
ζ_5) $g'(i)(y) = g''(i)(y)$ (ζ_4)(ζ_3)Def de =

η) $g'(i) = g''(i)$ (δ)(ε)(ζ)Def de ext

h) $g' = g''$ (e)(f)(g)Def de ext

BIBLIOGRAFÍA

William y Martha Kneale
El desarrollo de la lógica
Editorial Technos.
Madrid 1972

Zubieta Russi Gonzalo
Taller de lógica matemática
Editorial McGraw-Hill
México, 1992

Revista Mathesis vol VII No 2
Filosofía e historia de las
matemáticas
Depto. de matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Mayo, 1991

Amor Montaño J.A.
Antología de lógica
Comunicaciones Internas
Depto. Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

ABREVIATURAS

Hpt : Hipótesis

Def : Definición

Excl : Exclusión

Corres : Correspondencia

Biun: 1-1 : Correspondencia biunívoca, uno a uno

Desc : Descendente

inc : incidencia

iny : Inyectiva

biy : biyectiva

pot : potencia

pend : pendiente

Dem : demostrado

fun : función

Dom f : dominio de f

mit : mitómano

ver : veraz

Trad : traducción

ent : entonces

ssi : si y sólo si