



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

291175

"ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA ESTELA PRODUCIDA POR UN CILINDRO PARA NUMEROS DE REYNOLDS ENTRE 8 Y 70"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA

CARLOS GARCIA TORRES



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

Director de tesis: Dr. Gerardo Ruiz Chavarría



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"Estudio experimental de la estela producida por un cilindro para  
números de Reynolds entre 2 y 70".

realizado por GARCIA TORRES CARLOS

con número de cuenta 9449075-6 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DR. GERARDO RUIZ CHAVARRIA

DR. RAMON PERALTA FABI

DR. STEVEN PETER REED CZITROM BAUS

Suplente  
DRA. GRACIELA BINIMELIS DE RAGA

Suplente  
DR. FRANCISCO SOLORIO ORDAZ

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHÉ  
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

## **AGRADECIMIENTOS**

Empezaré por agradecer al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría mi director de tesis, por sus comentarios, observaciones, sugerencias y en general por la motivación y apoyo que me ofreció durante la realización de este trabajo. A los sinodales, Dr. Ramón Peralta Fabi, Dr. Steven Peter Reed Czitrom Baus, Dra. Graciela Binimelis de Raga y Dr. Francisco Solorio Ordaz, quienes revisaron el manuscrito y me hicieron valiosos comentarios. A todos los integrantes del laboratorio de fluidos, especialmente a Eduardo por su ayuda en la digitalización de imágenes.

Dedico este trabajo a mi compañera, Ana María Palomares Medina, por su compañía y la motivación que siempre me ha brindado, a mis padres y hermanos, particularmente a Sergio, de quién he recibido un apoyo muy especial.

# CONTENIDO

RESUMEN . . . . .	2
1 INTRODUCCIÓN . . . . .	3
2 CONCEPTOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS . . . . .	8
2.1 HIPÓTESIS DEL CONTINUO . . . . .	8
2.2 EL TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS . . . . .	8
2.3 CONSERVACIÓN DE LA MASA. . . . .	10
2.4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL. . . . .	11
2.5 RELACIONES CONSTITUTIVAS. . . . .	18
2.6 CONDICIONES DE FRONTERA . . . . .	20
2.7 SEMEJANZA . . . . .	21
2.8 FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO CIRCULAR . . . . .	22
3 EL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL . . . . .	28
3.1 INTRODUCCIÓN . . . . .	28
3.2 EL TÚNEL DE VIENTO . . . . .	29
3.3 EL ALAMBRE DE NICRÓMEL . . . . .	31
3.4 LA FUENTE DE VOLTAJE . . . . .	31
3.5 EL LÁSER . . . . .	32
3.6 GENERACIÓN DE VÓRTICES . . . . .	33
3.7 CÁMARA DE VIDEO Y DIGITALIZACIÓN . . . . .	35
3.8 VISUALIZACIÓN DEL FLUJO . . . . .	36
3.9 ANÁLISIS . . . . .	40
4 RESULTADOS . . . . .	43
4.1 DISTRIBUCIÓN DE LA VELOCIDAD . . . . .	44
4.2 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS . . . . .	56
4.2.1 LONGITUD DE LA ESTELA . . . . .	57
4.2.2 EVOLUCIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS CENTROS DE LOS VÓRTICES . . . . .	58
4.2.3 ÁNGULO DE SEPARACIÓN . . . . .	62
4.2.4 ANCHURA MÁXIMA DE LA ESTELA Y POSICIÓN EN LA QUE OCURRE . . . . .	64
4.3 FRECUENCIA . . . . .	67
5 CONCLUSIONES . . . . .	89
A BIBLOGRAFÍA . . . . .	92

## RESUMEN

El propósito de este trabajo es estudiar el par de vórtices que se forman cuando un cilindro es colocado en un fluido, que se mueve con velocidad constante dentro de un túnel construido de acrílico transparente (túnel de viento); para poder observarlos, se inyectó el humo producido por la evaporación de parafina depositada en un alambre de nicrómel, calentado por una fuente de voltaje de corriente continua. El alambre se colocó en la parte media del túnel de viento, de modo que el humo fuera arrastrado por éste. Se iluminó la región con una hoja de luz láser en forma perpendicular al eje del cilindro.

Al analizar las películas tomadas de la región vorticiosa se pudo seguir la evolución de los parámetros geométricos más importantes del par de vórtices, antes de que se desprendieran del cilindro y se formara la calle de vórtices de Von Kármán. Estos parámetros son: la longitud de la estela ( $L$ ), la máxima anchura ( $l_{max}$ ), la distancia del centro del cilindro al punto donde ocurre la máxima anchura ( $X_{l_{max}}$ ), la posición de los centros de los vórtices denotadas por "a" y "b", el ángulo para el cual se separa la capa límite ( $\theta_s$ ), todos en función del número de Reynolds. También se determinó la componente de la velocidad en la dirección  $x$  (que corresponde a la dirección del flujo) en la zona vorticiosa; esto se hizo para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y en cada caso para distintos números de Reynolds; cabe mencionar que los diámetros de los cilindros se midieron con un vernier. Finalmente se obtuvo la frecuencia a la cual oscilan y se desprenden los vórtices en el caso de los cilindros de 4.4, 5.0 y 6.1 mm de diámetro.

# 1. INTRODUCCIÓN

Los fluidos, como genéricamente se llama a los líquidos y gases, forman parte de nuestro medio ambiente y su manejo ha estado ligado al desarrollo de la sociedad desde los inicios de la civilización; el aire y el agua son parte de la vida como la conocemos, además el transporte marítimo y aéreo, la predicción del clima y el desarrollo de la agricultura dependen del conocimiento de éstos.

En el estudio de los fluidos tienen particular importancia los vórtices que podemos definir como sigue: un vórtice es el patrón que se genera por el movimiento de rotación de partículas alrededor de un punto común [1].

Los movimientos con vorticidad son muy comunes en nuestro Universo, desde el pequeño ámbito de los átomos hasta el inconmensurable espacio del Cosmos, los vórtices se presentan casi en todos lados y son los protagonistas de algunos de los problemas más profundos de la física.

El interés por entender este movimiento giratorio se manifiesta en las estelas asirias, los jeroglíficos egipcios, los mitos más antiguos de las culturas nórdicas y las preocupaciones de los griegos; se encuentran también en los glifos mayas, en los dibujos de Leonardo da Vinci (1452-1519), quien además obtuvo una ecuación de continuidad para flujos unidimensionales. Otros estudios de Leonardo versaron sobre el vuelo, la generación y propagación de ondas, el movimiento de vórtices y el papel de éstos en los flujos turbulentos [1,2].

Los vórtices han desempeñado también un papel importante en la elaboración de los modelos destinados a explicar el Universo; algunos de éstos son los siguientes. La primera teoría moderna del Universo, propuesta por Descartes en el siglo XVIII, imaginaba un mar infinito en el que los planetas, el Sol y las estrellas se movían influidos mutuamente por el efecto de los vórtices que ellos mismos producían. Newton, en cambio, se concentró en estudiar a los fluidos para probar que, al rotar, no generaban el modelo de movimiento observado, descartándose así, cien años después, el Universo cartesiano de vórtices.

Uno de los últimos intentos por construir un universo dominado por los vórtices fue hecho por Lord Kelvin, hacia finales del siglo XIX, al formular la teoría de nudos que es motivo de un renovado interés para describir, entre otras cosas, una parte de la dinámica de los planetas. Kelvin intentó explicar la naturaleza atómica y molecular con anillos de vorticidad.

Observando con atención podremos descubrir los vórtices en casi cualquier lado: aparecen en gases, en líquidos y en cuerpos sólidos, sus tamaños varían entre las dimensiones cósmicas y las atómicas, las estructuras vorticosas más grandes

tienen dimensiones de miles de años-luz y las más pequeñas en el interior de los núcleos atómicos son del orden de  $10^{-17}m$  (rotaciones internas en el núcleo atómico).

En nuestro planeta se forman huracanes, que son tormentas caracterizadas por vientos que se mueven en trayectorias espirales hacia un centro común, conocido como el ojo del huracán. Los vientos en la espiral, en la vecindad del ojo, alcanzan velocidades entre 120 km/h y 350 km/h. Los huracanes son los vórtices atmosféricos más grandes, tienen una extensión que puede llegar a los 2000 km de diámetro y viajar con velocidades que oscilan entre los 10 y 50 km/h; la duración de un huracán puede ser de unas horas o hasta semanas y recorrer distancias de hasta 2000 km.

Otros vórtices que ocurren en la atmósfera son los tornados y las trombas. Los tornados sólo existen unas horas y su velocidad de traslación es de alrededor de 50 km/h, aunque puede variar desde 0 hasta 112km/h. El ancho característico es de 100 m y su recorrido es de 25 km aproximadamente. La velocidad de rotación en la vecindad del centro es de entre 400 y 800 km/h; cuando un tornado pasa o se forma en una superficie de agua recibe el nombre de tromba.

Los vórtices más comunes son los que se forman en los lavabos (vórtices de desagüe) y los remolinos de tierra [1].

Muchas aplicaciones prácticas comprenden el flujo perpendicular al eje de un cilindro. Algunos ejemplos importantes son el soplo del viento sobre postes de luz, líneas de energía, cables de suspensión de puentes, el flujo de agua alrededor de las columnas de los puentes y un líquido o gas que fluye sobre bancos de tubos en un intercambiador de calor; los remolinos tienen que ver también con fallas en sistemas de enfriamiento en reactores nucleares, la pérdida de la eficiencia de bombas, los desbordamientos de presas, los daños en turbinas y vibraciones. Si la fuerza aerodinámica fluctúa el cilindro vibra debido a la flexibilidad de éste.

Algunas de las causas de la vibración inducida por el flujo pueden explicarse considerando los detalles del flujo sobre un cilindro circular aislado. La estela en un cilindro ha sido estudiada extensamente tanto teórica como experimentalmente. Las características de la estela varían en función del número de Reynolds  $Re$  (cociente entre las fuerzas de inercia y las viscosas), el cual discutiremos en el capítulo 2 de este trabajo. En general se puede observar que inicialmente ( $Re < 50$ ) se forman en la región separada un par de vórtices, como los que se muestran en la figura 1.



Figura 1. Vórtices gemelos formados al ser colocado un cilindro dentro de un fluido que se mueve con velocidad constante.

Estos vórtices (llamados los vórtices gemelos) van cambiando sus dimensiones conforme se aumenta el número de Reynolds hasta que, alrededor de  $Re= 50$ , se empiezan a desprender; uno de los vórtices se alejará en primer lugar y se diluirá aguas abajo en la estela, después de lo cual otro vórtice comenzará a crecer en su lugar. Mientras tanto el segundo gemelo se alejará y así se origina un proceso en el que los vórtices se alejan alternadamente desde el cilindro y se mueven aguas abajo. La disposición de estos vórtices en la estela se llama la calle de Von Kármán, en honor a que él fue el primero en demostrar que el arreglo simétrico es esencialmente inestable; que sólo el arreglo asimétrico es estable, pero solamente si la proporción de la distancia entre las hileras ( $h$ ) y la distancia entre dos vórtices consecutivos ( $l$ ) de cada hilera es constante  $\frac{h}{l} = 0.281$ . La calle de vórtices se mueve aguas abajo con una velocidad  $u_s$  más pequeña que la de la corriente principal  $v_o$ .

El desarrollo de vórtices alternados produce una fuerza sobre el cilindro que se repite cíclicamente con una frecuencia que depende de las condiciones del flujo. Si la frecuencia propia del cilindro en dirección transversal está próxima a la

frecuencia de la variación de la fuerza producida por los vórtices que se separan, se inducirá una vibración lateral. Esto explica el silbido de las líneas de transporte y telefónicas para ciertas velocidades del viento [1, 2, 3, 4].

Para la descripción de la estela producida por un obstáculo tendremos en cuenta un principio fundamental debido a Newton, el cual describe la equivalencia entre el movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo sólido dentro de un fluido en reposo y el movimiento del mismo fluido con velocidad uniforme igual y opuesta alrededor del cuerpo inmóvil. Esta equivalencia se entiende en el sentido de que el movimiento relativo resultante para cada partícula es el mismo en ambos casos. En lo sucesivo haremos uso de este hecho, hablando indiferentemente de fluido móvil y obstáculo fijo (adelante del cuerpo) o bien fluido fijo y obstáculo móvil (detrás del cuerpo) según resulte más conveniente.

Las características de la estela generada por un cilindro, cuando se mueve con velocidad constante en un fluido viscoso previamente en reposo, es un problema que ha sido estudiado por muchos autores. Existen numerosos estudios teóricos en el intervalo de números de Reynolds entre 8 y 80, además se han desarrollado análisis numéricos con el uso de computadoras electrónicas. En éstos, se intentaron obtener soluciones aproximadas que representan flujos reales. Estos trabajos difieren esencialmente en el método de cálculo, como puede ser analítico (expansiones asintóticas acopladas de Stokes y Oseen), semianalíticos (buscando soluciones en forma de expansión de series, usando explícitamente o no, el principio de series truncadas) o numéricos (diferencias finitas). Los cálculos se hicieron utilizando la ecuación de Navier-Stokes.

Soluciones numéricas de la ecuación de Navier-Stokes para el flujo alrededor de un cilindro han sido obtenidas por muchos autores, entre los que destacan: Keller y Takami en 1966 obtienen soluciones en el intervalo  $2 \leq Re \leq 15$ ; posteriormente en 1969, las soluciones fueron extendidas por los mismos autores hasta  $Re=60$  [5].

Dennis y Chango en 1970 obtienen soluciones para un flujo uniforme e incompresible pasando alrededor de un cilindro circular para números de Reynolds en el intervalo  $5 \leq Re \leq 100$  [6]. Estas soluciones fueron comparadas con resultados experimentales, para la distribución de presión, el coeficiente de arrastre y el tamaño de los vórtices estacionarios pegados al cilindro, observándose que tenían una buena concordancia; sin embargo estas soluciones dieron resultados muy diferentes para la distribución de velocidades en la estela.

También existen numerosos trabajos experimentales, entre los que podemos destacar:

Thom (1933) para estudiar la estela generada por un cilindro, inyectó tinta

en el flujo como técnica de visualización; el estudio lo realizó en el intervalo  $3.5 \leq Re \leq 10^3$  [7].

Kovasnay (1949) utilizando la técnica de anemómetro de hilo caliente hizo mediciones del patrón regular de la calle de vórtices producida por un cilindro, para números de Reynolds pequeños. Determinó la distribución de velocidades por debajo y por arriba del número crítico de Reynolds, (para el cual los vórtices se desprenden)  $Re=34$  y  $Re=56$  [8].

Taneda (1956), usando partículas sólidas para visualizar el flujo estudió las estelas en cilindros y placas para números de Reynolds en el intervalo  $0.1 \leq Re \leq 2000$  [9, 10, 11].

Shair, et al. (1963) investigaron experimentalmente el flujo uniforme pasando por un cilindro circular para números de Reynolds considerablemente grandes, en el intervalo  $25 < Re < 177$ . La técnica consistió en la medición de velocidades a través del trazo dejado por el movimiento de burbujas de aire alrededor del cilindro, las presiones en la superficie del cilindro se midieron directamente con un manómetro [12, 13].

Nishioka y Sato (1974) con la técnica anterior (anemómetro de hilo caliente), hicieron mediciones del campo de velocidades en el flujo detrás de un cilindro, en el intervalo de números de Reynolds  $10 \leq Re \leq 80$ . También se determinó el coeficiente de arrastre y el tamaño de los vórtices pegados al cilindro [14].

Coutanceau y Bouard (1976), por medio de la técnica de visualización anterior (partículas sólidas), analizaron los cambios en los parámetros geométricos más importantes, de la estela generada por un cilindro moviéndose con velocidad constante dentro de un fluido en reposo. Se estudió también la distribución de velocidades en los vórtices, para números de Reynolds entre 5 y 40 [15].

En el presente trabajo se analiza el par de vórtices generados al poner un cilindro en reposo dentro de un fluido que se mueve con velocidad constante para números de Reynolds pequeños entre 8 y 70, los temas se encuentran desarrollados de acuerdo al siguiente plan:

Los conceptos y ecuaciones fundamentales de la mecánica de los fluidos, las condiciones de frontera y semejanza, así como un análisis del flujo lento estacionario pasando alrededor de un cilindro se pueden encontrar en el capítulo dos.

En los capítulos tres y cuatro se describe el desarrollo de los experimentos, así como los instrumentos utilizados, también se encuentran los resultados obtenidos, que se proporcionan mediante tablas y gráficas. Finalmente en el capítulo cinco se dan las conclusiones.

## **2. CONCEPTOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS**

### **2.1. HIPÓTESIS DEL CONTINUO**

Una suposición básica para el estudio de la mecánica de los fluidos, es la llamada hipótesis del continuo, que consiste en considerar que cualquier elemento de volumen es lo suficientemente grande como para contener un número muy elevado de moléculas. Cuando hablamos de elementos de volumen siempre queremos significar aquellos que son físicamente pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. En este sentido, por un punto entendemos entonces un volumen muy pequeño en el que hay un número tan grande de moléculas como para que el promedio de la velocidad no dependa de este número, pero lo suficientemente pequeño como para que pueda verse como un punto por los instrumentos más sensibles.

Como suponemos que las propiedades de los fluidos y la velocidad son funciones continuas, se puede emplear el cálculo diferencial e integral para analizar un continuo en vez de aplicar matemáticas discretas.

Es necesario mencionar que la aproximación del continuo debe emplearse únicamente donde pueda razonablemente conducir a resultados correctos, por ejemplo, la idealización del continuo deja de tener sentido cuando el recorrido libre medio de las moléculas es del mismo orden de magnitud que la longitud más pequeña que interviene en el problema. La acción de cada molécula o grupo de moléculas, es entonces significativa y debe tratarse el problema de acuerdo con esto [1, 16, 17, 18].

### **2.2. EL TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS**

Las leyes fundamentales se refieren a las velocidades de cambio de ciertas propiedades. Por ejemplo la segunda ley de Newton establece la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento, mientras que la primera ley de la termodinámica se enfoca a la velocidad de cambio de energía. Para aplicar estas leyes, se tiene que concebir la manera de identificar un sistema específico en un fluido que se mueve y se deforma y cómo calcular la velocidad de cambio de estas propiedades.

Para describir un campo de flujo se puede adoptar cualquiera de los dos enfoques siguientes: el primer enfoque, conocido como descripción lagrangiana, identifica cada partícula de fluido y describe la trayectoria de ésta en términos de las condiciones iniciales y el tiempo. El segundo enfoque denominado descripción

euleriana, fija su atención sobre un elemento de volumen en el espacio y describe lo que sucede ahí a lo largo del tiempo. Esta formulación da lugar a una teoría de campos y es la que más se usa en la mecánica de fluidos; en los textos modernos que tratan de este tema, se empieza con una descripción lagrangiana y una vez introducidos los principios e hipótesis necesarias, se traduce al lenguaje euleriano. Esto se hace por medio del Teorema de Transporte de Reynolds y la derivada convectiva o regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla), \quad (2.1)$$

donde  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  es el campo de velocidades de las partículas que pasan a través de un volumen fijo  $V$  y  $\nabla$  es el operador gradiente.

Definimos la derivada material de una integral de volumen como la razón de cambio (en el tiempo) de una integral que se toma, no en un volumen determinado del espacio (como se hace usualmente), sino sobre un sistema de masa constante. Se denota como sigue:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dV, \quad (2.2)$$

donde  $V(t)$  es el volumen que ocupa el sistema y depende del tiempo.

Esta integral se expresará en función de las variables independientes en un sistema de Euler, la posición  $\vec{x}$  y el tiempo  $t$ . Sea  $V$  el volumen ocupado por un sistema de masa constante a un cierto tiempo  $t$  y sea  $S$  la superficie que limita a  $V$ . La razón de cambio de la integral  $\int_{V(t)} \alpha dV$  tiene dos contribuciones: a) la variación de  $\alpha$  dentro del volumen inicial  $V$  y b) el flujo neto de  $\alpha$  a través de la superficie  $S$ .

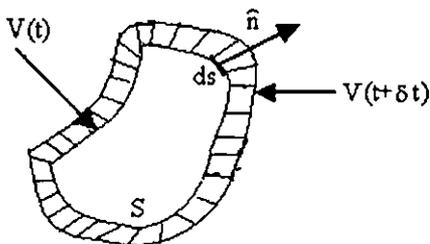


Figura 2. Variación de la propiedad  $\alpha$  dentro del volumen  $V(t)$ .

Lo anterior conduce a la igualdad [19]

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dV = \int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV + \int_S \alpha \vec{v} \cdot \hat{n} ds; \quad (2.3)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal al elemento de área  $ds$  y dirigido hacia afuera.

El primer sumando del segundo miembro es la variación de la propiedad  $\alpha$  y el segundo tiene que ver con el flujo de  $\alpha$  a través de la superficie  $S$  por unidad de tiempo. Si ahora usamos el teorema de Gauss, la igualdad quedará escrita en términos de integrales de volumen

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha dV = \int_V \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{v}) \right] dV. \quad (2.4)$$

La integral de la derecha se hace sobre un volumen fijo en el espacio; por lo que llegamos a una expresión aplicable directamente en la representación euleriana, donde  $\alpha$  puede ser cualquier propiedad de un fluido y  $\vec{v}$  es la velocidad del flujo [16, 17].

### 2.3. CONSERVACIÓN DE LA MASA.

Uno de los principios básicos de la física clásica establece que la masa no se puede crear ni destruir. Esto significa que la variación de masa en un volumen fijo  $V_0$ , se debe a que existe un flujo a través de la superficie que lo limita.

Consideremos entonces un volumen  $V$  del espacio, la masa de fluido contenida en este volumen es  $\int_V \rho dV$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido y la integración se realiza sobre todo el volumen  $V$ .

Tomemos una masa arbitraria de fluido, el principio de conservación implica que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.5)$$

Usando ahora el teorema de transporte de Reynolds, ecuación (2.4), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0; \quad (2.6)$$

como el volumen  $V$  es arbitrario, la única forma de que se cumpla la ecuación anterior es que el integrando sea cero, por lo tanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Ésta es la llamada ecuación de continuidad.

En un gran número de casos la densidad puede suponerse constante en todo el volumen del fluido; esto es, no existe ninguna compresión o dilatación observable. A este tipo de fluidos se les conoce como incompresibles y la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.8)$$

Esta aproximación sólo es válida cuando la velocidad de propagación del sonido se puede considerar muy grande, respecto a las velocidades características del flujo [16].

## 2.4. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL.

La ecuación de la cantidad de movimiento lineal relaciona la cantidad de movimiento del fluido con las fuerzas que actúan sobre él, ésta se obtiene combinando el teorema de transporte con la segunda ley de Newton, la cual afirma que la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de un elemento de fluido, es igual a la resultante instantánea de las fuerzas que actúan sobre él

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV. \quad (2.9)$$

Las fuerzas pueden ser de dos tipos, las que actúan sobre cada punto material del fluido, conocidas como fuerzas volumétricas o de cuerpo, dentro de esta clase se encuentran las fuerzas gravitacionales, las electromagnéticas y las fuerzas ficticias (que se incluyen cuando el movimiento se describe desde un sistema de referencia no inercial). En el otro grupo están las fuerzas que actúan sobre la superficie del elemento de fluido, dependen exclusivamente del área y orientación de la misma. Se pueden dividir en aquellas que actúan en la dirección normal a cada punto de la superficie, las fuerzas de presión y las que actúan a lo largo de la dirección tangente a cada punto de la superficie, fuerzas cortantes debidas a la viscosidad.

Pensemos en un volumen de fluido  $V$  encerrado por la superficie  $S$ , sobre cada elemento de volumen  $\delta V$  actúa una fuerza

$$\delta \vec{F}_V = \vec{f}_V \delta V, \quad (2.10)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\vec{f}_V$ , depende de la posición del elemento de fluido y del tiempo  $\vec{f}_V(\vec{x}, t)$  [18]. La fuerza resultante sobre el volumen  $V$  será

$$\vec{F}_V = \int_V \vec{f}_V dV. \quad (2.11)$$

Estas fuerzas de volumen admiten una redefinición como fuerzas másicas, esto es, fuerzas que son proporcionales a la masa sobre la que actúan en lugar de su volumen

$$\delta \vec{F}_V = \vec{f}_V \delta V = \vec{f}_m \delta m,$$

teniendo en cuenta la definición de densidad ( $\rho dV = dm$ ), podemos escribir

$$\vec{F}_V = \int_V \rho \vec{f}_m dV. \quad (2.12)$$

Considerando una superficie imaginaria  $S$  con la que aislamos un volumen cualquiera de fluido, sobre este volumen actúa el resto del fluido a través de la superficie de separación  $S$ , ejerciendo una fuerza sobre cada elemento de la superficie de separación  $\delta S$ , que es de la forma

$$\delta \vec{F}_S = \vec{f}_S \delta S, \quad (2.13)$$

el vector  $\vec{f}_S$  es función del punto de la superficie que estamos considerando, del tiempo y de la orientación del elemento de superficie definida por su normal saliente  $\vec{n}$  [18]

$$\vec{f}_S = \vec{f}_S(\vec{x}, t, \vec{n}). \quad (2.14)$$

Esto es, si en cada punto de nuestro espacio ocupado por el fluido trazamos un elemento diferencial de superficie  $\delta S$ , el fluido que está de un lado de esa superficie ejerce sobre el que está del otro lado una fuerza que es proporcional a la magnitud de ese elemento de área; la constante de proporcionalidad es distinta para diferentes puntos del campo del fluido y para diferentes instantes de tiempo y cambia también con la orientación del elemento de superficie. La fuerza que actuará sobre el volumen de fluido encerrado en  $S$  será

$$\vec{F}_S = \int_S \vec{f}_S dS. \quad (2.15)$$

La forma de la fuerza de superficie dada por las expresiones (2.13) y (2.15) puede concretarse más, estableciendo el equilibrio de un elemento fluido. Lo primero que se hace, es determinar la forma en que  $\vec{f}_S$  depende de  $\vec{n}$ .

Considérese un tetraedro como el que se muestra en la figura 3. Suponiendo que a la cara inclinada, de área  $\delta S$ , le corresponda el vector  $\vec{n}$ , unitario y normal a ella, entonces las caras perpendiculares a los ejes tendrán las áreas  $\delta S_1 = \delta S (\vec{n} \cdot \vec{e}_1)$ ,  $\delta S_2 = \delta S (\vec{n} \cdot \vec{e}_2)$   $\delta S_3 = \delta S (\vec{n} \cdot \vec{e}_3)$ , donde  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  son los vectores unitarios normales correspondientes a cada una de las caras inclinadas. El volumen del tetraedro es  $1/3h\delta S$ , donde  $h$  es la altura sobre la cara  $\delta S$ .

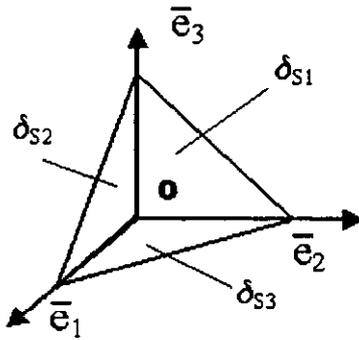


Figura 3. Equilibrio de fuerzas superficiales en un tetraedro.

Sobre la superficie de normal  $\vec{e}_1$  actuará una fuerza dada por la fórmula (2.15)

$$\delta \vec{F}_{S_1} = \bar{\tau}_1 \delta S_1 \quad (2.16)$$

donde supondremos que  $\bar{\tau}_1$  está dada por

$$\bar{\tau}_1 = \vec{f}_S(\vec{x}_0, t, \vec{e}_1), \quad (2.17)$$

se hace lo mismo para las otras caras  $\delta S_2, \delta S_3$  y  $\delta S$ .

Para establecer el equilibrio entre fuerzas para el volumen de la figura 3, se observa que la fuerza sobre la superficie  $\delta S_1$ , dada por (2.15) y (2.16), corresponde a la cara de la superficie interior al tetraedro y para establecer el equilibrio en éste debemos considerar sus caras exteriores. Suponiendo que una misma superficie no

puede soportar fuerzas resultantes se cumplirá que en ambas caras de la superficie hay fuerzas iguales y opuestas

$$\vec{f}_S(\vec{x}_0, t, -\vec{e}_1) = -\vec{f}_S(\vec{x}_0, t, \vec{e}_1) = -\bar{\tau}_1 \quad (2.18)$$

y análogamente para las caras 2 y 3. El equilibrio del tetraedro vendrá expresado por

$$\vec{f}_S \delta S - \bar{\tau}_1 \delta S_1 - \bar{\tau}_2 \delta S_2 - \bar{\tau}_3 \delta S_3 = 1/3 h \rho (\vec{f} - \vec{a}) \quad (2.19)$$

donde  $\rho$ ,  $\vec{f}$  y  $\vec{a}$  son la densidad, la fuerza por unidad de masa y la aceleración.

Ahora, dividiendo la ecuación (2.19) por  $\delta S$  y tomando el límite cuando  $h$  tiende a cero se obtiene que el segundo miembro tiende a cero. Los cocientes de las áreas laterales divididas por el área inclinada son:

$$\frac{\delta S_1}{\delta S} = \hat{e}_1 \cdot \hat{n} = n_1; \quad \frac{\delta S_2}{\delta S} = \hat{e}_2 \cdot \hat{n} = n_2; \quad \frac{\delta S_3}{\delta S} = \hat{e}_3 \cdot \hat{n} = n_3, \quad (2.20)$$

que corresponden a las tres proyecciones del vector unitario  $\hat{n}$  normal a  $\delta S$ ,  $\delta S_1$ ,  $\delta S_2$  y  $\delta S_3$ , es decir, son las proyecciones del elemento de área  $\delta S$ . La ecuación (2.19) se convierte en

$$\begin{aligned} f_{S_1} &= \tau_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \\ f_{S_2} &= \tau_{12} n_1 + \tau_{22} n_2 + \tau_{32} n_3, \\ f_{S_3} &= \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \tau_{33} n_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

en notación matricial la fórmula (2.21) se escribe

$$\begin{pmatrix} f_{S_1} \\ f_{S_2} \\ f_{S_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

y en notación de subíndices

$$f_{S_i} = n_j \tau_{ji}. \quad (2.23)$$

Puesto que  $\vec{f}_S$  y  $\hat{n}$  son vectores que no dependen de la elección del sistema de coordenadas, las nueve cantidades  $\tau_{ji}$  deben ser las componentes de un tensor  $\bar{\tau}$ . Entonces  $\vec{f}_S$  se puede representar como el producto del vector  $\hat{n}$  por el tensor  $\bar{\tau}$

$$\vec{f}_S = \hat{n} \cdot \bar{\tau}. \quad (2.24)$$

Las expresiones (2.22), (2.23), (2.24) son distintas maneras de escribir (2.21).

Cada componente  $\tau_{ji}$  del tensor de esfuerzos se puede interpretar como la componente en la dirección  $\vec{e}_i$  de la fuerza por unidad de superficie que se ejerce sobre una superficie de normal  $\vec{e}_j$ . Ahora se verá que los índices son intercambiables y por tanto el tensor es simétrico.

Consideremos los momentos de varias fuerzas actuando sobre un elemento de un volumen  $V$  de forma arbitraria. La componente  $i$  del momento total con respecto al punto  $O$ , ejercido por las fuerzas de superficie en la frontera del volumen es [20]

$$\int_S \varepsilon_{ijk} r_j \tau_{nl} dA, \quad (2.25)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de posición del elemento de superficie  $\hat{n} \delta A$  con respecto al punto  $O$  y  $\varepsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita. Esta integral sobre una superficie cerrada se puede transformar utilizando el teorema de la divergencia en la integral de volumen

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (r_j \tau_{nl})}{\partial r_l} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \left( \tau_{kj} + r_j \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial r_l} \right) dV. \quad (2.26)$$

Si ahora hacemos tender a cero el volumen a través de una superficie que lo encierre, conservando la misma forma, el primer término del lado derecho en (2.26) se hace pequeño como  $V$ , mientras que el segundo término se aproxima a cero más rápidamente como  $V^{\frac{4}{3}}$  [20]. El momento total con respecto a  $O$  ejercido sobre el elemento de fluido, por las fuerzas de cuerpo, es de orden  $V^{\frac{4}{3}}$  cuando  $V$  es pequeño y así también es la estimación de cambio del momento del fluido instantáneamente en  $V$ . De modo que  $\int_V \varepsilon_{ijk} \tau_{kj} dV$  es de orden  $V$ , como todos los otros términos en la ecuación de momento y en consecuencia es idénticamente cero. Esto es posible para todos los cambios de posición de  $O$  y formas de  $V$ , donde  $\tau_{ij}$  es continuo en  $\vec{x}$ , solamente si [20]

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{kj} = 0, \quad (2.27)$$

en todas partes del fluido. La ecuación (2.27) muestra que el tensor de esfuerzos es simétrico, esto es, que

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (2.28)$$

Resumiendo, para la determinación de la fuerza sobre un elemento de superficie  $\delta S$  de normal  $\hat{n}$  en un punto del espacio en un instante determinado, se requiere

el conocimiento de las 6 componentes del tensor de esfuerzos simétrico  $\overline{\overline{\tau}}$  en ese instante y en ese punto

$$\overline{f}_S(\overline{x}, t, \overline{n}) = \overline{n} \cdot \overline{\overline{\tau}}(\overline{x}, t). \quad (2.29)$$

Un fluido en reposo no puede soportar fuerzas cortantes, es decir, fuerzas de superficie, por lo que todos los elementos del tensor que no estén en la diagonal principal deben ser nulos y la presión ejercida sobre cualquier elemento de superficie es normal a ella. La ecuación (2.19) se escribe así:

$$P\delta S\overline{n} - P_1\delta S_1\hat{e}_1 - P_2\delta S_2\hat{e}_2 - P_3\delta S_3\hat{e}_3 = 1/3h\rho(\overline{f} - \overline{a}), \quad (2.30)$$

dividiendo entre  $\delta S$  y haciendo que  $h \rightarrow 0$ , obtenemos que las presiones límites en 0 satisfacen la relación

$$P_1(\overline{n} \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1 + P_2(\overline{n} \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2 + P_3(\overline{n} \cdot \hat{e}_3)\hat{e}_3 = P\overline{n}, \quad (2.31)$$

si multiplicamos escalarmente esta ecuación por  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$ ,  $\hat{e}_3$ , sucesivamente, nos queda

$$P_1 = P_2 = P_3 = P. \quad (2.32)$$

Por lo tanto para fluidos en reposo el tensor de esfuerzos se convierte en diagonal

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad (2.33)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kroenecker. El signo menos en la ecuación (2.33) se pone por estar el fluido normalmente sometido a compresión. Esta ecuación significa que en cualquier punto del interior de un fluido en reposo, la presión es la misma en todas las direcciones.

Tenemos entonces que las fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen  $V$ , cuya superficie es  $S$  se pueden escribir en la forma

$$\overline{F} = \int_V \rho \overline{f} dV + \int_S \overline{f}_S dS, \quad (2.34)$$

por lo que la ecuación del momento queda

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \overline{v} dV = \int_V \rho \overline{f}_m dV + \int_S \overline{f}_S dS, \quad (2.35)$$

o usando el tensor de esfuerzos, ecuación (2.24), resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_S \hat{n} \cdot \bar{\tau} dS + \int_V \rho \vec{f}_m dV. \quad (2.36)$$

Por el teorema de transporte de Reynolds la ecuación anterior se puede escribir así

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \int_S \hat{n} \cdot \bar{\tau} dS + \int_V \rho \vec{f}_m dV. \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) establece que la variación de la cantidad de movimiento dentro de un volumen fijo en el espacio, más el flujo de la cantidad de movimiento a través de dicho volumen, es igual a la suma de todas las fuerzas, másicas y de superficie, que actúan sobre el volumen.

Mediante el teorema de Gauss podemos transformar las integrales de superficie en integrales de volumen; en notación de subíndices tenemos que

$$\int_V \left[ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_{m_i} \right] dV = 0. \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) es cierta para cualquier volumen fijo en el espacio de modo que el integrando debe ser idénticamente nulo

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{m_i} \quad (2.39)$$

o derivando

$$v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{m_i}. \quad (2.40)$$

El primer sumando es nulo por satisfacer la ecuación de continuidad (2.7). Utilizando (2.1), la ecuación (2.40) se puede poner en la forma

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \vec{F} \quad (2.41)$$

donde el primer sumando representa el producto de la densidad por la aceleración de una partícula fluida que debe ser igual a las fuerzas de superficie y de volumen que actúan sobre un volumen fluido elemental unitario [3, 17, 18].

## 2.5. RELACIONES CONSTITUTIVAS.

Hasta aquí se han establecido los principios básicos para describir las propiedades y características de los fluidos. Adicionales a estos principios generales, existen principios secundarios, llamados relaciones constitutivas, que se aplican a tipos específicos de medios, algunos de estos principios secundarios son: la ecuación de estado de los gases perfectos, el principio de la viscosidad de Newton, aplicable a cierto número de fluidos viscosos. A continuación se ligará el tensor de esfuerzos con otras magnitudes del flujo.

Según se vió antes, un fluido en reposo en un sistema de referencia, no puede soportar fuerzas cortantes y el tensor de esfuerzos se debe reducir a uno diagonal.

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad (2.42)$$

$\delta_{ij}$  es la delta de Kroenecker y  $P$  es la presión. Al sustituir esta expresión en la ecuación de conservación de momento lineal, (2.41) se obtiene

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}. \quad (2.43)$$

Esta ecuación, que fue obtenida por L. Euler en 1775, se denomina ecuación de Euler y es una de las fundamentales de la dinámica de fluidos. Es válida sólo en el caso del movimiento de fluidos en los que la viscosidad no tiene importancia, estos fluidos se llaman ideales.

En general cuando el fluido está en movimiento, la relación (2.42) no es válida y debemos escribir

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau'_{ij}. \quad (2.44)$$

El primer sumando se debe a las fuerzas de presión, que actúan en el fluido y el otro a los esfuerzos viscosos (rozamiento interno), debidos a una transferencia de impulso irreversible de puntos donde la velocidad es grande a puntos donde la velocidad es pequeña.

Los procesos de rozamiento interno en un fluido se deben a que las distintas partículas del fluido se mueven con velocidades diferentes, esto es, que existe un movimiento relativo entre las distintas partes del fluido, lo cual significa que  $\tau'_{ij}$  depende de las derivadas parciales de la velocidad. Si además suponemos que los gradientes de velocidad son pequeños, entonces la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación se puede suponer que  $\tau'_{ij}$  es una función lineal de las derivadas

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . Como  $\tau'_{ij}$  debe anularse para  $v = \text{constante}$ , no pueden existir términos en  $\tau'_{ij}$  independientes de  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . Se observa que  $\tau'_{ij}$  debe anularse también cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular  $\bar{\Omega}$ , la velocidad  $\bar{v}$  es  $\bar{v} = \bar{\Omega} \times \bar{r}$  donde,  $\bar{r}$  es el vector de posición medido desde el centro de giro. Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad (2.45)$$

son combinaciones lineales de las derivadas  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  y se anulan cuando  $\bar{v} = \bar{\Omega} \times \bar{r}$ . De aquí que  $\tau'_{ij}$  deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

El tensor más general de rango dos que satisface estas condiciones es:

$$\tau'_{ij} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij}, \quad (2.46)$$

donde los coeficientes  $a$  y  $b$  son independientes de la velocidad. La expresión (2.46) se puede escribir en términos de otros dos coeficientes de la manera siguiente:

$$\tau'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

La expresión entre paréntesis se anula cuando  $i = j$  [16], es decir, estos términos son los correspondientes a los esfuerzos cortantes. Las constantes  $\mu$  y  $\zeta$  se denominan coeficientes de viscosidad;  $\mu$  se identifica como la viscosidad cortante y  $\zeta$  con la viscosidad volumétrica o de bulto. Sustituyendo la expresión (2.47) en la relación (2.44) se obtiene

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad (2.48)$$

que es el tensor de esfuerzos para un fluido viscoso newtoniano.

En general las magnitudes  $\mu$  y  $\zeta$  son funciones de la presión y la temperatura y por tanto no son constantes en todo el fluido; sin embargo, en la mayor parte de los casos, los coeficientes de viscosidad no varían notablemente en el fluido y pueden considerarse constantes, por lo que la derivada de  $\tau_{ij}$  es:

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (2.49)$$

Esta ecuación también se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (2.50)$$

utilizando que  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \nabla \cdot \vec{v}$ ,  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \equiv \nabla^2 v_i$  y sustituyendo (2.50) en la ecuación de conservación del momento (2.41) se puede escribir la ecuación de un fluido viscoso en forma vectorial como sigue:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.51)$$

En el caso que se pueda considerar al fluido como incompresible,  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , el último término en (2.51) es cero; por lo que la ecuación del movimiento de un fluido viscoso e incompresible es:

$$\left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}. \quad (2.52)$$

Esta ecuación se denomina de Navier-Stokes. Al cociente  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  se le llama viscosidad cinemática (a  $\mu$  se le llama viscosidad dinámica);  $\vec{F}$  representa las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido.

Vemos que la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente; puesto que la mayor parte de los fluidos pueden considerarse como incompresibles, se puede decir entonces que la viscosidad  $\mu$  caracteriza al sistema [16].

## 2.6. CONDICIONES DE FRONTERA

La ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial en derivadas parciales, de segundo orden, no lineal y sus soluciones deben satisfacer ciertas condiciones iniciales y de frontera, que se establecen a partir de las restricciones físicas en las fronteras del flujo.

Usualmente se utiliza en las ecuaciones de un fluido viscoso, que la velocidad del fluido se anule en las superficies sólidas fijas, esto es,

$$\vec{v} = 0. \quad (2.53)$$

Puede resaltarse que tanto la componente de velocidad normal como la tangencial se deben anular, mientras que en el caso de un fluido ideal basta con anular la velocidad normal  $v_n$ .

En el caso general de una superficie móvil, la velocidad  $\vec{v}$  debe ser igual a la velocidad de la superficie.

Si tenemos una superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos deben ser iguales en la superficie y las fuerzas que se ejercen entre sí deben ser iguales y opuestas.

## 2.7. SEMEJANZA

Dos representaciones geométricas son semejantes cuando el cociente entre dos longitudes cualesquiera en una representación es igual al cociente correspondiente en la otra. En un problema geométrico todos los números adimensionales son o se pueden representar como el cociente de longitudes y la semejanza geométrica exige la igualdad de esos números adimensionales entre dos problemas semejantes.

En general diremos que dos o más fenómenos físicos son semejantes cuando todos los números adimensionales que aparecen en esos fenómenos son iguales; la semejanza física es una extensión de la semejanza geométrica en la que, además de la dimensión longitud, aparecen otras dimensiones como tiempo, masa, temperatura, etc.

Cada número adimensional es el cociente de los factores que resultan de adimensionalizar dos sumandos de una ecuación. Para encontrar estos cocientes, hacemos el cambio de variable  $\vec{v}^* = \vec{v}/v_o$ ,  $t^* = t/t_o$ ,  $P^* = P/P_o$ ,  $\vec{x}^* = \vec{x}/L$ ,  $\vec{F}^* = \vec{F}/F_o$ . Donde las variables con asterisco son adimensionales y  $L$  es el tamaño característico del cuerpo sumergido en un flujo que se mueve con velocidad  $v_o$  (el fluido tiene densidad  $\rho$  y viscosidad  $\nu$ ) y la presión característica es  $P_o$  [18]. La ecuación de Navier-Stokes (2.52), escrita en variables adimensionales es

$$\left(\frac{\rho v_o}{t_o}\right) \frac{\partial^* \vec{v}^*}{\partial t^*} + \left(\frac{\rho v_o^2}{L}\right) (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \vec{v}^* + \left(\frac{P_o}{L}\right) \nabla^* P^* = \left(\mu \frac{v_o}{L^2}\right) \nabla^{*2} \vec{v}^* + (\rho F_o) \vec{F}^*. \quad (2.54)$$

Los términos entre paréntesis son cantidades con dimensiones y en una misma ecuación todos ellos deben tener las mismas dimensiones; dividiendo dos de ellos se obtendrá un número adimensional.

El número de Reynolds (Re) se obtiene al dividir el segundo por el cuarto término en (2.54)

$$\text{Re} = \frac{\frac{\rho v_o^2}{L}}{\frac{\mu v_o}{L^2}} = \frac{\rho}{\mu} v_o L = \frac{v_o L}{\nu} \quad (2.55)$$

y representa el cociente entre las fuerzas de inercia debidas a la aceleración convectiva y las fuerzas viscosas.

El número de Strouhal (S), aparece al dividir el primero por el segundo sumando de (2.54)

$$S = \frac{\frac{\rho v_o}{t_o}}{\frac{\rho v_o^2}{L}} = \frac{L}{v_o t_o} \quad (2.56)$$

Representa el cociente entre la aceleración local debida al flujo no estacionario, asociada a un tiempo típico  $t_o$  y la aceleración convectiva.

Para el caso de un cilindro de diámetro  $D$  sumergido en un fluido que se mueve con velocidad  $v_o$  tenemos que

$$\text{Re} = \frac{v_o D}{\nu} \quad (2.57)$$

y

$$S = \frac{\omega D}{v_o} \quad (2.58)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de formación de los vórtices.

## 2.8. FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO CIRCULAR

El caso del flujo lento ( $\text{Re} \ll 1$ ) alrededor de una esfera fue resuelto por Stokes en 1851. Sin embargo, la ecuación de Navier-Stokes no se puede resolver en el caso de un cilindro circular (dos dimensiones). Esto se mostrará, tratando de encontrar soluciones para un flujo estacionario que se mueve lentamente alrededor de un cilindro.

Para un flujo estacionario e incompresible la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.59)$$

Si se considera un flujo con numero de Reynolds pequeño ( $\text{Re} \ll 1$ ), el término  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  puede despreciarse, puesto que el orden de magnitud de éste es  $\frac{v^2}{l}$  y

el de  $\nu \nabla^2 \vec{v}$  es  $\frac{\mu v}{\rho l^2}$ , como el cociente de estos dos es el número de Reynolds, vemos que las fuerzas de inercia son mucho menores que las viscosas.

La descripción del movimiento se reduce entonces al sistema de ecuaciones

$$\mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla P = 0, \quad (2.60)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.61)$$

junto con las condiciones de frontera.

Tomando el rotacional de la ecuación (2.59) tenemos que

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = 0, \quad (2.62)$$

debido a que la presión se anula, por ser el rotacional de un gradiente y el orden de las derivadas en la velocidad se puede intercambiar.

Si tomamos ahora la divergencia de la ecuación (2.60) tenemos que

$$\nabla \cdot (\nabla P) = \mu \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{v}), \quad (2.63)$$

y si utilizamos la ecuación (2.61) obtenemos

$$\nabla^2 P = 0. \quad (2.64)$$

Por lo tanto, el flujo alrededor del cilindro, requiere resolver las ecuaciones (2.62) y (2.64).

Por otra parte tenemos que en dos dimensiones, solamente la componente z de la ecuación (2.62) es diferente de cero, esto es,

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.65)$$

En este caso, como la distribución de velocidades del flujo solamente depende de las coordenadas (x,y) y la velocidad es en todas partes paralela al plano xy, podemos expresarla en términos de la función de corriente. Esto se logra a partir de la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ , observando que si definimos las componentes de la velocidad como las derivadas

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ y } v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.66)$$

de cierta función  $\psi(x, y)$ , llamada función de corriente, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente.

En términos de la función de corriente tenemos

$$\nabla^2 \psi = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (2.67)$$

por lo que la ecuación (2.65) se convierte en

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0. \quad (2.68)$$

En coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$  la ecuación que satisface la función de corriente es

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]^2 \psi = 0, \quad (2.69)$$

donde las componentes de la velocidad son

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.70)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.71)$$

Las condiciones a la frontera sobre el cilindro son

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = a \quad (2.72)$$

y las otras dos condiciones están dadas cuando  $r$  se hace muy grande ( $r \rightarrow \infty$ ), en este caso  $\vec{v} \rightarrow \hat{i}V$

$$\vec{v}(r, \theta) = \hat{e}_r v_r + \hat{e}_\theta v_\theta = V [\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta], \quad (2.73)$$

donde  $V$  es la velocidad de la corriente principal. De aquí tenemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = Vr \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = V \sin \theta \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (2.74)$$

de aquí, podemos ver que en este límite

$$\psi = Vr \sin \theta; \quad (2.75)$$

entonces se propone

$$\psi = f(r) \sin \theta. \quad (2.76)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.69) encontramos que

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \right]^2 f = 0, \quad (2.77)$$

cuya solución general es [22]

$$f(r) = Ar^3 + Br \left( \log r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r}, \quad (2.78)$$

entonces

$$\psi(r, \theta) = \left[ Ar^3 + Br \left( \log r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r} \right] \sin \theta. \quad (2.79)$$

Ahora utilizando las condiciones límite (2.74) tenemos que  $A=B=0$  y  $C=V$  y solamente la constante  $D$  satisface ambas condiciones, por lo que la expresión para la función de corriente se reduce a

$$\psi(r, \theta) = \left[ Vr + \frac{D}{r} \right] \sin \theta. \quad (2.80)$$

Utilizando ahora las condiciones a la frontera (2.72) tenemos que la constante  $D$  tiene los valores  $D = Va^2$  y  $D = -Va^2$  al mismo tiempo, lo cual es contradictorio.

Se concluye entonces que (2.80) no puede ser solución, puesto que no satisface las condiciones a la frontera sobre el cilindro ( $r = a$ ).

Que no exista solución para la aproximación de Stokes para un flujo plano pasando por algún cuerpo es conocida como la paradoja de Stokes. Ésta fue resuelta por Oseen en 1910 haciendo notar la naturaleza singular del problema lejos del cuerpo. Esto se entiende examinando la magnitud relativa de los términos depreciados en la aproximación de Stokes.

Lejos del cilindro, el término no lineal y el correspondiente a las fuerzas viscosas se pueden estimar a partir de la expresión (2.81)

$$\psi(r, \theta) = \left[ Ar^3 + Br \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + Cr + \frac{D}{r} \right] \sin \theta.$$

El orden de magnitud de la proporción entre las fuerzas inerciales y las viscosas es [23],  $\frac{\text{inerciales}}{\text{viscosas}} = O(B \text{ Re } r \log r)$  para  $r \rightarrow \infty$ .

Aunque el número de Reynolds sea muy pequeño, siempre existe una distancia para la cual  $O(B Re r \log r) = 1$ , por lo que no podemos despreciar el término no lineal. La región de no uniformidad está en una capa delgada cerca de la superficie del cuerpo, para grandes números de Reynolds y está en la vecindad del punto al infinito para números de Reynolds pequeños. Esta falta de uniformidad de la solución es la fuente del comportamiento singular de la solución obtenida mediante la aproximación de Stokes.

Además de dar una respuesta a la paradoja de Stokes, Oseen encuentra una aproximación nueva a las ecuaciones de Navier-Stokes, para este problema. Esta consiste en aproximar el término no lineal  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ , por  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}$ , puesto que lejos del cuerpo la velocidad es aproximadamente  $\vec{V}$ . Se tiene que a distancias grandes del cuerpo, la ecuación diferencial para la velocidad es

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.81)$$

que se conoce como la ecuación de Oseen.

Cuando se tienen casos, donde la solución al problema aproximado no es uniforme, el principio general para encontrar la solución, es identificar los términos despreciados en las ecuaciones que producen las no uniformidades y retenerlos en las regiones donde éstas ocurren, después de simplificarlos lo más posible. Si las ecuaciones resultantes tienen una solución, representan una aproximación compuesta uniforme [23].

La ecuación de Oseen es una buena aproximación para el flujo plano con números de Reynolds pequeños. En principio, se puede refinar la solución por aproximaciones sucesivas y el resultado puede presumiblemente, conservar esta uniformidad en cada etapa. En la práctica sin embargo, aunque la ecuación de Oseen es lineal, su solución es tan compleja que no se conocen segundas aproximaciones.

La aproximación de Oseen es usada también para estudiar la estela en el extremo de un cuerpo [23].

La solución a la ecuación de Oseen para el cilindro circular fue encontrada por Sir H. Lamb en 1911, en términos de coordenadas cartesianas. La componente normal a la corriente libre es

$$-\psi_x = \frac{1}{\log(4/Re) - \gamma + 1/2} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{2r^2} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \log Re r + e^{\frac{1}{2} Re r \cos \theta} K_0\left(\frac{1}{2} Re r\right) \right] \right\}, \quad (2.82)$$

donde  $\gamma = 0.05772\dots$  es la constante de Euler y  $K_0$  es la función de Bessel [23].

Soluciones para números de Reynolds arbitrarios fueron investigadas por Goldstein en 1929 y por Tomotika y Aoi en 1950. Estos resultados más complicados, son limitados, porque la ecuación de Oseen no es válida para números de Reynolds grandes. Por ejemplo Tomotika y Aoi predicen los gemelos estacionarios para números arbitrarios de Reynolds, mientras que Yamada en 1954, muestra utilizando la aproximación de Oseen, que aparecen en el cilindro circular para  $Re=1.51$ .

El siguiente paso para mejorar los resultados consiste en dividir el dominio definido por las condiciones de frontera,  $\vec{v} = \vec{0}$  en  $r = a$  y  $\vec{v} = \vec{V}$  cuando  $r \rightarrow \infty$  en tres regiones, en la región interior se resuelven las ecuaciones de Stokes, en la exterior se usa la aproximación de Oseen. Luego se hacen desarrollos asintóticos de las soluciones de Stokes y Oseen alrededor de la región de acoplamiento, para ajustar las dos soluciones a una frontera común entre las regiones interior y exterior.

### **3. EL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL**

En este capítulo se describe el dispositivo utilizado en el desarrollo de los experimentos.

#### **3.1. INTRODUCCIÓN**

El flujo estacionario pasando alrededor de un cilindro tiene un interés especial pues como ya se ha mencionado antes, el conocimiento de éste es básico para el estudio de flujos más complejos; por esta razón la estela generada por cilindros ha sido estudiada por muchos autores, tanto teórica como experimentalmente.

En esta tesis se analiza la estela generada por un cilindro cuando es colocado en un fluido que se mueve con velocidad constante, desde el punto de vista experimental. Para observar las características del flujo se utilizó una hoja de luz láser para iluminar la región donde se genera el par de vórtices. Se tomaron películas utilizando una cámara de vídeo de 8 mm y posteriormente se digitalizaron de modo que las imágenes se pudieran analizar en una computadora.

Las películas así como las imágenes obtenidas de la digitalización fueron utilizadas con dos objetivos: 1) determinar la velocidad del flujo dentro del túnel de viento, en la sección de trabajo, para calcular el número de Reynolds y la distribución de velocidades en la región de recirculación antes de que se desprendan los vórtices estacionarios, esto es, para números de Reynolds menores a 50. 2) Tomar medidas de las características geométricas más importantes de la estela así como de la frecuencia de oscilación de los vórtices. La figura 4 muestra el dispositivo experimental completo.

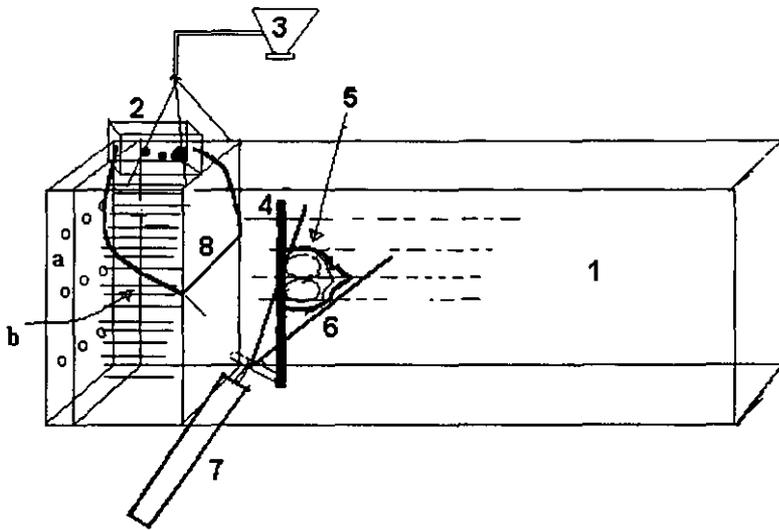


Figura 4. Dispositivo experimental utilizado. 1) Túnel de viento, formado por: a) ventiladores; b) panel de abejas; 2) fuente de voltaje; 3) cámara de video; 4) cilindro; 6) hoja láser, 7) láser; 8) alambre de nicrómel.

### 3.2. EL TÚNEL DE VIENTO

Para obtener el flujo se usó un túnel de viento el cual está construido con paredes de acrílico transparente de modo que se puedan tomar películas o fotografías a través de ellas, con una sección transversal de  $45 \times 45 \text{ cm}^2$  y de 3 metros de largo. El túnel utilizado para el desarrollo de los experimentos se muestra en la figura 5.

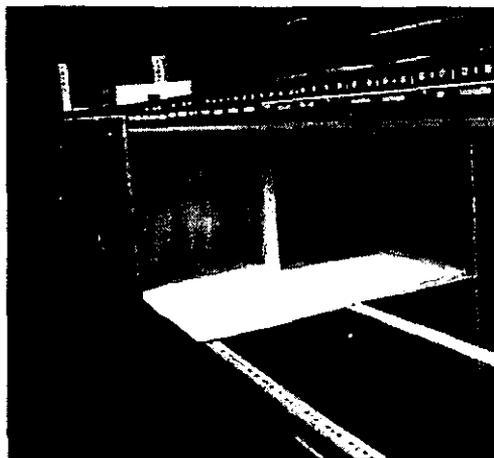


Figura 5. Túnel de viento el cual consta de ventiladores, mallas, panel de abejas y sección de trabajo.

El flujo es producido por un sistema de nueve ventiladores colocados en la parte trasera del túnel conectados eléctricamente en paralelo, con el fin de que el voltaje al que se encuentran sometidos sea el mismo. Este dispositivo se alimenta por un variac que suministra corriente alterna y puede variar el voltaje en los ventiladores de 0 a 140 volts, lo que permite que la velocidad del flujo cambie en la sección de trabajo en un intervalo de 0 a 150 cm/s.

Además de los ventiladores se encuentra una estructura compuesta de los siguientes elementos: una malla fina estirada que cubre toda la sección transversal del túnel; enseguida, un sistema de tubos delgados de alrededor de 0.5 cm de diámetro conocido como panel de abejas y al final otra malla igual que la primera. El aire pasa por la primera malla luego por el panel de abejas y por la segunda malla, de modo que en la sección de trabajo se tenga un flujo laminar, es decir, sin fluctuaciones superiores al 1%.

### 3.3. EL ALAMBRE DE NICRÓMEL

Un alambre de nicrómel se coloca en la parte media de la sección de trabajo del túnel de viento como se puede ver en la figura 4. Éste sirve para depositar parafina sobre él, que al calentarse produce humo y cuando es iluminado se pueden visualizar los patrones del flujo. La parafina proviene de una vela que se puede encontrar fácilmente en el mercado y para aplicarla se aumenta el voltaje en el alambre hasta 10 volts aproximadamente, luego se pasa la vela suavemente sobre la superficie de éste dos o tres veces. De esta manera, la cantidad de humo evaporado se puede controlar variando el voltaje.

El alambre de nicrómel es resistente y puede ser utilizado continuamente hasta una temperatura de  $1125^{\circ}C$ ; su temperatura de fusión es de  $1390^{\circ}C$ . En los experimentos se utilizó alambre calibre 34 cuyo diámetro es de 0.0160 cm, ya que después de probar con distintos calibres este resultó ser el más eficiente en la producción de humo.

El número de Reynolds asociado al alambre está en el intervalo de 0.5 para la velocidad más pequeña y 3.5 para la mayor velocidad utilizada en los experimentos. En este caso se trabajó con números de Reynolds en el intervalo  $8 \leq Re \leq 70$ , esto significa que la presencia del alambre no perturba apreciablemente al flujo.

### 3.4. LA FUENTE DE VOLTAJE

El alambre descrito en el párrafo anterior se calienta por medio de una fuente de voltaje de corriente continua, en la figura 6 se muestra una imagen de ésta. Con ella se puede variar el voltaje al que se encuentra sometido el alambre de nicrómel en el intervalo de 0 a 35 volts.

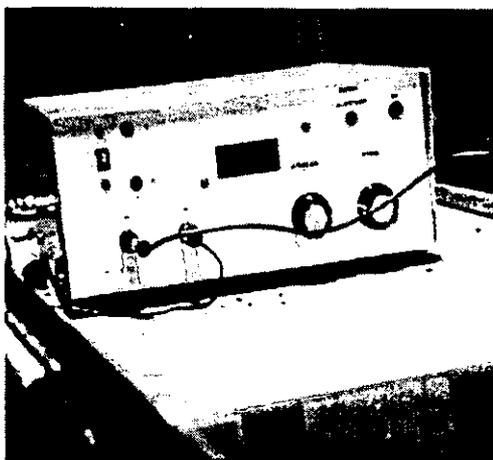


Figura 6. Fuente de voltaje de corriente continua, el voltaje puede variar en el intervalo de 0 a 35 volts.

La cantidad de humo que se desprende del alambre depende del voltaje al que se halla sometido y de la velocidad del aire, pero en general en el intervalo de velocidades manejadas en los experimentos (5 cm/s a 34.3 cm/s), la parafina se empieza a evaporar alrededor de los 15 volts.

El voltaje más eficiente para el cual la densidad del humo desprendido y el tiempo de evaporación de la parafina permitieron tomar buenas imágenes se encontró haciendo pruebas, donde se varió la velocidad en el intervalo señalado y el voltaje. Se encontró que cuando el alambre está a una tensión de entre 18 y 20 volts, el tiempo que tarda en evaporarse la parafina es de alrededor de 25 segundos, suficiente para obtener las imágenes. Para voltajes más altos la parafina se evapora en 5 o 6 segundos, tiempo insuficiente para tomar las películas.

### 3.5. EL LÁSER

Para ver los patrones de humo se iluminó el flujo, en la sección de trabajo, con una hoja de luz en el plano definido por el alambre, perpendicular al eje del cilindro (eje z), esto es, en el plano (x,y), ver la figura 8.

La hoja de luz utilizada debe ser muy intensa por lo que para obtenerla se dispersó un haz de luz proveniente de un láser de helio-neón de color rojo cuya línea de emisión es de 632.8 nanómetros. El láser utilizado se muestra en la figura 7.

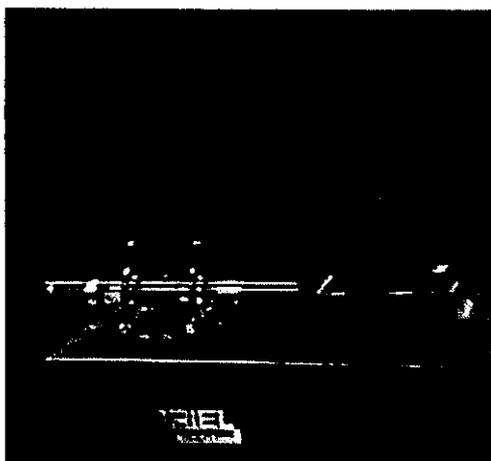


Figura 7. Láser de helio-neón de color rojo de 20 miliwatts de potencia y la fuente de voltaje que le suministra energía.

El láser emite radiación de forma continua con una potencia de 20 miliwatts el cual está alimentado por una fuente de voltaje especial de modo que la tensión a la que se somete éste sea constante. La fuente opera con un voltaje de 115 V y a una frecuencia de 60 Hertz. La variación en el voltaje al que se encuentra sometido el láser es de  $\pm 1\%$ .

### 3.6. GENERACIÓN DE VÓRTICES

Se utilizaron seis cilindros en el desarrollo de los experimentos, de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5, 6.1 y 7.0 milímetros. Cabe mencionar que los cilindros usados fueron de distinto material, cinco de metal y uno de plástico, dadas las dificultades para conseguirlos en el mercado.

Cada cilindro se colocó perpendicularmente al flujo, de modo que el eje z coincide con el eje del cilindro, el eje x está en la dirección del flujo horizontal y el eje y es perpendicular a los otros como se puede ver en la figura 8.

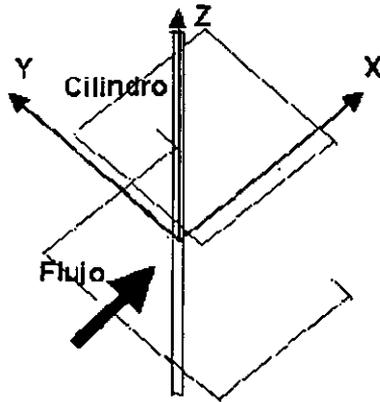


Figura 8. Sistema de coordenadas con relación al cilindro y a la dirección de movimiento del flujo.

En el túnel de viento se genera un flujo uniforme cuya velocidad puede cambiarse a voluntad, ajustando el voltaje al que se encuentran los ventiladores. Se colocaron los cilindros uno por uno y se cambió la velocidad para cada uno de ellos, de esta manera se tienen variaciones en el número de Reynolds. En la tabla siguiente se muestra la relación entre los cambios de diámetro, velocidad y número de Reynolds.

Diámetro (cm)	Intervalo de velocidad (cm/s)	Intervalo de Reynolds
0.26	4.9 – 34.3	8.2 – 57.2
0.33	4.9 – 34.3	10.4 – 66.2
0.44	4.9 – 25.7	13.8 – 72.5
0.50	4.9 – 18.2	15.5 – 58.3
0.61	4.9 – 20.6	19.2 – 80.5
0.70	4.9 – 20.6	22.0 – 92.4

Tabla 1. Relación entre la velocidad en el túnel sin colocar el cilindro y el número de Reynolds.

Dos remolinos o vórtices se forman y quedan pegados al cilindro para números de Reynolds menores a 50. Estos pueden ser observados dependiendo de la velocidad del flujo con la técnica de visualización utilizada, humo iluminado por una hoja láser.

Para velocidades pequeñas del flujo, entre 4.9 cm/s y 14 cm/s, gran parte del humo que se produce cuando se evapora la parafina en el alambre se eleva por ser menos denso que el aire, es por esto que cuando se forman los vórtices a estas velocidades la cantidad de humo que queda atrapado en ellos es muy pequeña y la luz que se refleja es muy tenue, por lo que no es posible observarlos.

Si la velocidad del flujo es mayor de 14 cm/s entonces los vórtices se pueden observar a simple vista y pueden obtenerse imágenes de ellos por medio de una cámara fotográfica o de video. Por esta razón, con los cilindros de diámetros pequeños (2.3, 3.3, 4.4 y 5.0 mm) se pueden apreciar los vórtices para números de Reynolds pequeños (alrededor de  $Re=20$ ).

### **3.7. CÁMARA DE VIDEO Y DIGITALIZACIÓN**

Para tomar las películas de los vórtices se utilizó una cámara de video de 8 mm equipada con una lente de 8-80 mm con un zoom de 10X, la cual permite ver las imágenes cuadro por cuadro a intervalos de 1/30 de segundo. La velocidad de obturación de la cámara puede tener diferentes valores, pero la que se usó en todos los experimentos fue de 1/100 s.

La cámara de video se colocó en la parte superior del túnel como se muestra en la figura 9. El eje de la cámara coincide con la dirección del eje z, que a su vez está en la dirección del eje del cilindro, para que las imágenes de los vórtices se aprecien mejor. Se tomaron películas de la estela generada cuando se coloca un cilindro en el flujo que se mueve con velocidad constante. Esto se hizo para cada uno de los cilindros y para diferentes números de Reynolds.

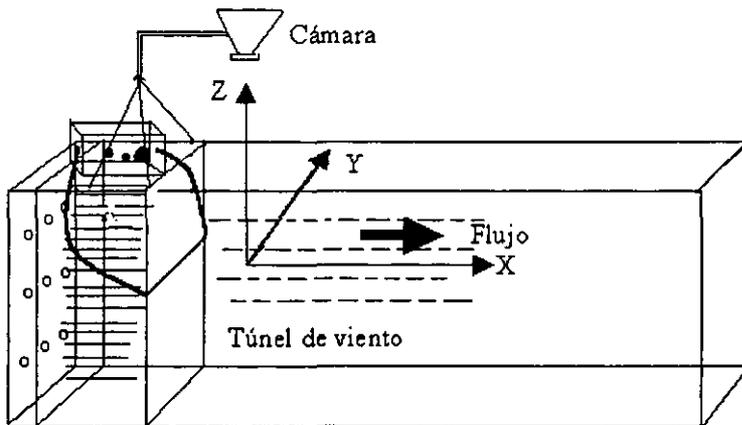


Figura 9. Sistema de coordenadas con relación a la cámara de vídeo y a la dirección de movimiento del flujo.

Con el objeto de analizar las imágenes obtenidas, éstas se digitalizaron utilizando un programa que registra cuatro imágenes consecutivas con el intervalo de tiempo que se requiera. Las mejores imágenes se seleccionaron viéndolas antes en la cámara de video; una vez hecho esto, se utilizó el programa para registrar cuatro imágenes con un intervalo de tiempo de  $1/30$  de segundo. Este proceso se repitió con todas las películas.

### 3.8. VISUALIZACIÓN DEL FLUJO

La hoja de luz láser se obtiene poniendo un cilindro de vidrio frente del láser como se puede ver en la figura 10, esto hace que el haz de luz se disperse y se forme un plano, el cual se puede ajustar a la altura que se desee moviendo el láser.

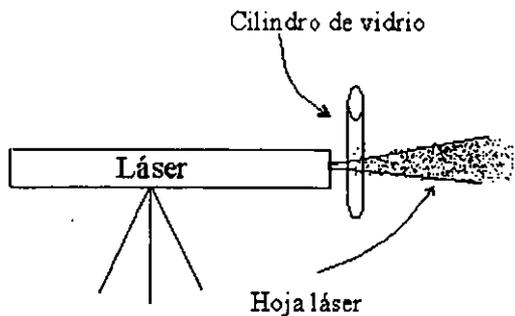


Figura 10. Hoja láser obtenida al dispersar un haz de luz por medio de un cilindro de vidrio puesto enfrente del láser.

El ángulo de dispersión del haz de luz láser es función del diámetro del cilindro, del diámetro de la sección transversal del haz, así como del índice de refracción.

Para encontrar esa relación consideramos la figura 11, en la que se representó con  $y_1$  el radio de la sección transversal del haz del láser,  $n_{i1}$  el índice de refracción del medio de incidencia 1,  $n_{t1}$  el índice de refracción del medio de transmisión 1,  $\alpha_1$  el ángulo de incidencia y  $\theta_{t1}$  el ángulo de transmisión.

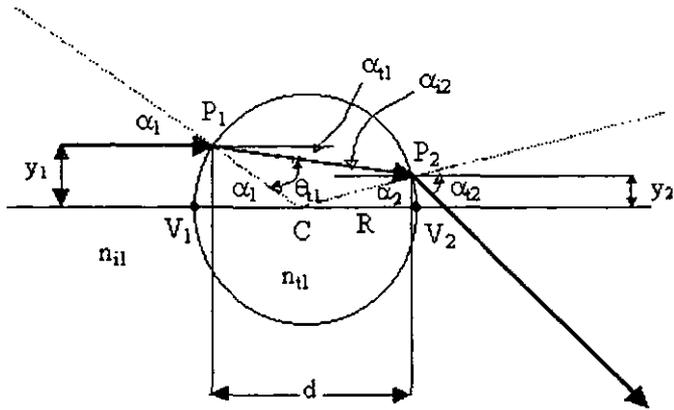


figura 11. Refracción de un rayo de luz al incidir horizontalmente sobre la superficie de una esfera.

De acuerdo con la figura y aplicando la ley de Snell para el punto  $P_1$ , se obtiene

$$n_{i1} \sin \alpha_1 = n_{l1} \sin \theta_{l1}, \quad (3.1)$$

o bien, considerando que:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots \quad (3.2)$$

y

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots; \quad (3.3)$$

suponiendo que el radio de la sección transversal del haz es mucho menor que el radio del cilindro  $y = r \ll R$ , entonces tenemos que son válidas las aproximaciones  $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ .

De acuerdo a esto se puede escribir:

$$n_{i1}\alpha_1 = n_{t1}(\alpha_1 - \alpha_{t1}). \quad (3.4)$$

Como  $\alpha_1 = y_1/R$  queda

$$n_{i1}\frac{y_1}{R} = n_{t1}\left(\frac{y_1}{R} - \alpha_{t1}\right). \quad (3.5)$$

Reagrupando se tiene

$$n_{t1}\alpha_{t1} = \left(\frac{n_{t1} - n_{i1}}{R}\right)y_1. \quad (3.6)$$

Despejando  $\alpha_{t1}$  y reemplazando se obtiene

$$\alpha_{t1} = \left(\frac{n_{t1} - n_{i1}}{n_{t1}}\right)\frac{r}{R}. \quad (3.7)$$

Utilizando el hecho de que  $\tan \alpha_{t1} \approx \alpha_{t1}$ ; la altura  $y_2$  puede ser expresada como:

$$y_2 = y_1 - d\alpha_{t1}. \quad (3.8)$$

Si  $y_1 = r$ , el radio del haz se puede suponer que es pequeño (0.5 mm). Entonces la distancia  $d$  y el diámetro del cilindro  $D$  son aproximadamente iguales  $d \approx D$ , de modo que se puede escribir

$$y_2 = r - D\alpha_{t1}. \quad (3.9)$$

Ahora, aplicando la ley de Snell y haciendo las consideraciones anteriores en el punto  $P_2$ , obtenemos

$$n_{i2}(\alpha_{i2} + \alpha_2) = n_{t2}(\alpha_{t2} + \alpha_2) \quad (3.10)$$

y en este caso tenemos que  $\alpha_2 = y_2/R$ , por lo que la ecuación se transforma en

$$n_{i2}\left(\alpha_{i2} + \frac{y_2}{R}\right) = n_{t2}\left(\alpha_{t2} + \frac{y_2}{R}\right). \quad (3.11)$$

Reordenando términos, nos queda

$$n_{t2}\alpha_{t2} = n_{i2}\alpha_{i2} + n_{i2}\frac{y_2}{R} - n_{t2}\frac{y_2}{R} \quad (3.12)$$

o

$$n_{i2}\alpha_{i2} = n_{i2}\alpha_{i2} - \left(\frac{n_{i2} - n_{i2}}{R}\right) y_2. \quad (3.13)$$

Como se puede ver en la figura 11  $\alpha_{i2} = \alpha_{t1}$ ,  $n_{i2} = n_{t1}$ ,  $n_{i1} = n_{t2}$ , por lo que resulta que el ángulo de deflexión de un rayo que incida paralelo a un diámetro del cilindro es:

$$\alpha_{t2} = \frac{n_{t1}\alpha_{t1}}{n_{i1}} - \left(\frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}}\right) \left(\frac{r - D\alpha_{t1}}{R}\right), \quad (3.14)$$

o bien reagrupando términos queda:

$$\alpha_{t2} = \left[ D \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) + \frac{n_{t1}}{n_{i1}} \right] \alpha_{t1} - \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) \frac{r}{R}. \quad (3.15)$$

Sustituyendo ahora  $\alpha_{t1}$  de la ecuación (3.7) en (3.15) se obtiene

$$\alpha_{t2} = \left[ D \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) + \frac{n_{t1}}{n_{i1}} \right] \left( \frac{n_{t1} - n_{i1}}{n_{t1}} \right) \frac{r}{R} - \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) \frac{r}{R}, \quad (3.16)$$

escribiendo esta ecuación en términos del diámetro del cilindro  $D = 2R$  queda:

$$\alpha_{t2} = 2 \left[ \left( D \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) + \frac{n_{t1}}{n_{i1}} \right) \left( \frac{n_{t1} - n_{i1}}{n_{t1}} \right) - \left( \frac{n_{i1} - n_{t1}}{n_{i1}} \right) \right] \frac{r}{D}, \quad (3.17)$$

donde  $n$  es el índice de refracción,  $D$  es el radio del cilindro y  $r$  es el radio de la sección transversal del haz.

### 3.9. ANÁLISIS

Se determinó primero la velocidad del flujo, sin poner cilindro, en la sección de trabajo en función del voltaje al que se encuentran sometidos los ventiladores, para poder asociar posteriormente un número de Reynolds. En la película, tomada en ausencia de cilindro (ver figura 12), se puede seguir la trayectoria de un patrón de humo a intervalos de tiempo de 1/30 de segundo, la distancia real recorrida es proporcional a la que se mide en la televisión o en la imagen digitalizada.

La escala se encontró por medio de una regla que es enfocada por la cámara en el mismo lugar donde posteriormente pasará el flujo, si se cambia la escala entonces varía también el ajuste de la cámara.



Figura 12. Patrones de flujo formados en la sección de trabajo del túnel de viento, sin colocar cilindro y utilizados para medir la velocidad.

Utilizando la técnica descrita en el párrafo anterior se obtuvo la distribución de velocidades en la región de los vórtices. Es importante aclarar que se determinó únicamente la componente de la velocidad en la dirección del eje  $x$ , que corresponde a la dirección de movimiento del flujo principal.

Para la descripción de la posición de los puntos en la estela se usó un sistema de referencia el cual tiene el origen de coordenadas en el centro del cilindro como se muestra en la figura 13 (a).

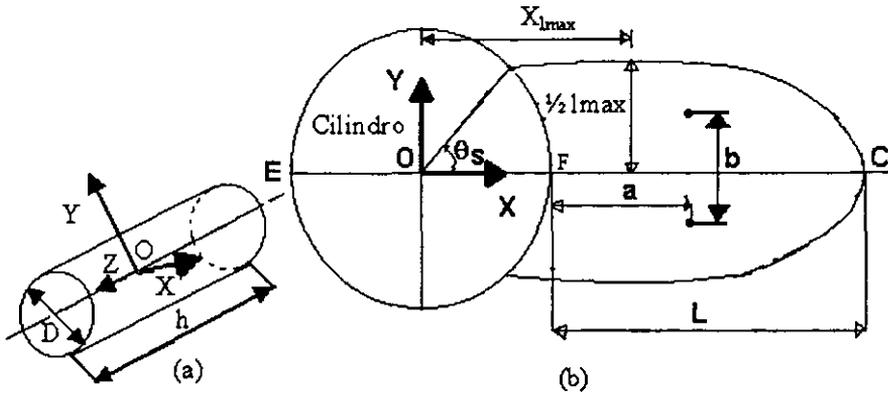


Figura 13. (a) Sistema de coordenadas referido al cilindro y (b) Parámetros geométricos de la estela pegada al cilindro.

Se analizó la evolución de los parámetros geométricos de los vórtices, en función del número de Reynolds, utilizando para ello las imágenes digitalizadas, éstos son:

- i) La longitud  $L$  de la estela definida como la distancia entre los puntos de estancamiento  $F$  y  $C$ .
- ii) La máxima anchura  $l_{max}$  que se define como la máxima distancia entre dos puntos opuestos de la estela y que además se encuentren sobre la recta perpendicular al eje "x".
- iii) La distancia entre el eje "y" y el punto donde se da la máxima anchura representada por  $X_{l_{max}}$  en la figura 13 (b).
- iv) La posición de los centros de las vórtices, que se describen con la coordenada "a", que es la distancia del punto de estancamiento  $F$  al centro del vórtice medida en el eje x, y "b", que es la distancia entre los centros medida en el eje y.
- v) El ángulo entre el eje "x" y la recta que pasa por el punto en el cual el flujo cambia de dirección, es decir, donde se separa la capa límite llamado ángulo de separación y representado con  $\theta_s$ .

## 4. RESULTADOS

En el capítulo anterior se describió el equipo utilizado en los experimentos, así como su desarrollo; en este apartado se muestran los resultados, los cuales se presentan por medio de tablas y gráficas. Cabe mencionar que las gráficas, así como las pendientes de las rectas, se obtuvieron por medio del programa Origin 3.0.

En primer lugar aparece la descripción de la velocidad con la que se mueve el fluido dentro del túnel de viento en el área de trabajo sin poner cilindro ( $v_o$ ), así como la distribución de velocidades (componente x) en la región de los vórtices ( $v$ ). Posteriormente se tiene la evolución de las características geométricas de la estela en función del número de Reynolds. Luego se presentan las medidas correspondientes a la frecuencia de oscilación de los vórtices y al final se incluye una serie de imágenes digitalizadas, en las cuales se puede observar la formación y evolución de la estela cuando aumenta el número de Reynolds.

Para poder asignar un número de Reynolds cuando se pone el cilindro dentro del fluido, es necesario conocer la viscosidad del aire, tomada como  $\nu = 1.56 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$  [17]; después medir las velocidades del flujo dentro del túnel en el área de trabajo, sin poner el cilindro, para diferentes voltajes.

Para establecer la relación entre la velocidad y el voltaje, se midió en la televisión la distancia recorrida por un patrón de humo en un tiempo de 1/30 de segundo, esta es la distancia que recorre un patrón de humo entre dos cuadros consecutivos de la película. Posteriormente se encuentra la distancia real, multiplicando por una escala, la cual se encuentra comparando las distancias recorrida en la televisión con una imagen de una regla, tomada en las mismas condiciones que los patrones de humo.

La tabla siguiente muestra la velocidad del aire en el área de trabajo en función del voltaje al que se encuentran los ventiladores.

voltaje (volts)	38±.5	40±.5	42±.5	44±.5	46±.5
vel. (cm /s)	5±1.2	6.4±1.2	8.1±1.5	9.9±1.1	11.8±1.1
voltaje (volts)	48±.5	50±.5	52±.5	54±.5	56±.5
vel. (cm /s)	13.8±1	15.9±.9	18.2±1.1	20.5±.9	23.1±.9
voltaje (volts)	58±.5	60±.5	62±.5	64±.5	
vel. (cm /s)	25.7±.9	28.4±1	31.3±.8	34.3±.8	

Tabla 2. Velocidad del fluido en el área de trabajo sin colocar cilindro en función del voltaje al que se encuentran los ventiladores.

La gráfica correspondiente se puede apreciar en la figura 14.

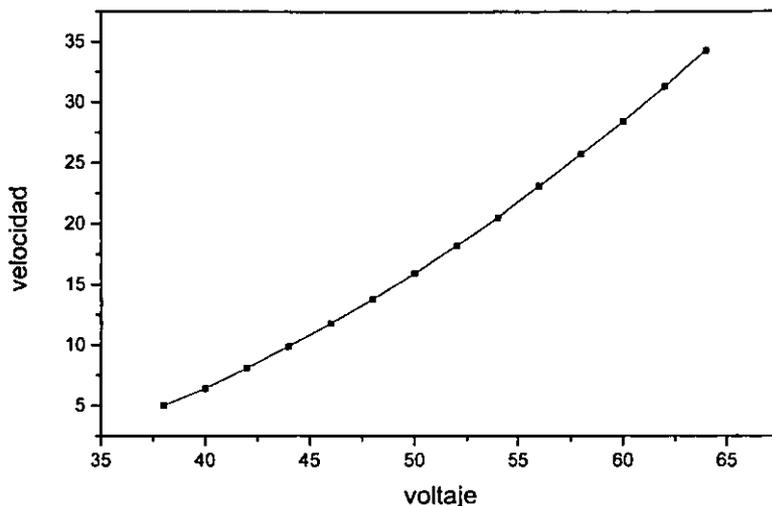


Figura 14. Velocidad del fluido en el área de trabajo sin poner cilindro, en función del voltaje al que se encuentran las ventiladores.

La mínima escala para medir el voltaje es de 1 volt, por lo que la incertidumbre que le corresponde es de  $\pm 0.5$  volt. La velocidad se calculó de acuerdo a la fórmula  $v = \frac{E\bar{d}_t}{t}$ , en la que  $\bar{d}_t$  es el promedio de la distancia recorrida por un patrón de humo, medida en la televisión por medio de un flexómetro, cuya mínima escala es 0.1 cm;  $t$  es el tiempo entre dos cuadros consecutivos de la cámara de video, que equivale a 1/30 de segundo y  $E$  es la escala utilizada. El error asociado a la velocidad es entonces:

$$\delta v = 30 [d_t \delta E + E \delta d_t].$$

#### 4.1. DISTRIBUCIÓN DE LA VELOCIDAD

La velocidad  $v$  se midió en varios puntos de la zona de recirculación, en la dirección del eje  $x$  (componente  $x$  de la velocidad), que corresponde a la dirección de

movimiento del fluido. En la figura 15 están marcados algunos de estos puntos. El sistema de coordenadas se muestra en la misma figura; la posición  $x$  de un punto en la estela está medida a partir del centro del cilindro considerado como el origen. Cabe aclarar que las velocidades se tomaron positivas cuando el fluido se mueve alejándose del cilindro en la dirección del flujo principal y negativas en sentido contrario.

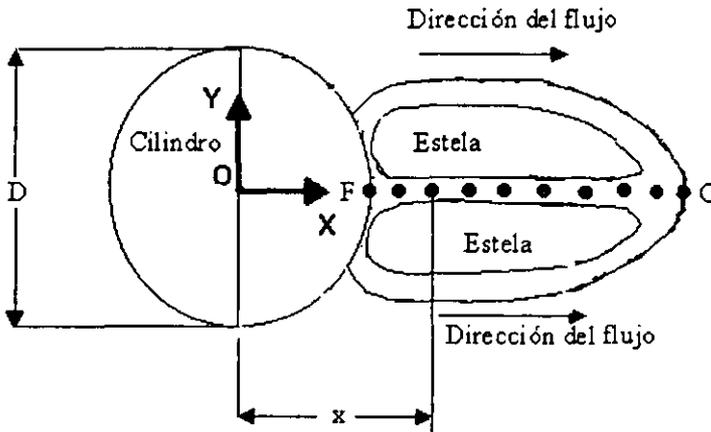


Figura 15. Sistema de referencia utilizado para describir las velocidades en la estela para un cilindro de diámetro  $D$ . En los puntos marcados solamente se midió la componente en la dirección  $x$ .

Para determinar la velocidad en cada punto, se pasa la película, cuadro por cuadro, y se mide en la televisión la distancia que recorre entre dos cuadros consecutivos un patrón de humo y se divide entre  $1/30$  de segundo.

Enseguida aparecen las tablas correspondientes a la distribución de velocidades para los cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5, 6.1 y 7 mm, donde se ha representado con  $v_0$  la velocidad del flujo principal (sin poner el cilindro) medida

en  $cm/s$ ,  $v$  es la velocidad en el vórtice,  $x$  la posición con respecto al origen (ver figura 15) y  $D$  el diámetro del cilindro.

Los errores se calcularon de acuerdo a las relaciones:

$$\delta\left(\frac{x}{D}\right) = \frac{x\delta D + D\delta x}{D^2},$$

y

$$\delta(x) = E\delta x_t + x_t\delta E,$$

donde  $E$  es la escala utilizada y  $x_t$  la distancia recorrida medida en la televisión.

Re= 30,  $v_o = 18.2$

$x/D$	$v/v_o$
0.88±.09	-.05±.01
0.92±.09	-.07±.02
0.95±.09	-.08±.02
1.01±.09	-.09±.02
1.20±.10	-.08±.02
1.35±.10	-.06±.02
1.64±.15	0.0
1.70±.15	.02±.01
1.74±.15	.03±.01
1.78±.15	.04±.01
1.80±.15	.05±.01

Re=34,  $v_o = 20.5$

$x/D$	$v/v_o$
0.86±.09	-.06±.01
0.91±.09	-.08±.02
1.00±.10	-.10±.02
1.10±.10	-.11±.02
1.42±.10	-.07±.01
1.74±.15	0
1.88±.15	.04±.01
1.91±.15	.05±.01
1.94±.15	.06±.01
1.96±.15	.07±.01

Re= 38,  $v_o = 23.1$

$x/D$	$v/v_o$
.86±.09	-.08±.01
.93±.09	-.10±.02
1.04±.10	-.12±.02
1.16±.10	-.13±.02
1.22±.10	-.12±.02
1.31±.10	-.11±.02
1.45±.10	-.09±.01
1.57±.11	-.07±.01
1.87±.15	0
2.13±.16	.08±.01
2.17±.16	.09±.01
2.19±.16	.10±.02
2.21±.16	.11±.02
2.27±.16	.13±.02
2.30±.16	.14±.02

Re= 43,  $v_o = 25.7$

$x/D$	$v/v_o$
.86±.09	-.09±.01
.97±.09	-.13±.01
1.07±.10	-.14±.01
1.23±.10	-.15±.01
1.46±.10	-.12±.01
1.59±.14	-.10±.01
2.01±.15	0
2.29±.20	.09±.01
2.35±.20	.11±.01
2.41±.20	.13±.01
2.50±.20	.16±.01

Re= 47,  $v_o = 28.4$

$x/D$	$v/v_o$
1.07±.10	-.15±.01
1.14±.10	-.16±.01
1.31±.11	-.17±.02
1.51±.11	-.14±.01
1.76±.15	-.10±.01
2.17±.16	0
2.52±.20	.12±.01
2.65±.20	.16±.02
2.72±.21	.19±.02

Tabla 3. distribución de velocidades para un cilindro de 2.6 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds.

Re=33, $v_o = 15.9$		Re= 38, $v_o = 18.2$		Re= 43, $v_o = 20.5$	
$x/D$	$v/v_o$	$x/D$	$v/v_o$	$x/D$	$v/v_o$
.90±.07	-.06±.02	.84±.07	-.08±.02	.84±.07	-.10±.02
.99±.08	-.09±.02	.90±.07	-.10±.02	.94±.07	-.13±.02
1.06±.11	-.10±.02	1.0±.07	-.12±.02	1.03±.08	-.14±.02
1.18±.11	-.09±.02	1.14±.08	-.13±.02	1.23±.11	-.15±.02
1.30±.12	-.08±.02	1.25±.11	-.11±.02	1.35±.11	-.14±.02
1.69±.12	0	1.39±.11	-.09±.02	1.51±.11	-.10±.02
1.95±.15	.08±.02	1.60±.11	-.05±.01	1.73±.15	-.06±.01
2.01±.15	.10±.02	1.85±.15	0	2.01±.15	0
2.12±.15	.13±.02	2.16±.15	.10±.02	2.28±.18	.10±.02
2.22±.15	.16±.03	2.24±.15	.13±.02	2.38±.19	.13±.02
		2.27±.15	.14±.02	2.46±.19	.16±.02

Tabla 4. Distribución de velocidades para el cilindro de 3.3 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds.

Re = 49, $v_o = 23.1$		Re= 39, $v_o = 13.8$		Re= 45, $v_o = 15.9$	
$x/D$	$v/V_\infty$	$x/D$	$v/v_o$	$x/D$	$v/v_o$
.84±.07	-.11±.02	.83±.05	-.07±.02	.75±.05	-.07±.02
.99±.07	-.15±.02	.92±.08	-.10±.02	.93±.08	-.12±.02
1.09±.08	-.16±.02	.95±.08	-.11±.02	1.11±.08	-.14±.02
1.32±.11	-.17±.02	1.12±.08	-.13±.03	1.24±.08	-.15±.02
1.65±.11	-.12±.02	1.24±.10	-.12±.03	1.44±.11	-.13±.02
1.84±.15	-.08±.02	1.30±.10	-.11±.02	1.65±.11	-.09±.02
2.19±.15	0	1.48±.11	-.08±.02	1.84±.13	-.05±.02
2.52±.19	.12±.02	1.61±.11	-.06±.02	2.04±.14	0
2.63±.19	.15±.02	1.84±.13	0	2.24±.16	.07±.02
2.68±.19	.18±.02	2.05±.14	.08±.02	2.28±.16	.09±.02
		2.16±.16	.12±.03	2.35±.16	.12±.02
		2.19±.16	.13±.03	2.40±.16	.13±.02
		2.22±.16	.14±.03	2.42±.16	.14±.03

Continuación de tabla 4

Tabla 5. Distribución de velocidades para el cilindro de 4.4 mm de diámetro y distintos números de Reynolds.

Re= 32, $v_o = 9.9$		Re= 38, $v_o = 11.8$		Re= 44, $v_o = 13.8$	
$x/D$	$v/v_o$	$x/D$	$v/v_o$	$x/D$	$v/v_o$
.76±.05	-.04±.02	.87±.07	-.08±.02	.85±.07	-.10±.02
.83±.07	-.06±.03	.93±.07	-.10±.03	.87±.07	-.11±.02
.89±.07	-.07±.03	.98±.07	-.11±.03	.94±.07	-.12±.03
1.02±.07	-.09±.03	1.10±.07	-.12±.03	1.03±.07	-.14±.03
1.18±.09	-.07±.03	1.29±.09	-.11±.03	1.21±.09	-.15±.03
1.35±.09	-.05±.02	1.48±.09	-.08±.02	1.46±.09	-.12±.03
1.58±.11	0	1.55±.12	-.06±.02	1.52±.12	-.11±.02
1.67±.12	.03±.02	1.59±.12	-.05±.02	1.63±.12	-.09±.02
1.74±.12	.05±.03	1.67±.12	-.03±.02	1.73±.12	-.07±.02
1.76±.12	.06±.03	1.78±.12	0	1.98±.14	0
1.88±.14	.10±.03	1.98±.14	.07±.02	2.14±.14	.06±.02
1.90±.14	.11±.03	1.99±.14	.08±.02	2.15±.14	.07±.02
		2.02±.14	.09±.03	2.21±.14	.09±.02
		2.05±.14	.10±.03	2.25±.16	.10±.02
		2.10±.14	.12±.03	2.31±.16	.13±.03
		2.15±.14	.14±.03		

Tabla 6. Distribución de velocidades para el cilindro de 5.0 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds.

Re = 46,  $v_o = 11.18$

$x/D$	$v/v_o$
.93±.07	-.12±.03
1.02±.07	-.13±.03
1.17±.07	-.14±.03
1.23±.07	-.15±.03
1.56±.09	-.11±.03
2.00±.09	0
2.27±.13	.10±.03
2.34±.15	.13±.03
2.43±.15	.17±.03

Tabla 7. Distribución de velocidades para el cilindro de 6.1 mm de diámetro y Re=46.

Re = 44,  $v_o = 9.9$

$x/D$	$v/v_o$
.76±.05	-.05±.02
.86±.06	-.09±.02
1.04±.06	-.13±.02
1.20±.08	-.14±.02
1.40±.09	-.13±.02
1.60±.11	-.09±.02
1.91±.13	0
2.05±.13	.06±.02
2.11±.13	.08±.02

Tabla 8. Distribución de velocidades para el cilindro de 7.0 mm de diámetro y Re=44

A continuación se grafican los datos presentados en las tablas 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

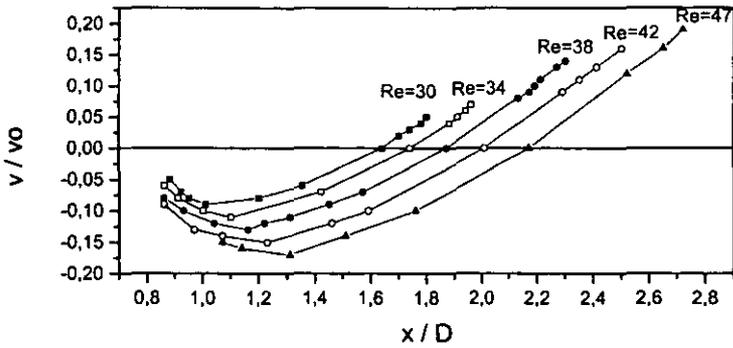


Figura 16. Distribución de velocidades en la dirección x para el cilindro de 2.6 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds. Tabla 3.

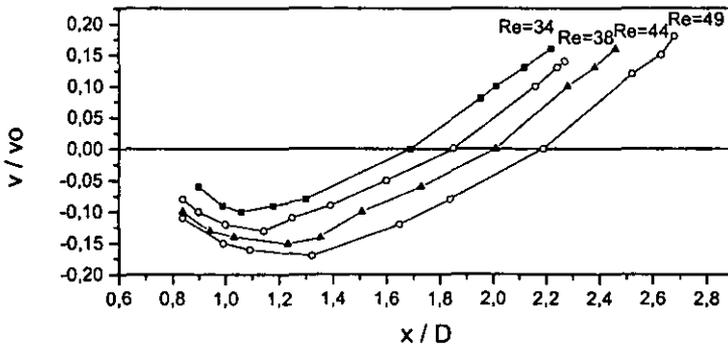


Figura 17. Distribución de velocidades en la dirección x para el cilindro de 3.3 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds. Tabla 4.

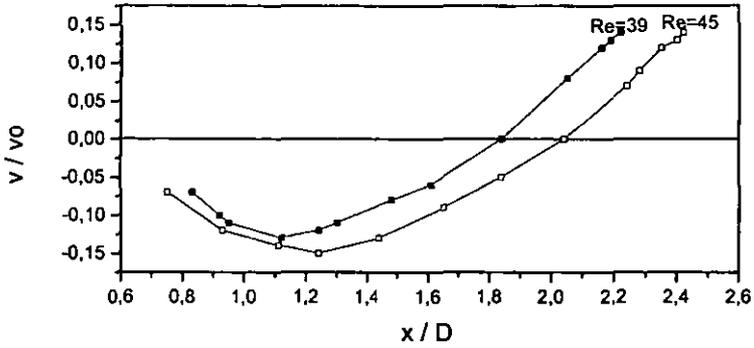


Figura 18. Distribución de velocidades en la dirección  $x$  para el cilindro de 4.4 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds. Tabla 5.

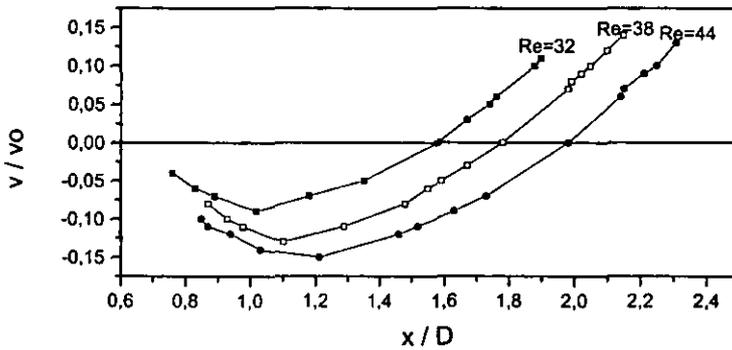


Figura 19. Distribución de velocidades en la dirección  $x$  para el cilindro de 5.0 mm de diámetro y diferentes números de Reynolds. Tabla 6.

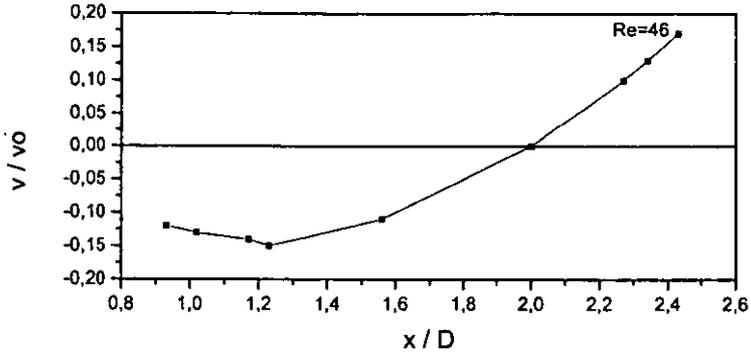


Figura 20. Distribución de velocidades en la dirección  $x$  para el cilindro de 6.1 mm de diámetro. Tabla 7.

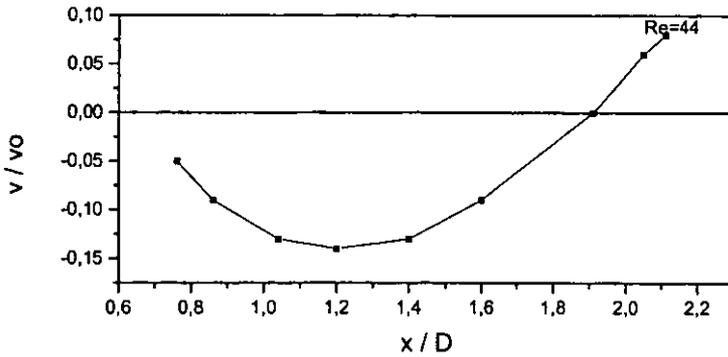


Figura 21. Distribución de velocidades en la dirección  $x$  para el cilindro de 7.0 mm de diámetro. Tabla 8.

Considerando el valor absoluto de la velocidad, se puede observar en las imágenes que ésta es cero en el punto F y aumenta conforme se aleja del cilindro hasta llegar a un punto donde es máxima, después empieza a disminuir nuevamente tomando el valor cero en el punto C, ver figura 15.

La velocidad en los vórtices es muy pequeña, del orden de 5 o 6 cm/s y resulta muy difícil medirla puesto que la trayectoria de un patrón de humo se hace difusa, en particular para números de Reynolds más pequeños que 30, no se puede medir la velocidad de retroceso puesto que no se forman patrones observables en los vórtices.

En la figura 22 se comparan las velocidades en la región vorticiosa para cilindros con diámetros diferentes pero iguales números de Reynolds.

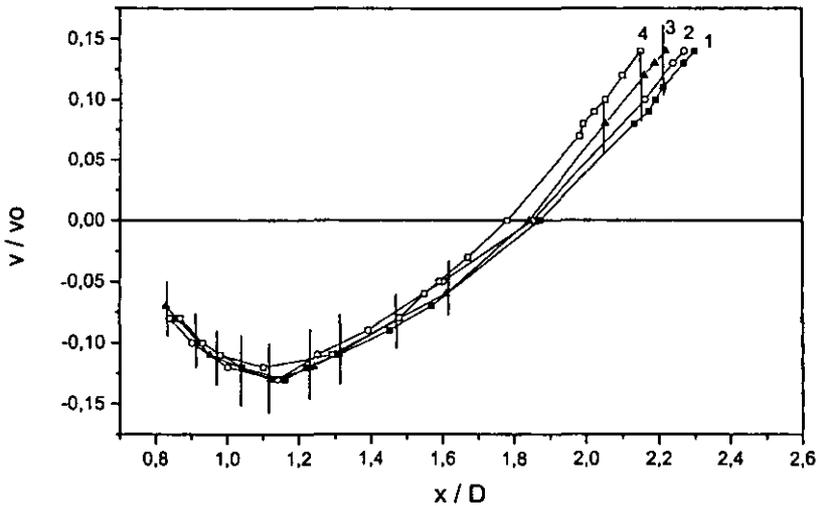


Figura 22. Distribución de velocidades para iguales números de Reynolds y para cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm  $Re=38$ ; (2)  $D=3.3$  mm  $Re=38$ ; (3)  $D=4.4$  mm  $Re=39$ ; (4)  $D=5.0$  mm  $Re=38$ .

Como se puede ver, las gráficas tocan las barras verticales que corresponden

al error asociado en las medidas, por lo que podemos decir que todos los datos presentan el mismo comportamiento.

En las tablas y gráficas que se presentan a continuación se considera a la velocidad multiplicada por -1 en la región de los vórtices de modo que las curvas para la distribución de velocidades se invierten y las velocidades negativas se hacen positivas, es decir, donde existe un mínimo ahora hay un máximo. Tomando en cuenta lo anterior se analizó la evolución de los máximos de la velocidad en función del número de Reynolds.

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=5.0 mm	
Re	$-v_{max}/v_o$	Re	$-v_{max}/v_o$	Re	$-v_{max}/v_o$
30	0.09±.02	34	0.10±.02	32	0.09±.03
34	0.11±.02	38	0.13±.02	38	0.12±.03
38	0.13±.02	43	0.15±.02	44	0.15±.03
43	0.15±.02	49	0.17±.02		
47	0.17±.02				

Tabla 9. Evolución del máximo de la velocidad en los vórtices en función del número de Reynolds.

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=5.0 mm	
Re	d/D	Re	d/D	Re	d/D
30	0.51±.07	34	0.56±.07	32	0.52±.07
34	0.60±.07	38	0.64±.07	38	0.60±.07
38	0.66±.07	43	0.72±.07	44	0.71±.07
43	0.73±.07	49	0.82±.07		
47	0.81±.07				

Tabla 10. Localización del máximo de la velocidad en función del número de Reynolds.

En las figuras 23 y 24 se muestra gráficamente la evolución del máximo de la velocidad y su localización, donde se ha tomado la distancia  $d$  a partir del punto de estancamiento F en lugar de hacerlo desde el origen del sistema de coordenadas, este cambio de origen no afecta a las medidas puesto que para cualquier cilindro

se tiene que  $\frac{r+d}{D} = 0.5 + \frac{d}{D}$  así que el origen se desplaza 0.5 unidades en todos los casos.

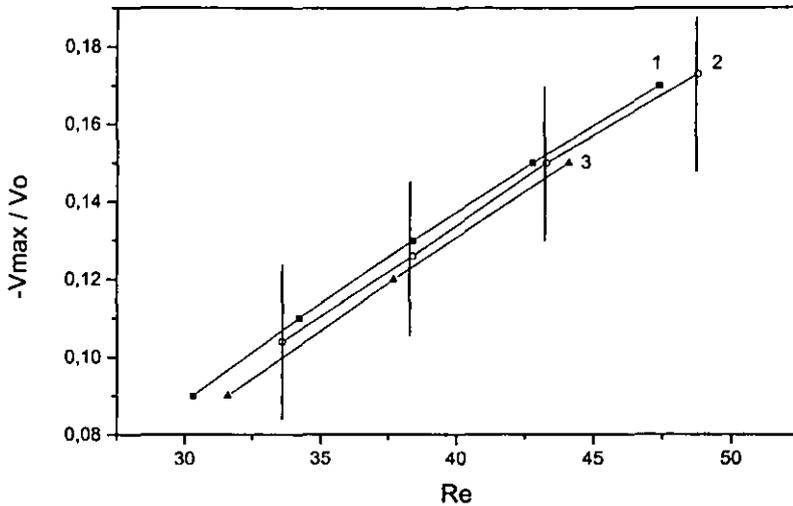


Figura 23. Evolución de la velocidad máxima contra el número de Reynolds para cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D= 3.3$  mm; (3)  $D=5.0$  mm

En la figura 23 se observa que el máximo de la velocidad varía linealmente con el número de Reynolds. Las pendientes para cada una de estas rectas son:  $P_{v_{\max}}^1 = 0.0047$ ,  $P_{v_{\max}}^2 = 0.0046$ ,  $P_{v_{\max}}^3 = 0.0048$ , donde el superíndice se refiere al número de la gráfica. La pendiente es prácticamente la misma en todos los casos.

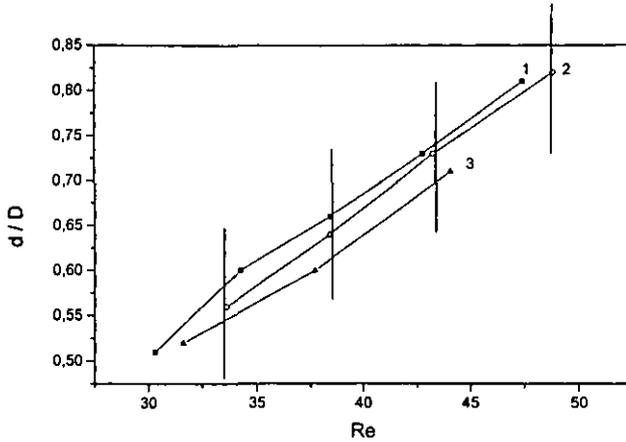


Figura 24. Posición de la velocidad máxima contra el número de Reynolds para cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D=3.3$  mm (3)  $D=5.0$  mm.

En la figura 24 se cuenta con las gráficas de la posición del máximo de la velocidad contra  $Re$  para datos obtenidos experimentalmente, en donde se ve que existe una variación aproximadamente lineal entre la distancia donde ocurren los máximos de velocidad y el número de Reynolds. Las pendientes denotadas por  $P_d^n$  para los diferentes cilindros son:  $P_d^1 = 0.017$ ,  $P_d^2 = 0.017$ ,  $P_d^3 = 0.015$ . Las pendientes son aproximadamente iguales excepto la última, probablemente porque solamente se tienen tres datos.

## 4.2. PARÁMETROS GEOMÉTRICOS

Se midieron los parámetros geométricos en la estela definidos en la primera parte de este capítulo para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y distintos números de Reynolds, en particular la longitud ( $L$ ) del vórtice, la máxima anchura ( $l_{max}$ ), el ángulo de separación ( $\theta_s$ ), la posición a la que ocurre la máxima anchura medida a partir del centro del cilindro ( $x_{l_{max}}$ ) y la posición de los centros de los vórtices denotados por las coordenadas ( $a$ ) y ( $b$ ).

#### 4.2.1. LONGITUD DE LA ESTELA

La longitud de la estela ( $L$ ) se midió directamente en las imágenes digitalizadas, en las tablas que se muestran enseguida se tienen las medidas de ella para diferentes cilindros y números de Reynolds.

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=4.4 mm		D=5.0 mm	
Re	L/D	Re	L/D	Re	L/D	Re	L/D
11	0.46±.06	10	0.42±.09	14	.52±.08	16	0.56±.07
14	0.57±.06	14	0.53±.09	18	.66±.08	21	0.72±.07
16	0.68±.07	17	0.66±.10	23	.81±.08	26	0.89±.07
20	0.77±.07	21	0.78±.10	28	.98±.09	32	1.08±.08
23	0.87±.07	25	0.91±.11	33	1.15±.10	38	1.28±.08
26	1.0±.07	29	1.06±.11	39	1.34±.10	44	1.48±.09
30	1.12±.07	34	1.19±.12	45	1.54±.10		
34	1.24±.08	38	1.35±.12				
38	1.14±.08	43	1.51±.13				
43	1.53±.08	49	1.69±.14				
47	1.67±.08						
D=6.1 mm		D=7.0 mm					
Re	L/D	Re	L/D				
19	0.64±.10	22	0.72±.10				
25	0.83±.10	29	0.92±.11				
32	1.05±.11	36	1.16±.14				
38	1.27±.12	44	1.41±.13				
46	1.50±.13						

Tabla 11. Longitud de la estela para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y para distintos números de Reynolds.

La incertidumbre en la longitud de la estela ( $L$ ), medida en pixeles, se consideró en todos los casos como  $\delta L = \pm 6$ , que corresponde a la máxima variación en la longitud de la estela para diferentes imágenes con el mismo número de Reynolds.

El error en el cociente  $L/D$  es entonces:

$$\delta(L/D) = \frac{D\delta L + L\delta D}{D^2}$$

Las gráficas correspondientes a la tabla anterior se puede ver en la figura 25.

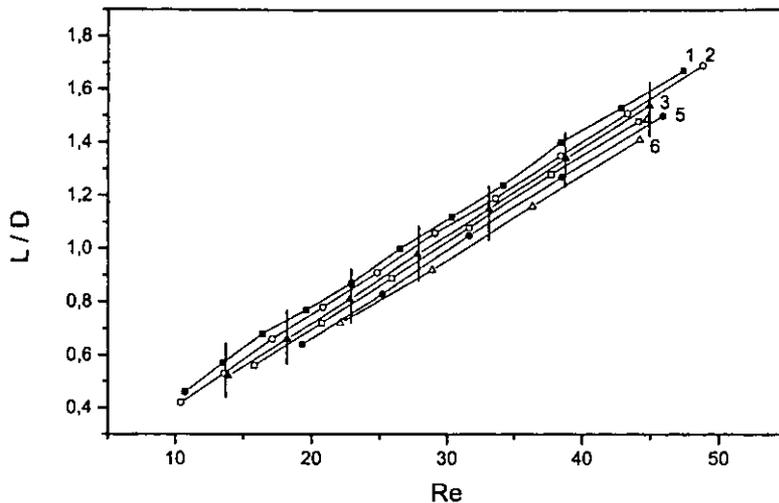


Figura 25. Longitud de la estela contra el número de Reynolds para los cilindros con diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D=3.3$  mm; (3)  $D=4.4$  mm; (4)  $D=5.0$  mm; (5)  $D=6.1$  mm; (6)  $D=7.0$  mm.

En esta figura está graficada la longitud  $L$  de los vórtices contra  $Re$  para datos tomados por medio de este experimento, la dependencia entre estas variables es lineal y las pendientes son  $P_L^1 = 0.033$ ,  $P_L^2 = 0.033$ ,  $P_L^3 = 0.033$ ,  $P_L^4 = 0.033$ ,  $P_L^5 = 0.032$ ,  $P_L^6 = 0.031$ ; se ha denotado por  $P_L^n$  a la pendiente correspondiente a la gráfica  $n$  y ésta es prácticamente la misma en todos los casos.

#### 4.2.2. EVOLUCIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS CENTROS DE LOS VÓRTICES

La evolución de la posición de los centros de los vórtices se analizó designando con “ $a$ ” la coordenada medida a partir del punto de estancamiento  $F$  y con “ $b$ ” la coordenada que corresponde a la distancia entre los centros de los vórtices.

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=4.4 mm		D=5.0 mm	
Re	a/D	Re	a/D	Re	a/D	Re	a/D
11	0.16±.02	10	0.13±.02	14	.16±.02	16	0.18±.01
14	0.20±.02	14	0.18±.02	18	.23±.02	21	0.25±.01
16	0.24±.02	17	0.23±.02	23	.30±.02	26	0.33±.02
20	0.28±.02	21	0.28±.02	28	.37±.02	32	0.41±.02
23	0.33±.03	25	0.34±.02	33	.45±.02	38	0.50±.02
26	0.38±.03	29	0.40±.03	39	.53±.02	44	0.60±.03
30	0.44±.03	34	0.47±.03	45	.62±.03		
34	0.49±.03	38	0.54±.03				
38	0.55±.03	43	0.62±.03				
43	0.62±.03	49	0.69±.04				
47	0.68±.04						
D=6.1 mm		D=7.0 mm					
Re	a/D	Re	a/D				
19	0.22±.02	22	0.25±.02				
25	0.31±.03	29	0.35±.03				
32	0.40±.03	36	0.46±.03				
38	0.50±.03	44	0.58±.04				
46	0.62±.03						

Tabla 12. Evolución de la coordenada (a) de la posición de los centros de los vórtices para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y para distintos números de Reynolds.

Las curvas que corresponden son las siguientes:

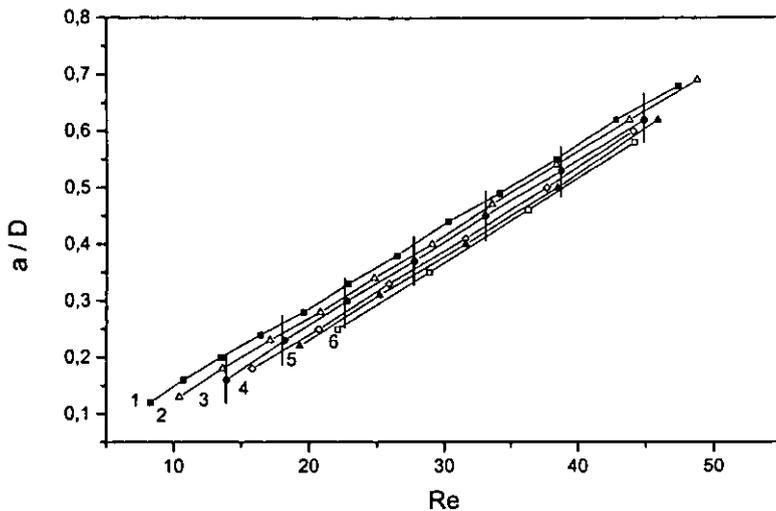


Figura 26. Coordenada "a" del centro de los vórtices contra el número de Reynolds para los cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D=3.3$  mm- (3)  $D=4.4$  mm (4)  $D=5.0$  mm; (5)  $D=6.1$  mm; (6)  $D=7.0$  mm.

Estas gráficas muestran que la longitud "a" entre el punto de estancamiento y el centro de los vórtices varía linealmente con el número de Reynolds para los diferentes valores de los diámetros. Las pendientes que corresponden a las rectas son:  $P_a^1 = 0.014$ ,  $P_a^2 = 0.014$ ,  $P_a^3 = 0.015$ ,  $P_a^4 = 0.015$ ,  $P_a^5 = 0.015$ ,  $P_a^6 = 0.015$ ;  $P_a^n$  representa la pendiente correspondiente a la gráfica  $n$  y, como se puede ver, es esencialmente la misma para todas las rectas.

La proporción  $\frac{a}{L}$  (coordenada  $a$  entre la longitud del vórtice  $L$ ) para todos los cilindros varía en el intervalo  $0.34 \leq \frac{a}{L} \leq 0.41$  cuando el número de Reynolds está en  $23 \leq Re \leq 47$ .

La variación de la coordenada "b" en función del número de Reynolds es como sigue:

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=4.4 mm		D=5.0 mm	
Re	b/D	Re	b/D	Re	b/D	Re	b/D
11	0.23±.03	10	0.18±.03	14	.25±.03	16	0.26±.03
14	0.29±.03	14	0.26±.03	18	.31±.03	21	0.33±.03
16	0.33±.04	17	0.31±.03	23	.38±.03	26	0.40±.03
20	0.38±.04	21	0.37±.03	28	.43±.03	32	0.44±.03
23	0.42±.04	25	0.41±.04	33	.46±.03	38	0.47±.04
26	0.45±.04	29	0.45±.04	39	.48±.04	44	0.50±.04
30	0.47±.04	34	0.47±.04	45	.51±.04		
34	0.49±.04	38	0.49±.04				
38	0.51±.04	43	0.52±.04				
43	0.53±.04	49	0.53±.04				
47	0.55±.04						
D=6.1 mm		D=7.0 mm					
Re	b/D	Re	b/D				
19	0.29±.03	22	0.32±.03				
25	0.38±.04	29	0.40±.04				
32	0.43±.04	36	0.45±.04				
38	0.47±.04	44	0.48±.04				
46	0.50±.04						

Tabla 13. Evolución de la coordenada (b) de la posición de los centros de los vórtices para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y para distintos números de Reynolds.

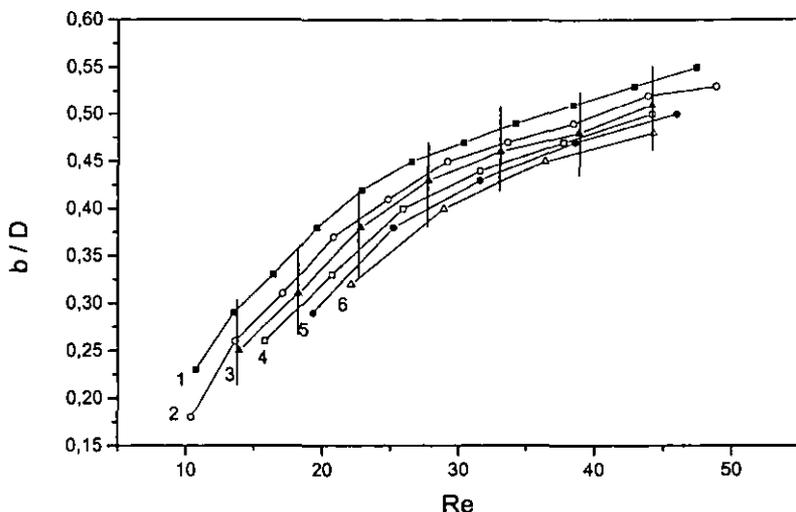


Figura 27. Coordenada “b” del centro de los vórtices contra el número de Reynolds para los cilindros de diámetros: (1) D=2.6 mm; (2) D=3.3 mm- (3) D=4.4 mm; (4) D=5.0 mm; (5) D=6.1 mm; (6) D=7.0 mm.

En la figura 27 se grafica la coordenada “b” del centro de los vórtices contra Re para los datos obtenidos en este experimento.

#### 4.2.3. ÁNGULO DE SEPARACIÓN

En este experimento se pudo medir el ángulo de separación  $\theta_s$  para todos los cilindros que se utilizaron y para diferentes valores del número de Reynolds, lo cual se muestra a continuación. Las mediciones fueron hechas con un transportador y el error asignado corresponde a la máxima variación del ángulo, que resulta de comparar las medidas de éste, para diferentes imágenes e igual número de Reynolds.

D=2.6 mm		D=3.3 mm		D=4.4 mm		D=5.0 mm	
Re	$\theta_s$	Re	$\theta_s$	Re	$\theta_s$	Re	$\theta_s$
11	34±4	10	32±4	14	34±4	16	35±4
14	37±4	14	36±4	18	39±4	21	39±4
16	40±4	17	39±4	23	42±4	26	43±4
20	42±4	21	42±4	28	45±4	32	46±4
23	44±4	25	44±4	33	48±4	38	49±4
26	46±4	29	46±4	39	50±4	44	52±4
30	48±4	34	49±4	45	53±4		
34	49±4	38	51±4				
38	51±4	43	53±4				
43	53±4	49	54±4				
47	54±4						
D=6.1 mm		D=7.0 mm					
Re	$\theta_s$	Re	$\theta_s$				
19	37±4	22	39±4				
25	42±4	29	43±4				
32	46±4	36	48±4				
38	49±4	44	51±4				
46	52±4						

Tabla 14. Ángulo de separación para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1, 7.0 mm y para distintos números de Reynolds.

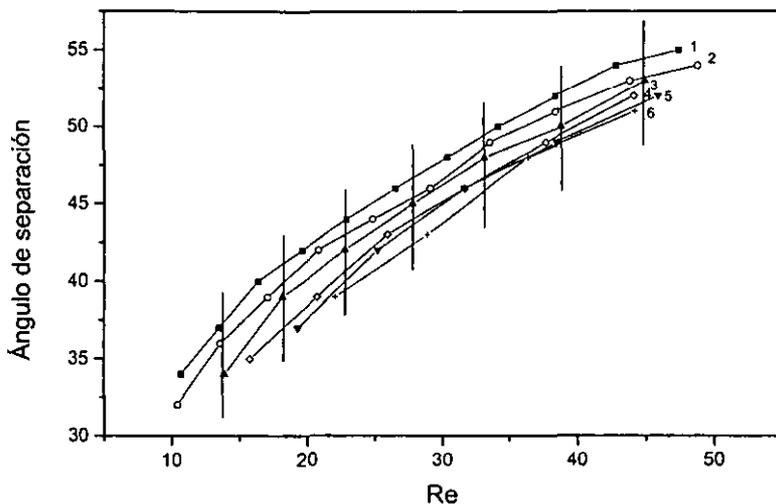


Figura 28. Ángulo de separación contra el número de Reynolds para los cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D=3.3$  mm; (3)  $D=4.4$  mm; (4)  $D=5.0$  mm; (5)  $D=6.1$  mm; (6)  $D=7.0$  mm.

En la figura 28 se grafica el ángulo de separación  $\theta_s$  contra el número de Reynolds para cilindros de distintos diámetros.

#### 4.2.4. ANCHURA MÁXIMA DE LA ESTELA Y POSICIÓN EN LA QUE OCURRE

La máxima anchura denotada por  $l_{max}$  y la posición  $X_{l_{max}}$  medida a partir del centro del cilindro varían cuando cambia el número de Reynolds, como se puede observar en las tablas y gráficas que se muestran enseguida.



En las figuras 29 y 30 se muestra gráficamente la evolución de  $l_{\max}$  y  $X_{l_{\max}}$  en función del número de Reynolds.

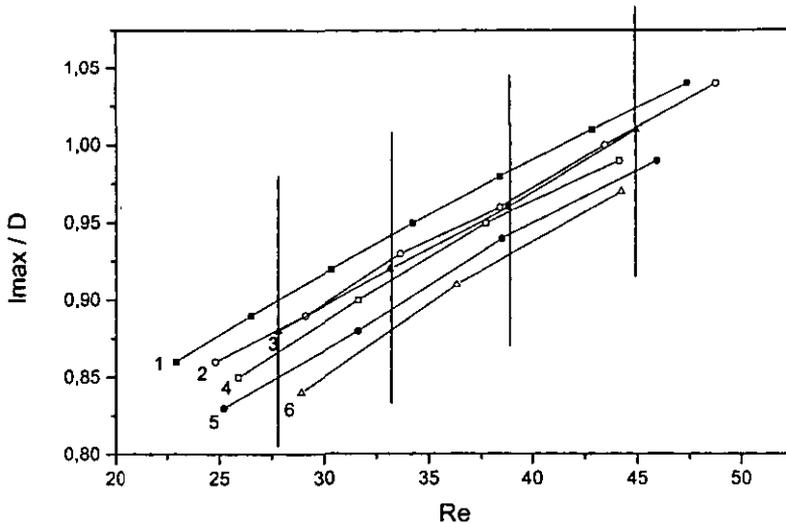


Figura 29. Máxima anchura contra número de Reynolds para cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6\text{mm}$ ; (2)  $D=3.3\text{ mm}$ ; (3)  $D=4.4\text{ mm}$ ; (4)  $D=5.0\text{ mm}$ ; (5)  $D=6.1\text{ mm}$ ; (6)  $D=7.0\text{ mm}$ .

La variación de la máxima anchura de la estela con el número de Reynolds es aproximadamente lineal como se puede ver en las gráficas de la figura anterior, las pendientes para cada una de las rectas son:  $P_{l_{\max}}^1 = .0073$ ,  $P_{l_{\max}}^2 = .0075$ ,  $P_{l_{\max}}^3 = .0076$ ,  $P_{l_{\max}}^4 = .0077$ ,  $P_{l_{\max}}^5 = .0078$ ,  $P_{l_{\max}}^6 = .0085$ ;  $P_{l_{\max}}^n$  denota la pendiente correspondiente a la gráfica  $n$ . Podemos ver que las pendientes son aproximadamente iguales excepto la última ( $P_{l_{\max}}^6 = .0085$ ); esto se debe probablemente a que son solo tres datos los considerados para trazar la gráfica.

La proporción entre la posición "b" y la anchura máxima ( $l_{\max}$ )  $\frac{b}{l_{\max}}$  varía en el intervalo  $0.31 \leq \frac{b}{l_{\max}} \leq 0.41$ , cuando el número de Reynolds cambia en  $23 \leq \text{Re} \leq 47$ .

La variación de la posición  $x_{l\max}$  donde ocurre esta máxima anchura se muestra en la figura siguiente:

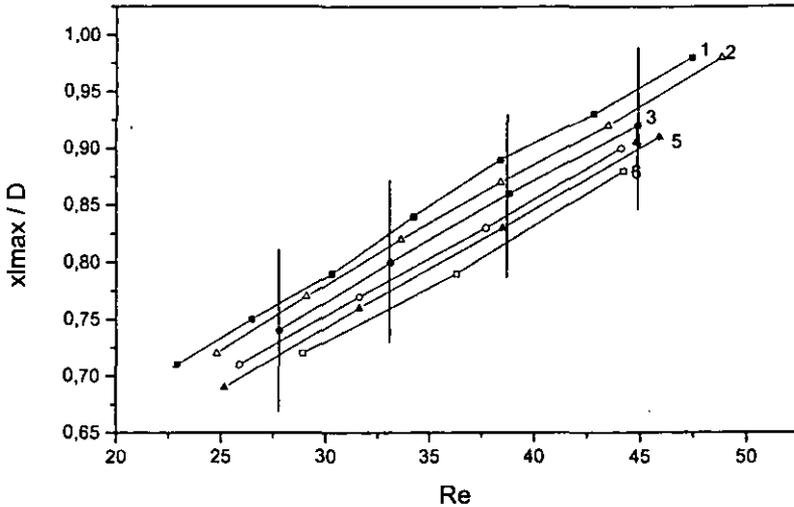


Figura 30. Posición de la máxima anchura contra el número de Reynolds para los cilindros de diámetros: (1)  $D=2.6$  mm; (2)  $D=3.3$  mm; (3)  $D=4.4$  mm; (4)  $D=5.0$  mm; (5)  $D=6.1$  mm; (6)  $D=7.0$  mm.

Las gráficas muestran que existe una relación lineal entre la posición de la máxima anchura y el número de Reynolds. Las pendientes para cada una de las rectas son:  $P_{x_{l\max}}^1 = 0.011$ ,  $P_{x_{l\max}}^2 = 0.011$ ,  $P_{x_{l\max}}^3 = 0.010$ ,  $P_{x_{l\max}}^4 = 0.010$ ,  $P_{x_{l\max}}^5 = 0.010$ ,  $P_{x_{l\max}}^6 = 0.010$ . Donde  $P_{x_{l\max}}^n$  denota la pendiente correspondiente a la gráfica  $n$ , éstas son prácticamente las mismas en todos los casos.

### 4.3. FRECUENCIA

Se midió la frecuencia a la cual oscilan y se desprenden los vórtices para cilindros de diámetro 4.4, 5.0 y 6.1 mm. Se determinó en estos casos el número de Strouhal

definido por la fórmula  $S = \frac{\omega D}{v_o}$  donde  $\omega$  es la frecuencia de formación de los vórtices, D es el diámetro del cilindro y  $v_o$  es la velocidad de la corriente en ausencia del cilindro. La incertidumbre en la frecuencia es  $\delta f = 30 \frac{\delta N}{N^2}$ , donde N es el número de cuadros que pasan en la película por cada oscilación completa y  $\delta S = \frac{v_o \delta(\omega D) + \delta v_o(\omega D)}{v_o^2}$ ,  $\delta S = 0.03$  en todos los casos.

Enseguida se muestran las gráficas correspondientes para los cilindros mencionados:

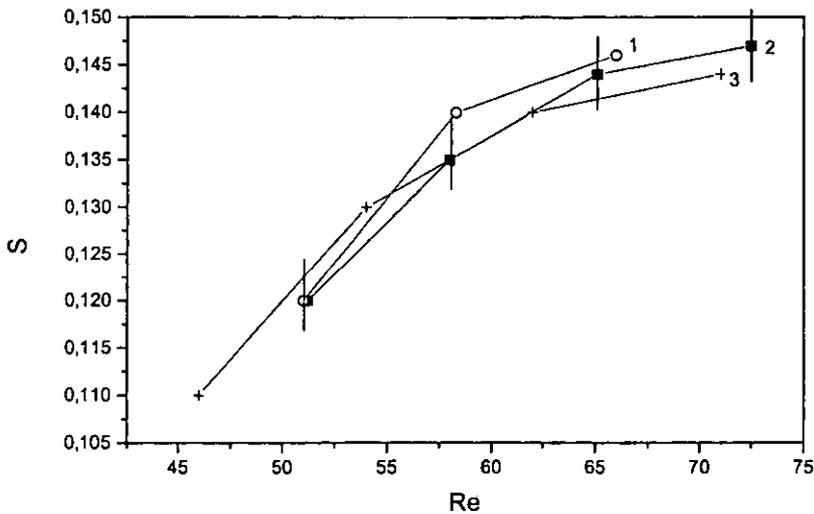


Figura 31. Número de Strouhal contra número de Reynolds para cilindros de diámetros: (1) D=5.0 mm; (2) D=4.4 mm; (3) D=6.1 mm.

En la figura 31 se pueden apreciar las gráficas para el número de Strouhal en función del número de Reynolds.

Como se puede observar en todos los casos las gráficas tocan las barras verticales que corresponden a los errores asociados a cada medida por lo que podemos decir que los datos presentan el mismo comportamiento.

Las imágenes que se muestran enseguida se obtuvieron de la digitalización de las películas tomadas utilizando el método de visualización mencionado y explicado en este trabajo. Las imágenes corresponden a la estela producida por un cilindro fijo colocado dentro de un túnel de viento en el cual se mueve un flujo de derecha a izquierda con velocidad constante.

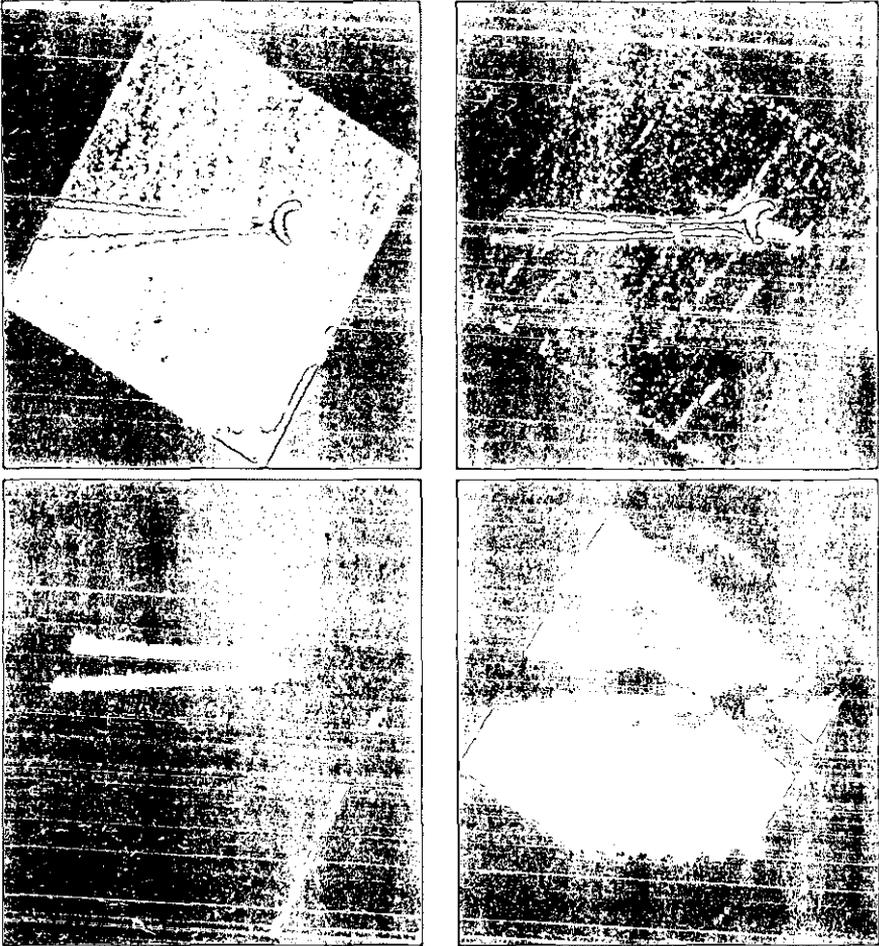


Figura 32.  $D=2.6$  mm:  $Re=8, 11, 14, 16$ . En esta serie de imágenes podemos observar que las líneas de corriente se deforman cuando pasan cerca del cilindro, formando una región que aumenta su tamaño al crecer  $Re$ .

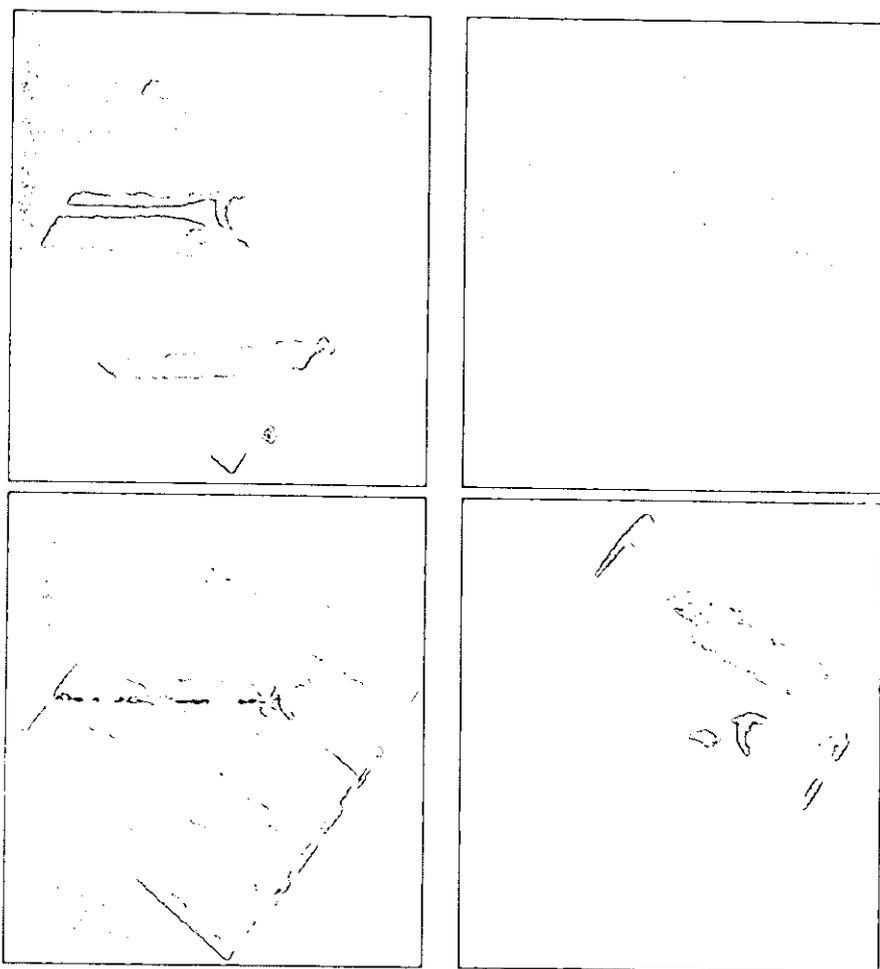


Figura 33.  $D=2.6$  mm:  $Re=20, 23, 26, 30$ . En la imagen 3 se puede observar claramente la formación del par de vórtices gemelos pegados al cilindro, en la imagen 4 se ve que los vórtices aumentaron de tamaño.

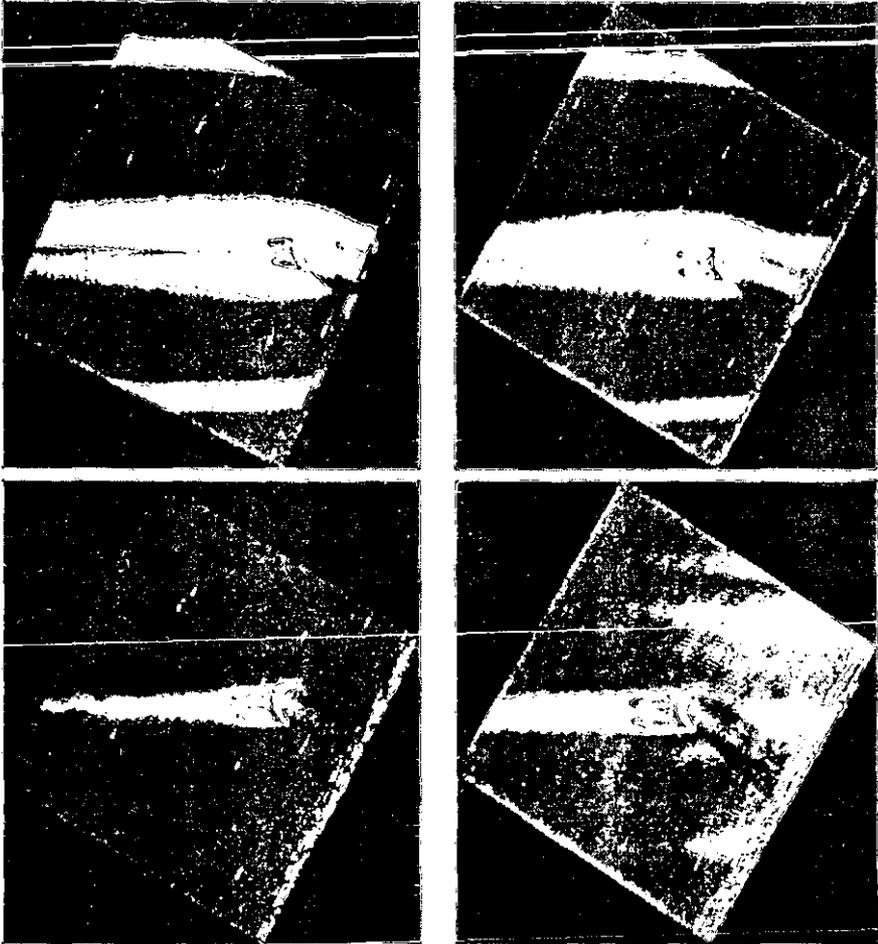


Figura 34.  $D=2.6$  mm:  $Re=34, 38, 43, 47$ . En estas imágenes se pueden observar con toda claridad los vórtices para cuatro números de Reynolds consecutivos, en ellas se nota el aumento en sus dimensiones cuando crece  $Re$ .

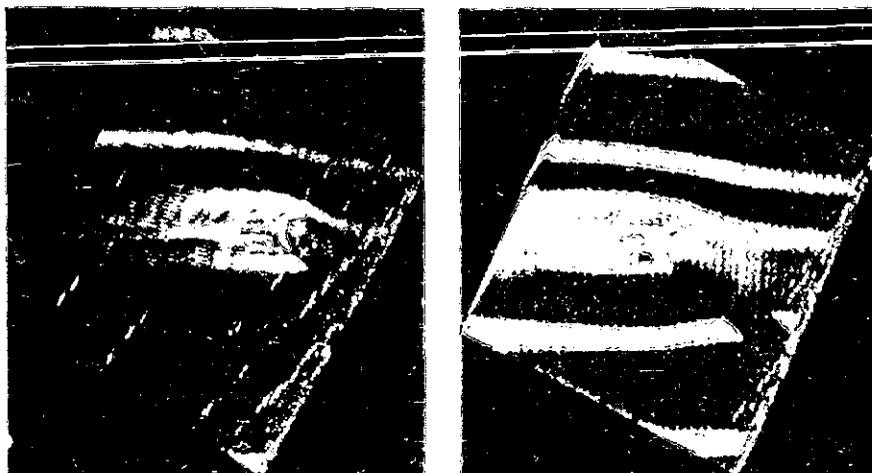


Figura 35.  $D=2.6$  mm:  $Re=52$ ;  $Re=57$ . Aquí podemos ver que los vórtices se hacen asimétricos oscilan y se desprenden del cilindro con cierta frecuencia.

Las imágenes anteriores muestran la evolución de los parámetros geométricos de la estela para el cilindro de 2.6 mm de diámetro. Inicialmente se forma una zona pegada al cilindro en la cual existe fluido en rotación, aunque no se puede ver para números de Reynolds pequeños (menores a 26), debido a que el humo atrapado es muy tenue. Esta zona cambia su tamaño y se hace más clara a medida que aumenta el número de Reynolds; hasta que para  $Re=26$  (ver la figura 33), se pueden observar los vórtices gemelos claramente formados y se aprecia además que aumentan su tamaño cuando cambia el número de Reynolds. Los vórtices se mantienen estables hasta  $Re=47$ , después empiezan a oscilar y se desprenden con cierta frecuencia, como se ve en las imágenes de la figura 34 y 35.

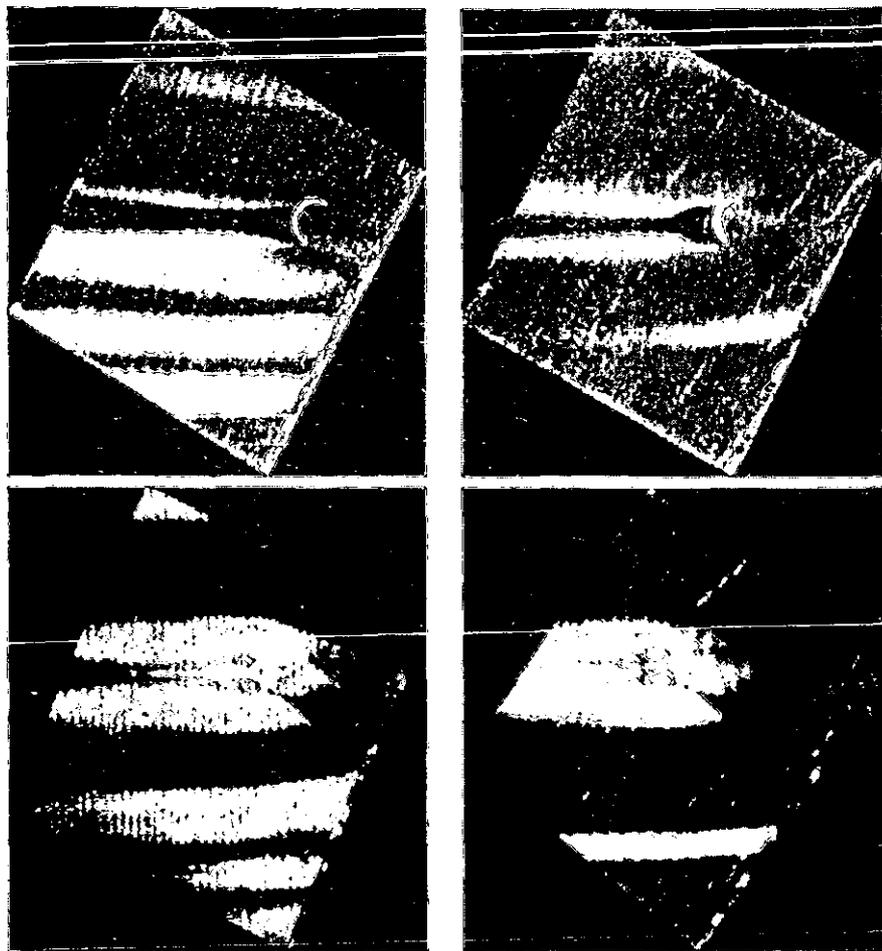


Figura 36.  $D=3.3$  mm:  $Re=25$ ;  $Re=29$ ;  $Re=34$ ;  $Re=38$ . En esta figura se observa la formación de los vórtices para  $Re=34$  y su posterior evolución cuando crece el número de Reynolds.

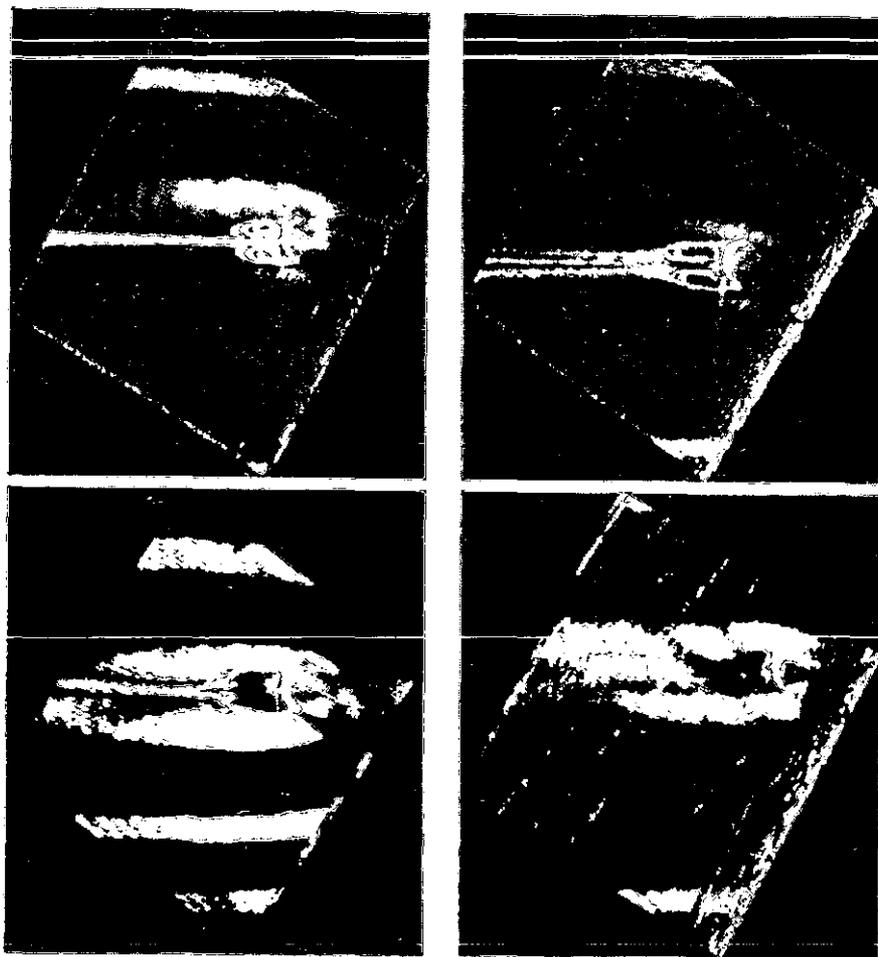


Figura 37.  $D=3.3$  mm:  $Re=44$ ;  $Re=49$ ;  $Re=54$ ;  $Re=60$ . Aquí se observa que los vórtices son estables y aumentan sus dimensiones hasta que el número de Reynolds es 49, después se hacen inestables y empiezan a oscilar.

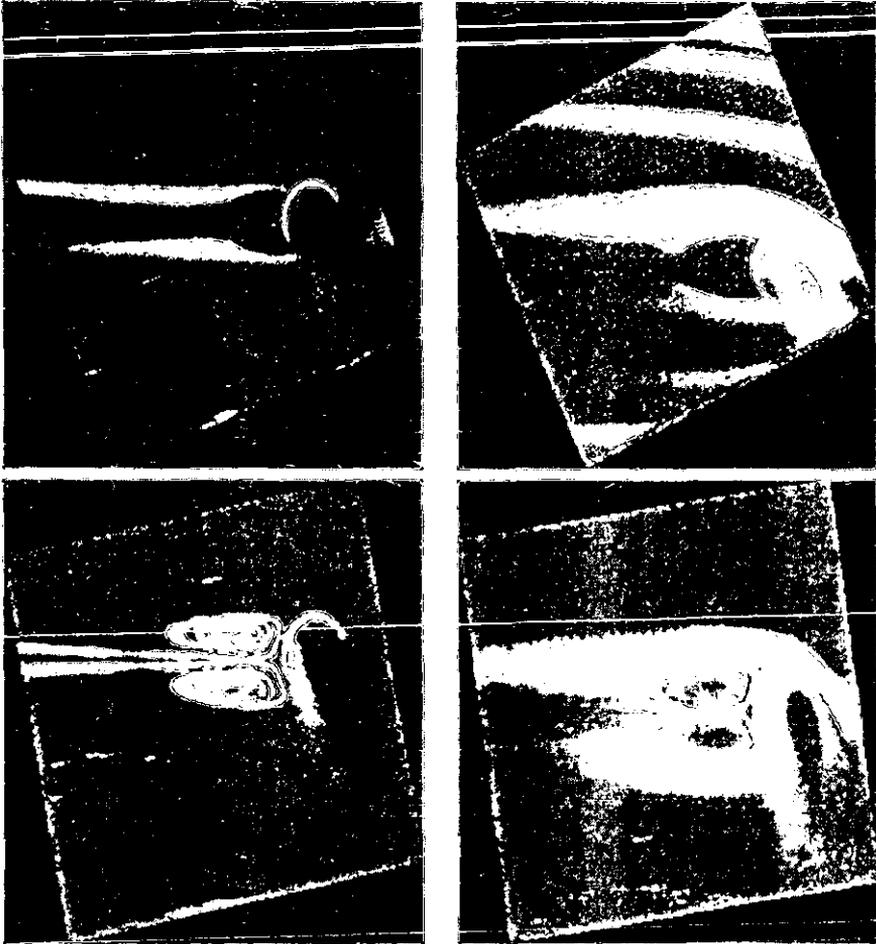


Figura 38.  $D=4,4$  mm:  $Re=28$ ;  $Re=33$ ;  $Re=39$ ;  $Re=45$ . En estas imágenes se observa el aumento de tamaño de la zona de recirculación así como la formación de los vórtices para  $Re=39$ .

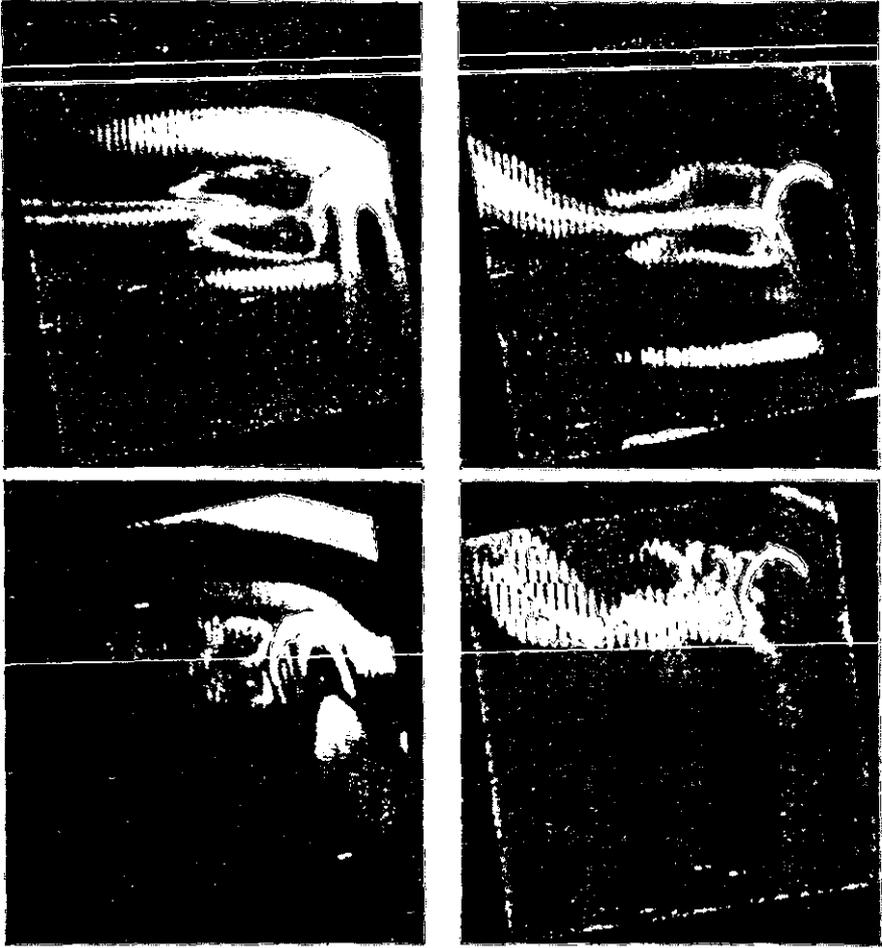


Figura 39.  $D=4,4$  mm:  $Re=51$ ;  $Re=58$ ;  $Re=65$ ;  $Re=72$ . En la figura se ve claramente que los vórtices están oscilando cuando el número de Reynolds es de 51 y que la frecuencia de oscilación aumenta conforme crece  $Re$ .

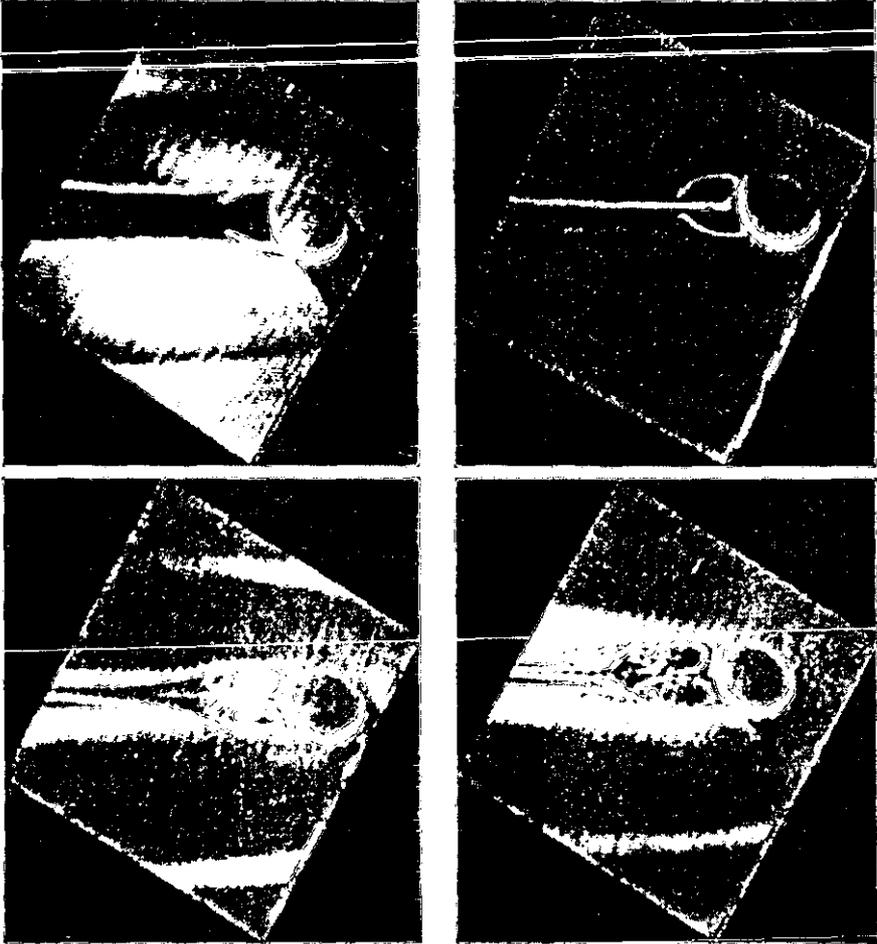


Figura 40.  $D=5.0$  mm:  $Re=16$ ;  $Re=21$ ;  $Re=26$ ;  $Re=32$ . En esta serie de imágenes se aprecia la formación de los vórtices para  $Re=16$  y el aumento en sus dimensiones al crecer el número de Reynolds.

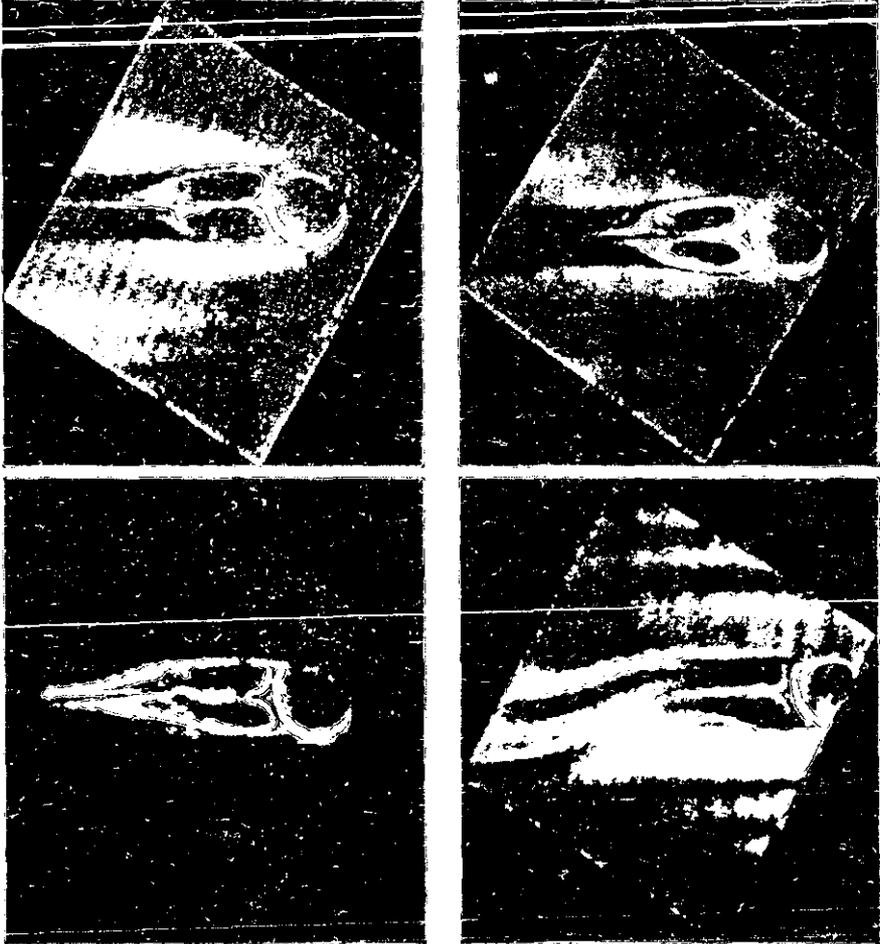


Figura 41.  $D=5.0$  mm:  $Re=38$ ;  $Re=44$ ;  $Re=51$ ;  $Re=58$ . Las imágenes muestran que cuando el número de Reynolds es de 51 los vórtices son inestables, están oscilando y se desprenden del cilindro.

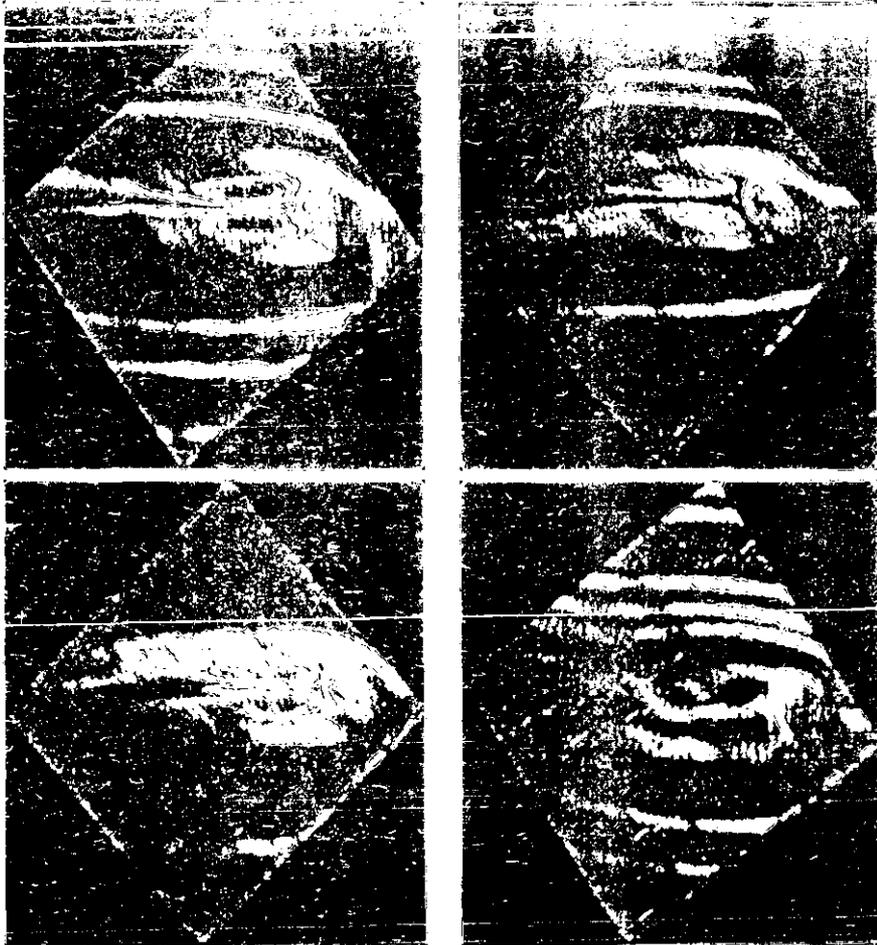


Figura 42.  $D=6.1$  mm:  $Re=46$ ;  $Re=54$ ;  $Re=62$ ;  $Re=71$ . En estas imágenes se observa la evolución de los vórtices en función del número de Reynolds, para este cilindro se tiene que los vórtices ya son inestables cuando  $Re=46$

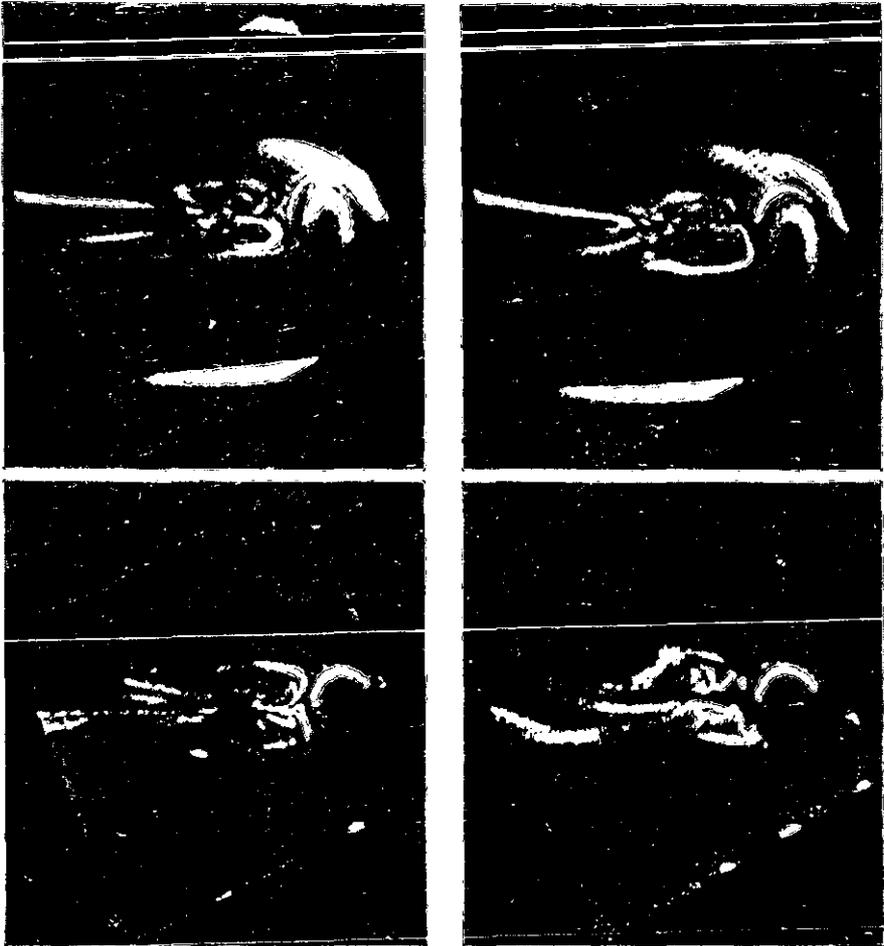


Figura 43.  $D=7.0$  mm:  $Re=44$ ;  $Re=53$ ;  $Re=62$ ;  $Re=71$ . En estas imágenes se muestra la evolución de la estela para el cilindro de 7.0 mm de diámetro y en ellas se ve que los vórtices ya están oscilando cuando  $Re=44$ .

Para cilindros de diámetros 2.6 y 3.3 mm el número de Reynolds para el cual los vórtices empiezan a oscilar y se desprenden es de alrededor de  $Re=50$ , según se puede observar en las figuras correspondientes. Si los diámetros son 4.4 y 5.0 mm no se tienen imágenes en el intervalo  $44 < Re < 51$  por lo que no se puede determinar el número de Reynolds para el cual los vórtices empiezan a oscilar.

En el caso de los cilindros con diámetro mayor a 5.0 mm (6.1 y 7.0 mm) el número de Reynolds para el que se da la transición es de alrededor de 45 de acuerdo con lo que muestran las imágenes.

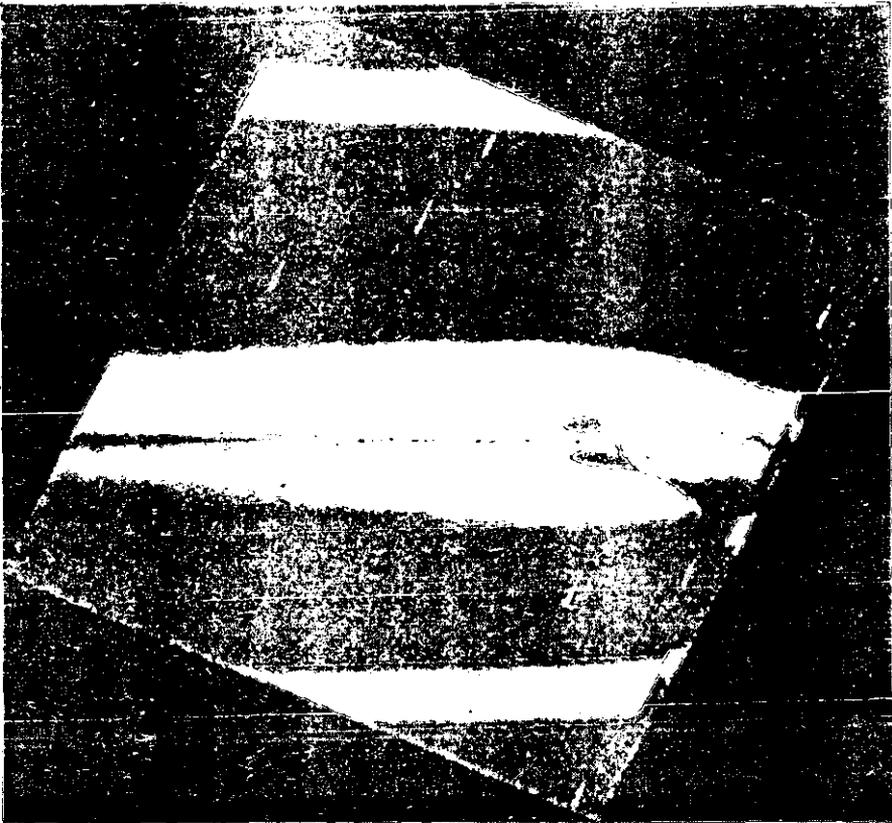


Figura 44  $D=2.6$  mm  $Re=34$

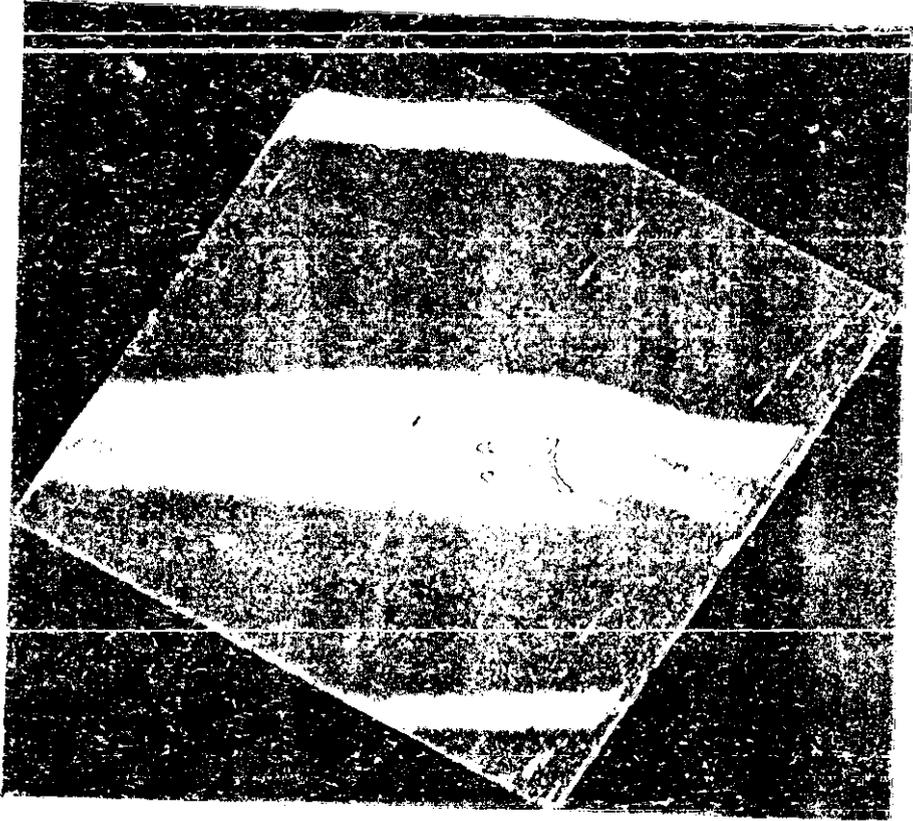


Figura 45.  $D=2.6$  mm,  $Re=38$

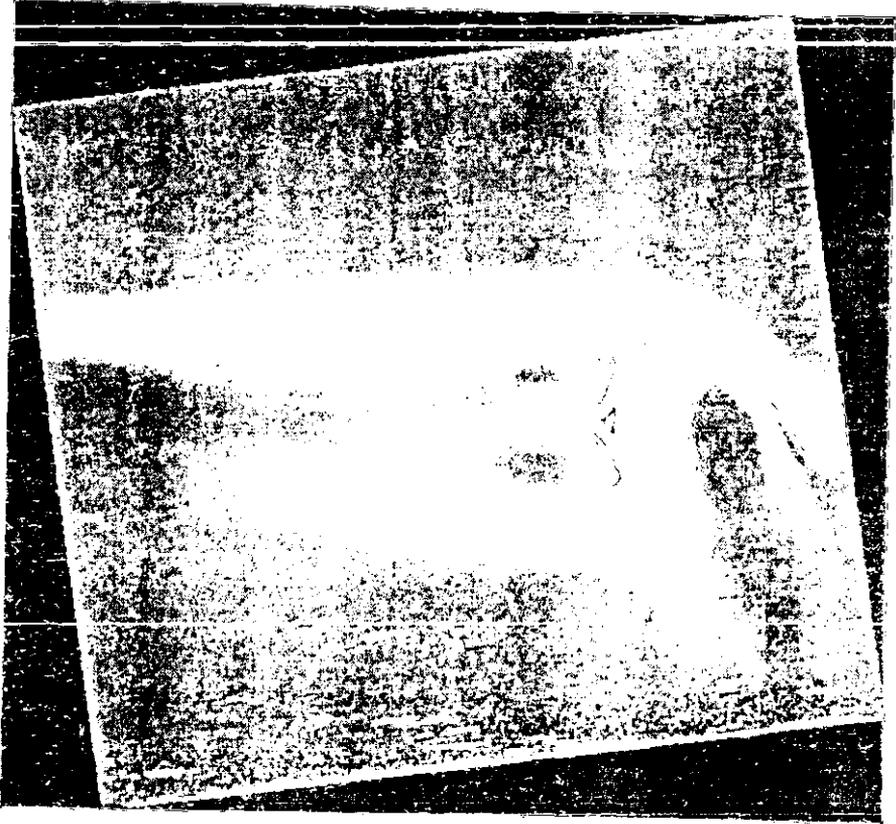


Figura 46.  $D=4.4$  mm  $Re=45$

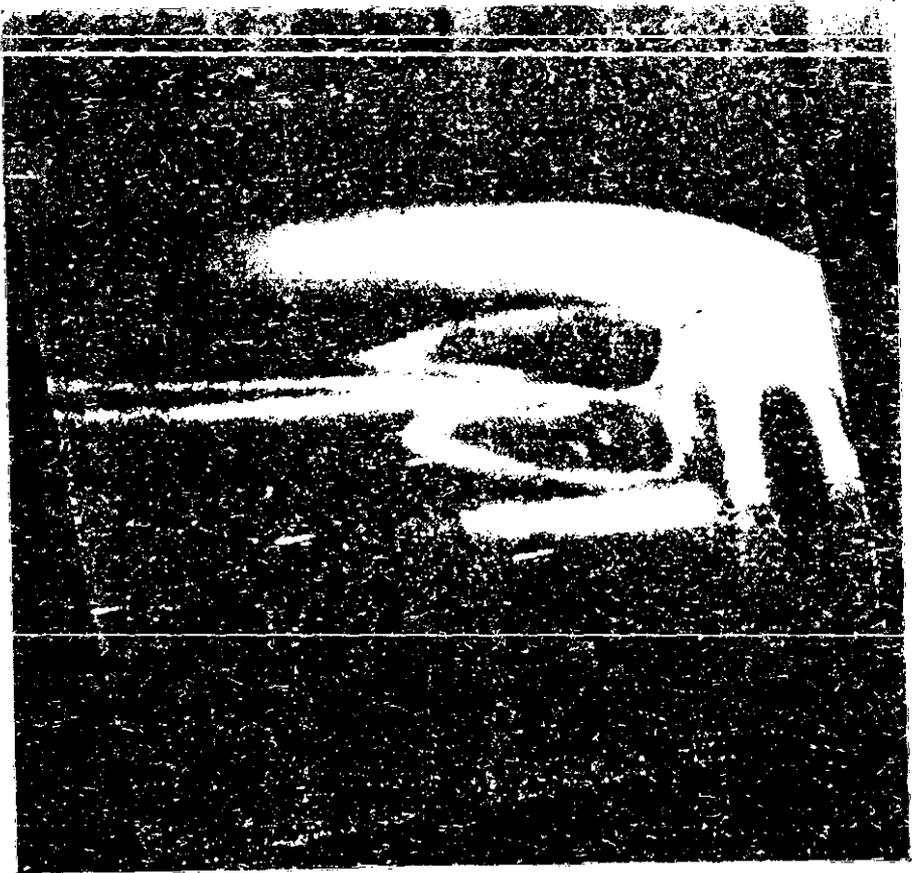


Figura 47.  $D=4.4$  mm  $Re=51$



Figura 48.  $D=5.0$  mm  $Re=26$



Figura 49.  $D=5.0$  mm  $Re=44$

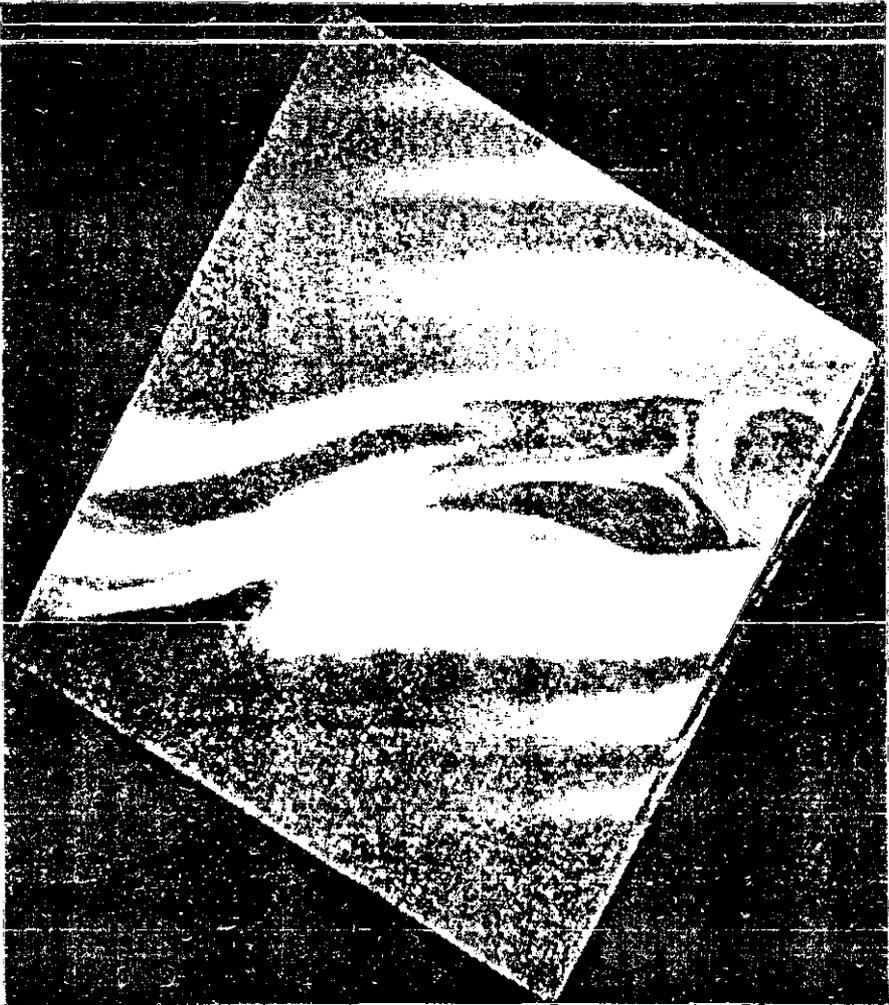


Figura 50.  $D=5.0$  mm  $Re=58$

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se investigó la estela que se forma cuando un cilindro se coloca en un fluido viscoso que se mueve con velocidad constante dentro de un túnel de viento, para números de Reynolds entre 8 y 70. Se encontró que para los cilindros de diámetros 2.6, 3.3 mm y números de Reynolds en el intervalo  $8 \leq Re \leq 50$  se forma una zona de recirculación (par de vórtices) que queda pegada al cilindro y sus dimensiones van cambiando cuando aumenta el número de Reynolds; estos vórtices se pueden apreciar claramente en las imágenes de las figuras 32 y 33 para el cilindro de 2.6 mm de diámetro, presentados en el capítulo que aborda los resultados. Para Reynolds mayores a 50, la estela se hace inestable, es decir, los vórtices empiezan a oscilar y se desprenden alternadamente de forma ordenada de ambos lados del cilindro, lo cual se muestra en las imágenes de las figuras 35 y 41 para los cilindros de diámetros 2.6 y 5.0 mm, respectivamente.

El número de Reynolds para el que se da la transición no se puede determinar exactamente puesto que no se cuenta con las imágenes adecuadas para ello. Sin embargo podemos decir que en el caso de los cilindros de 2.6 y 3.3 mm, cuando el número de Reynolds es alrededor de 50, los vórtices son estables. En el caso de los cilindros de diámetros 4.4 y 5.0 mm no se puede determinar porque para  $Re=51$  los vórtices están oscilando, faltando imágenes en el intervalo  $44 < Re < 51$ .

Se puede ver también en las figuras 42 y 43 que para los cilindros 6.1 y 7.0 mm de diámetro los vórtices empiezan a oscilar cuando el número de Reynolds es de alrededor de 45.

La técnica de visualización utilizada, ya descrita en el capítulo 3, consistió en iluminar la parte media del túnel de viento con una hoja de luz láser, que es perpendicular al eje del cilindro. Se usó un láser de helio neón de color rojo cuya línea de emisión es de 632 nanómetros, emite de forma continua con potencia de 20 miliwatts. Para hacer visible el flujo se inyectó humo en el plano de la hoja láser; el cual se produce depositando parafina en un alambre de nicrómel que se calienta con una fuente de voltaje de corriente continua hasta lograr la evaporación de la parafina, esto ocurre a los 20 volts aproximadamente.

Para hacer las mediciones se tomaron películas de los patrones de humo en la región vorticiosa, utilizando una cámara de vídeo de 8 mm, que permite ver imágenes cuadro por cuadro a intervalos de 1/30 de segundo, las cuales se digitalizaron; esto hizo posible:

a) Medir la componente de la velocidad en la región de los vórtices, en la dirección del flujo que corresponde al eje x, las figuras 16, 17, 18, 19, 20 y 21 muestran las gráficas para los diferentes cilindros y en la figura 22 se pueden observar las gráficas de la distribución de velocidad para  $Re=38$  y cilindros de 2.6, 3.3, 4.4 y 5 mm de diámetros.

Se observa también en las figuras 23 y 24 donde se tienen las gráficas de la evolución de la velocidad máxima y de la posición de la velocidad máxima contra el número de Reynolds, que existe en los dos casos una relación lineal entre estas variables; las pendientes son 0.005 y .02 respectivamente.

b) Analizar la evolución de los parámetros geométricos de los vórtices: la longitud de la estela ( $L$ ), la máxima anchura ( $l_{max}$ ), la posición donde se presenta la máxima anchura ( $X_{l_{max}}$ ) las coordenadas de los centros de los vórtices "a" y "b", el ángulo de separación ( $\theta_s$ ), en función del número de Reynolds, para cilindros de diámetros 2.6, 3.3, 4.4, 5.0, 6.1 y 7.0 mm.

En la figura 25 se observa que la longitud  $L$  de la estela varía linealmente con el número de Reynolds. La pendiente es prácticamente la misma en todos los casos, aproximadamente 0.033.

La variación de las coordenadas de los centros de los vórtices en función del número de Reynolds se muestra en las figuras 26 y 27, donde se ve que las gráficas de la coordenada "a" contra el número de Reynolds son rectas que tienen en todos los casos la misma pendiente cuyo valor es de 0.02.

Las curvas que describen la relación entre el ángulo de separación  $\theta_s$  en función del número de Reynolds se pueden observar en la figura 28.

En las figuras 29 y 30 se tienen las gráficas que muestran la relación funcional entre la máxima anchura  $l_{max}$ , la posición donde ocurre esta máxima anchura  $X_{l_{max}}$  y el número de Reynolds, en ambos casos la relación es lineal y las pendientes de las rectas son prácticamente las mismas para todos los cilindros: 0.008 en el primer caso ( $l_{max}$  contra  $Re$ ) y 0.01 en el segundo ( $X_{l_{max}}$  contra  $Re$ ).

c) Se midió también la frecuencia a la cual oscilan y se desprenden los vórtices para los cilindros de 4.4, 5.0 y 6.1 mm de diámetro, calculando posteriormente el número de Strouhal. Éste se graficó contra el número de Reynolds. Las gráficas se pueden ver en la figura 31, donde se muestra que también en este caso los datos se ajustan sobre la misma curva dentro del error experimental.

Con la técnica utilizada en este trabajo se puede medir la velocidad en la zona de recirculación para números de Reynolds relativamente grandes ( $Re \geq 30$ ) y en la parte exterior de los vórtices. En un trabajo posterior se podría determinar la distribución puntual de velocidades en la región de los vórtices usando un canal

de agua y partículas sólidas para marcar la trayectoria del flujo en lugar del túnel de viento. De este modo se podría utilizar una hoja láser PIV (particle-image velocimetry) para la obtención de imágenes. Esta técnica permite tomar fotografías del flujo por medio de una cámara que las transfiere a una computadora donde son analizadas automáticamente y le asigna un vector velocidad a cada punto de la región.

Por medio de esta técnica podría también medirse la velocidad del flujo principal (sin poner cilindro) así como obtener la velocidad a la que se alejan los vórtices del cilindro una vez que se desprenden.

Se podría establecer con mayor exactitud el número de Reynolds para el cual los vórtices empiezan a oscilar y para el que se da la transición a la turbulencia.

## BIBLOGRAFÍA

- [1] Peralta-Fabi, R., 1995. Fluidos: *Apellido de líquidos y gases*. Fondo de Cultura Económica. México.
- [2] Tokaty, G. A., 1971. *A history and philosophy of fluid Mechanics*. Dover Publications, Inc. U.S.A..
- [3] Shames, H. I., 1979. *La mecánica de los fluidos*. McGraw-Hill. México.
- [4] Prandtl, L. y Tietjens, O. G., 1957. *Applied Hydro-and Aeromechanics*. Dover Publications, Inc U.S.A..
- [5] Takami, H. y Keller, H. B. 1969. "Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder". *Phys. Fluids Suppl.* **12**, II 51.
- [6] Dennis, S. C. R. y Chang, G. Z. 1970. "Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100". *J. Fluid Mech.* **42**, 471-489.
- [7] Thom, A 1933. "The flow past circular cylinders at low speeds". *Proc. Roy. Soc. A.* **141**, 651.
- [8] Kovasnay, L. S. G. 1949. "Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers". *Proc. Roy. Soc. A.* **198**, 174-190.
- [9] Taneda, S. 1956a. "Experimental investigation of the wakes behind cylinder and plates at low Reynolds numbers". *J.Phys. Soc. Japan.*, **11**, 302-307.
- [10] Taneda, S. 1956b. "Experimental investigation of the wakes behind a sphere at low Reynolds numbers". *J.Phys. Soc. Japan.*, **11**, 1104-1108.
- [11] Taneda, S. 1965. "Experimental investigation of vortex streets". *J.Phys. Soc. Japan*, **20**, 1714-1721.
- [12] Shair, F. H., Grove, A. S., Petersen, E. E. y Acrivos, A. 1963. "The effect of confining walls on the stability of the steady wake behind a circular cylinder". *J. Fluid. Mech.* **17**, 546-550.
- [13] Grove, A. S., Shair, F. H., Petersen, E. E. y Acrivos, A. 1964. "An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder". *J. Fluid Mech.* **19**, 60-80.
- [14] Nishioka. M. y Sato. H. 1974. "Measurements of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers". *J. Fluid Mech.* **65**, 97-112.
- [15] Coutanceau, M. y Bouard, R. 1977. "Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform traslation". Part 1. Steady flow. *J. Fluid Mech.*, **79-2**, 231-256.

- [16] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M., 1986. Mecánica de Fluidos. *Curso de Física Teórica*. Reverté. España.
- [17] Gerhart, P. M. Gross. R. y Hoohstein. J., 1995. Fundamentos de mecánica de fluidos. Segunda edición. Addison-Wesley. U.S.A..
- [18] Crespo A., 1997. Mecánica de fluidos. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica de Ingenieros Industriales. España.
- [19] Ruiz, Ch. G., 1988. “Estabilidad Hidrodinámica de una capa de fluido descendiendo por un plano inclinado en rotación”. Tesis de licenciatura. FC-UNAM. México.
- [20] Batchelor, G. K., 1994. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Gran Bretaña.
- [21] Levi, E., 1965. Mecánica de los fluidos, Introducción teórica a la hidráulica moderna. Facultad de Ingeniería, UNAM. México.
- [22] Pnueli, D. y Gutfinger, Ch., 1992. Fluid Mechanics. Cambridge University Press. U.S.A..
- [23] Van Dyke, M., 1975. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Parabolic Press. U.S.A..
- [24] Tritton, D. J. 1970. A note on vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **45**, 203-208.
- [25] Hecht, E. y Zajac, A., 1977. Óptica. Fondo Educativo Interamericano. U.S.A..