00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

HIPERESPACIOS QUE SON CONOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

M. en C. MARIA DE JESUS LOPEZ TORIZ

291098

DIRECTOR(A) DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

2001

Introducción

La temática de esta tesis pertenece a la Teoría de Hiperespacios. Los resultados que se presentan en este trabajo, constituyen una aportación para resolver el problema de la clasificación de los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo a un cono.

La Teoría de Hiperespacios tiene sus orígenes alrededor de 1900, cuando la Topología comienza su formalización, con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. En la década de los treinta ya se conocían muchos de los resultados básicos en hiperespacios, principalmente por las aportaciones de Borsuk y Mazurkiewicz. Uno de los trabajos más notables es el artículo de Kelley [15] publicado en 1942, éste puede considerarse la piedra angular de la Teoría de Hiperespacios. En esta referencia se introducen dos de las herramientas principales: *Las funciones de Whitney* y *los arcos ordenados*, las cuales directa o indirectamente son utilizadas en casi todos los trabajos sobre hiperespacios que han aparecido desde entonces. Después de Kelley muchos matemáticos han estudiado los hiperespacios. Los resultados publicados hasta 1978 son compilados por S. B. Nadler, Jr. en su libro *Hyperspaces of sets* [21]. Esta obra de Nadler se convirtió, por las preguntas que se incluyen a lo largo del texto, en un programa para continuar la investigación de los hiperespacios. El estado actual de la teoría se presenta en el libro de reciente publicación *Hyperspaces, fundamentals and recent advances*, cuyos autores son A. Illanes y S. B. Nadler, Jr. [14].

La mayor parte de la teoría de hiperespacios se ha desarrollado para los continuos. Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Dado un continuo X, se considera la colección de todos los subcontinuos de X,

$$C(X) = \{A : A \text{ es subcontinuo de } X\},$$

con la métrica de Hausdorff[1]. Al espacio $C(X)$ con esta métrica se le llama el hiperespacio de los subcontinuos de X. En la literatura también son considerados otros hiperespacios, vea por ejemplo [14, pág. 6], aquí solamente nos ocupamos de $C(X)$. Se conoce que el hiperespacio $C(X)$ es compacto y conexo, es decir, también es un continuo[2].

En términos generales, la teoría trata de analizar cómo las propiedades topológicas del hiperespacio $C(X)$ influyen sobre el continuo X y viceversa. En este sentido, es interesante saber si el hiperespacio tiene alguna estructura topológica conocida. Por ejemplo, en [11, Teorema 3.8] se determinan los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo al producto de dos continuos de dimensión finita. En el trabajo presente analizamos la topología de los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo al cono de un continuo de dimensión finita.

El cono sobre un espacio Z, $Cono(Z)$, es el espacio cociente que se obtiene del producto $Z \times [0, 1]$ al identificar el subconjunto $Z \times \{1\}$ con un punto[3]. Este punto se llama el vértice del cono y se denota por $\nu(Z)$. Al subconjunto $Z \times \{0\}$ se le llama la base del cono y se le denota por $B(Z)$.

[1] vea la Definición 1.16.
[2] vea el Teorema 1.18.
[3] vea la Definición 1.48.

Intuitivamente existen varias similitudes entre la estructura topológica del hiperespacio de un continuo X y la del cono de un continuo Z:

(a) Existen funciones continuas de $C(X)$ sobre el intervalo $[0, 1]$, llamadas funciones de Whitney[1], las cuales *miden* el tamaño de los continuos. Por otra parte, de $Cono(Z)$ sobre el intervalo $[0, 1]$ se tiene definida la proyección natural, la cual *mide la altura* de los puntos en el cono.

(b) Dada una función de Whitney, en $C(X)$ hay un elemento mayor: el continuo X. Por otra parte, en $Cono(Z)$ hay un punto, el vértice $\nu(Z)$, que tiene un papel similar respecto de la proyección sobre el intervalo $[0, 1]$.

(c) $C(X)$ contiene un subespacio homeomorfo al continuo X. Este subespacio consiste de los elementos de menor tamaño en $C(X)$, es decir los que bajo una función de Whitney se corresponden con el valor 0, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Por otro lado, $Cono(Z)$ también contiene una copia homeomorfa de Z, la base del cono $B(Z) = \{(z, 0) : z \in Z\}$, cuyos elementos corresponden con el valor 0 bajo la proyección natural.

(d) Cada elemento en $F_1(X)$ puede unirse mediante un arco ordenado con el elemento X en $C(X)$[2]. Similarmente, cada punto $(z, 0)$ en la base del cono de Z puede unirse con el vértice $\nu(Z)$ mediante el segmento $\{z\} \times [0, 1]$ en $Cono(Z)$.

En esta tesis estamos interesados en la pregunta que sigue, la cual originalmente aparece en [21, Pregunta 8.35]:

[1] vea la Definición 1.30 y el Teorema 1.31.
[2] vea la Definición 1.34 y el Teorema 1.35.

(∗) ¿Para cuáles continuos X existe un continuo de dimensión finita Z tal que $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(Z)$?

Dos casos particulares de la cuestión (∗) han sido bastante estudiados. A continuación formulamos éstos, vea [21, Preguntas 8.11 y 8.12]:

(i) ¿Para cuáles continuos de dimensión finita X existe un homeomorfismo entre $C(X)$ y $Cono(X)$?

(ii) ¿Para cuáles continuos de dimensión finita X existe un homeomorfismo, $h : C(X) \to Cono(X)$ tal que $h(X) = \nu(X)$ y $h(F_1(X)) = B(X)$?

Se dice que X es un continuo *C-H* si $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$. Si además, existe un homeomorfismo con las restricciones que se indican en la pregunta (ii), se dice que X tiene la propiedad cono=hiperespacio. En relación con estos conceptos, los ejemplos más sencillos son el intervalo cerrado $[0, 1]$ y el círculo unitario en el plano S^1. En realidad, estos dos continuos tienen la propiedad cono=hiperespacio[1].

El interés por estudiar los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo a un cono, tiene su origen en un resultado que J. T. Rogers, Jr. presentó en 1971, [24, Teorema 2]: Cualquier solenoide[2] tiene la propiedad cono=hiperespacio. El teorema principal en [24] establece que, si un continuo circularmente encadenable[3] se puede encajar en $\mathbb{R}^2$, entonces su hiperespacio se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Para justificar que este teorema sólo es válido para los continuos que se pueden encajar en el plano,

[1] vea los Ejemplos 3.2 y 3.3 de este trabajo.

[2] para la definición de solenoide vea [22, pág. 21].

[3] la definición de este concepto se encuentra en [14, pág. 187].

Rogers usó esta propiedad de los solenoides, lo cual funciona porque ya se conocía que estos continuos no son encajables en el plano [4], y que sus conos no se pueden encajar en $\mathbb{R}^3$ [2].

Un año después, en 1972, Rogers publica su artículo *The cone=hyperspace property* [25], donde demuestra que los únicos continuos descomponibles[1], de dimensión finita, con la propiedad cono=hiperespacio son el intervalo y el círculo unitario. Más precisamente, Rogers demuestra:

(A) Si un continuo de dimensión finita X tiene la propiedad cono=hiperespacio, entonces X es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ o al círculo S^1 o es un continuo indescomponible tal que cada uno de sus subcontinuos propios no degenerados es un arco, [25, Sección 1].

En relación con este resultado, debemos notar que existen continuos indescomponibles, de dimensión finita, cuyos subcontinuos propios no degenerados son arcos y que, sin embargo, no tienen la propiedad cono=hiperespacio. En [26, Ejemplo 5] se da una idea para construir uno de éstos y en [14, Fig. 55(c), pág. 426] se muestra uno. Actualmente no se conoce una caracterización intrínseca de los continuos con la propiedad cono=hiperespacio. De acuerdo con esto y el resultado en (A), la pregunta (ii) es un problema abierto sólo para la clase de los continuos indescomponibles.

Otros resultados, en torno de la propiedad cono=hiperespacio, aparecieron en 1981, en un artículo de A. M. Dilks y Rogers [5], y en 1983, en un trabajo de D. D. Sherling [27]. En estas dos

[1] vea la Definición 1.10 de este trabajo.

referencias, se dan diferentes condiciones suficientes para que un continuo tenga la propiedad cono=hiperespacio. En particular, en [5, Corolario 12] se demuestra que si un continuo X es el límite inverso[1] de arcos con funciones de ligadura abiertas, entonces X tiene la propiedad cono=hiperespacio, lo cual proporciona un método sencillo para construir continuos con esta propiedad.

Tomando en cuenta el resultado de Rogers que anotamos en (A), Nadler preguntó si un continuo indescomponible de dimensión finita con la propiedad cono=hiperespacio debía ser encadenable o circularmente encadenable, [21, Pregunta 8.14]. En [5, Teorema 6] y [27, pág. 1033] se muestran diferentes ejemplos con los cuales se responde negativamente a esta pregunta.

Por otra parte, en 1999, A. Illanes [12, Teorema 2] demuestra que las condiciones suficientes dadas por Sherling en [27], para la propiedad cono=hiperespacio, también son necesarias. Estas condiciones se refieren a la existencia de ciertas funciones continuas llamadas selecciones[2]. Como una aplicación de este resultado se descubren dos propiedades interesantes de los continuos de dimensión finita con la propiedad cono=hiperespacio: son Whitney estables[3] y, excepto el círculo S^1, estos continuos tienen la propiedad cubriente[4], [12, Corolario 3].

Hasta aquí, hemos presentado, a grandes pasos, el desarrollo de la teoría con respecto de la pregunta (ii). En lo que sigue, comentamos brevemente los resultados que existen en relación

[1] el Capítulo II de [22] expone los resultados básicos de límites inversos de continuos.
[2] vea [14, pág. 363].
[3] vea [14, pág. 428], [21, pág. 434].
[4] vea [14, pág. 253], [21, pág. 417].

con la pregunta (i), es decir, con los continuos C-H. Aunque aquí los mostramos por separado, en estos casos especiales de la pregunta $(*)$ la teoría evolucionó paralelamente.

Podemos considerar que el estudio de los continuos C-H inicia en 1972, con el artículo de Rogers ya comentado [25]. Sea X el continuo que consiste de un círculo S junto con un semirrayo R, que se aproxima a S en forma de espiral. Rogers muestra en [25] que X es un continuo C-H que no tiene la propiedad cono=hiperespacio. Por otro lado, según R. J. Knill [16], se sabía que X no tiene la propiedad del punto fijo. Así, Rogers obtuvo el primer ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio no tiene la propiedad del punto fijo. Usando este último resultado, en [23], se construye un continuo con la propiedad del punto fijo cuyo hiperespacio no tiene la propiedad del punto fijo, lo cual resuelve una pregunta de Knaster, vea [21, pág. 291].

Muchos de los resultados acerca de los continuos C-H, fueron obtenidos por Nadler y Rogers entre 1972 y 1973 en [18], [19], [20] y [26], aunque [20] se publicó en 1977. Posteriormente, en 1995, apareció la contribución de A. Illanes a esta temática en [10]. Los teoremas principales de estas referencias se pueden resumir como sigue:

(B) Existen exactamente ocho continuos C-H hereditariamente descomponibles[1], [20, Teorema 1.1].

(C) Si X es un continuo C-H de dimensión finita que no es hereditariamente descomponible, entonces X contiene un único subcontinuo indescomponible no degenerado, Y, [26,

[1]estos continuos se ilustran en [14, Fig. 20, pág. 63].

Teorema 8]. Además Y tiene la propiedad cono=hiperespacio y $X \setminus Y$ es arco conexo, [10].

De acuerdo con (B), los continuos C-H hereditariamente descomponibles están completamente clasificados. Por otra parte, se deduce de (C) que, si X es un continuo C-H de dimensión finita y es indescomponible, entonces X tiene la propiedad cono= hiperespacio. Este resultado particular apareció primero en [20, Teorema 5.7]. De este modo, para la clase de los continuos indescomponibles, las preguntas (i) y (ii) son la misma y son un problema abierto. Considerando un resultado de Bing [3, Teorema 5], de (C) también se deduce que $dim(X) = 1$, esto fue notado por Nadler en [18] y [19]. Con esto, en términos generales, los resultados anotados en (A), (B) y (C) describen el estado actual de las preguntas (i) y (ii).

El primero en considerar la pregunta (*) en su generalidad fue S. Macías en 1997, [17]. Corrigiendo un error del libro de Nadler[1], S. Macías clasificó completamente los continuos localmente conexos cuyo hiperespacio es un cono de dimensión finita, como sigue:

(D) Sea X un continuo localmente conexo. Entonces $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(Z)$, para algún continuo Z de dimensión finita, si y sólo si X es homeomorfo al intervalo $[0,1]$, o al círculo S^1 o X es un n-odo simple[2], [17, Teorema 4].

Considerando este teorema de S. Macías, Ancel y Nadler en [1, Teorema 6.2], analizan los continuos Z para los cuales

[1] compare (D) con los comentarios en [21, pág. 333].
[2] vea el Ejemplo 1.2 (c) de esta tesis.

$Cono(Z)$ es homeomorfo al hiperespacio de un n-odo simple. Una exposición breve de esto se encuentra en [14, págs. 430-431]. En el marco general de la pregunta $(*)$, estos son los únicos resultados que se han publicado.

En este trabajo consideramos la situación general. Los resultados que se presentan en esta tesis contribuyen a resolver la cuestión $(*)$. Cada uno de nuestros teoremas es un paso para la clasificación de los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo a un cono.

En términos generales nuestras hipótesis son: X es un continuo para el cual existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Denotamos por Y al subcontinuo de X que corresponde, bajo h, con el vértice del cono de Z. Entonces determinamos algunas propiedades de X, analizamos la topología del continuo Y y finalmente estudiamos la estructura topológica del complemento de Y en X. Los resultados obtenidos se resumen en el teorema que sigue:

Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces

(1) $dim(X) = 1$ (Proposición 2.1).

(2) Cada subcontinuo de X que no contiene a Y, es un arco o un punto (Teorema 2.26).

(3) Si X es hereditariamente descomponible, entonces Y es un punto, un arco o una curva cerrada simple (Teorema 3.4).

(4) Si X no es hereditariamente descomponible, entonces Y es indescomponible y no degenerado. Además, Y es el único subcontinuo indescomponible y no degenerado de X (Proposición 3.5).

(5) Si Y es no degenerado, entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio (Teorema 3.20).

(6) Si X es indescomponible, entonces X es homeomorfo a Z. En consecuencia, X tiene la propiedad cono=hiperespacio (Teorema 3.21).

(7) $X \setminus Y$ es localmente conexo (Teorema 4.5).

(8) Cada componente de $X \setminus Y$ es un conjunto arco conexo. Así, cada componente de $X \setminus Y$ es una arco componente (Teorema 4.7).

(9) Cada arco componente de $X \setminus Y$ es un semirayo o un rayo (Teorema 4.9).

(10) $X \setminus Y$ tiene sólo un número finito de arco componentes (Teorema 4.10).

Comparando nuestros resultados con los que comentamos antes, tenemos lo que sigue: el Teorema de Rogers que anotamos en (A) se obtiene de (2), (3) y (4). Los continuos que Nadler determinó en (B) pueden analizarse a la luz de nuestras conclusiones de (1) a (3) y de (7) a (10). Por otra parte, las primeras dos afirmaciones en (C) se obtienen como corolarios de (4) y (5). Finalmente, lo que se establece en la última afirmación en (C) se puede comparar con nuestros resultados de (7) a (10).

Por otro lado, como continuación de esta tesis, en colaboración con A. Illanes encontramos una respuesta a la pregunta (*) en la clase de los continuos hereditariamente descomponibles [13]:

(E) Sea X un continuo hereditariamente descomponible. Supóngase que $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(Z)$, para algún continuo Z de dimensión finita. Entonces X pertenece a una de las clases de continuos descritos en (M1) hasta (M10) en [13]. Recíprocamente, cada uno de los continuos descritos en (M1) a (M10) tienen hiperespacio homeomorfo a un cono de dimensión finita.

Ahora explicaremos cómo organizamos la presentación de nuestros resultados. La tesis está dividida en cuatro capítulos. Aunque el título de cada uno de éstos indica claramente su contenido, algunas palabras al respecto pueden ser pertinentes.

En el Capítulo 1, exponemos los conceptos y resultados básicos de la teoría de continuos, hiperespacios y conos. En esta parte también acordamos la notación. Presentar un trabajo autocontenido es imposible, sin embargo, la finalidad del primer capítulo es lograr, en la medida de lo posible, que tal imposibilidad no dificulte mucho la lectura de nuestros resultados. En estos preliminares, omitimos las demostraciones de algunos resultados. Respecto de esto, la regla general es: si un resultado no tiene demostración entonces ésta se encuentra en algunos de los libros [14], [21], [22] o en algún texto de topología general. En cada una de estas omisiones señalamos una referencia adecuada. Evidentemente un especialista puede iniciar la lectura de esta tesis en el segundo capítulo.

En el Capítulo 2, primero notamos que, con las condiciones que nos interesan, $dim(X) = 1$ y que el *orden* de los n-odos en X está controlado. Con esto y adecuando la herramienta de los *dobleces*, introducida en [11], demostramos que todos los subcontinuos no degenerados de X, que no contienen a Y, son localmente conexos. Después es muy fácil concluir que éstos son gráficas finitas. Más adelante, hacemos un análisis exhaustivo de las propiedades locales del hiperespacio $C(X)$, en los elementos de $F_1(X)$, y comparamos estas propiedades con la topología del cono de Z, en los puntos de la base $B(Z)$. Con esto probamos que los subcontinuos, no degenerados, de X que no contienen a Y son arcos.

En el Capítulo 3, analizamos las propiedades del continuo Y, es decir, del subcontinuo de X al cual le corresponde el vértice del cono de Z. Demostramos que si Y es no degenerado, entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. Para la prueba de esto consideramos dos casos: (i) Y es descomponible, en este caso, de acuerdo con el resultado final del Capítulo 2, los subcontinuos propios no degenerados de Y son arcos. Así, Y es un arco o una curva cerrada simple, de donde se sigue la conclusión. (ii) Y es indescomponible, en este caso, lo primero que demostramos es que Y es el único subcontinuo indescomponible no degenerado de X. Luego, probamos que la imagen de los singulares de Y pertenecen a la base del cono de Z, es decir, $h(F_1(Y)) \subset B(Z)$. Finalmente probamos la igualdad, $h(C(Y)) = Cono(h(F_1(Y)))$, lo cual constituye la parte difícil de este capítulo.

En el último capítulo, estudiamos la estructura topológica del complemento de Y en X. El primero de nuestros resultados en esta parte, establece que $X \setminus Y$ es localmente conexo. Para probar esto, usamos algunos hechos básicos relacionados con la *semifrontera* de un hiperespacio, los cuales aparecen en [9]. Con esto, y considerando que los continuos que no contienen a Y son arcos, determinamos las siguientes propiedades de $X \setminus Y$: las componentes y las arco componentes de $X \setminus Y$ coinciden, cada arco componente de $X \setminus Y$ es un rayo o un semirrayo y, por último, $X \setminus Y$ tiene sólo un número finito de componentes. Con esto terminamos nuestro trabajo.

María de Jesús López Toriz
Facultad de Ciencias, UNAM
Otoño de 2000.

HIPERESPACIOS QUE SON CONOS

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exponemos los resultados básicos de la teoría de continuos, hiperespacios y conos, los cuales utilizaremos en el resto de la tesis.

Como es usual, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ denotan el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales (enteros positivos), respectivamente. Por otro lado, si X es un espacio topológico y $A \subset X$, $Cl_X A$, $int_X(A)$, $X \setminus A$ y $Fr_X(A)$ denotan la cerradura de A, el interior de A, el complemento de A y la frontera de A en el espacio X, respectivamente. Cuando no haya confusión evitamos la referencia al espacio X. Por ejemplo a veces denotamos $int(A)$, etc. La cerradura de A en X en algunas ocasiones se denota por $\overline{A}$. El conjunto vacío se denota por $\emptyset$. El símbolo $|X|$ denota la cardinalidad del conjunto X. La dimensión de un espacio X se denota por $dim(X)$. Si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos $\bigcup \mathcal{A}$, denota la unión de los elementos de $\mathcal{A}$.

1.1 Continuos

1.1 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* de un continuo X es un subespacio de X que también es un continuo. Un *continuo es no degenerado* si contiene más de un punto.

1.2 Ejemplos de continuos. Los siguientes son continuos que aparecerán frecuentemente en este trabajo.

(a) Arco. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Sean A un arco y $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo, entonces decimos que h es una *parametrización* del arco A. Si denotamos $p = h(0)$ y $q = h(1)$, entonces p y q se llaman los *puntos extremos* del arco A.

(b) Curva cerrada simple. Denotamos por S^1 a la circunferencia de radio 1 en el plano, es decir,

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

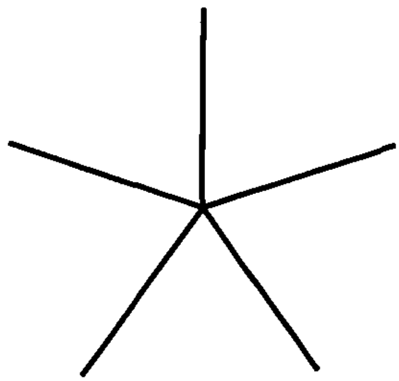
Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1.

(c) n-celda. Dado un número natural n, el producto topológico de n intervalos $[0,1]$ se denota por I^n, es decir

$$I^n = \prod_{j=1}^{n} I_j$$

donde I_j es homeomorfo a $[0,1]$ para cada $j = 1, ..., n$. Una *n-celda* es un espacio homeomorfo a I^n.

(d) n-odo simple. Dado un número natural $n \geq 3$, decimos que un continuo X es un *n-odo simple* si existen n subcontinuos de X, $A_1, ..., A_n$, y un punto $p \in X$ tales que $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, cada A_i es un arco que tiene a p como punto extremo y, si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \{p\}$. Cuando $n = 3$ decimos que X es un *triodo simple* en lugar de 3-odo simple.



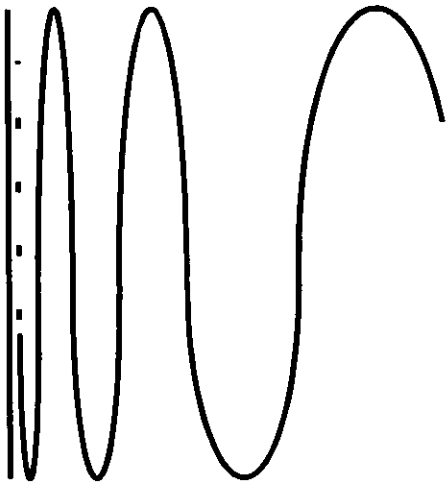
5-odo simple

(e) Continuo $sen\frac{1}{x}$**.** Denotemos por S a la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de la función $sen\frac{1}{x}$ para $x \in (0, 1]$, es decir

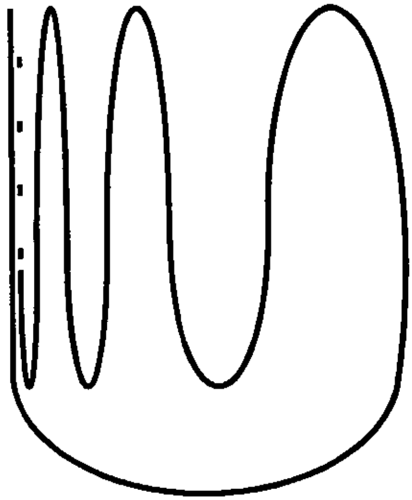
$$S = \{(x, sen\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}.$$

El continuo $sen\frac{1}{x}$ es la cerradura en $\mathbb{R}^2$ del conjunto S.

(f) Círculo de Varsovia. Sea X el continuo $sen\frac{1}{x}$, denotemos por p y q a los puntos $(0, -1)$ y $(1, sen1)$ de X, respectivamente. Sea A un arco en $\mathbb{R}^2$ con puntos extremos p y q tal que $X \cap A = \{p, q\}$. Sea $W = X \cup A$, entonces W es un continuo conocido como el *círculo de Varsovia.*



continuo $sen1/x$



círculo de Varsovia

1.3 Definición. Un espacio X es *localmente conexo* si para cada punto p en X y cada abierto U en X que contiene a p, existe un abierto V en X tal que V es conexo y $p \in V \subset U$.

En el teorema que sigue anotamos una condición equivalente a la conexidad local. Este es un resultado bien conocido de la topología general, su demostración se puede consultar, por ejemplo, en [7, Teorema 3-2]. Usaremos éste en el Capítulo 4, para demostrar el Teorema 4.5.

1.4 Teorema. Un espacio X es localmente conexo si y sólo si para cada conjunto abierto, U, en X y cada componente, C, de U se tiene que C es un conjunto abierto en X.

En [22, Teorema 8.23] se demuestra que todo continuo localmente conexo es arco conexo. Más adelante, utilizando este resultado, en [22, Teorema 8.26] se demuestra que todo conjunto abierto y conexo en un continuo localmente conexo es arco conexo. Aquí resumimos estos dos resultados en el teorema que sigue.

1.5 Teorema. Sea X un continuo no degenerado localmente conexo. Entonces todo conjunto abierto y conexo en X es arco conexo. En particular el continuo X es arco conexo.

A continuación presentamos una condición para determinar cuándo un continuo localmente conexo es un arco o una curva cerrada simple. Este resultado tiene aplicaciones muy importantes en esta tesis, lo usamos en las demostraciones de los Teoremas 2.26 y 3.4 y en la del Lema 3.10.

1.6 Teorema. Sea X un continuo no degenerado localmente conexo. Si X no contiene un triodo simple entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración. Supóngase que X no es un arco. Demostraremos que X es una curva cerrada simple. Existen tres puntos distintos p, q y r en X tales que $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$ y $X \setminus \{r\}$ son subconjuntos conexos de X, ver [22, Teorema 6.17 o Corolario 9.29]. Como estos tres conjuntos son abiertos en X, se sigue del Teorema 1.5 que cada uno de estos tres conjuntos también es arco conexo. Sean A un arco en $X \setminus \{p\}$ con puntos extremos q y r, B un arco en $X \setminus \{q\}$ con puntos extremos p y r y C un arco en $X \setminus \{r\}$ con puntos extremos p y q. Como $p \notin A$, $q \notin B$ y $r \notin C$ y dado que X no contiene triodos simples, se concluye que $A \cup B \cup C$ es una curva cerrada simple en X. Por otro lado, por el Teorema 1.5 X es arco conexo. Luego, si existe un punto x en $X \setminus (A \cup B \cup C)$, considerando un arco D en X con puntos extremos p y x es posible construir un triodo simple contenido en $A \cup B \cup C \cup D$, lo cual es una contradicción.

Entonces $X = A \cup B \cup C$. Hemos demostrado que X es una curva cerrada simple. ■

Uno de los resultados más importantes en la teoría de continuos establece que: si X es un continuo, U un conjunto abierto propio y no vacío de X y K es una componente de U, entonces $\overline{K} \cap Fr(U) \neq \emptyset$ (equivalentemente, $\overline{K} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$). Este resultado, que actualmente se conoce como el Teorema de Golpes en la Frontera, fue obtenido por S. Janiszewski en 1912. Para su demostración recomendamos consultar [22, Teorema 5.7]. Un recuento de las aplicaciones de este teorema a la teoría de hiperespacios y algunos comentarios de carácter histórico se encuentran en [21, Capítulo XX]. Otras aplicaciones aparecen en [22, Capítulo V]. Aquí vamos a exponer una de sus consecuencias en el teorema que sigue, el cual usaremos en varias ocasiones a lo largo de nuestro trabajo. La demostración es una aplicación directa del Teorema de Golpes en la Frontera, vea [22, Corolario 5.5].

1.7 Teorema. Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de X y U un conjunto abierto en X que contiene a A. Entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subset B \subset U$ y $A \neq B$.

Ahora presentamos uno de los conceptos de mayor frecuencia en la terminología de esta tesis. Esta noción abstrae las propiedades básicas de un n-odo simple.

1.8 Definición. Dado un número natural $n \geq 3$, decimos que un continuo X es un *n-odo*, si existe un subcontinuo A de X tal que $X \setminus A$ tiene al menos n componentes.

El lema que sigue es una herramienta importante para la demostración del Teorema 2.8, el cual es uno de los primeros resultados claves de nuestro trabajo.

1.9 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un número natural $M \geq 3$ tal que X no contiene M-odos. Si A y B son subcontinuos de X entonces $A \cap B$ tiene a lo más $M - 1$ componentes.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa. Entonces la intersección $A \cap B$ tiene por lo menos M componentes. Fijemos M componentes, $C_1, ..., C_M$, de $A \cap B$.

Note que cada componente C_i es un conjunto cerrado, y así un subcontinuo, del continuo B. Existen conjuntos abiertos, $U_1, ..., U_M$, en B tales que, para cada cualesquiera $i, j \in \{1, ..., M\}$, $i \neq j$,

$$C_i \subset U_i \quad \text{y} \quad U_i \cap U_j = \emptyset. \tag{1.1}$$

Por el Teorema 1.7, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, existe un subcontinuo D_i del continuo B que contiene propiamente a C_i y está contenido en el abierto U_i, es decir,

$$C_i \subset D_i \subset U_i \quad \text{y} \quad C_i \neq D_i. \tag{1.2}$$

Pongamos

$$C = A \cup (\bigcup_{i=1}^{M} D_i).$$

Como $C_i \subset A \cap D_i$, entonces $A \cap D_i \neq \emptyset$. Por esto se tiene que C es un subcontinuo de X. Note que

$$C \setminus A = \bigcup_{i=1}^{M} (D_i \setminus A). \tag{1.3}$$

Observe que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $\overline{D_i \setminus A} \subset U_i$. Luego, como $U_i \cap U_j = \emptyset$, vea (1.1), se obtiene que

$$\overline{D_i \setminus A} \cap \overline{D_j \setminus A} = \emptyset \quad \text{si } i \neq j. \tag{1.4}$$

Ahora vamos a demostrar que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$,

$$D_i \setminus A \neq \emptyset. \tag{1.5}$$

Para demostrar (1.5), supóngase por el contrario, que $D_i \setminus A = \emptyset$ para algún $i \in \{1, ..., M\}$. Entonces $D_i \subset A$. Luego, puesto que $D_i \subset B$, se tiene que $D_i \subset A \cap B$. Sea D la componente de $A \cap B$ que contiene a D_i. Como $C_i \subset D_i$ y C_i es una componente de $A \cap B$, se tiene que $C_i = D$. Así, $D_i \subset C_i$ y se concluye que $D_i = C_i$. Esto es una contradicción, vea (1.2). Con esto hemos demostrado (1.5).

De (1.3), (1.4) y (1.5), se sigue que C es un M-odo en X, lo cual contradice una de las hipótesis. Esto demuestra el Lema 1.9. ■

1.10 Definición. Un continuo X es *descomponible*, si existen subcontinuos propios, A y B, de X tales que $X = A \cup B$. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Un continuo es *hereditariamente descomponible* si todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles.

1.11 Definición. Sean X un continuo y p un punto de X. La *composante* de p en X es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p, ésta se denota por $\kappa(p)$. Es decir,

$$\kappa(p) = \bigcup \{A : A \text{ es subcontinuo propio de } X \text{ y } p \in A\}.$$

Cuando decimos κ *es una composante de un continuo* X debemos entender que $\kappa = \kappa(p)$ para algún punto p en X. Es claro que una composante es un subconjunto conexo de X. También se sabe que cada composante es un conjunto denso en X. Establecemos esto en la proposición que sigue, ver [22, pág. 83].

1.12 Proposición. Sea X un continuo no degenerado y p un punto de X. Entonces la composante de p en X, $\kappa(p)$, es un subconjunto denso de X.

Con el concepto de composante se puede caracterizar a los continuos indescomponibles (y así a los descomponibles), como establecemos en el teorema que sigue. Una demostración de este resultado se puede consultar en el libro de Nadler [22, Teoremas 11.13, 11.15 y 11.17].

1.13 Teorema. Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es indescomponible si y sólo si X tiene una cantidad no numerable de composantes. Además, en este caso, cualesquiera dos composantes diferentes son conjuntos ajenos.

1.14 Lema. Sean X un continuo indescomponible, A un subcontinuo propio no degenerado de X y κ la composante de A en X. Entonces para todo $a \in A$, existe una sucesión, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contenida en $\kappa \setminus A$ que converge al punto a.

Demostración. Sean $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Como X es indescomponible, se tiene que $intA = \emptyset$, ver [7, Teorema 3-41], entonces $B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus A$ es un conjunto abierto no vacío. Por la densidad de la composante κ, ver la Proposición 1.12, existe $a_n \in \kappa \cap (B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus A)$. Entonces la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a. ∎

La proposición que sigue es esencialmente un resultado de conexidad en topología general, aunque aquí lo presentamos en el contexto de los continuos. Su demostración la puede ver en [22, Proposición 6.3]. Usaremos este resultado en el Capítulo 4, en las demostraciones de los Teoremas 4.9 y 4.10.

1.15 Proposición. Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Si C es una componente de $X \setminus A$, entonces $A \cup C$ es un subcontinuo de X.

1.2 Hiperespacios

1.16 Definición de hiperespacio. Dado un continuo X la colección de todos los subcontinuos de X se denota por $C(X)$, es decir

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es subcontinuo de } X\}.$$

Sea d una métrica para el continuo X. Dados un punto $x \in X$ y un número $\varepsilon > 0$, la ε-bola en X con centro en x y radio ε se denota por $B_\varepsilon(x)$ y, como es usual, es definida por

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Por otra parte, si A es un subconjunto de X la ε-vecindad de A en X se denota por $N(\varepsilon, A)$ y es definida como la unión de todas las ε-bolas con centro en cada punto de A, es decir

$$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a). \tag{1.6}$$

Ahora, para cada pareja, A y B, de elementos de $C(X)$ se define

$$H(A, B) = \textit{ínf}\, \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}. \tag{1.7}$$

Con la asignación establecida en (1.7) se define una métrica, H, para $C(X)$, una demostración de esto se puede ver en [14, Teorema 2.2], [21, Teorema 0.2] o [22, Teorema 4.2]. La métrica H es conocida como la *métrica de Hausdorff*. El espacio $C(X)$ con esta métrica se llama el *hiperespacio de los subcontinuos de* X o simplemente el hiperespacio de X.

1.17 Observación. Sean X un continuo, $A, B \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. En consecuencia, si $\eta = H(A, B)$, entonces $A \not\subset N(\eta, B)$ o $B \not\subset N(\eta, A)$.

Para demostrar esto, primero supóngase que $H(A, B) < \varepsilon$. De la definición $H(A, B)$, se sigue que existe un número $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Ahora, por la definición de ε-vecindad de un conjunto (ver (1.6)), se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y, por lo mismo, $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Así, obtenemos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Para demostrar el recíproco primero note que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. De aquí y la hipótesis, se sigue que $B \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. Luego, puesto que B es compacto, existen $\delta_1, ..., \delta_n$, tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, A)$. Pongamos $r_1 = máx\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Entonces $0 < r_1 < \varepsilon$ y $B \subset N(r_1, A)$. Análogamente, existe un número r_2 tal que $0 < r_2 < \varepsilon$ y $A \subset N(r_2, B)$. Finalmente, sea $r = máx\{r_1, r_2\}$. Se tiene que $0 < r < \varepsilon$, $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. De aquí se sigue que $H(A, B) \leq r < \varepsilon$. Esto completa la justificación de la primera parte en la Observación 1.17. La segunda parte se sigue directamente de la primera parte.

En general, en la literatura, además de $C(X)$, también son considerados otros hiperespacios, es decir otras colecciones de subconjuntos con la métrica de Hausdorff (ver [14] y [21]). En este trabajo sólo tratamos con el hiperespacio de los subcontinuos de un continuo.

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios establece que $C(X)$ es un continuo para cada continuo X. Anotamos éste en el teorema que sigue, aunque omitimos su demostración. La prueba de la compacidad de $C(X)$ se puede consultar en [14, Corolario 3.7], [21, Teorema 0.8] y [22, Teorema 4.13], notamos que estas tres pruebas son diferentes. En relación con la conexidad de $C(X)$, en realidad se conoce que, para cualquier continuo X, el hiperespacio $C(X)$ es arco conexo, la demostración de este hecho aparece en [14, Teorema 14.9] y [21, Teorema 1.12], compare esto con lo que establecemos más adelante en el Teorema 1.35 y en la Observación 1.36.

1.18 Teorema. Para cada continuo X el hiperespacio $C(X)$ es un continuo.

1.19 El hiperespacio de $C(X)$. De acuerdo con el Teorema 1.18, para cada continuo X podemos considerar la Definición 1.16 iniciando con el continuo $C(X)$ en lugar del continuo X. Así obtenemos $C(C(X))$, el hiperespacio de los subcontinuos de $C(X)$,

$$C(C(X)) = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es un subcontinuo de } C(X)\}.$$

Éste tiene la métrica de Hausdorff determinada por la métrica H en $C(X)$. Esta métrica en $C(C(X))$ la denotamos por H^2. Claro que por el Teorema 1.18, $C(C(X))$ también es un continuo. Esta operación de construir el hiperespacio de un hiperespacio se puede continuar inductivamente.

1.20 Observación. Sea X un continuo. Definimos una función de X en su hiperespacio $C(X)$, $F_1 : X \to C(X)$, como sigue:

$$F_1(x) = \{x\}, \quad \text{para cada } x \in X.$$

No es difícil demostrar que F_1 es una isometría. Es decir el conjunto

$$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$$

es una copia isométrica de X en $C(X)$. Así, cuando sea conveniente, se puede considerar que X es un subcontinuo de $C(X)$, identificando X con $F_1(X)$.

En lo que sigue vamos a ver que la topología inducida por la métrica de Hausdorff en $C(X)$ se puede describir mediante los conjuntos abiertos del continuo X. Para esto necesitamos la siguiente notación.

1.21 Notación. Para cualquier colección finita, $S_1, ..., S_n$, de subconjuntos de un continuo X, denotamos

$$\langle S_1, ..., S_n \rangle = \{A \in C(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}.$$

En particular, si S es un subconjunto de X denotamos $\langle S \rangle = \{A \in C(X) : A \subset S\}$.

La demostración del teorema que sigue se puede consultar en [22, Teorema 4.5].

1.22 Teorema. Sea X un continuo. Pongamos

$$\mathfrak{C} = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto en } X, i \in \{1, ..., n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $\mathfrak{C}$ es una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $C(X)$.

De la definición de la colección $\mathfrak{C}$ en el Teorema 1.22, se concluye que la topología de $C(X)$ no depende de la métrica de X. De aquí se sigue que, si X y Y son continuos homeomorfos, entonces sus hiperespacios, $C(X)$ y $C(Y)$, también son homeomorfos.

Ahora vamos a explicar que la convergencia de sucesiones en el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X se puede interpretar en términos de la convergencia de sucesiones de puntos en el continuo X. Para esto consideramos la siguiente definición.

1.23 Definición. Sea X un espacio topológico. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$, decimos que el *límite de los conjuntos* A_i es A y escribimos $lím A_i = A$ cuando se satisfacen las condiciones siguientes:

(1) para cada punto $x \in A$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in A_i$ y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en X al punto x, y

(2) para cada sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < \cdots$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$ $(k \in \mathbb{N})$, si la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en X a un punto x entonces $x \in A$.

1.24 Lema. Sean X un continuo, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de X y $A \subset X$. Si $lím A_i = A$, entonces A es un subcontinuo de X.

Demostración. Primero observemos que cada A_i es un continuo y así $A_i \neq \emptyset$, sea $x_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De la compacidad de X, se sigue que existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en X a un punto $x \in X$. De aquí y de la condición (2) en la Definición 1.23, se concluye que

$$A \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Ahora vamos a demostrar que A es un conjunto cerrado, y así compacto en X. Para esto sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de A convergente, en X, a un punto $a \in X$. Debemos demostrar que $a \in A$. Existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d(a, a_{n_k}) < \tfrac{1}{2^{k+1}}. \tag{1.9}$$

Por otra parte, de la condición (1) en la Definición 1.23, se deduce que existe una sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < \cdots$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$ $(k \in \mathbb{N})$, tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d(a_{n_k}, x_{n_k}) < \tfrac{1}{2^{k+1}}. \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10), se sigue que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d(a, x_{n_k}) < \tfrac{1}{2^k}.$$

Esto significa que la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge, en X, al punto $a \in X$. De la condición (2) en la Definición 1.23, se obtiene que $a \in A$. Con esto hemos demostrado que

$$A \text{ es un subconjunto compacto de } X. \tag{1.11}$$

Ahora veremos que A es un conjunto conexo. Para esto supóngase lo contrario. Entonces $A = H \cup K$, donde H y K son subconjuntos cerrados de A tales que

$$H \cap K = \emptyset, \ \ H \neq \emptyset \ \text{ y } \ K \neq \emptyset. \tag{1.12}$$

Como A es un conjunto cerrado de X (ver (1.11)), se tiene que H y K son conjuntos cerrados, y disjuntos, de X. Entonces, por normalidad, existen conjuntos abiertos, U y V, de X tales que

$$H \subset U, \quad K \subset V \ \text{ y } \ \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset. \tag{1.13}$$

Como $A = H \cup K$, de (1.12) y (1.13), se sigue que

$$A \in \langle U, V \rangle. \tag{1.14}$$

Vamos a demostrar que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_i \subset U \cup V \quad \text{para todo } i \geq N_1. \tag{1.15}$$

Si tal número $N_1 \in \mathbb{N}$ no existe, entonces existe una sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < \cdots$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$ tales que

$$x_{i_k} \notin U \cup V \ \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que, la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Como $x_{i_k} \in A_{i_k}$, de la condición (2) de la Definición 1.23, se tiene que $x \in A$. Por otro lado, como $X \setminus (U \cup V)$ es cerrado en X, de (1.14), se sigue que $x \notin U \cup V$. Luego, por (1.16), $x \notin A$. Esto es una contradicción. Con esto (1.15) está demostrado.

Ahora, fijemos un punto $p \in H$. Entonces $p \in A$. Luego, por la condición (1) en la Definición 1.23, existen puntos $x_i \in A_i$ ($i \in \mathbb{N}$), tales que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en X al punto p. Como $H \subset U$, $p \in U$ y así, existe un número $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq N_2$, $x_i \in U$. De aquí se sigue que

$$A_i \cap U \neq \emptyset \ \text{ para todo } i \geq N_2. \tag{1.17}$$

Análogamente, tomando un punto (auxiliar) $q \in K$, se demuestra que existe un número $N_3 \in \mathbb{N}$, tal que

$$A_i \cap V \neq \emptyset \quad \text{para todo } i \geq N_3. \tag{1.18}$$

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq máx\{N_1, N_2, N_3\}$. De (1.15), (1.17) y (1.18), se sigue que

$$A_i \subset U \cup V, \ \ A_i \cap U \neq \emptyset \ \text{y} \ A_i \cap V \neq \emptyset.$$

Esto último contradice la conexidad de A_i. Con todo esto hemos demostrado que

$$A \ \text{es un subconjunto conexo de } X. \tag{1.19}$$

De (1.8), (1.11) y (1.19), se tiene que A es un subcontinuo de X. Con esto el Lema 1.24 está demostrado. ■

1.25 Teorema. Sean X un continuo, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de X y $A \subset X$. Entonces $límA_i = A$ si y sólo si la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge, en el hiperespacio $C(X)$, al elemento $A \in C(X)$.

Demostración. Supóngase que $límA_i = A$. Por el Lema 1.24, se tiene que $A \in C(X)$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge en el espacio $C(X)$ al elemento A. Para esto fijemos una colección finita, $U_1, ..., U_n$, de conjuntos abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$ (ver Teorema 1.22). Demostraremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_i \in \langle U_1, ..., U_n \rangle \quad \text{para todo } i \geq N. \tag{1.20}$$

Fijemos un elemento $j \in \{1, ..., n\}$ y un punto $x \in A \cap U_i$. De la condición (1) de la Definición 1.23, se sigue que existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge en X al punto x y tal que $x_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U_j$ para todo $i \geq N_j$. Esto significa que, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ para todo } i \geq N_j. \tag{1.21}$$

Por otra parte, con un argumento similar al utilizado en (1.15) de la demostración del Lema 1.24, se demuestra que la condición (2) de la Definición 1.23 y la compacidad del conjunto $X \setminus (\bigcup_{j=1}^{n} U_j)$ implican que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \text{ para todo } i \geq N_0. \tag{1.22}$$

De (1.21) y (1.22), se sigue que con $N = máx\{N_0, N_1, ..., N_n\}$ se satisface (1.20). Lo cual demuestra que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento A.

Ahora vamos a demostrar el recíproco. Supóngase que la sucesión $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en el hiperespacio $C(X)$ al elemento A. Demostraremos que se cumplen las condiciones (1) y (2) de la Definición 1.23.

Para demostrar la condición (1) de la Definición 1.23, fijemos un punto $x \in A$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in A_i$ tal que

$$d(x, x_i) = dist(x, A_i), \tag{1.23}$$

donde d es una métrica en X y $dist(x, A_i) = ínf\,\{d(x, a) : a \in A\}$. El punto $x_i \in A_i$ que satisface (1.23) existe porque A_i es compacto y la función $dist : A_i \to \mathbb{R}$ dada por $dist(a) = d(x, a)$, para cada $a \in A_i$, es una función continua. Demostraremos que

$$\text{la sucesión } \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ converge en } X \text{ al punto } x \in A. \tag{1.24}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq N$, $H(A, A_i) < \varepsilon$. Por la Observación 1.17, para cada $i \geq N$, existe un punto $a_i \in A_i$ tal que $d(x, a_i) < \varepsilon$. Por (1.23), se tiene que $d(x, x_i) \leq d(x, a_i)$, $i \geq N$. Luego, para todo $i \geq N$, $d(x, x_i) < \varepsilon$. Esto demuestra (1.24). Así la condición (1) de la Definición 1.23 está demostrada.

Resta demostrar la condición (2) de la Definición 1.23. Para esto consideremos una sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < \cdots$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), tales que la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en X a un punto $x \in X$. Debemos demostrar que $x \in A$. Supóngase que $x \notin A$. Sea U un conjunto abierto en X tal que $A \subset U$ y $x \notin \overline{U}$. Se tiene que $\langle U \rangle$ es un abierto en $C(X)$ tal que $A \in \langle U \rangle$. Luego, por hipótesis, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \langle U \rangle$ para todo $i \geq N_1$. Como $i_k \geq k$, entonces $A_{i_k} \in \langle U \rangle$ para todo $k \geq N_1$. De aquí se sigue que $x_{i_k} \in U$ para todo $k \geq N_1$. Como la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto $x \in X$, se tiene que $x \in \overline{U}$. Esto contradice la elección del conjunto U, lo cual demuestra que $x \in A$. Con esto hemos demostrado la condición (2) de la Definición 1.23. Con todo tenemos que $\textit{lím} A_i = A$. ■

1.26 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $C(X)$ que convergen a los elementos A y B, respectivamente. Se tiene que:

(1) si $A_i \subset B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$, y

(2) si $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$. Además, con esta hipótesis, $\{A_i \cup B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge al elemento $A \cup B$.

Demostración. Para ver (1), sea $x \in A$. Por el Teorema 1.25, $lím A_i = A$. Luego, por la condición (1) de la Definición 1.23, existen puntos $x_i \in A_i$ ($i \in \mathbb{N}$), tales que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en X al punto x. Por hipótesis, $x_i \in B_i$ ($i \in \mathbb{N}$), ahora por la condición (2) de la Definición 1.23, se tiene que $x \in B$. Esto demuestra que $A \subset B$.

Demostraremos (2). Para la primera parte, por hipótesis, podemos fijar, para cada $i \in \mathbb{N}$, un punto $x_i \in A_i \cap B_i$. De la compacidad de X se tiene que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Como $lím A_i = A$ y $lím B_i = B$, se sigue de la condición (2) en la Definición 1.23 que $x \in A \cap B$. Así $A \cap B \neq \emptyset$.

Para demostrar la segunda parte de (2), primero note que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cup B_i \in C(X)$ y $A \cup B \in C(X)$. Vamos a demostrar que $lím(A_i \cup B_i) = A \cup B$ justificando las condiciones (1) y (2) de la Definición 1.23. Para esto fijemos un punto $x \in A \cup B$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $x \in A$. Entonces como $lím A_i = A$, existen puntos $x_i \in A_i \subset (A_i \cup B_i)$ ($i \in \mathbb{N}$), tales que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge al punto x. Esto demuestra la condición (1) de la Definición 1.23.

Ahora, consideremos una sucesión de números naturales $i_1 < i_2 < \cdots$ y puntos $x_{i_k} \in A_{i_k} \cup B_{i_k}$ ($k \in \mathbb{N}$), tales que la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Debemos demostrar que $x \in A \cup B$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{i_k} \in A_{i_k}$ o $x_{i_k} \in B_{i_k}$. Luego, existe una subsucesión $\{x_{i_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_{i_{k_j}} \in A_{i_{k_j}}, \text{ para toda } j \in \mathbb{N} \quad \text{o} \quad x_{i_{k_j}} \in B_{i_{k_j}}, \text{ para toda } j \in \mathbb{N}.$$

En cualquier caso, como $\{x_{i_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge al punto x, se tiene que $x \in A$ o $x \in B$. Así $x \in A \cup B$. Esto demuestra la condición (2) de la Definición 1.23. Con todo se tiene que $\lim(A_i \cup B_i) = A \cup B$. ■

Para una demostración del teorema que sigue, vea [21, Lema 1.49], donde se demuestra un resultado más general.

1.27 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que Λ es un subcontinuo de $C(X)$, entonces $\bigcup \Lambda$ es un subcontinuo de X.

1.28 La función unión. De acuerdo con el Teorema 1.27 podemos definir una función de $C(C(X))$ en $C(X)$ asignando a cada elemento de $C(C(X))$ la unión de sus elementos, denotamos esta función por $\bigcup$ y la llamamos la *función unión*. Formalmente

$$\bigcup : C(C(X)) \to C(X)$$

es definida por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, para cada $\mathcal{A} \in C(C(X))$.

Observe que, para cada $A \in C(X)$,

$$\{A\} \in C(C(X)) \quad \text{y} \quad \bigcup\{A\} = A.$$

Esto tiene como consecuencia que la función unión es suprayectiva. En el teorema que sigue establecemos que la función unión es continua. En [21, Lema 1.48] se demuestra que esta función es no *expansiva*, esto es, para cualesquiera elementos, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, de $C(C(X))$ se tiene que

$$H(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}) \leq H^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

De aquí, se sigue la continuidad de la función unión. Anotamos esto en el resultado que sigue.

1.29 Teorema. Para cada continuo X la función unión, definida en 1.28, es una función continua.

1.30 Definición. Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ tal que

(1) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$ y

(2) si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $A \neq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Otro de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios garantiza la existencia de funciones de Whitney para $C(X)$, para cualquier continuo X. Anotamos este resultado en el teorema que sigue. La demostración de este resultado se debe a Hassler Whitney, quien en 1933 fue el primero en construir este tipo especial de funciones en espacios de conjuntos, ver [28]. Sin embargo, el primero en utilizar estas funciones, ahora llamadas funciones de Whitney, para el estudio de los hiperespacios fue John L. Kelley en 1942, ver [15]. Desde entonces muchos autores han estudiado las relaciones entre las funciones de Whitney y la topología de los hiperespacios, para un recuento de esto se puede revisar el Capítulo XIV de [21] y también los Capítulos IV sección 13, VII, VIII y IX de [14]. En particular en esta última referencia se presenta una demostración del teorema que sigue, ver [14, Teorema 13.4].

1.31 Teorema. Si X es un continuo entonces existe una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$.

1.32 Observación. Sea X un continuo no degenerado. Si μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\mu' : C(X) \to [0,1]$ definida por

$$\mu'(A) = \frac{1}{\mu(X)}\mu(A), \quad \text{para todo } A \in C(X),$$

también es una función de Whitney. De este modo, cuando sea necesario, podremos suponer que el valor de una función de Whitney en X es igual a 1.

Note que si $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C(X)$ y μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\mu(\mathcal{C})$ es un subconjunto compacto en el intervalo $[0, \mu(X)]$. Así $\mu(\mathcal{C})$ contiene un elemento máximo y un elemento mínimo. Esto significa que existen elementos A_1 y A_2 de $\mathcal{C}$ tales que, para todo $A \in \mathcal{C}$,

$$\mu(A_1) \leq \mu(A) \leq \mu(A_2).$$

De aquí y de la segunda condición de la definición de función de Whitney, Definición 1.30, se sigue que no existe un elemento en $\mathcal{C}$ contenido propiamente en A_1. Análogamente se deduce que A_2 no está contenido propiamente en ningún elemento de $\mathcal{C}$. Esto justifica lo que se establece en la proposición siguiente.

1.33 Proposición. Sea X un continuo. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $C(X)$ entonces, respecto de la inclusión de conjuntos, $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal y un elemento minimal.

Una herramienta bastante útil, probablemente la más útil, en el estudio de la estructura topológica de los hiperespacios es el concepto de *arco ordenado*. El primero que consideró formalmente esta noción fue Mazurkiewicz en 1932, vea [14, pág. 116].

Aunque antes, él y Borsuk, en un trabajo conjunto publicado en 1931, establecieron las ideas principales de la demostración del importante teorema de existencia que presentamos a continuación, vea [21, Comentarios 1.10 y 1.14].

1.34 Definición. Sea X un continuo. Un *arco ordenado* en $C(X)$ es un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que para cualesquiera elementos A y B de $\mathcal{A}$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Si H y K denotan los puntos extremos de un arco ordenado $\mathcal{A}$ y $H \subset K$, decimos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en $C(X)$, desde H hasta K.

La prueba del teorema que sigue está cuidadosamente presentada, a través de los resultados 14.2 hasta 14.6, en [14].

1.35 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A hasta B.

1.36 Observación. Como un caso particular del Teorema 1.35, se tiene que cualquier elemento A del hiperespacio $C(X)$ de un continuo X se puede unir mediante un arco (ordenado) en $C(X)$ con el elemento X. Esto implica que el hiperespacio, $C(X)$, es un continuo arco conexo para cualquier continuo X.

De acuerdo con la Definición 1.34, un arco ordenado en $C(X)$ está completamente ordenado por la inclusión de conjuntos. El lema que sigue indica que un arco ordenado se puede parametrizar de manera que la parametrización preserva el orden.

1.37 Lema. Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$ desde A hasta B. Entonces existe un homeomorfismo

$\alpha : [0,1] \to \mathcal{A}$ tal que si $s, t \in [0,1]$ y $s < t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$. En particular, $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney para $C(X)$. De la condición (2) en la Definición 1.30 se sigue que, la restricción de μ al arco ordenado $\mathcal{A}$ es una función inyectiva y además $\mu(A) < \mu(B)$. Entonces la restricción de μ al arco $\mathcal{A}$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{A}$ y el intervalo $[\mu(A), \mu(B)]$. Denotemos por γ al homeomorfismo inverso, es decir, $\gamma = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}$. Ahora, sea $\beta : [0,1] \to [\mu(A), \mu(B)]$ un homeomorfismo tal que $\beta(0) = \mu(A)$ y $\beta(1) = \mu(B)$. Pongamos $\alpha = \beta \circ \gamma$. No es difícil justificar que α satisface las conclusiones en el lema. ∎

Más adelante, en la demostración de los Lemas 1.40 y 1.41, vamos a utilizar la siguiente proposición, la cual tiene una demostración completa en [14, Proposición 18.2]. En [21, Teorema 1.50] se demuestra un resultado más general.

1.38 Proposición. Sea X un continuo indescomponible. Si $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X$ entonces $X \in \mathcal{A}$.

1.39 Notación. Sea X un continuo y Y un subconjunto de X:

(1) $C(Y)$ denota la colección de todos los subcontinuos de X contenidos en Y, es decir, $C(Y) = \{A \in C(X) : A \subset Y\}$.

(2) $C(X,Y)$ denota la colección de todos los subcontinuos de X que contienen a Y, es decir, $C(X,Y) = \{A \in C(X) : Y \subset A\}$. Si Y es un conjunto singular, digamos $Y = \{y\}$, denotamos $C(X,y)$ en lugar de $C(X,\{y\})$.

1.40 Lema. Sea X un continuo indescomponible y Λ un subconjunto de $C(X) \setminus \{X\}$. Entonces Λ es una arco componente de $C(X) \setminus \{X\}$ si y sólo si existe una composante, κ, de X tal que $\Lambda = C(\kappa)$.

Demostración. Sea κ una composante de X. Primero vamos a demostrar que

$$C(\kappa) \text{ es un subconjunto arco conexo de } C(X) \setminus \{X\}. \qquad (1.25)$$

Para esto observe que, como X es indescomponible, $\kappa \neq X$. Luego $X \notin C(\kappa)$ y así $C(\kappa) \subset C(X) \setminus \{X\}$. Sea $p \in X$ tal que $\kappa = \kappa(p)$. Ahora sean A y B elementos distintos de $C(\kappa)$. Por la Definición 1.11, existe un subcontinuo propio de X, C_1, tal que $p \in C_1$ y $A \cap C_1 \neq \emptyset$. Entonces $A \cup C_1$ es un subcontinuo propio de X que contiene al punto p. Análogamente, existe un subcontinuo de X, C_2, tal que $B \cup C_2$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p. Pongamos $C = A \cup C_1 \cup B \cup C_2$. Entonces C es un subcontinuo de X contenido en la composante κ tal que $A \subset C$ y $B \subset C$.

Ahora, considerando arcos ordenados desde A hasta C y desde B hasta C, respectivamente, se puede construir un arco, $\mathcal{A}$, en $C(X)\setminus\{X\}$, con puntos extremos A y B tal que $\mathcal{A} \subset C(\kappa)$, vea el Teorema 1.35. Por lo tanto, $C(\kappa)$ es arco conexo. Con esto hemos demostrado (1.25).

Ahora vamos a demostrar que

$$C(\kappa) \text{ es una arco componente de } C(X) \setminus \{X\}. \qquad (1.26)$$

De acuerdo con (1.25), para tener (1.26), sólo resta demostrar $C(\kappa)$ es un subconjunto arco conexo maximal de $C(X) \setminus \{X\}$. Para esto fijemos un conjunto arco conexo, $\mathcal{C}$, de $C(X) \setminus \{X\}$

tal que $C(\kappa) \subset \mathcal{C}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{C} \subset C(\kappa)$. Sean $E \in \mathcal{C}$ y $F \in C(\kappa)$. Entonces $E, F \in \mathcal{C}$, luego existe un arco $\mathcal{A}$ contenido en $\mathcal{C}$ tal que $E, F \in \mathcal{A}$. Note que $X \notin \mathcal{A}$. Entonces, por la Proposición 1.38, $\bigcup \mathcal{A}$ es un subcontinuo propio de X, además contiene a E y a F, entonces $E \in C(\kappa)$. Por lo tanto $\mathcal{C} \subset C(\kappa)$. Esto demuestra (1.26).

Por otra parte, observe que

$$C(X) \setminus \{X\} = \bigcup \{C(\kappa) : \kappa \text{ es composante de } X\}. \qquad (1.27)$$

Finalmente, de (1.26) y (1.27), se obtiene la equivalencia establecida en el lema. ■

1.41 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Sea B un subcontinuo indescomponible y no degenerado de X. Entonces $C(X) \setminus \{B\}$ tiene una cantidad infinita de arco componentes.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, supóngase que $C(X) \setminus \{B\}$ tiene sólo un número finito de arco componentes.

Por el Teorema 1.13 y el Lema 1.40, se tiene que $C(B) \setminus \{B\}$ tiene una cantidad infinita de arco componentes, cada una de las cuales es de la forma $C(\kappa)$, donde κ es una composante del continuo B. Entonces existe una arco componente, $\mathcal{A}$, de $C(X) \setminus \{B\}$ que contiene una cantidad infinita de arco componentes de $C(B) \setminus \{B\}$. Considerando M como en la hipótesis, elegimos M arco componentes (distintas) de $C(B) \setminus \{B\}$ contenidas en $\mathcal{A}$. Es decir, sean $\kappa_1, ..., \kappa_M$ composantes de B tales que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $C(\kappa_i) \subset \mathcal{A}$.

Observe que $\mathcal{A} \not\subset C(B)$. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{A} \setminus C(B)$. También, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, sea $B_i \in C(\kappa_i)$. Tenemos que A y B_i pertenecen a la misma arco componente, $\mathcal{A}$, de $C(X) \setminus \{B\}$. Entonces, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, existe un arco $\mathcal{L}_i$ contenido en $\mathcal{A}$ con puntos extremos A y B_i. Para cada $i \in \{1, ..., M\}$, consideramos una parametrización

$$\alpha_i : [0,1] \to \mathcal{L}_i$$

tal que $\alpha_i(0) = B_i$ y $\alpha_i(1) = A$. Denotamos

$$t_i = \acute{\imath}nf \{t \in [0,1] : \alpha_i(t) \notin C(B)\}. \tag{1.28}$$

Por la continuidad de α_i y la definición de t_i, se tiene que $\alpha_i(t_i) \in C(B)$. Así, $\alpha_i([0,t_i])$ es un arco en $C(B) \setminus \{B\}$. Como $B_i \in \alpha_i([0,t_i]) \cap C(\kappa_i)$, se tiene que $\alpha_i([0,t_i]) \subset C(\kappa_i)$. Pongamos, para cada $i \in \{1, ..., M\}$,

$$A_i = \bigcup \{\alpha_i(t) : t \in [0, t_i]\}$$

Note que A_i es un subcontinuo de B tal que $A_i \subset \kappa_i$. Se sigue que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Ahora consideramos, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, un conjunto abierto V_i en X tal que $A_i \subset V_i$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Tenemos que $\langle V_i \rangle$ es un conjunto abierto en $C(X)$, vea el Teorema 1.22. Observe que $\langle V_i \rangle \cap \langle V_j \rangle = \emptyset$ si $i \neq j$. Además, para cada $t \in [0,1]$, $\alpha_i(t) \in \langle V_i \rangle$. Por la continuidad de α_i y la definición de t_i, vea (1.28), existe un número $s_i > t_i$ tal que

$$\alpha_i([0, s_i]) \subset \langle V_i \rangle \quad \text{y} \quad \alpha_i(s_i) \notin C(B). \tag{1.29}$$

Para cada $i \in \{1, ..., M\}$, sea

$$D_i = \bigcup \{\alpha_i(t) : t \in [0, s_i]\}. \tag{1.30}$$

Tenemos que D_i es un subcontinuo de X tal que $D_i \subset V_i$. Ahora sea

$$C = \bigcup_{i=1}^{M} (B \cup D_i).$$

Como $B_i \subset B \cap D_i$, cada conjunto $B \cup D_i$ es un subcontinuo de X, así tenemos que C es un subcontinuo de X. Note que

$$C \setminus B = \bigcup_{i=1}^{M} (D_i \setminus B). \tag{1.31}$$

Por la segunda condición en (1.29), $\alpha_i(s_i) \not\subset B$ y, por (1.30), tenemos que $\alpha_i(s_i) \subset D_i$. De aquí se sigue que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$,

$$D_i \setminus B \neq \emptyset. \tag{1.32}$$

Por otro lado, observe que $\overline{D_i \setminus B} \subset D_i \subset V_i$. Puesto que $V_i \cap V_j = \emptyset$, esto implica que, si $i \neq j$,

$$\overline{D_i \setminus B} \cap \overline{D_j \setminus B} = \emptyset. \tag{1.33}$$

De (1.31), (1.32) y (1.33), se tiene que C es un M-odo en X, lo cual contradice una de las hipótesis. Esto demuestra el Lema 1.41. ∎

Ahora vamos a presentar los resultados que necesitamos en relación con la dimensión de los hiperespacios. El primero de estos es el Lema 1.42, el cual usamos más adelante, para demostrar la Proposición 2.1 y el Teorema 4.10. La prueba de este lema se puede consultar en [21, Teorema 1.100].

1.42 Lema. Sea X un continuo. Si X contiene un n-odo entonces $C(X)$ contiene una n-celda.

En esta tesis usamos el concepto de dimensión de un espacio como se presenta en el libro clásico de Hurewicz y Wallman [8]. De acuerdo con éste la dimensión de un subespacio de un espacio dado es menor o igual que la dimensión del espacio. Luego, según el Lema 1.42, la existencia de n-odos en un continuo X afecta la dimensión del hiperespacio. Usaremos esto en la Proposición 2.1. En esa proposición también vamos a usar el siguiente resultado, el cual es un teorema que puso fin a un importante problema relacionado con la dimensión de los hiperespacios, vea [21, Capítulo II] y [14, Secciones 72 y 73] para comentarios al respecto. Las mejores contribuciones a este problema las dieron J. T. Rogers, Jr. en 1971 y, por otra parte, M. Levin y Y. Sternfeld en 1997. Aquí nos limitamos a enunciar el teorema, la demostración se puede consultar en [14, Teoremas 72.5 y 73.9].

1.43 Teorema. Si X es un continuo tal que $dim(X) \geq 2$, entonces $dim(C(X)) = \infty$.

El resultado que sigue, fundamental para nuestros objetivos, fue obtenido por Kelley en su famoso artículo [15, Teoremas 5.4 y 5.5]. En éste se caracteriza a las *gráficas finitas* en la clase de los continuos localmente conexos, usando la dimensión del hiperespacio. Su demostración también se puede consultar en [21, Teorema 1.109]. Usaremos este resultado de Kelley en la prueba del Teorema 2.11. Antes de enunciarlo damos la definición de gráfica finita.

1.44 Definición. Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como una unión finita de arcos, tales que para cualesquiera dos de ellos se tiene que, son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.

1.45 Teorema. Si X es un continuo no degenerado localmente conexo, entonces $dim(C(X)) < \infty$ si y sólo si X es una gráfica finita.

Finalizamos esta sección de hiperespacios con el Lema 1.47. Este es un resultado más o menos técnico y su enunciado tal vez no sugiere nada. Sin embargo, para nuestro trabajo es de gran utilidad. Lo usaremos para demostrar el Lema 2.15, las Proposiciones 2.18 y 2.21 y el Teorema 3.11. Antes consideramos la notación que sigue.

1.46 Notación. Si A es un subconjunto conexo de un espacio X y U es un subconjunto de X tal que $A \subset U$, a la componente de U que contiene a A la denotamos por $Comp(U, A)$. Si A es un conjunto singular, digamos $A = \{p\}$, denotamos simplemente $Comp(U, p)$.

1.47 Lema. Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Supóngase que U y V son abiertos en X tales que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ y $U \neq X$. Sea $\mathcal{C} = Cl_{C(X)}Comp(\langle V \rangle, A)$. Entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un subcontinuo no degenerado propio de X y $F_1(\bigcup \mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Demostración. Dadas las hipótesis, por el Teorema 1.27, se tiene que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subcontinuo de X.

Ahora, vamos a demostrar que $\bigcup \mathcal{C} \subset U$. Sea $C \in \mathcal{C}$. Note que

$$\mathcal{C} \subset Cl_{C(X)}\langle V \rangle \subset \{B \in C(X) : B \subset \overline{V}\} \subset \langle U \rangle.$$

Entonces $C \in \langle U \rangle$. Dado que U es un subconjunto propio de X, se tiene que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subcontinuo propio de X.

Por otro lado, por el Teorema 1.7, existe $B \in C(X)$ tal que $A \subset B \subset V$ y $A \neq B$. Note que B es continuo no degenerado. Ahora, vamos a demostrar que $B \in \mathcal{C}$. Por el Teorema 1.35 existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C(X)$ desde A hasta B. Note que, para todo $C \in \mathcal{A}$ se tiene que $C \subset B \subset V$. Entonces $\mathcal{A}$ es un arco contenido en $\langle V \rangle$, lo cual implica que $\mathcal{A} \subset Comp(\langle V \rangle, A)$. Se concluye que $B \in \mathcal{C}$. Como B es un continuo no degenerado, obtenemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un continuo no degenerado.

Finalmente, vamos a demostrar que $F_1(\bigcup \mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Para esto sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Note que, si $\{x\} = C$, se tiene la conclusión. Entonces para lo que sigue suponemos que $\{x\} \neq C$. Por la definición de $\mathcal{C}$, existe una sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en $Comp(\langle V \rangle, A)$ que converge a C en $C(X)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $x_n \in C_n$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto x en el continuo X.

Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{el singular } \{x_n\} \in Comp(\langle V \rangle, A).$$

Para esto fijemos un índice $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x\} \neq C$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\{x_n\} \neq C_n$. Por el Teorema 1.35, existe un arco ordenado $\mathcal{A}_n$ desde el singular $\{x_n\}$ hasta el continuo C_n. Note que para todo $D \in \mathcal{A}_n$ se tiene que $D \subset C_n \subset V$. Entonces $\mathcal{A}_n$ es un arco contenido en $\langle V \rangle$, de donde se obtiene que $\mathcal{A}_n \subset Comp(\langle V \rangle, A)$. Se concluye que el singular $\{x_n\}$ es un elemento de $Comp(\langle V \rangle, A)$. Ahora como la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x se tiene que el singular $\{x\}$ es un elemento de la cerradura en $C(X)$ del conjunto $Comp(\langle V \rangle, A)$. Es decir,

$\{x\} \in \mathcal{C}$. Hemos demostrado que

$$F_1(\bigcup \mathcal{C}) \subset \mathcal{C}.$$

Esto finaliza la demostración del Lema 1.47. ■

1.3 Conos

En esta tesis básicamente sólo necesitamos dos resultados en relación con la topología de los conos, los cuales presentamos aquí en los Lemas 1.54 y 1.55. El primero de éstos es un resultado elemental relacionado con la arco conexidad, el segundo se refiere a la dimensión de un cono. Para exponerlos primero presentamos los elementos básicos de la topología de los conos.

Iniciamos con la construcción del cono sobre un espacio, en donde usamos lo que se conoce como topología cociente o topología de identificación. Ésta es una técnica típica de la topología para construir nuevos espacios partiendo de algunos ya dados, la cual se explica en casi todos los libros de topología general. Sin embargo, para los fines de este trabajo, recomendamos ver el Capítulo III del libro de Nadler [22], donde se presenta una exposición concisa de este tema en el marco de la teoría de continuos.

1.48 El cono sobre un espacio. Sea X un espacio topológico. *El cono sobre* X, que denotamos por $Cono(X)$, es el espacio cociente que se obtiene del producto $X \times [0,1]$ al considerar el subconjunto $X \times \{1\}$ como un punto. Es decir, $Cono(X)$ es el espacio que se obtiene considerando la topología cociente en la partición de $X \times [0,1]$ dada por

$$\{X \times \{1\}\} \cup \{\{(x,t)\} : x \in X, \ 0 \leq t < 1\}.$$

Al elemento $X \times \{1\}$ de este espacio cociente lo llamamos el *vértice* de $Cono(X)$ y lo denotamos por $\nu(X)$. Al subconjunto $\{\{(x,0)\} : x \in X\}$ le llamamos la *base* de $Cono(X)$ y lo denotamos por $B(X)$.

1.49 Observación. Considerando la definición de la topología cociente, vea [22, Definición 3.1], no es difícil justificar que el subespacio $Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$ es homeomorfo al producto de X con el intervalo semiabierto $[0,1)$. La correspondencia del elemento $\{(x,t)\}$ con la pareja (x,t) define un homeomorfismo entre $Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$ y $X \times [0,1)$. También es claro que la base $B(X)$ es homeomorfa al espacio X. En general, en este trabajo, no hacemos explícitos estos homeomorfismos.

En el cono sobre un espacio X, hay una manera natural de proyectar el subespacio $Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$ sobre la base $B(X)$. Consideramos esto formalmente en la definición que sigue.

1.50 Definición. Sea X un espacio topológico. La *proyección sobre la base* es la función

$$\pi : Cono(X) \setminus \{\nu(X)\} \to B(X)$$

definida por $\pi(x,t) = (x,0)$ para todo punto $(x,t) \in Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$.

1.51 Observación. Considerando la Observación 1.49, se tiene que la proyección sobre la base es una función continua y abierta.

De acuerdo con la Observación 1.49, si $p = (x,t)$ es un punto en $Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$, entonces $(\{x\} \times [t,1)) \cup \{\nu(X)\}$ es un arco en $Cono(X)$ con puntos extremos p y $\nu(X)$. De aquí se obtiene el lema siguiente.

1.52 Lema. Para cualquier espacio X, el cono sobre X es un espacio arco conexo.

Considerando algunos resultados del libro de Nadler [22, Teorema 3.9 y Ejemplo 3.14], se deduce que el cono sobre cualquier espacio métrico compacto también es un espacio métrico compacto. Por esto y el Lema 1.52, se tiene que el cono sobre cualquier espacio métrico compacto es un continuo. En particular, se tiene el resultado que sigue.

1.53 Teorema. Para cualquier continuo X, el cono sobre X es un continuo.

En el próximo lema contamos las arco componentes de un cono menos un punto que no es el vértice. Usaremos esto en las Proposiciones 2.2 y 3.5 para decidir si algunos subcontinuos de un continuo X son descomponibles o no, donde suponemos que el hiperespacio $C(X)$ es homeomorfo a un cono. Note que lo que establecemos en este lema es válido para cualquier espacio topológico.

1.54 Lema. Sean X un continuo y p un punto en $Cono(X) \setminus \{\nu(X)\}$ entonces $Cono(X) \setminus \{p\}$ tiene a lo más dos arco componentes.

Demostración. Como $p \neq \nu(X)$, entonces $p = (x_0, t_0)$ para algún punto $x_0 \in X$ y algún número $t_0 \in [0, 1)$.

Pongamos $\mathcal{L} = \{x_0\} \times [0, t_0)$. Es claro que $\mathcal{L}$ es un conjunto arco conexo.

Ahora, consideremos dos puntos $p_1 = (x_1, t_1)$ y $p_2 = (x_2, t_2)$, en $(Cono(X) \setminus \{p\}) \setminus \mathcal{L}$. Entonces el conjunto

$$(\{x_1\} \times [t_1, 1)) \cup \{\nu(X)\} \cup (\{x_2\} \times [t_2, 1))$$

es un arco en el complemento de $\mathcal{L}$ en $Cono(X)\setminus\{p\}$ que contiene a los puntos p_1 y p_2. Luego $(Cono(X) \setminus \{p\}) \setminus \mathcal{L}$ es arco conexo. Esto demuestra el lema. ■

Finalizamos este capítulo de resultados preliminares con el lema que sigue. La demostración está completa en [21, Lema 8.0].

1.55 Lema. Si X es un continuo de dimensión finita, entonces $dim(Cono(X)) = dim(X) + 1$.

Capítulo 2

Hiperespacios que son Conos

Consideremos un continuo, X, cuyo hiperespacio es homeomorfo al cono de un continuo de dimensión finita, Z, denotamos por Y al subcontinuo de X cuya imagen, bajo un homeomorfismo dado entre $C(X)$ y $Cono(Z)$, es el vértice del cono de Z. En este capítulo el objetivo principal es demostrar que todos los subcontinuos, no degenerados, de X que no contienen a Y son arcos. En la primera parte demostraremos que éstos son gráficas finitas y después, en la segunda parte, probaremos que tales subcontinuos son arcos, con lo cual completamos nuestro objetivo.

Primero que nada vamos a observar que, bajo las hipótesis planteadas arriba, la dimensión de Z determina dos propiedades relacionadas con la dimensión de X.

2.1 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un continuo de dimensión finita Z tal que $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(Z)$, entonces

(1) $dim(X) = 1$, y

(2) Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos.

Demostración. Para ver (1), note que, como Z tiene dimensión finita, por el Lema 1.55, se tiene que $dim(Cono(Z)) = dim(Z) + 1$. Entonces la dimensión de $C(X)$ es finita. Luego, por el Teorema 1.43, $dim(X) = 1$.

Para demostrar (2), pongamos $M = dim(C(X)) + 1$. Si X contiene un M-odo entonces, por el Lema 1.42, $C(X)$ contiene una M-celda, lo cual implica que $dim(C(X)) \geq M$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, X no contiene M-odos. ∎

2.1 Los elementos no degenerados de $C(X) \setminus C(X,Y)$ son gráficas finitas

Recordamos que $C(X,Y) = \{A \in C(X) : Y \subset A\}$. En esta sección, como indicamos antes, considerando las hipótesis dadas al inicio de este capítulo, vamos a demostrar que los subcontinuos, no degenerados de X que no contienen a Y, es decir los elementos no degenerados de $C(X) \setminus C(X,Y)$, son gráficas finitas. Para este fin, primero vamos a demostrar, en la Proposición 2.3, que estos subcontinuos de X son hereditariamente descomponibles. Luego continuamos con la parte difícil, ésta consiste en demostrar que tales subcontinuos son localmente conexos, hacemos esto en el Teorema 2.10. Después de esto, utilizando el Teorema 1.45, se obtiene fácilmente lo que planteamos.

2.2 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un subcontinuo no degenerado de X y $A \neq Y$, entonces A es descomponible.

Demostración. Sea A un elemento no degenerado de $C(X)\setminus \{Y\}$. Supóngase que A es indescomponible. Entonces, por el Lema 1.41, $C(X)\setminus\{A\}$ tiene una cantidad infinita de arco componentes. Por otro lado, como $h(A)\neq \nu(Z)$, se sigue del Lema 1.54 que, $Cono(Z)\setminus\{h(A)\}$ tiene a lo más dos arco componentes. Lo cual es una contradicción ya que $C(X)\setminus\{A\}$ es homeomorfo a $Cono(Z)\setminus\{h(A)\}$. ■

Si en esta última proposición suponemos que A no contiene a Y, entonces, para cada subcontinuo B de A, se tiene que $B\in C(X)\setminus\{Y\}$. Luego, si B es no degenerado, por la Proposición 2.2, se tiene que B es descomponible. En consecuencia obtenemos el resultado siguiente.

2.3 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h: C(X)\to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y)=\nu(Z)$. Si A es un subcontinuo de X que no contiene a Y, entonces A es hereditariamente descomponible.

Considerando las hipótesis de la última proposición, el objetivo siguiente en esta sección es demostrar que los subcontinuos de X que no contienen a Y son localmente conexos, haremos esto en el Teorema 2.10. Para esto, el elemento clave es el concepto de *doblez*, el cual presentamos en la Definición 2.5.

La noción de doblez fue introducida por Alejandro Illanes en 1997 en [11], la cual utilizó como una herramienta para caracterizar a los continuos cuyo hiperespacio es homeomorfo a un producto. Actualmente, los resultados en [11] también estan incluidos en [14, Sección 79]. En la definición de doblez usamos la notación que sigue.

2.4 Notación. Denotaremos por $\mathbf{P}^*$ y por $\mathbf{P}$ a los subconjuntos del plano, $\mathbb{R}^2$, definidos por

$$\mathbf{P}^* = J \cup (\bigcup\{J_n : n \geq 1\}) \quad \text{y} \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^* \cup J_0$$

donde $J = [0,1] \times \{0\}$, $J_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ y $J_0 = \{0\} \times [0,1]$.

Para cada punto $p = (x,0) \in J$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $p_n = (x, \frac{1}{n})$.

2.5 Definición. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que X tiene un *doblez* en el punto x si existe una función continua $f : \mathbf{P} \to X$ tal que $f(0,0) = x$ y, para cada punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$, existe un abierto U en X tal que

$$f(p) \in U \quad \text{y} \quad Comp(U, f(p)) \cap \{f(p_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

El teorema que sigue indica que, para ciertos continuos, la no conexidad local implica la existencia de algún doblez en el hiperespacio. En realidad, el recíproco también es cierto, pero aquí sólo mencionamos la implicación que usaremos. Este teorema se debe a Illanes [11, Teoremas 1.3 y 2.4]. La demostración también se puede consultar en [14, Teoremas 79.4 y 79.7].

2.6 Teorema. Supóngase que X es un continuo hereditariamente descomponible y que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Si X no es localmente conexo entonces $C(X)$ tiene un doblez en alguno de sus elementos.

El lema que sigue explica que la existencia de cierto tipo de doblez en el hiperespacio implica la existencia de M-odos en el continuo. La demostración de éste está completa en [14, Lema 79.9].

2.7 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que $C(X)$ tiene un doblez en un elemento $A \in C(X)$. Sea $f : \mathbf{P} \to C(X)$ como en la definición de doblez con $f(0,0) = A$. Si $f(1,0)$ no está contenido en A, entonces, para cada $M \geq 1$, X contiene un M-odo.

Adecuando las ideas de la demostración del Teorema 2.5 de [11] al contexto de hiperespacios que son conos, obtenemos el resultado que sigue. En el cual bajo las condiciones que se indican, localizamos un doblez en la base del cono.

2.8 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Sea A un subcontinuo de X que no contiene a Y. Si $C(A)$ tiene un doblez en A_0, entonces Z tiene un doblez en $\pi(h(A_0))$.

Demostración. Pongamos $h(A_0) = (z_0, t_0)$. Vamos a demostrar que Z tiene un doblez en el punto z_0. Como $C(A)$ tiene un doblez en el punto A_0, existe una función continua $f : \mathbf{P} \to C(A)$ con $f(0,0) = A_0$ y tal que para todo $p \in J \setminus \{(0,0)\}$, existe un abierto $\mathcal{U}_p$ de $C(A)$ con

$$f(p) \in \mathcal{U}_p \text{ y } Comp(\mathcal{U}_p, f(p)) \cap \{f(p_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset. \qquad (2.1)$$

Podemos suponer que $\mathcal{U}_p = \langle U_1, U_2, ..., U_l \rangle$, donde U_i es un abierto de A para cada $i \in \{1, ..., l\}$. Para cada $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ sea

(i) $\mathcal{W}_p$ un abierto de $Cono(Z) \setminus \{\nu(Z)\}$ tal que $\mathcal{W}_p \cap h(C(A)) = h(\mathcal{U}_p)$.

Para continuar acordamos la siguiente notación: Para cada $p \in J \setminus \{(0,0)\}$, $h(f(p)) = (z_p, t_p)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $h(f(p_n)) =$

(z_n, t_n). Para cada $j \in \mathbb{N}$, $B_j(z_p)$ es la bola en Z de radio $\frac{1}{j}$ con centro en z_p y $[a_j, b_j]$ es la cerradura de la bola en [0,1) de radio $\frac{1}{j}$ con centro en t_p. Ahora, para cada $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ y cada $j \in \mathbb{N}$ denotamos

$$L_p(j) = \{n \in \mathbb{N} : h(f(p_n)) \in Comp(B_j(z_p), z_p) \times [a_j, b_j]\} \text{ y}$$

$$R_p(j) = \{n \in \mathbb{N} : z_n \in Comp(B_j(z_p), z_p)\}. \tag{2.2}$$

Por otra parte, denotamos $g = \pi \circ h \circ f$. Por hipótesis, el conjunto Y no está contenido en A, luego $\nu(Z) \notin h(C(A))$, entonces la función g está bien definida y es continua. Note que, para cada punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $g(p) = z_p$ y $g(p_n) = z_n$. Además, si $p = (t, 0)$, entonces el conjunto $R_p(j)$ definido en (2.2) se puede escribir como

$$R_p(j) = \{n \in \mathbb{N} : g(t, \frac{1}{n}) \in Comp(B_j(g(p)), g(p))\}. \tag{2.3}$$

Afirmación 1. Para cada $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B_j(z_p)} \times [a_j, b_j] \subset \mathcal{W}_p$ y $R_p(j)$ es un conjunto finito.

Para demostrar la Afirmación 1, fijemos un punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$. Elíjase $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$, $\overline{B_j(z_p)} \times [a_j, b_j] \subset \mathcal{W}_p$. Ahora, vamos a demostrar que existe $j \geq j_0$ tal que el conjunto $L_p(j)$ es finito. Para esto supóngase lo contrario, es decir, supóngase que para todo $j \geq j_0$ el conjunto $L_p(j)$ es infinito.

Para cada $j \geq j_0$ sea

$$T_j = \bigcup\{C \in C(X) : h(C) \in Cl_Z(Comp(B_j(z_p), z_p)) \times [a_j, b_j]\}.$$

Note que T_j es la unión de los elementos del conjunto

$$h^{-1}(Cl_Z(Comp(B_j(z_p), z_p)) \times [a_j, b_j]),$$

el cual es un subcontinuo de $C(X)$. Por lo tanto T_j es un subcontinuo de X.

Como $f(p) \subset T_j \cap A$, se tiene que $T_j \cap A \neq \emptyset$. Por (2) de la Proposición 2.1, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Entonces, por el Lema 1.9, $T_j \cap A$ tiene un número finito de componentes (a lo más $M - 1$). Para cada $j \geq j_0$, sea K_j la componente de $T_j \cap A$ que contiene a $f(p)$.

Note que $\{h^{-1}(Cl_Z(Comp(B_j(z_p), z_p)) \times [a_j, b_j])\}_{j \geq j_0}$ es una sucesión de subcontinuos de $C(X)$ que converge en $C(C(X))$ al elemento $\{f(p)\}$. Luego, por la continuidad de la función unión, se tiene que la sucesión $\{T_j\}_{j \geq j_0}$ converge en $C(X)$ a $f(p)$. Ahora, como $K_j \subset T_j$, y $f(p) \subset K_j$, para cada $j \geq j_0$, se tiene que $\{K_j\}_{j \geq j_0}$ es una sucesión de subcontinuos de A que converge a $f(p)$. Como $\mathcal{U}_p$ es un abierto en $C(A)$ que tiene a $f(p)$, existe $j_1 \geq j_0$ tal que $K_{j_1} \in \mathcal{U}_p$.

Por otra parte, por la definición de $L_p(j)$, para cada $n \in L_p(j_1)$ se tiene que $f(p_n) \subset T_{j_1}$. Luego, como $f(p_n)$ es un subcontinuo de A, se concluye que para cada $n \in L_p(j_1)$, $f(p_n)$ está contenido en alguna componente de $T_{j_1} \cap A$. Ahora, considerando que $L_p(j_1)$ es un conjunto infinito, que la sucesión $\{f(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(p)$ y que $T_{j_1} \cap A$ tiene un numero finito de componentes, se obtiene que $f(p_n) \subset K_{j_1}$ para una infinidad de elementos del conjunto $L_p(j_1)$. Sea $n_1 \in L_p(j_1)$ tal que $f(p_{n_1}) \subset K_{j_1}$.

Considerando arcos ordenados desde $f(p)$ hasta K_{j_1} y desde $f(p_{n_1})$ hasta K_{j_1}, es posible construir un subcontinuo $\mathcal{B}$ de $C(A)$ que tiene como elementos a $f(p)$ y a $f(p_{n_1})$ y tal que, para cada $B \in \mathcal{B}$, $B \subset K_{j_1}$ y $f(p) \subset B$ o $f(p_{n_1}) \subset B$. Tomando en cuenta esta propiedad de los elementos del continuo $\mathcal{B}$ y que $\mathcal{U}_p = \langle U_1, U_2, ..., U_l \rangle$ se obtiene que, para cada $B \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{U}_p$, es decir, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_p$. Hemos obtenido que $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{U}_p$ el cual contiene a $f(p)$ y a $f(p_{n_1})$. Esto significa que $f(p_{n_1}) \in Comp(\mathcal{U}_p, f(p))$, lo cual contradice la elección de $\mathcal{U}_p$, ver (2.1). Esto demuestra que existe $j \geq j_0$ tal que $L_p(j)$ es finito.

Para terminar la demostración de la Afirmación 1, sea $j \geq j_0$ tal que $L_p(j)$ es finito. Como $\{h(f(p_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h(f(p))$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(z_n, t_n) \in B_j(z_p) \times [a_j, b_j]$ para todo $n \geq N$. En particular, $t_n \in [a_j, b_j]$ para todo $n \geq N$. Entonces

$$R_p(j) = \{n \in \mathbb{N} : z_n \in Comp(B_j(z_p), z_p)\}$$

es un conjunto finito, pues de lo contrario se obtiene que $L_p(j)$ es un conjunto infinito en contradicción con la elección de j. Esto demuestra la Afirmación 1.

Ahora, en cada segmento horizontal J_k de la definición del espacio peine $\mathbf{P}$, vamos a considerar el último punto de J_k que, bajo la función g, tiene una imagen común con algún punto del segmento límite J. Recordamos que $g = \pi \circ h \circ f$. Demostraremos que la sucesión constituida por tales puntos converge al origen $(0,0) \in \mathbf{P}$. Formalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$t_k = máx\{t \in [0,1] : g(t, \tfrac{1}{k}) \in g(J)\} \cup \{0\}. \tag{2.4}$$

Afirmación 2. La sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Para demostrar esta segunda afirmación supóngase que lo establecido en ella es falso. Entonces existen una subsucesión $\{t_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un número $t > 0$ tales que $\{t_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a t. Sin perder generalidad podemos suponer que $t_{k_m} > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por la definición de t_k (ver (2.4)), para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un punto $(s_m, 0) \in J$ tal que $g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m}) = g(s_m, 0)$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que la sucesión $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $s \in [0,1]$. Entonces, por la continuidad de la función g, se tiene que la sucesión $\{g(s_m, 0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al punto $g(s, 0)$. Ahora, como $g(s_m, 0) = g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})$ y como la sucesión $\{g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al punto $g(t, 0)$, se concluye que $g(s, 0) = g(t, 0)$.

Denotamos $p_t = (t, 0)$, $p_s = (s, 0)$. Sea $j \in \mathbb{N}$ con el cual se satisface la conclusión en la Afirmación 1 para el punto p_t. En particular, $R_{p_t}(j)$ es un conjunto finito. Como en (2.3), se tiene que

$$R_{p_t}(j) = \{n \in \mathbb{N} : g(t, \tfrac{1}{n}) \in Comp(B_j(g(p_t)), g(p_t)\}.$$

Por la continuidad de g y como $g(p_t) = g(p_s)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$g(B_\delta(p_t)) \subset B_j(g(p_t)) \qquad \text{y}$$

$$g(B_\delta(p_s)) \subset B_j(g(p_t)),$$

donde $B_\delta(p_i)$ es la bola en el espacio peine $\mathbf{P}$ con centro en el punto p_i y radio δ. Por otra parte, recordemos que, $B_j(g(p_t))$ denota la bola en Z con centro en $g(p_t)$ y radio $\frac{1}{j}$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$,

$$\frac{1}{k_m} < \frac{\delta}{2}, \ |t_{k_m} - t| < \frac{\delta}{2} \ \text{ y } \ |s_m - s| < \delta.$$

Fijemos $m \geq N$. Se tiene que

$$g(B_\delta(p_s) \cap J) \ \text{ y } \ g(B_\delta(p_t) \cap J_{k_m})$$

son conjuntos conexos que contienen a los puntos $g(s_m, 0)$ y $g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})$, respectivamente. Como $g(s_m, 0) = g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})$ entonces

$$g(B_\delta(p_s) \cap J) \cup g(B_\delta(p_t) \cap J_{k_m})$$

es un conjunto conexo contenido en $B_j(g(p_t))$. Por otra parte, como $g(p_t) = g(p_s)$, se obtiene que

$$g(p_t) \in g(B_\delta(p_s) \cap J) \cup g(B_\delta(p_t) \cap J_{k_m}).$$

Entonces

$$g(B_\delta(p_s) \cap J) \cup g(B_\delta(p_t) \cap J_{k_m}) \subset Comp(B_j(g(p_t)), g(p_t)).$$

En particular, $g(t, \frac{1}{k_m}) \in Comp(B_j(g(p_t)), g(p_t))$. Hemos demostrado que para todo $m \geq N$, $k_m \in R_{p_t}(j)$. Como la elección de j es acorde con la Afirmación 1, hemos obtenido una contradicción. Esto demuestra la Afirmación 2.

Antes de continuar, recordemos algunas de las condiciones y notaciones con las que estamos trabajando: $C(A)$ tiene un doblez en el punto A_0, $f : \mathbf{P} \to C(A)$ es la función que describe este doblez, así $f(0,0) = A_0$. Estamos denotando $h(A_0) = (z_0, t_0)$, $g = \pi \circ h \circ f$ y la bola de radio $\frac{1}{m}$ con centro en z_0 por $B_m(z_0)$.

Por la continuidad de g, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $g(\{0\} \times [0, \frac{1}{k}]) \subset B_m(z_0)$, para k suficientemente grande. Como $g(\{0\} \times [0, \frac{1}{k}])$ es un conjunto conexo contenido en $B_m(z_0)$ que contiene a z_0 y a $g(0, \frac{1}{k})$, se concluye que, para k suficientemente grande,

$$g(0, \tfrac{1}{k}) \in Comp(B_m(z_0), z_0),$$

Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto K_m tiene a casi todos los naturales, donde

$$K_m = \{k \in \mathbb{N} : g(0, \tfrac{1}{k}) \in Comp(B_m(z_0), z_0)\}.$$

Por otra parte, como se estableció en la Afirmación 2, la sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Entonces se puede elegir una sucesión de números naturales, $k_1 < k_2 < ...$, tales que $t_{k_m} < 1$ y $k_m \in K_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir,

$$g(0, \tfrac{1}{k_m}) \in Comp(B_m(z_0), z_0), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \qquad (2.5)$$

A continuación, con la finalidad de definir una función del espacio peine $\mathbf{P}$ en Z que cumpla con la definición de doblez (Definición 2.5), primero vamos a definir una función del subespacio $\mathbf{P}^*$ de $\mathbf{P}$ en Z la cual denotaremos por F^*, después definiremos una función del segmento vertical J_0 de $\mathbf{P}$ en Z que denotaremos por γ. Finalmente, en términos de F^* y γ, definiremos la función requerida y demostraremos que satisface las condiciones de la definición de doblez.

Definimos la función $F^* : \mathbf{P}^* \to Z$ como sigue: para cada punto $(t, s) \in \mathbf{P}^*$,

$$F^*(t,s) = \begin{cases} g((1 - t_{k_m})t + t_{k_m}, \frac{1}{k_m}), & \text{si } s = \frac{1}{m} \text{ para algún } m \in \mathbb{N}, \\ g(t, 0), & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Afirmación 3. La función F^* es continua.

Para demostrar esta afirmación consideremos una sucesión $\{(r_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\mathbf{P}^*$ convergente a un punto $(r, s) \in \mathbf{P}^*$. Evidentemente basta considerar el caso en el cual la sucesión

$\{(r_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $\mathbf{P}^* \setminus J$ y el punto (r, s) pertenence al segmento límite J. En este caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $(r_n, s_n) \in J_{m_n}$ y $(r, s) = (r, 0)$. Entonces $F^*(r_n, s_n) = g((1-t_{k_{m_n}})r_n + t_{k_{m_n}}, \frac{1}{k_{m_n}})$ y $F^*(r, s) = g(r, 0)$. Como la sucesión $\{(r_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $(r, 0)$, las sucesiones $\{t_{k_{m_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{k_{m_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0. Se obtiene que la sucesión $\{((1 - t_{k_{m_n}})r_n + t_{k_{m_n}}, \frac{1}{k_{m_n}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $(r, 0)$. Luego, por la continuidad de la función g, se concluye que la sucesión $\{F^*(r_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $F^*(r, 0)$. Con esto hemos demostrado la Afirmación 3.

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, sean

$$A_m = f(0, \tfrac{1}{k_m}), \quad h(A_m) = (w_m, r_m), \quad B_m = h^{-1}(z_0, r_m) \quad \text{y}$$

$$C_m = \bigcup\{C \in C(X) : h(C) \in (Cl_Z(Comp(B_m(z_0), z_0)) \times \{r_m\})\}.$$

Note que C_m es la unión de los elementos del conjunto

$$h^{-1}(Cl_Z(Comp(B_m(z_0), z_0)) \times \{r_m\}),$$

el cual es un subcontinuo de $C(X)$. Entonces, por el Teorema 1.27, C_m es un subcontinuo de X.

Observe que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$w_m = \pi(h(A_m)) = \pi(h(f(0, \tfrac{1}{k_m}))) = g(0, \tfrac{1}{k_m}),$$

luego, por la elección de k_m, ver (2.5), se obtiene que $w_m \in Comp(B_m(z_0), z_0)$. Entonces

$$h(A_m) \in Comp(B_m(z_0), z_0) \times \{r_m\}.$$

Esto último implica que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $A_m \subset C_m$. Por otra parte, es claro que $B_m \subset C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Para continuar, para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos arcos ordenados en $C(X)$

$$\alpha_m : [0,1] \to C(X) \qquad \text{y} \qquad \beta_m : [0,1] \to C(X)$$

desde A_m hasta C_m y desde B_m hasta C_m, respectivamente.

Como $f(0, \frac{1}{k_m}) = A_m$ y $f(0,0) = A_0$, entonces la sucesión $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento A_0. Luego, la sucesión $\{h(A_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en $Cono(Z)$ al punto $h(A_0)$. Como $h(A_m) = (w_m, r_m)$ y $h(A_0) = (z_0, t_0)$, se obtiene que la sucesión $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a t_0. De donde, se deduce que la sucesión

$$\{Cl_Z(Comp(B_m(z_0), z_0)) \times \{r_m\}\}_{m\in\mathbb{N}}$$

converge al conjunto $\{(z_0, t_0)\}$. Por el Teorema 1.29, la función unión es continua y así la sucesión $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento A_0. Con esto, ya que Y no está contenido en A_0, podemos suponer que Y no está contenido en C_m, para ningún $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, sea U un conjunto abierto en X de tal forma que

$$A_0 \subset U \quad \text{y} \quad Y \not\subset \overline{U}. \tag{2.6}$$

Como las sucesiones $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen, ambas, a A_0, podemos suponer, sin perder generalidad, que para todo $m \in \mathbb{N}$, $A_m \subset U$ y $C_m \subset U$. Se obtiene que, para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [0,1]$, $\alpha_m(s) \subset U$ y $\beta_m(s) \subset U$. Así, puesto que $Y \not\subset U$, se concluye que $Y \neq \alpha_m(s)$ y $Y \neq \beta_m(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, las funciones $\pi \circ h \circ \alpha_m$ y $\pi \circ h \circ \beta_m$ están bien definidas.

Definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m : [0,1] \to Z$ como

$$\gamma_m(s) = \begin{cases} g((1-6s)t_{k_m}, \frac{1}{k_m}), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{6}, \\ \pi(h(\alpha_m(6s-1))), & \text{si } \frac{1}{6} \leq s \leq \frac{2}{6}, \\ \pi(h(\beta_m(3-6s))), & \text{si } \frac{2}{6} \leq s \leq \frac{3}{6}, \\ \pi(h(\beta_{m+1}(6s-3))), & \text{si } \frac{3}{6} \leq s \leq \frac{4}{6}, \\ \pi(h(\alpha_{m+1}(5-6s))), & \text{si } \frac{4}{6} \leq s \leq \frac{5}{6}, \\ g((6s-5)t_{k_{m+1}}, \frac{1}{k_{m+1}}), & \text{si } \frac{5}{6} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que en cada intervalo $[\frac{i-1}{6}, \frac{i}{6}]$, $i \in \{1, ..., 6\}$, la función γ_m es continua. Por otra parte, es fácil verificar que en cada punto de la forma $\frac{i}{6}$, $i \in \{1, ..., 5\}$, las dos definiciones de γ_m coinciden. Así, γ_m es una función bien definida y continua.

Afirmación 4. La sucesión de funciones $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante con valor z_0.

Primero vamos a demostrar que, para cada $i \in \{1, ..., 6\}$, la sucesión de funciones $\{\gamma_m|_{[\frac{i-1}{6}, \frac{i}{6}]}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante z_0. Para esto consideramos los diferentes casos:

(a) $i = 1$. En este caso, para todo $s \in [0, \frac{1}{6}]$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m(s) = g(((1-6s)t_{k_m}, \frac{1}{k_m}))$.

Dado $\varepsilon > 0$, como g es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que, si (u, v) y (u', v') son puntos en $\mathbf{P}$ y $\|(u,v)-(u',v')\| < \delta$, entonces $d_Z(g(u,v), g(u',v')) < \varepsilon$, donde d_Z denota la métrica de Z.

Por otra parte, para toda $s \in [0, \frac{1}{6}]$ y todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\|((1-6s)t_{k_m}, \frac{1}{k_m})\| \leq \|(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})\|.$$

Ahora, como la sucesión $\{(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al punto $(0,0)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \in [0, \frac{1}{6}]$ y todo $m \geq N_1$ se tiene que $\|((1-6s)t_{k_m}, \frac{1}{k_m})\| < \delta$ y así

$$d_Z(g((1-6s)t_{k_m}, \frac{1}{k_m}), g(0,0)) < \varepsilon.$$

Esto último significa que, para todo $s \in [0, \frac{1}{6}]$ y todo $m \geq N_1$, se satisface que $d_Z(\gamma_m(s), z_0) < \varepsilon$. Así, esta sucesión $\{\gamma_m|_{[0,\frac{1}{6}]}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a z_0.

(b) $i = 2$. En este caso, para todo $s \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m(s) = \pi(h(\alpha_m(6s-1)))$.

Pongamos

$$\mathcal{C} = Cl_{C(X)}\langle U\rangle$$

donde U es el abierto en X fijado en (2.6). Se tiene que $\pi \circ h|_{\mathcal{C}}$ es una función uniformemente continua. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si D y D' son puntos en $\mathcal{C}$ y $H(D, D') < \delta$, entonces $d_Z(\pi(h(D)), \pi(h(D'))) < \varepsilon$.

Por otra parte, note que, para todo $s \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $A_m \subset \alpha_m(6s-1) \subset C_m$, de donde se sigue que

$$H(C_m, \alpha_m(6s-1)) \leq H(C_m, A_m).$$

Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} H(A_0, \alpha_m(6s-1)) &\leq H(A_0, C_m) + H(C_m, \alpha_m(6s-1)) \\ &\leq H(A_0, C_m) + H(C_m, A_m). \end{aligned}$$

Como las sucesiones $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen, ambas, al elemento A_0, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $s \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ y todo $m \geq N_2$, se tiene que $H(A_0, \alpha_m(6s-1)) < \delta$ y así $d_Z(\pi(h(A_0)), \pi(h(\alpha_m(6s-1)))) < \varepsilon$.

Esto último significa que, para todo $s \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ y todo $m \geq N_2$ se cumple que $d_Z(\gamma_m(s), z_0) < \varepsilon$. Esto demuestra que la sucesión $\{\gamma_m|_{[\frac{1}{6},\frac{2}{6}]}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a z_0.

(c) $i \in \{3,4,5,6\}$. Si $i \in \{3,4,5\}$, con argumentos similares a los usados en el caso $i = 2$, ver (b), se demuestra que la sucesión $\{\gamma_m|_{[\frac{i-1}{6},\frac{i}{6}]}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante z_0. Finalmente, el caso $i = 6$ se obtiene como en el caso $i = 1$, analizado en (a).

Para terminar la demostración de la Afirmación 4, considere un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Tenemos que, para cada $i \in \{1, ..., 6\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \in [\frac{i-1}{6}, \frac{i}{6}]$ y todo $m \geq N_i$

$$d_Z(\gamma_m(s), z_0) < \varepsilon.$$

Ahora, sea $N = m\acute{a}x\{N_1, ..., N_6\}$. Entonces para todo $s \in [0,1]$ y todo $m \geq N$ se tiene que $d_Z(\gamma_m(s), z_0) < \varepsilon$. Esto demuestra la Afirmación 4.

Definimos la función $\gamma : J_0 \to Z$ como sigue: para cada punto $(0,s) \in J_0$,

$$\gamma(0,s) = \begin{cases} \gamma_m((m+1)(1-ms)), & \text{si } s \in [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}] \\ & \text{para algún } m \in \mathbb{N}, \\ z_0, & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Para un punto de la forma $(0, \frac{1}{m+1})$, consideremos las dos definiciones de γ. Por una parte, $\gamma(0, \frac{1}{m+1})$ es

$$\gamma_m((m+1)(1 - m(\tfrac{1}{m+1}))) = \gamma_m(1) = g(t_{k_{m+1}}, \tfrac{1}{k_{m+1}}).$$

Por otro lado, $\gamma(0, \frac{1}{m+1})$ es

$$\gamma_{m+1}((m+2)(1 - (m+1)(\tfrac{1}{m+1}))) = \gamma_{m+1}(0) = g(t_{k_{m+1}}, \tfrac{1}{k_{m+1}}).$$

Así hemos visto que las dos definiciones de γ en cada punto de la forma $(0, \frac{1}{m+1})$ coinciden. Esto demuestra que γ está bien definida.

Afirmación 5. La función γ es continua.

Es claro que γ es continua en los punto de la forma $(0, s)$, con $s > 0$. Vamos a demostrar que γ es continua en el punto $(0, 0)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Afirmación 4, la sucesión de funciones $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante z_0, de aquí que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $t \in [0, 1]$ y para todo $m \geq N$,

$$d_Z(\gamma_m(t), z_0) < \varepsilon.$$

Sea $\delta = \frac{1}{N}$ y sea $(0, s) \in J_0$ tal que $0 < s < \delta$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $s \in [\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$. Entonces $m \geq N$, así que $d_Z(\gamma(0, s), z_0) = d_Z(\gamma_m((m+1)(1 - ms)), z_0) < \varepsilon$. Esto concluye la demostración de la Afirmación 5.

Finalmente, definimos la función $F : \mathbf{P} \to Z$ como sigue: para cada punto $(t, s) \in \mathbf{P}$,

$$F(t, s) = \begin{cases} F^*(t, s), & \text{si } (t, s) \in \mathbf{P}^*, \\ \gamma(t, s), & \text{si } (t, s) \in J_0. \end{cases}$$

Note que $F^*(0, \frac{1}{m}) = g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})$ y $\gamma(0, \frac{1}{m}) = \gamma_m(0) = g(t_{k_m}, \frac{1}{k_m})$. Por otra parte, $F^*(0,0) = g(0,0) = z_0$ y $\gamma(0,0) = z_0$. Esto significa que las funciones F^* y γ coinciden en $\mathbf{P}^* \cap J_0$. Entonces F es una función bien definida, continua y $F(0,0) = z_0$.

Afirmación 6. La función F define un doblez en el punto z_0 de Z.

Para demostrar esta afirmación, sólo resta verificar que, para cada punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$, existe un abierto U en Z tal que $F^*(p) \in U$ y $Comp(U, F^*(p)) \cap \{F^*(p_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Para esto, supóngase lo contrario, es decir, supóngase que existe un punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ tal que, para todo abierto U de Z con $F^*(p) \in U$, se tiene que

$$Comp(U, F^*(p)) \cap \{F^*(p_n) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset. \tag{2.7}$$

Observe que, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F^*(p) = F^*(p_m)$, como $p = (t, 0)$, para algún número $t > 0$, entonces $t_{k_m} < (1 - t_{k_m})t + t_{k_m} \leq 1$ y $g((1 - t_{k_m})t + t_{k_m}, \frac{1}{k_m}) = F^*(t, \frac{1}{m}) = F^*(p_m) = F^*(p) \in g(J)$, lo cual contradice la definición de t_{k_m}. Entonces hemos demostrado que

$$\text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}, \quad F^*(p) \neq F^*(p_m). \tag{2.8}$$

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, denotamos

$$E_\varepsilon = Comp(B_\varepsilon(F^*(p)), F^*(p)).$$

Por (2.7), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F^*(p_{m_0}) \in E_1$. Por (2.8), existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 < 1$ y

$$B_{\varepsilon_1}(F^*(p)) \cap \{F^*(p_1), \ldots, F^*(p_{m_0})\} = \emptyset. \tag{2.9}$$

Usando otra vez (2.7), se deduce que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $F^*(p_{m_1}) \in E_{\varepsilon_1}$. Por (2.9), se tiene que $m_0 < m_1$. Aplicando otra vez (2.8), se puede elegir $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\varepsilon_2 < mín\{\varepsilon_1, \frac{1}{2}\}$ y

$$B_{\varepsilon_2}(F^*(p)) \cap \{F^*(p_1), ..., F^*(p_{m_1})\} = \emptyset. \tag{2.10}$$

Por (2.7), existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $F^*(p_{m_2}) \in E_{\varepsilon_2}$. De (2.10), se sigue que $m_1 < m_2$. Otra vez por (2.8), es posible elegir $\varepsilon_3 > 0$ tal que $\varepsilon_3 < mín\{\varepsilon_2, \frac{1}{3}\}$ y

$$B_{\varepsilon_3}(F^*(p)) \cap \{F^*(p_1), ..., F^*(p_{m_2})\} = \emptyset.$$

De este modo, procediendo inductivamente, se construyen dos sucesiones $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots, \qquad\qquad \varepsilon_j < \frac{1}{j},$$

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots \quad \text{y} \quad F^*(p_{m_j}) \in E_{\varepsilon_j}$$

Elegimos $j_0 \in \mathbb{N}$ para el cual se satisface la conclusión en la Afirmación 1 para el punto p. Es decir, $R_p(j_0)$ es finito. Recordemos que

$$R_p(j_0) = \{n \in \mathbb{N} : g(p_n) \in Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p))\}.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $g(B_\delta(p)) \subset B_{j_0}(g(p))$.

Como $m_j < m_{j+1}$, se tiene que $\{t_{k_{m_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de la sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, definida en (2.4). De la Afirmación 2, se deduce que la sucesión $\{t_{k_{m_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Entonces existe $j_1 \in \mathbb{N}$, con $j_1 \geq j_0$, tal que para todo $j \geq j_1$

$$\frac{1}{j} < \delta, \quad \frac{1}{k_{m_j}} < \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad t_{k_{m_j}} < \frac{\delta}{2}. \tag{2.11}$$

Tenemos que, para todo $j \geq j_1$, $B_{\varepsilon_j}(g(p)) \subset B_{j_0}(g(p))$. Así que $E_{\varepsilon_j} \subset Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p))$. Por lo tanto, para todo $j \geq j_1$,

$$F^*(p_{m_j}) \in Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p)). \tag{2.12}$$

Denotemos

$$q_{k_{m_j}} = ((1 - t_{k_{m_j}})t + t_{k_{m_j}}, \frac{1}{k_{m_j}}).$$

Entonces, por la definición de la función F^*, $F^*(p_{m_j}) = g(q_{k_{m_j}})$. Luego, según (2.12), hemos demostrado que, para todo $j \geq j_1$,

$$g(q_{k_{m_j}}) \in Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p)). \tag{2.13}$$

Ahora, si $p_{k_{m_j}}$ y $q_{k_{m_j}}$ son puntos distintos, denotamos por I_j al arco convexo en el plano que tiene como extremos a estos puntos. Si los puntos referidos son iguales entonces I_j denota el conjunto singular $\{p_{k_{m_j}}\} = \{q_{k_{m_j}}\}$. Es decir,

$$I_j = [t, (1 - t_{k_{m_j}})t + t_{k_{m_j}}] \times \{\frac{1}{k_{m_j}}\}.$$

De las condiciones en (2.11), se sigue que, para $j \geq j_1$, $I_j \subset B_\delta(p)$ y así, por la elección de δ, $g(I_j) \subset B_{j_0}(g(p))$. Luego, como $g(I_j)$ es conexo, por (2.13) se obtiene que, para $j \geq j_1$,

$$g(I_j) \subset Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p)).$$

Finalmente, como $g(p_{k_{m_j}}) \in g(I_j)$, se concluye que, para $j \geq j_1$,

$$g(p_{k_{m_j}}) \in Comp(B_{j_0}(g(p)), g(p))$$

esto significa que $k_{m_j} \in R_p(j_0)$ para todo $j \geq j_1$. Esto es una contradicción ya que j_0 se eligió de acuerdo con la Afirmación 1. Esto demuestra la Afirmación 6. Con todo esto la demostración del Teorema 2.8 está completa. ∎

2.9 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si Z tiene un doblez en el punto $z_0 \in Z$ y $t \in [0,1)$ es tal que $h^{-1}(z_0, t)$ no contiene a Y, entonces $Cono(Z)$ tiene un doblez en el punto (z_0, t). Además, se puede definir $f : \mathbf{P} \to Cono(Z)$ como en la definición de doblez de manera que

$$f(0,0) = (z_0, t) \quad \text{y} \quad h^{-1}(f(1,0)) \not\subset h^{-1}(f(0,0)).$$

Demostración. Sea $f_0 : \mathbf{P} \to Z$ como en la definición de doblez con $f_0(0,0) = z_0$. Sea $t \in [0,1)$ tal que $h^{-1}(z_0, t)$ no contiene a Y. Pongamos $A = h^{-1}(z_0, t)$. Entonces $Y \not\subset A$.

Afirmación 1. Existe $t' \geq t$ tal que $t' < 1$ y para todo $s \in [t', 1)$, se tiene que $h^{-1}(z_0, s) \not\subset A$.

Para demostrar esto, supóngase que lo establecido es falso. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a 1 tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n < 1 \quad \text{y} \quad h^{-1}(z_0, t_n) \subset A.$$

Como la sucesión $\{(z_0, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al vértice $\nu(Z)$, entonces la sucesión $\{h^{-1}(z_0, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ a Y. Se deduce que $Y \subset A$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra la Afirmación 1.

Fijamos $t_0 \in (t', 1)$ y ponemos $B = h^{-1}(z_0, t_0)$. Entonces, por la Afirmación 1, $t_0 > t$ y B es un subcontinuo de X que no está contenido en A.

Afirmación 2. Existe $r > 0$ tal que $h^{-1}(f_0(r, 0), t_0)$ no está contenido en A.

Para demostrar esta afirmación, sea $b \in B \setminus A$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \cap A = \emptyset$. Consideremos la función $f_1 : \mathbf{P} \to C(X)$ definida por

$$f_1(u, v) = h^{-1}(f_0(u, v), t_0), \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathbf{P}.$$

Entonces f_1 es una función continua y $f_1(0, 0) = B$. Sea $\delta > 0$ tal que

$$f_1(B_\delta((0, 0))) \subset B_\varepsilon(B),$$

aquí $B_\delta((0, 0))$ denota la bola en el espacio peine $\mathbf{P}$ con centro en el origen $(0, 0)$ y radio δ. Además $B_\varepsilon(B)$ es la bola en $C(X)$ con centro en B y radio ε.

Sea $r > 0$ tal que $r < \delta$. Vamos a demostrar que r satisface lo establecido en la Afirmación 2. Para esto note que $(r, 0) \in B_\delta((0, 0))$. Entonces $f_1((r, 0)) \in B_\varepsilon(B)$. Esto significa que $H(B, h^{-1}(f_0(r, 0), t_0)) < \varepsilon$. Luego, existe un punto $c \in h^{-1}(f_0(r, 0), t_0)$ tal que $d(b, c) < \varepsilon$, entonces $c \in B_\varepsilon(b)$. Entonces $c \notin A$. Por lo tanto, $h^{-1}(f_0(r, 0), t_0) \not\subset A$. Hemos demostrado la Afirmación 2.

Definimos $f : \mathbf{P} \to Cono(Z)$ como sigue: para cada punto $(u, v) \in \mathbf{P}$, hacemos

$$f(u, v) = (f_0(ur, v), (t_0 - t)u + t).$$

Es claro que f es una función continua y $f(0, 0) = (z_0, t)$.

Afirmación 3. La función f define un doblez en el punto (z_0, t) de $Cono(Z)$.

Para demostrar esta afirmación, sólo resta verificar que para cada punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$ existe un abierto $\mathcal{U}$ en $Cono(Z)$ tal que $f(p) \in \mathcal{U}$ y $Comp(\mathcal{U}, f(p)) \cap \{f(p_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Fijemos un punto $p \in J \setminus \{(0,0)\}$. Entonces $p = (u, 0)$ para algún número $u \in (0, 1]$. Denotamos $q = (ur, 0)$. Note que $q \in J \setminus \{(0,0)\}$ y

$$f(p) = (f_0(q), (t_0 - t)u + t). \tag{2.14}$$

Como la función f_0 define un doblez en el punto z_0 de Z, existe un abierto W en Z tal que

$$f_0(q) \in W \quad \text{y} \quad Comp(W, f_0(q)) \cap \{f_0(q_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset. \tag{2.15}$$

Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $t_0 + \varepsilon_0 < 1$. Pongamos

$$V = (t - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \cap [0, 1) \quad \text{y} \quad \mathcal{U} = W \times V.$$

Entonces $\mathcal{U}$ es un abierto en $Cono(Z)$. Además, como $f_0(q) \in W$ y $(t_0 - t)u + t$ es un número que pertenece a V, por (2.14), se tiene que $f(p) \in \mathcal{U}$. Vamos a demostrar que

$$Comp(\mathcal{U}, f(p)) \cap \{f(p_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset. \tag{2.16}$$

Para esto último, supóngase lo contrario, es decir, supóngase que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(p_n) \in Comp(\mathcal{U}, f(p))$. Entonces $f_0(ur, \frac{1}{n}) \in \pi(Comp(\mathcal{U}, f(p))$. De acuerdo con nuestra notación $q_n = (ur, \frac{1}{n})$. Entonces hemos obtenido que

$$f_0(q_n) \in \pi(Comp(\mathcal{U}, f(p)) \subset W.$$

Por otra parte, como $\pi(f(p)) = f_0(ur,0) = f_0(q)$, se tiene que $f_0(q) \in \pi(Comp(\mathcal{U}, f(p)))$. Luego, $\pi(Comp(\mathcal{U}, f(p)))$ es un conjunto conexo contenido en W que contiene a los puntos $f_0(q)$ y $f_0(q_n)$. Entonces $f_0(q_n) \in Comp(W, f_0(q))$, lo cual contradice (2.15). Esto demuestra (2.16) y así lo establecido en la Afirmación 3.

Finalmente, note que $f(1,0) = (f_0(r,0), t_0)$, r satisface lo establecido en la Afirmación 2 y $f(0,0) = (z_0, t)$. Entonces $h^{-1}(f(1,0)) \not\subset h^{-1}(f(0,0))$. Esto completa la demostración del Lema 2.9. ■

Ahora contamos con todos los resultados necesarios para demostrar nuestro siguiente teorema. En éste establecemos que, si el hiperespacio de un continuo X es homeomorfo a un cono de dimensión finita, entonces los subcontinuos de X que no contienen al elemento de $C(X)$ que corresponde con el vértice del cono son localmente conexos. Después de todo el trabajo realizado desde la introducción de la noción de doblez en la Definición 2.5 hasta el Lema 2.9, ahora obtenemos una demostración breve de este teorema.

2.10 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea $Y \in C(X)$ tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un subcontinuo de X que no contiene a Y, entonces A es localmente conexo.

Demostración. Sea $A \in C(X)$ tal que $Y \not\subset A$. Por la Proposición 2.3, se tiene que A es hereditariamente descomponible. Por (2) de la Proposición 2.1, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X

no contiene M-odos. Luego A no contiene M-odos.

Ahora, supóngase que A no es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 2.6, $C(A)$ tiene un doblez en algún elemento $A_0 \in C(A)$. Por el Teorema 2.8, se tiene que Z tiene un doblez en el punto $\pi(h(A_0))$. Como Y no está contenido en A_0, se sigue del Lema 2.9 que $Cono(Z)$ tiene un doblez en el punto $h(A_0)$. Además, según el Lema 2.9, se puede definir $f : \mathbf{P} \to Cono(Z)$ como en la definición de doblez con $f(0,0) = h(A_0)$, de tal forma que $h^{-1}(f(1,0)) \not\subset A_0$. Sea $g = h^{-1} \circ f$, entonces $g : \mathbf{P} \to C(X)$ define un doblez en el punto $A_0 \in C(X)$ tal que $g(1,0) \not\subset A_0$. Se sigue del Lema 2.7 que X contiene un M-odo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A es localmente conexo. ∎

Una vez obtenido el Teorema 2.10, demostrar que los subcontinuos no degenerados de X que no contienen a Y son gráficas finitas no es muy difícil, como se nota en la demostración del resultado final de esta sección.

2.11 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea $Y \in C(X)$ tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y, entonces A es una gráfica finita.

Demostración. Sea A un subcontinuo no degenerado de X tal que $Y \not\subset A$. Por el Teorema 2.10, se tiene que A es localmente conexo. Como Z tiene dimensión finita, del Lema 1.55, se sigue que la dimensión de $Cono(Z)$, y así la de $C(X)$, es finita. Luego, $dim(C(A)) < \infty$. Entonces, del Teorema 1.45, se sigue que A es una gráfica finita. ∎

2.2 Los elementos no degenerados de $C(X) \setminus C(X,Y)$ son arcos

En esta sección continuamos considerando las hipótesis planteadas al inicio de este capítulo. Es decir, X es un continuo cuyo hiperespacio es homeomorfo al cono sobre un continuo de dimensión finita Z, donde denotamos por Y al subcontinuo de X que corresponde con el vértice del cono de Z bajo un homeomorfismo dado. Con estas hipótesis, en la sección anterior, ya hemos demostrado, en el Teorema 2.11, que los elementos no degenerados de $C(X) \setminus C(X,Y)$ son gráficas finitas. Ahora vamos a demostrar que estos elementos, es decir, los subcontinuos no degenerados de X que no contienen a Y, son arcos. Obtenemos esto en el Teorema 2.26.

Para demostrar el Teorema 2.26 primero haremos un estudio detallado de las propiedades topológicas locales del hiperespacio $C(X)$ en los elementos de $F_1(X)$. En términos generales, dado un punto $p \in X$, demostraremos que si p es punto de ramificación de una gráfica finita en X, entonces el singular $\{p\}$ tiene vecindades en $C(X)$ cuyas componentes tienen la forma de un cono. Además, en este caso, veremos que existe un n-odo en $F_1(X)$ con punto de ramificación $\{p\}$ cuya imagen, bajo un homeomorfismo dado, se transforma en un subconjunto de la base del cono de Z, obtenemos estos resultados en los Lemas 2.15 y 2.22. En el otro caso, si p no es punto de ramificación de una gráfica finita en X, en el Lema 2.24, veremos que es casi seguro que $\{p\}$ tiene una vecindad tal que la componente de $\{p\}$ es un *semidisco* que tiene a $\{p\}$ en la *orilla*. Las nociones de disco, semidisco y orilla son introducidas en la Definición 2.17.

Por otra parte, en el Lema 2.25, el cual esencialmente es un resultado de la topología de los conos, demostramos que si un punto de la base del cono de Z, $q = (z, 0)$, tiene una vecindad en $Cono(Z)$ tal que la componente de q es un *semidisco* que tiene a q en la *orilla*, entonces todo punto q' en el segmento $\{z\} \times (0, 1)$ tiene una vecindad en $Cono(Z)$ tal que la componente de q' es homeomorfa a un conjunto abierto de un *disco*.

Finalmente, en la demostración del Teorema 2.26, comparamos estas dos situaciones para obtener nuestro resultado.

De acuerdo con lo anterior nuestro primer objetivo es demostrar el Lema 2.15. Para esto iniciamos con la siguiente notación.

2.12 Notación. Dado un número entero $n \geq 1$; B^n denota la bola cerrada de radio 1 con centro en el origen en el espacio euclidiano n dimensional, $\mathbb{R}^n$. Para $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n$ denota al continuo que se obtiene al adjuntarle n arcos mutuamente disjuntos a la $n-1$ bola cerrada, B^{n-1}, es decir,

$$\mathcal{M}_n = B^{n-1} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i),$$

cada A_i es un arco, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y $A_i \cap B^{n-1} = \{a_i\}$, donde a_i es un punto extremo de A_i.

Recordemos que, según nuestra notación en conos, $\nu(\mathcal{M}_n)$ y $B(\mathcal{M}_n)$, denotan el vértice y la base del cono sobre el continuo $\mathcal{M}_n$, respectivamente.

En 1997 Sergio Macías demostró que, si X es un n-odo simple, $C(X)$ es homeomorfo al cono sobre el continuo $\mathcal{M}_n$, ver [17, Teorema 3]. De la prueba del teorema aludido, ver [17, pág.

3071], se obtiene la siguiente versión más fina.

2.13 Proposición. Sea X es un n-odo simple con punto de ramificación p y puntos extremos $e_1, ..., e_n$. Denotemos por $\mathcal{E} = \{A \in C(X) : A \cap \{e_1, ..., e_n\} \neq \emptyset\}$. Entonces existe un homeomorfismo $g : C(X) \to Cono(\mathcal{M}_n)$ tal que

$$g(\{p\}) = \nu(\mathcal{M}_n) \text{ y } g(\mathcal{E}) = B(\mathcal{M}_n).$$

2.14 Observación. Sea X un n-odo simple con punto de ramificación p. Toda vecindad suficientemente pequeña, $\mathcal{U}$, del singular $\{p\}$ en $C(X)$ contiene un subconjunto, $\mathcal{D}$, de dimensión n tal que la diferencia $\mathcal{U} \backslash \mathcal{D}$ es la unión de exactamente n subconjuntos mutuamente disjuntos cada uno de los cuales tiene dimensión 2. Además, el singular $\{p\}$ es el único elemento en $C(X)$ con este tipo de vecindades. Por otro lado, el vértice, $\nu(\mathcal{M}_n)$, es el único punto del cono sobre el continuo $\mathcal{M}_n$ cuyas vecindades son de esta forma. Esto demuestra que, bajo cualquier homeomorfismo entre $C(X)$ y $Cono(\mathcal{M}_n)$, el singular $\{p\}$ se corresponde con el vértice $\nu(\mathcal{M}_n)$.

2.15 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si p es un punto de ramificación de una gráfica finita A en X y $\{p\} \neq Y$, entonces existen un número entero $n \geq 3$, un conjunto abierto $\mathcal{V}$, en $C(X)$, que contiene al singular $\{p\}$ y un homeomorfismo

$$g : Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \to Cono(\mathcal{M}_n) \setminus B(\mathcal{M}_n)$$

tal que $g(\{p\}) = \nu(\mathcal{M}_n)$. Además, existe un n-odo simple T_n, en X, con punto de ramificación p, que no contiene a Y tal que $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset C(T_n)$.

Demostración. Como $Y \neq \{p\}$, existen conjuntos abiertos, $U_1, ..., U_m$, en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, ..., U_m\rangle$ y $Y \notin \langle U_1, ..., U_m\rangle$. Pongamos $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Entonces U es un conjunto abierto en X tal que

$$p \in U \quad \text{y} \quad Y \not\subset U. \tag{2.17}$$

Sea A_1 una subgráfica de A tal que p es punto de ramificación de A_1 y $A_1 \subset U$.

Sea V un conjunto abierto en X tal que $A_1 \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Denotamos

$$\mathcal{C} = Cl_{C(X)}Comp(\langle V\rangle, A_1) \quad \text{y} \quad B = \bigcup \mathcal{C}. \tag{2.18}$$

Entonces, por el Lema 1.47, se tiene que B es un subcontinuo no degenerado y propio de X y $F_1(B) \subset \mathcal{C}$.

Note que $B \subset U$ y así, por (2.17), $Y \not\subset B$. Se sigue del Teorema 2.11 que B es una gráfica finita en X. Como p es un punto de ramificación de la gráfica finita A_1 y $A_1 \subset B$, se tiene que p es un punto de ramificación de la gráfica finita B.

Ahora, elíjase un conjunto abierto W en B de tal forma que $p \in W$, W es conexo, W no contiene curvas cerradas simples y $\overline{W}$ no contiene otros puntos de ramificación de la gráfica finita B. Entonces existe un número entero $n \geq 3$ tal que

$$\overline{W} \text{ es un } n\text{-odo simple,} \tag{2.19}$$

con punto de ramificación p. Observe que $\overline{W} \subset B$ y así, puesto que $Y \not\subset B$, tenemos que

$$Y \not\subset \overline{W}. \tag{2.20}$$

Denotemos por $e_1, ..., e_n$ a los puntos extremos del n-odo $\overline{W}$ y sea

$$\mathcal{E} = \{E \in C(\overline{W}) : E \cap \{e_1, ..., e_n\} \neq \emptyset\}.$$

Note que

$$C(\overline{W}) \setminus \mathcal{E} = \langle W \rangle. \tag{2.21}$$

Por la Proposición 2.13, existe un homeomorfismo $g : C(\overline{W}) \to Cono(\mathcal{M}_n)$ tal que $g(\{p\}) = \nu(\mathcal{M}_n)$ y $g(\mathcal{E}) = B(\mathcal{M}_n)$. Se sigue de (2.21) que $g(\langle W \rangle) = Cono(\mathcal{M}_n) \setminus B(\mathcal{M}_n)$. Para no introducir más notación denotamos también por g a la restricción del homeomorfismo g al subespacio $\langle W \rangle$ de $C(\overline{W})$. Entonces

$$g : \langle W \rangle \to Cono(\mathcal{M}_n) \setminus B(\mathcal{M}_n) \tag{2.22}$$

es un homeomorfismo y $g(\{p\}) = \nu(\mathcal{M}_n)$.

Ahora, sea $\mathcal{V}$ un conjunto abierto en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{V} \subset \langle V \rangle \text{ y } \mathcal{V} \cap C(B) = \langle W \rangle. \tag{2.23}$$

Vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) = \langle W \rangle$.

Como $\{p\} \in \langle W \rangle$, $\langle W \rangle \subset \mathcal{V}$ y, por (2.22), $\langle W \rangle$ es un conjunto conexo, se tiene que $\langle W \rangle \subset Comp(\mathcal{V}, \{p\})$.

Para demostrar la inclusión contraria, observe que $\{p\} \in F_1(B)$ y así, puesto que $F_1(B) \subset \mathcal{C}$, se tiene que $\{p\} \in \mathcal{C}$. Entonces $\{p\} \in \langle V \rangle \cap \mathcal{C}$. Note que

$$\langle V \rangle \cap \mathcal{C} = Cl_{\langle V \rangle} Comp(\langle V \rangle, \mathcal{A}_1) = Comp(\langle V \rangle, \mathcal{A}_1).$$

Luego $\{p\} \in Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \cap Comp(\langle V \rangle, A_1)$. Por la elección de $\mathcal{V}$, ver (2.23), se tiene que $Comp(\mathcal{V}, \{p\})$ es un conjunto conexo contenido en $\langle V \rangle$ e intersecta a la componente $Comp(\langle V \rangle, A_1)$, por lo cual, $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset Comp(\langle V \rangle, A_1)$. Ahora, de la definición de $\mathcal{C}$, ver (2.18), se obtiene que $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset \mathcal{C}$. De (2.18) también se tiene que $\mathcal{C} \subset C(B)$, luego $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset C(B)$. Entonces

$$Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset \mathcal{V} \cap C(B) = \langle W \rangle.$$

Esto demuestra la Afirmación. Ahora, de esta Afirmación y de (2.22), se sigue que

$$g : Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \to Cono(\mathcal{M}_n) \setminus B(\mathcal{M}_n)$$

es un homeomorfismo tal que $g(\{p\}) = \nu(\mathcal{M}_n)$. Con esto queda demostrada la primera parte de nuestra proposición.

Para demostrar la otra parte, pongamos $T_n = \overline{W}$. Por (2.19), se tiene que T_n es un n-odo simple en X con punto de ramificación p. Por (2.20), el n-odo simple T_n no contiene a Y. Por otro lado, de la afirmación que demostramos se concluye que $Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset C(T_n)$. Con todo esto, la demostración del Lema 2.15 está completa. ∎

Nuestro próximo objetivo es el Lema 2.22, en el cual demostraremos, bajo las hipótesis que estamos considerando, que alrededor de un punto de ramificación de una gráfica finita en X existe un n-odo que es enviado a la base del cono. Para esto necesitamos aún varios resultados previos. Primero consideramos la notación que sigue.

2.16 Notación. Sea X un continuo:

(1) Si A es un arco en X con puntos extremos a y b, denotamos $A^\circ = A \setminus \{a, b\}$.

(2) El disco abierto en el plano de radio 1 y con centro en el origen es denotado por $\mathcal{B}_1$. Es decir,

$$\mathcal{B}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Al conjunto de puntos en $\mathcal{B}_1$ que tienen ordenada no negativa, le llamamos semidisco y lo denotamos por $\mathcal{B}_2$. Es decir,

$$\mathcal{B}_2 = \{(x, y) \in \mathcal{B}_1 : y \geq 0\}.$$

Las nociones que introducimos en la siguiente definición están relacionadas con las conocidas nociones de variedad y variedad con frontera. Como nosotros usaremos únicamente las propiedades topológicas de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, y no resultados de la teoría de las variedades, preferimos la terminología como la presentamos.

2.17 Definición. Sea X un continuo. Un *disco* en X es un subespacio de X homeomorfo al disco abierto $\mathcal{B}_1$. Un *semidisco* en X es un subespacio de X homeomorfo al semidisco $\mathcal{B}_2$. Si U es un semidisco en X y $f : \mathcal{B}_2 \to U$ es un homeomorfismo, a la imagen bajo f del conjunto de puntos en $\mathcal{B}_2$ con ordenada 0 le llamamos la *orilla* de U y la denotamos por $\mathbf{o}(U)$, es decir,

$$\mathbf{o}(U) = f(\{(x, y) \in \mathcal{B}_2 : y = 0\}).$$

Para el resultado que sigue recordamos que π denota la proyección sobre la base, vea la Definición 1.50.

2.18 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un arco en X que no contiene a Y y $h(F_1(A)) \cap B(Z) = \emptyset$, entonces $\pi(h(F_1(A)))$ es un punto en $B(Z)$.

Demostración. Sea U un abierto en X tal que $A \subset U$ y $Y \not\subset U$. Sea V un abierto en X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Pongamos

$$\mathcal{C} = Cl_{C(X)}Comp(\langle V \rangle, A) \quad \text{y} \quad B = \bigcup \mathcal{C}.$$

Entonces, por el Lema 1.47, B es un subcontinuo no degenerado propio de X y $F_1(B) \subset \mathcal{C}$.

Por otro lado, por la elección de U, se tiene que $Y \not\subset B$. Luego por el Teorema 2.11, B es una gráfica finita. Es claro que $A \subset B$.

Sea A_1 un arco de A tal que A_1° no contiene puntos de ramificación de la gráfica finita B. Vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. $\pi(h(F_1(A_1)))$ es un punto en $B(Z)$.

Para demostrar esta afirmación, pongamos

$$\mathcal{W} = \{E \in C(B) : E \subset A_1^\circ\}.$$

Como A_1° no contiene puntos de ramificación de la gráfica finita B, se tiene que A_1° es un conjunto abierto en B. Se sigue que $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $C(B)$.

Observe que

$$\mathcal{W} = C(A_1) \setminus [C(A_1, a) \cup C(A_1, b)],$$

donde a y b son los puntos extremos de A_1. Denotemos por L_1 al segmento en el plano con puntos extremos $(0,0)$ y $(1,0)$, por L_a al segmento en el plano con puntos extremos $(0,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$ y por L_b al segmento con puntos extremos $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$. Sabemos que $C(A_1)$ es homeomorfo a la región triangular en el plano limitada por los segmentos L_1, L_a y L_b de tal forma que $F_1(A_1)$, $C(A_1,a)$ y $C(A_1,b)$ se corresponden con los segmentos L_1, L_a y L_b, respectivamente. De aquí se deduce que

$$\mathcal{W} \quad \text{es un semidisco en} \quad C(B) \tag{2.24}$$

cuya orilla está constituida por los conjuntos singulares de A_1°. Es decir,

$$\mathbf{o}(\mathcal{W}) = \{\{x\} : x \in A_1^\circ\}. \tag{2.25}$$

Como $A_1^\circ \subset A$ y $A \subset V$, de la definición de $\mathcal{W}$, se sigue que $\mathcal{W} \subset \langle V \rangle$. Luego, podemos elegir un conjunto abierto $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{V} \subset \langle V \rangle \quad \text{y} \quad \mathcal{V} \cap C(B) = \mathcal{W}.$$

Observe que $\mathcal{W}$ es un conjunto conexo contenido en $\mathcal{V}$. Sea $\mathcal{K}$ la componente de $\mathcal{V}$ que contiene a $\mathcal{W}$, es decir, $\mathcal{K} = Comp(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, vea la Notación 1.46.

Vamos a demostrar que $\mathcal{K} = \mathcal{W}$. Es claro que $\mathcal{W} \subset \mathcal{K}$, necesitamos demostrar que $\mathcal{K} \subset \mathcal{W}$. Para demostrar esto último fijemos un punto $x \in A_1^\circ$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{W}$ y así, como $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, $\{x\} \in \mathcal{V}$. Por otro lado, como $F_1(A_1) \subset F_1(B) \subset \mathcal{C}$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{C}$. Luego

$$\{x\} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{C} \subset \langle V \rangle \cap \mathcal{C}. \tag{2.26}$$

Note que $\langle V\rangle \cap Cl_{C(X)}Comp(\langle V\rangle, A) = Cl_{\langle V\rangle}Comp(\langle V\rangle, A)$. Entonces, puesto que $Comp(\langle V\rangle, A)$ es un conjunto cerrado en $\langle V\rangle$, de la definición de $\mathcal{C}$, se sigue que $\langle V\rangle \cap \mathcal{C} = Comp(\langle V\rangle, A)$. Así, por (2.26), se obtiene que

$$\{x\} \in Comp(\langle V\rangle, A).$$

Ahora note que $\{x\} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{K}$, así $\mathcal{K} \cap Comp(\langle V\rangle, A) \neq \emptyset$. Luego, $\mathcal{K} \subset Comp(\langle V\rangle, A)$, ya que $\mathcal{K}$ es un conjunto conexo contenido en $\langle V\rangle$ y $\mathcal{K} \cap Comp(\langle V\rangle, A) \neq \emptyset$.

Es claro que $Comp(\langle V\rangle, A) \subset \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \subset C(B)$. De aquí que $\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \cap C(B) = \mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{K} = \mathcal{W}$. Hemos demostrado que

$$\mathcal{W} \text{ es una componente de } \mathcal{V}. \tag{2.27}$$

Ahora, supóngase que $\pi(h(F_1(A_1)))$ contiene más de un punto. Entonces $\pi(h(F_1(A_1)))$ es un continuo arco conexo y no degenerado en la base del cono sobre Z, $B(Z)$. Sea E un arco en $\pi(h(F_1(A_1)))$ tal que

$$E \cap \{\pi(h(\{a\})), \pi(h(\{b\}))\} = \emptyset.$$

Fijemos un punto $z \in E^{\circ}$. Sea $x \in A_1$ tal que $\pi(h(\{x\})) = z$. Pongamos $p = h(\{x\})$. De (2.24) y (2.25) se sigue que

$$h(\mathcal{W}) \text{ es un semidisco en } Cono(Z) \text{ y } p \in \mathbf{o}(h(\mathcal{W})).$$

Por otro lado, de (2.27) se obtiene que

$$h(\mathcal{W}) \text{ es una componente de } h(\mathcal{V}). \tag{2.28}$$

Por hipótesis, $h(F_1(A_1)) \cap B(Z) = \emptyset$, así $p \notin B(Z)$. Como $\pi(p) = z \in E^{\circ}$, se tiene que $p \in [E^{\circ} \times (0,1)] \cap h(\mathcal{V})$. Ahora, puesto que $h(\mathcal{V})$ es un abierto en $Cono(Z)$, se concluye que la intersección $[E^\circ \times (0,1)] \cap h(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en el producto $E^\circ \times (0,1)$. Entonces, como $E^\circ \times (0,1)$ es un disco en $Cono(Z)$, existe un disco $\mathcal{W}_1$ el cual es un conjunto abierto en $E^\circ \times (0,1)$ tal que

$$p \in \mathcal{W}_1 \subset [E^\circ \times (0,1)] \cap h(\mathcal{V}).$$

Por otro lado, como $\mathcal{W}_1$ es un conjunto conexo contenido en $h(\mathcal{V})$ y $p \in \mathcal{W}_1$, se sigue de (2.28) que $\mathcal{W}_1 \subset h(\mathcal{W})$. Observe que $\mathcal{W}_1$ es un disco en el semidisco $h(\mathcal{W})$, luego $\mathcal{W}_1$ es un conjunto abierto de $h(\mathcal{W})$.

Con esto se concluye que p no es un punto en la orilla de $h(\mathcal{W})$, lo cual contradice (2.28). Esto demuestra nuestra Afirmación.

Ahora, pongamos

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

donde, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, A_i es un arco en B tal que A_i° no contiene puntos de ramificación de la gráfica finita B y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, esto se puede conseguir repitiendo algunos A_i.

Se sigue de la afirmación demostrada antes que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\pi(h(F_1(A_i))) \quad \text{es un punto en} \quad B(Z). \tag{2.29}$$

Finalmente, como $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, se tiene que $\pi(h(A_i)) \cap \pi(h(A_{i+1})) \neq \emptyset$. Luego de (2.29) se sigue que $\pi(h(F_1(A_i))) = \pi(h(F_1(A_{i+1})))$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Esto demuestra que $\pi(h(F_1(A)))$ es un punto en $B(Z)$, lo cual finaliza la demostración de la Proposición 2.18. ∎

Como ya sabemos, por el Teorema 2.11, que los subcontinuos no degenerados de X que no contienen a Y son gráficas finitas, como una consecuencia de la Proposición 2.18, obtenemos la siguiente.

2.19 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y y $h(F_1(A)) \cap B(Z) = \emptyset$, entonces $\pi(h(F_1(A)))$ es un punto en $B(Z)$. En consecuencia A es un arco.

Demostración. Por el Teorema 2.11, se tiene que A es una gráfica finita. Entonces existe una colección finita de arcos $A_1, ..., A_n$ tales que

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n-1\}. \tag{2.30}$$

Entonces, por la Proposición 2.18, se tiene que $\pi(h(F_1(A_i)))$ es un punto en la base del cono de Z, $B(Z)$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De la segunda condición en (2.30) se obtiene que $\pi(h(F_1(A_i))) \cap \pi(h(F_1(A_{i+1}))) \neq \emptyset$ y así

$$\pi(h(F_1(A_i))) = \pi(h(F_1(A_{i+1}))).$$

Esto demuestra que $\pi(h(F_1(A)))$ es un punto en $B(Z)$. De aquí se sigue que $h(F_1(A))$ es un arco en el cono de Z y, en consecuencia, A es un arco. ■

En la prueba del Lema 2.22 también usaremos el resultado que sigue, en el cual establecemos que si los puntos extremos de un arco en $F_1(X)$ son enviados a la base del cono, entonces todo el arco es enviado a la base del cono. En el Teorema 3.8 del Capítulo 3 también usaremos este hecho.

2.20 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Sea A un arco en X con puntos extremos a y b. Si A no contiene a Y y $h(\{a\}), h(\{b\}) \in B(Z)$, entonces $h(F_1(A)) \subset B(Z)$.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, supóngase que $h(F_1(A)) \not\subset B(Z)$. Sea $\alpha : [0,1] \to F_1(A)$ una parametrización del arco $F_1(A)$ tal que $\alpha(0) = \{a\}$ y $\alpha(1) = \{b\}$. Entonces existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(\alpha(t_0)) \notin B(Z)$. Sean

$$\begin{aligned} t_1 &= sup\{t \in [0, t_0] : h(\alpha(t)) \in B(Z)\} \text{ y} \\ t_2 &= \acute{\imath}nf\,\{t \in [t_0, 1] : h(\alpha(t)) \in B(Z)\}. \end{aligned}$$

De la continuidad de la función $h \circ \alpha$ y de la definición de t_1 y t_2, se tiene que $h(\alpha(t_1))$ y $h(\alpha(t_2))$ pertenecen a la base, $B(Z)$, y $t_1 < t_0 < t_2$. Además, de la definición de t_1 y t_2, se obtiene que

$$h(\alpha(t_1, t_2)) \cap B(Z) = \emptyset. \tag{2.31}$$

Consideremos la función proyección $\pi_2 : Cono(Z) \to [0,1]$ definida por

$$\pi_2(w) = \begin{cases} t, & \text{si } w = (z,t) \in Z \times [0,1), \\ 1, & \text{si } w = \nu(Z). \end{cases}$$

Entonces $\pi_2 \circ h \circ \alpha$ es una función continua del intervalo [0,1] en el mismo. Existe un número s_0 en el intervalo abierto (t_1, t_2)

tal que, para todo $t \in [t_1, t_2]$,

$$\pi_2(h(\alpha(t))) \leq \pi_2(h(\alpha(s_0))). \tag{2.32}$$

Sean $s_1, s_2 \in [0,1]$ tales que $t_1 < s_1 < s_0 < s_2 < t_2$. Denotemos $\mathcal{A}_1 = \alpha([s_1, s_0])$ y $\mathcal{A}_2 = \alpha([s_0, s_2])$. Note que

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\alpha(s_0)\}. \tag{2.33}$$

Por (2.31), se tiene que $h(\mathcal{A}_1) \cap B(Z) = \emptyset$ y $h(\mathcal{A}_2) \cap B(Z) = \emptyset$. Por la Proposición 2.18, se concluye que

$$\pi(h(\mathcal{A}_1)) = \{\pi(h(\alpha(s_0)))\} \quad \text{y} \quad \pi(h(\mathcal{A}_2)) = \{\pi(h(\alpha(s_0)))\},$$

de aquí y de (2.32), se sigue que $h(\mathcal{A}_1) \subset h(\mathcal{A}_2)$ o $h(\mathcal{A}_2) \subset h(\mathcal{A}_1)$ y así $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ o $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Esto es una contradicción con (2.33), lo cual demuestra que $h(F_1(A)) \subset B(Z)$. ■

La proposición siguiente es el último de los resultados que requerimos en la prueba del Lema 2.22. En esta proposición demostramos que si el punto de ramificación de una gráfica finita no es enviado al vértice del cono, entonces es enviado a la base.

2.21 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Si p es un punto de ramificación de una gráfica finita A en X y $h(\{p\}) \neq \nu(Z)$, entonces $h(\{p\}) \in B(Z)$.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, supóngase que $h(\{p\}) \notin B(Z)$. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Por hipótesis $Y \neq \{p\}$.

Elíjase un conjunto abierto U en X tal que

$$p \in U, \;\; Y \not\subset U \quad \text{y} \quad h(\langle U \rangle) \cap B(Z) = \emptyset. \tag{2.34}$$

Se tiene que $U \cap A$ es un conjunto abierto en A que contiene al punto p. Entonces existe un conjunto abierto, W, en A tal que W es conexo y

$$p \in W \subset \overline{W} \subset U \cap A.$$

Podemos suponer que $\overline{W}$ no contiene otros puntos de ramificación de la gráfica finita A. Entonces $\overline{W}$ es un n-odo simple para algún entero $n \geq 3$. Denotemos $T_n = \overline{W}$.

Sea V un abierto en X tal que $T_n \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Pongamos

$$\mathcal{C} = Cl_{C(X)} Comp(\langle V \rangle, T_n) \quad \text{y} \quad B = \bigcup \mathcal{C}.$$

Se sigue del Lema 1.47 que B es un subcontinuo no degenerado propio de X y $F_1(B) \subset \mathcal{C}$. Como $F_1(T_n) \subset F_1(B)$ y $\mathcal{C} \subset \{E \in C(X) : E \subset \overline{V}\} \subset \langle U \rangle$, se obtiene que $F_1(T_n) \subset \langle U \rangle$. De aquí y de la última condición en (2.34), se concluye que T_n es un subcontinuo de X tal que

$$Y \not\subset T_n \quad \text{y} \quad h(F_1(T_n)) \cap B(Z) = \emptyset.$$

Luego, por la Proposición 2.19, $F_1(T_n)$ es un arco y, en consecuencia, T_n es un arco, lo cual es una contradición. Esto demuestra que $h(\{p\}) \in B(Z)$. ∎

2.22 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que T es un n-odo simple en X con punto de ramificación p tal que $Y \not\subset T$. Entonces existe un $(n-1)$-odo simple T^* en X, con punto de ramificación p, tal que $T^* \subset T$ y $h(F_1(T^*)) \subset B(Z)$ (en este lema entendemos que si $n = 3$, entonces un $(n-1)$-odo simple es un arco).

Demostración. Denotemos por $e_1, ..., e_n$ a los puntos extremos del n-odo T.

Como $Y \not\subset T$, para cada $x \in T$, $\{x\} \neq Y$. Entonces, para todo punto $x \in T$, $\pi(h(\{x\}))$ es un punto bien determinado en la base del cono sobre Z. Por otro lado, por la Proposición 2.21, $h(\{p\}) \in B(Z)$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, denotemos por $\mathcal{E}_i = F_1(pe_i)$.

Afirmación 1. Si $\pi(h(\{e_i\})) = h(\{p\})$, para algún $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\pi(h(\mathcal{E}_i)) = \{h(\{p\})\}$.

Para demostrar esta afirmación supóngase lo contrario. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathcal{E}_i$ una parametrización del arco $\mathcal{E}_i$ tal que $\alpha(0) = \{e_i\}$ y $\alpha(1) = \{p\}$. Entonces existe un número $t \in [0,1]$ tal que $t < 1$ y $\pi(h(\alpha(t))) \neq h(\{p\})$.

Denotemos $t_0 = \textit{ínf}\,\{t \in [0,1] : \pi(h(\alpha(t))) \neq h(\{p\})\}$.

Note que $t_0 \neq 1$ y así

$$h(\alpha(t_0)) \neq h(\{p\}). \tag{2.35}$$

Por otro lado, por la continuidad de $h \circ \alpha$ y la definición de t_0, se tiene que

$$\pi(h(\alpha(t_0))) = h(\{p\}). \tag{2.36}$$

De (2.35) y (2.36) se obtiene que $h(\alpha(t_0)) \notin B(Z)$. Sea $\mathcal{W}$ un abierto en $Cono(Z)$ tal que $h(\alpha(t_0)) \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \cap B(Z) = \emptyset$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$ con $|t_0 - t| < \varepsilon$, $h(\alpha(t)) \in \mathcal{W}$. Sea $s_0 \in [0,1]$ tal que $t_0 < s_0$ y $s_0 - t_0 < \varepsilon$. Entonces $\alpha([t_0, s_0])$ es un arco en $F_1(X)$ y

$$\alpha([t_0, s_0]) \subset \mathcal{W}. \tag{2.37}$$

Como $Y \not\subset T$ y $\alpha([t_0, s_0]) \subset F_1(T)$, se tiene que $F_1(Y) \not\subset \alpha([t_0, s_0])$. Además por (2.37),

$$h(\alpha([t_0, s_0])) \cap B(Z) = \emptyset.$$

Luego, por la Proposición 2.18, se concluye que la proyección en la base $B(Z)$ del arco $h(\alpha([t_0, s_0]))$ es un punto y así, como $\pi(h(\alpha(t_0))) = h(\{p\})$, se tiene que

$$\pi(h(\alpha([t_0, s_0]))) = \{h(\{p\})\}. \tag{2.38}$$

Por otro lado, de la definición de t_0, existe un número t en el intervalo abierto (t_0, s_0) tal que $\pi(h(\alpha(t))) \neq h(\{p\})$. Esto es un contradicción con (2.38), y demuestra la Afirmación 1.

Ahora, podemos suponer que a lo más uno de los puntos extremos, $e_1, ...e_n$, del n-odo T tiene como imagen bajo la función $\pi \circ h$ al punto $h(\{p\})$. Porque en otro caso, es decir, si

$$\pi(h(\{e_i\})) = h(\{p\}) = \pi(h(\{e_j\})) \text{ con } i \neq j$$

entonces, por la Afirmación 1, se tiene que $\pi(h(\mathcal{E}_i)) = \pi(h(\mathcal{E}_j))$ y, como $\{p\} \in \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j$, concluimos que

$$h(\mathcal{E}_i) \subset h(\mathcal{E}_j) \text{ o } h(\mathcal{E}_j) \subset h(\mathcal{E}_i).$$

Esto contradice la inyectividad del homeomorfismo h. Luego, sin perder generalidad, podemos suponer que

$$\pi(h(\{e_i\})) \neq h(\{p\}) \text{ para todo } i \in \{1, ..., n-1\}. \tag{2.39}$$

Afirmación 2. Para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, existe un punto $x_i \in pe_i$ tal que $x_i \neq p$ y $h(\{x_i\}) \in B(Z)$.

Para demostrar esto, supóngase que lo afirmado es falso. Entonces existe un elemento $i \in \{1, ..., n-1\}$ tal que

$$h(\mathcal{E}_i) \cap B(Z) = h(\{p\}).$$

Sea $\beta : [0,1] \to \mathcal{E}_i$ una parametrización del arco $\mathcal{E}_i$ tal que $\beta(0) = \{e_i\}$ y $\beta(1) = \{p\}$. Para cada número entero $k \geq 2$, $\beta([0, 1 - \frac{1}{k}])$ es un arco en $F_1(X)$ tal que

$$h(\beta([0, 1 - \tfrac{1}{k}])) \cap B(Z) = \emptyset.$$

Luego de la Proposición 2.18, se sigue que, para todo número entero $k \geq 2$,

$$\pi(h(\beta([0, 1 - \tfrac{1}{k}]))) = \{\pi(h(\{e_i\}))\}. \tag{2.40}$$

Por otro lado, por la continuidad de la función $\pi \circ h \circ \beta$ y de (2.40), se tiene que $\pi(h(\beta([0, 1]))) = \{\pi(h(\{e_i\}))\}$. En particular, $\pi(h(\beta(1))) = \pi(h(\{e_i\}))$. Como $\pi(h(\beta(1))) = h(\{p\})$, se concluye que $\pi(h(\{e_i\})) = h(\{p\})$. Esto contradice (2.39). Así la Afirmación 2 está demostrada.

Finalmente, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, fijamos un punto x_i en el arco pe_i, distinto del punto p, tal que $h(\{x_i\}) \in B(Z)$. Por el Lema 2.20, la imagen bajo el homeomorfismo h del arco $F_1(px_i)$ está en la base del cono sobre Z. Pongamos

$$T^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} px_i.$$

Entonces T^* satisface las conclusiones del Lema 2.22. ■

El paso que sigue es estudiar las componentes de las vecindades, en $C(X)$, de los elementos de $F_1(X)$ que no son puntos de ramificación. Hacemos esto en el Lema 2.24. Para tal fin necesitamos la proposición que sigue.

2.23 Proposición. Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Supóngase que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Entonces para todo punto x en A, excepto a lo más para $M-1$ puntos, y para todo abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$, existe un abierto $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $Comp(\mathcal{V}, \{x\}) \subset C(A)$.

Demostración. Supongamos que esta proposición es falsa, es decir, supóngase que existen M puntos distintos, $x_1, ..., x_M$, en A y M conjuntos abiertos $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_M$ en $C(X)$ tales que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $\{x_i\} \in \mathcal{U}_i$ y para cada conjunto abierto $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que $\{x_i\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}_i$ se tiene que

$$Comp(\mathcal{V}, \{x_i\}) \not\subset C(A). \tag{2.41}$$

Tomemos M conjuntos abiertos, $V_1, ..., V_M$, en X tales que $x_i \in V_i$ y

$$\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{2.42}$$

Entonces, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $\mathcal{U}_i \cap \langle V_i \rangle$ es un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $\{x_i\} \in \mathcal{U}_i \cap \langle V_i \rangle \subset \mathcal{U}_i$. Ahora, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, pongamos

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cap \langle V_i \rangle, \; \mathcal{C}_i = Cl_{C(X)} Comp(\mathcal{V}_i, \{x_i\}) \text{ y } B_i = \bigcup \mathcal{C}_i.$$

Por (2.41), se tiene que $\mathcal{C}_i \not\subset C(A)$ y en consecuencia $B_i \not\subset A$. Note que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, B_i es un subcontinuo de X tal que

$$B_i \cap A \neq \emptyset \text{ y } B_i \cap (X \setminus A) \neq \emptyset. \tag{2.43}$$

Como $\mathcal{C}_i \subset Cl_{C(X)}\mathcal{V}_i \subset Cl_{C(X)}\langle V_i\rangle \subset \langle \overline{V}_i\rangle$, $B_i \subset \overline{V}_i$. De manera que $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Por tanto, de (2.43), obtenemos que $A \cup (\bigcup_{i=1}^{M} B_i)$ es un M-odo en X, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, el Lema 2.23 está demostrado. ∎

Los siguientes resultados, Lemas 2.24 y 2.25, son una herramienta clave en la demostración del teorema principal de esta sección, el Teorema 2.26. En esto lemas usaremos los conceptos de disco, semidisco y orilla de un semidisco, los cuales hemos presentado en la Definición 2.17.

2.24 Lema. Sean X un continuo. Supóngase que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Si A es un arco en X, entonces para todo punto $x \in A$, excepto a lo más para $M-1$ puntos en A, existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$, tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$, la componente de $\mathcal{U}$ que contiene a $\{x\}$, $Comp(\mathcal{U},\{x\})$, es un semidisco en $C(X)$ y $\{x\} \in \mathbf{o}(Comp(\mathcal{U},\{x\})) \subset F_1(A)$.

Demostración. Por la Proposición 2.23 para todo punto $x \in A$, excepto a lo más para $M-1$ puntos de A, se satisface la conclusión de dicha proposición.

Fijemos un punto $x \in A$ para el cual se cumple la conclusión de la Proposición 2.23. Vamos a demostrar que, para este punto fijado x, existe un conjunto abierto en $C(X)$ con las propiedades requeridas.

Como A es un arco, existe un conjunto abierto, $\mathcal{D}$, en $C(A)$ tal que $\mathcal{D}$ es un semidisco y

$$\{x\} \in \mathbf{o}(\mathcal{D}) \subset F_1(A). \tag{2.44}$$

Tomemos un conjunto abierto, $\mathcal{W}$, en $C(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{W}$ y

$$\mathcal{W} \cap C(A) = \mathcal{D}. \tag{2.45}$$

Como el punto x satisface la conclusión en la Proposición 2.23, existe un conjunto abierto, $\mathcal{V}$, en $C(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ y

$$Comp(\mathcal{V}, \{x\}) \subset C(A). \tag{2.46}$$

Como $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, de (2.45) y (2.46) se sigue que $Comp(\mathcal{V}, \{x\}) \subset \mathcal{D}$.

Ahora, vamos a demostrar que la componente $Comp(\mathcal{V}, \{x\})$ es un conjunto abierto de $\mathcal{D}$. Para esto fijemos un elemento $E \in Comp(\mathcal{V}, \{x\})$. Como $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto en $C(X)$, se tiene que $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{D}$ y $E \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$. Por otro lado, como $\mathcal{D}$ es un semidisco, $\mathcal{D}$ es un espacio localmente conexo. Luego, existe un subconjunto abierto, $\mathcal{B}$, de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{B}$ es conexo y $E \in \mathcal{B} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$.

Se tiene que $\mathcal{B}$ es un conjunto conexo tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ y $E \in \mathcal{B} \cap Comp(\mathcal{V}, \{x\})$, luego $\mathcal{B} \subset Comp(\mathcal{V}, \{x\})$. Hemos obtenido que $\mathcal{B}$ es un conjunto abierto en el semidisco $\mathcal{D}$ tal que $E \in \mathcal{B} \subset Comp(\mathcal{V}, \{x\})$. Esto demuestra que la componente $Comp(\mathcal{V}, \{x\})$ es un conjunto abierto en $\mathcal{D}$.

Por otro lado, como $\{x\}$ pertenece a la orilla, $\mathbf{o}(\mathcal{D})$, del semidisco $\mathcal{D}$, ver (2.44), y $Comp(\mathcal{V}, \{x\})$ es un conjunto abierto en $\mathcal{D}$, existe un conjunto abierto $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}'$ es un semidisco y

$$\{x\} \in \mathcal{D}' \subset Comp(\mathcal{V}, \{x\}).$$

Como la componente $Comp(\mathcal{V}, \{x\})$ es un subespacio del semidisco $\mathcal{D}$, se tiene que $\mathcal{D}'$ es un conjunto abierto en la componente $Comp(\mathcal{V}, \{x\})$.

Ahora, tomemos un conjunto abierto, $\mathcal{U}$, en $C(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ y

$$\mathcal{U} \cap Comp(\mathcal{V}, \{x\}) = \mathcal{D}'. \tag{2.47}$$

Para terminar vamos a demostrar que $Comp(\mathcal{U}, \{x\}) = \mathcal{D}'$. Para esto, observe que $\{x\} \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{U}$, luego, como $\mathcal{D}'$ es conexo, se tiene que $\mathcal{D}' \subset Comp(\mathcal{U}, \{x\})$. Por otro lado, como $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, se tiene que $Comp(\mathcal{U}, \{x\}) \subset Comp(\mathcal{V}, \{x\})$, así, de (2.47), se sigue que $Comp(\mathcal{U}, \{x\}) \subset \mathcal{D}'$. Con esto se obtiene que $Comp(\mathcal{U}, \{x\})$ coincide con el semidisco $\mathcal{D}'$. Con todo esto el Lema 2.24 está demostrado. ∎

2.25 Lema. Sean Z un continuo y z_0 un punto de Z. Supóngase que $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que $(z_0, 0) \in \mathcal{W}$ y la componente de $\mathcal{W}$ que contiene a $(z_0, 0)$, $Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$, es un semidisco en $Cono(Z)$ cuya orilla, $\mathbf{o}(Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0)))$, está contenida en la base $B(Z)$. Entonces para cada número s en el intervalo abierto (0,1) existe un conjunto abierto, $\mathcal{V}$, en $Cono(Z)$ tal que $(z_0, s) \in \mathcal{V}$ y la componente de $\mathcal{V}$ que contiene a (z_0, s), $Comp(\mathcal{V}, (z_0, s))$, es homeomorfa a un conjunto abierto de un disco en $Cono(Z)$.

Demostración. Tomemos un conjunto abierto, W, en Z y un número $\varepsilon > 0$ tales que $(z_0, 0) \in W \times [0, \varepsilon) \subset \mathcal{W}$.

Fijemos un número $s \in (0, 1)$. Sea $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s+\delta) \subset (0, 1)$. Pongamos

$$\mathcal{V} = W \times (s - \delta, s + \delta).$$

Es claro que $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ y que $(z_0, s) \in \mathcal{V}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{V}$ satisface la conclusión del lema.

Para esto, definimos la función

$$l : W \times (s-\delta, s+\delta) \to W \times (0, \varepsilon)$$

como sigue, para cada punto $(z,r) \in W \times (s-\delta, s+\delta)$,

$$l(z,r) = (z, \tfrac{\varepsilon}{2\delta}(r+\delta-s)).$$

Tenemos que l es un homeomorfismo y $l(z_0, s) = (z_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Entonces L define un homeomorfismo entre la $Comp(\mathcal{V}, (z_0, s))$ y la componente de $W \times (0,\varepsilon)$ que contiene al punto $(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$, $Comp(W \times (0,\varepsilon), (z_0, \frac{\varepsilon}{2}))$.

Observe que $Comp(W \times [0,\varepsilon), (z_0, \frac{\varepsilon}{2}))$ es un conjunto conexo que contiene al punto $(z_0, 0)$ y que está contenido en $\mathcal{W}$, entonces

$$Comp(W \times [0,\varepsilon), (z_0, \tfrac{\varepsilon}{2})) \subset Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0)).$$

De aquí se sigue que

$$Comp(W \times (0,\varepsilon), (z_0, \tfrac{\varepsilon}{2})) \subset Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0)).$$

Ahora, vamos a demostrar que la componente

$$Comp(W \times (0,\varepsilon), (z_0, \tfrac{\varepsilon}{2}))$$

es un conjunto abierto en el semidisco $Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$. Notemos que $\mathcal{B} = (W \times (0,\varepsilon)) \cap Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$ es un conjunto abierto en la componente $Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$. Como la componente $Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$ es un espacio localmente conexo, entonces $Comp(\mathcal{B}, (z_0, \frac{\varepsilon}{2}))$ es abierto en $Comp(\mathcal{W}, (z_0, 0))$. Ya que $\mathcal{B} \subset W \times (0,\varepsilon)$, tenemos que

$$Comp(\mathcal{B}, (z_0, \tfrac{\varepsilon}{2})) \subset Comp(W \times (0,\varepsilon), (z_0, \tfrac{\varepsilon}{2})).$$

Por otra parte, $Comp(W \times (0,\varepsilon),(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{B}$ que tiene a $(z_0,\frac{\varepsilon}{2})$, así que este conjunto está contenido en $Comp(\mathcal{B},(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$ y, por lo tanto, estos conjuntos son iguales. Y como $Comp(\mathcal{B},(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$ es abierto en $Comp(\mathcal{W},(z_0,0))$, obtenemos que la componente $Comp(W \times (0,\varepsilon),(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$ es un conjunto abierto en el semidisco $Comp(\mathcal{W},(z_0,0))$.

Por otro lado, por hipótesis, $\mathbf{o}(Comp(\mathcal{W},(z_0,0))) \subset B(Z)$, y así, como el conjunto de puntos de un semidisco que no pertenecen a la orilla del semidisco es un disco, se concluye que la componente $Comp(W \times (0,\varepsilon),(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$ es un conjunto abierto en el disco

$$Comp(\mathcal{W},(z_0,0)) \setminus \mathbf{o}(Comp(\mathcal{W},(z_0,0))).$$

Finalmente, como $Comp(\mathcal{V},(z_0,0))$ es homeomorfo a $Comp(W\times (0,\varepsilon),(z_0,\frac{\varepsilon}{2}))$, la demostración del Lema 2.25 está completa. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo. En éste establecemos que si X es un continuo cuyo hiperespacio es un cono de dimensión finita y si Y denota al elemento de $C(X)$ que corresponde al vértice del cono, entonces todo subcontinuo no degenerado de X, que no contiene a Y, es un arco. Ya sabemos, por el Teorema 2.11, que en estas condiciones tales subcontinuos son gráficas finitas. En la demostración verificamos que dichas gráficas finitas no tienen puntos de ramificación y que no son curvas cerradas simples, así, por el Teorema 1.6, se concluye que deben ser arcos.

2.26 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que

$h(Y) = \nu(Z)$. Si A es un subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y, entonces A es un arco.

Demostración. Sea A un subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y. Por el Teorema 2.11, A es una gráfica finita. Vamos a demostrar que:

$$A \text{ no contiene puntos de ramificación.} \tag{2.48}$$

Para demostrar esto supóngase, por el contrario, que p es un punto de ramificación de la gráfica finita A. Como $Y \not\subset A$, $h(\{p\}) \neq \nu(Z)$. Luego, por el Lema 2.15, existen un número entero $n \geq 3$ y un conjunto abierto $\mathcal{V}$ en $C(X)$ que contiene al singular $\{p\}$, tales que la componente de $\mathcal{V}$ que contiene a $\{p\}$, $Comp(\mathcal{V}, \{p\})$, es homeomorfo al espacio

$$Cono(\mathcal{M}_n) \setminus B(\mathcal{M}_n).$$

Recordamos que el continuo $\mathcal{M}_n$ es la unión de una $(n-1)$-celda con n arcos mutuamente disjuntos, donde la intersección de cada uno de estos arcos con la $(n-1)$-celda es sólo uno de sus puntos extremos, ver la Notación 2.12. También, por el Lema 2.15, existe un n-odo simple en X, T_n, con punto de ramificación p, que no contiene a Y tal que

$$Comp(\mathcal{V}, \{p\}) \subset C(T_n). \tag{2.49}$$

Ahora, por el Lema 2.22, existe un $(n-1)$-odo simple, T^*, contenido en el n-odo T_n, con punto de ramificación p, cuya imagen bajo el homeomorfismo h está en la base del cono de Z. Es decir,

$$T^* \subset T_n \quad \text{y} \quad h(F_1(T^*)) \subset B(Z).$$

Como aclaramos en el Lema 2.22, si $n = 3$, T^* es un arco. Se tiene que $h(\mathcal{V}) \cap Cono(h(F_1(T^*)))$ es un conjunto abierto en el cono del $(n-1)$-odo $h(F_1(T^*))$ que contiene al punto $h(\{p\})$. Entonces existen un conjunto abierto W en $h(F_1(T^*))$ que contiene a $h(\{p\})$ y un número $\varepsilon > 0$ tales que

$$W \times [0, \varepsilon) \subset h(\mathcal{V}) \cap Cono(h(F_1(T^*))). \tag{2.50}$$

Ahora tomemos un $(n-1)$-odo simple T en $h(F_1(T^*))$ de tal manera que $T \subset W$ y $h(\{p\}) \in T$. Por otra parte, por (2.50), $T \times [0, \varepsilon) \subset h(\mathcal{V})$. Entonces tenemos que $T \times [0, \varepsilon)$ es un subconjunto conexo de $h(\mathcal{V})$ que contiene al punto $h(\{p\})$, luego

$$T \times [0, \varepsilon) \subset h(Comp(\mathcal{V}, \{p\})). \tag{2.51}$$

Denotemos $T = \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i$, donde L_i es un arco en $h(F_1(T^*))$ y $L_i \cap L_j = h(\{p\})$, si $i \neq j$. Pongamos, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathcal{N}_i = h^{-1}(L_i)$. Entonces $h^{-1}(T) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i$, cada $\mathcal{N}_i$ es un arco en $F_1(T^*)$ y $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \{\{p\}\}$ si $i \neq j$.

Tomemos una sucesión de singulares $\{\{p_i\}\}_{i \in \mathbb{N}}$ en el arco $\mathcal{N}_1$ que converja al singular $\{p\}$. Como $h(F_1(T^*)) \subset B(Z)$, podemos denotar al punto $h(\{p_i\})$ como $(q_i, 0)$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, $h(\{p_i\}) = (q_i, 0)$. Entonces $\{(q_i, 0)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en el arco L_1 que converge al punto $h(\{p\})$.

Observe que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{q_i\} \times [0, \varepsilon) \subset T \times [0, \varepsilon)$ y así, por (2.51), se tiene que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\{q_i\} \times [0, \varepsilon) \subset h(Comp(\mathcal{V}, \{p\})). \tag{2.52}$$

Denotemos $h(\{p\}) = (z_p, 0)$. Fijemos un número t en el intervalo abierto $(0, \varepsilon)$. Entonces, por (2.52), $\{(q_i, t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en $h(Comp(\mathcal{V}, \{p\}))$ que converge al punto (z_p, t).

Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea K_i el elemento de $Comp(\mathcal{V}, \{p\})$ tal que $h(K_i) = (q_i, t)$. Sea K el elemento de $Comp(\mathcal{V}, \{p\})$ tal que $h(K) = (z_p, t)$. Observe que la sucesión $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento K.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, pongamos $J_i = \{q_i\} \times [0, t]$. Como $t < \varepsilon$, por (2.52), se tiene que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$J_i \subset h(Comp(\mathcal{V}, \{p\})).$$

Entonces tenemos que $h^{-1}(J_i)$ es un arco contenido en la componente $Comp(\mathcal{V}, \{p\})$. De (2.49), se sigue que $h^{-1}(J_i)$ es un arco en el hiperespacio, $C(T_n)$, del n-odo simple T_n. Ahora vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. Existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq i_0$, los elementos del arco $h^{-1}(J_i)$ son continuos en el n-odo T_n que no contienen al punto de ramificación p.

Para demostrar esta afirmación, primero observe que, por (2) de la Proposición 2.1, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Aquí, necesariamente $M > n$. Ahora, del Lema 2.24, se deduce que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $i \geq i_0$ existe un conjunto abierto, $\mathcal{U}_i$, en $C(X)$ tal que $\{p_i\} \in \mathcal{U}_i$, $Comp(\mathcal{U}_i, \{p_i\})$ es un semidisco en $C(X)$ y

$$\{p_i\} \in \mathbf{o}(Comp(\mathcal{U}_i, \{p_i\})) \subset \mathcal{N}_1. \tag{2.53}$$

Vamos a demostrar que el número entero i_0 satisface lo establecido en la afirmación.

Fijemos un número entero $i \geq i_0$ y un elemento $E \in h^{-1}(J_i)$. Debemos demostrar que $p \notin E$. Existe un número s en el intervalo $[0,t]$ tal que $h(E) = (q_i, s)$.

Como $h(\{p_i\}) = (q_i, 0)$, se tiene que $h(\mathcal{U}_i)$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ que contiene al punto $(q_i, 0)$, la componente $Comp(h(\mathcal{U}_i), (q_i, 0))$ es un semidisco en $Cono(Z)$ tal que

$$(q_i, 0) \in \mathbf{o}(Comp(h(\mathcal{U}_i), (q_i, 0))) \subset B(Z).$$

Esto último se obtiene por (2.53) y ya que $h(Comp(\mathcal{U}_i, \{p_i\})) = Comp(h(\mathcal{U}_i), h(\{p_i\}))$ y $h(\mathcal{N}_1) \subset B(Z)$.

Por el Lema 2.25, existe un conjunto abierto, $\mathcal{V}_i$, en $Cono(Z)$ tal que $(q_i, s) \in \mathcal{V}_i$ y la componente $Comp(\mathcal{V}_i, (q_i, s))$ es un espacio homeomorfo a un conjunto abierto de un disco.

Pongamos $\mathcal{W}_i = h^{-1}(\mathcal{V}_i)$. Entonces $\mathcal{W}_i$ es un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $E \in \mathcal{W}_i$ y la componente $Comp(\mathcal{W}_i, E)$ es un espacio homeomorfo a un conjunto abierto de un disco. Ahora, supóngase que $p \in E$. Como $\mathcal{W}_i \cap C(T_n)$ es un conjunto abierto en $C(T_n)$ que contiene al elemento E, existe una n-celda, $\mathcal{Q}$, en $C(T_n)$ tal que

$$E \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{W}_i \cap C(T_n).$$

Se tiene que $\mathcal{Q}$ es un conjunto conexo que contiene al elemento E y que está contenido en $\mathcal{W}_i$. Luego, $\mathcal{Q} \subset Comp(\mathcal{W}_i, E)$, esto es imposible porque $dim(\mathcal{Q}) = n \geq 3$ y $dim(Comp(\mathcal{W}_i, E)) = 2$. Por esta contradicción se conluye que $p \notin E$, lo cual demuestra la afirmación.

Ahora observe que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{p_i\} \in h^{-1}(J_i) \cap \mathcal{N}_1$. De aquí, y de la afirmación que demostramos, se concluye que los elementos de $h^{-1}(J_i)$ son arcos contenidos en $\bigcup \mathcal{N}_1$. En particular, para cada $i \in \mathbb{N}$, $K_i \subset \bigcup \mathcal{N}_1$. Luego, como la sucesión

$\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a K, se tiene que $K \subset \bigcup \mathcal{N}_1$.

Con un argumentos similares, considerando una sucesión de puntos en el arco $\mathcal{N}_2$ que converge a $\{p\}$, se concluye que $K \subset \bigcup \mathcal{N}_2$.

Entonces $K = \{p\}$. Como $h(K) = (z_p, t)$ obtenemos que $h(\{p\}) = (z_p, t)$, lo cual es una contradicción puesto que $h(\{p\}) = (z_p, 0)$. Con todo esto hemos demostrado (2.48).

Ahora, como A no contiene puntos de ramificación, se tiene que A no contiene triodos simples. Entonces, por el Teorema 1.6, A es un arco o una curva cerrada simple.

Finalmente, vamos a demostrar que A no es una curva cerrada simple. Para demostrar esto, tomemos un conjunto abierto U en X tal que

$$A \subset U \quad \text{y} \quad Y \not\subset U. \tag{2.54}$$

Por el Teorema 1.7, existe un subcontinuo B de X tal que $A \subset B \subset U$ y $A \neq B$. De (2.54), se sigue que B es un subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y. Entonces, como lo hemos demostrado anteriormente, B es un arco o una curva cerrada simple. Como $A \subset B$ y $A \neq B$, se concluye que A es un arco. Con todo esto la demostración del Teorema 2.26 está completa. ■

Capítulo 3

La propiedad cono=hiperespacio

3.1 Definición. Sea Y un continuo. Se dice que Y tiene la *propiedad cono=hiperespacio* si existe un homeomorfismo

$$h : C(Y) \to Cono(Y)$$

tal que $h(Y) = \nu(Y)$ y $h(F_1(Y)) = B(Y)$.

En este capítulo, igual que en el anterior, en general las hipótesis son: X es un continuo cuyo hiperespacio es homeomorfo al cono de un continuo de dimensión finita, Z. Denotamos por Y al elemento de $C(X)$ al cual le corresponde el vértice del $Cono(Z)$, bajo un homeomorfismo dado. En esta parte, analizaremos las propiedades topológicas del continuo Y. Como una consecuencia del teorema principal en el Capítulo 2, Teorema 2.26, sabemos que cada subcontinuo propio no degenerado de Y es un arco. Aquí vamos a demostrar que, si Y es no degenerado, entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. Este resultado, considerando el Teorema 80.2 de [14], nos proporciona mucha información en relación con la topología de Y.

Para obtener el resultado indicado, consideramos las dos posibilidades excluyentes: (1) Y es descomponible y (2) Y es indescomponible. En el caso (1), Teorema 3.4, demostraremos que Y es un arco o una curva cerrada simple y, como veremos en los Ejemplos 3.2 y 3.3, este tipo de continuos tienen la propiedad cono=hiperespacio. El caso (2) es la parte difícil de este capítulo. Después de la demostración del Teorema 3.4 explicaremos los pasos que daremos para obtener nuestro resultado en este segundo caso.

Iniciamos con los ejemplos que muestran que el intervalo unitario, $[0,1]$, y el círculo unitario en el plano, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, tienen la propiedad cono=hiperespacio. Evidentemente éstos muestran que un arco y una curva cerrada simple también tienen esta propiedad.

3.2 Ejemplo. El intervalo unitario $[0,1]$ tiene la propiedad cono =hiperespacio.

Vamos a dar las ideas generales para justificar esto, en [14, Ejemplo 5.1] se muestra algo parecido con todos los detalles. Observe que el cono sobre el intervalo $[0,1]$, $Cono([0,1])$, es homeomorfo a la región triangular del plano cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$, donde podemos considerar que la base, $B([0,1])$, es el segmento con puntos extremos $(0,0)$ y $(1,0)$ y que el vértice, $\nu([0,1])$, es el punto $(\frac{1}{2},1)$.

Por otra parte, note que cada elemento del hiperespacio, $C([0,1])$, es un intervalo, tal vez degenerado, de la forma $[a,b]$, donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. Así cada subcontinuo, $[a,b]$, del intervalo $[0,1]$, está completamente determinado por su punto medio, $\frac{a+b}{2}$, y su longitud, $b-a$.

Ahora, definimos $h([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$ para cada elemento $[a,b] \in C([0,1])$, donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. No es difícil demostrar que h define un homeomorfismo entre $C([0,1])$ y $Cono([0,1])$ tal que $h([0,1]) = \nu([0,1])$ y $h(F_1([0,1])) = B([0,1])$. ■

3.3 Ejemplo. El círculo unitario S^1 en el plano tiene la propiedad cono=hiperespacio.

Primero observe que el cono sobre S^1, $Cono(S^1)$ es homeomorfo al siguiente subconjunto del espacio $\mathbb{R}^3$

$$\{((1-r)cos\theta, (1-r)sen\theta, r) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 0 \leq r \leq 1\}$$

donde la base es dada por $B(S^1) = \{(cos\theta, sen\theta, 0) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y el vértice es $\nu(S^1) = (0,0,1)$.

Por otra parte, considere un subcontinuo propio A de S^1. Entonces A es un arco o un punto. Si A es un arco, denotamos por $l(A)$ a la longitud de arco de A y por $m(A)$ al punto de A que divide a A en dos subarcos de la misma longitud. Llamamos a $m(A)$ el punto medio de A. Si A es un punto, digamos $A = \{a\}$, definimos $l(A) = 0$ y $m(A) = a$. Sean R_0 y R_A los semirayos en el plano que salen del origen y pasan por los puntos $(1,0)$ y $m(A)$, respectivamente. Denotamos por $\theta(A)$ al ángulo que describen, en la dirección contraria a las manecillas del reloj, los semirayos R_0 y R_A. Es claro que cada subcontinuo propio A de S^1 está determinado por su longitud $l(A)$ y el ángulo $\theta(A)$.

Ahora definimos, para cada subcontinuo propio A de S^1,

$$h(A) = ([1 - \tfrac{l(A)}{2\pi}]cos\theta(A), [1 - \tfrac{l(A)}{2\pi}]sen\theta(A), \tfrac{l(A)}{2\pi})$$

y $h(S^1) = (0,0,1)$. Con argumentos similares a los utilizados en [14, Ejemplo 5.2], se puede demostrar que h define un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y $Cono(S^1)$ tal que $h(S^1) = \nu(S^1)$ y $h(F_1(S^1)) = B(S^1)$. ■

Ahora vamos a demostrar el resultado planteado al inicio, en el caso en el cual el continuo que corresponde con el vértice es descomponible.

3.4 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si Y es descomponible, entonces Y es un arco o una curva cerrada simple. En consecuencia, Y tiene la propiedad cono=hiperespacio.

Demostración. Pongamos $Y = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de Y. Por el Teorema 2.26, todos los subcontinuos propios no degenerados de Y son arcos. Entonces Y es la unión de dos arcos, A y B. Se tiene que Y es un continuo localmente conexo que no contiene triodos simples. Luego, por el Teorema 1.6, se concluye que Y es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, de los Ejemplos 3.2 y 3.3, se sigue que Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. ■

Todo el trabajo que sigue en este capítulo tiene la finalidad de obtener el resultado análogo al Teorema 3.4, para el caso en el cual Y es un subcontinuo indescomponible no degenerado de X. Es decir, el objetivo final en esta parte es demostrar que, también en este caso, Y tiene la propiedad cono=hiperespacio.

Consideremos un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$. A continuación describimos, en términos generales, los pasos esenciales para obtener nuestro resultado principal:

(1) Demostraremos que la imagen de los elementos singulares de $C(Y)$ pertenece a la base del cono de Z. Es decir, $h(F_1(Y)) \subset B(Z)$. Obtenemos esto en el Teorema 3.8.

(2) De acuerdo con (1), podemos considerar que $Cono(h(F_1(Y)))$ está contenido en $Cono(Z)$ y que los vértices de ambos conos coinciden. Demostraremos que el cono sobre $h(F_1(Y))$ es un subconjunto de $h(C(Y))$, o sea

$$Cono(h(F_1(Y))) \subset h(C(Y)).$$

Esto lo hacemos en el Teorema 3.9.

(3) Veremos que los elementos singulares de $C(Y)$ son los únicos elementos de $C(Y)$ cuya imagen pertenece a $B(Z)$. Es decir, si $A \in C(Y)$, $h(A) \in B(Z)$ si y sólo si $A \in F_1(Y)$. Esto aparece en el Teorema 3.17.

(4) Con lo anterior, para concluir que Y tiene la propiedad cono=hiperespacio, sólo resta demostrar que

$$Cono(h(F_1(Y))) \supset h(C(Y)),$$

lo cual obtenemos en el último resultado de este capítulo, Teorema 3.19.

Primero vamos a ver, en la proposición siguiente, que en estas condiciones Y es el único subcontinuo indescomponible no degenerado de X.

3.5 Proposición. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que

$h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que X no es hereditariamente descomponible. Entonces Y es el único subcontinuo indescomponible y no degenerado de X.

Demostración. Sea Y' un subcontinuo indescomponible y no degenerado de X. Vamos a demostrar que $Y = Y'$. Para esto supóngase, por el contrario, que $Y \neq Y'$. Entonces $h(Y') \neq \nu(Z)$. Por el Lema 1.41, $C(X) \setminus \{Y'\}$ tiene una cantidad infinita de arco componentes. Por otra parte, como $h(Y') \in Cono(Z) \setminus \{\nu(Z)\}$, por el Lema 1.54, $Cono(Z) \setminus \{h(Y')\}$ tiene a lo más dos arco componentes. Como $C(X) \setminus \{Y'\}$ y $Cono(Z) \setminus \{h(Y')\}$ son espacios homeomorfos, tenemos una contradicción. Esto demuestra que $Y = Y'$. Así, Y es el único subcontinuo indescomponible y no degenerado de X. ■

3.6 Observación. En la prueba de la Proposición 3.5 se observa que, considerando las hipótesis de la Proposición 3.5, si Y es el único subcontinuo indescomponible y no degenerado de X, entonces, para cualquier homeomorfismo $h' : C(X) \to Cono(Z)$, se tiene que $h'(Y) = \nu(Z)$.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que la imagen, bajo un homeomorfismo dado $h : C(X) \to Cono(Z)$, de los singulares del único subcontinuo indescomponible no degenerado, Y, de X es un subconjunto de la base del cono de Z. Es decir, demostraremos que $h(F_1(Y)) \subset B(Z)$. Haremos esto en el Teorema 3.8. Para este fin necesitamos el lema que sigue.

3.7 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$.

Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Si $x \in Y$ y $h(\{x\}) \notin B(Z)$, entonces existe un arco, A, en Y tal que

(1) A es maximal con respecto de las siguientes propiedades: $x \in A$ y, para cada $a \in A$, $\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\}))$,

(2) $h(F_1(A)) = \{\pi(h(\{x\}))\} \times [0, t]$, para algún número t tal que $0 < t < 1$, y

(3) para cada punto $y \in Y \setminus A$, $\pi(h(\{y\})) \neq \pi(h(\{x\}))$.

Demostración. Para ver (1), sea

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \ = \{A : \ & A \text{ es un arco en } Y, \ x \in A \ \text{ y, para} \\ & \text{cada } a \in A, \ \pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\}))\}.\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado no vacío en $C(Y)$ y así, por la Proposición 1.33, tendremos la conclusión en (1).

Sea $\mathcal{W}$ un conjunto abierto de $Cono(Z)$ tal que

$$h(\{x\}) \in \mathcal{W} \ \text{ y } \ \mathcal{W} \cap B(Z) = \emptyset.$$

Entonces $h^{-1}(\mathcal{W}) \cap F_1(Y)$ es un conjunto abierto de $F_1(Y)$ que contiene al conjunto singular $\{x\}$. Como Y es no degenerado, $Y \neq \{x\}$. Entonces existe un conjunto abierto propio, $\mathcal{U}$, de $F_1(Y)$ tal que

$$\{x\} \in \mathcal{U} \subset h^{-1}(\mathcal{W}) \cap F_1(Y).$$

Ahora, por el Teorema 1.7, existe un subcontinuo no degenerado, A, de Y tal que $\{x\} \in F_1(A) \subset \mathcal{U}$. Note que

$$Y \not\subset A \ \text{ y } \ h(F_1(A)) \cap B(Z) = \emptyset.$$

Entonces, por la Proposición 2.19, se tiene que $\pi(h(F_1(A))) = \{\pi(h(\{x\}))\}$. Esto significa que A es un arco en Y y que, para cada $a \in A$, $\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\}))$. Así $A \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\mathcal{C}$ es un conjunto no vacío.

Ahora vamos demostrar que $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado en $C(Y)$. Para esto sea $A \in Cl_{C(Y)}\mathcal{C}$. Entonces existe una sucesión de elementos en $\mathcal{C}$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge en $C(Y)$ al elemento A. Por la condición (2) de la Definición 1.23, $x \in A$. Ahora sea $a \in A$. Por la condición (1) de la Definición 1.23 existe una sucesión, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge al punto a y tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $A_n \in \mathcal{C}$, se tiene que $\pi(h(\{a_n\})) = \pi(h(\{x\}))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por continuidad, se tiene que, $\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\}))$. Hemos demostrado que, para cada $a \in A$,

$$\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\})).$$

Ya que $\pi(h(F_1(A))) = \{\pi(h(\{x\}))\}$, concluimos que $h(F_1(A)) \subset \{\pi(h(\{x\}))\} \times [0,1]$. De manera que $h(F_1(A))$ es un subcontinuo de un arco. Esto implica que A mismo es un arco. Con esto $A \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado en $C(Y)$. Esto demuestra (1).

Para demostrar (2) observe que, por la definición de la colección $\mathcal{C}$, la imagen bajo el homeomorfismo h de los singulares del arco maximal A, $h(F_1(A))$, está contenida en el segmento $\{\pi(h(\{x\}))\} \times [0,1)$. Es decir, existen números s y t tales que $0 \leq s < t < 1$ y

$$h(F_1(A)) = \{\pi(h(\{x\}))\} \times [s,t].$$

Vamos a demostrar $s = 0$. Para esto supóngase, por el contrario, que $s > 0$. Luego,

$$h(F_1(A)) \cap B(Z) = \emptyset.$$

Sea $\mathcal{W}$ un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que

$$h(F_1(A)) \subset \mathcal{W} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} \cap B(Z) = \emptyset.$$

Se tiene que $h^{-1}(\mathcal{W}) \cap F_1(Y)$ es un conjunto abierto de $F_1(Y)$ que contiene a $F_1(A)$. Como Y es indescomponible, $Y \neq A$, luego existe un subconjunto abierto propio, $\mathcal{U}$, de $F_1(Y)$ tal que

$$F_1(A) \subset \mathcal{U} \subset h^{-1}(\mathcal{W}) \cap F_1(Y).$$

Ahora, por el Teorema 1.7, existe un subcontinuo B de Y tal que

$$F_1(A) \subset F_1(B) \subset \mathcal{U} \quad \text{y} \quad A \neq B.$$

Note que $h(F_1(B)) \cap B(Z) = \emptyset$. Luego, por la Proposición 2.19, se tiene que $\pi(h(F_1(B)))$ es un punto en $B(Z)$ y, en consecuencia, B es un arco en Y. Como $x \in B$, se obtiene que

$$\text{para todo punto } b \in B, \ \ \pi(h(\{b\})) = \pi(h(\{x\})).$$

Esto significa que $B \in \mathcal{C}$. Como $A \subset B$ y $A \neq B$, esto contradice la maximalidad del arco A. Por lo tanto, $s = 0$. Así hemos demostrado (2).

Ahora demostraremos (3). Para este fin, supongamos que la conclusión en (3) es falsa, es decir, supongamos que $\pi(h(\{y\})) = \pi(h(\{x\}))$ para algún punto $y \in Y \setminus A$. Entonces

$$h(\{y\}) = (\pi(h(\{x\})), r) \ \ \text{para algún } r \in [0, 1).$$

Por (2) tenemos que $h(F_1(A)) = \{\pi(h(\{x\}))\} \times [0,t]$, para algún número t, $0 < t < 1$. Como $y \notin A$, obtenemos que $r > t$. Entonces $h(\{y\}) \notin B(Z)$. Luego, por (1), existe un arco (maximal) B en Y tal que $y \in B$ y

$$\text{para todo punto } b \in B, \quad \pi(h(\{b\})) = \pi(h(\{y\})).$$

De (2) se sigue que $h(F_1(B)) = \{\pi(h(\{y\}))\} \times [0,t']$, para algún número $t' > r$. Como $\pi(h(\{y\})) = \pi(h(\{x\}))$ y $r > t$, se deduce que

$$h(F_1(A)) \subset h(F_1(B)).$$

Esto implica que $A \subset B$ y $A \neq B$, lo cual contradice la maximalidad del arco A. Con esto (3) está demostrado. Así la demostración del Lema 3.7 está completa. ■

3.8 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Entonces, para cada $x \in Y$, $h(\{x\}) \in B(Z)$.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, supóngase que existe un punto $x \in Y$ tal que

$$h(\{x\}) \notin B(Z). \tag{3.1}$$

Entonces, por (1) del Lema 3.7, existe un arco, A, en Y que contiene al punto x tal que, para todo $a \in A$, $\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x\}))$ y A es maximal con estas propiedades. Por otro lado, por (2) del Lema 3.7,

$$h(F_1(A)) = \{\pi(h(\{x\}))\} \times [0,t] \tag{3.2}$$

para algún t tal que $0 < t < 1$.

Sea κ la composante de x en Y. Entonces, por el Lema 1.14, existe una sucesión, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos en $\kappa \setminus A$ tal que

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge al punto } x. \tag{3.3}$$

Entonces, de (3.1) y (3.3), podemos suponer, sin perder generalidad, que

$$h(\{x_n\}) \notin B(Z), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por (3) del Lema 3.7, se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi(h(\{x\})) \neq \pi(h(\{x_n\})). \tag{3.4}$$

Note que la sucesión $\{\pi(h(\{x_n\}))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la base $B(Z)$ al punto $\pi(h(\{x\}))$. Luego, por (3.4), sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\pi(h(\{x_n\})) \neq \pi(h(\{x_m\})) \text{ si } n \neq m. \tag{3.5}$$

Ahora, aplicando (1) del Lema 3.7, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un arco, A_n, en Y que contiene al punto x_n tal que, para todo $a \in A_n$, $\pi(h(\{a\})) = \pi(h(\{x_n\}))$ y A_n es maximal con estas propiedades. Por otro lado, por (2) del Lema 3.7, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número t_n tal que $0 < t_n < 1$ y

$$h(F_1(A_n)) = \{\pi(h(\{x_n\}))\} \times [0, t_n]. \tag{3.6}$$

Por (3.4), (3.5) y (3.6), se tiene que, si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$ entonces

$$A \cap A_n = \emptyset \text{ y } A_n \cap A_m = \emptyset. \tag{3.7}$$

Por (3.2) y (3.6), existen puntos $a \in A$ y $a_n \in A_n$ tales que

$$\begin{aligned} h(\{a\}) &= (\pi(h(\{x\})), 0) \quad \text{y} && (3.8) \\ h(\{a_n\}) &= (\pi(h(\{x_n\})), 0) && (3.9) \end{aligned}$$

Observe que a y a_n son puntos extremos de los arcos A y A_n, respectivamente. También observe que los puntos a y a_n pertenecen a la composante κ de x en Y. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subcontinuo propio, B_n, de Y tal que $a, a_n \in B_n$. Por el Teorema 2.26, para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n es un arco en Y. Por (3.8) y (3.9), se tiene que

$$h(\{a\}) \in B(Z) \quad \text{y} \quad h(\{a_n\}) \in B(Z). \tag{3.10}$$

Luego, por (3.10) y el Lema 2.20, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h(F_1(B_n)) \subset B(Z). \tag{3.11}$$

Ahora, fijemos un número natural arbitrario $M \in \mathbb{N}$. De (3.6) y (3.11), se sigue que para cualesquiera elementos $n, m \in \{1, ..., M\}$,

$$h(F_1(A_n)) \cap h(F_1(B_m)) \subset \{h(\{a_1\}), ..., h(\{a_M\})\}.$$

Esto significa que si $n, m \in \{1, ..., M\}$ entonces

$$A_n \cap B_m \subset \{\{a_1\}, ..., \{a_M\}\} \tag{3.12}$$

En particular, cuando $n = m$, tenemos que $A_n \cap B_n = \{a_n\}$. Pongamos $B = \bigcup_{n=1}^{M} B_n$. Como $a \in \bigcap_{n=1}^{M} B_n$, entonces B es un subcontinuo de Y. Por (3.12), se tiene que, para cada $n \in \{1, ..., M\}$, $A_n \cap B = \{a_n\}$. Pongamos

$$C = (\bigcup_{n=1}^{M} A_n) \cup B.$$

Tenemos que C es un subcontinuo de Y tal que

$$C \setminus B = \bigcup_{n=1}^{M} (A_n \setminus \{a_n\}).$$

Por (3.7) se concluye que C es un M-odo en Y. Hemos demostrado que, para cada número $M \in \mathbb{N}$, Y contiene un M-odo. Esto contradice (2) de la Proposición 2.1. Por lo tanto, para cada $x \in Y$, $h(\{x\}) \in B(Z)$. ∎

Considerando la conclusión del Teorema 3.8, en lo que resta de este capítulo el objetivo es demostrar que

$$h(C(Y)) = Cono(h(F_1(Y))),$$

lo cual, puesto que $h(Y) = \nu(Z)$ y el vértice del cono sobre Z coincide con el vértice del cono sobre $h(F_1(Y))$, significa que Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. El primer paso para esto lo damos en el teorema que sigue, en donde demostramos que el cono sobre la imagen de los singulares de Y, $Cono(h(F_1(Y)))$, es un subconjunto de la imagen del hiperespacio de Y, $h(C(Y))$.

3.9 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Entonces $Cono(h(F_1(Y)))$ es un subconjunto de $h(C(Y))$.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa. Pongamos

$$\mathcal{U} = h(C(X) \setminus C(Y)). \tag{3.13}$$

Entonces $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que

$$Cono(h(F_1(Y))) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

Por (3.13), $\nu(Z) \notin \mathcal{U}$. Luego, podemos proyectar $\mathcal{U}$ en la base $B(Z)$. Tenemos que $h(F_1(Y)) \cap \pi(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto no vacío del continuo $h(F_1(Y))$.

Fijemos un número natural arbitrario $M \in \mathbb{N}$. De la hipótesis sobre Y, se obtiene que $h(F_1(Y))$ es un continuo indescomponible y no degenerado en la base del cono de Z. Entonces $h(F_1(Y))$ tiene una cantidad no numerable de composantes, disjuntas entre sí, cada una de las cuales es un conjunto denso en $h(F_1(Y))$, ver Proposición 1.12 y Teorema 1.13. Luego, podemos elegir M puntos, $y_1, ..., y_M$, en composantes diferentes, $\kappa_1, ..., \kappa_M$, de Y, respectivamente, tales que

$$h(\{y_i\}) \in \pi(\mathcal{U}), \ \ i \in \{1, ..., M\}.$$

Por la definición de $\mathcal{U}$, ver (3.13), existen elementos de $C(X) \setminus C(Y)$, $A_1, ..., A_M$, tales que

$$\pi(h(A_i)) = h(\{y_i\}), \ \ i \in \{1, ..., M\}. \tag{3.14}$$

(3.14) indica que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $h(A_i)$ es un punto en el segmento $\{h(\{y_i\})\} \times [0, 1)$. Para cada $i \in \{1, ..., M\}$, denotamos por I_i al arco contenido en el segmento $\{h(\{y_i\})\} \times [0, 1)$ con puntos extremos $h(\{y_i\})$ y $h(A_i)$. Pongamos $\mathcal{J}_i = h^{-1}(I_i)$. Entonces $\mathcal{J}_i$ es un arco en $C(X)$ con puntos extremos $\{y_i\}$ y A_i. Note que si $i, j \in \{1, ..., M\}$, $i \neq j$, entonces $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, ..., M\}$, consideremos una parametrización del arco $\mathcal{J}_i$, $\alpha_i : [0, 1] \to \mathcal{J}_i$ tal que $\alpha_i(0) = \{y_i\}$ y $\alpha_i(1) = A_i$.

Definimos

$$t_i = \textit{ínf}\,\{t \in [0,1] : \alpha_i(t) \in C(X) \setminus C(Y)\}.$$

Se tiene que $\alpha_i([0,t_i])$ es un arco en $C(Y)$. Como $Y \notin \alpha_i([0,t_i])$, entonces $\alpha_i([0,t_i])$ está contenido en una arco componente de $C(Y) \setminus \{Y\}$. Como $\{y_i\} \in \alpha_i([0,t_i]) \cap C(\kappa_i)$, del Lema 1.40, se sigue que

$$\alpha_i([0,t_i]) \subset C(\kappa_i), \;\; i \in \{1,...,M\}. \tag{3.15}$$

Pongamos $B_i = \bigcup \alpha_i([0,t_i])$. Entonces, por el Teorema 1.27, B_i es un subcontinuo de Y. Por (3.15), $B_i \subset \kappa_i$. Para cada $i \in \{1,...,M\}$, tomemos un conjunto abierto, U_i, en X de tal forma que

$$\begin{gathered} B_i \subset U_i \;\; \text{y} \\ U_i \cap U_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Tenemos que $\alpha_i([0,t_i]) \subset \langle U_i \rangle$ y $\langle U_i \rangle \cap \langle U_j \rangle = \emptyset$, si $i \neq j$, ver Notación 1.21. Por el Teorema 1.22, cada $\langle U_i \rangle$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Por la continuidad de α_i, para cada $i \in \{1,...,M\}$, existe un número $s_i > t_i$ tal que

$$\alpha_i(s_i) \notin C(Y) \;\; \text{y} \tag{3.17}$$
$$\alpha_i([0,s_i]) \subset \langle U_i \rangle. \tag{3.18}$$

Para cada $i \in \{1,...,M\}$, pongamos $C_i = \bigcup \alpha_i([0,s_i])$. Por el Teorema 1.27, cada C_i es un subcontinuo de X. De (3.18), se sigue que $C_i \subset U_i$. Luego, de (3.16), se deduce que

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \text{si } i \neq j. \tag{3.19}$$

Como $B_i \subset Y \cap C_i$, se tiene que $Y \cup C_i$ es un subcontinuo de X. Pongamos $C = \bigcup_{i=1}^{M}(Y \cup C_i)$. Es claro que C es un subcontinuo de X. Note que

$$C \setminus Y = \bigcup_{i=1}^{M}(C_i \setminus Y).$$

Ahora, de (3.19) y de (3.17), se sigue que, si $i \neq j$, $C_i \setminus Y$ y $C_j \setminus Y$ son conjuntos separados y no vacíos. Esto prueba que C es un M-odo en X. Hemos demostrado que, para cada $M \in \mathbb{N}$, X contiene un M-odo. Esto es una contradicción con (2) de la Proposición 2.1. Esto demuestra el Teorema 3.9. ∎

Ahora, considerando los resultados obtenidos hasta aquí, para demostrar que Y tiene la propiedad cono=hiperespacio, resta justificar que

$$h(C(Y)) \subset Cono(h(F_1(Y))).$$

Sin embargo, hacer esto no es inmediato, aún necesitamos tener más información acerca de la forma en que se localiza la imagen del hiperespacio, $h(C(Y))$, en el cono de Z.

El paso que sigue en esta dirección es demostrar que los elementos de $F_1(Y)$ son los únicos elementos de $C(Y)$ cuya imagen bajo el homeomorfismo, h, pertenece a la base del cono de Z. Primero, en el Teorema 3.11, vamos a demostrar un caso particular de esto. Después en el Teorema 3.17 completamos este paso.

Para demostrar el Teorema 3.11 necesitamos el lema que sigue. Este lema expresa una propiedad general de la topología de los conos, dice que las componentes de las vecindades de los puntos en la base de un cono no pueden ser discos. Recordamos que un disco en un espacio dado es un subespacio que es homeomorfo al disco abierto en el plano, $\mathcal{B}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Por otra parte, un semidisco es un subespacio que es homeomorfo a $\mathcal{B}_2 = \{(x,y) \in \mathcal{B}_1 : y \geq 0\}$. Si $\mathcal{U}$ es un semidisco la orilla de $\mathcal{U}$, la cual denotamos por $\mathbf{o}(\mathcal{U})$, es la parte de $\mathcal{U}$ que se corresponde bajo un homeomorfismo con el subconjunto $\{(x,y) \in \mathcal{B}_2 : y = 0\}$. Estos últimos conceptos fueron introducidos en la Definición 2.17 (vea también la Notación 2.16).

3.10 Lema. Sean Z un continuo y q un punto de $Cono(Z)$. Supóngase que $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que $q \in \mathcal{W}$ y la componente de $\mathcal{W}$ que contiene a q, $Comp(\mathcal{W}, q)$, es un disco en $Cono(Z)$. Entonces $q \notin B(Z)$.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa, es decir, supóngase que $q \in B(Z)$. Tomemos un conjunto abierto, W, en Z y un número $\varepsilon_1 > 0$ tales que

$$q \in W \times [0, \varepsilon_1) \subset \mathcal{W}.$$

Para simplificar la notación pongamos

$$\mathcal{K}_0 = Comp(\mathcal{W}, q) \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_1 = Comp(W \times [0, \varepsilon_1), q). \tag{3.20}$$

Note que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_0$. Vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación 1. $\mathcal{K}_1$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$.

Para demostrar esta afirmación, fijemos un punto $p \in \mathcal{K}_1$. Note que la intersección

$$(W \times [0, \varepsilon_1)) \cap \mathcal{K}_0$$

es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$ que contiene al punto p. Por hipótesis, $\mathcal{K}_0$ es un disco, así $\mathcal{K}_0$ es un espacio localmente conexo. Entonces existe un conjunto abierto, $\mathcal{U}$, de $\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{U}$ es conexo y

$$p \in \mathcal{U} \subset (W \times [0, \varepsilon_1)) \cap \mathcal{K}_0.$$

Se tiene que $\mathcal{U}$ es un conjunto conexo contenido en $W \times [0, \varepsilon_1)$ tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$ (p es un punto en esta intersección). Luego, por la definición de $\mathcal{K}_1$, ver (3.20), se deduce que $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_1$. Hemos obtenido que $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en la componente $\mathcal{K}_0$ tal que $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{K}_1$. Esto demuestra la Afirmación 1.

Ahora, como $\mathcal{K}_0$ es un disco y $\mathcal{K}_1$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$, existe un disco (abierto), B, en $\mathcal{K}_0$ tal que $q \in B$, $Cl_{\mathcal{K}_0}B \subset \mathcal{K}_1$ y $Cl_{\mathcal{K}_0}B$ es homeomorfo al disco cerrado en el plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que

$$\mathcal{V} \subset W \times [0, \varepsilon_1) \quad \text{y} \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1 = B. \tag{3.21}$$

Ahora, sean V un conjunto abierto en Z y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $q \in V \times [0, \varepsilon_2) \subset \mathcal{V}$. Pongamos

$$\mathcal{K}_2 = Comp(V \times [0, \varepsilon_2), q).$$

Note que $\mathcal{K}_2$ es un conjunto conexo contenido en $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{V} \subset W \times [0, \varepsilon_1)$, ver (3.21), y como $q \in \mathcal{K}_2$, se tiene que $\mathcal{K}_2$ es un conjunto conexo contenido en $W \times [0, \varepsilon_1)$ tal que $\mathcal{K}_2 \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$, así $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$. En consecuencia, puesto que $\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1 = B$, tenemos que

$$\mathcal{K}_2 \subset B. \tag{3.22}$$

Con argumentos similares a los utilizados en la demostración de la Afirmación 1, se demuestra que $\mathcal{K}_2$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_1$. Así $\mathcal{K}_2$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$.

Como $Comp(V \times [0, \varepsilon_2), q) = Comp(V, q) \times [0, \varepsilon_2)$, se sigue que

$$\mathcal{K}_2 = Comp(V, q) \times [0, \varepsilon_2). \tag{3.23}$$

Para continuar necesitamos lo que establece la siguiente afirmación.

Afirmación 2. La proyección $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ es un arco o una curva cerrada simple en la base de $Cono(Z)$.

Para demostrar esta afirmación, primero note que $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ es un continuo localmente conexo en $B(Z)$. Ahora, por el Teorema 1.6, basta demostrar que $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ no contiene un triodo simple. Para esto supóngase, por el contrario, que $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ contiene un triodo simple T'. Como $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ es un continuo arco conexo, ver Teorema 1.5, utilizando el triodo simple T' se puede construir un triodo simple T en $\pi(Cl_{\mathcal{K}_0} B)$ tal que $q \in T$.

Como $Cl_{\mathcal{K}_0} B \subset \mathcal{K}_1 \subset W \times [0, \varepsilon_1)$, se tiene que $T \subset W$. Así, $T \times [0, \varepsilon_1) \subset W \times [0, \varepsilon_1)$. Luego, puesto que $W \times [0, \varepsilon_1) \subset \mathcal{W}$, se concluye que $T \times [0, \varepsilon_1)$ es un conjunto conexo que contiene al punto q y que está contenido en $\mathcal{W}$. Entonces, de la definición de $\mathcal{K}_0$, ver (3.20), se obtiene que $T \times [0, \varepsilon_1) \subset \mathcal{K}_0$. Esto es imposible ya que, por hipótesis, $\mathcal{K}_0$ es un disco. Así hemos demostrado la Afirmación 2.

Finalmente, de (3.22) y (3.23), se sigue que $Comp(V, q) \subset \pi(B)$. Por otra parte, como $\mathcal{K}_2$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$, se tiene que $Comp(V, q)$ es no degenerado. Con esto y con la

Afirmación 2, se obtiene que $Comp(V, q)$ es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso se puede tomar un conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $\mathcal{K}_2$ tal que $\mathcal{U}$ es un semidisco y $q \in \mathbf{o}(\mathcal{U})$. Como $\mathcal{K}_2$ es un conjunto abierto en $\mathcal{K}_0$, se tiene que el semidisco $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en el disco $\mathcal{K}_0$. Esto es una contradicción. Así el Lema 3.10 está demostrado. ∎

Ahora, utilizando el Lema 3.10, vamos a demostrar que, bajo cierta restricción (vea la condición $A \subset B^\circ$ en el teorema que sigue), la imagen de los elementos no degenerados de $C(Y)$ no pertenece a la base del cono de Z. Recordamos que si A es un arco entonces $A^\circ = A \setminus \{a, b\}$, donde a y b son los puntos extremos del arco A, ver la Notación 2.16.

3.11 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Si A es un arco en Y y existe un arco, B, en X tal que $A \subset B^\circ$, entonces $h(A) \notin B(Z)$.

Demostración. Como Y es un continuo indescomponible no degenerado y B es un arco, Y no está contenido en B. Sea V un conjunto abierto en X tal que

$$B \subset V \quad \text{y} \quad Y \not\subset V. \tag{3.24}$$

Sea U un conjunto abierto en X tal que $B \subset U \subset \overline{U} \subset V$. Pongamos

$$\mathcal{C} = Cl_{C(X)}Comp(\langle U \rangle, B) \quad \text{y} \quad E = \bigcup \mathcal{C}. \tag{3.25}$$

Entonces, por el Lema 1.47, E es un subcontinuo no degenerado propio de X y $F_1(E) \subset \mathcal{C}$. Como $\overline{U} \subset V$ se tiene que $\mathcal{C} \subset \langle V \rangle$.

De esto último y de (3.24) se obtiene que $Y \not\subset E$. Entonces, por el Teorema 2.26, E es un arco en X. Sean e_1 y e_2 los puntos extremos del arco E.

Denotemos por L_1 al segmento en el plano con puntos extremos $(0,0)$ y $(1,0)$, por L_a al segmento en el plano con puntos extremos $(0,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$ y por L_b al segmento con puntos extremos $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$. Como se muestra en el Ejemplo 3.2, el hiperespacio del arco E, $C(E)$, es homeomorfo a la región triangular en el plano limitada por los segmentos L_1, L_a y L_b de tal forma que los conjuntos $F_1(E)$, $C(E,e_1)$ y $C(E,e_2)$ (ver Notación 1.39), se corresponden con los segmentos L_1, L_a y L_b, respectivamente.

Por otro lado, de la definición del arco E, ver (3.25), se tiene que $B \subset E$. Luego, $A \subset E^{\circ}$. Esto significa que A no es un elemento de $F_1(E) \cup C(E,e_1) \cup C(E,e_2)$. Entonces A tiene una base de vecindades en $C(E)$ las cuales son discos.

Como $\langle U \rangle \cap C(E)$ es un conjunto abierto en $C(E)$ que contiene al elemento A, existe un disco (abierto), $\mathcal{V}$, en $C(E)$ tal que

$$A \in \mathcal{V} \subset \langle U \rangle \cap C(E).$$

Sea $\mathcal{W}'$ un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $\mathcal{W}' \cap C(E) = \mathcal{V}$. Pongamos $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \cap \langle U \rangle$, entonces $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $C(X)$. Como $\mathcal{W} \cap C(E) = \mathcal{W}' \cap \langle U \rangle \cap C(E) = \langle U \rangle \cap \mathcal{V} = \mathcal{V}$, se tiene que

$$\mathcal{W} \cap C(E) = \mathcal{V}. \tag{3.26}$$

Ahora vamos a demostrar que $Comp(\mathcal{W}, A) = \mathcal{V}$. Para esto note que $A \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Como $\mathcal{V}$ es un disco, se tiene que $\mathcal{V}$

es un conjunto conexo. Esto demuestra que

$$\mathcal{V} \subset Comp(\mathcal{W}, A).$$

Para demostrar la inclusión contraria, fijemos un elemento C en $Comp(\mathcal{W}, A)$. Ahora note que, como $A \subset B \subset U$,

$$Comp(\langle U \rangle, A) = Comp(\langle U \rangle, B).$$

Luego, como $\mathcal{W} \subset \langle U \rangle$, se tiene que

$$Comp(\mathcal{W}, A) \subset Comp(\langle U \rangle, B).$$

Entonces $C \in \mathcal{C}$. Así, por (3.25), $C \subset E$. Es decir, $C \in C(E)$. Con esto se tiene que $C \in \mathcal{W} \cap C(E)$. Luego, por (3.26), se tiene que $C \in \mathcal{V}$. Esto demuestra que $Comp(\mathcal{W}, A) \subset \mathcal{V}$.

En resumen, $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$ y la componente de $\mathcal{W}$ que contiene a A, $Comp(\mathcal{W}, A)$, es un disco en $C(X)$. Entonces $h(\mathcal{W})$ es un conjunto abierto en $Cono(Z)$ tal que $h(A) \in h(\mathcal{W})$ y la componente de $h(\mathcal{W})$ que contiene a $h(A)$, $Comp(h(\mathcal{W}), h(A))$, es un disco en $Cono(Z)$. Entonces, por el Lema 3.10, se concluye que $h(A) \notin B(Z)$. ■

De acuerdo con el Teorema 3.11, para concluir que los elementos de $F_1(Y)$ son los únicos elementos de $C(Y)$ que tienen imagen en la base del cono de Z, resta demostrar que $h(A) \notin B(Z)$ cuando A es un arco en Y tal que, para todo arco B en X, $A \not\subset B^{\circ}$. Para este fin, en la definición que sigue, introducimos la noción de *punto extremo de una composante* y, en los Lemas 3.14, 3.15 y 3.16, establecemos algunos resultados elementales en relación con este concepto.

3.12 Definición. Sea X un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Sea p un punto en X y κ la composante de p en X. Decimos que p es un *punto extremo* de κ si p es punto extremo de todo arco que lo contiene.

3.13 Observación. Sean X, κ y p como en la Definición 3.12. Sean A y B arcos en κ tales que tienen un punto extremo común, p. Supóngase que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Entonces $A \cup B$ es un arco en κ del cual p no es un punto extremo. De este modo si p es un punto extremo de la composante κ, se debe tener que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Nuestro primer resultado, relacionado con la noción de punto extremo, establece que en algunos casos las composantes no tienen más que un punto extremo.

3.14 Lema. Sea X un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos. Entonces cada composante de X tiene a lo más un punto extremo.

Demostración. Sea κ una composante de X. Supóngase que p es un punto extremo de κ. Fijemos un punto $q \in \kappa \setminus \{p\}$. Vamos a demostrar que q no es punto extremo de κ. Para esto note que, por definición de composante, existe en continuo A en κ que contiene a los puntos p y q. Ahora, por hipótesis, se tiene que A es un arco. Sin perder generalidad, podemos suponer que p y q son los puntos extremos de A. Como X es indescomponible, $\kappa \neq A$. Fijemos un punto $x \in \kappa \setminus A$. Sea B un arco en κ con puntos extremos q y x. Entonces $A \cup B$ es un arco en κ. Se tiene que p y x son los puntos extremos del arco

$A \cup B$. Así q no es punto extremo de $A \cup B$. Esto demuestra que q no es punto extremo de κ. ■

3.15 Lema. Sea X un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos. Sean p un punto en X, κ la composante de p en X y A un arco en κ. Si p es un punto extremo de κ y $p \notin A$, entonces existe un arco, B, en κ tal que $A \subset B^{\circ}$.

Demostración. De la definición de composante, existe un continuo C en κ tal que $\{p\} \cup A \subset C$. Por hipótesis, C es un arco. Como X es indescomponible, se tiene que $\kappa \neq C$. Fijemos un punto $q \in \kappa \setminus C$. También se tiene que existe un arco B en κ con puntos extremos p y q. Note que $p \in C \cap B$. Entonces, como en la Observación 3.13, se tiene que $C \subset B$ o $B \subset C$. Como $q \in B \setminus C$, entonces $C \subset B$. Luego, como $A \subset C$, se tiene que $A \subset B$. Como $p \notin A$ y $q \notin A$, se concluye que $A \subset B^{\circ}$. ■

En el lema siguiente, bajo las condiciones con las cuales estamos trabajando, demostramos que si un arco en X *entra* al continuo Y debe hacerlo por un punto extremo de una composante de Y.

3.16 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Si ab es un arco en X tal que $a \in X \setminus Y$ y $ab \cap Y \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in ab$ tal que $ab \cap Y = xb$. Además, x es punto extremo de la composante de Y que lo contiene.

Demostración. Sea $\alpha : [0,1] \to X$ una parametrización del arco ab tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Sea

$$s_0 = \text{ínf}\,\{s \in [0,1] : \alpha(s) \in Y\}. \tag{3.27}$$

Como $ab \cap Y \neq \emptyset$, s_0 está bien definido. De la continuidad de α y la definición de s_0 se sigue que $\alpha(s_0) \in Y$, de modo que $0 < s_0$. Vamos a demostrar que

$$\alpha([s_0, 1]) \subset Y. \tag{3.28}$$

Para demostrar esto, supóngase lo contrario. Entonces existe un número t tal que $s_0 < t \leq 1$ y $\alpha(t) \notin Y$. Sea

$$s_1 = \text{ínf}\,\{s \in (s_0, 1] : \alpha(s) \notin Y\}. \tag{3.29}$$

Por las condiciones que satisface el número t, se tiene que s_1 está bien definido y $s_1 < 1$. También, de la continuidad de α y la definición de s_1, $\alpha(s_1) \in Y$. Ahora, por las definiciones de s_0 y s_1, se tiene que $\alpha([s_0, s_1])$ es un subcontinuo propio de Y. Entonces los puntos $\alpha(s_0)$ y $\alpha(s_1)$ pertenecen a una misma composante κ en Y.

Fijemos un número t_0 tal que $0 < t_0 < s_0$, esto es posible por que $0 < s_0$. De la definición de s_0, vea (3.27), se sigue que

$$\alpha(t_0) \notin Y. \tag{3.30}$$

Por otra parte, por la definición de s_1 (3.29), podemos elegir un número t_1 tal que $s_1 < t_1 < 1$ y

$$\alpha(t_1) \notin Y. \tag{3.31}$$

Como $\alpha([s_0, s_1])$ es un subcontinuo propio de Y, por el Teorema 1.7, podemos elegir un subcontinuo propio, B, de Y que contiene propiamente a $\alpha([s_0, s_1])$, es decir,

$$\alpha([s_0, s_1]) \subset B \quad \text{y} \quad \alpha([s_0, s_1]) \neq B. \tag{3.32}$$

Por el Teorema 2.26, B es un arco. Denotemos $D = B \cup \alpha([t_0, t_1])$. Se tiene que D es la unión de dos arcos cada uno de los cuales contienen a $\alpha([s_0, s_1])$. Luego, D es un subcontinuo de X que no contiene a Y. Entonces, por el Teorema 2.26, D es un arco en X. De (3.30) y (3.31), puesto que $B \subset Y$, se sigue que B no contiene a ninguno de los puntos extremos de $\alpha([t_0, t_1])$. De modo que

$$\alpha([s_0, s_1]) \subset B \subset \alpha([t_0, t_1]).$$

De aquí que B es de la forma $B = \alpha([r_0, r_1])$ con $t_0 \leq r_0 \leq s_0$ y $s_1 \leq r_1 \leq t_1$. Por las definiciones de s_0 y s_1, y como $B \subset Y$, se obtiene que $B = \alpha([s_0, s_1])$ lo que contradice la elección de B, vea (3.32). Con esto hemos demostrado (3.28).

Ahora pongamos $x = \alpha(s_0)$. Entonces x es un punto en el arco ab tal que

$$ab \cap Y = xb.$$

Esto demuestra la primera parte del lema. Para demostrar la segunda parte, supóngase, por el contrario, que existe un arco C en la composante κ tal que $x \in C^{\circ}$. Es claro que $ax \cup C$ es un continuo en X que no contiene a Y. Por otro lado, también es claro que $ax \cup C$ es un triodo simple en X. Esto contradice el Teorema 2.26. Por lo tanto, x es punto extremo de la composante κ. Así el Lema 3.16 está demostrado. ∎

En el Teorema 3.8 demostramos que $h(F_1(Y)) \subset B(Z)$. Por otra parte, en el Teorema 3.11 vimos que $h(A) \notin B(Z)$ para algunos elementos $A \in C(Y) \setminus F_1(Y)$. Ahora estamos en condiciones de completar o precisar estos resultados. Vamos a demostrar que, si $A \in C(Y)$, $h(A) \in B(Z)$ si y sólo si $A \in F_1(Y)$.

3.17 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado y $A \in C(Y)$. Entonces $h(A) \in B(Z)$ si y sólo si $A \in F_1(Y)$.

Demostración. Si $A \in F_1(Y)$, entonces por el Teorema 3.8, $h(A) \in B(Z)$.

Ahora, vamos a demostrar que si $A \in C(Y)$ y $h(A) \in B(Z)$, entonces $A \in F_1(Y)$. Para esto fijemos un elemento A de $C(Y)$. Supóngase que $A \notin F_1(Y)$, demostraremos que

$$h(A) \notin B(Z). \tag{3.33}$$

Si $A = Y$, por hipótesis, $h(Y) = \nu(Z)$ y así, en este caso, (3.33) está demostrado. Entonces, en lo que sigue suponemos que $A \neq Y$. Por el Teorema 2.26, se tiene que cada subcontinuo propio no degenerado de Y es un arco. En particular, A es un arco en Y. Ahora, si existe un arco B en X tal que $A \subset B^{\circ}$, entonces, por el Teorema 3.11, se tiene que $h(A) \notin B(Z)$, así, también en este caso, (3.33) está demostrado.

De acuerdo con lo anterior, para demostrar (3.33), sólo resta considerar el caso en el cual A es un arco en Y tal que

$$\text{para todo arco } \ B \ \text{ en } \ X, \ A \not\subset B^{\circ}. \tag{3.34}$$

Esta condición implica que uno de los puntos extremos de A es también punto extremo de cualquier arco en X que contiene a A. Denotemos este punto extremo de A por p. Sea κ la composante de p en Y. También la condición (3.34) implica que p es un punto extremo de κ. Ahora, en este caso, para demostrar

(3.33), supóngase por el contrario, que $h(A) \in B(Z)$.

Por el Lema 1.14, existe una sucesión, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de puntos en $\kappa \setminus A$ que converge en Y al punto p. Y entonces la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge en X al punto p.

Sea μ una función de Whitney para $C(X)$, ver Teorema 1.31. Pongamos $t = \mu(A)$. Considerando un arco ordenado desde el singular $\{p_n\}$ hasta Y, ver Teorema 1.35, y la continuidad de la función μ, se deduce que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $A_n \in C(Y)$ tal que

$$p_n \in A_n \quad \text{y} \quad \mu(A_n) = t.$$

Como A es un subcontinuo propio de Y, $t < \mu(Y)$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un subcontinuo propio de Y. Luego, por el Teorema 2.26, cada A_n es un arco en Y. Por compacidad, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en $C(Y)$ a un subcontinuo, A_0, de Y. Por la continuidad de μ, se tiene que $\mu(A_0) = t$, así A_0 también es un arco en Y. Note que $p \in A_0$. De aquí, $A_0 \subset A$ o $A \subset A_0$. Como $\mu(A_0) = \mu(A)$ se sigue que $A_0 = A$. Para simplificar la notación vamos a suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C(Y)$ al elemento A.

Observe que $p_n \in A_n \setminus A$, así se tiene que $A_n \neq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que $p \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset A_n$ o $A_n \subset A$. De aquí, puesto que $\mu(A) = \mu(A_n)$, se obtiene que $A = A_n$, lo cual es una contradicción. Hemos demostrado que

$$p \notin A_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Del Lema 3.15, se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un arco B_n en Y tal que $A_n \subset B_n^\circ$. Luego, por el Teorema 3.11, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $h(A_n) \notin B(Z)$. Denotemos

$$h(A_n) = (q_n, t_n) \ \text{ y } \ h(A) = (q, 0).$$

Observe que la sucesión $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el $Cono(Z)$ al punto $h(A)$. Luego, la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Z al punto q y la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n = \{(q_n, 0)\} \times [0, t_n].$$

Entonces L_n es un arco en $Cono(Z)$ con puntos extremos $(q_n, 0)$ y (q_n, t_n). Se tiene que $lím L_n = \{h(A)\}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos

$$C_n = h^{-1}(q_n, 0) \ \text{ y } \ \mathcal{J}_n = h^{-1}(L_n). \tag{3.35}$$

Note que $\mathcal{J}_n$ es un arco en $C(X)$ con puntos extremos A_n y C_n. También se tiene que $lím\mathcal{J}_n = \{A\}$. Además, como la sucesión $\{(q_n, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $B(Z)$ al punto $h(A)$, se tiene que la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento A. Ahora, pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \bigcup \mathcal{J}_n. \tag{3.36}$$

Por el Teorema 1.27, cada D_n es un subcontinuo de X. Como $lím\mathcal{J}_n = \{A\}$, la continuidad de la función unión, ver Teorema 1.29, implica que la sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C(X)$ al elemento A. Luego, como $Y \not\subset A$, podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y \not\subset D_n$, ver Proposición 1.26. Entonces, por el Teorema 2.26, se tiene que D_n es un arco en X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, vamos a demostrar lo siguiente.

$$\text{Para cada } n \in \mathbb{N}, \ D_n \subset Y. \tag{3.37}$$

Para demostrar (3.37), supóngase que $D_n \not\subset Y$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Fijemos un punto $d \in D_n \setminus Y$. Como $p_n \in A_n \subset D_n$, se tiene que $p_n \in D_n$. Denotemos por B al subarco de D_n cuyos puntos extremos son d y p_n. Por el Lema 3.16, se tiene que $B = dp \cup pp_n$. Ahora, por lo que notamos en la Observación 3.13 y como $p_n \notin A$, se obtiene que $A \subset pp_n$. Entonces $A \subset B$. Como los puntos extremos del arco B, d y p_n, no pertenecen al arco A, se concluye que $A \subset B^\circ$. Esto contradice la condición en (3.34). Así (3.37) está demostrado.

Ahora, vamos a demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$p \text{ es un punto extremo del arco } D_n. \tag{3.38}$$

Para hacer esto, supóngase, por el contrario, que existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que p no es punto extremo del arco D_n. Entonces, como p es el punto extremo de la composante κ, de acuerdo con la Definición 3.12, se tiene que $p \notin D_n$. Por otra parte, por la definición de D_n, ver (3.36),

$$A_n \subset D_n \quad \text{y} \quad C_n \subset D_n.$$

Luego, puesto que $A_n \subset \kappa$, se sigue que $D_n \subset \kappa$ y así $C_n \subset \kappa$. Además, como $p \notin D_n$, se tiene que $p \notin C_n$. Entonces, según el Lema 3.15, existe un arco B en X tal que $C_n \subset B^\circ$. De esto, por el Teorema 3.11, se obtiene que $h(C_n) \notin B(Z)$. Esto contradice la definición de C_n, vea (3.35). Así hemos demostrado (3.38).

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in D_n \setminus A$. Luego, considerando (3.38) y la Observación 3.13, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset D_n$. También se tiene que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$,

$$D_n \subset D_m \text{ o } D_m \subset D_n. \tag{3.39}$$

Ahora, fijemos un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$p_1 \notin N(\varepsilon, A) \quad \text{y} \quad B_\varepsilon(p) \cap (D_1 \setminus A) = \emptyset. \tag{3.40}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \varepsilon$ y $H(A, D_n) < \varepsilon$.

Según (3.39), $D_1 \subset D_n$ o $D_n \subset D_1$. Si $D_1 \subset D_n$ entonces $p_1 \in D_n$ y así $p_1 \in N(\varepsilon, A)$. Esto contradice la primera condición en (3.40). Por otro lado, si $D_n \subset D_1$ entonces $p_n \in D_1$. Luego, $p_n \in D_1 \setminus A$. De aquí, puesto que $d(p, p_n) < \varepsilon$, se concluye que $p_n \in B_\varepsilon(p) \cap (D_1 \setminus A)$. Esto contradice la segunda condición en (3.40). Con todo esto hemos demostrado (3.33). Lo cual finaliza la demostración del Teorema 3.17. ∎

Con el lema que sigue completamos toda la herramienta necesaria para demostrar el resultado principal de este capítulo. Es decir, para obtener que, bajo las condiciones que estamos considerando, Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. En el Teorema 3.9 hemos demostrado que

$$Cono(h(F_1(Y))) \subset h(C(Y)).$$

De este modo, sólo resta obtener la inclusión contraria, es decir,

$$Cono(h(F_1(Y))) \supset h(C(Y)).$$

El próximo lema es un resultado parcial en relación con esto.

3.18 Lema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Si κ es una composante de Y que tiene un punto extremo entonces $h(C(\kappa)) \subset Cono(h(F_1(Y)))$.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa. Es decir, supóngase que existe un elemento $A \in C(\kappa)$ tal que

$$h(A) \notin Cono(h(F_1(Y))).$$

Pongamos

$$h(A) = (z_0, t_0) \quad \text{y} \quad J = \{z_0\} \times [0, t_0].$$

Se tiene que $(z_0, t_0) \notin Cono(h(F_1(Y)))$. Luego, $(z_0, 0) \notin h(F_1(Y))$. Por el Teorema 3.17, se tiene que

$$h(C(Y)) \cap B(Z) = h(F_1(Y)),$$

por lo cual $(z_0, 0) \notin h(C(Y))$. Sean V un conjunto abierto en Z y $\varepsilon > 0$ tales que

$$z_0 \in V \quad \text{y} \quad (V \times [0, \varepsilon)) \cap h(C(Y)) = \emptyset. \tag{3.41}$$

Denotamos $\mathcal{V} = (V \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \cap h(C(Y))$. Entonces $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto en $h(C(Y))$ y $h(A) \in \mathcal{V}$. Vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. Si κ' es una composante en Y, entonces $C(\kappa') \cap h^{-1}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$.

Si $\kappa' = \kappa$ entonces $A \in C(\kappa) \cap h^{-1}(\mathcal{V})$. Así, en este caso, nuestra afirmación está demostrada. Ahora, en lo que sigue, supóngase que $\kappa' \neq \kappa$. Sea p el punto extremo de la composante κ. Sean a y b los puntos extremos del arco A. De acuerdo con la Observación 3.13, sin perder generalidad, podemos suponer que $pa \subset pb$. Por otro lado, según la Proposición 1.12, κ' es un conjunto denso en Y. Luego, existe una sucesión, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de puntos en κ' que converge al punto p.

Sea μ una función de Whitney para $C(X)$, ver Teorema 1.31. Considerando un arco ordenado desde el singular $\{p_n\}$ hasta Y, vea el Teorema 1.35, y la continuidad de la función μ, se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento B_n de $C(Y)$ tal que

$$p_n \in B_n \quad \text{y} \quad \mu(B_n) = \mu(pb).$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C(Y)$ a un elemento $B \in C(Y)$. De la continuidad de μ se sigue que $\mu(B) = \mu(pb)$. Por otro lado, como pb es un subcontinuo propio de Y, $\mu(pb) < \mu(Y)$. Así, $\mu(B_n) < \mu(Y)$, de donde se obtiene que B_n es un subcontinuo propio de Y. Luego, por el Teorema 2.26, se sigue que B_n es un arco en Y. Análogamente, se deduce que B es un arco en Y. Además, puesto que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto p, se tiene que $p \in B$. Ahora, por la Observación 3.13, $pb \subset B$ o $B \subset pb$. En cualquier caso, como $\mu(B) = \mu(pb)$, se concluye que $B = pb$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos un punto $b_n \in B_n$ de tal forma que la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto b, vea la Definición 1.23. Por otro lado, sea A_n un arco contenido en B_n tal que

$$b_n \in A_n \quad \text{y} \quad \mu(A_n) = \mu(A).$$

Podemos suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en $C(Y)$, a un elemento $A' \in C(Y)$. Entonces $A' \subset pb$, vea la Proposición 1.26. Además, según la Definición 1.23, $b \in A'$. Se tiene que A y A' son subarcos del arco pb que tienen al punto b como extremo común. Luego, $A \subset A'$ o $A' \subset A$. Por la continuidad de la función μ, $\mu(A') = \mu(A)$. Así, $A' = A$. Se tiene que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $C(\kappa')$ que converge, en $C(Y)$, al elemento A. Como $h^{-1}(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en $C(Y)$ que contiene al elemento A, se concluye que existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $A_n \in h^{-1}(\mathcal{V})$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Ahora, fijemos un número $m \in \mathbb{N}$. Como Y es un continuo indescomponible y no degenerado, podemos elegir m composantes diferentes, $\kappa_1, ..., \kappa_m$, en Y, vea el Teorema 1.13. Luego, según la afirmación que demostramos, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe un elemento $C_i \in C(\kappa_i)$ tal que $h(C_i) \in \mathcal{V}$. Pongamos

$$h(C_i) = (z_i, t_i),\ L_i = \{z_i\} \times [0, t_i] \ \text{ y } \ \mathcal{J}_i = h^{-1}(L_i).$$

Denotemos por D_i al elemento de $C(X)$ tal que $h(D_i) = (z_i, 0)$. Note que $\mathcal{J}_i$ es un arco en $C(X)$ con extremos C_i y D_i. Por la definición de $\mathcal{V}$ se tiene que $z_i \in V$. Luego, de (3.41), se sigue que $D_i \in C(X) \setminus C(Y)$. Así, $\mathcal{J}_i$ es un arco en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{J}_i \cap C(Y) \neq \emptyset \ \text{ y } \ \mathcal{J}_i \cap (C(X) \setminus C(Y)) \neq \emptyset.$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, sea $\alpha_i : [0, 1] \to \mathcal{J}_i$ una parametrización del arco $\mathcal{J}_i$ tal que $\alpha_i(0) = C_i$ y $\alpha_i(1) = D_i$. Definimos

$$r_i = \textit{ínf}\,\{r \in [0, 1] : \alpha_i(r) \notin C(Y)\}.$$

Como $D_i \notin C(Y)$, r_i está bien definido. De la continuidad de α_i, se tiene que $\alpha_i(r_i) \in C(Y)$. Por otro lado, observe que el segmento L_i no contiene al vértice, $\nu(Z)$, del cono de Z, por lo cual Y no es un elemento del arco $\mathcal{J}_i$. En consecuencia, se tiene que $\alpha_i([0, r_i])$ es un arco contenido en $C(Y) \setminus \{Y\}$. Como $C(\kappa_i)$ es una arco componente de $C(Y) \setminus \{Y\}$, vea el Lema 1.40, para cada $i \in \{1, ..., m\}$,

$$\alpha_i([0, r_i]) \subset C(\kappa_i). \tag{3.42}$$

Ahora, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, denotemos por E_i a la unión de los elementos del arco $\alpha_i([0, r_i])$, es decir,

$$E_i = \bigcup \alpha_i([0, r_i]). \tag{3.43}$$

Por el Teorema 1.27, E_i es un subcontinuo de Y. De (3.42) y (3.43), se sigue que $E_i \subset \kappa_i$. Así, $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, tomemos un conjunto abierto, V_i, en X de modo que

$$E_i \subset V_i \;\text{ y }\; \overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Se tiene que $\langle V_i \rangle$ es un conjunto abierto en $C(X)$ tal que

$$\alpha_i([0, r_i]) \subset \langle V_i \rangle \;\text{ y }\; \langle V_i \rangle \cap \langle V_j \rangle = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, de la continuidad de α_i y la definición de r_i, se sigue que existe un número $s_i \in [0, 1]$, con $r_i < s_i$, tal que

$$\alpha_i([0, s_i]) \subset \langle V_i \rangle \;\text{ y }\; \alpha_i(s_i) \notin C(Y).$$

Ahora, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, sea $T_i = \bigcup \alpha_i([0, s_i])$. Por el Teorema 1.27, cada T_i es un subcontinuo de X. Pongamos

$$T = Y \cup (\bigcup_{i=1}^{m} T_i).$$

Como $D_i \subset T_i \cap Y$, se obtiene que $T_i \cap Y \neq \emptyset$. De aquí, T es un subcontinuo de X. Por otro lado, note que $T \setminus Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Como $\alpha(s_i) \subset V_i \cap (T \setminus Y)$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$, se concluye que T es un m-odo en X. Hemos demostrado que X contiene un m-odo, para cada $m \in \mathbb{N}$. Esto contradice (2) de la Proposición 2.1. Por lo tanto el Lema 3.18 está demostrado. ∎

Recordemos las hipótesis generales consideradas en esta tesis, X es un continuo cuyo hiperespacio es homeomorfo a un cono de dimensión finita, Y es el subcontinuo de X que corresponde con el vértice del cono. En el Teorema 3.4 demostramos que si Y es descomponible, entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. Ahora vamos a demostrar que ésto también se tiene cuando Y es un continuo indescomponible no degenerado.

3.19 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Supóngase que Y es indescomponible y no degenerado. Entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio.

Demostración. Por el Teorema 3.8, $h(F_1(Y))$ es un subconjunto de la base, $B(Z)$, del cono de Z. Así, podemos suponer que el cono sobre $h(F_1(Y))$ es un subconjunto de $Cono(Z)$, de tal forma que ambos conos tienen el mismo vértice, $\nu(h(F_1(Y))) = \nu(Z) = h(Y)$. De este modo, basta demostrar que

$$Cono(h(F_1(Y))) = h(C(Y)).$$

Por el Teorema 3.9, se tiene que

$$Cono(h(F_1(Y))) \subset h(C(Y)).$$

Así, resta demostrar la inclusión contraria, es decir,

$$h(C(Y)) \subset Cono(h(F_1(Y))). \tag{3.44}$$

Para demostrar (3.44), supóngase por el contrario, que existe un elemento $A \in C(Y)$ tal que

$$h(A) \notin Cono(h(F_1(Y))).$$

Observe que $A \neq Y$ y $A \notin F_1(Y)$. Pongamos $h(A) = (z,t)$. Entonces $(z,t) \notin Cono(h(F_1(Y)))$. Luego,

$$(z,0) \notin h(F_1(Y)). \tag{3.45}$$

Por el Teorema 3.17, se tiene que $B(Z) \cap h(C(Y)) = h(F_1(Y))$. De aquí y de (3.45) se sigue que

$$(z,0) \notin h(C(Y)). \tag{3.46}$$

Denotamos $J = \{z\} \times [0,t]$ y $\mathcal{L} = h^{-1}(J)$. De (3.45) se obtiene que

$$J \cap Cono(h(F_1(Y))) = \emptyset. \tag{3.47}$$

Pongamos $B = h^{-1}(z,0)$. Se tiene que $\mathcal{L}$ es un arco en $C(X)$ con puntos extremos A y B. Por (3.46), $B \in C(X) \setminus C(Y)$. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ una parametrización del arco $\mathcal{L}$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Pongamos

$$s_0 = \acute{\imath}nf\,\{s \in [0,1] : \alpha(s) \notin C(Y)\}. \tag{3.48}$$

Como $B \notin C(Y)$, s_0 está bien definido. Denotamos $C = \alpha(s_0)$. De la continuidad de α se sigue que $C \in C(Y)$ y $s_0 < 1$. Como $C \in \mathcal{L}$ y $h(\mathcal{L}) = J$, se tiene que $h(C) \in J$. Luego, de (3.47), se sigue que

$$h(C) \notin Cono(h(F_1(Y))). \tag{3.49}$$

Sea κ la composante de C en Y. Vamos a demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. La composante κ tiene un punto extremo.

Elegimos un punto $y_0 \in Y \setminus C$. Como α es continua, podemos elegir $s_1 > s_0$ tal que $y_0 \notin \alpha(s)$ para todo $s \in [s_0, s_1]$. Sea

$$E = \bigcup \alpha([s_0, s_1]).$$

Por el Teorema 1.27, E es un subcontinuo de X. Note que $y_0 \notin E$, así, $Y \not\subset E$. Entonces, por el Teorema 2.26, E es un arco en X. Observe que $C \subset E$. Por otro lado, por la definición de s_0, vea (3.48), $E \not\subset Y$. Entonces podemos tomar un subarco ab de E tal que $a \notin Y$ y $b \in C$. Ahora aplicamos el Lema 3.16 y obtenemos que existe un punto $x \in ab$ tal que $ab \cap Y = xb$ y x es punto extremo de la composante de Y que lo contiene. El continuo $xb \cup C$ es un subcontinuo propio de Y que intersecta a κ. De aquí que $x \in \kappa$. Esto termina la prueba de la afirmación.

Ahora, por el Lema 3.18, se tiene que

$$h(C(\kappa)) \subset Cono(h(F_1(Y))).$$

En particular, puesto que $C \in C(\kappa)$, se tiene que $h(C)$ es un elemento de $Cono(h(F_1(Y)))$. Esto contradice (3.49). Así (3.44) está demostrado. Por lo tanto el continuo Y tiene la propiedad cono=hiperespacio. ■

En el teorema que sigue resumimos los resultados principales obtenidos en este capítulo. La demostración de éste se sigue evidentemente de los Teoremas 3.4 y 3.19.

3.20 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si Y es no degenerado, entonces Y tiene la propiedad cono=hiperespacio.

En 1977, Nadler demostró que si X es un continuo indescomponible de dimensión finita tal que su hiperespacio, $C(X)$, es homeomorfo a su cono, $Cono(X)$, entonces X tiene la propiedad cono=hiperespacio, vea [20, Teorema 5.7] o [21, Teorema 8.7].

En relación con esto observe que si X es un continuo indescomponible y $h : C(X) \to Cono(Z)$ es un homeomorfismo, donde Z es un continuo de dimensión finita, entonces, de acuerdo con la Proposición 3.5, $h(X) = \nu(Z)$. Por otra parte, por el Teorema 3.17, se tiene que $h(F_1(X)) = B(Z)$. De aquí se sigue que X tiene la propiedad cono=hiperespacio. Esto demuestra el teorema siguiente, el cual implica el resultado de Nadler que hemos mencionado.

3.21 Teorema. Sea X un continuo indescomponible. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Entonces $h(X) = \nu(Z)$ y $h(F_1(X)) = B(Z)$. En consecuencia, X tiene la propiedad cono=hiperespacio.

Para finalizar este capítulo, en el teorema que sigue, recopilamos toda la información que hemos obtenido en relación con la topología del continuo que corresponde con el vértice del cono, en la situación que estamos considerando.

3.22 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces

(1) cada subcontinuo propio no degenerado de Y es un arco,

(2) si Y es no degenerado, Y tiene la propiedad cono=hiperespacio,

(3) si Y es descomponible, Y es un arco o una curva cerrada simple,

(4) si Y es indescomponible no degenerado, cada composante de Y es una imagen continua e inyectiva del semirayo, $[0, \infty)$ o de la línea real, $\mathbb{R}$.

Demostración. (1) se deduce del Teorema 2.26. (2) es el Teorema 3.20. (3) es el Teorema 3.4. (4) fue demostrado por Nadler, vea [20, Corolario 5.5] o [21, Teorema 8.10]. ■

Capítulo 4

La estructura de $X \setminus Y$

Este es el capítulo final de nuestra tesis. En éste, como en los anteriores, las consideraciones generales son: X es un continuo, $h : C(X) \to Cono(Z)$ es un homeomorfismo, donde Z es un continuo de dimensión finita, y Y es el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Bajo estas hipótesis, en el Capítulo 2, demostramos que $dim(X) = 1$ y que cada subcontinuo no degenerado de X que no contiene a Y es un arco. Luego, en el Capítulo 3, analizamos la topología del continuo Y. En esta parte, vamos a estudiar la estructura topológica del complemento de Y en X, $X \setminus Y$. Específicamente, vamos a demostrar que:

(1) $X \setminus Y$ es localmente conexo, Teorema 4.5; (2) cada arco componente de $X \setminus Y$ es una componente, Teorema 4.7; (3) cada arco componente de $X \setminus Y$ es un espacio homeomorfo al semirayo $[0, \infty)$ o la línea real $\mathbb{R}$ y (4) $X \setminus Y$ tiene sólo un número finito de componentes.

En la demostración de que $X \setminus Y$ es localmente conexo, utilizamos el concepto de *semifrontera* en hiperespacios el cual presentamos en la Definición 4.1. También usamos algunos resultados relacionados con este concepto, los cuales establecemos en los Teoremas 4.2, 4.3 y 4.4. La noción de semifrontera fue introducida por Illanes en 1991, [9], en esta referencia el autor demostró, entre otros, los resultados que usaremos. Actualmente, este tema también está incluido en el libro de hiperespacios de Illanes y Nadler, [14, Sección 69], en donde se pueden consultar las demostraciones completas de los tres teoremas que enunciamos en lo que sigue.

4.1 Definición. Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X, la *semifrontera* de $C(A)$ en $C(X)$ se denota por $Sb(A)$ y se define como

$$\begin{aligned} Sb(A) \; = \; & \{B \in C(A) : \text{existe un arco ordenado } \mathcal{A} \text{ en } C(X) \text{ tal} \\ & \text{que } \cap \mathcal{A} = B \text{ y, para cada } C \in \mathcal{A} \setminus \{B\},\ C \not\subset A\}. \end{aligned}$$

En el teorema que sigue se presenta una condición para localizar elementos en la semifrontera de un hiperespacio, la demostración se encuentra en [14, Teorema 69.3].

4.2 Teorema. Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de X y B un elemento de $C(A)$. Si B es el límite de una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$ y $B_n \not\subset A$, entonces $B \in Sb(A)$.

El resultado que sigue asegura la existencia de elementos minimales en la semifrontera de un hiperespacio, la prueba se puede ver en [14, Teorema 69.4].

4.3 Teorema. Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X y $B \in Sb(A)$, entonces existe un elemento minimal, respecto de la inclusión de conjuntos, $C \in Sb(A)$, tal que $C \subset B$.

En [14, Teorema 69.5] se demuestra que un continuo X contiene un n-odo, $n \in \mathbb{N}$, si y sólo si existe un elemento $A \in C(X)$ tal que $C(A)$ contiene al menos n elementos minimales en su semifrontera $Sb(A)$. Ahora, si $C(X)$ tiene dimensión finita entonces, de acuerdo con el Lema 1.42, existe un número $M \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene M-odos. Luego, en este caso, se obtiene que, para cada elemento $A \in C(X)$, la semifrontera $Sb(A)$ de $C(A)$ en $C(X)$ contiene a lo más $M - 1$ elementos minimales. Esto prueba el resultado siguiente.

4.4 Teorema. Sea X un continuo tal que $C(X)$ tiene dimensión finita. Si A es un subcontinuo propio de X, entonces la semifrontera, $Sb(A)$, de $C(A)$ en $C(X)$ sólo tiene un número finito de elementos minimales.

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar que, con las hipótesis que estamos considerando, el complemento de Y en X es localmente conexo.

4.5 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces $X \setminus Y$ es localmente conexo.

Demostración. Supóngase que la conclusión es falsa. Entonces, de acuerdo con el Teorema 1.4, existe un conjunto abierto

U en $X \setminus Y$ y una componente C_0 de U tal que C_0 no es un conjunto abierto en $X \setminus Y$. Note que U es un conjunto abierto en X y C_0 no es un conjunto abierto en X. Si $int(C_0)$ denota el interior de C_0 en X tenemos que $C_0 \neq int(C_0)$. Fijemos un punto $p_0 \in C_0$ tal que

$$p_0 \notin int(C_0). \tag{4.1}$$

Existe un número $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 < 1$ y $B_{\varepsilon_1}(p_0) \subset U$. Por (4.1) se tiene que $B_{\varepsilon_1}(p_0) \not\subset C_0$. Entonces existe una componente, C_1, de U tal que

$$C_0 \neq C_1 \quad \text{y} \quad B_{\varepsilon_1}(p_0) \cap C_1 \neq \emptyset.$$

Fijemos un punto $p_1 \in B_{\varepsilon_1}(p_0) \cap C_1$. Por otro lado, existe un número $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\varepsilon_2 < mín\{\varepsilon_1, \frac{1}{2}\}$ y $B_{\varepsilon_2}(p_0) \cap C_1 = \emptyset$ (recuerde que C_1 es cerrada en U). Nuevamente, por (4.1), tenemos que $B_{\varepsilon_2}(p_0) \not\subset C_0$. Entonces existe una componente, C_2, de U tal que

$$C_0 \neq C_2 \quad \text{y} \quad B_{\varepsilon_2}(p_0) \cap C_2 \neq \emptyset.$$

Note que $C_1 \neq C_2$. Fijemos un punto $p_2 \in B_{\varepsilon_2}(p_0) \cap C_2$. Continuando este procedimiento, inductivamente, podemos elegir una sucesión de componentes de U, $C_1, C_2, ...$, y una sucesión de puntos $p_1, p_2, ...$ que converge a p_0 tales que

$$C_0 \neq C_n, \;\; C_n \neq C_m, \text{ si } n \neq m \quad \text{y} \quad p_n \in C_n. \tag{4.2}$$

Como $p_0 \notin Y$, podemos elegir un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{si } A \in C(X) \text{ y } H(A, Y) < \varepsilon, \text{ entonces } p_0 \notin A.$$

Por otra parte, por la continuidad de h^{-1}, existe un número $s \in [0, 1)$ tal que

$$\text{si } z \in Z \text{ y } t \in [s, 1), \text{ entonces } H(h^{-1}(z, t), Y) < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Denotemos $\mathcal{N} = (Z \times [s,1)) \cup \{\nu(Z)\}$ y $\mathcal{M} = h^{-1}(\mathcal{N})$, es decir, $\mathcal{M} = \{A \in C(X) : h(A) \in \mathcal{N}\}$. Es claro que $\mathcal{M}$ es un continuo en $C(X)$. Pongamos $D = \bigcup \mathcal{M}$. Por el Teorema 1.27, D es un subcontinuo de X. Observe que

$$D = Y \cup (\bigcup \{h^{-1}(z,t) : z \in Z \text{ y } t \in [s,1)\}). \qquad (4.4)$$

De (4.3) y (4.4) se obtiene que $p_0 \notin D$. De aquí podemos suponer que,

$$\text{para cada } n \in \{0,1,2,...\}, \;\; p_n \notin D. \qquad (4.5)$$

Note que, para cada $n \in \{0,1,2,...\}$, $\{p_n\} \neq Y$ y así $h(\{p_n\}) \neq \nu(Z)$. Entonces, para cada $n \in \{0,1,2,...\}$, existe un punto $z_n \in Z$ y un número $t_n \in [0,1)$ tal que

$$h(\{p_n\}) = (z_n, t_n). \qquad (4.6)$$

Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto p_0, se tiene que

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } z_0 \;\; \text{ y } \;\; \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } t_0. \qquad (4.7)$$

De (4.5) y (4.6) se deduce que $t_n < s$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$I_n = \{r \in [t_n, 1) : h^{-1}(z_n, r) \subset D\}.$$

Note que el número s pertenece a cada uno de los conjuntos I_n, así cada I_n es un conjunto no vacío. Por otro lado, como D es un conjunto cerrado en X, de la continuidad de h^{-1} se deduce que cada I_n es un conjunto cerrado en $[t_n, 1]$. De aquí obtenemos que cada I_n tiene un elemento mínimo. Denotamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = mínI_n. \qquad (4.8)$$

Como $t_n \notin I_n$ y $s \in I_n$ se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n < r_n \leq s.$$

Ahora denotamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = h^{-1}(z_n, r_n). \tag{4.9}$$

Vamos a demostrar que todos los elementos E_n pertenecen a la semifrontera de $C(D)$. Para esto fijemos un número $n \in \mathbb{N}$. Tomemos una sucesión $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en el intervalo abierto (t_n, r_n) convergente a r_n tal que $s_1 < s_2 < \cdots$. Denotemos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k = \bigcup h^{-1}(\{z_n\} \times [s_k, r_n]).$$

Observe que el límite de los conjuntos $\{z_n\} \times [s_k, r_n]$ es el conjunto singular $\{(z_n, r_n)\}$. Entonces, por la continuidad de h^{-1} y la definición de E_n, vea (4.9), se tiene que el límite de los conjuntos $h^{-1}(\{z_n\} \times [s_k, r_n])$ es el conjunto singular $\{E_n\}$. Luego, puesto que la función unión es continua, vea el Teorema 1.29, se concluye que $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $C(X)$ que converge al elemento E_n. Por otro lado, puesto que $s_k < s_{k+1}$, es claro que $B_{k+1} \subset B_k$. Además, como $t_n < s_k < r_n$, de la definición de r_n, vea (4.8), se deduce que $B_k \not\subset D$. Con esto tenemos todas las hipótesis del Teorema 4.2, lo cual demuestra que

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad E_n \in Sb(D).$$

Por otra parte, por hipótesis, $dim(Z) < \infty$, lo cual implica que $dim(C(X)) < \infty$. Luego, por el Teorema 4.4, $Sb(D)$ sólo tiene un número finito de elementos minimales. Además, por el Teorema 4.3, cada E_n contiene un elemento minimal de la semifrontera de $C(D)$. De aquí se sigue que existe una subsucesión $\{E_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un elemento minimal $B \in Sb(D)$ tales que

$$\text{para cada } j \in \mathbb{N}, \quad B \subset E_{n_j}. \tag{4.10}$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{E_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento E_0 de $C(X)$ y que la sucesión $\{r_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un número r_0. Como la sucesión $\{z_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge al punto z_0, vea (4.7), se tiene que la sucesión $\{(z_{n_j}, r_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a (z_0, r_0). Luego, por la continuidad de h^{-1} y la definición de E_{n_j}, vea (4.9), se obtiene que

$$E_0 = h^{-1}(z_0, r_0).$$

Por otra parte, de (4.10) se sigue que $B \subset E_0$. Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, $B \subset E_0 \cap E_{n_j}$.

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos arcos ordenados desde E_0 hasta $E_0 \cup E_{n_j}$ y desde E_{n_j} hasta $E_0 \cup E_{n_j}$, vea el Teorema 1.35. Denotemos por α_j y β_j a respectivas parametrizaciones de tales arcos ordenados. Es decir, de acuerdo con Lema 1.37, tenemos funciones continuas

$$\alpha_j, \beta_j : [0,1] \to C(E_0 \cup E_{n_j})$$

tales que $\alpha_j(0) = E_0 \subset \alpha_j(t) \subset \alpha_j(1) = E_0 \cup E_{n_j}$ y $\beta_j(0) = E_{n_j} \subset \beta_j(t) \subset \beta_j(1) = E_0 \cup E_{n_j}$, para cada $t \in [0,1]$. Ahora definimos $\gamma_j : [0,1] \to C(E_0 \cup E_{n_j})$ como sigue

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} \alpha_j(2t), & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta_j(2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Es claro que γ_j es una función continua, que $\gamma_j(0) = E_0$ y que $\gamma_j(1) = E_{n_j}$. Utilizando las propiedades de α_j y β_j, no es difícil demostrar que, para cada $t \in [0,1]$,

$$H(E_0, \gamma_j(t)) \leq H(E_0, E_{n_j}). \tag{4.11}$$

Denotemos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\Gamma_j = \gamma_j([0,1])$ y $\mathcal{A}_j = h(\Gamma_j)$. Entonces Γ_j es un subcontinuo en $C(X)$ que tiene a E_0 y E_{n_j}. Así, puesto que $h(E_0) = (z_0, r_0)$ y $h(E_{n_j}) = (z_{n_j}, r_{n_j})$, $\mathcal{A}_j$ es un subcontinuo en $Cono(Z)$ que tiene a (z_0, r_0) y (z_{n_j}, r_{n_j}). De la desigualdad en (4.11) se deduce que $lím_{j\to\infty} diám(\Gamma_j) = 0$. En consucuencia

$$lím_{j\to\infty} diám(\mathcal{A}_j) = 0.$$

De aquí se sigue que el conjunto singular $\{(z_0, r_0)\}$ es el límite de la sucesión de los subcontinuos $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Luego, como $r_0 \leq s < 1$, podemos suponer que $\nu(Z) \notin \mathcal{A}_j$. Denotemos por $\mathcal{B}_j$ a la proyección, en la base del cono de Z, del continuo $\mathcal{A}_j$, es decir, $\mathcal{B}_j = \pi(\mathcal{A}_j)$. Entonces $\{\mathcal{B}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de Z que converge al elemento $\{z_0\}$.

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, denotemos

$$\mathcal{C}_j = \mathcal{B}_j \times [t_0, t_{n_j}] \;\text{ y }\; \mathcal{D}_j = h^{-1}(\mathcal{C}_j).$$

Observe que los puntos (z_0, t_0) y (z_{n_j}, t_{n_j}) son elementos de $\mathcal{C}_j$. Luego, de acuerdo con nuestra notación en (4.6), tenemos que $\{p_0\}$ y $\{p_{n_j}\}$ son elementos de $\mathcal{D}_j$. También note que, como $\{\mathcal{B}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $\{z_0\}$ y $\{t_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a t_0, $\{\mathcal{C}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de $Cono(Z)$ que converge al conjunto singular $\{(z_0, t_0)\}$. De aquí se sigue que $\{\mathcal{D}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de $C(X)$ que converge al elemento singular $\{p_0\}$. Finalmente denotemos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $D_j = \bigcup \mathcal{D}_j$. Tenemos que cada D_j es un elemento de $C(X)$ y

$$p_0 \text{ y } p_{n_j} \text{ son elementos de } D_j. \tag{4.12}$$

Por otro lado, tomando en cuenta que la función unión es continua, obtenemos que $\{D_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a $\{p_0\}$. Luego, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $D_j \subset U$. Como C_0 y C_{n_j} son las componentes de p_0 y p_{n_j} en U, respectivamente, de (4.12) se deduce que $D_j \subset C_0$ y $D_j \subset C_{n_j}$. Esto implica que $C_0 = C_{n_j}$, lo cual contradice la primera condición en (4.2). Esta contradicción demuestra el Teorema 4.5. ■

Nuestro próximo paso, en relación con el análisis de la topología de $X \setminus Y$, es probar que las componentes y las arco componentes de $X \setminus Y$ coinciden. Para esto vamos a utilizar un resultado bien conocido de la topología general, el cual anotamos en el lema que sigue, la demostración de éste se puede consultar, por ejemplo, en [7, Teorema 3-4].

4.6 Lema. Si a y b son puntos de un espacio conexo X y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe una colección finita, $U_1, ..., U_n$, de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $a \in U_1$, $b \in U_n$ y, para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$.

4.7 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces cada componente de $X \setminus Y$ es un conjunto arco conexo. Así las componentes y las arco componentes de $X \setminus Y$ coinciden.

Demostración. Sea C una componente de $X \setminus Y$. Tenemos, por el Teorema 4.5, que $X \setminus Y$ es localmente conexo. Luego, puesto que $X \setminus Y$ es un conjunto abierto en X, para cada punto

$p \in C$ podemos elegir un conjunto abierto, U_p, en X tal que $p \in U_p$, U_p es conexo y $\overline{U_p} \subset X \setminus Y$. Por el Teorema 2.26 se tiene que $\overline{U_p}$ es un arco en $X \setminus Y$. En consecuencia,

$$\overline{U_p} \text{ es un arco contenido en } C. \tag{4.13}$$

Es claro que la colección $\{U_p : p \in C\}$ es una cubierta abierta de C. Fijemos dos puntos arbitrarios, a y b, en C. Por el Lema 4.6, existe una colección finita de puntos en C, $p_1, ..., p_n$, tal que

$$a \in U_{p_1}, \quad b \in U_{p_n} \quad \text{y} \quad U_{p_i} \cap U_{p_{i+1}} \neq \emptyset, \;\; i \in \{1, ..., n-1\}. \tag{4.14}$$

Ahora, de (4.13) y (4.14) se obtiene que la unión

$$\overline{U_{p_1}} \cup \cdots \overline{U_{p_n}}$$

es un subcontinuo arco conexo contenido en C y que contiene a los puntos a y b. De aquí se sigue que existe un arco en C que contiene a los puntos a y b. Esto demuestra que la componente C de $X \setminus Y$ es un conjunto arco conexo. ■

Ahora vamos a demostrar que cada arco componente de $X \setminus Y$ es un *rayo* (espacio homeomorfo a la línea real $\mathbb{R}$) o un *semirayo* (espacio homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$). Para esto vamos a utilizar un importante resultado de la teoría de las *variedades topológicas*, el cual caracteriza las 1-*variedades* métricas conexas, este resultado se puede consultar en [6, Teoremas 17 y 19, págs. 140-141]. Aquí lo enunciamos en el teorema siguiente evitando la terminología de las *variedades*.

4.8 Teorema. Sea X un espacio métrico, conexo con base numerable. Si cada punto p de X está contenido en un conjunto abierto de X, U_p, el cual es homeomorfo al intervalo semiabierto $[0,1)$ o al intervalo abierto $(0,1)$, entonces X es homeomorfo a uno de los espacios $[0,1]$, $[0,\infty)$, $\mathbb{R}$ o S^1.

4.9 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces cada arco componente de $X \setminus Y$ es un rayo o un semirayo.

Demostración. Sea C una arco componente de $X \setminus Y$. Fijemos un punto $p \in C$. Como $X \setminus Y$ es un conjunto abierto y localmente conexo, vea el Teorema 4.5, existe un conjunto abierto, U_p, en X tal que

$$p \in U_p, \;\; U_p \text{ es conexo } \; \text{y } \overline{U_p} \subset X \setminus Y.$$

Por el Teorema 2.26, $\overline{U_p}$ es un arco en $X \setminus Y$. Por otro lado, del Teorema 4.7, se tiene que C es la componente de p en $X \setminus Y$. De aquí se sigue que $\overline{U_p}$ es un arco contenido en C. Así $\overline{U_p}$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$, de donde se obtiene que U_p es homemorfo al intervalo semiabierto $[0,1)$ o al intervalo abierto $(0,1)$. Entonces, por el Teorema 4.8, se tiene que C es homeomorfo a uno de los espacios $[0,1]$, $[0,\infty)$, $\mathbb{R}$ o S^1.

Por otra parte, note que $\overline{C} \cap Y \neq \emptyset$, esto se deduce de la Proposición 1.15. Así $C \neq \overline{C}$, lo cual implica que C no es compacto. Luego C no es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$ ni al círculo unitario S^1. Entonces, se concluye que C es un semirayo o un rayo. ∎

Para finalizar el estudio de la estructura topológica de $X \setminus Y$, vamos a demostrar, en el teorema siguiente, que $X \setminus Y$ tiene sólo un número finito de componentes. En realidad, veremos que la dimensión de Z determina la cota para el número de arco componentes de $X \setminus Y$.

4.10 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Si $dim(Z) = n$ entonces $X \setminus Y$ tiene a lo más $n+1$ arco componentes.

Demostración. Primero note que, por el Lema 1.55,

$$dim(C(X)) = dim(Cono(Z)) = n + 1.$$

De aquí se sigue que $C(X)$ no contiene una $(n+2)$-celda. Luego, de acuerdo con el Lema 1.42,

$$X \text{ no contiene un } (n+2)\text{-odo.} \tag{4.15}$$

Ahora supóngase que la conclusión en el teorema es falsa, es decir, supóngase que $X \setminus Y$ tiene por lo menos $n+2$ arco componentes. Fijemos $n+2$ arco componentes distintas, $C_1, ..., C_{n+2}$, de $X \setminus Y$. Por el Teorema 4.7, cada C_i es una componente de $X \setminus Y$. Por otra parte, por la Proposición 1.15, para cada $i \in \{1, ..., n+2\}$, $Y \cup C_i$ es un subcontinuo de X. De aquí se sigue que $Y \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{n+2}$ es un $(n+2)$-odo en X. Esto contradice (4.15). Así el teorema está demostrado. ■

A manera de conclusión, en el teorema que sigue, presentamos en resumen los principales resultados que hemos obtenido en esta tesis.

4.11 Teorema. Sea X un continuo. Supóngase que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(Z)$, donde Z es un continuo de dimensión finita. Sea Y el subcontinuo de X tal que $h(Y) = \nu(Z)$. Entonces

(1) $dim(X) = 1$.

(2) Cada subcontinuo de X que no contiene a Y es un arco o un punto.

(3) Si X es hereditariamente descomponible, Y es un punto, un arco o una curva cerrada simple.

(4) Si X no es hereditariamente descomponible, Y es indescomponible y no degenerado. Además, Y es el único subcontinuo indescomponible y no degenerado de X.

(5) Si Y es no degenerado, Y tiene la propiedad cono=hiperespacio.

(6) Si X es indescomponible, entonces X es homeomorfo a Z. En consecuencia, X tiene la propiedad cono=hiperespacio.

(7) $X \setminus Y$ es localmente conexo.

(8) Cada componente de $X \setminus Y$ es un conjunto arco conexo. Así, cada componente de $X \setminus Y$ es una arco componente.

(9) Cada arco componente de $X \setminus Y$ es un semirayo o un rayo.

(10) $X \setminus Y$ tiene sólo un número finito de arco componentes.

Demostración. (1) es la primera parte de la Proposición 2.1. (2) es el Teorema 2.26. (3) se deduce del Teorema 3.4. (4) es la Proposición 3.5. (5) es el Teorema 3.20. (6) es el Teorema 3.21. (7) es el Teorema 4.5. (8) es el Teorema 4.7. (9) es el Teorema 4.9. (10) es el Teorema 4.10. ∎

Referencias

[1] F. D. Ancel y S. B. Nadler, Jr., *Cones that are cells, and an application to hyperspaces*, Topology Appl., 98 (1999), 19-33.

[2] R. Bennett y W. R. R. Transue, *On embedding cones over circularly chainable continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969), 275-276.

[3] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 267-273.

[4] R. H. Bing, *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc*, Canad. J. Math., 12 (1960), 209-230.

[5] A. M. Dilks y J. T. Rogers, Jr., *Whitney stability and contractible hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), 633-640.

[6] D. B. Fuks y V. A. Rokhlin, *Beginner's course in topology: Geometric chapters*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[7] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

[8] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, Princeton University Press, Ninth Printing, 1974.

[9] A. Illanes, *Semi-boundaries in hyperspaces*, Topology Proc., 16 (1991), 63-87.

[10] A. Illanes, *Hyperspaces homeomorphic to cones*, Glasnik Mat., 30 (50) (1995), 285-294.

[11] A. Illanes, *Hyperspaces which are products*, Topology Appl., 79 (1997), 229-247.

[12] A. Illanes, *Cone= hyperspace property, a characterization*, por aparecer en Topology Appl.

[13] A. Illanes y M. de J. López, *Hyperspaces homeomorphic to cones II*, por aparecer en Topology Appl.

[14] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Deker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.

[15] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22-36.

[16] R. J. Knill, *Cones, products and fixed points*, Fund. Math., 60 (1967), 35-46.

[17] S. Macías, *Hyperspaces and Cones*, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 10 (1995), 3069-3073.

[18] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cones and hyperspaces are homeomorphic*, Notices Amer. Math. Soc., 19 (1972), A718-A719. Abstract # 72T-G150.

[19] S. B. Nadler, Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math., 79 (1973), 233-250.

[20] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc., 230 (1977), 321-345.

[21] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Deker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1978.

[22] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Deker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[23] S. B. Nadler, Jr., y J. T. Rogers, Jr., *A note on hyperspaces and the fixed point property*, Colloq. Math., 25 (1972), 255-257.

[24] J. T. Rogers, Jr., *Embedding the hyperspaces of circle-like plane continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 165-168..

[25] J. T. Rogers, Jr., *The cone=hyperspace property*, Canad. J. Math., 24 (1972), 279-285.

[26] J. T. Rogers, Jr., *Continua with cones homeomorphic to hyperspaces*, General Topology Appl., 3 (1973), 283-289.

[27] D. D. Sherling, *Concerning the cone=hyperspace property*, Canad. J. Math., 35 (1983), 1030-1048.

[28] H. Whitney, *Regular families of curves*, Annals Math., 34 (1933), 244-270.