67

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO DE PORTAFOLIO DE MERTON APLICADO EN LA BOLSA MEXICANA DE VALORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A :

ENRIQUE MARTINEZ RAMIREZ

290923

DIRECTOR DE TESIS: M. EN E. ARTURO LORENZO VALDES

2001

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "EL MODELO DE PORTAFOLIO DE MERTON APLICADO EN LA BOLSA MEXICANA DE VALORES"

realizado por ENRIQUE MARTINEZ RAMIREZ

con nùmero de cuenta 8625097-9 , pasante de la carrera de ACTUARIA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN E. ARTURO LORENZO VALDES	
Propietario	MAT. ADRIAN GIRARD ISLAS	
Propietario	ACT. MAURICIO AGUILAR GONZALEZ	
Suplente	ACT. GABRIEL VARGAS VILCHIS	
Suplente	ACT. ERIC MANUEL RODRIGUEZ HERRERA	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTO:

A mis familiares, que siempre he contado con su apoyo.

A todos los profesores que han contribuido en mi formación.

A mi director de tesis, por su paciencia.

A los sinodales, por su disposición.

Y en general a todos los que han contribuido a que este trabajo se haya realizado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La actitud con respecto al riesgo por parte de los inversionistas se ha convertido en un tema fundamental del comportamiento económico. El problema de portafolio no es la excepción. La teoría del portafolio estudia el problema de cómo invertir cierta cantidad de riqueza en un conjunto de activos bajo un ambiente de incertidumbre.

El problema de portafolio en un ambiente de incertidumbre, se ha estudiado a través de la formulación media-varianza. En ese contexto el inversionista escoge entre varias alternativas de portafolios dependiendo de la media y la varianza de la tasa de retorno de los mismos.

Con el objeto de presentar un modelo de portafolio de inversiones para la obtención de portafolios eficientes para dos periodos y para diferentes escenarios, en el presente trabajo se realiza lo siguiente: en el capítulo uno se describe el Sistema Financiero Mexicano (el cual nos sirve como marco de referencia al problema de portafolio) con el fin de mostrar cómo está estructurado, las instituciones que regulan y supervisan las actividades financieras, los mercados existentes y los diferentes tipos de instrumentos disponibles en esos mercados. En el capítulo dos se explica la teoría general de portafolio desarrollada por Harry Markowitz que nos llevará de deducir la frontera eficiente de oportunidades de inversión y la línea del mercado de capitales. En el capítulo tres se hace la presentación formal del modelo tomado del artículo: "Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier" publicado por Robert C. Merton en la revista *Journal of Financial and Quantitative Analysis* de septiembre de 1972. El modelo es la resolución de un problema de optimización que consiste en minimizar la varianza del portafolio de activos riesgosos y de esa manera obtener el retorno esperado y la desviación estándar del portafolio de mínima varianza global así como también los porcentajes de la riqueza a invertir en cada uno de los activos que componen el portafolio de acuerdo con el riesgo que se quiera enfrentar. Posteriormente se obtiene la línea del mercado de capitales y el portafolio de mercado. En el capítulo cuatro se efectúa la prueba empírica que consiste en aplicar el modelo (el cual proporciona una metodología para desarrollarla) para un portafolio compuesto por algunas acciones de las más bursátiles que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores para dos cuatrimestres, el primero de mayo a agosto de 1998 y el segundo de septiembre a diciembre del mismo año, con la característica de presentar este último una mayor inestabilidad económica en nuestro país (de acuerdo con los principales indicadores de la economía) comparada con los cuatro meses anteriores. Por último se presentan conclusiones en donde se explican los resultados de la aplicación del modelo.

CAPÍTULO 1

EL SISTEMA FINANCIERO MEXICANO

1.1 Definición de sistema financiero mexicano

El proceso de formación de portafolios de inversión se desarrolla en un Sistema Financiero y dentro de éste en un Mercado de Valores.

El sistema financiero mexicano se puede definir como el conjunto de personas físicas y morales, tanto públicas como privadas que hacen posible el flujo o intercambio de recursos en los distintos agentes económicos y cuyas funciones (captación, administración, orientación del ahorro y la inversión) están reguladas por la ley.
El sistema financiero mexicano es supervisado por las siguientes autoridades:

1. La Secretaría de Hacienda y Crédito Público

Es un organismo del gobierno federal que representa la máxima autoridad en la estructura del sistema financiero mexicano y entre sus funciones están:

- Planear, coordinar, evaluar, y vigilar el sistema bancario del país; que comprende al Banco Central, a la Banca Nacional de Desarrollo y a todas las demás instituciones que prestan el servicio de Banca y Crédito.
- Ejercer las atribuciones que le señalen las leyes en materia de seguros, fianzas, valores y de organizaciones auxiliares de crédito.

Dependiente de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, la Dirección General de Seguros y Valores, desempeña las siguientes funciones:[1]

- Formular para aprobación superior, las políticas de promoción, regulación y supervisión de las instituciones de seguros, de depósito de valores, de fianzas, de sociedades de inversión, de Bolsas de Valores, de casas de bolsa, de organizaciones auxiliares de crédito, de casas de cambio.

- Estudiar y sugerir los programas anuales e institucionales de los citados intermediarios financieros que son coordinados por la Secretaría y en su caso, proponer su aprobación. También estudiar, integrar y proponer para aprobación superior los presupuestos de los intermediarios financieros.

- Proponer para resolución superior, las actividades de planeación, coordinación, vigilancia y evaluación de los intermediarios financieros y que corresponda a la coordinación de la Secretaría.

Además de las funciones ya mencionadas la Secretaría de Hacienda y Crédito Público tiene las siguientes facultades dentro del mercado de valores[2].

- Autorizar y desautorizar la constitución y operación de casas de bolsa y bolsas de valores.

- Proponer políticas de regulación, orientación, control y vigilancia de valores.

---

[1] Véase Reglamento Interior de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público 1997.
[2] Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V.: *Sistema Financiero Mexicano*, folleto informativo, 1998.

- Instrumentar el funcionamiento de las instituciones que integran el sistema financiero mexicano.

- Aprobar los aranceles de las Bolsas de Valores.

- Aprobar las actas constitutivas y los estatutos así como las modificaciones a los mismos documentos pertenecientes a las instituciones del sistema financiero mexicano.

- Designar al presidente y a dos representantes de la Junta de Gobierno de la Comisión Nacional de Valores.

- Señalar las actividades que pueden realizar los agentes de valores ya sean personas físicas o morales y autorizar las actividades análogas o complementarias a las indicadas por la ley para las casas de bolsa.

- Señalar otros títulos-valor que, además de los señalados por la ley, pueda el SD INDEVAL recibir en depósito.[3]
- Aprobar los cargos por los servicios que preste el SD INDEVAL.

2. Banco de México

El Banco de México es un organismo autónomo, cuyo ejercicio de funciones y administración están encomendadas a una Junta de Gobierno y a un gobernador. De

[3] La institución para el depósito de valores (SD INDEVAL) es un organismo de apoyo al mercado de valores que se describirá con detalle en este mismo capítulo.

acuerdo con su ley, otorga un monto limitado de crédito al gobierno federal, promoviendo la norma siguiente: El Banco de México goza de plena autonomía, quedando así desligado del Gobierno y por lo tanto no responderá a necesidades de política económica, sino a requerimientos que garanticen la estabilidad económica.

Las finalidades del Banco de México son:

- Promover el sano desarrollo del sistema financiero mexicano.
- Propiciar el buen funcionamiento de los sistemas de pago.

Dentro de las funciones del Banco de México están:

- Regular la emisión de circulante, la intermediación y los servicios financieros.
- Fungir como asesor financiero del gobierno.
- Operar como banco de reserva de instituciones de crédito y acreditante de última instancia.
- Prestar servicios de tesorería al gobierno federal.
- Actuar como agente financiero del gobierno federal.
- Participar en el FMI y en organismos internacionales que agrupen Bancos Centrales.

- Emitir billetes y acuñar monedas.

3.Comisión Nacional Bancaria y de Valores

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) tiene por objeto supervisar y regular, en el ámbito de su competencia, a las entidades financieras, a fin de procurar su estabilidad y correcto funcionamiento, y también mantener y fomentar el sano desarrollo del sistema financiero con el fin de proteger los intereses del público.

La CNBV supervisa a las siguientes entidades:

- Instituciones de crédito.
- Sociedades de inversión.
- Sociedades controladoras de grupos financieros.
- Sociedades operadoras de sociedades de inversión.
- Bolsas de valores.
- Casas de bolsa.
- Especialistas bursátiles.
- Almacenes generales de depósito.
- Uniones de crédito.
- Arrendadoras financieras.
- Empresas de factoraje financiero.
- Sociedades de ahorro y préstamo.
- Casas de cambio.
- Instituciones para el depósito de valores.
- Sociedades financieras de objeto limitado.
- Instituciones calificadoras de valores.
- Sociedades de información crediticia.

Las facultades que desempeña la CNBV son:

- Efectuar la supervisión de entidades financieras, así como de personas físicas y morales, cuando realicen actividades previstas en las leyes relativas al sistema financiero.

- Dictar normas de registro de operaciones.

- Expedir normas con respecto a la información que deberán proporcionarle periódicamente las entidades.

- Dictar las medidas necesarias para que las entidades ajusten sus actividades y operaciones a las leyes que les sean aplicables, a las disposiciones de carácter general que de ellas deriven y a los referidos usos y sanas prácticas.

- Emitir dentro de lo que le corresponde la regulación prudencial a que se sujetarán las entidades.

- Fungir como órgano de consulta del gobierno federal en materia financiera.

- Fijar reglas para la estimación de los activos y, en su caso, de las obligaciones y responsabilidades de las entidades.

- Dar atención a las reclamaciones que presenten los usuarios y actuar como conciliador y árbitro, así también el proponer la designación de árbitros, en los conflictos que surgen de operaciones y servicios que hayan contratado las entidades con su clientela, de conformidad con las leyes correspondientes.

- Intervenir administrativa o gerencialmente a las entidades, con el fin de suspender, normalizar o resolver las operaciones que pongan en peligro su solvencia, estabilidad o liquidez, o aquellas violatorias de las leyes que las regulan o de las disposiciones de carácter general que de ellas se deriven, en términos de lo que establece la ley.
- Determinar los días en las que las entidades deberán cerrar sus puertas y suspender las operaciones.

- Llevar el Registro Nacional de Valores e Intermediarios y certificar inscripciones que consten en el mismo.

- Autorizar, suspender o cancelar la inscripción de valores y especialistas bursátiles en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios.

- Intervenir en la emisión, sorteos y cancelación de títulos o valores de las entidades, en los términos de la ley, cuidando que la circulación de los mismos no exceda de los límites legales.

4. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas

La Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público; entre sus facultades de acuerdo con lo establecido en los artículos 108 de la Ley General de Instituciones y Sociedades

Mutualistas de Seguros (LGISMS) y 66 de la Ley Federal de Instituciones de Fianzas (LFIF), son:[4]

- Efectuar la inspección y vigilancia que le competen conforme a la LGISMS y la a LFIF.

- Fungir como órgano de consulta de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, tratándose del régimen asegurador y afianzador y en los demás casos que las leyes determinen.

- Presentar opinión a la Secretaría de Hacienda sobre la interpretación de la LGISMS y de la LFIF en caso de duda respecto a su aplicación.

- Establecer las medidas que estime necesarias para que las instituciones de fianzas cumplan con las responsabilidades contraidas con motivo de las fianzas otorgadas.

- Intervenir, en los términos y condiciones que la LGISMS señala, en la formulación de reglamentos y reglas generales a que la misma se refiere.

- Proveer las medidas que estime necesarias para que las instituciones y sociedades mutualistas de seguros cumplan con los compromisos contraidos en sus contratos de seguros celebrados.

[4] Véase Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros y Ley Federal de Instituciones de Fianzas, ambas en Ediciones Delma, primera edición 2000

El sistema financiero se divide en dos subsistemas: el sistema bancario y el sistema no bancario.

1. El sistema bancario está constituido por:

1.1 La banca central (Banco de México).

1.2 Banca de desarrollo, compuesta por organismos de la administración pública federal cuya función es fomentar y desarrollar áreas específicas de la economía, tales como Nacional Financiera (NAFIN), Banco Nacional de Obras y Servicios Públicos (Banobras), Banco de Crédito Rural (Banrural), Banco Nacional de Comercio Interior (BNCI), Banco Nacional de Comercio Exterior (Bancomext), Banco del Ejército, Armada y Fuerza Aérea (Banjercito) y Financiera Nacional Azucarera (Finasa).

1.3 Banca múltiple. Su función principal es captar y colocar recursos del público a través de actos y operaciones causantes de pasivos y activos respectivamente, así como proporcionar una gran gama de servicios al cliente como son: cajas de seguridad, cuentas maestras y de cheques, tarjetas de crédito, etc.

1.4 Fideicomisos públicos para el fomento económico, constituidos por el gobierno federal para el desarrollo o fomento de actividades señaladas como prioritarias para la administración pública federal.

1.5 Patronato del ahorro nacional.

2. El sistema no bancario:

2.1 Grupos financieros

2.2 Compañías de seguros y fianzas

2.3 Casas de bolsa

2.4 Sociedades de inversión

2.5 Sociedades operadoras de sociedades de inversión

2.6 Administradoras de fondos de ahorro para el retiro (Afores)

2.7 Sociedades financieras de objeto limitado

2.8 Organizaciones auxiliares del crédito, como son: almacenes generales de depósito, arrendadoras financieras, sociedades de ahorro y de préstamo, uniones de crédito, empresas de factoraje financiero y casas de cambio

2.9 Filiales de instituciones extranjeras.

1.2 El mercado de valores

El mercado de valores se define como el conjunto de personas físicas y morales tanto públicas como privadas, regulaciones, disposiciones y mecanismos que hacen posible la compra-venta, emisión, distribución y colocación de valores en la Bolsa Mexicana de Valores, permitiendo con esto a los diversos agentes económicos tanto el ahorro como la inversión. Las bolsas de valores son organismos de apoyo al mercado de valores que prestan servicios diversos y complementarios para hacer posible un mercado organizado; así mismo, las bolsas de valores son sociedades anónimas de capital variable cuyo objeto es facilitar la transacción con valores

Existen instituciones de apoyo al mercado de valores, las cuales se mencionan a continuación:

1. Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB)

La institución se constituyó para conjuntar los esfuerzos y aportaciones de las casas de bolsa y otras instituciones relacionadas, así como también para fungir como el órgano de representación gremial.

El objetivo de la AMIB es desarrollar estudios y trabajos que permitan la consolidación del mercado de valores. Está conformada por los siguientes comités:

- Administración
- Análisis
- Jurídico
- Mercado de capitales
- Mercado de dinero
- Sistemas
- Sociedades de inversión
- Subsidiarias

2. Sociedades de Depósito (SD), Institución para el Depósito de Valores (INDEVAL)

Con el objeto de desalentar la tenencia física de los títulos y dada la dinámica bursátil registrada en el lapso comprendido de l977 a 1980, surgió la necesidad de constituir un depósito centralizado de valores, como complemento a la infraestructura del Mercado Bursátil Mexicano. El 28 de abril de 1978, se constituyó legalmente el Instituto para el Depósito de Valores como un organismo gubernamental; como resultado de la política gubernamental de desincorporación de entidades del sector público, a partir del 1° de octubre de 1987 se crea la nueva sociedad denominada SD INDEVAL S. A. de C. V., la cual adopta el carácter de organismo privado.

Su objetivo es proporcionar un servicio eficiente para satisfacer las necesidades relacionadas con la guarda, administración, compensación, liquidación y trasferencia de valores, además de facilitar las operaciones y transferencia de valores mediante registros, sin que sea necesario el traslado físico de los títulos.

El hecho de que los valores se mantengan en un mismo lugar, conlleva a que la institución tenga facultad de compensar y liquidar cuentas entre los depositantes, así como para administrar los valores por cuenta de los clientes.

3. Bolsa Mexicana de Valores

Es una institución privada, constituida legalmente como sociedad anónima de capital variable, que opera por concesión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público y con apego a la Ley del Mercado de Valores.

Sus objetivos son:

- Promover el desarrollo del mercado bursátil.
- Facilitar la realización de operaciones de compra-venta de valores emitidos por las empresas públicas o privadas.

Y sus funciones principales:

- Establecer instalaciones y mecanismos que faciliten las operaciones y relaciones entre los oferentes y demandantes de valores.
- Proporcionar y mantener a disposición del público sobre las operaciones que se realizan en su sede, sobre los valores inscritos en bolsa y sobre las emisoras.
- Certificar las cotizaciones en bolsa.

- Elaborar publicaciones sobre las materias señaladas.

El mercado de valores se clasifica en dos categorías. La primera está definida, según los sujetos que participan en la compraventa y en ella tenemos:

Mercado primario: Lo constituyen tanto los emisores de títulos como los inversionistas cuando es colocada una emisión de valores. Representa una fuente importante de recursos para los emisores.

Mercado secundario: Es aquel que está constituido por los inversionistas que se compran y venden valores entre sí, sin que estas transacciones generen flujos de recursos para las emisoras de los títulos. Este mercado generara liquidez al inversionista.

El mercado de valores también se clasifica, de acuerdo con el plazo y la rentabilidad de los títulos, en

Mercado de dinero: Es aquel constituido por la oferta y la demanda de títulos de renta fija de corto plazo; por lo general menor a un año.

Mercado de capitales: Es aquel constituido por la oferta y la demanda de títulos de renta fija de largo plazo y los de renta variable.

Mercado de metales: Lo constituyen la oferta y demanda de metales preciosos amonedados (centenarios y onzas troy de plata) y títulos relacionados (Ceplatas). Es considerado de renta variable.

Los títulos-valor o valores se negocian en el mercado de valores; el antecedente de éstos son los títulos de crédito que son necesarios para ejercitar el derecho literal que en ellos se consigna. Ejemplos de estos son las letras de cambio, los pagarés, las obligaciones, los certificados de participación, los certificados de depósito y los bonos de prenda. No todos los títulos de crédito se consideran valores. La ley del mercado sólo considera valores a las acciones, obligaciones y demás títulos de crédito que se emiten en serie o en masa y son objeto de oferta pública e intermediación en el mercado de valores.

1.3 Instrumentos de inversión

Dentro del mercado de dinero tenemos:

1. Aceptaciones bancarias (Ab's)
2. Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes)
3. Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en unidades de inversión (udibonos)
4. Bonos de prenda
5. Certificados de Depósito Bancario (Cedes)
6. Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes)
7. Pagaré con rendimiento Liquidable al Vencimiento (Priv)
8. Pagaré Empresarial Bursátil
9. Pagarés de Petróleos Mexicanos (Petropagares)
10. Papel Comercial Indizado

11.Papel Comercial

Y en el Mercado de Capitales:

Instrumentos de Deuda o Renta Fija Largo Plazo:

1. Bonos bancarios de desarrollo (Bbd's)
2. Bonos bancarios para la vivienda
3. Bonos bancarios para el desarrollo industrial (bondis)
4. Bonos bancarios de infraestructura
5. Bonos de indemnización bancaria(Bib´s)
6. Certificados de participación ordinarias (Cpo´s)
7. Certificados de participación inmobiliarios (Cpi's)
8. Certificados de plata (Ceplatas)
9. Obligaciones
10. Pagarés a mediano plazo (Pm)
11. Pagarés Financieros (pf)

Instrumentos de renta variable:

1. Acciones (industriales, comerciales y de servicios)
2. Acciones de sociedades de Inversión

1.4 Las sociedades de inversión

Las sociedades de inversión son sociedades anónimas autorizadas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores cuyo objeto es la adquisición de valores y documentos para integrar un portafolio de inversión diversificado con recursos provenientes de la venta de sus acciones entre el público inversionista. Las sociedades de inversión captan el ahorro público en diversos sectores mediante portafolios de inversión diseñados y administrados profesionalmente, con esto permiten a los pequeños y medianos inversionistas el acceso a mercados de mayor rentabilidad y no tener el riesgo de una inversión directa no diversificada. Aparte existen tres tipos de sociedades de inversión: sociedades de inversión en instrumentos de deuda (o sociedades de inversión de renta fija), sociedades de inversión comunes, y sociedades de inversión de capitales (sincas). Las sociedades de inversión son administradas por sociedades operadoras que tienen por objeto la prestación de los servicios de administración, distribución y recompra de acciones. Estas sociedades operadoras son casas de bolsa, instituciones de crédito y agrupaciones financieras. También existen las sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro, en las que participan de manera exclusiva los trabajadores como accionistas y cuyo objetivo es canalizar el ahorro de los trabajadores hacia actividades productivas, invirtiendo los recursos a largo plazo; de esa manera se fomenta la actividad productiva nacional, la creación de infraestructura, la vivienda y la generación de empleos. Tienen prohibido canalizar los recursos a inversiones de alto riesgo. Las Afores (Administradoras de Fondos para el Retiro) son entidades financieras que están constituidas por personas físicas o morales, mexicanas o filiales de instituciones financieras del extranjero, cuya función es administrar las cuentas individuales de los trabajadores, individualizar sus aportaciones y canalizar el ahorro a las sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro.

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE PORTAFOLIO

2.1 Teoría de la elección

La teoría de la elección se refiere, para el tema que se desarrollará en el presente trabajo, a la forma en que los inversionistas (que son quienes se encargan de tomar las decisiones) elegirán entre diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento. Para desarrollar ésta teoría haremos dos supuestos básicos: primero supondremos que solamente la media y la varianza de los rendimientos tienen importancia para los inversionistas y por lo tanto la media y la varianza son objetos de elección; el segundo supuesto es que quien toma las decisiones tiene aversión al riesgo. Éste último supuesto es básico y es importante describir el porqué. La respuesta la podemos encontrar en la teoría de la utilidad, pues dentro de ésta teoría se encuentra el concepto de utilidad marginal decreciente por la riqueza. Podemos describir este concepto mediante un ejemplo: supongamos que una persona no tiene riqueza, si ésta persona recibiera una cantidad de riqueza x, podría con ella satisfacer sus necesidades más inmediatas; si posteriormente esa persona percibiera otra cantidad x igual, podría utilizarlos, pero ésta última cantidad no sería tan necesaria como la primera, por lo tanto la utilidad de la segunda cantidad o marginal x es menor que la de la primera, y así sucesivamente en los siguientes incrementos en la riqueza; por lo tanto la utilidad marginal de la riqueza esta disminuyendo[1].

[1] Weston, J. Fred y Copelan, Thomas E., *Finanzas en Administración*, Mc Graw-Hill, 1992, pp. 405-409.

La figura 2.1 representa la relación entre riqueza y utilidad. La curva A muestra una utilidad marginal positiva. También representa una utilidad marginal que se incrementa a una tasa decreciente. En ella un inversionista tiene una utilidad marginal decreciente de la riqueza. Un individuo con \$200.00 obtiene 10 unidades de utilidad total, mientras que con \$100.00 adicionales, su utilidad aumentaría a 12 unidades, es decir, obtendría un incremento de 2 unidades. Pero con una pérdida de \$100.00, la utilidad disminuye a seis unidades, experimentando una pérdida de cuatro.

Los inversionistas (en su gran mayoría) tienen una utilidad marginal decreciente en riqueza y esto influye de manera directa en sus actitudes hacia el riesgo. Alguien que tenga una utilidad marginal decreciente en la riqueza obtendrá más "sufrimiento" de un peso perdido que placer de un peso ganado. Debido a la utilidad decreciente de la riqueza el individuo estará muy opuesto al riesgo y requerirá un rendimiento muy alto sobre una inversión sujeta a mucho riesgo.

En la curva A se vio que una ganancia de \$100.00 a partir de \$200.00 trae dos unidades adicionales de satisfacción, pero una pérdida de \$100.00, da lugar a una pérdida de cuatro unidades. Un inversionista con esta función de utilidad y \$200.00 no estaría dispuesto a apostar con una probabilidad de 1/2 de ganar o perder \$100. En cambio, un individuo con una curva como B, es indiferente al riesgo, entonces sería indiferente a la apuesta; un inversionista con una curva de utilidad C, es amante al riesgo, estaría dispuesto a hacerla.

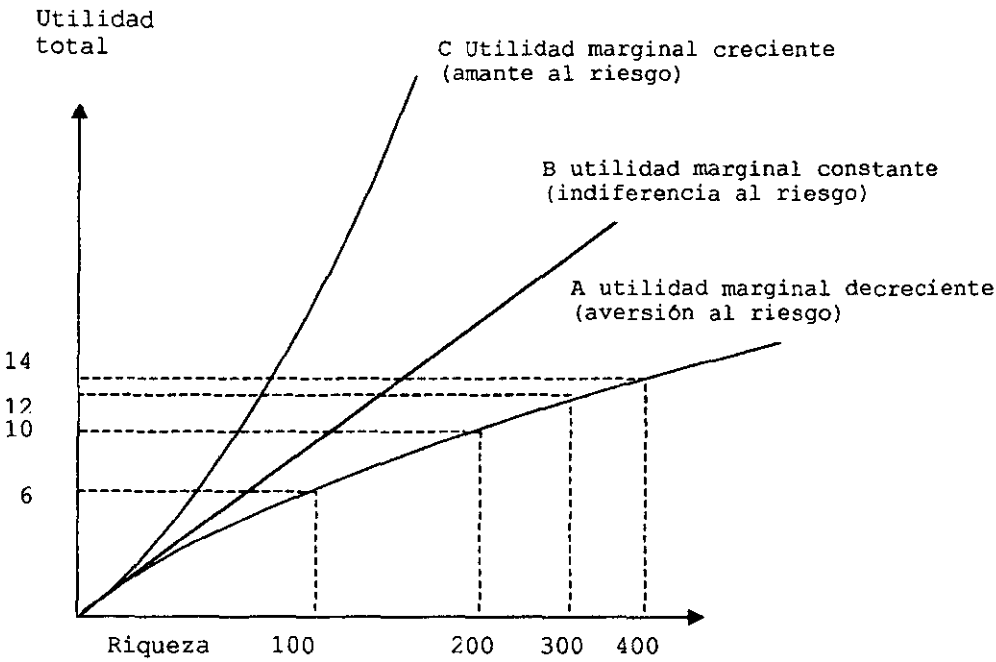


Figura 2.1 Relación entre la riqueza y su utilidad

2.2 Curvas de indiferencia media-varianza

Para establecer el concepto de curvas de indiferencia media-varianza de un inversionista que tiene aversión al riesgo, supongamos que el riesgo puede medirse con la varianza del rendimiento o por la desviación estándar, y el rendimiento por el rendimiento esperado.

Una forma de representar todas las combinaciones de riesgo y rendimiento que dan la misma utilidad total al inversionista que tiene aversión al riesgo es por medio de la figura 2.2

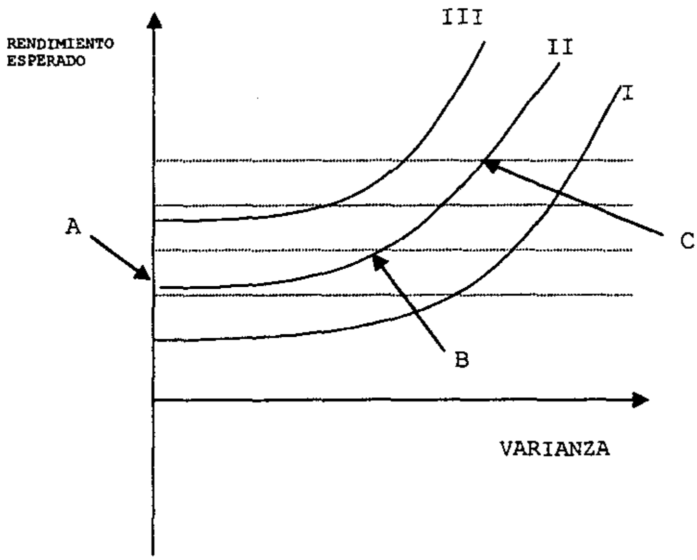


Figura 2.2 Curvas de indiferencia media-varianza

Los puntos A, B, y C tienen la misma utilidad total y yacen sobre la misma curva de indiferencia de un inversionista. Un inversionista que no tiene aversión por el riesgo será indiferente entre escoger el punto A y el punto C. Para un inversionista neutral (indiferente) hacia el riesgo, sus curvas de indiferencia serían como las líneas horizontales de la gráfica 2.2

Para diferentes inversionistas es probable que sus curvas de indiferencia también sean diferentes. Esto se puede ilustrar en la figura 2.3.

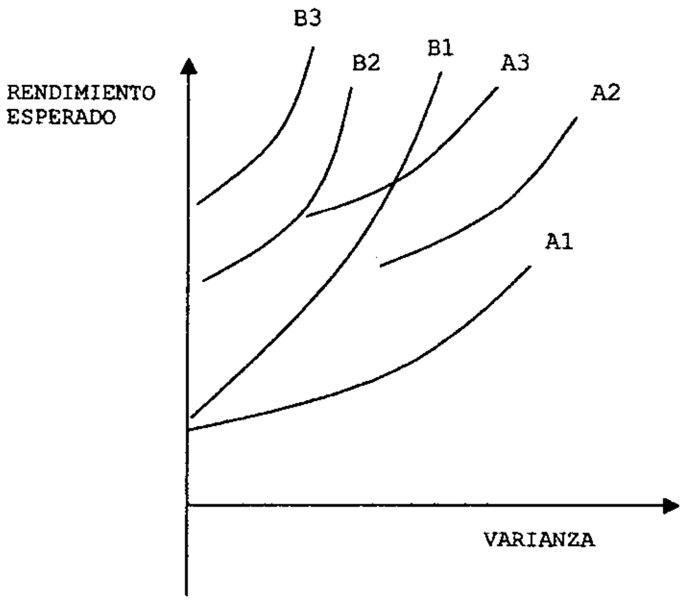


Figura 2.3 Curvas de indiferencia para los inversionistas A y B

Las curvas de indiferencia del inversionista B empiezan desde el mismo punto y tienen una pendiente mayor que las del inversionista A; esto indica que el inversionista B requiere un rendimiento más alto con el mismo riesgo.

Para obtener las curvas de indiferencia de los inversionistas aversos al riesgo, son necesarios sólo dos supuestos:

1. La gente prefiere más riqueza que menos riqueza.
2. Tienen una utilidad marginal decreciente de riqueza.

Si los supuestos son válidos, implican que los inversionistas tienen aversión por el riesgo y requerirán un rendimiento más alto para aceptar un riesgo más grande. Los conjuntos de curvas de indiferencia media-varianza constituyen una teoría de la elección. Nos indican la forma en que se comportarán los inversionistas que tienen aversión al riesgo.

2.3 Media y varianza de un portafolio de inversión

Antes de definir la media y la varianza, se definirá brevemente el concepto de portafolio de inversiones.

Un portafolio se define como una combinación de activos. Un activo es una decisión que afecta el futuro (se puede elegir entre acciones, papel comercial, bonos, etc.). Un portafolio representa la totalidad de decisiones que determinan las perspectivas futuras de un inversionista[1] y el objetivo de su formación es reducir el riesgo mediante la diversificación. La teoría de portafolios está relacionada con la toma de decisiones que implican la obtención de ingresos que no se pueden predecir con certeza. Ésta teoría se refiere a la selección de portafolios óptimos, donde estos últimos se definen como aquellos que proporcionan el rendimiento o retorno más grande posible para cualquier grado específico de riesgo o el riesgo más bajo posible para cualquier tasa de retorno.

Para poder determinar los portafolios óptimos se debe de analizar los dos componentes elementales que los integran: retorno y riesgo, representados por la media y la varianza respectivamente.

A continuación se describen la media y la varianza:

---

[1] Sharpe, William F., *Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales*, traducción de: Luis Corrons Prieto, ediciones Deusto, Bilbao España, 1974, p. 37

Al promedio de una serie de datos también se le conoce como el valor esperado. Su cálculo es sencillo: si todos los resultados son igualmente probables, se suman todos los resultados y se divide entre el número de ellos. Otra forma para determinar el promedio es multiplicar cada resultado por su probabilidad de ocurrencia y sumar todos los productos. Esto último facilita el cálculo sobre todo cuando los resultados no son igualmente probables.

Usaremos el símbolo R_{ij} para denotar el j-ésimo posible resultado para el retorno sobre el activo i.

El valor esperado de M retornos igualmente probables para el activo i es:

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{R_{ij}}{M} \tag{2.1}$$

Para el caso cuando las observaciones no son igualmente probables, tenemos que el retorno esperado es:

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} P_{ij} R_{ij} \tag{2.2}$$

Donde P_{ij} es la probabilidad del j-ésimo retorno sobre el i-ésimo activo.

Una forma alternativa de indicar el valor esperado es poner el símbolo *E* antes de la expresión para la cual se desea determinarlo. Por lo tanto $E(R_i)$ se leerá como el valor esperado de R_{ij}, así como también $\overline{R}_i$ es el valor esperado de R_{ij}.

Es importante mencionar dos propiedades del valor esperado:

1. El valor esperado de la suma de dos retornos es igual a la suma del valor esperado de cada retorno:

$$E\left(R_{1j}+R_{2j}\right)=\overline{R}_1+\overline{R}_2 \tag{2.3}$$

2. El valor esperado del producto de una constante por un retorno esperado es la constante por el valor esperado.

$$E\left(C\left(R_{1j}\right)\right)=C\overline{R}_1 \tag{2.4}$$

Es también útil tener alguna medida de cómo las observaciones difieren del promedio. Esto se puede obtener calculando el promedio de las desviaciones al cuadrado entre las observaciones y el valor esperado. A este promedio se le conoce como varianza. A la raíz cuadrada de la varianza se le llama desviación estándar.

La fórmula para la varianza del retorno sobre el i-ésimo activo, cuando cada retorno es igualmente probable es:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} \frac{\left(R_{ij} - \overline{R}_i\right)^2}{M} \tag{2.5}$$

Si las observaciones no son igualmente probables, multiplicamos las desviaciones al cuadrado por la probabilidad con la cual ocurren los retornos. La fórmula para la varianza del retorno sobre el i-ésimo activo es:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} p_{ij}\left(R_{ij} - \overline{R}_i\right)^2 \tag{2.6}$$

2.3.1 Valor esperado y desviación estándar de un portafolio

El retorno para un portafolio de activos es simplemente un promedio ponderado del retorno en los activos individuales. Si R_{pj} es el j-ésimo retorno en el portafolio y X_i es la proporción de la riqueza invertida en el i-ésimo activo, entonces:

$$R_{pj} = \sum_{i=1}^{N} X_i R_{ij} \tag{2.7}$$

El retorno esperado es también un promedio ponderado de los retornos esperados en los activos individuales.

Si se obtiene la esperanza de la expresión anterior, se tiene:

$$\overline{R}_p = E\left(R_p\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i R_{ij}\right)$$

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} E\left(X_i R_{ij}\right)$$

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i \qquad (2.8)$$

Para ilustrar el uso de la varianza en un portafolio, se utilizará primero un ejemplo para un portafolio que consta de dos activos. La varianza de un portafolio de activos, se designa mediante σ_p^2, es el valor esperado de las desviaciones al cuadrado del retorno en el portafolio y del retorno esperado, es decir:

$$\sigma_p^2 = E\left(R_p - \overline{R}_p\right)^2 \qquad (2.9)$$

Para el caso de dos activos, tenemos que:

$$\sigma_p^2 = E\left(R_p - \overline{R}_p\right)^2 = E\left[X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j} - \left(X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2\right)\right]^2$$

$$= E\left[X_1\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right) + X_2\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right)\right]^2$$

Donde $\overline{R}_i$ representa el valor esperado del activo i con respecto a todos los posibles resultados.

Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$\sigma_p^2 = E\left[X_1^2\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right)^2 + 2X_1X_2\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right)\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right) + X_2^2\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right)^2\right]$$

$$\sigma_p^2 = X_1^2E\left[\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right)^2\right] + 2X_1X_2E\left[\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right)\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right)\right] + X_2^2E\left[\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right)^2\right]$$

Donde $E\left[\left(R_{1j} - \overline{R}_1\right)\left(R_{2j} - \overline{R}_2\right)\right]$ es la covarianza para los dos activos y la denotaremos como σ_{12}. Entonces la varianza del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} \qquad (2.10)$$

La covarianza es el valor esperado del producto de dos desviaciones diferentes, y puede ser positiva o negativa. Será grande cuando los resultados buenos o malos para cada acción ocurren al mismo tiempo. En éste caso, para los resultados buenos, la covarianza será el producto de dos números positivos grandes, el cual es positivo. Cuando los resultados malos ocurren, la covarianza será el producto de dos números negativos grandes, el cual también es positivo. Esto resulta en un valor grande para la covarianza y una varianza grande para el portafolio. Si los resultados buenos para un activo están son asociados con resultados malos de otro, la covarianza es negativa ya que una desviación positiva para un activo esta asociada con una desviación negativa para el segundo, y el producto de más y menos es menos. En síntesis la covarianza es una medida de como los retornos en los activos actúan al mismo tiempo.

Si se tienen desviaciones positivas, negativas y a veces similares, la covarianza es un número positivo grande. En cambio si se tienen desviaciones positivas, negativas, o no similares, entonces la covarianza es negativa. Si las desviaciones positivas y negativas están no relacionadas, tienden a cero.

Es útil estandarizar la covarianza, dividiéndola entre el producto de la desviación estándar de cada activo; esto produce una variable con las mismas propiedades de la covarianza, pero con un rango de -1 a 1. La medida se llama coeficiente de correlación y se define como:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{2.11}$$

Donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre el activo i y el j.

Cuando el coeficiente de correlación es cero, el riesgo de un portafolio es menor que el riesgo de cada uno de los activos.[2]

[2] Elton, E. J. y Gruber, M. J., *Modern Portfolio: Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, 1991, p. 28

"Cuando los retornos de dos activos son independientes, es decir, cuando el coeficiente de correlación y la covarianza son ambos cero, se puede encontrar un portafolio que tiene la varianza más pequeña que cada uno de los activos".[3]

Regresando a la definición de varianza de un portafolio; es posible generalizarla para un portafolio de más de dos activos; para ello, consideremos primero el caso de tres activos; sustituyendo en la ecuación 2.9, obtenemos:

$$\sigma_p^2 = E\left(R_p - \overline{R}_p\right)^2$$

$$\sigma_p^2 = \left[X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j} + X_3 R_{3j} - \left(X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2 + X_3 \overline{R}_3\right)\right]^2$$

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + 2X_2 X_3 \sigma_{23}$$

Notemos que la varianza de cada activo está multiplicada por el cuadrado de la proporción invertida en él; entonces la primera parte de la expresión para la varianza de un portafolio es:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2$$

[3] Ibídem

La segunda parte de la expresión involucra la covarianza entre cada par de activos. Para el caso de tres activos incluye la covarianza entre el activo 1 y 2, 1 y 3, y 2 y 3. Además cada covarianza está multiplicada por dos veces el producto de las proporciones invertidas en cada activo. Por lo tanto la siguiente expresión incluye las covarianzas:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} X_j X_k \sigma_{jk}$$

Juntando la parte de las varianzas y la parte de las covarianzas, obtenemos la expresión general para la varianza de un portafolio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} X_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} X_j X_k \sigma_{jk} \qquad (2.12)$$

Si se considera el caso donde todos los activos son independientes, la covarianza entre ellos es cero, es decir $\sigma_{jk} = 0$; entonces la fórmula para la varianza se reduce a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} X_j^2 \sigma_j^2 \qquad (2.13)$$

Por lo tanto, si se asume que las cantidades a invertir en cada activo son iguales y si tenemos N activos, la proporción a invertir en cada uno de ellos es 1/N, y sustituyendo esta cantidad en la expresión 2.13 se obtiene:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} (1/N)^2 \sigma_j^2 = 1/N \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j^2}{N} \right] \tag{2.14}$$

El término entre los paréntesis cuadrados es la expresión de un promedio. Así la expresión 2.14 se reduce a:

$$\sigma_p^2 = (1/N)\bar{\sigma}_j^2 \tag{2.15}$$

Donde $\bar{\sigma}_j^2$ representa la varianza promedio de los activos en el portafolio. Cuando **N** crece, la varianza del portafolio se hace más pequeña, es decir que cuando $N \to \infty$, $\sigma_p^2 \to 0$.

En la mayoría de los mercados financieros el coeficiente de correlación y la covarianza entre los activos es positiva. En estos mercados el riesgo en el portafolio no se puede hacer cero, pero puede ser mucho menor que la varianza de cualquier activo considerado de manera individual.[4]

[4] Ibídem, p. 30.

2.4 Correlación entre activos

En el punto anterior se habló de la estandarización de la covarianza de dos activos y la llamamos coeficiente de correlación; se definió de la siguiente manera:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

donde: ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre el activo i y el j.

σ_{ij} la covarianza en el activo i y j

σ_i desviación estándar del activo i

σ_j desviación estándar del activo j

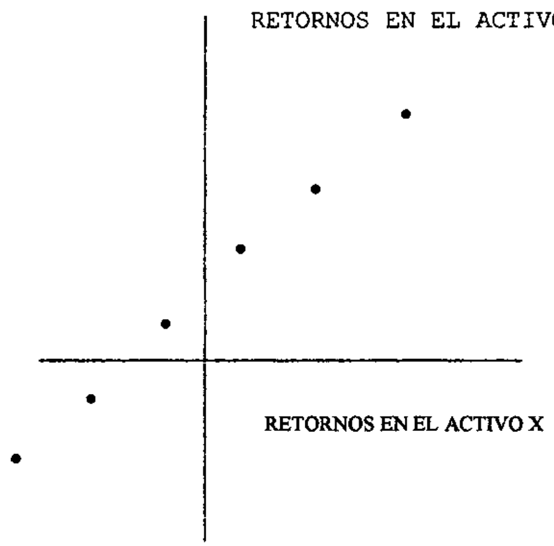
La varianza de un portafolio de activos depende de los coeficientes de correlación. El valor del coeficiente de correlación determina el conjunto de oportunidades de un portafolio de un inversionista. Si el índice de correlación es $\rho=1$, muestra que un aumento en el retorno de un activo va siempre asociado con un aumento proporcional en el retorno de otro activo, es decir, existe una intercompensación proporcional.

Un índice de correlación ρ=-1 indica que un aumento en el retomo para un activo esta asociado con una disminución proporcional en otro activo, y viceversa. Esto sucede en general si ρ<0, por lo tanto como la relación es inversa para los activos, el riesgo puede ser completamente diversificado.

Si el índice de correlación es cero, muestra la ausencia de correlación y los retornos de cada activo varían de manera independiente. En este caso la relación entre riesgo y retomo no es lineal.

En la siguiente figura se muestran diferentes tipos de correlación.

ρ_{ij}=1.0



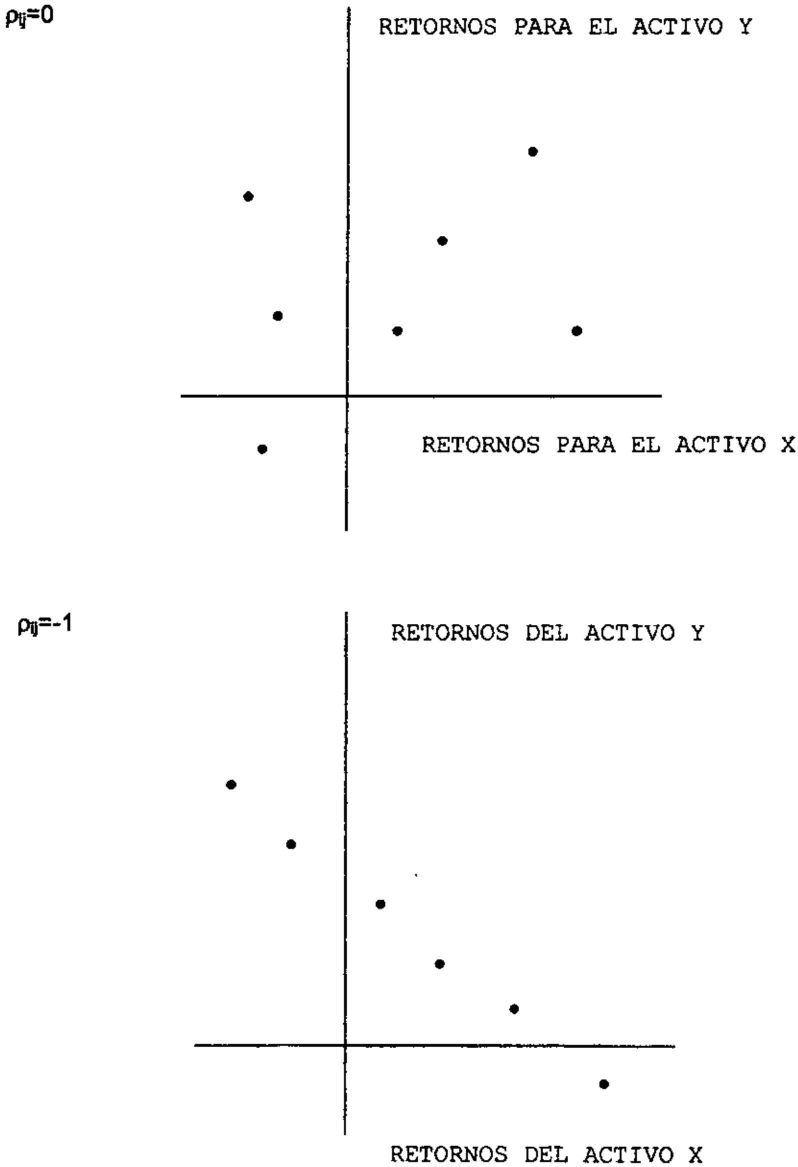


Figura 2.4 Diferentes tipos de correlación entre activos

2.5 Conjunto de oportunidades de portafolio y frontera eficiente.

Para un portafolio de dos activos riesgosos, dado el coeficiente de correlación entre los activos, el retorno esperado de cada activo y su desviación estándar, la inclusión de diferentes porcentajes de la riqueza a invertir en cada activo proporcionan diferentes retornos esperados en el portafolio así como también diferentes desviaciones estándar y estos representan un conjunto llamado conjunto de oportunidades, ya que representan diferentes posibilidades entre las cuales se puede elegir.

Mediante la figura 2.5 se muestra la relación general entre el retorno y el riesgo de portafolios de dos activos riesgosos. La línea XY muestra las combinaciones posibles de riesgo y retorno si ρ_{ij}=+1.0.

La rectas XZ y YZ muestran las intercompensaciones de riesgo y retorno cuando ρ_{ij}=-1.0. El triángulo XYZ establece la frontera del conjunto de posibilidades, la curva L representa las combinaciones cuando no existe relación entre los retornos en los activos, es decir ρ_{ij}=0. La forma general del conjunto de oportunidades de inversión no se altera para el caso de muchos activos riesgosos.

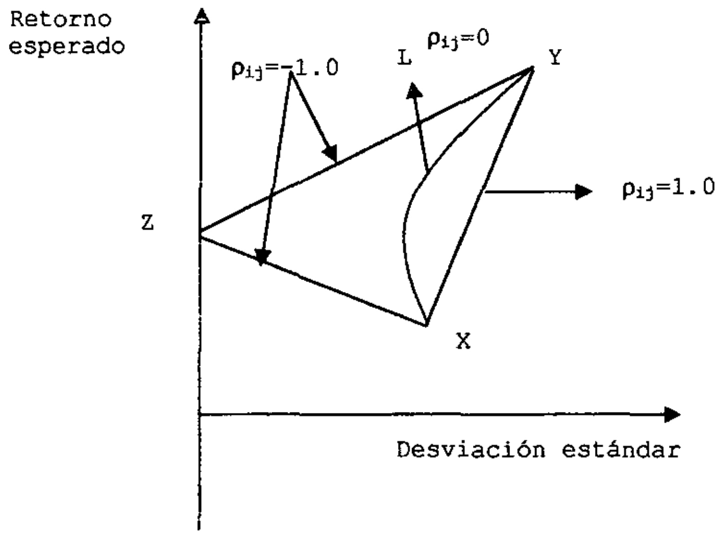


Figura 2.5 Forma general del conjunto de oportunidades de portafolios.

Frontera eficiente con ventas en corto y sin ellas[1].

Primero se hablará de la frontera eficiente cuando las ventas en corto no están permitidas y posteriormente cuando si lo están. En teoría se podrían trazar todos los activos riesgosos concebibles y las combinaciones de éstos en una gráfica en el espacio retorno-desviación estándar. Se dice en teoría debido a que existe una infinidad de posibilidades. No sólo deben todas las combinaciones posibles de activos riesgosos ser consideradas, sino también las combinaciones en todas las posibles composiciones de porcentaje a invertir en los activos. Si se trazaran todas las posibilidades en el espacio riesgo-retorno, se obtendría un diagrama como la figura 2.6, en donde se ha tomado la libertad de representar las combinaciones como un número finito de puntos

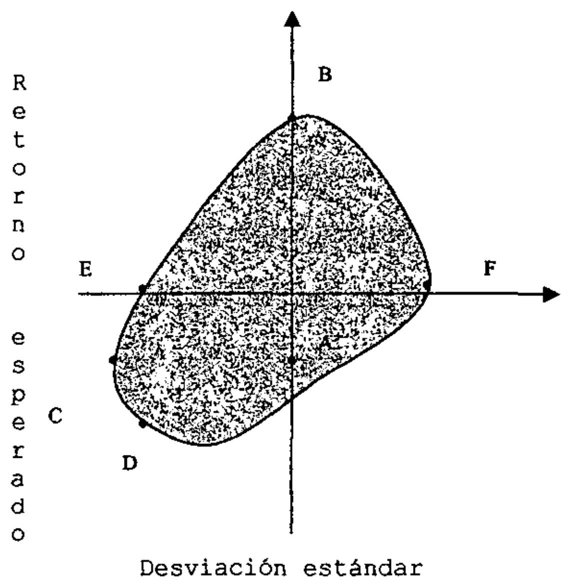


Figura 2.6 Riesgo y retorno para varios activos y portafolios

[1] Una venta en corto es la venta de un valor que no se posee.

Examinando la figura 2.6 notamos que el portafolio B es preferido al portafolio A porque ofrece un retorno más alto con el mismo nivel de riesgo, también se observa que el portafolio C sería preferible al portafolio A porque ofrece menos riesgo al mismo nivel de retorno; hasta este punto no se puede encontrar un portafolio que domine al portafolio C o al portafolio B y es obvio que un conjunto eficiente no incluye a portafolios interiores. Se puede reducir aún más el conjunto de posibilidades. Para cualquier punto en el espacio riesgo–retorno, deseamos movernos en lo posible en dirección de incrementar el retorno y en la dirección de disminuir el riesgo. El punto D es un punto exterior el cual está dominado por el punto E. El punto C no puede ser eliminado ya que no hay ningún otro portafolio que tenga menos riesgo para el mismo retorno o más retorno para el mismo riesgo; a este portafolio se le conoce como el portafolio de mínima varianza global. El punto E domina al punto F. Si nos trasladamos sobre la curva desde el punto F, todos los portafolios son dominados hasta llegar al portafolio B. El portafolio B tampoco puede ser eliminado ya que no hay otro portafolio que tenga el mismo retorno y menos riesgo o el mismo riesgo y más retorno. El punto B representa aquel portafolio (usualmente un sólo valor) que ofrece el retorno esperado más alto de todos los portafolios. Así el conjunto eficiente consiste, cuando las ventas en corto no están permitidas, de la curva de todos los portafolios que permanecen entre el portafolio de mínima varianza global y el portafolio de máximo retorno. Este conjunto de portafolios es llamado la frontera eficiente.

Para el caso cuando las ventas en corto están permitidas, la frontera eficiente es igual al caso en el que las ventas no lo están, solo que ahora la frontera tiene una extención a partir del portafolio de máximo retorno tal y como se muestra en la figura 2.7 y por lo tanto se puede obtener un retorno más alto pero el riesgo es también mayor.

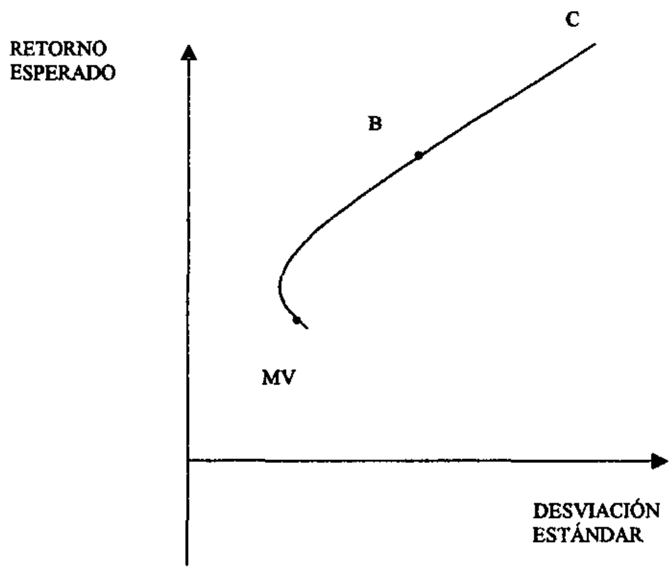


Figura 2.7 El conjunto eficiente cuando las ventas en corto están permitidas

2.6 Equilibrio de mercado: la línea del mercado de capitales.[1]

Para determinar el equilibrio de mercado se necesita conjuntar la teoría de la elección (las curvas de indiferencia) y los objetos de elección (el conjunto de oportunidades del portafolio). El conjunto de oportunidades definido anteriormente, estuvo compuesto sólo de activos riesgosos; no se ha explicado qué conjunto de oportunidades resultará si se incluye un activo libre de riesgo (en el presente estudio se tomará a los CETES como el activo libre de riesgo). Tampoco ha habido oportunidad de que los inversionistas realicen negociaciones entre ellos mismos pidiendo dinero en préstamo o prestándolo a una tasa de interés libre de riesgo; con esto último se puede caracterizar un equilibrio de mercado con muchos participantes. Primero se mostrará el conjunto de oportunidades que resulta al combinar un activo riesgoso con un activo libre de riesgo; posteriormente este caso se generalizará.

2.6.1 Conjunto de oportunidades de un portafolio compuesto de un activo riesgoso y un activo libre de riesgo.

Sea X un activo riesgoso y sea "a" el porcentaje a invertir en ese activo, entonces la cantidad (1-a) representa el porcentaje a invertir en un activo libre de riesgo cuyo retorno se denotará con R; entonces el retorno del portafolio compuesto por dos activos es:

[1]Weston, J. F. y Copelan, T. E., op. cit., pp. 404-432.

$$R_p = aX + (1-a)R \tag{2.16}$$

y el retorno esperado del portafolio es:

$$E(R_p) = aE(X) + (1-a)R \tag{2.17}$$

No es necesario calcular el valor esperado del retorno del activo libre de riesgo, ya que un activo libre de riesgo tiene siempre el mismo retorno para un periodo determinado.

Para determinar la desviación estándar hay que tomar en cuenta dos elementos: no hay relación entre el activo libre de riesgo y el activo riesgoso, es decir, el término de covarianza no existe, ya que la covarianza entre los activos es cero. También la varianza de un activo libre de riesgo es cero. De esto último la desviación estándar del retorno del portafolio es:

$$\sigma(R_p) = a\sigma_X \tag{2.18}$$

La figura 2.7 muestra la media-desviación estándar del conjunto de oportunidades de portafolios que resultan de las combinaciones del activo riesgoso y el no riesgoso. En el punto X hay 100% invertido en el activo riesgoso. Si nos desplazamos sobre la misma recta que contiene al punto X, hacia la derecha, se tiene más del 100% en el activo riesgoso X, es decir a>1. Esto se logra pidiendo prestado.

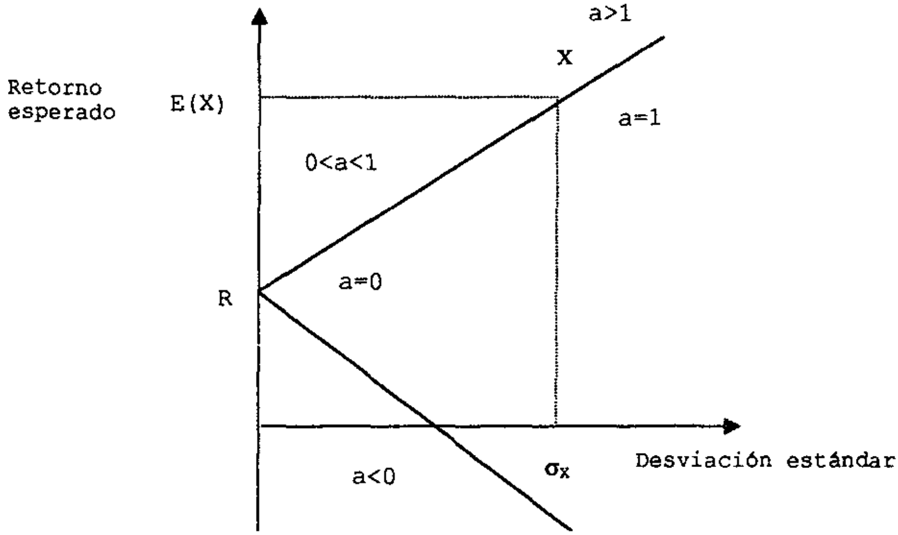


Figura 2.8 Conjunto de oportunidades de un portafolio compuesto de un activo riesgoso y un activo libre de riesgo.

Pedir prestado es lo mismo que hacer una venta corta del activo libre de riesgo; por lo tanto el peso en el activo libre de riesgo es negativo. Se recibirá efectivo a cambio de emitir un certificado que prometa volver a pagar el préstamo más el interés al final del periodo. En el segmento de recta entre los puntos X y R, se tiene parte de la cantidad a invertir en el activo riesgoso, es decir $0<a<1$ y el resto ha sido prestado a la tasa libre de riesgo. En el punto R se tiene el 100% invertido a la tasa libre de riesgo. Para el caso cuando $a<0$, se hace una venta en corto del activo riesgoso para invertir más del 100% en el activo libre de riesgo. En la figura 2.7 se puede apreciar que no es conveniente realizarla, ya que siempre se puede lograr un retorno más alto para el mismo riesgo.

2.6.2 Conjunto de oportunidades para un portafolio con un activo libre de riesgo y muchos activos riesgosos.

Se puede explicar el equilibrio de mercado si se amplía el análisis a un universo con solicitudes de préstamo y concesiones de préstamo libres de riesgo y N activos riesgosos. En la figura 2.8 la recta que pasa por los puntos R y X representa la totalidad de los portafolios posibles formados por el activo libre de riesgo y el activo riesgoso (o portafolio) X. Si los inversionistas tienen aversión al riesgo, preferirán los portafolios que se sitúen en la línea que pasa por los puntos R y Y como se muestra en la misma figura, ya que los retornos de los portafolios son más altos para cada nivel de riesgo dado. Sin embargo los mejores de todos los portafolios, son los que se encuentran situados a lo largo de la recta que pasa por R y M (los portafolios que están sobre ésta línea proporcionan el retorno más alto para cada nivel de riesgo).

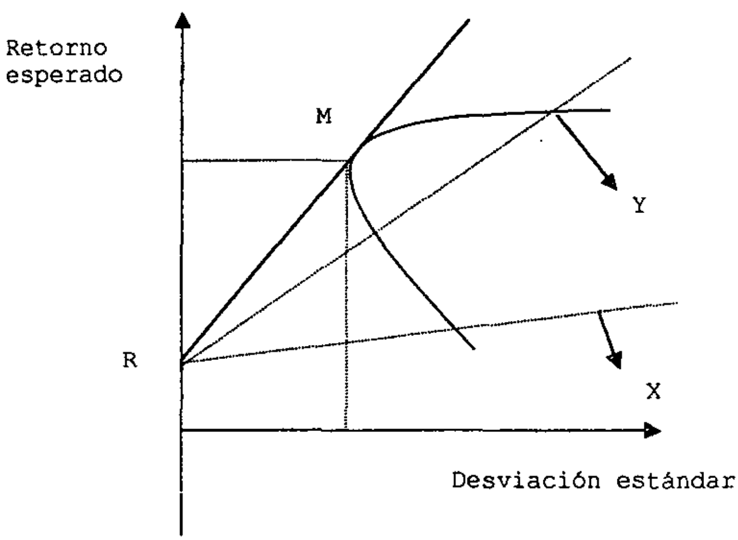


Figura 2.9 La línea del mercado de capitales

A esta línea se le llama línea del mercado de capitales porque representa la intercompensación del equilibrio de mercado entre el riesgo y el retorno. La línea existe debido a que los inversionistas tienen oportunidades para pedir prestado y prestar a una tasa libre de riesgo. En equilibrio, los inversionistas que tienen aversión al riesgo elegirán sus portafolios a partir de las combinaciones del activo libre de riesgo y el portafolio riesgoso M. Lo anterior se ilustra en la figura 2.9. Se combinan las curvas de indiferencia del inversionista con los objetos de elección que están representados por las combinaciones de portafolios a lo largo de la línea del mercado de capitales.

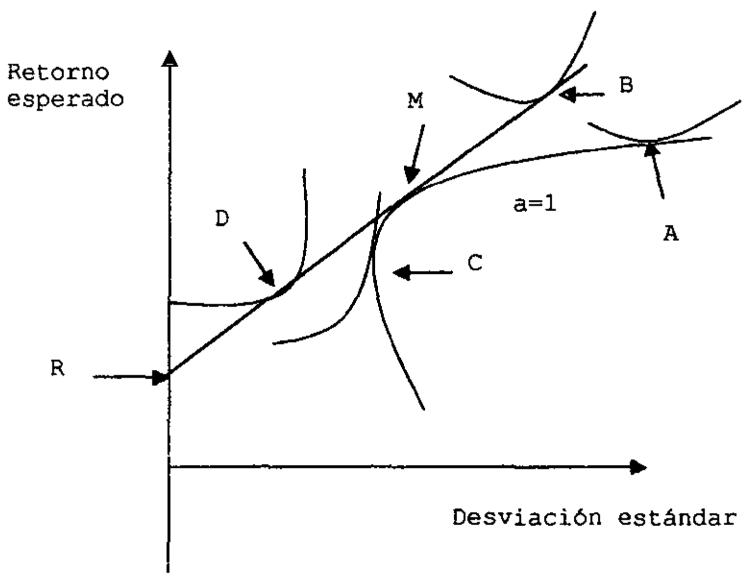


Figura 2.10 Los inversionistas que tienen aversión por riesgo elegirán sus portafolios óptimos a lo largo de la línea del mercado de capitales.

Un inversionista elegiría el punto A como su portafolio óptimo si no se tuviera la oportunidad de pedir prestado o prestar. Este punto representa la tangente entre su curva de indiferencia y el conjunto de oportunidad de activos riesgosos. Si no existiera un mercado de capitales y tampoco existiera la oportunidad de pedir prestado o prestar, entonces el punto A representaría el portafolio maximizador del inversionista. Si éste inversionista se desplaza al punto M y pide prestado para alcanzar el punto B, es posible que alcance una curva de indiferencia más alta. Es más conveniente entonces que exista la oportunidad de pedir dinero y prestarlo a una tasa de interés libre de riesgo. De forma similar si el inversionista se encontrase en C y si se desplazara a lo largo del conjunto de oportunidades hasta el punto M y posteriormente prestara para alcanzar el punto D, el cual pertenece a una curva de indiferencia más alta. El inversionista que no tendría una utilidad esperada más alta es aquel cuya tangente original estuviese en el punto M; se encontraría igualmente bien, manteniendo el portafolio M en un mundo con intercambio o en un mundo sin él. Al portafolio M se le conoce como el portafolio de mercado de activos riesgosos y se define como el portafolio formado por todos los activos en la economía según sus pesos de valor de mercado. El peso de un activo en el portafolio de mercado se define como el cociente entre el valor de mercado del activo y el valor de mercado de todos los activos en la economía. El punto M es el portafolio de mercado ya que se supone que todos los inversionistas tienen la misma información acerca de las características del riesgo y el retorno de todos los activos, por lo tanto perciben el mismo conjunto de oportunidades. En equilibrio, todos los activos se mantendrán según sus pesos de valor de mercado porque esa es la forma en que se define el equilibrio. Entonces el portafolio de mercado debe ser uno que se encuentra a lo largo de la mitad superior del conjunto de oportunidad de varianza mínima. Dado que todos los inversionistas buscarán mantener el portafolio que sea más eficiente, es decir, el que maximizará su utilidad; entonces el portafolio de mercado debe ser el portafolio de tangencia.

Para entender porqué el mejor portafolio es el de tangencia y porqué es el de mercado, supongamos que el portafolio Y de la figura 2.8 es el de mercado; como se observa, este portafolio está dominado por el portafolio M, pero el portafolio de mercado no puede ser dominado ya que todos los activos deben mantenerse de acuerdo con sus pesos de valor de mercado en equilibrio.

2.6.3 El precio del riesgo.

La línea del mercado de capitales describe el precio de mercado del riesgo que usarán los individuos que tomen decisiones en circunstancias de incertidumbre. En la figura 2.10, se muestra la línea del mercado de capitales cuya ecuación es:

$$E(R_p) = R + \left[\frac{E(R_M) - R}{\sigma_M}\right]\sigma(R_p) \qquad (2.19)$$

donde:

$E(R_p)$=tasa esperada de retorno de los portafolios a lo largo de la línea del mercado de capitales.

R=tasa de los préstamos libres de riesgo.

$E(R_M)$=tasa esperada de retorno sobre el portafolio de mercado.

σ_M=desviación estándar del retorno sobre el portafolio de mercado.

$\sigma(R_P)$=desviación estándar de los portafolios a lo largo de la línea del mercado de capitales.

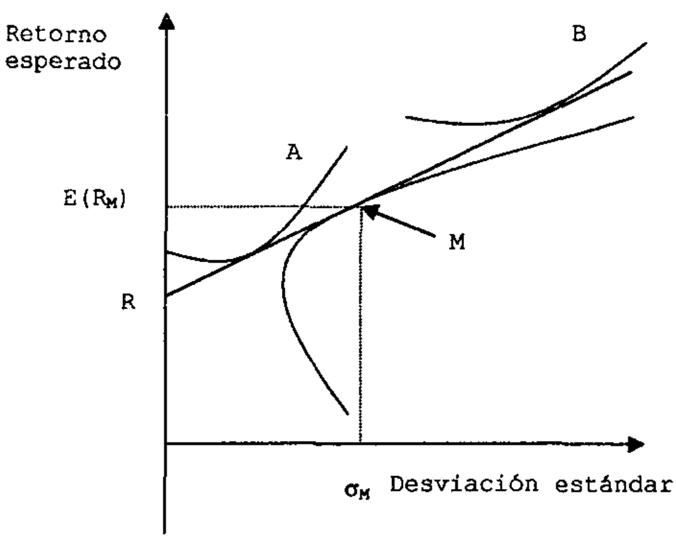


Figura 2.11 Línea del mercado de capitales y el precio del riesgo.

La pendiente de la línea del mercado de capitales mide la tasa de mercado de intercambio entre el riesgo y el retorno en equilibrio. Representa el precio del riesgo en un mercado en equilibrio. La tasa marginal de sustitución para cada inversionista es su tasa de intercambio entre el retorno y el riesgo, es decir, el precio del riesgo. En la figura 2.10 se muestra que, tanto para el inversionista A como para el inversionista B la tasa marginal de sustitución es la pendiente de la línea tangente a sus curvas de indiferencia, pero la línea tangente es la línea del mercado de capitales, por lo tanto, los inversionistas usarán el precio de riesgo en el mercado al hacer intercompensaciones entre el riesgo y el retorno. La línea del mercado de capitales es también tangente al conjunto de oportunidades de inversión; por consiguiente, la pendiente de la línea del mercado de capitales es igual a la tasa de intercambio en equilibrio. Esto recibe el nombre de tasa marginal de transformación.

En equilibrio, la tasa marginal de sustitución de los inversionistas A y B es igual a la tasa marginal de transformación, la cual, a la vez, es igual a la pendiente de la línea del mercado de capitales.

Para determinar portafolios óptimos es necesario tomar en cuenta el precio del riesgo en el mercado. El precio del riesgo determinado por el mercado es la tasa de intercambio correcta entre el riesgo y el retorno para la toma de decisiones en circunstancias de incertidumbre.

CAPÍTULO 3

Frontera eficiente

3.1 Desarrollo analítico de la frontera eficiente.[1]

El objetivo de este capítulo es explicar una técnica que permita construir la frontera eficiente asociada a un conjunto de activos de riesgo.

El término eficiente se usa en el sentido de eficiente según el criterio media-varianza. Un portafolio es eficiente media-varianza cuando de todos los que tienen su retorno esperado es el de mínimo riesgo, o bien entre los de su clase de riesgo es el de mayor retorno esperado.

La construcción de un portafolio eficiente implica determinar qué proporción del capital del inversionista debe asignarse a cada uno de los activos que componen ese portafolio para lograr esa eficiencia.

Aquí se trabajará con la clase de portafolios de mínima varianza, es decir, con el conjunto que incluye el portafolio particular con la varianza más pequeña a cada nivel dado de retorno esperado.

El planteamiento general del problema es el siguiente: ¿cómo obtener para cada nivel de retorno esperado prefijado el portafolio que tenga el mínimo riesgo, o bien para

[1] Merton, Robert C., "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, VII, No. 4, septiembre 1972, pp.1851-1872.

cualquier riesgo dado, cómo hallar el portafolio de máximo retorno esperado? Por razones técnicas es conveniente utilizar la primera variante del planteo anterior

Antes de efectuar la derivación analítica de la frontera, se define:

N=al número de activos riesgosos

$\overline{R}_i$ =el retorno esperado del i-ésimo activo

σ_{ij} =la covarianza entre los retornos del i-ésimo y del j-ésimo activos, donde $i \wedge j \leq N$

S =la matriz de covarianzas $[\sigma_{ij}]$

X_i =al porcentaje del valor que se invierte en el i-ésimo activo

Se desea resolver el siguiente problema de optimización:

$$min\, \sigma_p^2$$

donde:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} X_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} X_j X_k \sigma_{jk} \qquad (3.1a)$$

sujeto a:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i \qquad (3.1b)$$

$$1 = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (3.1c)$$

Donde las incógnitas son las proporciones X_i a invertir en cada uno de los activos.

Primero supondremos que los costos de cambiar la composición del portafolio son despreciables.

Para resolver el problema de optimización es necesario definir una nueva función objetivo:

$$L \equiv \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} + \lambda\left(\overline{R}_p - \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i\right) + \gamma\left(1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right) \tag{3.2}$$

Donde λ y γ son multiplicadores de Lagrange.

El primer sumando de la ecuación (3.2) es igual a la ecuación (3.1a); solo se expresó de esa manera con el fin de simplificar los cálculos. Las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \tag{3.3a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \tag{3.3b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \tag{3.3c}$$

Para encontrar la derivada parcial de *L* con respecto a X_i, se considera primero la derivada del primer sumando, para lo cual es necesario escribirlo en forma tabular, el cual resulta:

$$\begin{array}{c} X_1 X_1 \sigma_{11} + X_1 X_2 \sigma_{12} + \ldots + X_1 X_N \sigma_{1N} \\ + X_2 X_1 \sigma_{21} + X_2 X_2 \sigma_{22} + \ldots + X_2 X_N \sigma_{2N} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + X_N X_1 \sigma_{N1} + X_N X_2 \sigma_{N2} + \ldots + X_N X_N \sigma_{NN} \end{array}$$

Todos los términos que tienen la X_1 están en la primera fila y en la primera columna. Los términos que tienen la X_2 están en la segunda fila y en la segunda columna. En general, todos los términos que tengan la X_i estarán en la i-ésima fila y en la i-ésima columna. Para considerar la derivada con respecto a X_i, sólo serán de interés los términos que tengan la X_i, todos los demás se consideran como constantes. Los términos que son significativos para determinar la derivada parcial con respecto a X_i se representan conforme aparecen en la forma tabular y son los siguientes:

$$
\begin{array}{c}
+X_1X_i\sigma_{1i} \\
+X_2X_i\sigma_{2i} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
+X_iX_1\sigma_{i1}+\ldots+X_iX_i\sigma_{ii}+\ldots+X_iX_N\sigma_{iN} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
+X_NX_i\sigma_{Ni}
\end{array}
$$

Todos los términos, excepto el de la intersección son el producto de dos valores multiplicados por X_i, por ejemplo:

$$X_2X_i\sigma_{2i}=(X_2\sigma_{2i})X_i$$

entonces:

$$\frac{\partial[(X_2\sigma_{2i})X_i]}{\partial X_i}=X_2\sigma_{2i}$$

El término de la intersección es:

$$X_i X_i \sigma_{ii} = X_i^2 \sigma_{ii}$$

Y su derivada con respecto a X_i es:

$$\frac{\partial\left(X_i^2 \sigma_{ii}\right)}{\partial X_i} = 2X_i \sigma_{ii}$$

Las derivadas, agrupadas de la misma forma que los términos de donde provienen, son:

$$\begin{array}{c}
+X_1\sigma_{1i} \\
+X_2\sigma_{2i} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
X_1\sigma_{i1} + \ldots + 2X_i\sigma_{ii} + \ldots + X_N\sigma_{iN} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
+X_N\sigma_{Ni}
\end{array}$$

Todos los sumandos, excepto el de la intersección, es igual a algún otro de los sumandos, por ejemplo:

$$\sigma_{i1} = \sigma_{1i}$$

Así, $X_i\sigma_{i1} = X_i\sigma_{1i}$

Agrupando estos términos, la derivada parcial del primer sumando de la ecuación (3.2) con respecto a X_i es:

$$2\sigma_{i1}X_1 + 2\sigma_{i2}X_2 + \ldots + 2\sigma_{ii}X_i + \ldots + 2\sigma_{iN}X_N$$

La derivada parcial del segundo sumando con respecto a X_i de la ecuación (3.2) se obtiene de la siguiente manera:

Dado que

$$-\lambda\sum_{i=1}^{N} X_i\overline{R}_i = -\lambda X_1\overline{R}_1 - \lambda X_2\overline{R}_2 - \ldots - \lambda X_N\overline{R}_N$$

entonces:

$$\frac{\partial\left(-\lambda\sum_{i=1}^{N} X_i\overline{R}_i\right)}{\partial X_i} = -\lambda\overline{R}_i$$

La derivada parcial del tercer sumando con respecto a X_i se calcula de la siguiente forma:

Se observa que

$$\gamma\left(1-\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \gamma - \gamma X_1 - \gamma X_2 - \ldots - \gamma X_N$$

entonces:

$$\frac{\partial\left[\gamma\left(1-\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right]}{\partial X_i} = -\gamma$$

De esta forma, es posible definir explícitamente la derivada parcial de L con respecto a X_i:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = (\sum_{j=1}^{N} 2\sigma_{ij} X_j) - \lambda \overline{R}_i - \gamma \tag{3.4}$$

Por otro lado, la derivada parcial de L con respecto a λ es:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{R}_p - \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i \tag{3.5}$$

Y la derivada parcial de L con respecto a γ:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{3.6}$$

Dado que S es una matriz no singular[2], las X_i que satisfacen el sistema de ecuaciones definido por las expresiones (3.4), (3.5), (3.6) igualadas a cero, minimizan a la σ_p^2 y son únicas.

Las condiciones de primer orden definen un sistema lineal de tres ecuaciones en λ, γ y X_i. Para resolver este sistema, primero despejamos X_i de la ecuación (3.3a), así:

$$X_i = \lambda \sum_{j=1}^{N} V_{ij} \overline{R}_j + \gamma \sum_{j=1}^{N} V_{ij} \tag{3.7}$$

donde:

[2] Todas las matrices de varianzas y covarianzas poseen esa propiedad, es decir, toda matriz de varianzas y covarianzas es positiva definida y por lo tanto es no singular.

$$V = [V_{ij}] = [2\sigma_{ij}]^{-1}$$

Sustituyendo el valor de X_i en las ecuaciones (3.3b) y (3.3c) se encuentra que:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N}\left(\lambda\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j + \gamma\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\right)\bar{R}_i$$

$$1 = \sum_{i=1}^{N}\left(\lambda\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j + \gamma\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\right)$$

desarrollando las expresiones anteriores se obtiene:

$$\bar{R}_p = \lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j\bar{R}_i + \gamma\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_i$$

(3.8)

$$1 = \lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j + \gamma\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}$$

Para simplificar el álgebra, se define las siguientes variables:

$$A = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j$$

$$B = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}\bar{R}_j\bar{R}_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}V_{ij}$$

De las ecuaciones (3.8) y de las variables definidas anteriormente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \overline{R}_p &= \lambda B + \gamma A \\ 1 &= \lambda A + \gamma C \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como S es una matriz no singular, simétrica y positiva definida entonces 2S también lo es, por lo tanto la matriz V posee también las mismas características que las matrices S y 2S; entonces $V_{ij} = V_{ji}$, $i \wedge j \in N, i \wedge j \in [1, N]$, además B y C son formas cuadráticas de V, lo que significa que ambas son estrictamente positivas, a menos que $\overline{R}_i = 0$ $\forall i \in [1, N]$. De modo que:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_i$$

Resolviendo el sistema (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{C\overline{R}_p - A}{D} \\ \gamma &= \frac{B - \overline{R}_p A}{D} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde $D = BC - A^2$

$BC \neq A^2$

Sustituyendo los valores de (3.10) en (3.7) se encuentra el portafolio óptimo, el cual se denota con X_i^*

$$X_i^* = \frac{C\overline{R}_P - A}{BC - A^2}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j + \frac{B - \overline{R}_P A}{BC - A^2}\sum_{j=1}^{N} V_{ij} \tag{3.11}$$

Por otra parte, observamos que si se multiplica (3.3a) por $X_i/2$, y sumando sobre $i \in [1,N]$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} = \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i + \frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\lambda}{2}\overline{R}_P + \frac{\gamma}{2} \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.12) se obtiene la ecuación de la frontera eficiente:

$$\sigma_P^2 = \frac{C\overline{R}_P - A}{2D}\overline{R}_P + \frac{B - \overline{R}_P A}{2D}$$

$$= \frac{C\overline{R}_P^2 - \overline{R}_P A + B - \overline{R}_P A}{2D}$$

$$= \frac{C\overline{R}_P^2 - 2\overline{R}_P A + B}{2D} \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13) representa una parábola, en un plano media-varianza. Examinando dicha expresión su primera y segunda derivada con respecto a $\overline{R}_P$, se deduce que σ_P^2

es una función estrictamente convexa de $\bar{R}_p$, con un punto mínimo único cuando $\frac{d\sigma_P^2}{d\bar{R}_p} = 0$, es decir:

$$\frac{d\sigma_P^2}{d\bar{R}_p} = \frac{C\bar{R}_p - A}{D} = 0$$

sí y sólo sí

$$\bar{R}_p = \frac{A}{C} \tag{3.14a}$$

además

$$\frac{d^2\sigma_P^2}{d\bar{R}_p^2} = \frac{C}{D} > 0 \tag{3.14b}$$

De las ecuaciones (3.13), (3.14a) y (3.14b) se concluye que el retorno esperado del portafolio de mínima varianza global es:

$$\bar{R}_{MV} = \frac{A}{C} \tag{3.15}$$

Y la varianza del portafolio de mínima varianza global se obtiene sustituyendo este último valor en la ecuación (3.13), se tiene

$$\sigma_{MV}^2 = \frac{C\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 2\left(\frac{A}{C}\right)A + B}{2D}$$

$$= \frac{1}{2C} \tag{3.16}$$

También se sustituye (3.15) en (3.11), para lo cual se obtiene:

$$X_j^* = \frac{C\left(\frac{A}{C}\right) - A}{BC - A^2}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j + \frac{B - \left(\frac{A}{C}\right)A}{BC - A^2}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

$$= \frac{B - \frac{A^2}{C}}{BC - A^2}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

$$= \frac{\frac{BC - A^2}{C}}{D}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

$$= \frac{D}{CD}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

Por lo tanto X_{iMV} esta dada por:

$$X_{iMV} = \frac{\sum_{j=1}^{N} V_{ij}}{C} \tag{3.17}$$

Por otra, parte si se presenta la frontera en el plano retorno esperado vs desviación estándar en lugar del plano media-varianza, de la expresión (3.13) se obtiene que:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{C\overline{R}_p^2 - 2A\overline{R}_p + B}{2D}}$$

De donde

$$\frac{d\sigma_P}{d\bar{R}_p}=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{C\bar{R}_p^2-2A\bar{R}_p+B}{2D}}}\frac{C\bar{R}_p-A}{D} \qquad (3.18)$$

Si se iguala a cero la ecuación anterior la solución para $\bar{R}_p$ es $\frac{A}{C}$

La segunda derivada de σ_P con respecto de $\bar{R}_p$ es:

$$\frac{d^2\sigma_P}{d\bar{R}_p^2}=\frac{1}{4D\sqrt{\dfrac{C\bar{R}_p^2-2A\bar{R}_p+B}{2D}}\dfrac{\left(C\bar{R}_p^2-2A\bar{R}_p+B\right)}{2D}}$$

$$=\frac{1}{4D\sigma^3} \qquad (3.19)$$

En las dos últimas expresiones se aprecia que σ_P es una función estrictamente convexa de $\bar{R}_p$ y el portafolio de mínima desviación estándar es el mismo que el de mínima varianza. En el plano media-desviación estándar, la frontera eficiente es una hipérbola, cuya ecuación es:

$$\frac{\sigma_P^2}{\dfrac{1}{2C}}-\frac{\left(\bar{R}_p-\dfrac{A}{C}\right)^2}{\dfrac{D}{C^2}}=1$$

cuyas asíntotas están definidas por la siguiente ecuación:

$$\bar{R}_P = \pm\sqrt{\frac{2D}{C}(\sigma_P)} + \frac{A}{C}$$

$$= \bar{R}_{MV} \pm \sqrt{\frac{2D}{C}(\sigma_P)} \quad (3.20)$$

La ecuación de la frontera eficiente queda determinada despejando $\bar{R}_p$ de la ecuación (3.13) para lo cual se obtiene:

$$\bar{R}_P = \bar{R}_{MV} + \frac{1}{C}\sqrt{2CD\left(\sigma_P^2 - \sigma_{MV}^2\right)} \quad (3.21)$$

3.2 Derivación analítica de la línea del mercado de capitales[3]

Para determinar la línea del mercado de capitales es necesario encontrar la línea de máxima pendiente cuya ordenada al origen es el retorno del activo libre de riesgo, y toca a la frontera eficiente de oportunidades de inversión en un punto; éste es también un problema de optimización.

Designemos con $\bar{R}_M$ y σ_M al retorno esperado y a la desviación estándar de los retornos del portafolio de mercado, respectivamente.

El problema de optimización es el siguiente:

$$\text{Max}\{m\}$$

[3] Merton, Robert C. op. cit.

Donde:

$$m = \frac{\bar{R}_M - R}{\sigma_M}$$

R es el retorno del activo libre de riesgo

además

$$\bar{R}_M = \bar{R}_{MV} + \frac{1}{C}\sqrt{2CD\left(\sigma_M^2 - \sigma_{MV}^2\right)}$$

es decir:

$$max\left\{\frac{\bar{R}_{MV} + \frac{1}{C}\sqrt{2CD\left(\sigma_M^2 - \sigma_{MV}^2\right)} - R}{\sigma_M}\right\}$$

Para resolver el problema, primero encontramos la derivada de m con respecto a σ_M, se iguala a cero y se despeja σ_M

$$\frac{dm}{d\sigma_M} = \frac{R - \bar{R}_{MV}}{\sigma_M^2} + \frac{2D\sigma_{MV}^2}{\sigma_M^2\sqrt{2CD\left(\sigma_M^2 - \sigma_{MV}^2\right)}}$$

igualando a cero y despejando σ_M se obtiene:

$$\frac{R - \bar{R}_{MV}}{\sigma_M^2} + \frac{2D\sigma_{MV}^2}{\sigma_M^2\sqrt{2CD\left(\sigma_M^2 - \sigma_{MV}^2\right)}} = 0$$

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{2D\sigma_{MV}^4}{C\left(R - \bar{R}_{MV}\right)^2} + \sigma_{MV}^2} \qquad (3.22)$$

Como se mencionó anteriormente el retorno esperado del portafolio de mercado se calcula de la siguiente manera:

$$\bar{R}_M = \bar{R}_{MV} + \frac{1}{C}\sqrt{2CD\left(\sigma_M^2 - \sigma_{MV}^2\right)} \tag{3.23}$$

De esta forma podemos determinar la ecuación de la línea del mercado de capitales:

$$\bar{R}_p - R = \frac{\bar{R}_M - R}{\sigma_M}\sigma_p \tag{3.24}$$

En la ecuación anterior $\bar{R}_p$ y σ_P representan el retorno esperado y la desviación estándar de un portafolio respectivamente, pero este portafolio con excepción del portafolio de mercado, no se encuentra sobre la frontera eficiente sino sobre la línea del mercado de capitales; sin embargo al incluir un activo libre de riesgo en el problema de la creación de un portafolio, se logra, para un determinado nivel de riesgo, aumentar el retorno esperado.

CAPÍTULO 4

Prueba empírica del modelo de Merton.

4.1 Aplicación del modelo para un portafolio formado por emisoras que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores para dos periodos diferentes.

Para la aplicación del modelo se emplearon datos del precio de cierre de diez acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. El número de acciones elegido se determinó de acuerdo con los estudios que muestran los efectos de la diversificación de un portafolio basándose en el número de activos. Por ejemplo el estudio empírico realizado por Wagner y Lau[1]., en el cual los autores dividieron una muestra de 200 acciones de la bolsa de valores de Nueva York en seis grupos basados en las clasificaciones de calidad de Standard and Poor con fecha de junio de 1960. Además construyeron portafolios a partir de cada uno de los grupos, usando de uno a 20 valores seleccionados al azar y aplicando pesos iguales a cada valor. En sus resultados encontraron que a medida que aumenta el número de valores en el portafolio, disminuye la desviación estándar de los retornos del portafolio, aunque a una tasa decreciente, con mayores reducciones en el riesgo que son más o menos pequeñas después de que incluyen unos diez valores en el portafolio. También muestran que aún los portafolios bien diversificados representan algún nivel de riesgo que no puede diversificarse y por lo tanto el riesgo del portafolio ha sido dividido en dos partes. Aquella parte que puede reducirse mediante diversificación se define como riesgo no sistemático (es la porción del riesgo total que es único de la empresa),

[1] Wagner, W. H., y Lau, S. C., "The Effect of Diversification on Risk," *Finantial Analysts Journal*, 27 (noviembre-diciembre 1971), pp. 48-53.

mientras que la parte que no puede eliminarse se define como riesgo sistemático (se refiere a aquella porción de variabilidad total en el retorno, causada por agentes que afectan los precios de todos los valores). En el estudio mencionado obtuvieron que conforme se aumenta el número de valores de cada portafolio y disminuye la desviación estándar, aumenta la correlación entre el retorno sobre el portafolio y el retorno sobre el índice de mercado, por lo tanto un portafolio ampliamente diversificado está altamente correlacionado con el mercado y el riesgo es altamente sistemático y surge debido a movimientos generales de mercado.

En el presente estudio seleccionamos las diez emisoras con mayor índice de bursatilidad en los seis meses anteriores al periodo estudiado. También se buscó incluir a las emisoras pertenecientes a diferentes sectores con la finalidad de que sea una cartera diversificada. Al seleccionar las más bursátiles estamos incluyendo a las que mayor oferta y demanda tienen en el mercado accionario y esto se da en las emisoras de las empresas que mayor utilidades generan. El modelo se puede aplicar en cualquier periodo; para el presente estudio se seleccionaron dos periodos, el primero, de mayo a agosto 1998 y el segundo de septiembre a diciembre del mismo año. Durante el primer periodo se mantuvo cierta estabilidad en la economía mexicana comparado con el segundo, en el cual la inestabilidad financiera es mucho mayor y esto lo observamos en el cambio en los principales indicadores de la economía mexicana, como lo son: las tasas de interés, la paridad peso dólar, la variabilidad del IPC, entre otras (ver cuadros en el anexo final). Por lo tanto los periodos señalados nos sirven como punto de referencia para el presente estudio. El nombre de las emisoras y de la serie se menciona a continuación:

TELMEX SERIE L, GFB B, ALFA A, BANACCI B, GCARSO A1, CEMEX CPO, CIFRA C, CEMEX B, KIMBER A, CIFRA V. La emisora GFB serie B es actualmente serie O, igualmente la emisora BANACCI pasó a ser serie O. Además la emisora CIFRA serie C actualmente es WALMEX serie C y CIFRA serie V es WALMEX serie V.

Para cada una de las acciones se tomaron 87 observaciones en cada periodo. Las observaciones son los precios de cierre diarios; en el caso en que alguna acción no haya operado en alguna fecha determinada, se toma la información del día inmediatamente anterior, con el fin de tener la información completa.

Para obtener la línea del mercado de capitales, se incluye la tasa libre de riesgo. En el presente estudio se considera la tasa de los Cetes a 28 días como la tasa libre de riesgo. Esta se publica semanalmente y es anual nominal. Primero se encontró una tasa diaria equivalente a cada a cada una de las publicadas y se realizó una regresión lineal simple sobre estas tasas diarias para calcular las correspondientes a los días entre cada fecha de publicación y posteriormente se obtuvo un promedio de todas para encontrar la tasa correspondiente a cada uno de los periodos seleccionados.

Los escenarios construidos, es decir, la preferencia hacia el riesgo para los periodos se basa en diferentes niveles de riesgo; así, se tiene uno como averso al riesgo, otro como riesgo medio y el tercero como amante del riesgo.

Para obtener la frontera eficiente es necesario calcular los retornos diarios de las acciones, la matriz de retornos que consta de los retornos diarios de cada acción, la matriz de varianzas y covarianzas de las acciones, la inversa del doble de la matriz de varianzas y covarianzas, el vector de retornos esperados, cuyos elementos son el promedio de los retornos diarios de cada acción. Para el cálculo de todos estos datos se empleó la hoja de cálculo Excel.

Con las matrices y vectores anteriores, se encuentran los siguientes escalares definidos previamente en el capítulo 3.

A es la suma de los elementos de la matriz columna que resulta de multiplicar la matriz V (la inversa del doble de la matriz de varianzas y covarianzas) por el vector columna de los retornos esperados.

Es decir:

$$A = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j$$

B es el resultado del producto del vector fila de los retornos esperados $\overline{R}_i$ por el vector columna resultante de multiplicar la matriz V por el vector columna de los retornos esperados $\overline{R}_i$.

$$B = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j\overline{R}_i$$

C es la suma de los elementos de V:

$$C = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

D es simplemente:

$$D = BXC - A^2$$

La ecuación (3.15) definió a $\overline{R}_{MV}$ como el retorno esperado del portafolio de mínima varianza global.

Entonces:

$$\overline{R}_{MV} = \frac{A}{C}$$

La varianza del portafolio de mínima varianza global está dada por la ecuación (3.16), es decir:

$$\sigma^2{}_{MV} = \frac{1}{2C}$$

La desviación estándar del portafolio de mínima varianza global es:

$$\sigma_{MV} = \sqrt{\frac{1}{2C}}$$

La ecuación de la frontera eficiente de oportunidades (expresión 3.21) es:

$$\overline{R}_P = \overline{R}_{MV} + \frac{1}{C}\sqrt{2CD\left(\sigma_P^2 - \sigma_{MV}^2\right)}$$

Para obtener la frontera eficiente se le dan valores a σ_P a partir de la desviación estándar que resulta del portafolio mínima varianza global que se obtiene del modelo y con ellos se aplica la fórmula para $\overline{R}_p$.

Los portafolios óptimos se encuentran sobre la línea de la frontera eficiente. La ecuación (3.11) representa los porcentajes invertidos en estos portafolios y está definida de la siguiente manera:

$$X_i^* = \frac{C\overline{R}_P - A}{D}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}\overline{R}_j + \frac{B - A\overline{R}_P}{D}\sum_{j=1}^{N} V_{ij}$$

Con las ecuaciones (3.22) y (3.24), podemos obtener la línea del mercado de capitales:

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{2D\sigma_{MV}^4}{C\left(R - \overline{R}_{MV}\right)^2} + \sigma_{MV}^2}$$

$$\overline{R}_P = R + \frac{\overline{R}_M - R}{\sigma_M}\sigma_P$$

4.2 Resultados

Con las fórmulas mencionadas anteriormente se obtuvieron los siguientes resultados para los dos periodos seleccionados.

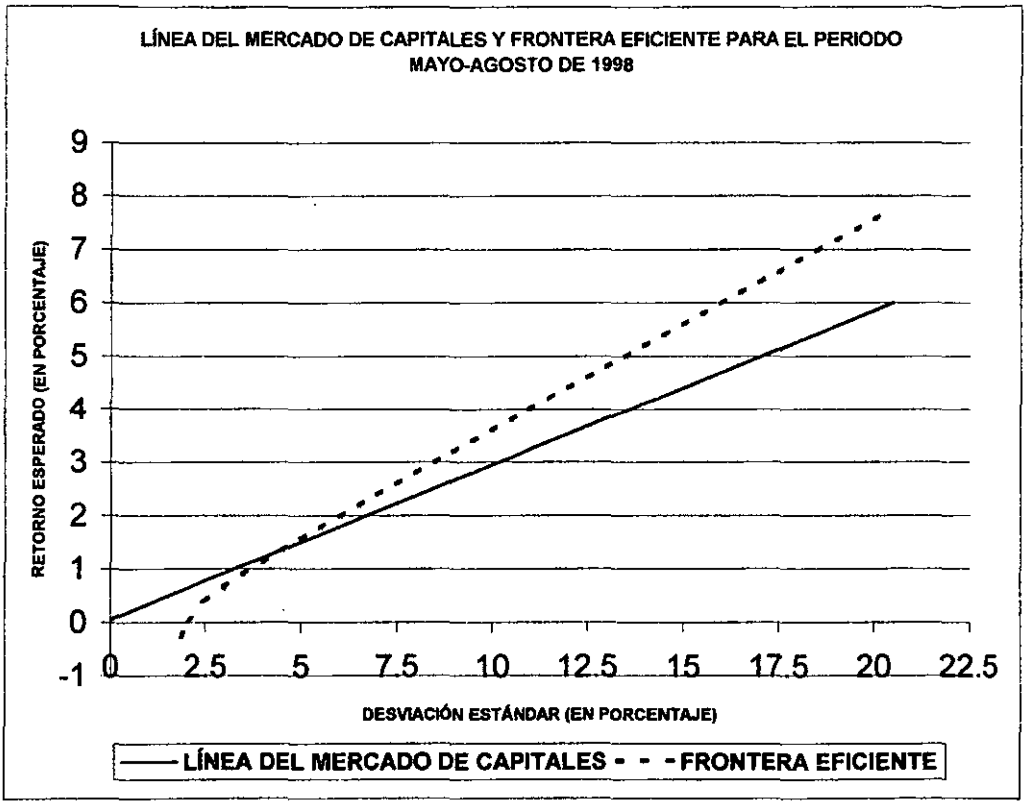
	PERIODO MAYO-AGOSTO 98	PERIODO SEPTIEMBRE-DIC. 98
A=	-3.86258634	1.180534582
B=	0.087537739	0.026290886
C=	1452.089256	697.043415
D=	112.1930363	16.9322272
$R_{MV}=$	-0.2660%	0.1694%
$\sigma^2_{MV}=$	0.0344%	0.0717%
$\sigma_{MV}=$	1.8556%	2.6783%
$\sigma_M=$	4.6045%	21.5467%
$R_M=$	1.3905%	4.8818%
R=	0.0552%	0.0954%

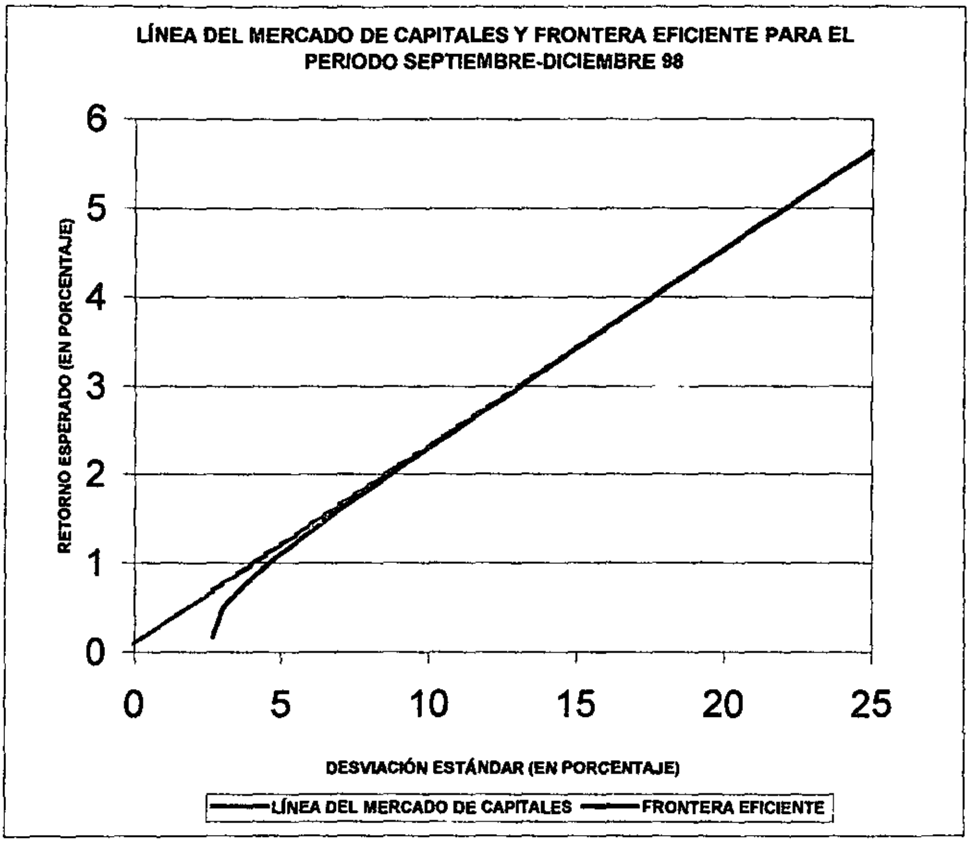
Porcentajes a invertir en los activos riesgosos en los tres escenarios propuestos para el periodo mayo-agosto de 1998

	AVERSO AL RIESGO	RIESGO MEDIO	AMANTE DEL RIESG
Desviación estándar	2%	10%	20%
Retorno esperado	0.0273%	3.5967%	7.5621%
TELMEX L	87.0272	418.2805	786.2770
GFB B	-22.9004	-186.2929	-367.8091
ALFA A	3.5606	-30.8306	-69.0366
BANACCI B	-16.0390	-51.7209	-91.3606
GCARSO A1	11.4112	-137.2118	-302.3202
CEMEX CPO	7.4768	26.7467	48.1540
CIFRA C	32.4007	173.4717	330.1904
CEMEX B	1.7111	-29.0303	-63.1816
KIMBER A	-2.2724	14.0936	32.2749
CIFRA V	-2.3758	-97.5060	-203.1882
TOTALES	100	100	100

Porcentajes a invertir en los activos riesgosos en los tres escenarios propuestos para el periodo septiembre-diciembre de 1998.

	AVERSO AL RIESGO	RIESGO MEDIO	AMANTE DEL RIESGO
Desviación estándar	3%	10%	20%
Retorno esperado	0.4673%	2.2929%	4.5380%
TELMEX L	77.2638	296.8688	566.9042
GFB B	-9.8295	72.7159	174.2170
ALFA A	-10.9347	-28.8984	-50.9874
BANACCI B	4.8006	30.8753	62.9377
GCARSO A1	23.1258	100.4242	195.4735
CEMEX CPO	-0.8013	-148.3198	-329.7147
CIFRA C	-19.6400	-181.4670	-380.4562
CEMEX B	-28.8970	-92.5373	-170.7921
KIMBER A	58.9007	219.3266	416.5929
CIFRA V	6.0117	-168.9881	-384.1751
TOTALES	100	100	100


LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES Y FRONTERA EFICIENTE PARA EL PERIODO MAYO-AGOSTO DE 1998
RETORNO ESPERADO (EN PORCENTAJE)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
2.5
5
7.5
10
12.5
15
17.5
20
22.5
DESVIACIÓN ESTÁNDAR (EN PORCENTAJE)
LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES
FRONTERA EFICIENTE


LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES Y FRONTERA EFICIENTE PARA EL PERIODO SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 98
RETORNO ESPERADO (EN PORCENTAJE)
0
1
2
3
4
5
6
0
5
10
15
20
25
DESVIACIÓN ESTÁNDAR (EN PORCENTAJE)
LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES
FRONTERA EFICIENTE

4.3 Interpretación de los resultados obtenidos.

En relación con los resultados obtenidos para ambos periodos, podemos observar que para el primero (mayo-agosto 98), el retorno esperado del portafolio de mínima varianza global es negativo y el riesgo asociado a éste es considerable e igual a 1.85% siendo ésta una tasa alta si tomamos en cuenta que se trata de una tasa de retorno diaria. En el segundo periodo (septiembre-diciembre 98) se demuestra que el riesgo aumenta en el portafolio en casi un punto porcentual y su retorno esperado es mínimo. Esto último se puede explicar afirmando que en los periodos de mayor inestabilidad financiera (como el periodo septiembre-diciembre) el riesgo aumenta considerablemente, y también lo podemos apreciar si observamos los valores encontrados para la descripción de la frontera eficiente (portafolios eficientes), en donde se aprecia que para un mismo nivel de riesgo, el retorno esperado asociado es mucho menor para el periodo de mayor inestabilidad que para el de menor.

Analizando los portafolios de mercado que se obtuvieron tanto para el primer periodo como para el segundo, se muestra perfectamente que el portafolio de mercado del segundo periodo tiene un riesgo muy elevado y un retorno esperado no muy alto comparado al que resulta en el primero.

Los valores de la frontera eficiente y de la línea del mercado de capitales en el periodo mayo-agosto indican que los retornos esperados asociados a los primeros niveles de riesgo, son mayores los de la línea del mercado de capitales que los de la frontera eficiente, hasta el punto en el cual se intersectan la línea y la frontera, coincidiendo esta intersección con el valor del portafolio de mercado que se obtuvo; a partir de este punto de intersección los valores de la línea son menores a los de la frontera eficiente lo cual "no debería de suceder" (la teoría indica que la línea debe ser tangente a la frontera en un punto); una posible explicación para esta situación sería que la estimación del portafolio de mercado obtenida en el modelo descrito en el capítulo 3 no es una buena estimación y por eso se observa ese comportamiento. En el siguiente periodo todos los valores de la línea son mayores que los de la frontera para los niveles de riesgo establecidos, aunque es mínima esta diferencia, sí se logra el punto de tangencia en el portafolio de mercado.

En lo que respecta a los porcentajes de la riqueza a invertir en cada uno de los activos riesgosos para las diferentes actitudes que se tengan con respecto al riesgo (averso, riesgo medio, amante al riesgo), se observa que en los dos periodos, la acción TELMEX serie L es la de mayor participación y se incrementa conforme el riesgo aumenta, inclusive llegando a ser de más del 100%, para lo cual se tiene que hacer ventas en corto en otros activos, siendo las más participativas en éste sentido las acciones GFB serie B, BANACCI serie B y CIFRA V para el primer periodo, haciéndose más negativa su participación conforme el riesgo aumenta; lo mismo sucede para las acciones ALFA A, CEMEX CPO, CIFRA C Y CEMEX B en el otro periodo. También se puede distinguir que para los dos periodos las participaciones en las acciones no muestran un comportamiento semejante a excepción de TELMEX L, observándose incluso que en el periodo de menor inestabilidad, la participación en esta acción es mucho mayor en niveles más grandes de riesgo, que en el de mayor inestabilidad; por lo tanto se puede decir que para la acción TELMEX L por ser la acción más bursátil, el porcentaje que se tiene que invertir en ella debe ser el mayor. Por último, podemos observar que para el periodo más riesgoso existe un mayor número de emisoras con participación positiva, éste número aumenta conforme se incrementa el riesgo. Por el contrario para el periodo menos riesgoso se observa un número menor de emisoras con participación positiva.

CONCLUSIONES

En el artículo publicado por R. C. Merton se muestra un modelo que proporciona una metodología para encontrar portafolios eficientes. El modelo esta basado en la teoría general de portafolio de Markowitz; se puede aplicar en cualquier periodo independientemente del estado de la economía. Con el objeto de comparar los portafolios eficientes que se pueden obtener para dos periodos, con la característica de presentar uno de ellos mayor incertidumbre en la economía que el otro, se aplicó el modelo, de donde se concluye lo siguiente: en los periodos de mayor inestabilidad financiera, como el que se utilizó en el presente trabajo (septiembre-diciembre de 1998), el riesgo aumenta considerablemente y los retornos esperados disminuyen para los portafolios, en relación con los periodos de estabilidad económica. Se muestra también que en los dos periodos se necesita de un riesgo muy elevado para obtener un retorno mínimo, inclusive si no se tiene preferencia por el riesgo (averso). Por todo lo anterior y aún cuando no se dé la tangencia entre la línea del mercado de capitales y la frontera eficiente para el periodo mayo-agosto, ya que la línea intercepta a la curva de la frontera (una explicación para esto es que la estimación del portafolio de mercado resultante del modelo no es muy aproximada), el modelo sirve como apoyo para la toma de decisiones de inversión dependiendo de las actitudes que se tengan con respecto al riesgo.

ANEXO

PRINCIPALES INDICADORES (ALGUNOS) ECONÓMICOS PARA LOS PERIODOS ESTUDIADOS

CUADRO 1TASAS DE CETES A 28 DÍAS

FECHA DE PUBLICACIÓN	TASA	PLAZO
30-04-98	18.08	28
07-05-98	17.38	28
14-05-98	17.41	28
21-05-98	17.69	28
28-05-98	19.15	28
04-06-98	19.22	28
11-06-98	19.13	28
18-06-98	20.16	28
25-06-98	19.50	28
02-07-98	20.19	28
09-07-98	20.31	28
16-07-98	19.92	28
23-07-98	19.99	28
30-07-98	20.01	28
06-08-98	19.89	28
13-08-98	21.49	28
20-08-98	22	28
27-08-98	27.16	28
10-09-98	36.94	28
17-09-98	47.86	28
24-09-98	37.60	28
01-10-98	34.45	28
08-10-98	36.77	28
15-10-98	36.55	28
22-10-98	33.42	28
29-10-98	33.13	28
05-11-98	32.17	28
12-11-98	32	28
19-11-98	32.03	28
26-11-98	32.29	28
03-12-98	36.23	28
10-12-98	34.94	28
17-12-98	33.99	28
24-12-98	31.92	28
31-12-98	31.20	28

FUENTE: BANCO DE MÉXICO, BMV, SISTEMA INTEGRAL DE VALORES ACTUALIZADO

TASAS INTERBANCARIAS

CUADRO 2 PROMEDIO ARITMÉTICO EN EL MES EN POR CIENTO ANUAL

PERIODO		TIIE 28 DÍAS	TIIE 91 DÍAS	TIIP 28 DIAS
1995	DICIEMBRE	51.36		51.34
1996	DICIEMBRE	29.92		29.65
1997	DICIEMBRE	20.48	20.48	20.41
1998	DICIEMBRE	36.69	36.28	36.60
1999	DICIEMBRE	18.75	19.06	18.67
1997	ABRIL	23.98	23.97	23.80
	MAYO	20.65	21.73	20.59
	JUNIO	22.53	22.41	22.50
	JULIO	20.50	20.73	20.48
	AGOSTO	20.64	21.27	20.66
	SEPTIEMBRE	20.23	21.27	20.03
	OCTUBRE	19.70	20.47	19.38
	NOVIEMBRE	22.17	22.55	21.82
	DICIEMBRE	20.48	20.48	20.41
1998	ENERO	19.74	19.95	19.47
	FEBRERO	20.52	20.67	20.61
	MARZO	21.69	21.83	21.71
	ABRIL	20.55	20.44	20.41
	MAYO	19.90	20.27	20.17
	JUNIO	21.47	21.79	21.10
	JULIO	21.88	22.66	21.75
	AGOSTO	25.78	27.20	25.33
	SEPTIEMBRE	42.04	40.35	41.55
	OCTUBRE	37.65	38.69	37.49
	NOVIEMBRE	34.78	35.56	34.64
	DICIEMBRE	36.69	36.28	36.60
1999	ENERO	35.80	36.27	36.27
	FEBRERO	32.21	31.97	31.97
	MARZO	26.87	26.46	26.46
	ABRIL	22.54	22.49	22.49
	MAYO	22.52	22.42	22.42
	JUNIO	23.60	23.68	23.68
	JULIO	22.11	22.20	22.20
	AGOSTO	23.13	23.20	23.20
	SEPTIEMBRE	22.04	22.05	22.05
	OCTUBRE	20.63	20.40	20.40
	NOVIEMBRE	19.01	18.94	18.94
	DICIEMBRE	18.75	18.67	18.67
2000	ENERO	18.55	18.58	18.58
	FEBRERO	18.15	18.20	18.20
	MARZO	15.77	15.75	15.75
	ABRIL	14.74	14.78	14.78

FUENTE: BANCO DE MÉXICO, GERENCIA DE INFORMACIÓN DEL SISTEMA FINANCIERO Y GERENCIA DEL MERCADO DE VALORES

SELECCIÓN DE TASAS DE INTERES EN EL MERCADO FINANCIERO
CUADRO 3 PROMEDIO DE COTIZACIONES DIARIAS, EN POR CIENTO ANUAL BRUTO

PERIODO		PRLV A 1 MES	PLRV A 3 MESES	PRLV A 6 MESES
1995	DICIEMBRE	42.53	43.38	39.83
1996	DICIEMBRE	25.43	23.79	22.91
1997	DICIEMBRE	15.67	17.40	14.56
1998	DICIEMBRE	27.66	19.70	19.84
1999	DICIEMBRE	15.05	13.82	11.09
1997	ABRIL	19.66	19.81	18.46
	MAYO	16.86	17.51	16.71
	JUNIO	17.62	17.35	16.80
	JULIO	16.62	15.82	15.75
	AGOSTO	16.38	14.97	15.51
	SEPTIEMBRE	15.85	15.72	15.65
	OCTUBRE	15.59	15.25	14.92
	NOVIEMBRE	16.72	16.39	15.69
	DICIEMBRE	15.67	17.40	14.56
1998	ENERO	15.53	15.71	14.08
	FEBRERO	16.19	15.55	14.05
	MARZO	17.04	15.45	14.94
	ABRIL	16.53	14.44	14.23
	MAYO	15.70	14.29	13.41
	JUNIO	16.70	14.26	14.33
	JULIO	17.41	14.58	14.96
	AGOSTO	19.19	16.31	16.08
	SEPTIEMBRE	30.28	23.51	20.90
	OCTUBRE	28.54	19.87	20.61
	NOVIEMBRE	26.48	19.77	19.70
	DICIEMBRE	27.66	19.70	19.84
1999	ENERO	27.07	19.24	18.84
	FEBRERO	24.76	21.47	17.62
	MARZO	19.79	18.61	14.46
	ABRIL	17.34	16.45	12.76
	MAYO	17.21	16.01	12.09
	JUNIO	18.12	15.91	12.40
	JULIO	17.59	16.75	12.19
	AGOSTO	17.76	16.88	12.78
	SEPTIEMBRE	17.56	17.01	12.43
	OCTUBRE	16.21	17.52	12.12
	NOVIEMBRE	15.23	12.85	11.59
	DICIEMBRE	15.05	13.82	11.09
2000	ENERO	14.90	12.17	10.83
	FEBRERO	14.75	14.28	10.29
	MARZO	12.76	11.85	9.23
	ABRIL	-	-	8.96

FUENTE: Banco de México, Gerencia de Evaluación y Cobertura de Riesgos en la Operación de Intermediarios Financieros

PRLV=Pagaré con rendimiento liquidable al vencimiento. Se consignan tasas brutas ponderadas de cotizaciones diarias pactadas en operaciones de ventanilla y mesas de dinero para los plazos de 1 y 3 meses.

CUADRO 4 PARIDAD PESO-DÓLAR PARA EL PERIODO ESTUDIADO

FECHA	COTIZACIÓN	FECHA	COTIZACIÓN
		30	9.0228
ABRIL 1998		JULIO 1998	
DIA		DIA	
30	8.5029	1	8.9852
MAYO 1998		2	8.9375
DÍA		3	8.9863
4	8.4898	6	8.9497
6	8.4770	7	8.9694
7	8.4793	8	8.9558
8	8.5007	9	8.9242
11	8.4834	10	8.9432
12	8.4673	13	8.9535
13	8.4965	14	8.9025
14	8.5198	15	8.8548
15	8.5069	16	8.8535
18	8.5147	17	8.8393
19	8.5303	20	8.8218
20	8.5849	21	8.7896
21	8.6212	22	8.8033
22	8.6223	23	8.8721
25	8.6402	24	8.8647
26	8.6378	27	8.8670
27	8.7081	28	8.8930
28	8.8802	29	8.8861
29	8.7873	30	8.9178
JUNIO 1998		31	8.9008
DIA		AGOSTO 1998	
1	8.8164	DIA	
2	8.8983	3	8.9215
3	8.8818	4	8.9545
4	8.7958	5	8.9648
5	8.7803	6	9.0062
8	8.7619	7	9.0255
9	8.8252	10	9.0187
10	8.8360	11	9.1253
11	8.8808	12	9.2016
12	8.9609	13	9.1762
15	9.0463	14	9.2325
16	9.0375	17	9.1812
17	8.9815	18	9.3018
18	8.8803	19	9.2302
19	8.8967	20	9.1873
22	8.8929	21	9.3134
23	8.9123	24	9.6900
24	8.8927	25	9.6458
25	8.9252	26	9.6001
26	8.9537	27	9.8150
29	9.0407	28	9.9600

FUENTE: BANCO DE MÉXICO, BMV, SISTEMA INTEGRAL DE VALORES ACTUALIZADO

CUADRO 4 PARIDAD PESO-DÓLAR PARA EL PERIODO DE ESTUDIO (CONTINUACIÓN)

FECHA	COTIZACIÓN	FECHA	COTIZACIÓN
AGOSTO 1998		NOVIEMBRE 1998	
DIA		DIA	
31	10.0275	3	10.1137
SEPTIEMBRE 1998		4	10.0312
DIA		5	9.9365
2	9.9717	6	9.9886
3	9.9458	9	9.9717
4	10.1072	10	10.0015
7	10.1618	11	10.0256
8	10.1967	12	10.0060
9	10.2742	13	10.0563
10	10.3499	16	9.99965
11	10.5325	17	9.9765
14	10.5792	18	9.9440
15	105233	19	9.9305
17	10.2058	23	9.9203
18	10.3158	24	9.8772
21	10.1383	25	9.9145
22	10.3050	26	9.9107
23	10.0962	27	9.9404
24	10.1159	30	9.9676
25	10.1117	DICIEMBRE 1998	
28	10.2438	DIA	
29	10.1062	1	9.9995
30	10.1119	2	10.0318
OCTUBRE 1998		3	9.9682
DIA		4	9.9876
1	10.1933	7	9.9897
2	10.3137	8	9.9993
5	10.3137	9	9.9423
6	10.2180	10	9.9517
7	10.1729	11	9.9500
8	10.1835	14	9.9482
9	10.3549	15	9.9491
12	10.2157	16	9.9498
13	10.1555	17	9.8828
14	10.1863	18	9.7863
15	10.1800	21	9.7972
16	10.1312	22	9.7568
19	10.0933	23	9.8028
20	10.0863	24	9.8104
21	10.0420	28	9.8822
22	10.0338	29	9.8382
23	9.9930	30	9.8650
26	10.0353	31	9.9395
27	10.0293		
28	10.1491		
29	10.1575		
30	10.2198		

FUENTE: BANCO DE MÉXICO, BMV, SISTEMA INTEGRAL DE VALORES ACTUALIZADO

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS:

Elton, E. J. y Gruber, M. J., *Modem Portfolio: Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, 1991.

Heyman, Timothy, *Inversión contra inflación: Análisis y administración de inversiones en México*, Editorial Milenio, 1996.

Sharpe, William F., *Teoría de Cartera y del Mercado de Capitales*, traducción de: Luis Corrons Prieto, ediciones Deusto, Bilbao España, 1974.

Weston, J. Fred y Copelan, Thomas E., *Finanzas en Administración,* Mc Graw-Hill, 1992.

ARTÍCULOS:

Guzmán Plata, Ma. de la Paz, "El modelo portafolio aplicado a la Bolsa Mexicana de Valores", *Economía: Teoria y Práctica*, número 7, 1997.

Merton, R. C. "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, VII, No. 4, septiembre 1972, pp. 1851-1872.

Wagner, W. H., y Lau, S. C., "The Effect of Diversification on Risk," *Finantial Analysts Journal, 27* (noviembre-diciembre, 1971), pp. 48-53.

TESIS:

Lorenzo Valdés, Arturo, *Análisis Dinámico de Portafolio,* Tesina para obtener el grado de Maestro en Economía, CIDE 1997.

EN INTERNET:

Bolsa Mexicana de Valores S. A. de C. V. (www.bmv.com.mx)

Comisión Nacional Bancaria y de Valores (www.cnbv.gob.mx)

Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (www.cnsf.gob.mx)

Secretaría de Hacienda y Crédito Público (www.shcp.gob.mx)

BOLSA MEXICANA DE VALORES:

Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V.: *Sistema Financiero Mexicano,* folleto informativo, 1998.

Bolsa Mexicana de Valores, Indicadores Bursátiles: enero vol. II No. 1, febrero vol. II No. 2, marzo vol. II No. 3, abril vol. II No. 4; 1998.

Bolsa Mexicana de Valores, SIVA (Sistema integral de valores actualizado).

OTROS:

Reglamento interior de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, 1997

Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros, ediciones Delma, primera edición 2000.

Ley Federal de instituciones de Fianzas, ediciones Delma, primera edición 2000.