UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" Contar hasta el infinito "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JUAN MANUEL RUISANCHEZ SERRA

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

MEXICO. D. F. 2001

ERSIDAD NACIONAL
AVTÓNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" Contar hasta el infinito "

realizado por Juan Manuel Ruisánchez Serra

con nùmero de cuenta 9350513-6 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M en C.	José Alfredo Amor Montaño.	
Propietario	Mat.	Concepción Ruiz Funes	Concepción Ruiz
Propietario	Dr.	Ricardo Berlanga Zubiaga.	
Suplente	M en C.	Ana María Sánchez Mora.	Ana María Sánchez M.
Suplente	Dra.	Maria de la Paz Alvarez Scherer	

Consejo Departamental de Matemáticas

Héctor Méndez L.

Dr. Héctor Méndez Lango.

Agradecimientos

A mi familia.

A mis amigos.

A José Alfredo.

A Concha.

A Ricardo.

A Ana María.

A Paz.

Agradecimientos especiales

A Aubin, por sentarse conmigo horas hasta acabar y siempre estar ahí.

A Concha, por ser un ejemplo constante en muchas cosas, incluyendo la divulgación.

A Lucía, por ayudarme a encontrar muchos caminos y enseñarme otras formas de ver la vida.

A Natalia por conseguirme el programa dos veces y por muchas aguas de alfalfa.

Para Yaocí, que siempre ha disfrutado con mis experimentos de divulgación y a quien quiero de verdad.

CONTAR HASTA EL INFINITO

Juan Manuel Ruisánchez Serra

Hasta:

1. Preposición que sirve para expresar el término del cual no se pasa, con relación al espacio, al tiempo y a la cantidad.
   Ejemplo: *Contar hasta el infinito.*

2. Se usa como conjunción copulativa, y entonces sirve para exagerar o ponderar una cosa y equivale a "también", "aun".
   Ejemplo: *Contar hasta el infinito.*

Índice

Introducción

¿Por qué divulgar las matemáticas? o Los Matadragones

Quizás parezca extraño que haya escogido escribir un libro de divulgación como proyecto de tesis, ya que no es una costumbre común en una carrera como la de matemáticas. Sin embargo, ésa es una de las razones principales: ¿por qué casi no hay matemáticos que se dediquen a divulgar las matemáticas?

Y no puedo evitar recordar (y escribir aquí) la historia aquella sobre los *matadragones:*

En París, en la Edad Media, había una famosísima escuela para los caballeros que querían convertirse en matadragones. Era una profesión de mucha alcurnia y requería muchos años de aprendizaje.

Así, los nobles de toda Europa mandaban a sus hijos más dotados para la batalla a la escuela de París, para que aprendieran "el arte de matar dra-gones". Tras seis años de meticulosos estudios, salían graduados con el rimbombante título de Matadragones.

Como era de esperarse, lo único que sabían hacer en la vida era precisamente eso: matar dragones. Así, salían al mundo real a ganarse la vida y, también como era de esperarse, jamás encontraban ni un solo dragón contra el cual luchar a muerte. Tras recorrer en vano el mundo conocido hasta entonces en busca de un dragón, aunque fuera uno chiquito, que pudiera representar un reto para ellos, regresaban a la escuela de París a enseñar "el arte de matar dragones".

Sin embargo, quedan algunas preguntas en el aire: ¿Cómo puede ser que una escuela como la de París sobreviviera toda la Edad Media si no servía para nada? ¿Podría ser que, aunque no existieran los dragones, la escuela sirviera de algo? ¿Por qué aquellos caballeros no eran el hazmerreir de la Europa medieval a pesar de todo? ¿Podría ser que tan sólo *aprender* a matar dragones valiera la pena, aunque no hubiera dragones? ¿Sabía alguien que no fuera un matadragones lo que era aquello?

En nuestra época, los dragones quedaron relegados a la literatura, pero las matemáticas podrían tomar su lugar, y mucha gente piensa que los matemáticos son una especie de matadragones modernos, que estudian matemáticas *porque es una profesión de mucha alcurnia, sólo para personas muy capaces,* y que luego no sirve de nada.

Y, claro, la diferencia entre un dragón y las matemáticas es inmensa (al menos todos sabemos que las matemáticas sí existen), pero no hay mucha diferencia, en todo caso, entre lo que la gente conoce de las matemáticas y lo que los medievales conocían de los estudios de los matadragones.

¿Para qué estudiar cosas de más de tres dimensiones si nuestro mundo sólo tiene tres? ¿Para qué entender cómo y por qué funcionan las multiplicaciones si una calculadora las hace perfectamente? ¿Para qué seguir estudiando matemáticas si estuvimos desde primaria, luego en secundaría y también en la prepa, 12 años estudiándolas (y, en muchos casos, odiándolas)?

Tal vez, si lograran ver que las matemáticas pueden ser bonitas y emocionantes por sí mismas, aunque *no sirvieran* para nada en el *mundo real*; que pueden ser tan placenteras como leer una novela o un poema, entonces no serían tan temidas como los dragones lo fueron alguna vez.

Además de que las matemáticas sí tienen una *utilidad*; por ejemplo, en química, física, ingeniería, y en muchos otros campos del conocimiento. Pero la *utilidad*, al menos para las matemáticas, no es una razón de peso para crear o dejar de crear. Muchas veces ha sucedido que pasan cientos de años sin que se encuentre una aplicación *real* para alguna teoría matemática, y, después de todo ese tiempo, sorpresivamente, aparece algo en lo que se puede usar. O se crea una teoría para resolver algún problema que no tiene aplicación en el mundo externo a las matemáticas. Es decir, que no se vale poner como pretexto la *utilidad* de las matemáticas para ponerles la etiqueta de *odiables*.

Y, por desgracia, son pocos los matemáticos que han tratado de mostrar a la gente este *lado amable* de las matemáticas; es decir, de enseñar qué es lo que hacían los matadragones en la escuela de París de tal modo que ésta logró existir por tanto tiempo. Y es justamente eso lo que pretendo con este proyecto de tesis.

¿Por qué el infinito?

El tema del infinito lo escogí, por supuesto, porque es un tema que me ha interesado y gustado desde hace mucho tiempo y que me parece muy apasionante. Fue uno de los primeros temas que llamó mi atención hacia las matemáticas y que no me ha desilusionado. Sin embargo, hay otras razones, además de ésa que es muy importante, para divulgar el tema del infinito.

Elegir el infinito quizás haya sido una *trampa* facilitadora del objetivo de un texto de esta índole (a saber, que el texto se lea e interese), pues al escribir algo de divulgación es muy importante tomar en cuenta al público al que el texto está dirigido: sus intereses, sus gustos, sus conocimientos, etc. Y el infinito tiene como gran ventaja que, independientemente del punto de vista desde el que sea tratado, llama la atención de mucha gente. Ciertamente no es tan *famoso* como otros temas: los dinosaurios, cualquier cosa que tenga que ver con el sexo o con la astronomía, pero sí es suficientemente reconocido como para interesarse en él sin saber demasiado.

Esto, claro, no implica que cualquier cosa que se escriba sobre el infinito es interesante o divertida ni que ya no se tenga que hacer un esfuerzo por lograr un buen trabajo, pero es una pequeña ayuda.

¿Por qué el infinito en la Teoría de Conjuntos?

En matemáticas, el infinito aparece de muchísimas formas y se trata de distintas maneras: hay infinitos que tienden hacia lo muy grande (como agrandar un segmento de recta indefinidamente); o infinitos que tienden hacia lo muy pequeño (como dividir un segmento de recta en partes, indefinidamente); infinitos que se ven como un punto, una recta o una circunferencia; funciones que *se van* al infinito (las que toman valores cada vez mayores, indefinidamente); o sumas con una infinidad de sumandos (cuyo resultado puede ser finito o infinito); discusiones sobre la existencia o no existencia del infinito. Así, la geometría, el álgebra, el análisis, la lógica y la filosofía de las matemáticas tienen que lidiar alguna vez con el infinito.

Para mí, sin embargo, la Teoría de Conjuntos presenta una forma muy sorpendente de trabajar con el infinito, empezando por hablar sobre lo que realmente quiere decir *contar*, una acción tan cotidiana y que aprendemos a realizar desde niños, pero que nunca nos preocupamos por saber, con precisión, lo que significa. También cosas como decir que no es *el infinito*, sino *los infinitos*; que el infinito no es la máxima magnitud, es más, que no existe una máxima magnitud; que los infinitos se pueden concebir como números, etc.

Y estas versiones del infinito son el tipo de cosas que, desde mi punto de vista, hacen que las matemáticas sean amables, bonitas e interesantes y, por ello, deben de ser divulgadas.

0. El infinito: Un concepto peligroso.

Hay un concepto que es el corruptor y desatinador de los otros.
No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito.
-Jorge Luis Borges-

Es curioso encontrar un montón de frases sobre el infinito de hace cientos de años en la historia de la humanidad y, al mismo tiempo, darse cuenta que la divulgación de este concepto es, en realidad, tan reciente como los libros en que se citan todas esas frases; es decir, tan recientes como el siglo XX. Por ejemplo:

Toda cosa o es principio o procede de un principio: pero no hay del infinito principio alguno, que sería su límite. Además, es no engendrado e incorruptible, por cuanto es un principio, porque necesariamente toda cosa engendrada debe tener un fin y hay un término a toda destrucción. Por eso, como decimos, aquél no tiene principio; antes bien, parece ser principio de todas las demás cosas y abarcarlas y regirlas todas, como quienes no admiten causas distintas al infinito.

(Aristóteles. 384-322 a.C.)

...lo ilimitado como un monstruo de malicia (malitia dedecos), no sostenido por principio alguno, huidizo siempre a cualquier definibilidad; un objeto que la ciencia y la filosofía de consuno repudian, al reconocer que es refractario a cualquier intento de comprensión.

(Boecio: 480-525)

Si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, de manera que formasen una totalidad actualmente definida, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían en número finito y se produciría una contradicción.

(Tomás de Aquino: 1225-1274)

El intelecto abstracto tiene libertad para dividir indefinidamente una magnitud dada o para formar otra mediante el discurso; pero no puede creer que sus productos sean conformes a la naturaleza de las cosas, porque el proceso del intelecto es pura ficción

(Giordano Bruno: 1548-1600)

La capacidad de nuestra mente no es ilimitada y, por lo tanto, no puede agotar el recorrido indefinido de un infinito potencial. no posee una concepción del infinito plena y adecuada porque cuando topa con él se ve obligada a seguir sus interminables pasos sucesivos conforme a la inexorable ley del devenir que no deja augurar solución definitiva alguna al proceso.

(David Hume: 1711-1776)

En consecuencia, el problema de si un objeto dado es o no infinito no puede, ciertamente, depender de si su cantidad es algo que podamos o no percibir, de si somos o no capaces de tener una visión global de ella.

(Bernard Bolzano: 1781-1848)

El infinito es un parto de nuestra imaginación, de nuestra pequeñez al tiempo que de nuestra soberbia... un sueño, no una realidad.

(Leopardi: 1798-1837)

Citas, casi todas, que aparecen en *Breve historia del infinito*, un libro escrito por Paolo Zellini en 1980; aunque esto sea sólo para reforzar la idea del primer párrafo.

¿Por qué no es divulgación? o, más bien, ¿por qué cuando Zellini escribe su libro sí está divulgando y las citas por sí solas o incluidas en los textos originales no lo eran ni lo son? Pues, principalmente, porque ninguna de las citas fue escrita para que un gran público entendiera algo. La mayoría de ellas, si no todas, son parte de los trabajos matemáticos, filosóficos, teológicos e, incluso, literarios de los autores.

A diferencia de Zellini, ninguno de los autores citados tenía tan clara la idea del infinito, ni la libertad para hablar acerca de él. Además, cabe aclarar que la noción de *infinito* que se tiene actualmente (al menos en las matemáticas) se debe a los trabajos de Richard Dedekind y de Georg Cantor, matemáticos que publicaron sus resultados a finales del siglo XIX, o sea, cuando ya todos los autores citados estaban muertos.

Bueno, pero tampoco sería cierto decir que estos textos no son o no fueron de divulgación sólo porque vistos desde nuestra perspectiva son falsos o, más bien, inexactos en los conceptos que tratan. Es decir, tal vez esos conceptos, en el momento en que fueron escritos dichos textos, eran los *verdaderos*, por así decirlo.

No, hay algo más allá de *la verdad* que hace que estos escritos no puedan considerarse de divulgación y esto es que ninguno de los autores tenía la intención de divulgar nada, pero ¿por qué?

David Hilbert (1862-1943), un matemático sobresaliente, afirmó alguna vez:

> ¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre; ninguna otra idea ha estimulado su intelecto tan fructíferamente; sin embargo, ningún otro concepto tiene tan gran necesidad de ser aclarado como aquél del infinito.

Y por ahí empieza el problema del infinito: es algo demasiado grande y peligroso en todos los sentidos que lo queramos ver.

En las citas anteriores, el mayor problema que se presenta *ligado* al infinito es nuestra capacidad intelectual de concebirlo como un todo o, incluso, tan sólo como una posibilidad. Podríamos pensar, como cuando nos damos cuenta que la ciencia tiene unas pretensiones desmesuradas al intentar explicarlo TODO: "¿Cuándo aprenderá el hombre a aceptar sus limitaciones?" que es lo que varios autores oponían al infinito, pero hay que tener cuidado: el infinito es como Dios (y lo que sigue es mi opinión): una creación de la mente humana y, por lo tanto, únicamente concebible como ente abstracto y a través del intelecto, no de los sentidos.

Sin embargo, no es ésta la manera en que se han percibido ni Dios ni el infinito a lo largo de la historia, y eso es parte del problema. Otra parte es que el infinito, cuando se *separaba* de Dios, por ejemplo, matemáticamente, resultaba paradójico. Finalmente, también fue importante la *necesidad matemática* del infinito en el desarrollo de este concepto.

Primero hablaré de la parte que concierne a la dualidad Dios-infinito: Dios, por definición si así se quiere ver, es infinito: porque no tiene límites, porque su poder es infinito y sólo es una parte de él, porque todo lo demás está contenido en él, porque está en todas partes o por la mejor razón que se les ocurra, pero es infinito y es, ni más ni menos, el creador de todo y, por lo tanto, su regente.

Para colmo, su representante ante la humanidad (según una parte del mundo occidental, por supuesto), o sea la Iglesia Católica, tuvo en su poder o bajo su custodia, durante más de mil años, el conocimiento y la cultura escondidos en algunos monasterios. Además, la Iglesia no goza de una fama de bondadosa y flexible (sólo hace falta recordar que contaban con los servicios de la Santa Inquisición). Así, podrán imaginarse cuándo se iba a permitir afirmar que un conjunto podía ser infinito o lo mismo con una recta o con cualquier otra cosa que no fuera Dios: nada podía tener el mismo *status* que Dios, a saber, ser infinito.

Bueno, y dejando atrás el sarcasmo, el que la Iglesia Católica rigiera el mundo occidental, realmente afectó el pensamiento de la época: en algunos, como Santo Tomás o San Agustín, se nota en sus trabajos, que más que mostrar un razonamiento lógico o científico, se basan en razonamientos metafísicos; en otros, como Giordano Bruno o Galileo Galilei, afectó en cuanto a que estuvieron constantemente asediados y amenazados por la Inquisición. De, hecho, Giordano Bruno, muere quemado en la hoguera.

Es difícil concebir algún tipo de divulgación con temas tan polémicos como el infinito si se toma en cuenta esta relación que tenía con Dios y, por ende, con la Iglesia. No sólo por el hecho de poder acabar en la hoguera, sino también porque quizás no valía la pena suicidarse al hablar de un concepto que era paradójico y contradictorio; lo que nos lleva al segundo punto por el que no había divulgación acerca del infinito.

Paradojas como la de Zenón de Elea (490-430 a.C.): Si un hombre quiere caminar del punto 0 al punto 1, primero tiene que pasar por el $\frac{1}{2}$, pero para eso, antes debe pasar por el $\frac{1}{4}$, y antes por el $\frac{1}{8}$ y antes por el $\frac{1}{16}$ y así hasta el infinito, por lo que, en realidad, el hombre no se podría mover.

Si su razonamiento era correcto, y en su época lo era, querría decir que el movimiento sería imposible, pero era evidente que algo andaba mal, pues la gente se movía. "El error -pensaron- está en suponer que las magnitudes se pueden dividir una infinidad de veces".

De hecho, esta paradoja se solucionó matemáticamente hasta que Cauchy (1789-1847) demostró que se pueden sumar una infinidad de términos teniendo como resultado un número finito (es decir: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$). Pero son más de 20 siglos entre Zenón y Cauchy en los que no se sabía exactamente lo que sucedía.

Lo mismo sucedió cuando Aristóteles (384-322 a.C.) afirmó: *el todo es mayor que cada una de sus partes* (ARISTÓTELES. *Física, p.203)* . Galileo Galilei (1564-1642) escribió que los conjuntos infinitos no se pueden entender como los conjuntos finitos, pues de ser así, habría una contradicción con lo que había dicho Aristóteles, pues Galileo había encontrado y demostrado que hay tantos números naturales como números cuadrados, que son sólo una parte de los naturales (GALILEI, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, p.108-110) . De nuevo, el infinito parecía paradójico.

Esta otra paradoja se resuelve con la actual definición de conjunto Dedekind-infinito, o sea, un conjunto A es Dedekind-infinito si contiene un subconjunto propio B de tal forma que A y B tienen el mismo número de elementos. Esta definición es de finales del siglo XIX.(DEDEKIND, Richard. *¿Qué son y para qué sirven los números?*, p.54)

Este tipo de paradojas son las que cooperaron para que el infinito siguiera siendo discutido, considerado peligroso y no divulgado. Incluso en 1851, cuando la Iglesia Católica ya no tenía tanto poder, Bernard Bolzano trató de *armonizar* el infinito teológico con el matemático en su libro. *Las paradojas del infinito*, que no se salvó de lo paradójico que resultaba el infinito.

Sin embargo, al igual que la necesidad matemática de la época de Cauchy lo llevó a desenmarañar la paradoja de Zenón, la necesidad matemática de la época de Bolzano lo llevó a intentar explicar el infinito de una forma matemática, aunque él no lo consiguió. Sin embargo, sus trabajo fueron retomados por Cantor y Dedekind para la creación de los números transfinitos.

Esta teoría fue la primera en aceptar la existencia del infinito completo y acabado y no sólo como posible. No obstante, a pesar de ser una teoría coherente y matemáticamente irreprochable, sufrió fuertes ataques de matemáticos como Kronecker (mentor de Cantor en la Universidad de Berlín), que aún dudaron de dicha existencia.

Fue a partir de esta teoría y de su aceptación en las matemáticas que el infinito fue más *fácil* de manejar y que tuvo menos fantasmas alrededor y, por lo tanto, fue hasta ese momento que fue susceptible de divulgación.

I. Algunos conjuntos de números

Los naturales ($\mathbb{N}$): Los números naturales son aquéllos que usamos para contar: $0, 1, 2, 3...$ Cabe aclarar que, aun cuando empezamos a contar a partir del 1 siempre que hay algo que contar, conviene considerar al 0 como el primer número natural, pues "contar nada" o decir que "no hay" cosas por contar es equivalente a decir que contamos 0 cosas. Es decir, el 0 también se usa para contar.

Si sólo tuviéramos estos números, podríamos sumar y multiplicar sin problemas, pero no siempre podríamos restar o dividir. Esto se debe a que si, casualmente, tuviéramos una resta donde lo que restáramos fuera mayor que lo que tenemos, por ejemplo: $8 - 16 = -8$, entonces el resultado negativo, en este caso -8, no estaría dentro de nuestros números. Igualmente, si tuviéramos una división no exacta, por ejemplo : $1 \div 3 = .33333$ el resultado tampoco estaría en nuestros números.

En cambio, siempre que sumemos o multipliquemos números naturales, obtendremos como resultado otro número natural.

Queda claro, entonces, que para hacer otras cosas, como resolver más problemas o manipular magnitudes, por ejemplo, se necesitan otros conjuntos de números además de los naturales.

Los enteros ($\mathbb{Z}$): Los números enteros son los números naturales y sus inversos aditivos; esto quiere decir que para cada número natural que existe, existirá también su "negativo". Es decir, si tenemos $n \in \mathbb{N}$, entonces n y $-n$ serán números enteros. Es importante aclarar que el 0 es el único número cuyo inverso aditivo es él mismo, es decir $-0 = 0$

Al tener ya a los enteros como "nuestros" números, solucionamos el problema de las restas, pues sea cuál sea el resultado de una resta, siempre estará en los enteros. Sin embargo, el problema de la división sigue sin resolverse.

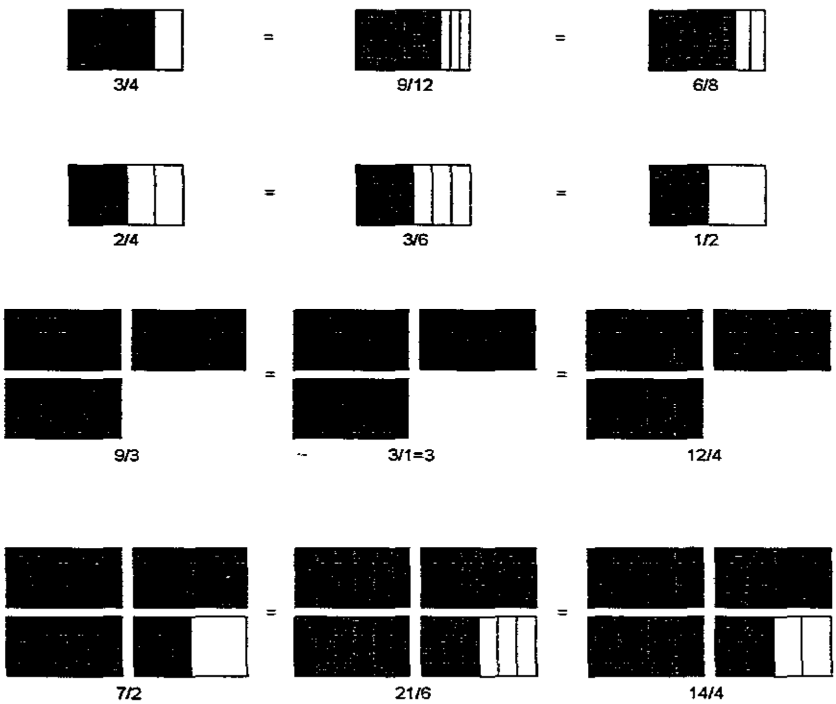
Una vez más, salta a la vista la falta de números.

Los racionales ($\mathbb{Q}$): Los números racionales son aquéllos que pueden expresarse como una fracción. Esto es, si p y q son números enteros y $q \neq 0$, entonces cualquier número de la forma $\frac{p}{q}$ es un número racional; y esto soluciona el problema de la división, pues es lo mismo escribir $1 \div 3$ que $\frac{1}{3}$, por lo que el resultado de cualquier división con números enteros estaría en

$\mathbb{Q}$; más aún, cualquier división con números racionales estará también en $\mathbb{Q}$, con la única excepción de dividir entre 0, pues no tiene sentido.

Es obvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, (es decir, que los números naturales son un subconjunto de los números enteros), pero ¿será cierto que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$? ¿Cómo podría un entero m expresarse de la forma $\frac{p}{q}$ que necesitamos?

Es importante saber que un mismo número racional puede tener diferentes nombres. Esto es más fácil de entender con unos ejemplos:



O sea, como dice el dicho: *Aunque la mona se vista de seda, mona se queda.*

Eso se debe a que lo que indican los diferentes nombres de un número racional es en cuántas partes iguales se dividen las unidades (indicadas por el denominador) y cuántas de esas partes estamos considerando (indicadas por el numerador). Entonces, cuando un número racional cambia de nombre, lo que en realidad está pasando es que cambia el número de partes en que dividimos las unidades y el número de partes que consideramos; sin embargo, y esto es lo importante, no cambia la "magnitud" o "el tamaño" de lo que consideramos, tal como se ve en las partes sombreadas de los ejemplos anteriores.

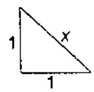
Cuando dos fracciones son dos nombres distintos de un mismo número racional, se llaman fracciones equivalentes. Para saber si dos fracciones son equivalentes, lo que se hace es una división entre ellas. Como las fracciones equivalentes representan una misma "magnitud", su división será igual a 1. Si, por el contrario, dos fracciones no son equivalentes, el resultado de la división será distinto de 1, como se ve en los siguientes ejemplos:

i) $\frac{3}{9} \div \frac{7}{21} = 1$, por lo que sabemos que $\frac{3}{9}$ y $\frac{7}{21}$ son equivalentes

ii) $\frac{6}{15} \div \frac{12}{25} = \frac{5}{6} \neq 1$, por lo que sabemos que $\frac{6}{15}$ y $\frac{12}{25}$ no son equivalentes.

Y se ve que con los racionales, que son muchos, ya podemos hacer más cosas, pero ¿serán los racionales, entonces, todos los números?

¿Qué pasa si tenemos un triángulo rectángulo así?



Según el teorema de Pitágoras, $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Entonces, necesitamos $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. Pero, para saber si hay un $x \in \mathbb{Q}$ tal que cumpla eso, necesitamos encontrar una fracción $\frac{p}{q}$, tal que $x = \frac{p}{q}$ y $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

Suponemos $x = \frac{p}{q}$ y $x^2 = 2$ y también suponemos que p y q no tienen divisores comunes distintos de 1 (esta última suposición es muy importante, y siempre se puede hacer, pues debe quedar claro que siempre que tomemos una fracción $\frac{m}{r}$, se puede obtener una fracción equivalente $\frac{p}{q}$ de tal forma que p y q no tengan divisores comunes distintos de 1. Lo que hacemos para obtener dicha fracción es dividir tanto al numerador como al denominador entre los divisores comunes tantas veces como sea posible, hasta llegar a que no tengan divisores comunes distintos de 1).[1]

$x = \frac{p}{q} \Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2}$ elevando al cuadrado de ambos lados de la ecuación.

Supusimos que $x^2 = 2$, por lo que tenemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ y eso quiere decir que p^2 es un número par y, entonces, también p es par[2], es decir, de la siguiente forma:

$p = 2n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y, entonces, $p^2 = 4n^2$

Si regresamos a la ecuación $2q^2 = p^2$:

$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$ y eso quiere decir que también q^2 es par y, entonces, q es par.

---

[1] Si p y q son enteros que no tienen divisores comunes distintos de 1, se llaman "primos relativos".

[2] Tenemos que p^2 es par y queremos demostrar que, entonces, p es par también Demostrar eso es equivalente a demostrar que: si p es impar, entonces p^2 es impar, ya que hay una regla de la lógica que nos dice que $p \Rightarrow q$ es equivalente a *no* $q \Rightarrow$ *no* p (a esta regla lógica se le llama *contraposición*)

p impar $\Rightarrow p = 2n+1$, con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1$

Llamemos t a $2n^2 + 2n \Rightarrow p^2 = 2t + 1$, o sea, p^2 es impar. Entonces, p^2 par $\Rightarrow p$ par

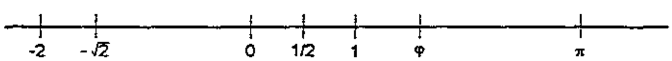
Pero si p y q son pares, entonces se contradice nuestra suposición de que no tenían divisores comunes y, por lo tanto, es falso que exista $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$, lo que inmediatamente nos lleva a pensar que todavía hay más números que los racionales.

La x tal que cumple lo anterior es conocida como $\sqrt{2}$.

Los irracionales ($\mathbb{I}$): Los números irracionales son los que no se pueden escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Entre los más famosos están: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \varphi, e$, donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y es conocido desde los antiguos griegos como número de oro o "razón áurea"; es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.[3]

A diferencia de lo que había pasado con los otros conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ahora tenemos que $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{I}$, de hecho, por la manera como definimos al conjunto $\mathbb{I}$, se tiene que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos ajenos, es decir, que no tienen elementos en común ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$). Así que en vez de trabajar por separado con cada conjunto, creamos otro conjunto de números, que es la unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

Los reales ($\mathbb{R}$):Los números reales son todos los números que son racionales o irracionales, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, y la forma en que se representan es mediante puntos en una recta, la recta real:



En ella, cada punto corresponde a un número real.

[3]Se puede encontrar más información sobre el tema de número de oro, en FUENTES DE LA PEÑA, Adrián.*Convergencia dorada, un estudio del número de oro y la sucesión de Fibonacci*, Tesis UNAM, 1991.

II. Contar

Imaginemos un baile en un salón inmenso. El salón está lleno de gente y nuestra tarea es saber qué hay más, hombres o mujeres.

Fácil. Contamos a los hombres, contamos a las mujeres, comparamos y listo.

Pero necesitamos más velocidad, porque es un baile con 18,000 invitados aproximadamente, además del trabajo que cuesta no contar a la misma persona dos veces mientras da vueltas en el baile.

No nos importa saber cuántos hay, sólo qué hay más.

Lo más sencillo sería ir con el director de la orquesta y pedirle que toque la pieza de moda, para que todo el mundo se levante a bailar. Además, claro, que sea una pieza en la que sólo puedan bailar, emparejados, un hombre y una mujer, o sea, que no bailen parejas de mujeres ni de hombres.

Se inicia la pieza y la gente se pone a bailar. Todos los que encuentran pareja bailan; así, sólo hace falta observar a los que no están bailando, que sólo pueden ser hombres o mujeres, pero no los dos, porque, entonces, aún podrían formarse parejas.

Así, si lo que "sobran" son hombres, habrá más hombres que mujeres, pues todas las mujeres estarán emparejadas con un hombre y todavía hay hombres disponibles. Lo mismo si lo que "sobran" son mujeres, entonces habrá más mujeres.

En cambio, si al bailar no sobra ningún hombre y ninguna mujer, entonces habrá el mismo número de hombres que de mujeres.

¡Y pensar que una sola pieza de música nos ahorraría el trabajo de contar uno por uno a los invitados y luego todavía compararlos!

Lo mismo, por ejemplo, en un salón de clases: El maestro es famoso por sus clases maravillosas y al principio del curso siempre se llena su grupo. A él no le gusta tener gente parada en su clase, así que sólo acepta a los que caben sentados en las sillas del salón.

En los pasillos, le preguntan cuántos alumnos va a aceptar, pero él nunca dice un número, porque nunca ha contado las sillas del salón, y, sin embargo, siempre acepta al mismo número de alumnos.

¿Cuántos alumnos acepta, entonces? Pues siempre los mismos, porque empareja a los alumnos con las sillas del salón de tal forma que no sobran ni sillas ni alumnos.

Y en otro ejemplo más cotidiano podemos ver que ésta no es una manera tan poco común de "contar": Hay un concierto en el Auditorio Nacional; los periodistas, para su nota del día siguiente, quieren saber si el Auditorio se llenó o no. Ellos saben que el lugar tiene cupo de $10,000$ personas. Sin embargo, no se ponen en la puerta a contar cada una de las personas que van entrando hasta llegar a $10,000$, ni tampoco cuentan los boletos que se recibieron a la entrada. Lo que hacen es mucho más sencillo: entran al concierto, voltean hacia los asientos y se fijan si hay o no sillas vacías. Si no encuentran ninguna silla sin ocupante, el Auditorio está lleno; en cambio, si hay un sector de las gradas que no tiene gente, es claro que hay menos de $10,000$ personas y que el lugar no se llenó.

A estos "emparejamientos", en matemáticas, se les conoce como biyecciones.

Las biyecciones son funciones que se establecen entre dos conjuntos y que cumplen lo siguiente:

Una función con dominio A y contradominio B, denotada por

$$f : A \longrightarrow B$$

es una biyección si cumple:

1) Para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

que en palabras normales quiere decir que a elementos distintos del dominio les asignamos elementos distintos del contradominio.

2) Para cada $b \in B$, $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$,

que quiere decir que cualquier elemento del contradominio tiene asignado un elemento del dominio.

O sea, en resumen, emparejar dos conjuntos.

Es muy importante que quede claro el concepto de biyección o de emparejamiento, ya que la mayor parte de los ejemplos y demostraciones que vendrán a continuación usan dicho concepto.

Bueno, sí, está bien, ya vimos que eso de "emparejar" es un buen método para saber en cuál conjunto hay más elementos al comparar dos conjuntos distintos, pero este capítulo se llama **Contar** y no hemos dicho nada al respecto. ¿Qué tiene que ver "emparejar" con "contar"? En realidad, podríamos decir que es lo mismo: emparejamos el conjunto de cosas que queremos contar con otro conjunto, que es un número natural.

¿Entonces los números son conjuntos? Sí, se pueden ver así. Los números, como buenos entes matemáticos, son construcciones abstractas del pensamiento humano; aunque debo aclarar que la manera de presentarlos aquí es "muy nueva" y no siempre se han entendido de esta forma. Aquí los vamos a representar como conjuntos, pero es importante saber que no es la única manera de pensarlos o construirlos.

El primer número natural es el 0. Lo que queremos es un conjunto que represente al 0. Por ejemplo, el número de vacas moradas y voladoras que hay en la Tierra es 0 ¿no? ¿Qué conjunto podemos emparejar con todas esas vacas voladoras? Pues como no hay ninguna vaca morada y voladora, el conjunto que buscamos tampoco debe tener ningún elemento, y el único conjunto que cumple con esta característica es el conjunto vacío ($\emptyset$); así, $0 = \emptyset$. Pero de ahí ya es más fácil todo, porque ahora queremos un conjunto que tenga un solo elemento, ¿pero cuál? Pues lo único que ya tenemos es el 0, así, el 1 podría ser el conjunto que tiene al 0, es decir, $1 = \{0\}$. Entonces, el $2 = \{0, 1\}$ y el $3 = \{0, 1, 2\}$. Si seguimos así, tendremos un *catálogo* donde estén todos los números y sus nombres:

Nombres		Números
0	=	$\emptyset$
1	=	$\{0\}$
2	=	$\{0,1\}$
3	=	$\{0,1,2\}$
4	=	$\{0,1,2,3\}$
5	=	$\{0,1,2,3,4\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿Entonces el 0, 1, 2, 3, ... son los nombres de los números y no los números en sí? Pues sí, sólo que como es más fácil decir "cuatro" que "el conjunto que tiene al cero, al uno, al dos y al tres" (por no decir en vez de "cero", el conjunto vacío; en vez de "uno", "el conjunto que tiene al conjunto vacío como único elemento", etc), pues es más fácil llamar al nombre número y ya. Es igual que llamar a las personas por su nombre; es decir, yo soy Juan Manuel Ruisánchez Serra, aunque *Juan Manuel Ruisánchez Serra* sea, en realidad, solamente mi nombre y yo sea un ser humano con tal o cual característica.

Está bien, ya sabemos que los números son conjuntos y que existe el *catálogo* de los números y sus nombres, entonces, para contar el número de cosas de un conjunto, lo que tenemos que encontrar es el número (o conjunto) con el cual podamos emparejar o biyectar las cosas que queremos contar. Por ejemplo, para contar las cosas del conjunto $A = \{@, \#, \$, \%, \&\}$, vamos al *catálogo* y vemos:

$$
\begin{aligned}
@ &\to 0\\
\# &\to 1\\
\$ &\to 2\\
\% &\to 3\\
\& &\to 4
\end{aligned}
$$

Entonces el conjunto A se puede biyectar con el conjunto $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, por lo que decimos que A tiene 5 elementos.

Quizás a simple vista no parezca que sea así como contamos, pues en realidad casi siempre contamos de uno en uno y no de conjuntos en conjuntos, pero lo que estamos haciendo es ir avanzando en los números del *catálogo* cada vez que avanzamos al contar.

Cabe aclarar que esta manera de contar es la que se utiliza en la teoría de conjuntos y no en la vida real. Cuando contamos cosas, empezamos a emparejar con el 1 y no con el 0, de tal modo que al acabar de emparejar el conjunto que queremos contar con el conjunto de números, el último número emparejado será el número de elementos que tiene el conjunto que estamos contando. Así para saber cuántos elelmentos hay en el conjunto $A = \{@, \#, \$, \%, \&\}$, lo que hacemos es:

$$@ \to 1$$

$$\# \to 2$$

$$\$ \to 3$$

$$\% \to 4$$

$$\& \to 5$$

Y como el 5 es el último número que emparejamos, entonces el conjunto A tiene 5 elementos.

Sin embargo, para la manera de construir los números en la teoría de conjuntos, es más conveniente utilizar el texitcatálogo para hacer los emparejamientos. ¿Hasta qué número podemos contar? ¿Qué tan grande es el *catálogo*?

A veces, al pensar en un número MUY grande, pensamos en trillones o cuatrillones, pero estos números pueden ser "chiquitos" si pensamos, por ejemplo, en el número primo más grande que se conocía hasta 1979 :

$$2^{23209} - 1$$

que tiene 6987 cifras. Y en 1985, se calculó un primo con 65000 cifras. (MAOR, Eli. *To infinity and beyond*, p.22)

Entre otros números grandes, están el *googol*, que es un 1 seguido de cien ceros $\left(10^{100}\right)$, y el *googolplex*, que es un 1 seguido de un googol de ceros $\left(10^{10^{100}}\right)$. (KASNER, E. y NEWMAN, J. *Matemáticas e Imaginación*, p.38)

Pues sí está bonito que haya números tan grandes, pero ¿para qué sirven? ¿qué se puede contar con ellos?

Pues, por ejemplo, para contar el número de movimientos posibles en un juego de ajedrez: $10^{10^{50}}$, que es aun mayor que el googol. (KASNER, E. y NEWMAN, J. *Matemáticas e Imaginación*, p 39)

Bueno, una cosa es contar el número de jugadas posibles en una partida de ajedrez, que, aunque muy grande, parece lógico que se acaben. ¿Qué pasa, en cambio, con el número de granos de arena que hay en las playas de la Tierra? ¿Será infinito como muchas veces hemos oído decir, incluso por grandes genios de la literatura: "Las arenas innúmeras del Ganges."? (BORGES, Jorge Luis. *Antología poética 1923/1977*, p.140) ¿Hay suficientes números en el *catálogo* para biyectarlos con los granos de arena?

Lo que sucede cuando dicen que el número de granitos de arena es infinito es, más bien, un "problema" temporal. En general, la razón que dan es que no se pueden contar todos y cada uno de ellos, pero eso no es cierto. Si pudiéramos tener todo el tiempo que quisiéramos, en algún momento acabaríamos de contarlos; es más, desde Arquímedes, en el siglo III, se sabe que no hay un número infinito de ellos:

Hay algunos, Rey Gelon, que piensan que el número de granos de arena es infinito en multitud y yo me refiero a la arena que existe, no sólo en las proximidades de Siracusa y en el resto de Sicilia, sino también a la que se encuentra en otras regiones, ya sean habitadas o no. Por otra parte, hay algunos que, sin considerarlo como infinito, piensan que aún no se ha fijado un número lo suficientemente grande como para exceder su multitud. Y es claro que aquellos que sostienen este punto de vista, se imaginan una masa formada por arena, tan grande como la masa de la tierra, incluyendo en ella todos los mares y las depresiones, llenos hasta una altura igual a la de la montaña más alta, tendrían todavía mayores dificultades para reconocer que podría expresarse algún número, lo suficientemente grande, como para exceder la multitud de la arena así tomada. Pero trataré de probar mediante demostraciones geométricas que usted podrá seguir, que, de los números nombrados por mí e indicados en la obra que envié a Zeuxippus, algunos exceden, no sólo el número de la masa de arena igual en magnitud a la tierra rellenada en la forma descrita, sino también la de una masa igual en magnitud al universo. (ARQUíMEDES. *El contador de arena*, introducción)

Además, nadie debe hablar de tiempo cuando se habla de posibilidad o imposibilidad de contar algo. Es decir, con la paciencia y el tiempo necesarios, podríamos encontrar un número que se biyectara con todos los granitos de arena y aún tendríamos números de sobra en el *catálogo*.

Es más, Sir Arthur Eddington sostiene que hay exactamente $136 \cdot 2^{256}$ protones en el universo, al igual que de electrones(KASNER, E. y NEWMAN, J. *Matemáticas e Imaginación*, p.38); y es evidente que existen muchos menos granitos de arena que electrones o protones. ¿Entonces todo se puede contar?

Se dice que A es un conjunto finito siempre que existe un $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $|A| = n$, donde $|A|$ se lee como "la cardinalidad de A" y quiere decir el número de elementos que tiene.

Es decir, $|A| = n$ con $n \in \mathbb{N}$ es lo mismo que decir que existe una biyección entre A y $n = \{0, 1, 2, 3, ..., n - 1\}$.

III. Infinito vs finito.

¿Qué número será tan grande que ya no sea finito? ¿Qué conjunto no se puede "acabar" de contar nunca? ¿Qué quiere decir infinito?

Bueno, buscar en la naturaleza sería inútil, pero las matemáticas no son una ciencia que se dedique única y exclusivamente a entender o explicar lo que sucede en la naturaleza. Las matemáticas tienen sus propios "habitantes", que no existen en otro lado, y es entre ellos que podemos encontrar el infinito.

Pensemos, por ejemplo, en los números naturales ($\mathbb{N}$). ¿Cómo contarlos a ellos mismos? Si intentáramos emparejarlos con ellos mismos, podríamos seguir indefinidamente. ¿Hay algún número natural que sea el más grande? ¿Se "acaban" los números naturales?

Suponer que hay un número natural que pueda "decir" cuántos números naturales hay es como decir que hay una víbora que puede comerse a sí misma por completo.(KASNER, E. y NEWMAN, J. *Matemáticas e Imaginación*, p. 48)

Antes de hablar más sobre los naturales, hablemos un poco sobre lo que quiere decir "ser infinito".

La primera definición, bastante sencilla, no nos sirve demasiado: Infinito es lo que no es finito; o, en términos conjuntistas: Sea A un conjunto, A es infinito si y sólo si A no es finito, es decir, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$.

Bueno, volvemos a lo mismo: ¿cómo sabemos si el conjunto A es infinito o solamente muy grande como para no saber "a simple vista", si es finito? Necesitamos una caracterización más clara de los conjuntos infinitos.

Por ejemplo, Giordano Bruno, en 1584, escribe lo siguiente:

Filoteo.- Yo llamo al universo "todo infinito" porque no tiene borde, límite o superficie; digo que el universo no es "totalmente infinito" porque cada una de las partes que podemos tomar de él es finita y cada uno de los mundos innumerables que contiene es finito. Llamo a Dios "todo infinito" porque excluye de sí todo límite y cada atributo suyo es uno e infinito; y digo que Dios es "totalmente infinito" porque todo él está en todo el mundo y en cada una de sus partes infinitamente y totalmente, al contrario de la infinitud del universo, la cual está totalmente en todo, pero no en las partes (si a propósito del infinito podemos hablar de partes) que podamos *comprender en él.*(BRUNO, Giordano. Del infinito: el universo y los mundos, p.116-117)

Y, en 1638, Galileo Galilei escribe:

Salviati.- Este tipo de dificultades proviene de los razonamientos que nosotros hacemos con nuestro entendimiento finito al tratar con los infinitos, otorgándoles los mismos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas, lo cual pienso que es improcedente puesto que creo que las propiedades de mayor, menor e igual no convienen a los infinitos de los que no se puede decir que uno es mayor, menor o igual a otro. Como prueba de ello, me viene a la memoria un argumento que pondré para ser más claro bajo la forma de interrogaciones al señor Simplicio, que ha sido quien ha puesto esta dificultad.

Supongo que sabéis perfectamente cuáles son los números cuadrados y los no cuadrados.

Simplicio.- Sé perfectamente que un número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo; así, cuatro, nueve, etc., son números cuadrados, engendrados el uno por el número dos y el otro por el tres al multiplicarse por sí mismos.

Salviati.- Muy bien. Sabéis también que así como los productos se llaman cuadrados, los que los producen, es decir, los números que se multiplican, se llaman lados o raíces. En cuanto a los números que no son engendrados por la multiplicación de un número por sí mismo, no son, naturalmente, cuadrados. Por tanto, si yo digo que todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados solos, enunciaré una proposición verdadera, ¿no es así?

Simplicio.- Evidentemente.

Salviati.- Si continúo preguntando cuántos son los números cuadrados, se puede responder con certeza que son tantos cuantas raíces tengan, teniendo en cuenta que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado; no hay, por otro lado, cuadrado que tenga más de una raíz ni raíz con más de un cuadrado.

Simplicio.- Así es.

Salviati.- Pero si pregunto cuántas raíces hay, no se puede negar que haya tantas como números, ya que no hay ningún número que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo siempre a medida que nos acercamos a números más grandes, ya que hasta cien hay diez cuadrados, que es tanto como decir que sólo la décima parte son cuadrados; y en diez mil sólo la centésima parte son cuadrados, mientras que en un millón la cifra ha descendido a la milésima parte. Con todo, en un *número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total.*

Sagredo.- En este caso, ¿qué es lo que se deduce?

Salviati.- Yo no veo que otra cosa haya que decir si no es que infinitos son todos los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; la multitud de los cuadrados no es menor que la de todos los números, ni ésta mayor que aquélla; y finalmente, los atributos de mayor, menor e igual no se aplican a los infinitos, sino sólo a las cantidades finitas. De modo que, cuando el señor Simplicio me presenta muchas líneas desiguales y me pregunta cómo puede ser que en la mayor no haya más puntos que en la pequeña, yo le respondo que no hay ni más ni menos ni los mismos, sino infinitos en cada una. Si yo le respondiese, por el contrario, que los puntos de una línea son tantos como los números cuadrados, los de otra mayor, tantos como números naturales, y los de otra pequeñísima, tantos como números cubos, ¿le daría así satisfacción al poner más puntos en una que en otra y en cada una una infinitud? Esto por lo que respecta a la primera dificultad. (GALILEI, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, p 108-110)

En este último fragmento, Galileo dice que hay propiedades de lo finito que no se pueden aplicar a lo infinito, y eso es debido a que había una "verdad evidente" que rigió el pensamiento durante muchos siglos: *El todo es mayor que cada una de sus partes.*

Y fue esta idea de Aristóteles la que, durante mucho tiempo, impidió un avance matemático en las cuestiones referentes al infinito, ya que parecía una contradicción pensar que una parte podía ser tan grande como el todo y eso llevaba a suponer que el infinito era paradójico y que la comparación de tamaños no tenía sentido para conjuntos infinitos.

Fue hasta que, en la segunda mitad del siglo XIX, Richard Dedekind y Georg Cantor, matemáticos alemán y ruso respectivamente, formularon una teoría formal del infinito, que esta paradoja quedó aclarada. Y esto se logró retomando aquella paradoja precisamente como definición:

Un conjunto A es infinito (Dedekind-infinito) si y sólo si existe B, un subconjunto propio de A, de tal forma que B tenga el mismo número de elementos que A.

Esto es:

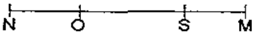
Sea A un conjunto, A es Dedekind-infinito $\Leftrightarrow \exists B$ tal que $B \subsetneq A$ y $|A| = |B|$. [4]

Quizás era esta idea la que estaba detrás de lo que decía Giordano Bruno acerca del universo y de Dios, aunque no lo podemos saber. Sin embargo, es claro que ésta es la idea que estaba detrás del texto de Galileo Galilei, sólo que en ese momento todavía no era una definición, sino una paradoja. Esta concepción prevaleció incluso hasta Bernard Bolzano, en 1851.(BOLZANO, Bernard. *Las paradojas del infinito*)

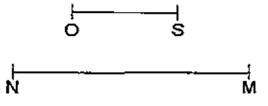
[4] $|A| = |B|$ quiere decir que existe una biyección entre A y B, esto es lo mismo que decir que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, o que se pueden emparejar.

Entonces veamos algunos conjuntos que son infinitos según nuestra definición de conjuntos Dedekind-infinitos.

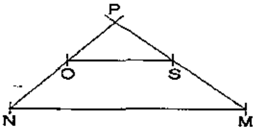
El primer ejemplo de un conjunto Dedekind infinito es una recta NM. Lo que necesitamos es encontrar un segmento de recta $OS \subsetneq NM$ que tenga el mismo número de elementos que NM, es decir, $|NM| = |OS|$. En este caso, los elementos, tanto de NM como de OS, son puntos.



Para demostrar que $|NM| = |OS|$, tomamos una copia de OS y hacemos lo siguiente:

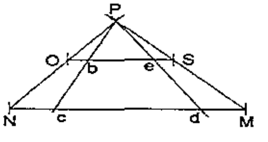


Trazamos las rectas NO y MS.



Podemos suponer que NM y OS no miden lo mismo[5], NO y MS no son paralelas y se cruzan en un punto, al que llamaremos P.

Lo que queremos es emparejar todos los puntos de OS con todos los puntos de NM.



Para saber cuál es el punto $c \in NM$ que corresponde a un punto $b \in OS$, se traza la recta pb. El punto de intersección entre pb y NM será el punto c que buscamos, es decir, $\{c\} = pb \cap NM$.

Si, en cambio, lo que tenemos es un punto $d \in NM$ y queremos encontrar el punto $e \in OS$ correspondiente, trazamos la recta pd. Así, la intersección entre pd y OS será el punto e que buscamos, es decir, $\{e\} = pd \cap OS$.

[5]El hecho de que $OS \subsetneq NM$ no necesariamente implica que la "medida" de OS sea menor que la "medida" de NM. Aquí no trataremos el problema de la medida, pero sí podemos *suponer* que el conjunto OS tiene una "medida" menor que la de NM, y esto claramente implica que $OS \subsetneq NM$.

Mediante este sistema de correspondencia, se puede ver que a cualquier punto de NM le corresponde uno de OS y viceversa, así que $|NM| = |OS|$, y como, por construcción, $OS \subsetneq NM$, tenemos que NM es un conjunto Dedekind-infinito.

Ahora veamos los ejemplos numéricos. Empezamos con $\mathbb{N}$. Lo que necesitamos demostrar es que existe un conjunto $B \subsetneq \mathbb{N}$ tal que $|B| = |\mathbb{N}|$, esto es que B y $\mathbb{N}$ tengan el mismo número de elementos.

Para esto, podemos usar lo que decía Galileo en boca de Salviati, o sea, poner en correspondencia a los naturales con sus cuadrados:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4...$

$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16...$

Que escrito formalmente es $f : \mathbb{N} \rightarrow B \subsetneq \mathbb{N}$, donde $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $f(n) = n^2$, y lo que queremos demostrar es que f es una biyección.

Entonces tenemos que demostrar dos cosas:

1) $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$, que es más fácil de demostrar si usamos la misma regla lógica de contraposición que usamos en el capítulo I, es decir, demostrar:

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Supongamos $f(n_1) = f(n_2)$. Entonces $n_1^2 = n_2^2$, y de aquí $n_1 = n_2$, pues estamos trabajando con números naturales.

2) $\forall x \in B$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = x$.

Si tomamos $x \in B$, por la definición de B, $x = n^2$ donde $n \in \mathbb{N}$. Consideremos n y apliquemos la función $f(n) = n^2 = x$, por lo que para cualquier $x \in B$ pasa que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = x$.

Y tomando 1) y 2), ya demostramos que f es una biyección entre B y $\mathbb{N}$; o sea, que $|B| = |\mathbb{N}|$.

También hay que demostrar que $B \neq \mathbb{N}$, pero eso es claro, pues lo único que tenemos que hacer es dar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \notin B$, por ejemplo $n = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 \ldots$.

Con esto, se cumplen los requisitos de la definición de conjunto Dedekind-infinito, por lo que tenemos nuestro primer conjunto numérico infinito: los números naturales.

Entonces $\mathbb{N}$ es infinito, pero $|B| = |\mathbb{N}|$ ¿Será cierto, entonces, que B es también Dedekind-infinito? ¿Y si sí es, el subconjunto con la misma cardinalidad sería, a su vez, Dedekind-infinito? ¿Cuándo acabará este proceso? ¿Acabará?

Veamos otro ejemplo: Los enteros.

Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow M \subsetneq \mathbb{Z}$, con $M = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, es decir, M es el conjunto de los enteros pares. Hay que demostrar que $f(n) = 2n$ es una biyección.

1) $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$, o, como en el ejemplo anterior, basta demostrar que $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$.

Supongamos $f(n_1) = f(n_2)$. Entonces, $2n_1 = 2n_2$, entonces, $n_1 = n_2$.

2) $\forall x \in M \ \ \exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = x$.

Si tomamos $x \in M$, por la definición de M, $x = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Consideramos n y aplicamos la función $f(n) = 2n$, o sea, $f(n) = x$, por lo que para toda $x \in M$ existe una $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = x$.

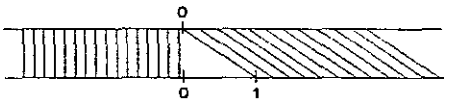
Y tomando 1) y 2), demostramos que f es una biyección entre $\mathbb{Z}$ y M, o sea, que $|M| = |\mathbb{Z}|$.

Ahora necesitamos demostrar que $\mathbb{Z} \neq M$, pero como $3 \in \mathbb{Z}$ y $3 \notin M$, entonces son distintos.

Así, tenemos también que $\mathbb{Z}$ es Dedekind infinito.

Un ejemplo con una función un poco más complicada es el de los números racionales; aunque sólo es cuestión de poner un poco más de atención en los argumentos.

Sea $f : \mathbb{Q} \to T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin [0,1)\}$, definida de la siguiente manera: Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x + 1$ y si $x < 0$, entonces $f(x) = x$.



Hay que demostrar que $f : \mathbb{Q} \to T$ es una biyección.

1)$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. La demostración tiene que ser por casos:

a) $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Como en las demostraciones anteriores, es más fácil demostrar $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$f(x_1) = x_1 + 1 = x_2 + 1 = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

b) $x_1 < 0$ y $x_2 < 0$. La demostración es trivial:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) $x_1 \geq 0$ y $x_2 < 0$ (o, de la misma manera, si $x_1 < 0$ y $x_2 \geq 0$)

Como $x_2 \neq x_1$ y además $x_2 < 0 \leq x_1$, entonces $f(x_2) = x_2 < 0 \leq x_1 < x_1 + 1 = f(x_1)$, así que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Y con estos tres casos queda demostrada la primera condición de la biyección; ahora veamos la segunda:

2) $\forall t \in T \quad \exists x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = t$; que otra vez haremos por casos.

a) Sea $t \in T$ y $t \geq 1$.

Como $t \in T$, sabemos también que $t \in \mathbb{Q}$, entonces $t - 1 \in \mathbb{Q}$.

Sea $x = t - 1 \Rightarrow x \geq 0$, pues $t \geq 1 \Rightarrow t - 1 \geq 0$, de donde

$$f(x) = f(t-1) = t - 1 + 1 = t$$

por lo que $\exists x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = t$.

b) Sea $t \in T$ y $t < 0$.

Como $t \in T$, sabemos también que $t \in \mathbb{Q}$, entonces $f(t) = t$, por lo que $\exists x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = t$.

Y con estos dos casos demostramos la segunda condición de la biyección y, por lo tanto, tenemos que f es una biyección.

Con eso, tenemos que $|\mathbb{Q}| = |T|$, pero necesitamos mostrar un $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \notin T$.

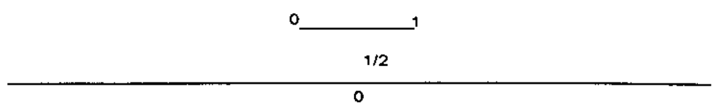
Tomemos $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, pero $\frac{1}{2} \notin T$, entonces $\mathbb{Q} \neq T$, por lo tanto $\mathbb{Q}$ es Dedekind-infinito.

Veamos, ahora, un último ejemplo numérico: los números reales.

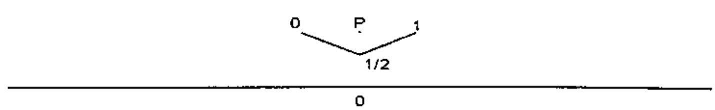
Necesitamos encontrar $S \subsetneq \mathbb{R}$ tal que $|S| = |\mathbb{R}|$, es decir, demostrar que hay una función $f : S \to \mathbb{R}$ que es una biyección.

Tomemos $S = (0,1)$; así, lo que vamos a demostrar es $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$. Y, esta vez, regresaremos a un método geométrico parecido al que utilizamos para demostrar que el segmento NM era un conjunto Dedekind-infinito.

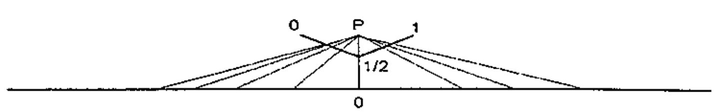
Duplicamos el intervalo $(0,1)$ y lo dibujamos de esta forma:



Como la recta real es infinita, no podemos unir sus "extremos" izquierdo y derecho con los extremos 0 y 1 del intervalo $(0,1)$, respectivamente; así que haremos un pequeño "truco": *doblamos hacia arriba* el segmento $(0,1)$ justo por el $\frac{1}{2}$ y llamamos P al punto que queda a la altura de los extremos del segmento y justo arriba del $\frac{1}{2}$, es decir:



La biyección f que estamos buscando son las rectas que pasan por P y que intersectan al intervalo $(0,1)$ y a la recta real.



Así, por ejemplo, el punto $\frac{1}{2} \in S$ está asignado al punto $0 \in \mathbb{R}$. Y cualquier punto de S está asignado a un solo punto de $\mathbb{R}$ y viceversa, pues dos puntos determinan una única recta y es el mismo caso que el segmento NM que vimos antes.

La única diferencia es que aquí uno de los dos segmentos no es finito en longitud, pero no importa, pues mientras más cercano esté un punto al extremo 0 de S, el correspondiente punto de la recta real estará más cerca del $-\infty$.

Y, sólo como una analogía, la recta que pasa por P y por el extremo 0 de S, correspondería al extremo $-\infty$ de $\mathbb{R}$, pero dicha recta ya no es parte de nuestra biyección, pues $0 \notin S$, ya que S es un intervalo abierto, y $-\infty \notin \mathbb{R}$, ya que $-\infty$ no es un número real.

Y con esto, demostramos que $|S| = |\mathbb{R}|$. Ahora sólo nos falta mostrar un elemento de $\mathbb{R}$ que no pertenezca a S, pero eso es muy fácil: $2 \in \mathbb{R}$ y $2 \notin S$, por lo que los reales también son un conjunto Dedekind-infinito.

Bueno, ahora, después de estos ejemplos tan formales de conjuntos Dedekind-infinitos, viene la historia del *Gran Hotel Cantor*, que, como pueden imaginarse por estar incluido en este capítulo, es un hotel Dedekind-infinito.

La historia empezó cualquier día de un año perdido en el pasado, cuando dos arquitectos ambiciosos planeaban construir un hotel muy grande.

-¿Qué te parece si construimos un hotel con 1,000 habitaciones?

-No, porque si alguien construyera uno de 2,000 habitaciones, nuestro hotel ya no sería tan grande. Mejor hagámoslo de 10,000.

-Pero podría ser que alguien construyera uno de 20,000 y volveríamos a quedarnos con un hotel pequeño. Construyamos un hotel con 1,000,000 de habitaciones, ése sería un hotel grande.

-Y qué tal si alguien construye uno con...

Y, así, siguieron discutiendo por horas, hasta llegar a la conclusión de que la única manera de construir un hotel muy grande, tanto que ningún otro hotel pudiera ser más grande, era construyendo uno que tuviera un número infinito de habitaciones.

La obra duró muchos años, pero al final, ahí estaba: el *Gran Hotel Cantor*.

En poco tiempo, el hotel obtuvo fama no sólo por ser el hotel más grande del mundo, sino, también, por ser uno de los lugares más extravagantes para vacacionar. Gente de todo el mundo llegaba al hotel para hospedarse aunque fuera sólo una noche.

Aunque parezca increíble, había días en que el hotel estaba lleno. Sin embargo, seguía entrando gente que no salía a los pocos minutos decepcionada por no encontrar habitación disponible.

Quizás se pregunten por qué sé tanto del *Gran Hotel Cantor*, pero no es ningún misterio: mi papá trabajó ahí durante algunos años; era el recepcionista.

Le encantaba contarme historias de la gente que llegaba al hotel; sin embargo, su historia favorita era la de la noche en que se volvió millonario. Creo que yo la escuché doscientas veces por lo menos y, gracias a eso, puedo contarla ahora con tanta claridad.

Lo primero en la historia era la regla principal para los huespedes: *Si una persona decide quedarse en el hotel, debe aceptar el hecho de que pueda ser transferida de habitación una o varias veces a lo largo de su estancia.* Luego empezaba a contar la parte que a mí me gustaba más:

Era uno de esos días en que el hotel estaba lleno. En esos días me gustaba pensar en las historias de la gente que se quedaba en el hotel (yo debo confesar que nunca pude imaginarme el hotel lleno, pero yo le creía a mi papá; además, éramos millonarios y nunca encontré ninguna otra razón que explicara ese hecho).

En el curso de entrenamiento para los trabajadores, nos habían enseñado algunos trucos para aceptar más gente cuando el hotel estuviera lleno.

-Ay, papá ¿a poco metías gente en un cuarto que ya estaba ocupado? (A mi papá le gustaba que le preguntáramos siempre lo mismo, como si fuera la primera vez que nos contaba la historia.)

-No, claro que no. Déjame contar la historia completa para que veas lo que hacía.

Bueno, el hotel, como dije, estaba lleno ese día. A media tarde, llegó un señor a pedir un cuarto. Normalmente, cuando el hotel estaba lleno, cobrábamos un poco más caro, pues había que compensar de alguna manera la molestia que representaba un cambio de habitación.

Al informarle esto, el señor me dijo que no importaba, pero que por favor le diera un cuarto en el primer piso, pues sufría de vértigo y tampoco aguantaba los elevadores.

-No se preocupe, señor; espere un momento, por favor.

*Éste era el primer truco que aprendí al llegar al hotel; cómo acomodar a un huesped si el hotel está lleno: En mi escritorio había un micrófono que se escuchaba en todas las habitaciones, el cual utilizaba para indicar los cambios de habitación (*lo del micrófono me lo sabía de memoria, pero él me lo repetía como si fuera su primer día en el trabajo y acabara de descubrirlo), *así que lo encendí para anunciar el primer cambio del día:*

-Buenas tardes, amables huéspedes del Gran Hotel Cantor. Disculpen las molestias que podamos causarles, pero necesitamos realizar una mudanza: Por favor revisen el número de su habitación, ahora súmenle uno y cámbiense a la habitación con el nuevo número. Muchas gracias y que pasen buena tarde.

-Señor, su habitación es la 1, por el pasillo a la derecha. Le recuerdo que su estancia en el hotel está sujeta a cambios de habitación, aunque trataré de mantenerlo en el primer piso, no se preocupe.

Y así ya había acomodado al nuevo visitante.

-Pero, papá, si todos le sumaron uno al número de su cuarto, entonces el que estaba en el último cuarto se quedó sin lugar.

-No, porque el hotel era infinito, no había último cuarto (tampoco esto lo entendía, pero él lo decía con tanta seguridad, que yo le creía).

Las agencias de viajes que reservaban lugar para grandes excursiones, tenían una hora específica de llegada: las 20 horas. A mí me gustaba atenderlos bien, así que todos los días, a las 19:30, revisaba si había alguna reservación y, en caso de que hubiera, dejaba las habitaciones disponibles para que los nuevos huéspedes no tuvieran que esperar.

Ese día había una reservación para una infinidad de personas, así que realicé la segunda mudanza del día y dejé libres las habitaciones que necesitaría.

-¿Cómo, papá? ¿No se suponía que el hotel tenía sólo una infinidad de cuartos? Tú ahora me dices que, en realidad, tenía dos infinidades.

-No, no, yo no dije eso.

-Pero si el hotel estaba lleno, o sea, había una infinidad de huéspedes, y llegó otra infinidad y tú los acomodaste a todos.

-Sí, así es; ése era el otro truco que nos habían enseñado, que en realidad no era muy complicado: lo que hice fue encender el micrófono y pedirle a los huéspedes que multiplicaran el número de su habitación por dos y se cambiaran al cuarto que tuviera el nuevo número. De esa manera, sólo estaban ocupadas las habitaciones de números pares y quedaban libres las de números impares, y cada una era una infinidad.

-Entonces sí había dos infinidades.

-Bueno, si lo quieres ver así...

A las 20 horas en punto, llegó la representante de la agencia de viajes y le indiqué las habitaciones que le correspondían. Desde ese momento, no hubo nada demasiado interesante que contar, hasta que se acercaba la hora de cerrar la recepción (las 22 horas). Eran las 21:53, me acuerdo bien, y yo estaba acomodando todo para irme, cuando entró una señorita con cara de preocupación.

-Buenas noches, señorita ¿en qué puedo ayudarla?

-Tengo un problema grandísimo: Se me juntaron una infinidad de excursiones con una infinidad de personas cada una y, por supuesto, no tengo dónde alojarlas. Yo sé que aquí es necesario reservar si la excursión es muy grande, pero esta vez es una emergencia.

-¿Así que una infinidad de excursiones y cada una con una infinidad de personas? Déjeme pensar si podría acomodarlos.

-Por favor, que si no me voy a quedar sin trabajo (a mi papá le encantaba hecerse el héroe cuando me contaba sus historias).

-Está bien, ya sé qué vamos a hacer, pero recuerde que cuando el hotel está lleno la tarifa es un poco más alta.

-Sí, sí, no se preocupe por eso; de hecho, hice una colecta de un peso por cada turista de las excursiones y ese fondo es para usted si me da las habitaciones (así fue que nos hicimos millonarios).

-Espere un momento, por favor.

Volví a encender el micrófono para anunciar la última mudanza del día, sólo que esta vez no me comuniqué con todas las habitaciones, sino sólo con las que estarían involucradas en el cambio.

-Pero ¿cómo, papá? ¿Tenías que meter una infinidad de infinidades de personas y ni siquiera usaste todas las habitaciones del hotel?

-Sí. Eso de GRAN Hotel Cantor no era nada más porque sí.

Bueno, encendí el micrófono de modo que sólo las habitaciones con número primo o alguna potencia de primo pudieran oírlo:

-Buenas noches, amables huéspedes del Gran Hotel Cantor. Disculpen las molestias que podamos causarles, pero necesitamos realizar una última mudanza esta noche. Les pedimos por favor que se acerquen a su puerta, donde encontrarán un cuadro con indicaciones sobre su número de habitación. Como pueden observar, el número de su habitación se puede escribir como un número elevado a alguna potencia, tal como se lee en el inciso c), es decir, "Su número de habitación es de la forma p^n*" y, en seguida, se da el número particular de cada habitación escrito de esa manera. La mudanza consiste en realizar la siguiente operación: si su cuarto es* p^n*, ahora, su nuevo cuarto será* p^{2n}*. Recuerden que para cualquier duda, pueden marcar al 00 para preguntar el nuevo número de su habitación. Gracias y buenas noches.*

En esos momentos era cuando más aliviado me sentía de ser recepcionista y no telefonista del hotel.

-Están listas, señorita. Sus habitaciones son todas las que tienen números que son potencias impares de números primos; aquí tiene una lista más detallada.

-Muchísimas gracias. Ahora, aquí tiene usted un cheque por la cantidad que juntamos entre nuestros turistas. Muchas gracias de nuevo.

-De nada, señorita, gracias a usted.

Y así fue que...

-No, no, no, espérate, papá. Explícame cómo cupieron todas esas personas en esos cuartos.

-Ah, pues muy fácil, fíjate: Hay una infinidad de números primos,[6] *así que a cada excursión le asigné un número primo. Después, cada primo tiene una infinidad de potencias impares,*[7] *así que en cada cuarto con número de potencia impar de cada número primo acomodé a una persona de cada excursión. Así cabían todos ¿ves?*

-Sí, ya vi. ¿Y como ya eras millonario, dejaste de trabajar ahí?

[6]Que los números primos sean infinitos es un teorema.

[7]Si p es un número primo, sus potencias impares son: $p, p^3, p^5, p^7, \ldots$

-No, seguí trabajando ahí durante tres años, me gustaba. Lo que pasó fue que hubo un complot de hoteleros para cerrar el Gran Hotel Cantor. Lo peor fue que no sólo lo cerraron, sino que, además, derribaron ese maravilloso edificio. Ni modo.

IV. ¿Infinitos de distintos tamaños?

Hasta ahora, sólo hemos visto algunos conjuntos infinitos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, pero no sabemos si todos estos conjuntos son iguales en tamaño o si uno es más grande que otro. En este capítulo vamos a hacer una serie de comparaciones entre distintos conjuntos infinitos a ver qué podemos aclarar sobre su "tamaño".

A diferencia del capítulo anterior, en este capítulo las demostraciones serán más intuitivas y no tan formales; sin embargo, esto no necesariamente quiere decir que serán más evidentes.

Intuitivamente, decir que si A y B son conjuntos y pasa que $|A| \leq |B|$, es decir que el número de elementos de A es menor o igual que el número de elementos de B. Más formalmente, lo que significa es que existe una función que va de A a B que, al menos, cumple con la primera condición de las biyecciones. Esa condición se llama ser "inyectiva". Algo que debemos tomar en cuenta para las siguientes demostraciones es esto:

Si A y B son conjuntos y pasa que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces resulta que $|A| = |B|$, es decir, que A y B tienen el mismo número de elementos.[8]

La primera comparación será entre los naturales y los enteros. ¿Será cierto que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$? ¿Qué nos dice la intuición? ¿Cuál conjunto tiene más elementos? Bueno, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N} \not\supseteq \mathbb{Z}$, así que podríamos pensar que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Z}|$. Pero qué pasa si damos este emparejamiento entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longleftrightarrow & \mathbb{Z} \\ \\ 0 & \longleftrightarrow & 0 \\ 1 & \longleftrightarrow & 1 \\ 2 & \longleftrightarrow & -1 \\ 3 & \longleftrightarrow & 2 \\ 4 & \longleftrightarrow & -2 \\ 5 & \longleftrightarrow & 3 \\ 6 & \longleftrightarrow & -3 \\ 7 & \longleftrightarrow & 4 \\ 8 & \longleftrightarrow & -4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

[8]Ésta es la propiedad de "antisimetría" del orden, y, en este caso, del orden entre tamaños Esta propiedad es conocida como como Teorema de Cantor-Shröder-Berstein.

Con esta regla de correspondencia podemos asignar un número natural a cada entero y viceversa. La función que describe este emparejamiento sería:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ si x es par, $f(x) = -\frac{x}{2}$ y si x es impar $f(x) = \frac{x+1}{2}$. [9]

Así que, si nuestra intuición dijo que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Z}|$, estaba equivocada, pues $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Quizá esto nos dice que debemos tener cuidado con la intuición cuando hablamos de conjuntos infinitos; o, más bien, que debemos adaptar nuestra intuición a las reglas que rigen en el mundo de estos conjuntos.

Aunque, si pensamos de nuevo en el *Gran Hotel Cantor*, no resulta ya tan sorprendente que los enteros y los naturales sean del mismo tamaño, pues podríamos acomodar a todos los enteros positivos en las habitaciones pares y a los enteros negativos en las habitaciones impares.

Pero ahora veamos lo que pasa entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ ¿Será que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$? Ya vimos que no basta saber que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \not\supseteq \mathbb{Q}$ para poder asegurar que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}|$, pero los racionales tienen una característica muy importante en relación con los naturales: entre dos números naturales hay una infinidad de números racionales. Esto se ve, por ejemplo, si tomamos 0 y1.

Entre 0 y1 está $\frac{1}{2}$, entre 0 y $\frac{1}{2}$ está $\frac{1}{4}$, entre 0 y $\frac{1}{4}$ está $\frac{1}{8}$ y así todos los números de la forma$\frac{1}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ [10] están entre 0 y1, y todos son racionales, pues son de la forma $\frac{p}{q}$, ya que 2^n con $n \in \mathbb{N}$ siempre es un número entero.

Entonces, si entre cada par de números naturales hay una infinidad de racionales ¿qué dice la intuición? ¿$|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}|$? Pues vamos a ver qué dicen los matemáticos:

Acomodaremos los números racionales de la siguiente manera: en el primer renglón pondremos todos los números racionales con denominador 1, es decir:

$$\cdots \frac{-4}{1} \quad \frac{-3}{1} \quad \frac{-2}{1} \quad \frac{-1}{1} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \cdots$$

[9] Aquí va la demostración para los que quieran ver que de veras esta función es una biyección:

1) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ó $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

i) x_1 y x_2 son pares. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -\frac{x_1}{2} = -\frac{x_2}{2}$, pues x_1 y x_2 son pares. Así, si multiplicamos por -2 de ambos lados de la igualdad, tenemos $x_1 = x_2$.

ii) x_1 y x_2 son impares. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{2} = \frac{x_2+1}{2}$, pues x_1 y x_2 son impares. Así, multiplicando por 2 y luego restando 1 de ambos lados de la igualdad, tenemos $x_1 = x_2$.

iii) x_1 par y x_2 impar. Claramente, $x_1 \neq x_2$. $f(x_1) = -\frac{x_1}{2}$ y $f(x_2) = \frac{x_2+1}{2}$, pues x_1 es par y x_2 es impar. Entonces, como $x_1 = 2n$ y $x_2 = 2m+1$ con m, $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{x_1}{2} = -\frac{2n}{2} = -n$ y $\frac{x_2+1}{2} = \frac{2m+1+1}{2} = \frac{2m+2}{2} = \frac{2(m+1)}{2} = m+1$. Entonces, $f(x_1) = -n \neq m+1 = f(x_2)$, pues como m, $n \in \mathbb{N}$, siempre pasa que $-n \neq m+1$.

2)Para toda $a \in \mathbb{Z}$ existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a$.

i)Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \leq 0$, entonces $-2a$ es par no negativo, o sea $-2a \in \mathbb{N}$ y es par, así que $f(-2a) = -\frac{-2a}{2} = a$.

ii)Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces $2a-1 \in \mathbb{N}$ y es impar, así que $f(2a-1) = \frac{2a-1+1}{2} = a$.

Así, tomando 1) y 2), podemos concluir que f es una biyección.

[10] Los números de la forma $\frac{1}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ son tantos como naturales hay, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ se encuentra un número $\frac{1}{2^n}$.

En el segundo renglón pondremos todos los racionales con denominador 2, es decir:

$$\cdots \frac{-4}{2} \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-2}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2} \cdots$$

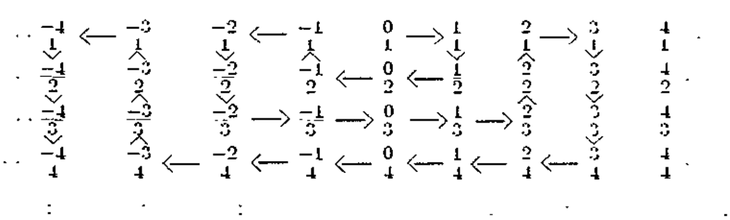
Y así con todos los renglones para cada número natural en el denominador. De esta manera tendremos un acomodo donde están todos los números racionales:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \frac{-4}{1} & \frac{-3}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \cdots \\
\cdots \frac{-4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \cdots \\
\cdots \frac{-4}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \cdots \\
\cdots \frac{-4}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Ahora lo que queremos es contarlos a todos, es decir, asignar a cada número racional un número natural. El problema es encontrar una manera de contarlos que nos permita incluirlos a todos antes de que "se nos acaben" los números naturales.

Si empezáramos a contar, por ejemplo, todos los racionales del primer renglón, nos "acabaríamos" los naturales sólo en ese renglón. Lo mismo pasaría si intentáramos contar primero los racionales de una de las columnas.

Entonces, si con un solo renglón o una sola columna nos "acabamos" los naturales, parece imposible que contemos todos los números del acomodo usando sólo los naturales ¿no? Al menos eso diría nuestra intuición, pero qué pasa si contamos segun nos indica este dibujo:



Así, contamos según nos indiquen las flechas (AMOR Montaño, José Alfredo. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, p.70):

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \longleftrightarrow & \mathbb{Q} \\
0 & \longleftrightarrow & \frac{0}{1} \\
1 & \longleftrightarrow & \frac{1}{1} \\
2 & \longleftrightarrow & \frac{1}{2} \\
3 & \longleftrightarrow & \frac{0}{2} \\
4 & \longleftrightarrow & \frac{-1}{2} \\
5 & \longleftrightarrow & \frac{-1}{1} \\
6 & \longleftrightarrow & \frac{-2}{1} \\
7 & \longleftrightarrow & \frac{-2}{2} \\
8 & \longleftrightarrow & \frac{-2}{3} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Y con esta especie de espiral podremos asignar un número natural a cada uno de los números racionales del acomodo, incluyéndolos a todos. De hecho, si observamos detenidamente, con esta forma de contar a los racionales, habría más naturales que racionales, pues contamos muchas veces el mismo número con diferentes nombres: $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} \cdots$ ó $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \cdots$

¿Entonces $|\mathbb{N}| > |\mathbb{Q}|$? No, en realidad, de este emparejamiento obtenemos $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$, pero como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ obtenemos $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ y, entonces, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.[11]

[11]Charles Sanders Peirce (*Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard University Press, p.578 - 580) propone otro método para contar los racionales positivos:

Empieza con las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$ (aunque la segunda no sea propiamente fracción, pues no está definida, es sólo un truco). Suma los dos numeradores y los dos denominadores para formar una nueva fracción: $\frac{1}{1}$ y la coloca de la siguiente manera:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Se repite la operación entre fracciones adyacentes para obtener nuevas fracciones que se colocan entre ellas:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0}$$

El siguiente paso quedaria así:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Y así se sigue. La forma de contar es según vayan apareciendo de izquierda a derecha, así:

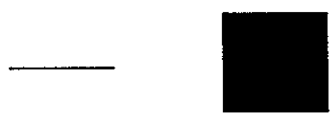
$$0 \leftrightarrow \tfrac{0}{1}, 1 \leftrightarrow \tfrac{1}{1}, 2 \leftrightarrow \tfrac{1}{2}, 3 \leftrightarrow \tfrac{2}{1}, 4 \leftrightarrow \tfrac{1}{3}, 5 \leftrightarrow \tfrac{2}{3}, 6 \leftrightarrow \tfrac{3}{2}, 7 \leftrightarrow \tfrac{3}{1}, \cdots$$

En esta lista no aparecen fracciones equivalentes, por lo cual se sigue directamente que hay tantos racionales positivos como enteros positivos.(GARDNER, Martin. *Carnaval matemático*, p.37-38)

Falló de nuevo la intuición, aunque si pensamos nuevamente en el *Gran Hotel Cantor*, podríamos acomodar cada columna del acomodo en cada serie de habitaciones de potencias de primos, que ya sabemos que son una infinidad de primos y una infinidad de potencias de primos, o sea, una infinidad de renglones y una infinidad de columnas.

Este último ejemplo es realmente impresionante, ya que entre cada par de números naturales hay una infinidad de números racionales. Es más, entre cada par de racionales que estén entre dos naturales podemos encontrar una infinidad de racionales más: por ejemplo, entre 1 y 2 están $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{4}$ y entre ellos está $\frac{13}{8}$ (que es la mitad de la suma de $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{4}$). Así, $\frac{3}{2} < \frac{13}{8} < \frac{7}{4}$, y entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{13}{8}$ está la mitad de su suma, que es $\frac{25}{16}$; es decir, $\frac{3}{2} < \frac{25}{16} < \frac{13}{8}$, y podríamos seguir indefinidamente. Y aun así, resulta que al final hay tantos números naturales como racionales. ¿Será entonces que sólo hay un tamaño de conjuntos infinitos?

Se me ocurre otra idea: ¿Habrá tantos puntos en el lado de un cuadrado como en todo el cuadrado relleno? Es decir ¿en cuál de estos dos conjuntos hay más puntos?:



Esto es equivalente a ver cuál entre $|(0,1]|$ y $|\ (0,1] \times (0,1]|$ es mayor, donde $(0,1]$ son todos los números reales que hay entre 0 y 1, incluído el 1. Dichos números se pueden escribir en expansión decimal de la siguiente manera:

$$0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$$

donde los a_n son elementos de $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $(0,1] \times (0,1]$ son los puntos del plano cartesiano que están en el cuadrado relleno con vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, incluyendo las orillas derecha y superior y sin incluir las orillas izquierda e inferior, y son los puntos de la siguiente forma:

$$(0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots, 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots)$$

donde los b_n y los c_n son elementos de A.

Como lo que queremos ver es que hay tantos racionales (positivos y negativos) como naturales, podemos hacer el mismo emparejamiento entre los racionales negativos y los enteros negativos:

$$-1 \leftrightarrow -\tfrac{1}{1},\ -2 \leftrightarrow -\tfrac{1}{2},\ -3 \leftrightarrow -\tfrac{2}{1},\ -4 \leftrightarrow -\tfrac{1}{3},\ -5 \leftrightarrow -\tfrac{2}{3},\ -6 \leftrightarrow -\tfrac{3}{2},\ -7 \leftrightarrow -\tfrac{3}{1},\ \cdots$$

Con esto, tendríamos que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$, pero por otro lado ya teníamos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Entonces, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$ y $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ implica $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Como se podrán imaginar, lo que voy a demostrar es que

$$|(0,1]| = |(0,1] \times (0,1]|$$

para lo que necesitamos unos pequeños cambios:

1) No se valen las representaciones de los números en las que a partir del punto decimal o a partir de una n en adelante todos los a_n, b_n o c_n sean 0, es decir cosas como ésta:

$$0.250000000\ldots$$

en lugar de eso, escribiremos $0.249999999\ldots$, que es lo mismo que restar 1 al último $a_n \neq 0$ y cambiar por 9 todos los 0 de la cola.

2) No habrá $a_n = 0$, sino que cada vez que aparezcan ceros en la expansión decimal, agruparemos en un solo a_n a todos los ceros que aparezcan juntos y al siguiente número distinto de 0, o sea:

Si tuvieramos $0.020040003\ldots$

Normalmente tendríamos: $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 4$, $a_6 = 0$, $a_7 = 0$, $a_8 = 0$, $a_9 = 3$, ...

Lo que tendremos con esta regla será: $a_1 = 02$, $a_2 = 004$, $a_3 = 0003$, ...

Bueno, con estas aclaraciones el conjunto A quedaría distinto:

$$A = \{1,2,\ldots,9,01,02,\ldots,09,001,002,\ldots,009,0001,0002,\ldots,0009,\ldots\}$$

(En A están todos los dígitos menos el 0 y todas las posibilidades finitas de ceros anteriores a un dígito distinto de 0), pero nuestra definición de números en $(0,1]$ y en $(0,1] \times (0,1]$ seguirá siendo la misma.

Ahora sí va la demostración. Lo que necesitamos para demostrar que $|(0,1]| = |(0,1] \times (0,1]|$ es una función biyectiva que nos describa el emparejamiento entre los dos conjuntos. Esa función será la siguiente:

Si tenemos $r \in (0,1]$, será de la siguiente forma: $r = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$. Si aplicamos la función a r, debemos obtener un punto $f(r)$ de la forma:

$$f(r) = (0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots, 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots)$$

Así, si $r = 0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$, $f(r)$ será:

$$f(r) = (0.a_1a_3a_5\ldots, 0.a_2a_4a_6\ldots)$$

o sea, los a_n tales que n es par, son los que se convertirán en b_n y los a_n tales que n es impar, son los que se convertirán en c_n, por ejemplo:

$$r = 0.81043252520052\ldots$$

$$f(r) = (0.8042222\ldots .0.1355005\ldots)$$

ya que $a_1 = 8$, $a_2 = 1$, $a_3 = 04$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$, $a_6 = 5$, $a_7 = 2$, $a_8 = 5$, $a_9 = 2$, $a_{10} = 005$, $a_{11} = 2$, ...

Ahora veamos que esta función es, en realidad, una biyección:

1)Si tengo $r_1 \neq r_2$, quiere decir que serán distintos en al menos un a_n y, por lo tanto $f(r_1)$ y $f(r_2)$ serán distintos en al menos un b_n o un c_n, por ejemplo:

$$\text{Si } r_1 = 0.2432310400231\ldots \text{ entonces } a_6 = 1$$
$$\text{y } r_2 = 0.2432330400231\ldots \text{ entonces } a_6 = 3$$

$$\text{como } f(r_1) = (0.233043\ldots, 0.4210021\ldots) \text{ entonces } c_3 = 1$$
$$\text{como } f(r_2) = (0.233043\ldots, 0.4230021\ldots) \text{ entonces } c_3 = 3$$

En general, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow f(r_1) \neq f(r_2)$.[12]

2) Cualquier número del $(0,1] \times (0,1]$ de la forma

$$(0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots, 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots)$$

viene de aplicarle la función a un número del $(0,1]$ de la forma

$$0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$$

Esto es muy fácil, pues sólo tenemos que tomar el número

$$0.b_1c_1b_2c_2b_3c_3b_4c_4b_5c_5b_6c_6\ldots$$

y aplicar la función a

$$r = 0.b_1c_1b_2c_2b_3c_3b_4c_4b_5c_5b_6c_6\ldots$$
$$f(r) = (0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots, 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots)$$

Así que tenemos una función biyectiva entre $(0,1]$ y $(0,1] \times (0,1]$, lo que nos indica que $|(0,1]| = |(0,1] \times (0,1]|$[13], que traducido al español quiere decir que hay el mismo número de puntos en un cuadrado relleno que en sólo uno de sus lados. Pero eso, que ya por sí mismo es sorprendente, resulta aún más sorprendente si tomamos en cuenta lo siguiente: Si en vez de separar los

[12]Aquí es donde utilizamos las dos restricciones sobre la expansión decimal, porque si no, llamando g a la función que no cumpliera las restricciones, podrían pasar cosas como éstas:

$r_1 = 0.2320202020\ldots$

$g(r_1) = (0.22222\ldots, 0.30000\ldots)$

$r_2 = 0.2229292929\ldots$

$g(r_2) = (0.22222\ldots, 0.29999\ldots)$

pero $0.30000\ldots = 0.29999\ldots$, lo cual nos lleva a que la función no sea inyectiva, es decir que podría pasar que $r_1 \neq r_2$ y $g(r_1) = g(r_2)$.

Con las restricciones tenemos $f(r_1) \neq f(r_2)$:

$f(r_1) = (0.22020\ldots, 0.30202\ldots)$

$f(r_2) = (0.22222\ldots, 0.29999\ldots)$

[13]Georg Cantor, que fue el primero en dar esta demostración, escribió una carta a su colega Richard Dedekind en la que, después de escribir la demostración, decía: ¡Lo veo y no lo creo! (DAUBEN, Joseph Warren. *Georg Cantor: His matehmatics and philosophy of the infinite*, p.47)

a_n en dos grupos los separamos en 3, entonces resulta que un cubo relleno tiene el mismo número de puntos que sólo uno de sus lados. Y lo mismo pasa para cubos de 4, 5, 6, 7, ... ó n dimensiones, aunque esos sean mucho más difíciles de imaginar. Sorprendente ¿no? Pobrecita de nuestra intuición que no le atina a nada. Con esto nos damos cuenta que la dimensión es irrelevante para la cantidad.

Bueno, pues todo parece indicar que no hay conjuntos infinitos de distintos tamaños, al menos no en los ejemplos que hemos visto. Sin embargo, entre esos ejemplos no está la comaparación entre los números naturales y los reales, es decir ¿$|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$?

Como vimos en el capítulo anterior, $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$, por lo tanto, podemos ver si $|(0,1)| = |\mathbb{N}|$ o no, en vez de trabajar con todos los reales.

Ya sabemos que los números entre 0 y 1 se pueden escribir en su expansión decimal:

$$0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$$

donde a_i está en $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, y también suponemos que no hay colas infinitas de 0.

Vamos a suponer que $|(0,1)| = |\mathbb{N}|$, a ver qué pasa. Esto quiere decir que hay un emparejamiento entre los naturales y los números reales entre 0 y 1, o sea, que se puede dar una lista en la cual a cada natural le corresponda un número real del $(0,1)$ y viceversa y en la cual estén todos los naturales y todos los números del $(0,1)$.

Para dar esta lista, habrá que distinguir entre un número en expansión decimal y otro; por lo tanto, haremos lo siguiente: Si tenemos el número $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$ en la lista y el número natural que le corresponde en el emparejamiento es el 3, por ejemplo, entonces a ese número lo escribiremos de la siguiente manera: $0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots$, así, si ya hemos asignado un natural a cada real entre 0 y 1, la lista nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
\mathbb{N} \to (0,1)\\
\ 1 \to 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots\\
\ 2 \to 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots\\
\ 3 \to 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots\\
\ 4 \to 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\ldots\\
\ 5 \to 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\ldots\\
\ 6 \to 0.a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\ldots\\
\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{array}$$

Nuestra suposición fue que esta lista era el resultado de una biyección, por lo tanto cada natural está emparejado con un número en $(0,1)$ e, inversamente, todo número en $(0,1)$ está emparejado con un número natural, pero veamos qué pasa si construyo el número $b \in (0,1)$ de la siguiente manera:

Me fijo en el a_{11}, si $a_{11} = 5$ entonces $b_1 = 7$; y si $a_{11} \neq 5$ entonces $b_1 = 5$. Me fijo ahora en el a_{22}, si $a_{22} = 5$ entonces $b_2 = 7$; y si $a_{22} \neq 5$ entonces $b_2 = 5$; y así con todos los a_{ii} de la lista, si $a_{ii} = 5$ entonces $b_i = 7$; y si $a_{ii} \neq 5$ entonces $b_i = 5$.

El número $b = 0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$ es un número en $(0,1)$, pero no está en la lista, pues b es distinto del primer número de la lista en el primer dígito ($b_1 \neq a_{11}$); es distinto del segundo número en el segundo dígito ($b_2 \neq a_{22}$), y así, es distinto de cualquier número de la lista en al menos un dígito, pues es distinto del i-ésimo número en su i-ésimo dígito ($b_i \neq a_{ii}$), por lo tanto no era cierto que estuvieran todos los números del $(0,1)$ en el emparejamiento. Y como esto sucede para cualquier intento de emparejamiento entre $(0,1)$ y $\mathbb{N}$, quiere decir que hay una contradicción al haber supuesto que:

$|(0,1)| = |\mathbb{N}|$, por lo tanto, $|(0,1)| \neq |\mathbb{N}|$. Pero como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, tenemos $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}| = |(0,1)|$, es decir, $|\mathbb{N}| \leq |(0,1)|$. Pero si tenemos $|\mathbb{N}| \leq |(0,1)|$ y $|(0,1)| \neq |\mathbb{N}|$, obtenemos $|(0,1)| > |\mathbb{N}|$.

Así que sí hay conjuntos infinitos de distintos tamaños. De hecho, no sólo hay dos tipos de conjuntos infinitos de distinto tamaño ($|\mathbb{N}|$, $|\mathbb{Z}|$,$|\mathbb{Q}|$ por un lado y$|\mathbb{R}|$ por el otro), sino que hay una infinidad de conjuntos infinitos de distintos tamaños .

Para demostrar que, en efecto, hay una infinidad de conjuntos infinitos de distintos tamaños, vamos a definir *el conjunto potencia*:

Si A es un conjunto cualquiera, entonces el conjunto potencia de A (al que denotaremos $P(A)$) es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Por ejemplo, si $A = \{m, n, p\}$, entonces

$$P(A) = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m,n\}, \{m,p\}, \{n,p\}, \{m,n,p\}\}$$

Es importante saber que tanto el conjunto vacío como A siempre son subconjuntos de A.

Podemos ver que $|A| \leq |P(A)|$, pues es fácil dar una función

$$g : A \to P(A)$$

que cumpla con ser inyectiva: por ejemplo, para todo $x \in A$, $g(x) = \{x\}$ y $\{x\} \subseteq A$, por lo tanto $\{x\} \in P(A)$. Claramente, si $x \neq y$, entonces $g(x) = \{x\} \neq \{y\} = g(y)$.

Ahora, lo que queremos es ver qué pasa con $|A|$ y $|P(A)|$, es decir, queremos saber si existe o no una biyección entre A y $P(A)$ y, así, poder concluir que $|A| = |P(A)|$ o que $|A| < |P(A)|$.

Para cualquier función $f : A \to P(A)$ podemos construir un conjunto $C = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$; es decir, un conjunto cuyos elementos estén en A, pero no estén en el conjunto al que están asignados ellos mismos bajo la función f.

Esto nos garantiza que $C \subseteq A$, pues todos los elementos de C también son elementos de A y, por lo tanto, $C \in P(A)$, pues C es subconjunto de A.

Como queremos que f sea una biyección, tendría que cumplir la segunda condición de las biyecciones, o sea, que cualquier elemento del contradominio $(P(A))$, está asignado a un elemento del dominio (A). Pero veamos qué pasa con el conjunto $C \in P(A)$:

Si f es una biyección, entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = C$. Ahora bien:

Si $x \in C$, entonces, por definición de C, $x \notin f(x)$ y, como $f(x) = C$, tenemos que $x \notin C$.

Si $x \notin C$, entonces no cumple la propiedad que define a C, es decir $x \in f(x)$, pero $f(x) = C$, de donde $x \in C$.

Y así, tenemos que $x \in C$ si y sólo si $x \notin C$, lo cual es equivalente a decir $x \in C$ y $x \notin C$.

No puede pasar que x pertenezca y no pertenezca a un conjunto al mismo tiempo, lo que nos lleva a una contradicción con la suposición de que f podía ser una biyección. Y como, además, esto sucede para cualquier f que demos, podemos concluir que no existe una biyección entre A y $P(A)$ y, por lo tanto, que $|A| \neq |P(A)|$, dejando como única opción, entonces, que $|A| < |P(A)|$. A este resultado se le conoce como Teorema de Cantor, pues fue él quien lo demostró.

Y con el Teorema de Cantor ya podemos garantizar que siempre que tengamos un conjunto A, podremos construir un conjunto "más grande" $(P(A))$ y, si A es un conjunto infinito, entonces $P(A)$ será un conjunto infinito "más grande".

Entonces, ya vimos que sí hay conjuntos infinitos de distinto tamaño, pero así como entre los conjuntos finitos había muchos con la misma cardinalidad (o sea, que tenían el mismo número de elementos), entre los conjuntos infinitos pasa lo mismo. Y así como para los conjuntos finitos existe el *catálogo de números* para saber cuántos elementos tiene cada conjunto, para los conjuntos infinitos también hay un *catálogo*: el *catálogoII*, donde están los números infinitos, que en matemáticas se llaman transfinitos[14].

Georg Cantor fue quien definió este tipo de números. Al primer número transfinito lo llamó aleph cero ($\aleph_0$). El nombre viene de $\aleph$ (aleph), que es la primera letra del alfabeto hebreo y quiere decir Dios, uno, silencio e infinito, y el subíndice 0 quiere decir que es el primero y más chico de los transfinitos, tal como 0 es el primero y más chico de los naturales, o números finitos.

Definir los números transfinitos es un tema que ocuparía casi otro libro completo, y es poco útil para nosotros, así que no lo haré.[15] Sólo diré que $\aleph_0$ es el tamaño de cada conjunto que puede emparejarse con los números naturales. O sea:

$\aleph_0 = |\{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}|$

Después de $\aleph_0$, siguen $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3 \ldots$, $\aleph_n$, $\aleph_{n+1}, \ldots$, $\aleph_{\aleph_0}, \ldots$ y así indefinidamente.

[14]Transfinito viene de *trans:* más allá y de finito, o sea, más allá de lo finito.

[15]Un libro en el que se puede ver la definición de los números transfinitos es *Teoría intuitiva de los conjuntos* de Paul Richard Halmos.

Como en realidad $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, también $\aleph_0 = |\mathbb{Z}|$ y $\aleph_0 = |\mathbb{Q}|$. Pero sabemos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, entonces es claro que $\aleph_0 \neq |\mathbb{R}|$. Eso quiere decir que $|\mathbb{R}| \geq \aleph_1$; sin embargo, no se puede saber exactamente qué $\aleph$ del *catálogo II* corresponde a $|\mathbb{R}|$, pues los números reales no pueden contarse; y este problema, conocido como el *Problema del Continuo* ha generado gran controversia entre los matemáticos. Una *posible respuesta* a este problema, propuesta por el mismo Georg Cantor, es la conocida como *Hipótesis del continuo*: $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$, pero más adelante veremos el porqué de las cursivas en las palabras "posible respuesta". Desde luego, otra *posible respuesta* al problema es la negación de la *Hipótesis del Continuo*: $\aleph_1 \neq |\mathbb{R}|$, o sea $|\mathbb{R}| > \aleph_1$.

En otras palabras, lo que quiere decir la *Hipótesis del Continuo* ($\aleph_1 = |\mathbb{R}|$) es que entre el tamaño de los números naturales y el tamaño de los números reales no hay ningún otro tamaño intermedio, pues entre los números transfinitos $\aleph_0$ y $\aleph_1$ no hay otro número transfinito,[16] como entre 0 y 1 no hay otro número natural.

Mientras que la negación de la *Hipótesis del Continuo* ($\aleph_1 \neq |\mathbb{R}|$ o $|\mathbb{R}| > \aleph_1$) quiere decir que entre el tamaño de los naturales y el de los reales puede haber uno, varios o muchísimos tamaños intermedios, pues mientras el transfinito que corresponde al tamaño de los naturales es $\aleph_0$, el transfinito que corresponde a los reales podría ser casi cualquier $\aleph_n$ si $n > 1$.

Por lo pronto, para acabar este capítulo, tenemos conclusiones importantes: sí existen infinitos de distinto tamaño (tantos que son una cantidad infinita e ilimitada de tamaños) y también existe un *catálogo* para los números infinitos (el *catálogo II*).

[16] $\aleph_1$ es el número transfinito sucesor de $\aleph_0$ (o, de otra manera, $\aleph_1$ es el menor de los números transfinitos mayores que $\aleph_0$

V. Axiomas de la teoría de conjuntos (o las reglas del juego)

Todos sabemos que para poder jugar un juego, primero necesitamos saber las reglas, pero ¿alguna vez se han preguntado cómo se inventa un juego? ¿de dónde salen las reglas? ¿o cómo le hacen los inventores de cada juego para que sus reglas sean justo las necesarias, ni más ni menos?

Bueno, pues no es una cosa tan sencillita como parece: primero, se debe tener una idea sobre aquello de lo que se va a tratar el nuevo juego y más o menos cómo jugarlo (quizás suene absurdo "tener una idea de cómo jugarlo" si aún no se han inventado las reglas, pero, por decirlo de algún modo, ésa es una primera regla indispensable. Es como empezar a jugar un juego no inventado, del que sólo tenemos algunas ideas, pero jugándolo podemos "descubrir" o "inventar" las reglas que hagan falta). Esto incluye pensar si se va a jugar con fichas, con dados, con barajas, en una cancha o, si es un juego de computadora, quiénes serán los protagonistas, cuántas *vidas* van a tener, cuántos *niveles*, etc.

En la siguiente etapa de invención, se deben tener ya las reglas básicas y más generales: qué quiere decir ganar o perder (si es que se trata de ganar o perder); cómo se gana y cómo se pierde; cómo se hacen puntos; cuántos participantes pueden (o deben) jugar; cuál es el orden de los jugadores (si es que lo hay); si se juega contra el reloj, etc.

Y bueno, con esto ya casi tendríamos un nuevo juego y, la verdad, tampoco parece tan complicado. Claro, tenemos las reglas básicas y la idea principal sobre el *chiste* del juego, pero con sólo estas dos etapas de la invención, la variedad de juegos sería realmente poca ¿o no? La verdadera diferencia entre juegos no está en los detalles de sus reglas más generales: por ejemplo, da lo mismo jugar con fichas redondas o cuadradas a menos que las reglas hagan una diferencia explícita entre unas y otras.

En esta etapa de la invención es cuando realmente se establecen las reglas importantes de un juego. Sin embargo, suena increíblemente difícil ponerse a pensar en todos los "¿y qué pasa si...?" que pudieran aparecer en un juego. ¿Qué hacen entonces los creadores de los juegos? Fácil: con las reglas básicas y la idea de lo que se trata el juego, ponen a otros a jugarlo y observan a ver qué va pasando. Aquí el objetivo es poner a prueba el juego; jugarlo lo más posible.

Cuando estos jugadores llegan a una situación no contemplada por las reglas básicas y que, al parecer, no tiene salida posible dentro del juego, van con el inventor y se lo dicen. Justo esas situaciones son las que él está buscando, para saber cuáles reglas necesita el juego para cumplir su cometido: primero, que tenga coherencia y se pueda *jugar hasta el final* y, segundo, que siga siendo interesante y divertido, es decir, que genere *retos* para los jugadores y que no sea más complicado de lo necesario.

Pero ¿cómo se logra eso? Pues, después de tener a muchos jugadores durante algún tiempo diciéndole qué problemas encontraron, el inventor reúne todos los problemas y busca todas las soluciones posibles. Es claro que si cada solución particular se convierte en una regla, será prácticamente imposible aprendérselas y jugar; entonces, lo que hace es encontrar la mínima cantidad de reglas que solucione los problemas del juego. O sea, el chiste es encontrar las reglas más ingeniosas que contengan a las demás, para reducir su número y su complejidad.

Con esas nuevas reglas, los jugadores vuelven a su trabajo de encontrar incoherencias y situaciones sin solución en el juego, y el inventor a recopilarlas y encontrar soluciones. Así, después de varias veces de lo mismo, se llega a la conclusión de que esas reglas son las adecuadas para jugar el nuevo juego y están listas para imprimirse en la cajita o en el instructivo (que, además, es increíblemente pequeño si tomamos en cuenta todo el trabajo por el que tuvo que pasar). Así, las reglas determinan el juego de tal modo que todo lo que se vale en el juego se deduce de las reglas y, también, todo lo que se deduce de las reglas se vale en el juego. Quizás estas dos afirmaciones parezcan iguales, pero es importante darse cuenta que no lo son: puede pasar que una de las dos se cumpla sin que se cumpla la otra. Por eso, para tener un buen juego basta con que todo lo que se deduzca de sus reglas se valga; pero un excelente juego es aquél en el que todo lo que valga se deduzca de sus reglas, y esto último no siempre sucede.

Pues con la teoría de conjuntos pasó (y pasa) algo parecido. Claro que hay diferencias importantes en esta analogía: por ejemplo, no hay un inventor *y* jugadores, sino que son los mismos. Las reglas se tardaron muchísimo en aparecer "claras" y, la verdad, aún no hay un acuerdo entre todos los matemáticos sobre si algunas reglas deben ser de un modo o de otro. Es más, las reglas ni siquiera se llaman reglas, sino axiomas.[17] De todas formas, la analogía es bastante cercana y útil para entender cómo funciona la teoría de conjuntos.

En este caso, las reglas (o axiomas) fueron necesarias para señalar con precisión qué sí es un conjunto y qué no. A simple vista puede parecer muy sencillo, pero ¿qué es en realidad un conjunto? Cantor decía que "un conjunto es cualquier colección, considerada como un todo, de objetos definidos y separados en nuestra intuición o en nuestro pensamiento", lo cual no aclara

[17] Un axioma, tradicionalmente, es una verdad evidente, que no necesita demostración. Sin embargo, la concepción moderna es un poco distinta: un axioma es una afirmación que se *supone* como cierta, o, en otras palabras, una "regla del juego".

demasiadas cosas, porque, a fin de cuentas, la definición de conjunto dependía de la intuición y del pensamiento de cada uno, y eso no siempre es la mejor idea; además, claro, que usa la palabra "colección" y quizás haría falta precisar su significado.

Por ejemplo, para Bertrand Russell, un conjunto era la colección de objetos que cumplían con alguna propiedad. Esta definición, aunque parezca bastante clara y sencilla, lleva a paradojas:

Imaginemos a todos los conjuntos. ¿Ya? Ahora separémoslos en dos: los que se pertenecen a sí mismos y los que no se pertenecen a sí mismos; es decir, hagamos dos conjuntos diferentes A y B: en A ponemos a todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, como por ejemplo $X = \{1,4,6,9\}$. Como $X \notin X$, entonces $X \in A$. En B, el segundo de los conjuntos, ponemos a todos los conjuntos que sí se pertenecen a sí mismos, como por ejemplo $Y = \{X, Y, D, A\}$. Como $Y \in Y$, entonces $Y \in B$. Y, así, cualquier conjunto está en A o está en B.

Consideremos al conjunto A, o sea, el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos: $A = \{X \text{ conjunto} \mid X \notin X\}$ y ahora nos preguntamos ¿$A \in A$?

Si $A \in A$, por la propiedad que define a A, entonces $A \notin A$, pero, por otro lado, si $A \notin A$, entonces A cumple con la propiedad que lo define y, entonces, $A \in A$. Tomando en cuenta ambas conclusiones, tenemos que $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$, que es una contradicción que nos indica que A no puede existir. (COHEN y HERSH. *Teoría de conjuntos no cantoriana*, p.239)

Esto mismo se puede ver olvidándonos un poco del conjunto A y pensando en cosas más comunes, como por ejemplo en los catálogos: Según cuentan por ahí, a principios de este siglo había un bibliotecólogo muy famoso por su gusto por crear catálogos. Tenía catálogos de todos los libros y de muy variados temas: *Catálogo de los libros cuyos títulos comienzan con F, Catálogo de los libros que miden 20 cm. de altura, Catálogo de los libros que tienen 1235 páginas, Catálogo de todos los catálogos,* por decir sólo algunos. Se supone que su casa era una biblioteca gigante que estaba llena sólo de esos catálogos. Por desgracia, nunca podremos saber si la historia es cierta, pues el bibliotecólogo se volvió loco cuando quiso escribir el *Catálogo de los catálogos que no se catalogan a sí mismos* y quemó su casa con todo lo que había dentro.

¿Que por qué se volvió loco? Pues porque nunca pudo decidir si su catálogo debía o no incluirse (o catalogarse) a sí mismo: si no se incluía, entonces tenía que incluirse para que el catálogo estuviera completo, pero al incluirse dejaba de cumplir con la única condición que debía cumplir para ser incluido, es decir, que no estuviera incluido.

Y, bueno, volviendo a los conjuntos, lo que había planteado Russell era un verdadero problema, porque todo lo que él había "construido" a partir de los conjuntos empezaba a tambalearse, porque ya no sabía lo que era un conjunto o qué clase de paradojas podrían causar.

Un ejemplo de las consecuencias de esto es el caso de Gottlob Frege, quien en 1902 estaba por publicar un trabajo en el que reconstruía la aritmética tomando como fundamento la teoría de conjuntos *intuitiva*, que era la de Cantor (pero con las ideas de Russell), y, al recibir una carta de Russell en la que le planteaba la paradoja, tuvo que añadir una posdata a su trabajo: *Un científico apenas puede encontrarse con algo más indeseable que el ver cómo el fundamento de su obra se desploma precisamente cuando la obra está acabada. Yo he sido puesto en esta situación por una carta del señor Bertrand Russell cuando la obra estaba ya a punto de salir de la imprenta.* (COHEN y HERSH. *Teoría de conjuntos no cantoriana*, p.239) Así, la teoría de conjuntos se topaba de frente con su primer gran problema: ¿qué es un conjunto? Y fue ahí que empezó a necesitarse la invención de las reglas, que además estarían encaminadas a que la teoría de conjuntos que Cantor había inventado siguiera teniendo sentido.

Lo que hicieron fue un cambio de estrategia: en vez de preguntarse "¿qué es un conjunto?", se preguntaron "¿cómo se construyen conjuntos?".

Lo primero que se necesitaba era que de verdad existieran los conjuntos, que por lo menos pudiera construirse uno, aunque fuera muy sencillo, así que eso era lo que tenía que decir la primera regla.

Axioma del conjunto vacío: La colección que no tiene objetos es un conjunto, el conjunto vacío (se denota de esta manera: $\emptyset$).

Pero es obvio que sólo con el conjunto vacío no iban a solucionar gran cosa; necesitaban reglas para construir otros conjuntos a partir del conjunto vacío, que era el único conjunto.

Axioma del par: Si X e Y son conjuntos, entonces el par $\{X, Y\}$ también es un conjunto.

Pero como sólo tenían al $\emptyset$, entonces, $X = \emptyset$ e $Y = \emptyset$, así que $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$ también es un conjunto. Y, con esto, podían construir, también, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ si tomaban $X = \emptyset$ e $Y = \{\emptyset\}$.

Pero si $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un conjunto ¿será cierto que $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ es un conjunto? Pues sí, si $X = \{\emptyset\}$ e $Y = \emptyset$ tendríamos, por el axioma del par, que $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ es un conjunto. La cosa es que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ se parecen muchísimo y casi podríamos decir que son iguales, sólo que con el orden cambiado. ¿Y sólo por estar en desorden son diferentes? Si dijimos quién era X y quién Y por puro antojo ¿eso hace que cambien los conjuntos? Como vemos, surgía otro problema y se necesitaban más reglas.

Axioma de extensionalidad: Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Perfecto, eso hace que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ porque tienen los mismos elementos, y el orden ya no importaba; además, con estas reglas ya se podían construir muchos conjuntos más: $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$, etc.

Este axioma es relevante, pues lo que dice es que lo único verdaderamente importante de los conjuntos son sus elementos; es decir, no importa el orden en el que estén, si están en una bolsa o en una caja, si están escritos con letra bonita o fea, sino sólo que tengan los mismos elementos.

Pero aún tenían un grave problema: con esas reglas no se pueden construir los números naturales, es decir, los conjuntos del *Catálogo*, así que, como es de suponerse, inventaron más reglas.

Ya tenían $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ y $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, o sea, el 0, 1 y 2, pero para construir el $3=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ no bastaban los axiomas anteriores, pero casi, porque se podía construir este conjunto: $E=\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$, que se construye de la siguiente manera:

Usando el axioma del vacío, tenemos al conjunto $\emptyset$, al que llamaremos A; usando el axioma del par para el conjunto A, tenemos $\{\emptyset\}$, y a este conjunto lo llamamos B; otra vez usando el axioma del par, pero ahora con A y B, obtenemos $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, y lo llamamos C; una vez más con el axioma del par para A y C, tenemos $\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, al que llamaremos D, y, una última vez, con el axioma del par para C y D, obtenemos el conjunto que queríamos, $\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}=E$.

Ahora, comparemos los conjuntos 3 y E:

$$\begin{aligned} 3&=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\\ E&=\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}\end{aligned}$$

Si observamos muy detenidamente, podemos ver que los elementos del 3 son ni más ni menos que los elementos de los elementos de E, es decir: E tiene dos elementos: $C=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ y $D=\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$. A su vez, C tiene dos elementos: $A=\emptyset$ y $B=\{\emptyset\}$; como D, que también tiene dos elementos: $A=\emptyset$ y $C=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. Ahora, si *juntáramos* los elementos de C y D en una colección, obtendríamos $F=\{A,B,C\}$ y, entonces,

$$F=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}=3$$

Y lo único que nos faltaría es que F también fuera un conjunto, así que de ahí la siguiente regla que se necesitaba:

Axioma del conjunto unión: Si X es un conjunto de conjuntos, entonces la colección de los elementos de los elementos de X también es un conjunto (Se denota de la siguiente manera: $\cup X$)[18].

Con este axioma ya podían construirse todos los números naturales de la misma forma que se construyó el 3, pues $3=\cup E$, y se solucionaba el problema del *Catálogo*. Sólo era cuestión de construir el conjunto "E" que se necesitaba en cada caso y luego aplicarle el axioma del conjunto unión. Claro que construir los números naturales de esta manera era un poco complicado, porque se tenían que hacer muchas operaciones con los conjuntos, así que buscaron un método más fácil y general:

Si se tiene el número natural n, entonces $n+1$ se construye de la siguiente manera:

[18]Para entender mejor este axioma, imaginemos un conjunto A, que será un conjunto de bolsitas de cacahuates japoneses. Al construir el conjunto $\cup A$, lo que hacemos es abrir las bolsitas y vaciar los cacahuates, y el conjunto $\cup A$ será el conjunto de todos los cacahuates que venían en las bolsitas; es decir, el conjunto de los elementos (cacahuates) de los elementos (bolsitas de cacahuates)del conjunto A.

Con el axioma del par para $X = n$ e $Y = n$, obtenemos $\{n\}$. Otra vez con el axioma del par, ahora para $X = n$ e $Y = \{n\}$, obtenemos $\{n, \{n\}\}$. Por último, con axioma del conjunto unión, tenemos $\cup\{n, \{n\}\}$, y ése será $n + 1$. Pero seguro queda más claro con un ejemplo:

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, así que, con el axioma del par para $X = 2$ e $Y = 2$, obtenemos $\{2\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Otra vez con el axioma del par, pero ahora para $X = 2$ e $Y = \{2\}$, obtenemos $\{2, \{2\}\}$. Ahora, con el axioma del conjunto unión para $\{2, \{2\}\}$, obtenemos

$$\cup\{2, \{2\}\} = \cup\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3.$$

Y lo mismo se puede hacer para cualquier número natural n, pues $n = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$ y $\cup\{n, \{n\}\} = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1), n\} = n + 1$.

Sin embargo, había más problemas: Cantor obtuvo resultados, muy importantes para las matemáticas, usando su propia idea de *conjunto*, así que era necesario adecuar esos resultados a las nuevas reglas que se estaban creando.

Uno de ellos es el Teorema de Cantor, que dice que si A es un conjunto y $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A (el conjunto potencia de A), entonces $|A| < |P(A)|$. El problema, por supuesto, es que ninguna de las reglas que tenían podía garantizar que, en efecto, si A es un conjunto, entonces $P(A)$ también es un conjunto.

Axioma del conjunto potencia[19]: Si X es un conjunto, entonces la colección de todos los subconjuntos de X también es un conjunto, el conjunto potencia de X (Se denota de esta manera: $P(X)$).

Este axioma no sólo recuperó el resultado de Cantor, sino que, además, sirvió para construir conjuntos muy grandes a partir de otros no tan grandes, pues resulta que si un conjunto A tiene k elementos, el conjunto $P(A)$ tendrá 2^k elementos, y siempre pasa que $k < 2^k$.

Pero tomando en cuenta eso, se preguntaron si podían construirse conjuntos más pequeños a partir de otros más grandes, o, en otras palabras, si un subconjunto de cualquier conjunto era, a su vez, un conjunto.

Axioma de separación: Si X es un conjunto y p una propiedad, entonces la colección de los elementos de X que cumplen la propiedad p es un conjunto.

Y así, los subconjuntos de cualquier conjunto, descritos con una propiedad, eran conjuntos y se podían construir conjuntos pequeños a partir de conjuntos grandes. Sin embargo, quizás no sea ésta la conclusión más importante que se saca del axioma de separación, sino que se retoma la definición intuitiva que había propuesto Bertrand Russell, es decir: *un conjunto es una colección de objetos que cumplen una propiedad* , sólo que, además de cumplir con la propiedad, los "objetos" deberían ser, previamente, elementos de otro conjunto.

Esos axiomas bastaban para poder *jugar* con la teoría de conjuntos y obtener buenos resultados, aunque sólo de conjuntos finitos, pues ningún

[19]También se conoce como **Axioma del conjunto de las partes de X**.

axioma (ni todos juntos), servía para construir un conjunto infinito. Eso, además de convertir la teoría de conjuntos en una teoría no tan interesante, causaba problemas: por ejemplo, se podían construir todos los conjuntos del *Catálogo*, pero no el *Catálogo* completo. Una vez más, se hacía evidente la falta de reglas.

Axioma del infinito: Existe un conjunto infinito, el conjunto de los números naturales.

Con esto, el *Catálogo* quedaba inventado y se podían construir muchos de los conjuntos infinitos, es decir, muchos de los conjuntos contenidos en el *Catálogo II*, pues con el axioma del infinito y el resto de los axiomas bastaba para hacerlo. Sin embargo, todavía no se podían construir los infinitos en orden; o sea que ya se tenía $\aleph_0$, pero con los axiomas que se tenían, no se podía garantizar la construcción de $\aleph_1$, que es el cardinal que le sigue a $\aleph_0$; es decir, el mínimo de los cardinales mayores que $\aleph_0$. Para eso se necesitaba un último axioma.

Axioma de reemplazo: Si X es un conjunto y se establece una función $f : X \to Y$, entonces Y, que es la imagen de la función, es un conjunto.

Ahora sí se sabía qué era un conjunto y qué no era un conjunto: los conjuntos son los objetos descritos por los axiomas.

En realidad, no todos los axiomas son necesarios. Con el axioma de extensionalidad, el axioma del conjunto unión, el axioma del conjunto potencia, el axioma del infinito y el axioma de reemplazo se pueden deducir el axioma del par, el axioma del conjunto vacío y el axioma de separación, pero es más fácil trabajar con todos los axiomas, y, de hecho, es lo que comúnmente se hace.

A pesar de estos axiomas, que hacían que la teoría funcionara bastante bien, todavía no bastaban para todo. Por ejemplo, no había acuerdo en que si dado cualquier conjunto de conjuntos no vacíos se podía elegir un elemento de cada conjunto para formar otro conjunto nuevo.

La verdad no parece que eso tenga ninguna dificultad, al menos no con conjuntos *chicos* o con conjuntos en los que sea fácil describir la elección que debe hacerse, pero no siempre resulta posible dar una regla para elegir un elemento de cada conjunto de un conjunto de conjuntos no vacíos (empezando porque parece trabalenguas).

Con los axiomas que hasta ahora he mencionado, no era posible asegurar que podría hacerse esa elección describiéndola de algún modo, así que una vez más hacía falta una *regla del juego*.

Axioma de elección: Si A es un conjunto de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos (es decir, que ningún elemento esté en dos conjuntos diferentes), entonces existe otro conjunto B tal que B tiene uno y sólo un elemento de cada elemento de A.[20]

[20]Volviendo a las bolsitas de cacahuates japoneses: Si A es un conjunto de k bolsitas de cacahuates (donde k es culquier número del *Catálogo* o del *Catálogo II*, es decir, un número finito o transfinito), el axioma de elección dice que podemos construir un conjunto

En otras palabras, si tenemos un conjunto de conjuntos no vacíos y ajenos entre sí, podemos elegir un elemento de cada conjunto y formar otro conjunto con los elementos elegidos.

Suena bien ¿no? Pero no fue tan sencillo; hubo grandes discusiones sobre si el axioma de elección era en efecto un axioma válido o no, pues, a diferencia de los otros axiomas, éste propone la existencia de un conjunto sin decir cómo construirlo, ni cómo definirlo ni cómo es. La discusión era en un tono más filosófico que matemático, pues era la primera vez que se proponía, en matemáticas, la existencia de algo para lo cual no había unas "instrucciones para construir".

Sin embargo, dejando de lado el debate filosófico, el axioma de elección ayudaba a entender lo que se estaba haciendo (una *elección*) al resolver muchísimos problemas de las matemáticas, y no sólo de la teoría de conjuntos, pues puede *traducirse* de manera que sea útil a ramas de la matemática como el análisis o la topología, por ejemplo.

Hay más de diez versiones muy distinas del axioma de elección, pero aquí voy a dar como ejemplo sólo una de ellas (en matemáticas, estas "versiones" se llaman "equivalencias", y eso quiere decir que, dentro de la teoría, significan lo mismo aunque parezcan muy diferentes):

Teorema del buen orden: Para cualquier conjunto existe un buen orden.

Sí, ya sé que no dice demasiado, pero en realidad es un resultado muy impresionante: lo que quiere decir es que para cualquier conjunto existe una buena ordenación de tal forma que después de cada elemento que no sea *último*, exista el elemento que sigue, es decir "el siguiente". Y no hace falta ir muy lejos para encontrar un conjunto para el que, sin este teorema, no podamos saber que tiene un buen orden de esa manera: los números reales. Así es, si tenemos un número real, no sabemos cuál es el inmediato siguiente, pues no lo hay, ya que entre dos números reales siempre hay otro número real. El teorema afirma que existe *otro* orden de los reales de tal manera que queden acomodados de uno en uno. Esto quiere decir que cualquier conjunto se podría acomodar de tal forma que se puedan "contar" sus elementos, aunque sean necesarios los números transfinitos para dicha tarea.

Por supuesto, una vez más, el gran problema es que el teorema no dice cómo acomodar los elementos de un conjunto en un buen orden, sino que sólo afirma que tal buen orden existe. De vuelta al problema filosófico de la existencia de algo sin las instrucciones para construirlo.

¿Y un problema filosófico iba a evitar que el axioma de elección fuera aceptado por los matemáticos?

En realidad no era sólo el problema filosófico lo que causaba desacuerdos en la aceptación del axioma, sino que su uso llevaba a cosas como la *paradoja de Banach-Tarski*, que más o menos dice que se puede romper una esfera y

---

B que tendrá exactamente k cacahuates japoneses, uno de cada una de las bolsas del conjunto A.

reconstruirla (con los mismos pedazos) de tal manera que el resultado sea una esfera del doble de tamaño, y, por supuesto, eso no es algo que veamos todos los días...

Así, la disyuntiva era: o suponer que el axioma de elección es verdadero o suponer que su negación es verdadera. Pero suponer que la negación es verdadera no ayuda a los matemáticos a resolver nuevos problemas, ni a entender cómo se resuelven, y, en cambio, suponer que el axioma de elección es verdadero resuelve muchísimos problemas. Ése fue el principal argumento de los matemáticos para aceptar dicho axioma como parte de los axiomas de la teoría de conjuntos, además de que para muchos de ellos es intuitivamente cierto lo que afirma.

De hecho, actualmente la gran mayoría de los matemáticos supone, o cree, que el axioma de elección es verdadero, así que, si ustedes creen que las matemáticas son una representación del mundo real, no se asusten si un día, pegando una esfera que se rompió, obtienen una esfera del doble del tamaño de la original.

Otros axiomas que han causado un poco de controversia entre los matemáticos que se dedican a la teoría de conjuntos o a los fundamentos de las matemáticas son el axioma de Regularidad y el axioma de Antifundación. Aunque esta controversia no es tan importante como la que giraba alrededor del axioma de elección, es interesante conocerla.

Hay unos conjuntos muy extraños: los conjuntos no bien fundados; un ejemplo de ellos son los conjuntos que se pertenecen a sí mismos, como podría ser éste:

$A = \{\{\{\{\{\cdots\}\}\}\}\}$, donde los puntos suspensivos indican que las llaves de conjunto siguen indefinidamente.

Es decir, si al conjunto $A = \{\{\{\{\{\cdots\}\}\}\}\}$ le "quitamos" las llaves exteriores, lo que obtenemos es, otra vez, el conjunto $A = \{\{\{\{\cdots\}\}\}\}$, pues lo que tiene es una cadena infinita de conjuntos A.

Así, $\{\{\{\{\cdots\}\}\}\} \in \{\{\{\{\{\cdots\}\}\}\}\}$, es decir, $A \in A$.

El axioma de regularidad prohibe la existencia de dichos conjuntos raros, mientras el axioma de anti-fundación la permite.

A favor del axioma de regularidad: es más cómodo trabajar sólo con los conjuntos bien fundados (o sea, con los que no se pertenecen a sí mismos).

A favor del axioma de anti-fundación: la teoría es más amplia si abarca todos los conjuntos posibles: los bien fundados y los no bien fundados. O, como dijo Cantor: *La esencia de las matemáticas radica en su libertad.*

Actualmente hay matemáticos trabajando con ambos axiomas, y aunque el axioma de regularidad (también conocido como axioma de Buena Fundación) es el que *oficialmente* está en los axiomas de la teoría de conjuntos, la tendencia de las matemáticas siempre es hacia lo más general, así que es probable que sea el axioma de anti-fundación el que acabe por imponerse.

Otra afirmación, que nunca se ha considerado axioma, pero que ha causado controversia entre los matemáticos, es la de la Hipótesis del Continuo, que ya habíamos visto en el capítulo anterior. Otra vez, como en el caso del axioma de elección, la disyuntiva es sobre cuál de las versiones tomar como verdadera: la hipótesis del continuo (es decir, $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$), o su negación (es decir, $\aleph_1 \neq |\mathbb{R}|$). Aunque, a diferencia del axioma de Elección, ninguna de las dos afirmaciones es considerada, en la actualidad, como axioma.

Suponer como cierta la hipótesis del continuo simplifica la teoría y la hace más manejable, pero, una vez más, una simplificación de la teoría es un precio demasiado elevado para los problemas que se pueden resolver con dicha hipótesis. De hecho, se ha demostrado que casi cualquier afirmación que es no-contradictoria suponiendo la hipótesis del continuo como verdadera, también lo es sin suponerla.

Por otro lado, la negación de la hipótesis del continuo abre las posibilidades de la teoría, aunque , en cierta forma, la haga más complicada.

También vale la pena considerar un aspecto distinto sobre esta disyuntiva: intuitivamente, los números reales son muchísimos más que los naturales, lo cual hace difícil aceptar que no haya ningún otro número transfinito entre ambos.

Quizás vale la pena aclarar que "intuitivamente" quiere decir, en este caso, lo que se puede intuir de los trabajos de algunos matemáticos que han trabajado sobre el tema. Por ejemplo, se hizo la construcción de $\aleph_1$ mediante el axioma de reemplazo y la construccíón de los números reales con el axioma del conjunto Potencia ($2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$), y entonces Cohen argumentó que con el axioma de Reemplazo se construyen los conjuntos de una manera más "limitada" que con el axioma del conjunto Potencia, y que tal vez eso sería una buena indicación para optar por la negación de la Hipótesis del Continuo.

De todas formas, por más acercamientos intuitivos o ventajas y desventajas de una u otra de las opciones, ambas son compatibles con el resto de los axiomas y, por lo tanto, es importante que al trabajar con una u otra se diga explícitamente cuál se está utilizando.

Sin embargo, también es importante tener claro que la hipótesis del continuo no es la única afirmación de este estilo, es decir, que tanto ella como su negación sean compatibles con la teoría, sino que hay muchísimas más. De hecho, uno de los teoremas más importantes de la lógica matemática, el teorema de Gödel (conocido con ese nombre ya que fue Kurt Gödel, un lógico matemático checoslovaco, quien lo enunció en 1931), dice que siempre van a existir afirmaciones de este estilo.

Y por último una pregunta: Si el axioma de Elección es equivalente al teorema del Buen Orden y suponemos que el axioma de Elección es verdadero ¿podría encontrarse el $\aleph$ correspondiente a $|\mathbb{R}|$ si encontramos el buen orden de los números reales y solucionarse así el problema del continuo?

Pues no, ya que si suponemos como cierto el axioma de Elección y, como consecuencia, como cierto, también, el teorema del Buen Orden, lo único que podemos afirmar es que existe un buen orden para los números reales. Claro, eso no sirve de mucho, pues no sabemos cómo es ese buen orden y, por lo tanto, tampoco sabemos qué $\aleph$ del Catálogo II le correspondería a $|\mathbb{R}|$, aunque sí garantizamos que hay alguno que le corresponde.

En fin, las cosas que uno puede encontrar en el infinito son demasiadas como para entenderlas todas, y no digamos ya para contarlas, así que hasta aquí les cuento.

Conclusiones.

Creemos que el trabajo realizado, o sea, este texto, es un buen esfuerzo para divulgar las matemáticas, y en particular la visión sobre el infinito que ofrece la Teoría de Conjuntos.

Es importante decir que "divulgar" no quiere decir escribir lo que ya se sabe con unas cuantas *mentiras piadosas* que ayuden a entender conceptos, pues éstos dejaron de ser precisos. No, divulgar quiere decir, más bien, recrear el conocimiento y presentarlo de una manera accesible al público sin perder la veracidad ni la validez de lo que se está diciendo. Así, considerando que este trabajo fue escrito con esas suposiciones en mente, se buscó cumplirlas en cada una de las partes.

También es importante hacer notar que la intención del libro no era ser exhaustivo ni en el tema del infinito ni en los resultados que la Teoría de Conjuntos ha obtenido en el trabajo con dicho tema, sino simplemente presentar de una manera clara y accesible algunos de los resultados que nos parecen más interesantes.

Bibliografía

[1] BOLZANO, Bernard. *Las paradojas del infinito* , Servicios Editorales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1991, pp. 161.

[2] GARDNER, Martin. *Carnaval Matemático* ,Alianza Editorial, Madrid, 1980, pp.-299.

[3] GALILEI, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* ,Editorial Nacional, Madrid, 1981, pp. 447.

[4] BRUNO, Giordano. *Del infinito: el universo y los mundos*, Alianza Editorial, Madrid, 1993, pp. 243.

[5] AMOR Montaño, José Alfredo. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1997, pp. 117.

[6] MAOR, Eli. *To infinity and beyond: A cultural history of the infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1991, pp. 284.

[7] VILENKIN, N. Ya. *In search of infinity*, Birkhäuser, Boston, 1995, pp. 145.

[8] DAUBEN, Joseph, Warren. *Georg Cantor: His matehmatics and philosophy of the infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1990, pp 404.

[9] MOSCHOVAKIS, Yannis N. *Notes on set theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1994, pp. 272.

[10] ZELLINI, Paolo. *Breve historia del infinito*, Siruela, Madrid, 1991, pp. 239.

[11] DAVIS, Philip J. y HERSH, Reuben. *Experiencia matemática*, Editorial Labor, Barcelona, 1988, pp. 314.

[12] STEWART, Ian. *De aquí al infinito*, Crítica, Barcelona, 1998, pp. 303.

[13] KASNER, E. y NEWMAN, J. *Matemáticas e imaginación*, Editorial Continental, México, 1982, pp. 303.

[14] COHEN, Paul J. y HERSH, Reuben. "Teoría de conjuntos no cantoriana" en *Matemáticas en el mundo moderno*, Editorial Blume, Rosario, 1974, pp. 453.

[15] GUEDJ, Denis. *El imperio de las cifras y los números*, Ediciones B, Barcelona, 1998, pp. 176.

[16] BORGES, Jorge Luis. *Antología Poética 1923/1977*, Alianza Editorial, Madrid, 1999, pp. 160.

[17] PEIRCE, Charles Sanders. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard University Press, 1933, p 578-580. (citado en [**2**]))

[18] ARQUÍMEDES. *El contador de arena*, introducción. (citado en [**13**]))

[19] DEDEKIND, Richard. *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Alianza Editorial, Madrid, 1998, pp. 194.

[20] ARISTÓTELES. *Física*, Editorial Gredos, Madrid, 1995, pp. 506.

[21] AMOR Montaño, José Alfredo. "La Teoría de Conjuntos en el Siglo XX" en *Miscelánea Matemática No.31, número especial 2000*, S.M.M., México, 2000, pp. 1-27.

[22] FUENTES de la Peña, Adrián. *Convergencia dorada, un estudio del número de oro y la sucesión de Fibonacci*, Tesis UNAM, 1991.

[23] Halmos, Paul Richard. *Teoría intuitiva de los conjuntos*, Editorial Continental, México, 1966, pp. 151.